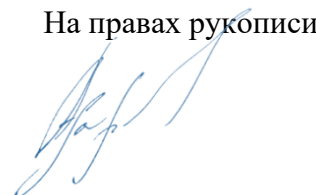


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Азаров Артур Александрович

**ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГО-АКУСТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ  
ПРИ УДАРНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ СТЕРЖНЯ**

1.1.8. – «Механика деформируемого твердого тела»

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научные руководители

д.ф.-м.н., проф. Попов А.Л.
-----------------------------

к.ф.-м.н., Ченцов А.В.

Москва – 2025

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Теоретические модели возбуждаемых ударом колебаний стержней .</b>	<b>24</b>
1.1. Модели продольного соударения упругих тел .....	24
1.2. Послеударные продольные колебания стержня .....	27
1.3. Послеударные поперечные колебания стержней .....	32
<b>Глава 2. Экспериментально-теоретический анализ начальной стадии продольных колебаний стержня после ударного воздействия .....</b>	<b>38</b>
2.1. Время соударения .....	38
2.2. Зависимость контактной силы от времени.....	40
2.3. Особенности спектра продольных колебаний и звукоизлучения стержней.	42
2.3.1. Определение спектра амплитуд и скоростей перемещений входного и выходного торцов стержня .....	42
2.3.2. Влияние масс соударяющейся пары и изменяемости звукового давления на распределение амплитуд спектра .....	45
2.4. Экспериментальная верификация теоретической модели послеударных колебаний.....	48
<b>Глава 3. Метод частотной оценки осевой нагрузки и реальных граничных условий в стержнях .....</b>	<b>52</b>
3.1. Модель поперечных колебаний стержня Тимошенко с учетом продольной силы и граничных условий упругой заделки .....	53
3.2. Построение алгоритма поиска решений .....	58
3.3. Экспериментальная верификация теоретической модели.....	59
3.4. Эффект разнонаправленного изменения собственных частот при растяжении стержня.....	66
3.5. Теоретический и экспериментальный анализ спектра частот балки Тимошенко в окрестности критической частоты .....	70
<b>Глава 4. Оптико-акустическая диагностика дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций и степени их заживления .....</b>	<b>75</b>
4.1. Влияние граничных условий на спектр колебаний стержневых и пластинчатых элементов конструкций .....	75
4.2. Диагностика несовершенств граничных условий по спектру акустического сигнала.....	76

4.3. Спекл-интерферометрия изгиба стержней и пластин в условиях жёсткой и ослабленной заделки краёв .....	76
4.3.1 Оптико-акустический стенд для диагностики несовершенств закрепления тонкостенных элементов конструкций .....	77
4.3.2 Оптико-акустическая диагностика дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций и степени их залечивания на примере эллиптической пластины .....	80
4.3.3 Оптико-акустическая диагностика дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций и степени их залечивания на примере кардиоидной пластины .....	90
<b>Заключение .....</b>	<b>95</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>98</b>
<b>Приложение А .....</b>	<b>110</b>
<b>Приложение Б .....</b>	<b>113</b>

## Введение

Упругие колебания и акустические волны, излучаемые упругими телами при ударных возбуждениях, являются важным объектом исследования в области механики сплошных сред, поскольку имеют широкий спектр применений:

- Техническая диагностика: обнаружение дефектов и оценка состояния материалов и конструкций;
- Сейсмология: изучение упругих колебаний позволяет анализировать сейсмические волны и предсказывать поведение грунтов и горных пород;
- Аэродинамика: акустические исследования используются для оптимизации формы и проектирования аэродинамических конструкций;
- Борьба с шумом.

Теория продольного удара тесно связана с большим кругом технических задач, куда входят: усовершенствование ударных технологий, в том числе, - оценка влияния формы, движения ударников на процесс их взаимодействия с преградой, создание ударных стендов, позволяющих испытывать изделия, амортизация удара, ударное бурение в горном деле и др.

Теоретическая база изучения продольных колебаний стержня весьма обширна, о чем свидетельствуют классические монографии Рэлея [1], Лява [2] и Тимошенко [3]. Наиболее распространенной и простой моделью их описания является волновое уравнение. При использовании этой модели предполагается, что поперечные размеры стержня незначительны по сравнению с его длиной. Это позволяет пренебречь влиянием поперечных деформаций, сопровождающих процесс расширения-сжатия при продольных колебаниях стержня, при определении его продольных смещений.

Задача соударения тел также имеет богатую историю и большое практическое значение. Основы теории удара по стержням заложили Сен-Венан [4], Герц [5], Сирс [6]. Модель продольного удара Сен-Венана предполагает волновое распространение возмущений и отсутствие местных деформаций, что может быть

обеспечено для идеально плоских торцов соударяемых тел. Модель контактного взаимодействия Герца учитывает местную контактную деформацию соударяемых сферических тел, но не учитывает волновое движение. Модель Сирса объединяет оба подхода, учитывая местную деформацию и деформацию расширения-сжатия в продольной волне. Такая объединенная модель хорошо согласуется с экспериментами [7-9]. Современные направления работ, посвященных продольному удару, определяют время соударения, форму ударного импульса [10], различные эффекты, сопутствующие продольным колебаниям: поперечные колебания, возникающие в условиях параметрического резонанса [11], возможность потери устойчивости прямолинейной формы стержня [12], а также возможности диагностики дефектов в стержне [13-15]. Большое количество современных работ посвящены рассеянию звуковых волн стержнями [16-18]. Более подробно, в работе [19] сравниваются результаты трех подходов к решению задачи: теоретического, конечно-элементного и экспериментального. Теоретический подход учитывает как распространение продольных волн в стержне, так и локальное смятие по модели Герца. Этот подход приводит к дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом. Конечно-элементный подход рассматривает трехмерную динамическую задачу, в которой распространение волн и локальное смятие учитываются автоматически. Сравнение результатов этих двух подходов показало качественное и количественное соответствие в отношении закона изменения контактной силы и времени соударения. Для дальнейшего сближения теоретических и конечно-элементных результатов необходимо более подробно исследовать влияние краевого эффекта в зоне контакта, которое не учитывалось в теоретическом подходе. В экспериментальном подходе определялось только время соударения. Сравнение результатов теоретического и конечно-элементного подходов показало удовлетворительное соответствие. Ввиду относительно небольшой длины стержня, для расчета времени соударения была также применена приближенная двухступенная модель. В [19] была решена задача о возбуждении поперечных колебаний после отскока тела от стержня. При параметрическом резонансе движение характеризуется биениями,

при которых энергия продольных колебаний переходит в энергию поперечных колебаний и наоборот. Получена оценка максимально возможной амплитуды поперечных колебаний.

Наличие трещин, малых полостей, включений и других локализованных дефектов, зачастую, является причиной разрушений элементов конструкций; поэтому задача оперативного обнаружения и идентификации таких дефектов является весьма актуальной. К настоящему времени имеется значительное количество работ, посвященных проблемам идентификации дефектов по данным рассеяния упругих волн в материале конструкции. Так, в [14] предложен метод решения обратных задач определения дефектов стержней при продольных колебаниях. Основываясь на моделировании дефекта сечения как известной функции, по двум первым частотам приближенно определяются основные параметры дефекта - местоположение и объем.

Методу выявления множественных поперечных трещин и других локализованных дефектов в стержне по двум спектрам продольных колебаний, соответствующих условиям «свободный-свободный» и «неподвижный-свободный конец», посвящена работа [15]. Эксперименты проводились на стержне со свободными концами. Моделируемые повреждения представляли собой кольцевые канавки, симметрично расположенные относительно середины стержня. С помощью таких экспериментов были получены собственные частоты, соответствующие двум типам граничных условий для стержня половинной длины. Экспериментальные данные обрабатывались с использованием разработанного алгоритма. Результаты показали, что модель, на которой основан алгоритм, хорошо описывает продольные колебания стержня с локализованными повреждениями в достаточно широком диапазоне частот и позволяет достаточно точно реконструировать множественные повреждения.

Обнаружению дефектов массы и их влиянию на собственные частоты и формы колебаний упругих систем посвящена работа [13]. Показаны общие свойства дефектов различной физической природы: массы, упругости и поперечного

сечения. Введены понятия поврежденности и критерий, позволяющий проводить дефектоскопию методом неразрушающего контроля.

Динамика упругой балки, подвергшейся поперечному удару, широко изучалась в течение последнего столетия. Широко используемая модель для исследования удара балки представлена в работе Тимошенко [20], в которой балка рассмотрена по модели Эйлера-Бернулли, а контактное взаимодействие учитывалось с помощью модели Герца. Модель контактного взаимодействия, основанная на квазистатическом соударении упругих объектов, характеризуется тем, что время контакта сталкивающихся тел значительно превышает период первой формы колебаний каждого из них. Теория Герца применима не только к случаю столкновения шаров, но и к более общему случаю прямого центрального удара двух тел, когда области вокруг исходной точки контакта ограничены поверхностями второго порядка. Следует отметить, что при ударе по упругому телу, все три размера которого имеют один порядок, деформация происходит также, в основном, в малой окрестности точки удара. Данный эффект может быть описан в рамках уравнений динамической теории упругости в случае неограниченной упругой среды, которые «позволяют» деформациям локализоваться в окрестности точки приложения сосредоточенной силы.

Кристоферсон [21] изучал влияние деформации сдвига на балке, подвергшейся удару, используя теорию балки Тимошенко (ТБТ) и использовал преобразования Лапласа для получения динамического отклика системы. Арнольд [22] провел серию испытаний на удар по рельсе и показал хорошее соответствие теоретическим результатам, полученным с использованием модели удара Тимошенко. Анализ воздействия, предложенный Тимошенко, был распространен на тела различных форм, материалов, разных граничных условий при учете также нелинейных подходов [23-26]. Макмиллан и др. показали улучшение модели воздействия за счет учета затухания в основных уравнениях [27]. Сразу после удара деформация балки распространяется в виде волнового возмущения за пределы области контакта. Если скорость удара высока, материал может испытывать ударную нагрузку, которая создает разрыв давления на фронте ударной волны.

Россихин и Шитикова [28] изучали ударную нагрузку на тонкие пластины, балки и стержни. Для получения данных о волновом распространении в этих структурах использовался метод лучевых рядов. Этот метод подходит для решения задач распространения волн, в том числе с сильными разрывами.

В целом, трудно найти решения задач об ударе в замкнутой форме, поскольку сила контакта зависит от локальной деформации нелинейным образом. Часто для устранения нелинейности используются численные подходы. Подход, использованный Тимошенко и другими [29-31], был основан на методе конечных разностей и включал итерационные процессы, которые требуют значительных временных ресурсов. Эванс и соавторы [32] предложили более эффективный метод, который позволяет производить аналитическое вычисление интегралов во времени, участвующих в решении задачи, предполагая, что изменение контактной силы во времени является линейным за достаточно малый промежуток времени.

Классический метод нахождения собственных частот и соответствующих функций форм колебаний для теории балки Тимошенко можно найти во многих учебных пособиях и научных статьях [1]. Для анализа воздействия в решение должно быть включено большее количество форм. Гоенс [33] был первым, кто обнаружил наличие критической частоты, которая разделяет низкочастотную и высокочастотную части спектра балки Тимошенко. Трейлл-Нэш и Коллар [34], а также другие [35-40] предложили общие решения, охватывающие оба частотных диапазона. Хотя эти решения имеют аналитический вид, для высоких частот возникают численные проблемы из-за необходимости вычисления гиперболических функций больших аргументов. Бхаттачарджи и Чаттерджи [41] предположили, что добавление модального демпфирования могло бы ускорить сходимость и сократить количество требуемых форм. Были разработаны выражения для стабилизации численной оценки функций форм для различных граничных условий [42-44]. Гонсалвес [45] показал, что численная некорректность для высших мод обусловлена ошибками округления при вычислении некоторых уравнений с гиперболическими функциями и предложил численно устойчивое выражение, которое может обеспечить бесконечное число собственных значений для балки Эйлера-Бернулли. Хасауна и

Сегалман [46] применили этот метод к модели балки Тимошенко и представили результаты для наиболее часто используемых граничных условий.

Исследования поперечного воздействия на балки с использованием теоретических моделей включают в себя много аспектов. Ранние экспериментальные работы, в которых регистрировалось воздействие груза на балку для определения деформации, напряжения и контактной силы, показали разумное соответствие моделям [22, 25]. Было показано, что локальная максимальная контактная сила, обусловленная ударом, не зависит от граничных условий в длинных балках [21, 25]. Дополнительные удары, которые состоят из более чем одного контакта, прежде чем ударник и балка окончательно разделятся, наблюдались и обсуждались в [22, 47-49]. Бхаттачарджи и Чаттерджи [47] представили теоретическое исследование контактного взаимодействия и определили, что этим поведением управляет один параметр. Коэффициент восстановления при поперечном ударе о балку изучался в [41, 49], но без учета влияния отраженных от границ волн. Россихин и Шитикова [50] исследовали воздействие тонкого упругого стержня и упругой сферы на пластину, учитывая эффекты как падающих, так и отраженных волн, генерируемых при ударном взаимодействии, с использованием лучевого метода. Реакция на удар стержней с нелинейными характеристиками материалов, такими как полимерные волокна, изучалась в [51, 52].

В сочетании с экспериментами, модели соударения стержня, посвященные определению динамической реакции материала стержня [34, 53]. Эффекты материала и вязкого демпфирования были рассмотрены при оценке реакции на удар по тонким упругим элементам конструкции в работах Хантера [35, 54] где изучалось воздействие сферического ударника по методу Герца на вязкоупругое полупространство и аналитически оценивались продолжительность контакта и коэффициент восстановления. Филлипс и Калвит [55] использовали подход Хантера для изучения столкновения сферы с вязкоупругой пластиной. Ан и Стюарт [56] исследовали сохранение энергии вязкоупругой балки Тимошенко в условиях контакта Синьорини. Россихин и Шитикова [57] изучали реакцию вязкоупругих балок на удар,

используя теории Эйлера-Бернулли [57] и Тимошенко [58], а также - теорию Тимошенко с растянутой срединной линией [59].

Ряд работ, посвященных поперечному удару и послеударным поперечным колебаниям, направлены на согласование теоретических и экспериментальных частот, в том числе, - за критической частотой балки Тимошенко [61], определению прекращения взаимодействия [60]. Возникновение поперечных колебаний тонкого стержня при кратковременном продольном ударе рассмотрено в [62].

Различным аспектам решения нестационарных задач теории упругости, в частности особого класса контактных задач с подвижными границами, для тел и конструкций, в том числе создание математических моделей взаимодействия, теоретических и численных методов исследования динамики посвящены работы [63-65].

На сегодняшний день активно изучаются колебания связанных систем; соответствующие примеры можно найти в [66–68]. В механике, маятники Зоммерфельда представляют собой классический пример связанной системы. Серьёзное внимание уделяется проблемам существования в механических системах одночастотных колебаний, их устойчивости, стабилизации и синхронизации колебаний подсистем [68].

Оценка усилий и жесткостей соединений имеет существенное значение при определении остаточного ресурса железобетонных конструкций мостов, предварительно напряженных арматурными стержнями и канатами, анкерного крепления кровли подземных горных выработок, стяжных стержней, обеспечивающих целостность конструкций исторических зданий, и в других конструкциях. В литературе описан ряд методов оценки осевой нагрузки и качества заделки стержней [69-86]. Они могут быть сгруппированы по статическому и динамическому признакам исходя из характера лежащих в их основе механических взаимосвязей и последующих измерений. Статические методы требуют измерения деформации под действием статической силы для оценки осевой нагрузки в стержне [71-74]. Один из них основан на определении усилия вытягивания анкера [71]. Этот метод применительно к горным выработкам является трудоемким и небезопасным для персонала.

Чаще проводятся испытания на изгиб под действием заданной поперечной силы [72, 73, 98]. С точки зрения эксплуатации, недостатками статических методов являются: необходимость подвешивать к стержневым элементам значительный вес, трудности измерения малых деформаций или перемещений с необходимой точностью [73] и, в целом, время и оказываемое влияние на работу конструкции. Динамические методы, с другой стороны, требуют идентификации вибрационных характеристик стержня, либо только по собственным частотам, либо по частотам вместе с соответствующими собственными формами. Наиболее распространенный, частотный метод основан на зависимости между напряжением в арматуре и частотой ее собственных поперечных колебаний, которые устанавливаются в натянутой арматуре через определенное время после выведения ее из состояния равновесия ударом или каким-либо другим воздействием. Качество заделки стержневых элементов оценивается также по уровню добротности послеударных затухающих колебаний [71]. Ввиду важности определения продольных усилий в арматуре, статические и динамические методы стандартизованы [74], выпущены приборы, реализующие эти методы.

В последнее время в литературе появляется все больше исследований, посвященных развитию динамических подходов к определению продольных усилий в стержневых стержнях не только по одной, но и по нескольким характерным собственным частотам [75-85]; некоторые из подходов требуют определения модальных форм [80-83]; для этого, в частности, используются дополнительные массы, сравнение с результатами МКЭ и оптимизация на основе генетических алгоритмов [75]. Актуальным вопросом является влияние граничных условий на концах стержней на динамические характеристики, в том числе, - на частоты свободных колебаний. В этом плане рассматриваются заделки не только в виде пружинных шарниров с неизвестными линейными и угловыми жесткостями [75-81], но и как Винклеровские основания с неизвестными коэффициентами постели [77, 78].

Большинство перечисленных исследований направлены на анализ измерений, проводимых на реальных объектах со стержневыми стержнями, длина которых существенно превышает размеры их поперечного сечения. Для описания изгиба и

поперечных колебаний таких стержней наиболее естественной является модель Эйлера-Бернулли.

Также одним из современных требований повышения надёжности и остаточного ресурса технических объектов является определение допустимых величин трещиноподобных дефектов, зон и уровней концентрации напряжений. При этом желательно, чтобы соответствующая диагностика выполнялась непосредственно в процессе эксплуатации технического объекта. В то же время, в связи с широким использованием разного рода покрытий визуальный контроль таких дефектов становится затруднительным, не говоря уже о контроле за изменением внутренней микроструктуры материалов, уровнями остаточного и накопленного в процессе эксплуатации НДС. Сами покрытия, в особенности, содержащие более одного слоя, могут иметь в процессе эксплуатации тенденции к расслоениям и отслоениям от подложки.

Аппаратура и методики оптико-механического исследования материалов и конструкций по отдельности широко используются при решении научных и прикладных задач. Например, электронная спекл-интерферометрическая методика оказалась наиболее оперативной методикой измерения остаточных напряжений [86, 87]. Ультразвуковая диагностика является общепризнанным методом определения дефектов в конструкциях [87]. Однако, собранные воедино, методы акустической спектроскопии и электронной спекл-интерферометрии позволяют более объективно и конкретно судить о наличии дефектов в материале детали не только по изменению спектрального состава её вибрационного и звукового полей, но и по искажению спекл-интерферограммы перемещений поверхности детали, снимаемой в режиме реального времени одновременно с акустической информацией. Краткое рассмотрение теории динамической оптической спекл-интерферометрии и ее использование для изучения в режиме реального времени макроскопических и микроскопических процессов в деформируемых средах приводится в [88]. Теоретическая часть показывает, что макроскопические поступательные движения, повороты и деформации объектов удобно исследовать по перемещению всего спеклового изображения, а также по сдвигу полос двух спекловых полей. Микроскопические

процессы наблюдаются по изменению структуры спекловой картины. В [88] приводятся примеры использования, разработанных автором, методов определения поворотов и деформаций при упругих и пластичных деформациях объектов, регистрации ультразвуковых волн и изучения особенностей образования трещин при многоцикловом усталостном разрушении материалов.

**Актуальность** темы диссертации состоит в разработке новых, более оперативных при меньших трудозатратах методов диагностики усилий и качества соединений в стержнях элементов креплений кровли шахт, мостов, сетчатых оболочек и других металлических конструкций по излучаемому акустическому полю послеударных колебаний, их теоретическом обосновании и экспериментальной верификации, а также в исследовании встречающихся, но малоизученных эффектов при колебаниях и звукоизлучении упругих тел. Практическая полезность данного исследования состоит в возможности существенного сокращения длины высвобождаемой части бетонной одежды преднапряжённой арматуры мостов и других строительных конструкций при проверке сохранения в них проектных значений продольных усилий без уменьшения точности получаемых результатов.

**Степень разработанности исследования.** Исследованиями в области соударения упругих тел занимались Бидерман В.Л., Пановко Я.Г., Товстик П.Е., Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Зегжда С.А. и др. В частности, динамика при продольном ударе телом по стержню рассматривалась в ряде работ Товстика П.Е., Беляева А.К., Морозова Н.Ф., в которых основное внимание было уделено определению времени соударения, контактной силы, максимальной амплитуде поперечных колебаний при параметрическом резонансе, динамической потери устойчивости. Обобщая их результаты, первая часть настоящей работы посвящена исследованию послеударных продольных колебаний стержня и особенностей распределения амплитудно-частотных зависимостей перемещений и акустического давления выходного конца стержня.

Исследованиями в области диагностики усилий и дефектов занимались Акуленко Л.Д., Нестеров Л.Д., Шифрин Е.И., Попов А.Л., Челюбеев Д.А., Козинцев

В.М., Устинов К.Б., Ахтямов А.М., Крутиков О.В., Гершуни И.Ш, Реста, Гентилини, Бриколи Бати и др. В их работах представлены методы идентификации различных дефектов и их влияние на собственные частоты в стержне, разработке численных алгоритмов. В последнее время в литературе также появляется все больше исследований, посвященных развитию динамических подходов к определению продольных усилий в стержнях; некоторые из подходов требуют определения модальных форм; для этого, в частности, используются дополнительные массы, сравнение с результатами МКЭ и оптимизация на основе генетических алгоритмов. Актуальным вопросом является влияние граничных условий на концах стержней на динамические характеристики, в том числе, - на частоты свободных колебаний. Таким образом, следующая часть настоящей работы стала продолжением работ по диагностике усилий и жёсткости соединений по более общей модели, направленной на сокращение свободной длины.

**Целями** диссертационной работы являются:

1. Исследование широкого круга эффектов, встречающихся при колебании и звукоизлучении упругих тел, до сих пор неизученных или малоизученных, таких как, - сдвиг с первой частоты амплитудного максимума акустического давления послеударных продольных колебаний стержня, колебания в окрестности критической частоты Тимошенко, влияния растягивающей силы и дефектов закрепления на собственные частоты послеударных поперечных колебаний стержней, в том числе на положение критической частоты Тимошенко, эффект «разбегания» собственных частот при растяжении стержня в области слабой нелинейности.

2. Разработка нового усовершенствованного частотного метода оценки растягивающей силы в стержневых элементах и коэффициентов узловых жесткостей по нескольким характерным собственным частотам при использовании стержневой модели Тимошенко пригодного для применения на практике.

Объектом исследования являются послеударные упругие колебания стержней.

Для достижения поставленных целей были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Разработка методики и стенда для экспериментального изучения особенностей распределения спектра послеударных продольных колебаний стержня. Определение времени соударения и зависимости контактной силы от времени из решения задачи о продольных колебаниях стержня при наличии трения, коэффициент которого определяется по совокупности многочастотных затухающих колебаний стержня после ударного воздействия. Определение и анализ амплитудно-частотных зависимостей перемещений и скоростей концов стержня, их связь с акустическим давлением, излучаемым торцами при разных соотношениях между массой ударника и стержня, а также - различных периодах изменчивости напряженно-деформированного состояния стержня.

2. Разработка усовершенствованной методики динамической оценки продольного усилия и коэффициентов угловой жёсткости заделки неидеально закреплённого стержня по спектру его изгибных колебаний путём сравнения экспериментально зарегистрированных частот колебаний с теоретическим спектром частот, сгенерированных на основе аналитической модели балки Тимошенко.

3. Разработка алгоритма и программы для ЭВМ оптимального поиска значений продольного усилия и жёсткости заделки стержня по спектру экспериментально зарегистрированных частот.

4. Проведение экспериментальных исследований на модельных образцах. Определение минимального количества регистрируемых собственных частот колебаний, необходимого для динамической оценки продольного усилия с приемлемой погрешностью.

5. Теоретическое и экспериментальное исследования возможности разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации.

6. Уточнение значений механических параметров балки, таких как скорость звука и коэффициент Пуассона, исходя из сопоставления спектров экспериментальных и теоретических частот продольных и поперечных колебаний балки со

специально подобранными параметрами, для которых критическая частота по ТБТ (Теория изгиба балок Тимошенко) находится внутри акустического спектра. Экспериментальная верификация парных частот в сверхкритической области, предсказанных ТБТ.

7. Разработка новой методики и стенда для синхронного съёма спекл-интерферометрической и виброакустической информации с вибрирующих объектов (тестовых пластин). Проведение тестирования методики синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической информации для диагностики дефектов и степени их залечивания в закреплённых границ тестовых пластин в форме эллипса и кардиоиды.

### **Научная новизна.**

В работе представлены следующие **новые** результаты:

1. Исследованы спектры акустического давления послеударных продольных колебаний при наличии трения, коэффициент которого определяется по совокупности многочастотных затухающих колебаний стержня после ударного воздействия в зависимости от соотношения между массой ударника и стержня, и поперечных колебаний при различной величине статического растяжения и условий закрепления реальных стержневых систем.
2. Разработана методика и стенд для экспериментального изучения спектра акустического давления послеударных продольных колебаний стержня. Выявлен и изучен эффект сдвига по частоте амплитудного максимума в спектре акустического давления при послеударных продольных колебаниях стержня. Показано, что величина этого сдвига может зависеть от параметров, определяющих период осцилляции, а именно от среды распространения звука, расстояния до приёмника и от отношения масс ударника и стержня. При ударе по стержню ударником большей массы амплитуды скорости выходного конца на разных частотах отличаются друг от друга значительно сильнее осциллирующего эффекта функции; таким образом, максимум акустического давления соответствует частоте основного тона. При стремлении отношения масс

соударяющейся пары к нулю спектр меняется и диктующим максимум оказывается осциллирующий эффект.

3. Разработан новый усовершенствованный частотный метод оценки усилий и узловых жесткостей в стержнях. Выполнены исследования по экспериментальной верификации усовершенствованного частотного метода определения растягивающих усилий и жесткостей закрепления стержневых элементов строительных конструкций на основе модели колебаний балки Тимошенко и разработанных алгоритма и программы для ЭВМ оптимального поиска значений продольного усилия и жёсткости заделки стержня по спектру зарегистрированных частот. Предложенные расчетные модели и методики способны обеспечить существенное снижение трудоемкости проведения таких испытаний.
4. Впервые выявлена и объяснена особенность разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации. Показана необходимость учета изменения начального модуля упругости в процессе деформирования при частотной диагностике усилий в стержневых элементах. Так, при изменении начального значения модуля упругости на 3% при статическом растяжении для рассматриваемого тестового образца 3-я собственная частота поперечных колебаний оказывается ниже 1-ой собственной частоты при начальном модуле упругости в отсутствии статического растяжения.
5. Проведен теоретический и экспериментальный анализ спектров частот балки Тимошенко в окрестности критической частоты. При рассмотрении поперечных колебаний используемая методика по определению физических величин на примере скорости звука приводит к согласованию теоретических и экспериментальных наборов частот. Экспериментально верифицированы близкие пары частот за частотой Тимошенко.
6. Создан и протестирован оптико-акустический стенд и новая методика синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической инфор-

мации, пригодная для диагностики дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций и анализа степени их устранения. Проведенное тестирование показало преимущества объединения виброакустической и спекл-интерферометрической диагностики дефектов на примере диагностики дефектов в закреплении границы тестовой пластины. Важный признак такого дефекта - снижение резонансной частоты колебаний - является лишь интегральным признаком, по которому невозможно определить конкретное место расположения дефекта на контуре заделки. В то же время по конфигурации полос спекл-интерферограммы, полученной на сниженной резонансной частоте колебаний пластины, однозначно определяется место расположения дефекта заделки контура пластины.

**Теоретическая и практическая значимость работы** заключается в том, что ее результаты направлены на решение новых задач акустоупругости и на совершенствование широко используемого в технической диагностике частотного метода контроля сил натяжения стержневых элементов строительных конструкций, в частности преднапряжённой арматуры. Результаты выполнения настоящей работы могут быть использованы для обеспечения возможности существенного сокращения материальных, временных и трудовых затрат на диагностику сил натяжения в преднапряжённой арматуре мостов и других строительных конструкций в процессе проверки сохранения в них проектных значений продольных усилий путём использования более совершенных моделей колебаний элементов таких конструкций и оптимизации алгоритма поиска значений продольных усилий и жесткостей заделок арматурных стержней и канатов по спектру зарегистрированных собственных частот после ударных воздействий при значительно меньшей, чем практикуемая, высвобождении длины бетонной одежды без уменьшения точности получаемых результатов.

**Методы исследования.** Экспериментальные исследования проводились в лабораторных условиях с применением современных приборов и установок. В работе использованы известные методы для решения задач динамики твердого тела.

При решении задач, представленных в диссертации, применялись различные математические и вычислительные методы: решение смешанной краевой задачи методом Фурье, интегральное преобразование Лапласа, теорема Бореля об умножении изображений, методы глобальной и локальной оптимизации.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Решение задачи об определении спектра акустического давления послеударных продольных колебаний стержня;
2. Методика динамической оценки продольного усилия и коэффициентов угловой жёсткости заделки неидеально закреплённого стержня по спектру его изгибных колебаний;
3. Авторский программный код (комплекс), реализующий разработанные алгоритмы для определения коэффициентов жесткости и внутренних силовых факторов с использованием локально-стохастического метода «basin-hopping» на основе минимизации Монте-Карло функции ошибок по разности теоретических и экспериментальных частот;
4. Теоретический и экспериментальный анализ спектра частот балки Тимошенко в окрестности критической частоты, в том числе, - влияния растягивающей силы на положение критической частоты. Методика по определению физических величин на примере скорости звука приводит к согласованию теоретических и экспериментальных наборов частот. Экспериментально верифицированы близкие пары частот за частотой Тимошенко;
5. Обнаружение и объяснение эффекта разнонаправленного изменения собственных частот поперечных колебаний при растяжении стержня в области слабой нелинейности при котором возникает рост низких частот и уменьшении высоких частот с ростом порядкового номера частоты;
6. Создание оптико-акустического стенда и методики синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической информации для диагностики дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций и степени их устранения.

**Достоверность и обоснованность результатов исследований**, проведенных соискателем ученой степени обеспечена использованием классических математических методов механики деформируемого твёрдого тела и математического анализа, применением апробированных методов оптимизации, сравнением с результатами экспериментальных исследований.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на всероссийских и международных профильных научных конференциях и семинарах:

1. XLIII международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, Россия, 20-23 апреля 2021;
2. Дни студенческой науки 01-05 марта, 2021;
3. Дни студенческой науки 28 февраля-04 марта, 2022;
4. Международная научно-техническая конференция "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" 2021, 12 - 14 декабря 2022;
5. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике 21 - 25 августа, 2023;
6. Международная научно-техническая конференция "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" 2021, 4 – 6 декабря 2023;
7. Дни студенческой науки 26 февраля–01 марта, 2024;

**Публикации.** Основные результаты диссертации изложены в работах [100-109], изданных в периодических научных изданиях, сборниках материалов и тезисах докладов международных и всероссийских конференций. Четыре статьи из списка публикаций напечатаны в журналах, входящих в перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [113].

**Личный вклад автора** состоит в построении аналитических решений об определении спектра перемещения и акустического давления послеударных продольных колебаний конца стержня, реализации метода динамической оценки усилий и узловых жесткостей соединений стержневых элементов, конкретизации и

разработке алгоритма определения усилий и узловых жесткостей с использованием локально-стохастического метода по разности теоретических и экспериментальных частот, анализе и обработке экспериментальных данных, экспериментальной верификации на модельных образцах, участии в создании оптико-акустического стенда и методики синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической информации для диагностики дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций и степени их устранения. Анализ и обобщение полученных результатов. Постановка задач и анализ полученных результатов проводились совместно с научным руководителем - А.Л. Поповым.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, Заключение, списка литературы и 2 приложений. Текст диссертации составляет 113 страниц, включая 37 рисунков и 5 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 113 наименований.

**Во введении** дана общая характеристика работы, сформулированы ее цели, задачи и методы их реализации, обоснована актуальность темы исследования. Приводятся достижения предшественников и новизна полученных и выносимых на защиту результатов, их теоретическая и потенциальная практическая значимость.

**В первой главе** рассмотрены теоретические модели, возбуждаемых ударом, колебаний стержней при раздельном и совместном учете волнового движения и местной деформации в соударяющихся телах. Показана иерархия моделей, описывающих продольные и поперечные колебания стержней.

**Вторая глава** посвящена согласованию теоретических моделей удара и послеударных продольных колебаний стержня с экспериментальными данными. Получено решение задачи о продольных колебаниях стержня со свободными концами при наличии трения, коэффициент которого определяется по совокупности многочастотных затухающих колебаний стержня после ударного воздействия. Определены и проанализированы амплитудно-частотные зависимости перемещений и скоростей концов стержня, их связь с акустическим давлением, излучаемым торцами при разных соотношениях между массой ударника и стержня. Продемонстрирован

эффект сдвига амплитудного максимума акустического давления с частоты основного тона на обертон, зависящий от параметров, определяющих период осцилляции, и отношения масс ударника и стержня.

**В третьей главе** рассмотрена методика динамической оценки продольного усилия и коэффициентов угловой жёсткости заделки неидеально закреплённого стержня по спектру его изгибных колебаний путём сравнения экспериментально зарегистрированных частот колебаний с теоретическими спектрами частот, сгенерированных на основе аналитических моделей балок Эйлера-Бернулли и Тимошенко. Для согласования результатов по теоретическим моделям с набором экспериментальных частот используется сочетание известных алгоритмов оптимизации на основе глобального поиска и локальных минимумов, проведена экспериментальная верификация динамической методики на стержневых моделях с известными значениями продольного усилия и угловой жёсткости заделки. Для этого в качестве модельных образцов рассмотрены две балки. В одной из них при растяжении в испытательной машине создавались заданные продольные усилия. Другая балка имела вид консоли с торцевым резьбовым креплением, по степени затяжки которого, контролируемой по статическому прогибу консоли, определялся коэффициент угловой жёсткости крепления. В результате, в зависимости от параметров балки, определено минимальное количество регистрируемых собственных частот её колебаний, необходимое для динамической оценки продольного усилия с приемлемой погрешностью. Также показана зависимость критической частоты балки Тимошенко от внутреннего силового фактора – растягивающей силы. Отмечена особенность разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации. Также рассмотрены поперечные колебания в плоскости наибольшей жесткости свободно подвешенной на гибких нитях латунной полосы, для которых критическая частота по ТБТ находится внутри акустического спектра. Исходя из сопоставления спектров экспериментальных и теоретических частот продольных и поперечных колебаний балки, проведено уточнение значений механических параметров балки, таких как скорость звука и коэффициент Пуассона, в результате чего

достигнута высокая степень согласования этих спектров, в том числе, - за критической частотой. Экспериментально верифицированы парные частоты в сверхкритической области, предсказанные ТБТ.

**В четвертой главе** рассмотрен метод синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической информации для диагностики дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций. Разработан стенд для синхронной оптико-акустической регистрации частот и форм резонансных колебаний наблюдаемых элементов конструкций, выполнена их верификация на примерах диагностики дефектов в закреплении границ тестовых пластин в форме эллипса и кардиоиды.

**В Заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

## Глава 1. Теоретические модели возбуждаемых ударом колебаний стержней

### 1.1. Модели продольного соударения упругих тел

Рассматривая задачи о продольном соударении упругих тел возникает вопрос о необходимости выбора масштаба времени, в пределах которого необходимо рассматривать взаимодействие между телами. Широкое распространение при решении многих технических задач получила классическая теория удара, при которой рассматриваемое взаимодействие принимается мгновенным. Соударяющиеся тела в классической теории считаются абсолютно твердыми, а потеря энергии, связанная с деформациями в зоне контакта, учитывается с помощью коэффициента восстановления. Исследование Сен-Венана о соударении двух тонких однородных стержней при различных длинах и поперечных сечениях показало, что коэффициент восстановления меняется от нуля до единицы, его решение основывалось на интегрировании одномерных волновых уравнений при соответствующих начальных и граничных условиях. Данные результаты имеют большое практическое значение, например, в технологии ударного бурения.

Определение процесса соударения, т.е. отыскание зависимости контактной силы от времени, удалось Герцу. Решение Герца основывалось на квазистатической постановке задачи соударения упругих тел, по которой продолжительность соударения предполагается много больше периода первой собственной формы колебаний любого из тел соударяющейся пары. Формой тел вне окрестности точки первоначального контакта поверхностями второго порядка пренебрегают. Это обусловлено тем, что тела при соударении квазистатически деформируются в зоне контакта. Совместный учет волнового движения и местной деформации в соударяющихся телах на примере стержней со сферическими концами был выполнен Сирсом. Методика сведения задачи к решению обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, предложенная Сирсом, оказалась очень эффективной. Ниже рассмотрены основные модели более подробно.

*Теория Сен-Венана соударения упругих тел.*

Модель продольного удара Сен-Венана предполагает волновое распространение возмущений и отсутствие местных деформаций, что может быть обеспечено для идеально плоских торцов соударяемых тел. На рисунке 1.1 представлено такое соударение плоским ударником по торцу цилиндрического стержня со свободными концами.

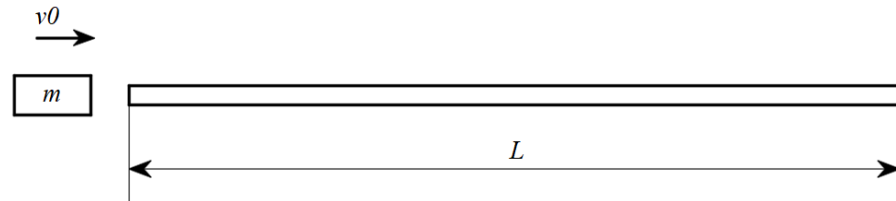


Рисунок 1.1 – Удар плоским ударником по стержню со свободными концами

Условие контакта в такой задаче следует из общего уравнения:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t - t_1) dt_1 = \int_0^t P(t_1) Y(t - t_1) dt_1 \quad (1.1.1)$$

где  $v_0$  – скорость ударника в момент удара по стержню,  $m$  – масса ударника,  $Y$  – реакция системы на единичный импульс,  $P(t_1)$  – контактная сила.

Решение данного интегрального уравнения:

$$P(t) = c \rho S v_0 e^{-\frac{M c t}{m l}}, \quad M = \rho S l \quad (1.1.2)$$

где  $c$  – скорость звука,  $\rho$  – плотность материала,  $l$  – длина стержня,  $S$  – площадь поперечного сечения стержня

Очевидно, что такое решение описывает исключительно затухающую часть ударного импульса.

*Теория Герца соударения упругих тел*

Основные идеи теории Герца проиллюстрируем на примере прямого центрального удара двух массивных упругих шаров со скоростями, при которых не появляются пластические деформации (Рисунок 1.2).

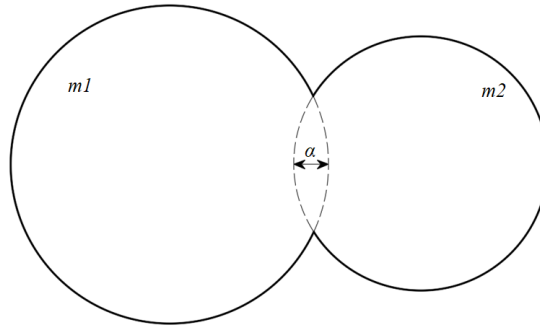


Рисунок 1.2 – Соударение упругих шаров

Уравнение совместного движения таких шаров принимает вид:

$$M_0 \ddot{\alpha} = -P(t) \quad (1.1.3)$$

где  $M_0 = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – приведенная масса,  $\alpha$  – местное смятие.

Зависимость контактной силы от времени Герц получил на основании двух гипотез, сущность которых рассматривается на более простом примере удара шара по упругому полупространству. Введение этой гипотезы предполагает, что сила соударения не изменится, т.е. существенными при соударении тел являются местные деформации в зоне контакта. Второе предположение заключается в том, что силами инерции в упругом полупространстве можно пренебречь, т.е. зависимость контактной силы от времени такая же как при статическом сжатии. Данные гипотезы позволяют установить связь между местным смятием, входящим в уравнение (1.1.3), и контактной силой при решении интегрального уравнения контактной задачи при помощи теории потенциала. Для двух различных шаров контактная сила имеет вид [90]:

$$P = k \alpha^{3/2}, \quad k = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \frac{4}{3} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (1.1.4)$$

где  $E_1, E_2$  и  $\nu_1, \nu_2$  – модули Юнга и коэффициенты Пуассона ударника и стержня соответственно,  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны

#### *Теория Сирса соударения упругих тел*

Модель Сирса объединяет оба подхода, учитывая местную деформацию и деформацию расширения-сжатия в продольной волне. Данный подход предполагает одновременный учет принципа Сен-Венана, согласно которому закон распределения давления по площадке контакта не влияет на динамические деформации вне

окрестности точки контакта, и принципа освобожденности, который позволяет заменить условие контакта действием сил давления, приложенных от одного тела к другому.

Основные положения проиллюстрируем на примере продольного удара телом массой  $m$  в начальный момент времени со скоростью  $v_0$  по упругому стержню длиной  $L$  с правым концом в упоре (Рисунок 1.3), в результате чего по стержню распространяются плоские волны со скоростью  $c$  и возникает местное смятие  $\alpha$  в зоне контакта. Выбор такой модели и учет смятия оправдан в том числе условием несвободного конца и сферическим наконечником ударника.

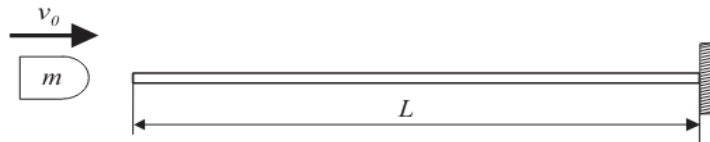


Рисунок 1.3 – Удар сферическим ударником по стержню с упором

Условие контакта в такой задаче имеет вид [11]:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t - t_1) dt_1 - \alpha = \int_0^t P(t_1) Y(t - t_1) dt_1 \quad (1.1.5)$$

Параметр  $k$  для случая удара телом по плоскому торцу при одинаковых материалах стержня и ударника:

$$k = \frac{2E\sqrt{R}}{3(1-\nu^2)} \quad (1.1.6)$$

где  $R$  – радиус кривизны ударника в точке контакта.

В результате получим нелинейное интегральное уравнение, которое допускает только численное решение. В отличие от решения, полученного по модели Сен-Венана, здесь уже присутствует не только затухающая, но и возрастающая части ударного импульса.

## 1.2. Послеударные продольные колебания стержня

Помимо классических инженерных моделей, в области динамики стержней существуют так называемые уточненные или неклассические модели. Эти модели

учитывают дополнительные факторы, влияющие на динамический процесс. Классическая теория продольных колебаний стержня была обобщена в моделях Релея-Лява, Релея-Бишопа и Миндлина-Германа. Ниже будет дано подробное описание этих моделей.

#### *Стержень по модели Сен-Венана*

Для описания свободных продольных колебаний стержня постоянного поперечного сечения обычно используется волновое уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1.2.1)$$

где  $u = u(x, t)$  - продольное смещение точки стержня с координатой  $x$ , направленной вдоль его оси, в момент времени  $t$ ,  $E$  - модуль упругости,  $\rho$  - плотность стержня.

Предполагая, что продольные колебания стержня представляют собой гармонические колебания с круговой частотой  $\omega$ ; тогда решение уравнения (1.2.1) может быть представлено в виде:

$$u(x, t) = U(x) \sin \omega t \quad (1.2.2)$$

где  $U(x)$  – амплитуда продольных колебаний сечения стержня.

Подставляя решение (1.2.2) в (1.2.1), получим дифференциальное уравнение разрешенное относительно формы продольного перемещения по координате  $x$ :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0 \quad (1.2.3)$$

где  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Решение данного уравнения может быть представлено в виде:

$$U(x) = C_1 \cos \frac{\omega}{c} x + C_2 \sin \frac{\omega}{c} x \quad (1.2.4)$$

где  $C_1, C_2$  - постоянные, определяемые из граничных условий на концах стержня.

#### *Стержень по модели Релея-Лява*

В усовершенствованной теории продольных колебаний стержня дополнительно рассматривается влияние инерции поперечных смещений, которое приво-

дит к растяжению или сжатию сечений в их плоскостях при продольных колебаниях стержня. Согласно эффекту Пуассона, компоненты перемещений будут включать [89]:

$$u = u(x, t), \quad v = -\nu y \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = -\nu z \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2.5)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $y, z$  – расстояния от нейтральной оси до выбранной точки поперечного сечения.

Уравнение уточнённой теории продольных колебаний с учетом поперечных смещений растяжения-сжатия стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu^2 \frac{I_p}{F} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (1.2.6)$$

в котором  $I_p = \int_F (y^2 + z^2) dF$  – полярный момент инерции поперечного сечения стержня с площадью  $F$ .

Если предположить, что колебания гармонические, то продольные перемещения точек стержня принимают вид:

$$u(x, t) = U(x) \sin \omega t \quad (1.2.7)$$

Подставляя данное решение в уравнение уточнённой теории продольных колебаний, получим:

$$\left( c^2 - \frac{I_p}{F} \nu^2 \omega^2 \right) \frac{d^2 U}{dx^2} + \omega^2 U = 0 \quad (1.2.8)$$

Отсюда решение для амплитуды:

$$U(x) = C_1 \cos \frac{\omega}{a} x + C_2 \sin \frac{\omega}{a} x \quad (1.2.9)$$

где  $a = \sqrt{c^2 - \frac{I_p}{F} \nu^2 \omega^2}$  и  $C_1, C_2$  – постоянные, определяемые из граничных условий на концах стержня.

Очевидно, что поправка Релея, соответствующая учету кинетической энергии радиального движения, имеет более высокий порядок малости по сравнению с энергией продольного движения частиц.

*Стержень по модели Релея-Бишопа*

Ключевая особенность модели Бишопа состоит в том, что она учитывает не только кинетическую энергию радиального движения, но также и потенциальную энергию сдвиговых деформаций.

В соответствии с этой моделью, продольные колебания стержня описываются более сложным уравнением, имеющим четвертый порядок по  $x$  [89]:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v^2 \rho I_p \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + v^2 G I_p \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (1.2.10)$$

Аналогичным образом, если предположить, что колебания гармонические, то продольные перемещения точек стержня принимают вид:

$$u(x, t) = U(x) \sin \omega t \quad (1.2.11)$$

Подставляя (1.2.11) в уравнение продольных колебаний, имеем:

$$-\rho F \omega^2 U + (v^2 \omega^2 \rho I_p - EF) \frac{dU^2}{dx^2} + v^2 G I_p \frac{dU^4}{dx^4} = 0 \quad (1.2.12)$$

Очевидно, что уравнение (1.2.12) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка с амплитудой продольных колебаний  $U(x)$ , а его характеристическое уравнение:

$$k^4 + \frac{(v^2 \omega^2 \rho I_p - EF)}{G v^2 I_p} k^2 - \frac{\rho F \omega^2}{G v^2 I_p} = 0 \quad (1.2.13)$$

Решение характеристического уравнения  $k_{1,2} = \pm i\alpha$ ,  $k_{3,4} = \pm \beta$ , где  $i = \sqrt{-1}$  и  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно равны:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(v^2 \omega^2 \rho I_p - EF) + \sqrt{(v^2 \omega^2 \rho I_p - EF)^2 + 4 \rho F G v^2 \omega^2 I_p}}{2 G v^2 I_p}} \quad (1.2.14)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{-(v^2 \omega^2 \rho I_p - EF) + \sqrt{(v^2 \omega^2 \rho I_p - EF)^2 + 4 \rho F G v^2 \omega^2 I_p}}{2 G v^2 I_p}}$$

С учетом корней характеристического уравнения выражение для формы продольного перемещения стержня будет выглядеть так:

$$U(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (1.2.15)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  - постоянные, определяемые из граничных условий на концах стержня.

#### *Стержень по модели Миндлина-Германа*

Главной особенностью модели является свобода от гипотезы об одноосности деформированного состояния стержня. Основные дифференциальные уравнения для цилиндрического стержня могут быть выражены в следующем виде [111]:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda)F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda F \frac{\partial w}{\partial x} &= \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \mu I_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4(\lambda + \mu)Fw - 2\lambda F \frac{\partial u}{\partial x} &= \rho I_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

где  $\mu = E/2(1+\nu)$ ,  $\lambda = \nu E/[(1+\nu)(1-2\nu)]$  – постоянные Ламе,  $u$  и  $w$  – продольное и поперечное перемещение сечения стержня соответственно.

Полагая, что продольные и поперечные колебания гармонические, решение может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U(x) \sin \omega t \\ w(x, t) &= W(x) \sin \omega t \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

где  $U(x)$  и  $W(x)$  амплитуды продольных и поперечных перемещений сечений стержня соответственно.

Подставляя (1.2.17) в систему (1.2.16), описывающую колебания стержня, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{vmatrix} (2\mu + \lambda)F \frac{d^2}{dx^2} + \rho F \omega^2 & 2\lambda F \frac{d}{dx} \\ 2\lambda F \frac{d}{dx} & -\mu I_p \frac{d^2}{dx^2} + 4(\mu + \lambda)F - \rho I_p \omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U \\ W \end{vmatrix} = 0 \quad (1.2.18)$$

Соответствующее ей характеристическое уравнение:

$$a_2 k^4 - a_1 k^2 + a_0 = 0 \quad (1.2.19)$$

где

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\rho F \omega^2 (4(\mu + \lambda)F - \rho I_p \omega^2), \\
a_1 &= (2\mu + \lambda) \rho I_p F \omega^2 + \mu \rho I_p F \omega^2 - 4\mu(2\mu + 3\lambda)F^2, \\
a_2 &= (2\mu + \lambda)F \mu I_p
\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

Решение характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_1} \tag{1.2.21}$$

С учетом решения характеристического уравнения, выражения для продольного и поперечного перемещения примут вид:

$$\begin{aligned}
U(x) &= C_1 B_1 \sinh k_1 x + C_2 B_1 \cosh k_1 x + C_3 B_2 \sinh k_2 x + C_4 B_2 \cosh k_2 x \\
\Psi(x) &= C_1 \cosh k_1 x + C_2 \sinh k_1 x + C_3 \cosh k_2 x + C_4 \sinh k_2 x
\end{aligned} \tag{1.2.22}$$

$$\text{где } B_{1,2} = \frac{-2k_{1,2}\lambda}{(2\mu + \lambda)k_{1,2}^2 + \rho\omega^2}$$

Очевидно, что различия между рассматриваемыми моделями нивелируются при уменьшении коэффициента Пуассона и увеличении гибкости стержня, что равноценно снижению вклада каждого компонента более высоко порядка малости. На основании полученных результатов можно также отметить изменение выражения для скорости звука, что в некоторой степени также освещено в [89], где отмечено сгущение частот с ростом их порядкового номера и величины.

### 1.3. Послеударные поперечные колебания стержней

Аналогичным образом, в области динамики стержней, помимо классических инженерных моделей поперечных колебаний, существуют уточненные или неклассические модели. Эти модели учитывают дополнительные факторы, влияющие на динамический процесс, или не опираются на некоторые гипотезы, характерные для инженерных теорий, что расширяет область их применимости. Классическую теорию поперечных колебаний стержня обобщают модели Релея и Тимошенко. Ниже будет представлено более подробное описание данных моделей.

*Стержень по модели Эйлера-Бернулли*

Дифференциальное уравнение, описывающее свободное движение при поперечных колебаниях имеет вид:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (1.3.1)$$

где  $\rho$  – плотность,  $A$  – площадь поперечного сечения  $E$  – модуль упругости  $I$  – момент инерции,  $w(x, t)$  — динамический прогиб стержня

Представляя функцию поперечного смещения:

$$w(x, t) = W(x) \sin \omega t \quad (1.3.2)$$

Дифференциальное уравнение относительно  $W(x)$ :

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \omega^2 \rho F W = 0 \quad (1.3.3)$$

Его решение:

$$W = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + C_3 \operatorname{sh}(ax) + C_4 \operatorname{ch}(ax) \quad (1.3.4)$$

$$a^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EI}$$

*Стержень по модели Релея*

Модель учитывает инерцию вращения; дифференциальное уравнение движения [112]:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 \quad (1.3.5)$$

Представляя функцию поперечного смещения:

$$w(x, t) = W(x) \sin \omega t \quad (1.3.6)$$

получим дифференциальное уравнение относительно  $W(x)$ :

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\omega^2 \rho}{E} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\rho F \omega^2}{EI} W = 0 \quad (1.3.7)$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 = -\frac{\rho\omega^2}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{2E}\right)^2 + \frac{\rho F \omega^2}{EI}}, \quad \lambda_{1,2} = \pm ia, \quad \lambda_{3,4} = \pm b \quad (1.3.8)$$

$$a = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{2E}} + \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{2E}\right)^2 + \frac{\rho F \omega^2}{EI}}, \quad (1.3.9)$$

$$b = \sqrt{-\frac{\rho\omega^2}{2E} + \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{2E}\right)^2 + \frac{\rho F \omega^2}{EI}}}$$

Общее решение уравнения (1.3.7) принимает вид:

$$W(x) = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + C_3 sh(bx) + C_4 ch(bx) \quad (1.3.10)$$

*Сдвиговая модель* учитывает соответствующие деформации; дифференциальные уравнения движения имеют следующий вид [112]:

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - kGF \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + kGF \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

где  $k$  – сдвиговой коэффициент,  $G$  – модуль сдвига,  $\theta(x, t)$  – угол сдвига.

Решение системы дифференциальных уравнений (1.3.11) разыскивается в виде:

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta \end{pmatrix} = \sin \omega t \begin{pmatrix} W(x) \\ \Theta(x) \end{pmatrix} \quad (1.3.12)$$

Подстановка (1.3.12) в систему (1.3.11) позволяет получить отдельное дифференциальное уравнение для  $W(x)$ :

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} + \frac{\rho\omega^2}{kG} \frac{d^2 W(x)}{dx^2} - \frac{\rho F \omega^2}{EI} W(x) = 0 \quad (1.3.13)$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm ia, \quad \lambda_{3,4} = \pm b \quad (1.3.14)$$

$$a = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{2kG}} + \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{2kG}\right)^2 + \frac{\rho F\omega^2}{EI}},$$

$$b = \sqrt{-\frac{\rho\omega^2}{2kG}} + \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{2kG}\right)^2 + \frac{\rho F\omega^2}{EI}}$$

Решения уравнений принимают вид:

$$W(x) = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + C_3 sh(bx) + C_4 ch(bx)$$

$$\Theta(x) = -C_1 \frac{1}{a} \left( \frac{\rho\omega^2}{kG} - a^2 \right) \cos(ax) + C_2 \frac{1}{a} \left( \frac{\rho\omega^2}{kG} - a^2 \right) \sin(ax) +$$

$$+ C_3 \frac{1}{b} \left( \frac{\rho\omega^2}{kG} + b^2 \right) ch(bx) + C_4 \frac{1}{b} \left( \frac{\rho\omega^2}{kG} + b^2 \right) sh(bx) \quad (1.3.15)$$

Модель Тимошенко объединяет учёт инерции вращения и сдвиговых деформаций (Рисунок 1.4).

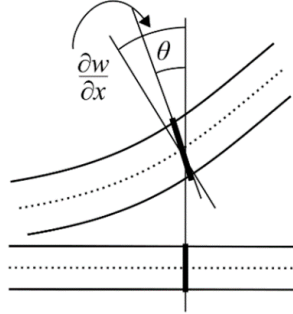


Рисунок 1.4 – Деформация балки по Тимошенко

Дифференциальные уравнения, описывающие свободное движение при поперечных колебаниях, имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{kFG}{EI} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - kFG \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.3.16)$$

По аналогии с рассмотренным выше случаем, разделяя переменные, приходим к следующему виду одного из дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \left( \frac{\rho\omega^2}{kG} + \frac{\rho\omega^2}{E} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left( \frac{\rho\omega^4}{kGE} - \frac{\rho F\omega^2}{EI} \right) W = 0 \quad (1.3.17)$$

Корни характеристических уравнений для частот ниже критической  $\omega < \omega_c$ :

$$\lambda_{1,2} = \pm ia, \quad \lambda_{3,4} = \pm b$$

$$a = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{2E} + \frac{\rho\omega^2}{2kG}} + \sqrt{\left( \frac{\rho\omega^2}{2E} + \frac{\rho\omega^2}{2kG} \right)^2 - \left( \frac{\rho^2\omega^4}{kGE} - \frac{\rho F\omega^2}{EI} \right)}, \quad (1.3.18)$$

$$b = \sqrt{-\left( \frac{\rho\omega^2}{2E} + \frac{\rho\omega^2}{2kG} \right)} + \sqrt{\left( \frac{\rho\omega^2}{2E} + \frac{\rho\omega^2}{2kG} \right)^2 - \left( \frac{\rho^2\omega^4}{kGE} - \frac{\rho F\omega^2}{EI} \right)}$$

Решения уравнений принимают вид:

$$W(x) = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + C_3 sh(bx) + C_4 ch(bx)$$

$$\Theta(x) = -C_1 \frac{1}{a} \left( \frac{\rho\omega^2}{kG} - a^2 \right) \cos(ax) + C_2 \frac{1}{a} \left( \frac{\rho\omega^2}{kG} - a^2 \right) \sin(ax) +$$

$$C_3 \frac{1}{b} \left( \frac{\rho\omega^2}{kG} + b^2 \right) ch(bx) + C_4 \frac{1}{b} \left( \frac{\rho\omega^2}{kG} + b^2 \right) sh(bx) \quad (1.3.19)$$

Корни характеристических уравнений для частот выше критической  $\omega > \omega_c$ :

$$\lambda_{1,2} = \pm ia, \quad \lambda_{3,4} = \pm ib$$

$$a = \sqrt{\left( \frac{\rho\omega^2}{2E} + \frac{\rho\omega^2}{2kG} \right)} - \sqrt{\left( \frac{\rho\omega^2}{2E} + \frac{\rho\omega^2}{2kG} \right)^2 - \left( \frac{\rho^2\omega^4}{kGE} - \frac{\rho F\omega^2}{EI} \right)}, \quad (1.3.20)$$

$$b = \sqrt{\left( \frac{\rho\omega^2}{2E} + \frac{\rho\omega^2}{2kG} \right)} + \sqrt{\left( \frac{\rho\omega^2}{2E} + \frac{\rho\omega^2}{2kG} \right)^2 - \left( \frac{\rho^2\omega^4}{kGE} - \frac{\rho F\omega^2}{EI} \right)}$$

Решения уравнений принимают вид:

$$\begin{aligned}
 W(x) &= C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + C_3 \sin(bx) + C_4 \cos(bx) \\
 \Theta(x) &= -C_1 \frac{1}{a} \left( \frac{\rho \omega^2}{kG} - a^2 \right) \cos(ax) + C_2 \frac{1}{a} \left( \frac{\rho \omega^2}{kG} - a^2 \right) \sin(ax) + \\
 &\quad -C_3 \frac{1}{b} \left( \frac{\rho \omega^2}{kG} - b^2 \right) \cos(bx) + C_4 \frac{1}{b} \left( \frac{\rho \omega^2}{kG} - b^2 \right) \sin(bx)
 \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

## Глава 2. Экспериментально-теоретический анализ начальной стадии продольных колебаний стержня после ударного воздействия

Данный раздел посвящен согласованию теоретических моделей удара и послеударных продольных колебаний стержня с экспериментальными данными. Получено решение задачи о продольных колебаниях стержня со свободными концами при наличии трения, коэффициент которого определяется по совокупности многочастотных затухающих колебаний стержня после ударного воздействия. Определены и проанализированы амплитудно-частотные зависимости перемещений и скоростей концов стержня, их связь с акустическим давлением, излучаемым торцами при разных соотношениях между массой ударника и стержня. Продемонстрирован эффект сдвига амплитудного максимума акустического давления с частоты основного тона на обертона, зависящий от параметров, определяющих период осцилляции, и отношения масс ударника и стержня.

### 2.1. Время соударения

Для определения времени соударения запишем волновое уравнение, описывающее продольные колебания:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1.1)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < l) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = -v_0 \quad (x = l) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Краевые условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 \\ EF \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} &= - \frac{P}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Обозначим отношение массы ударяющего тела  $m$  к массе стержня  $M$  через  $q$ , так что  $m=qM$ . Тогда условие на свободном конце приобретает вид:

$$-c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = ql \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} \quad (2.1.4)$$

Для определения времени соударения рассмотрим решение волнового уравнения в виде решения Даламбера:

$$u = f_1(ct - x) + f_2(ct + x) \quad (2.1.5)$$

С учётом краевого условия (2.1.3) на свободном конце решение (2.1.4) трансформируется к виду:

$$u = f(ct - x) + f(ct + x) \quad (2.1.6)$$

где каждое из слагаемых представляет собой продольную волну, распространяющуюся в положительном или отрицательном направлении со скоростью звука  $c$ .

Подставляя в начальные условия (2.1.2) функцию  $u$ :

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f(-x) + f(x) = 0 \quad (0 < x < l) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= f'(-x) + f'(x) = 0 \quad (0 < x < l) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

найдем, что:

$$f(z) = 0 \quad (-l < z < l) \quad (2.1.8)$$

Теперь рассмотрим краевое условие (2.1.3) на конце, по которому ударяет тело. С учетом найденного выражения для  $u$  имеем:

$$f''(z) + \frac{1}{ql} f'(z) = -f''(z - 2l) + \frac{1}{ql} f'(z - 2l) \quad (2.1.9)$$

Условия непрерывности скорости конца стержня, воспринимающего удар:

$$f[(2n-1)l+0] - f[(2n-1)l-0] = (-1)^n \frac{v_0}{c} \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.1.10)$$

где  $n$  – параметр, определяющий число проходов стержня фронтом волны.

Рассмотрим относительное удлинение при  $x=l$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -f(ct-l) + f(ct+l) \quad (2.1.11)$$

при  $ct < 2l$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l, ct=2l-0} = -\frac{v_0}{c} e^{-\frac{ct}{ql}}; \quad (2.1.12)$$

при  $ct > 2l$

$$\begin{aligned} f(ct-l) &= -\frac{v_0}{c} e^{-\frac{ct-2l}{ql}}; \\ f(ct+l) &= -\frac{v_0}{c} e^{-\frac{ct}{ql}} + \frac{v_0}{c} \left[ 1 - \frac{2}{ql}(ct-2l) \right] e^{-\frac{ct-2l}{ql}}; \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Положим  $ct=2l+0$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l, ct=2l+0} = \frac{v_0}{c} \left( 2 - e^{-\frac{2}{q}} \right) > 0; \quad (2.1.14)$$

Из представленных выражений видно, что при  $t=2l/c$  удар закончится; удлинение конца меняет знак. Также изменит знак напряжение. Волна сжатия пройдет длину стержня в одном направлении и, отразившись от ненагруженного конца в виде волны расширения, возвратится к концу стержня, подвергнутому удару.

## 2.2. Зависимость контактной силы от времени

Для определения ударной силы запишем условие контакта [7, 11]:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1)dt_1 - \alpha = \int_0^t P(t_1)Y(t-t_1)dt_1 \quad (2.2.1)$$

где  $v_0$  – скорость ударника в момент удара по стержню,  $m$  – масса ударника,  $\alpha$  – упругая деформация в зоне контакта,  $Y$  – реакция системы на единичный импульс [90]:

$$Y(t-t_1) = \frac{(t-t_1)}{\rho Sl} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\rho Sl \omega_n} \sin \omega_n (t-t_1) \quad (2.2.2)$$

В реакции на импульс первый член соответствует свободному перемещению системы как абсолютно твердого тела. Данная поправка позволяет получить решение интегрального уравнения (2.2.1) относительно  $P(t)$  в элементарных функциях; эффектом затухания ввиду незначительной продолжительности взаимодействия и для упрощения аналитического решения пренебрегаем.

При определении ударной силы без учёта местного смятия и малого отношения масс  $m/M$ , а также - свободного края выходного конца стержня, условие контакта примет вид:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \frac{1}{\rho Sl} \int_0^t P(t_1) \left( (t-t_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n (t-t_1)}{\omega_n} \right) dt_1 = 0 \quad (2.2.3)$$

Отметим, что ряд в этом выражении сводится к табличному виду 5.4.2.9 [91]. Тогда выражение (2.2.3) упростится:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \frac{1}{\rho Sc} \int_0^t P(t_1) dt_1 = 0 \quad (2.2.4)$$

Дифференцируя дважды интегралы (2.2.4) по параметру  $t$ , приходим к дифференциальному уравнению относительно функции  $P(t)$ :

$$\frac{1}{m} P(t) + \frac{1}{\rho Sc} \frac{dP(t)}{dt} = 0 \quad (2.2.5)$$

Решение этого уравнения представляется в виде:

$$P(t) = c \rho S v_0 e^{-\frac{M}{m} \frac{ct}{l}}, \quad M = \rho Sl \quad (2.2.6)$$

Видно, что в этом решении учитывается только затухающая часть контактного импульса.

Для получения контактной силы с учетом местного смятия запишем условие контакта [7,11], в котором местное смятие связано с контактной силой по формуле Герца:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \left( \frac{P(t)}{k} \right)^{\frac{2}{3}} = \int_0^t P(t_1) Y(t-t_1) dt_1, k = \frac{2E\sqrt{R}}{3(1-\nu^2)} \quad (2.2.7)$$

где  $R$  – радиус кривизны ударника в точке контакта,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В таком виде интегральное уравнение допускает только численное решение [11]. В отличие от (2.2.6), здесь уже присутствует не только затухающая, но и возрастающая части ударного импульса.

## 2.3. Особенности спектра продольных колебаний и звукоизлучения стержней

### 2.3.1. Определение спектра амплитуд и скоростей перемещений входного и выходного торцов стержня

Рассматривается продольный удар по упругому стержню 1 длиной  $l$ , массы  $M$  с двумя свободными концами (Рисунок 2.1). По правому концу в начальный момент времени ударяет со скоростью  $v_0$  шарик или молоток 2 массой  $m$ , в результате чего возникает контактное взаимодействие. Ударник, как и в большинстве других работ, считается абсолютно твердым телом.

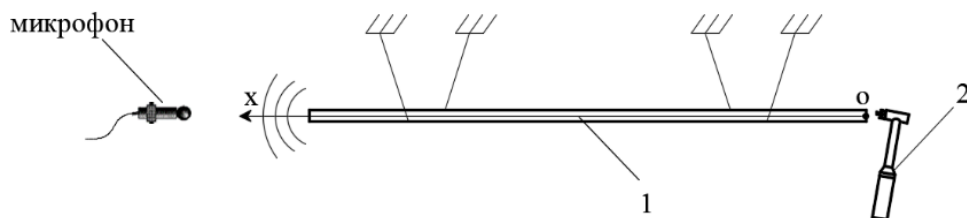


Рисунок 2.1 – Удар телом по стержню

Колебания стержня по модели Сен-Венана с учетом диссипативных сил и излучаемое акустическое давление описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t}, & c^2 &= \frac{E}{\rho} \\ \Delta p + k^2 p &= 0, & p &= Z \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.3.1.1)$$

где  $u(x, t)$  – функция продольного перемещения точек стержня,  $c$  – скорость звука,  $\rho$  – плотность стержня,  $E$  – модуль упругости,  $\gamma$  – коэффициент, учитывающий трение,  $p$  – акустическое давление,  $Z$  – акустический импеданс среды.

Граничные и начальные условия для функции перемещения запишем в виде:

$$ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -P(t); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \quad u_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.3.1.2)$$

где  $P(t)$  – контактная сила на конце стержня,  $S$  – площадь поперечного сечения,  $l$  – длина стержня.

Решение краевой задачи (2.3.1.1), (2.3.1.2) представим в виде ряда по собственным формам колебаний стержня со свободными концами:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}$$

$$T_n^{(2)}(t) + 2\gamma T_n^{(1)}(t) + \lambda_n^2 c^2 T_n(t) = \frac{2P(t)}{\rho S l}, \quad T_n(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial T_n}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.3.1.3)$$

$$T_n = \frac{2}{\rho S l} \int_0^t P(t_1) e^{-\gamma(t-t_1)} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} dt_1, \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{l}$$

С учетом найденного выражения для ударной силы (2.2.6), получим, что функция перемещения:

$$u(x, t) = \int_0^t P(t_1) Y(t-t_1) dt_1 = \frac{2c v_0}{l} \int_0^t e^{-\frac{M c t_1}{m l}} e^{-\gamma(t-t_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} \cos \lambda_n x dt_1 \quad (2.3.1.4)$$

Фурье-спектр перемещения  $u(x, t)$ , являющегося сверткой двух функций  $P(t)$  и  $Y(t)$ , с учетом  $u(x, t) = 0$  при  $t < 0$  является Лапласовым изображением:

$$U(x, \omega) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega t} dt = \frac{2cv_0}{l} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t} \int_0^t e^{-\frac{Mct_1}{m}} e^{-\gamma(t-t_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} \cos \lambda_n x dt_1 dt \quad (2.3.1.5)$$

Согласно теореме свертки двух оригиналов [92], Фурье-спектр перемещений входного и выходного концов имеет вид произведения изображений; таким образом, с учетом преобразований, амплитуда принимает вид:

$$A(\omega) = \frac{2cv_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left((\omega - \omega_n)^2 + \gamma^2\right) \left((\omega + \omega_n)^2 + \gamma^2\right) \left(\omega^2 + \frac{M^2 c^2}{m^2 l^2}\right)}} \quad (2.3.1.6)$$

На рисунке 2.2 показан фрагмент спектра послеударных колебаний для шести первых собственных частот продольных колебаний стержня при ударе шариком (параметры соударяющихся пар приводятся в экспериментальной части).

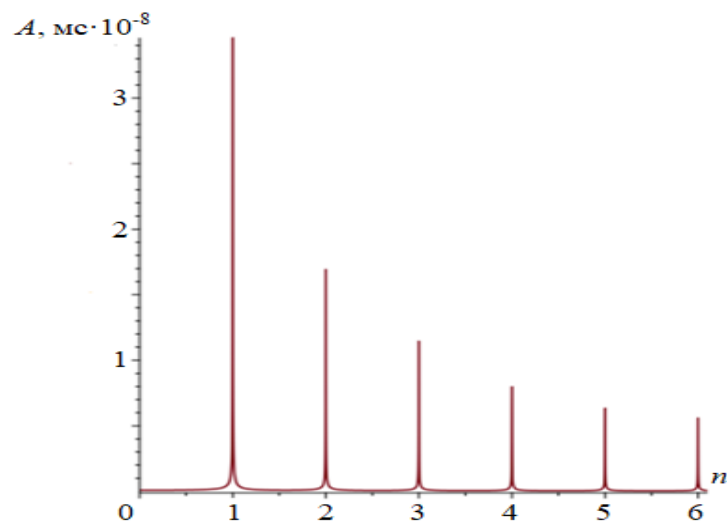


Рисунок 2.2 – Расчётное изменение амплитуд спектра послеударных колебаний в зависимости от номера собственной частоты

Видно, что общей тенденцией является снижение амплитуд спектра с ростом номера частоты.

Для определения амплитудно-частотной зависимости скорости из выражения перемещения (2.3.1.4) в форме интеграла Дюамеля найдем функцию скорости  $v(x, t)$ :

$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_0 mc \left( -Mc\omega_n e^{-\frac{M}{m} \frac{c}{l} t} + \left( (-Mc\gamma + lm(\gamma^2 + \omega_n^2)) \sin \omega_n t + Mc\omega_n \cos \omega_n t \right) e^{-\gamma t} \right)}{\omega_n (M^2 c^2 - 2Mc\gamma lm + l^2 m^2 (\gamma^2 + \omega_n^2))} \cos \lambda_n x \quad (2.3.1.7)$$

Фурье-спектр скорости (2.3.1.7) входного торца стержня при  $x=0$  с учетом  $v(t)=0$  при  $t<0$  является Лапласовым изображением:

$$V(\omega) = \int_0^{+\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{2\omega c v_0 i}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 + \gamma^2 + 2\gamma\omega i) \left( \omega i + \frac{Mc}{ml} \right)} \quad (2.3.1.8)$$

Отсюда видно, что амплитуда  $|V(\omega)|$  этого выражения получается умножением (2.3.1.6) на частоту  $\omega$ .

### 2.3.2. Влияние масс соударяющейся пары и изменяемости звукового давления на распределение амплитуд спектра

В экспериментальной части работы измеряются не перемещения торцов стержня, а акустическое давление, регистрируемое микрофоном, расположенным у торца стержня. Поэтому при согласовании теоретических и экспериментальных результатов необходимо перейти к определению акустического давления в окрестности торца стержня.

Для определения акустического давления плоского круглого торца стержня, пульсирующего в обе стороны с амплитудами, зависящими от частот, используется потенциал скоростей, который записывается в виде [93]:

$$\varphi(\omega) = \frac{|V(\omega)|}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-i\frac{\omega}{c_1} r}}{r} dS \quad (2.3.2.1)$$

где  $c_1$  – скорость звука в акустическом пространстве,  $r$  – расстояние от элемента излучающей поверхности  $dS$  до точки измерения,  $|V(\omega)|$  – амплитуда скорости излучающей поверхности.

Для направления вдоль оси стержня интеграл (2.3.2.1) приобретает явный вид. В этом случае амплитуда акустического давления на расстоянии  $l_0$  в зависимости от частоты с учетом связи с потенциалом скоростей  $p=i\omega\rho\phi$  представляется выражением [93]:

$$|p(\omega)| = |V(\omega)| \left| \int_0^{r_0} i\omega\rho_1 \frac{e^{-i\frac{\omega}{c_1}\sqrt{l_0^2+r^2}}}{\sqrt{l_0^2+r^2}} r dr \right| = \rho_1 c_1 |V(\omega)| |f(\omega)|, \quad (2.3.2.2)$$

$$|f(\omega)| = 2 \left| \sin \left( \frac{\omega l_0 - \omega \sqrt{l_0^2 + r_0^2}}{2c_1} \right) \right|$$

где  $r_0$  – радиус стержня,  $\rho_1$  – плотность акустической среды.

Формула (2.3.2.2) справедлива, когда плоскость торца поршня продолжается экраном, на котором считается равным нулю потенциал скорости вне поршня. Однако Л.Я. Гутиным показано, что звуковое поле и импеданс осциллирующей поршневой диафрагмы и пульсирующей поршневой диафрагмы, излучающих без экрана, для направления вдоль оси стержня малоразличимы от случая с экраном [93].

В результате определены амплитудно-частотная зависимость скорости  $|V(\omega)|$  и осциллирующая функция  $|f(\omega)|$ , что позволяет определить акустическое давление вдоль оси колеблющегося стержня на заданном расстоянии от торца стержня. Для разных соотношений масс соударяющейся пары и периода, осциллирующей функции, подобранного из эксперимента, были построены АЧ-зависимости на рисунке 2.3 и 2.4.

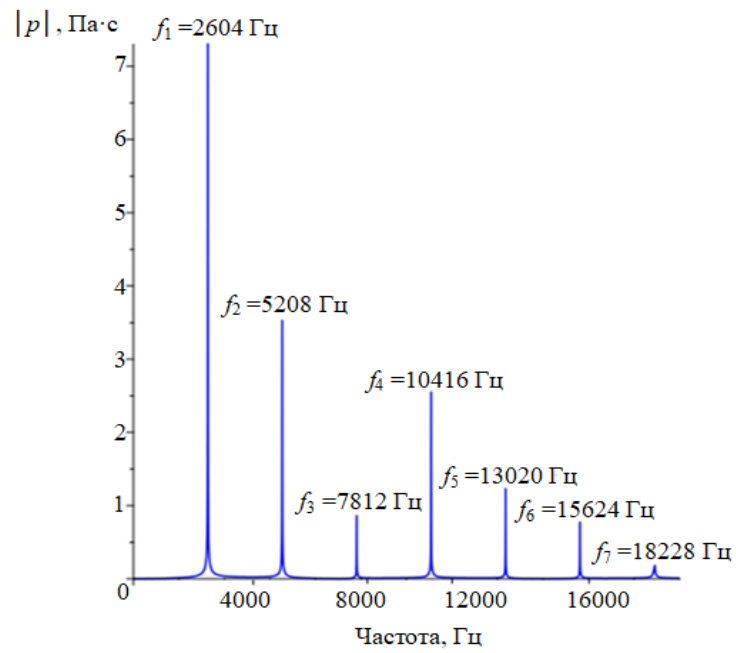


Рисунок 2.3 – Теоретический спектр акустического давления в диапазоне частот 0 – 20000 Гц при отношении масс  $m/M = 0.41$

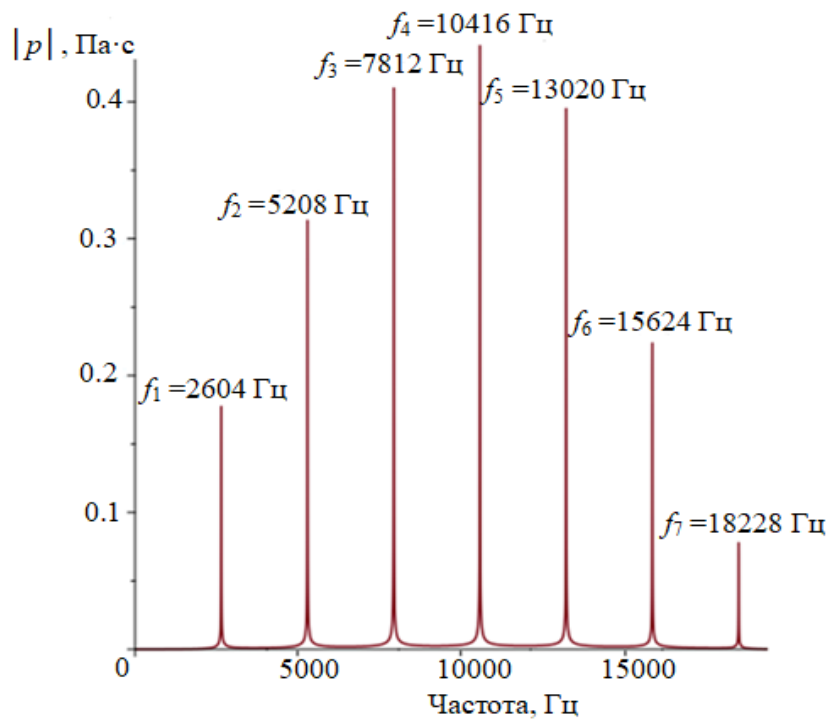


Рисунок 2.4 – Теоретический спектр акустического давления в диапазоне частот 0 – 20000 Гц при отношении масс  $m/M = 0.014$

При расчете использовалась функция  $f(\omega)$  с периодом, определенным из эксперимента. В этом случае распределение амплитуд спектра частот теоретической модели совпадает с экспериментальными данными.

#### 2.4. Экспериментальная верификация теоретической модели послеударных колебаний

Измерения проводились на установке, схематически показанной на рисунке 2.5. Колебания цилиндрического стержня, подвешенного на двух нитях, возбуждались ударом по торцу стержня. Для этого использовался либо стальной шарик с массой, много меньшей массы стержня, либо ударный молоток AU02 с массой 330 г, соединённый с двухканальным спектроанализатором A19-U2.

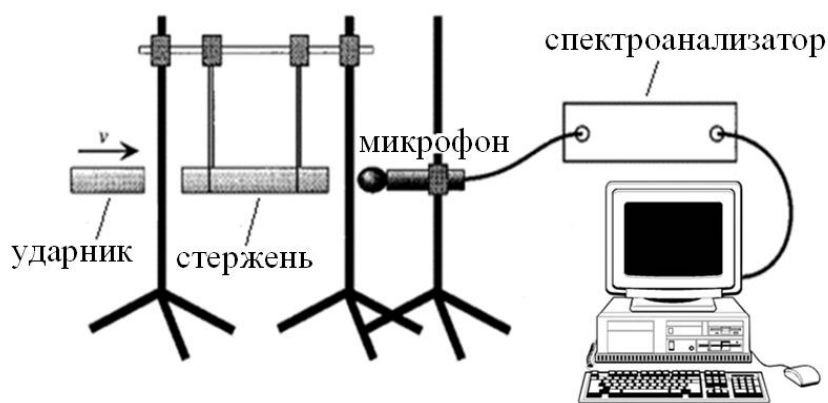


Рисунок 2.5 – Схема экспериментальной установки для ударного возбуждения и регистрации продольных колебаний стержня

Для регистрации колебаний использовался лабораторный микрофон, расположенный вблизи противоположного (выходного) торца стержня. Сигнал от микрофона поступал на анализатор спектра A19-U2, а затем передавался на компьютер для дальнейшей обработки с помощью программного комплекса ZETLab. Частота дискретизации данного анализатора спектра составляет 250 кГц. Исходя из теоремы Котельникова-Шеннона, верхней границей различаемого диапазона частот будет 125 кГц. В результате микрофонной записи и работы анализатора спектра производилась одновременная запись амплитудно-временных и амплитудно-частотных зависимостей колебаний торцов стержня.

В качестве образца использовался цилиндрический стержень из алюминиевого сплава длиной  $l=1$  м, диаметром  $d=20$  мм. Масса стержня  $M = 0.823$  кг. На рисунке 2.6 показана микрофонная запись многочастотного сигнала звукоизлучения стержня продолжительностью 0.1 с после ударного воздействия в момент времени  $t=0$ .

Среднее значение коэффициента  $\gamma$ , характеризующего скорость затухания колебаний во времени, определялось по огибающей экспериментальной амплитудно-временной зависимости (Рисунок 2.6) из условия:

$$\gamma = \frac{1}{k\Delta t} \ln \frac{A(t_0)}{A(t_0 + k\Delta t)} = \frac{1}{260 \cdot 0.000384} \ln \frac{800}{250} \cong 12 \text{ с}^{-1}$$

где  $t_0 + k\Delta t$  – продолжительность записи колебаний, равная 0.1 с,  $A(t)$  – амплитуда колебаний торца стержня в момент времени  $t$ . Начальная амплитуда  $A(t_0)$  соответствует моменту времени – 0.00042 с., амплитуда окончания записи  $A(t_0 + k\Delta t)$  соответствует 0.1 с,  $k = 260$  – число периодов на интервале записи,  $\Delta t = 0.000384$  с – продолжительность периода колебаний.

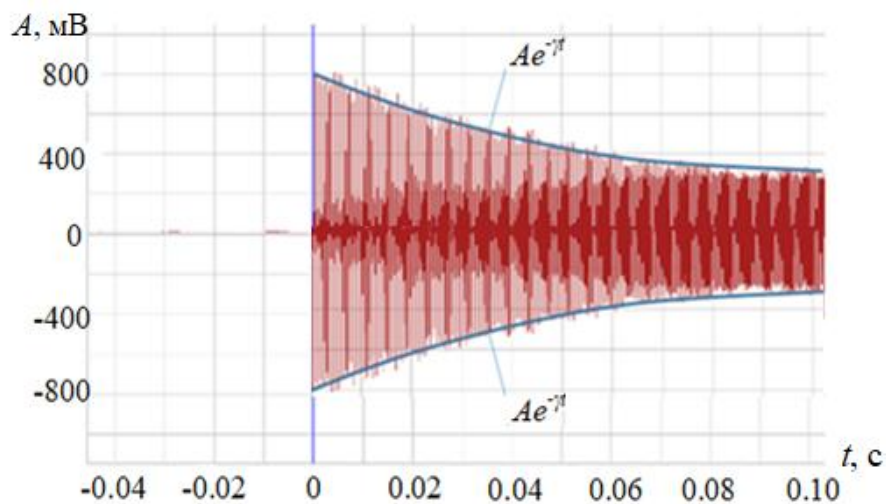


Рисунок 2.6 - Амплитудно-временная зависимость затухающих колебаний с экспоненциальной огибающей

Проведены серии экспериментов, в которых при разных соотношениях между массой ударника и стержня возбуждались колебания стержня и регистриро-

валось акустическое давление, излучаемое торцами на заданном расстоянии в условиях, где акустическое сопротивление среды соответствовало сопротивлению воздуха при температуре 20 градусов Цельсия. На рисунках 2.7-2.8 приведены экспериментальные спектры акустического давления вблизи выходного конца стержня при максимальном и минимальном соотношениях масс соударяющейся пары  $m/M=0.41$  и  $0.014$ . Амплитуды экспериментальных спектров акустического давления по осям ординат отложены в единицах электрического сигнала, поступающего с микрофона (мВ).

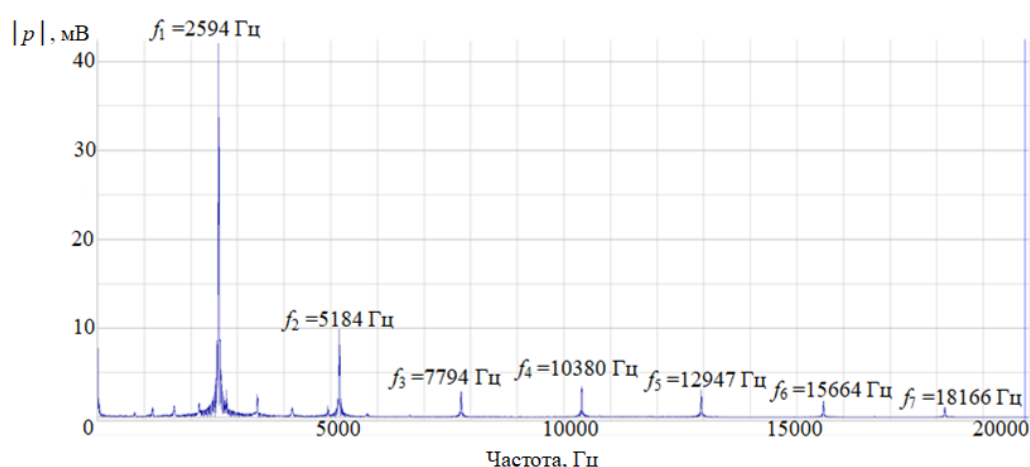


Рисунок 2.7 – Экспериментальный спектр акустического давления в диапазоне частот 0 – 20000 Гц при отношении масс  $m/M=0.41$

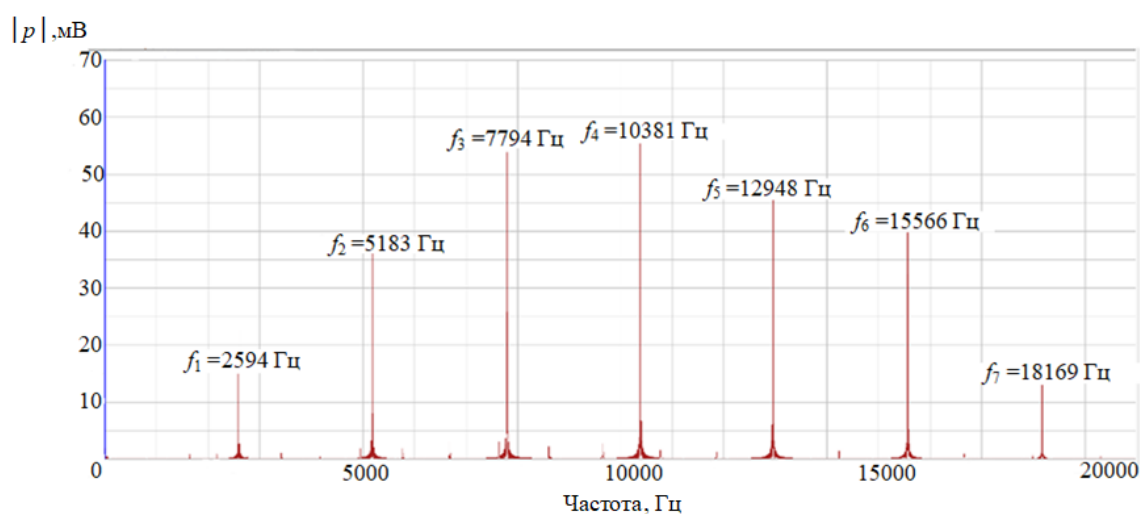


Рисунок 2.8 – Экспериментальный спектр акустического давления в диапазоне частот 0 – 20000 Гц при отношении масс  $m/M=0.014$

Приведенные данные показывают хорошее согласование результатов, полученных по теоретической модели, с экспериментальными результатами. По полученным АЧЗ видно, что при наибольшем отношении массы ударника к массе стержня, амплитудный максимум акустического давления выходного конца (Рисунок 2.3, Рисунок 2.7), регистрируемый микрофоном, соответствует частоте основного тона. При уменьшении  $m/M$  амплитудный максимум акустического давления выходного конца сдвигается по частоте и, в данном случае, соответствует 4-му обертому (Рисунок 2.4, Рисунок 2.8). Данное различие объясняется различным периодом осциллирующей функции и тем, что при ударе по стержню молотком амплитуды скорости выходного конца на разных частотах отличаются друг от друга значительно большее осциллирующего эффекта функции  $f(\omega)$ ; таким образом, максимум акустического давления соответствует частоте основного тона. При стремлении отношения масс к нулю спектр меняется и диктующим максимум оказывается осциллирующий эффект.

### **Глава 3. Метод частотной оценки осевой нагрузки и реальных граничных условий в стержнях**

Оценка усилий и жёсткости соединений имеет принципиальное значение для контроля стержневых элементов креплений кровли шахт, мостов, сетчатых оболочек и других конструкций. Существующие методы оценки подразделяются на статические и динамические. В главе рассмотрена методика динамической оценки продольного усилия и коэффициентов угловой жёсткости заделки неидеально закреплённого стержня по спектру его изгибных колебаний путём сравнения экспериментально зарегистрированных частот колебаний с теоретическим спектром частот, сгенерированных на основе аналитической модели балки Тимошенко. Для согласования результатов по теоретической модели с набором экспериментальных частот используется сочетание известных алгоритмов оптимизации на основе глобального поиска и локальных минимумов. Такой подход активно применяется, в частности, для анализа условий работы стяжных стержней в исторических каменных конструкциях. Также проведена экспериментальная верификация динамической методики на стержневых моделях с известными значениями продольного усилия и угловой жёсткости заделки. Для этого в качестве модельных образцов рассмотрены две балки. В одной из них при растяжении в испытательной машине создавались заданные продольные усилия. Другая балка имела вид консоли с торцевым резьбовым креплением, по степени затяжки которого, контролируемой по статическому прогибу консоли, определялся коэффициент угловой жёсткости крепления. В результате, в зависимости от параметров балки, определено минимальное количество регистрируемых собственных частот её колебаний, необходимое для динамической оценки продольного усилия с приемлемой погрешностью. Также показана зависимость критической частоты балки Тимошенко от внутреннего силового фактора – растягивающей силы. Выявлена особенность разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации.

Часть главы продолжает серию исследований, посвящённых соответственно экспериментальным данным предсказаний теории балки Тимошенко (ТБТ) о двойном спектре сверхкритических частот поперечных колебаний на примере балки со свободными концами. Рассматриваются поперечные колебания в плоскости наибольшей жесткости свободно подвешенной на гибких нитях латунной полосы, для которых критическая частота по ТБТ находится внутри акустического спектра. Исходя из сопоставления спектров экспериментальных и теоретических частот продольных и поперечных колебаний балки, проведено уточнение значений механических параметров балки, таких как скорость звука и коэффициент Пуассона, в результате чего достигнута высокая степень согласования этих спектров, в том числе, - за критической частотой. Экспериментально верифицированы парные частоты в сверхкритической области, предсказанные ТБТ.

### 3.1. Модель поперечных колебаний стержня Тимошенко с учетом продольной силы и граничных условий упругой заделки

Рассмотрим поперечные колебания балки, нагруженной заранее неизвестной продольной силой при неизвестных угловых жёсткостях закреплений. Расчётная схема такой балки представлена на рисунке 3.1.

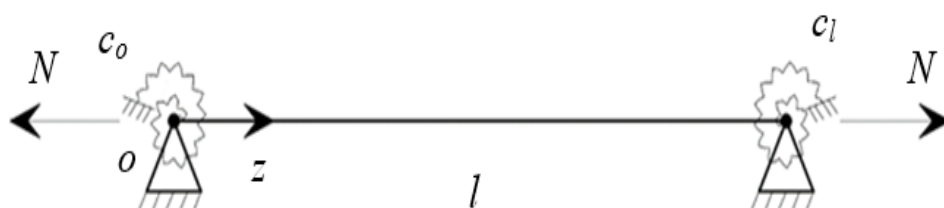


Рисунок 3.1 – Расчётная схема балки длиной  $l$  с продольной нагрузкой  $N$  и угловыми упругими закреплениями концов с жесткостями  $c_0, c_l$

Для описания свободных поперечных колебаний балки используем модель колебаний балки Тимошенко с учетом продольного усилия  $N$  [94] в обозначениях [95]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{GF}{\alpha EI} \left( 1 - \frac{\alpha N}{GF} \right) \left( \theta - \frac{\partial x}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\alpha \rho}{G} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left( 1 - \frac{\alpha N}{GF} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3.1.1)$$

( $x(z, t)$  – поперечное смещение центра тяжести сечения,  $\theta(z, t)$  – угол поворота поперечного сечения,  $\alpha$  – коэффициент, учитывающий неравномерность касательных напряжений по сечению, зависящий от формы сечения,  $E$  – модуль упругости,  $G$  – модуль сдвига,  $I$  – момент инерции сечения в плоскости изгиба,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $\rho$  – плотность материала).

Граничные условия для балки с упругими связями - пружинными шарнирами с угловыми жесткостями  $c_0, c_l$ :

$$x|_{z=0,l} = 0, \quad c_0 \theta|_{z=0} = EI \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad c_l \theta|_{z=l} = -EI \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=l} \quad (3.1.2)$$

Полагая  $\{x(z, t), \theta(z, t)\} = \{X(z), \Theta(z)\} \exp(i\omega t)$  и исключая угол поворота  $\theta$  из системы уравнений (3.1.1), приходим к разрешающему уравнению относительно функции поперечного смещения оси балки:

$$X^{IV} + \frac{(\rho \omega^2 I (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{EGFI} X'' + \frac{\rho \omega^2 (\alpha (I \omega^2 \rho + N) - GF)}{EGI} X = 0 \quad (3.1.3)$$

С учетом того, что для подобных балок критическая частота  $\omega_c$  колебаний по модели Тимошенко, определяемая из равенства:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{GF}{\alpha I \rho} - \frac{N}{I \rho}} \quad (3.1.4)$$

лежит значительно выше верхней границы акустического спектра, решение уравнения (3.1.3) может быть представлено в виде:

$$X(z) = C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z + C_3 \operatorname{ch} \mu z + C_4 \operatorname{sh} \mu z$$

$$\begin{aligned}\theta(z) = & C_1 \sin \lambda z \left( \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \lambda} - \lambda \right) + C_2 \cos \lambda z \left( \lambda - \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \lambda} \right) + \\ & + C_3 \operatorname{sh} \mu z \left( \mu + \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \mu} \right) + C_4 \operatorname{ch} \mu z \left( \mu + \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \mu} \right)\end{aligned}\quad (3.1.5)$$

где

$$\begin{aligned}\lambda = & \left( \frac{(\rho \omega^2 I (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\left( \frac{(\rho \omega^2 I (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2 (\alpha (I \omega^2 \rho + N) - GF)}{EGI}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \mu = & \left( -\frac{(\rho \omega^2 I (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\left( \frac{(\rho \omega^2 I (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2 (\alpha (I \omega^2 \rho + N) - GF)}{EGI}} \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (3.1.6)$$

Заметим, что растягивающая сила снижает значение критической частоты  $\omega_c$ .

Подстановка выражений (3.1.5) в граничные условия (3.1.2) приводит к частотному уравнению:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ EI \lambda^2 - \frac{EI \alpha \rho \omega^2}{G} & c_0 \lambda - \frac{c_0 \alpha \rho \omega^2}{\lambda G} & -EI \mu^2 - \frac{EI \alpha \rho \omega^2}{G} & c_0 \mu + \frac{c_0 \alpha \rho \omega^2}{\mu G} \\ \cos \lambda l & \sin \lambda l & \operatorname{ch} \mu l & \operatorname{sh} \mu l \\ \left( \frac{\alpha \rho \omega^2}{\lambda G} - \lambda \right) c_l \sin \lambda l + & \left( \lambda - \frac{\alpha \rho \omega^2}{\lambda G} \right) c_l \cos \lambda l + & \left( \mu + \frac{\alpha \rho \omega^2}{\mu G} \right) c_l \operatorname{sh} \mu l + & \left( \mu + \frac{\alpha \rho \omega^2}{\mu G} \right) c_l \operatorname{ch} \mu l + \\ + \left( \frac{\alpha \rho \omega^2}{G} - \lambda^2 \right) EI \cos \lambda l & + \left( \frac{\alpha \rho \omega^2}{G} - \lambda^2 \right) EI \sin \lambda l & + \left( \mu^2 + \frac{\alpha \rho \omega^2}{G} \right) EI \operatorname{ch} \mu l & + \left( \mu^2 + \frac{\alpha \rho \omega^2}{G} \right) EI \operatorname{sh} \mu l \end{vmatrix} = 0$$

Для модели балки Эйлера-Бернулли параметры  $\lambda$ ,  $\mu$  принимают вид:

$$\lambda = \sqrt{-\frac{N}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{N}{2EI}\right)^2 + \frac{\omega^2 \rho F}{EI}}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{N}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{N}{2EI}\right)^2 + \frac{\omega^2 \rho F}{EI}}} \quad (3.1.7)$$

Граничные условия для стержня с неизвестными угловыми жесткостями по этой модели:

$$x|_{z=0,l} = 0, \quad c_0 \frac{\partial x}{\partial z} \bigg|_{z=0} = EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \bigg|_{z=0}, \quad c_l \frac{\partial x}{\partial z} \bigg|_{z=l} = -EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \bigg|_{z=l} \quad (3.1.8)$$

Соответствующее частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ EI\lambda^2 & c_0\lambda & -EI\mu^2 & c_0\mu \\ \cos\lambda l & \sin\lambda l & \operatorname{ch}\mu l & \operatorname{sh}\mu l \\ -c_l\lambda \sin\lambda l - EI\lambda^2 \cos\lambda l & c_l\lambda \cos\lambda l - EI\lambda^2 \sin\lambda l & c_l\mu \operatorname{sh}\mu l + EI\mu^2 \operatorname{ch}\mu l & c_l\mu \operatorname{ch}\mu l + EI\mu^2 \operatorname{sh}\mu l \end{vmatrix} = 0$$

Для выделения в качестве главного неизвестного угловой жёсткости крепления стержня, наряду с общей расчетной схемой, изображенной на рисунке 3.1, рассмотрим поперечные колебания консольной балки с неизвестной угловой жёсткостью закрепления. Расчётная схема такой балки представлена на рисунке 3.2.

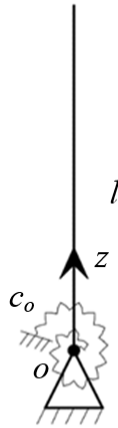


Рисунок 3.2 – Расчётная схема балки длиной  $l$  с упругим угловым закреплением конца с жесткостью  $c_0$

Граничные условия для консольного стержня с упругим узлом по модели Тимошенко:

$$x|_{z=0} = 0, \quad c_0 \theta|_{z=0} = EI \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{x=l} = 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial z} - \theta \right) \Big|_{x=l} = 0 \quad (3.1.9)$$

Соответствующее частотное уравнение примет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ EI\lambda^2 - \frac{EI\alpha\rho\omega^2}{G} & c_0\lambda - \frac{c_0\alpha\rho\omega^2}{\lambda G} & -EI\mu^2 - \frac{EI\alpha\rho\omega^2}{G} & c_0\mu + \frac{c_0\alpha\rho\omega^2}{\mu G} \\ \left(-\lambda^2 + \frac{\alpha\rho\omega^2}{G}\right)\cos\lambda l & \left(-\lambda^2 + \frac{\alpha\rho\omega^2}{G}\right)\sin\lambda l & \left(\mu^2 + \frac{\alpha\rho\omega^2}{G}\right)\operatorname{ch}\mu l & \left(\mu^2 + \frac{\alpha\rho\omega^2}{G}\right)\operatorname{sh}\mu l \\ -\frac{\alpha\rho\omega^2 \sin\lambda l}{\lambda G} & \frac{\alpha\rho\omega^2 \cos\lambda l}{\lambda G} & -\frac{\alpha\rho\omega^2 \operatorname{sh}\mu l}{\mu G} & -\frac{\alpha\rho\omega^2 \operatorname{ch}\mu l}{\mu G} \end{vmatrix} = 0$$

Граничные условия для консольного стержня с угловой жёсткостью в закреплении по модели Эйлера-Бернулли:

$$x|_{z=0} = 0, \quad c_0 \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{z=0} = EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \Big|_{z=l} = 0, \quad \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \Big|_{z=l} = 0 \quad (3.1.10)$$

Частотное уравнение в этом случае может быть записано в виде равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ EI\lambda^2 & c_0\lambda & -EI\mu^2 & c_0\mu \\ -\lambda^2 \cos\lambda l & -\lambda^2 \sin\lambda l & \mu^2 \operatorname{ch}\mu l & \mu^2 \operatorname{sh}\mu l \\ \lambda^3 \sin\lambda l & -\lambda^3 \cos\lambda l & \mu^3 \operatorname{sh}\mu l & \mu^3 \operatorname{ch}\mu l \end{vmatrix} = 0$$

Полученные из приведенных уравнений значения частот сравниваются ниже с экспериментально найденными частотами растянутого и консольного стержней.

### 3.2 Построение алгоритма поиска решений

При заданных параметрах балки, действующей продольной силе и жесткостях заделки выписанные частотные уравнения обеспечивают однозначное определение собственных частот, соответствующих определённым формам колебаний балки. В то же время, решение обратной задачи исходя из известных собственных частот балки может быть неоднозначным. Для поиска значений угловых жесткостей заделок  $c_0$ ,  $c_1$  и усилия  $N$  в модели балки Тимошенко были применены алгоритмы глобальной оптимизации (basin-hopping) и локальной оптимизации - метод Нелдера-Мида подобно тому, как это реализовано в [76, 85, 96] на модели балки Эйлера-Бернулли. Метод является итеративным, каждый цикл которого состоит из случайного возмущения координат, локальной минимизации, принятия или отбрасывания новых координат на основе минимального значения функции. Краткое изложение алгоритма [113] содержится в Приложении. На рисунке 3.3 показана блок-схема, обобщающая принятый метод.

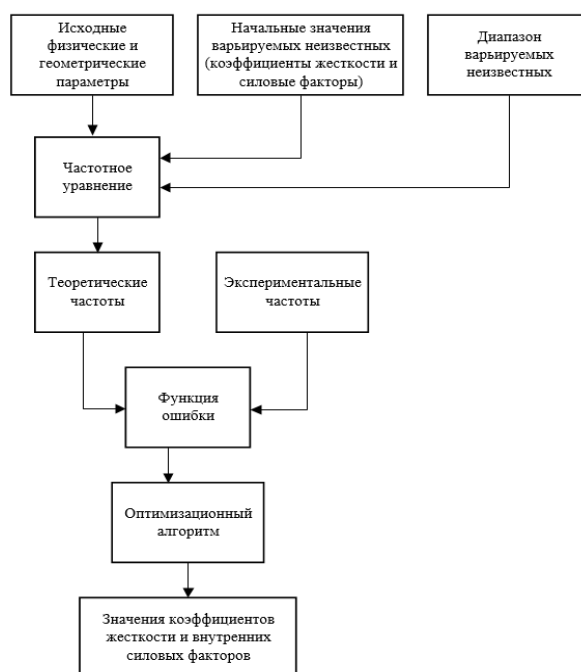


Рисунок 3.3 – Оценка коэффициентов угловой жесткости заделки и продольной силы по собственным частотам: блок-схема алгоритма

Оценка производится по минимуму функции ошибок, называемой квадратичной функцией потерь [97], при сравнении теоретических и экспериментальных частот:

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_i^N (f_{\text{exp},i} - f_{\text{th},i})^2 \quad (3.2.1)$$

где  $f_{\text{exp},i}$  –  $i$ -ая экспериментальная частота,  $f_{\text{th},i}$  –  $i$ -ая теоретическая частота, а  $N$  ограничено снизу числом искомым неизвестных при решении обратной задачи.

Преимуществом применения квадратичной функции потерь (3.2.1) является инвариантность к знаку: значение функции всегда положительно, т.е. происходит объективное накопление ошибки от каждого из слагаемых, в то время как при использовании линейной функции, как в [85], возможна ситуация, когда большую положительную ошибку от первого слагаемого "погашает" большая отрицательная ошибка от второго.

### 3.3 Экспериментальная верификация теоретической модели

Предметом экспериментального изучения были послеударные поперечные колебания стальной полосы 1 (Рисунок 3.4а), закрепленной в разрывной машине МИМ.2 двумя механическими клиновыми захватами 2, имитирующими упругие заделки, при малом и значительном статическом растяжении силами, равными 0,15 и 1,97 кН. Длина полосы между захватами  $l=0,585$  м, поперечное сечение: 2 на 48 мм. Для балки, рассматриваемой в эксперименте, условия закрепления обоих концов одинаковы; поэтому можно считать  $c_0 = c_l = c$ .

Колебания в плоскости наименьшей жесткости возбуждались ударом металлического шарика по широкой грани в двух местах: посередине длины полосы и на четверти длины, чтобы обеспечить возбуждение как симметричных, так и антисимметричных форм. С противоположной от места удара стороне полосы располагался лабораторный микрофон 3 (Рисунок 3.4а), соединённый со спектроанализатором типа А19-У2, данные из которого поступали в ЭВМ.

Также экспериментально изучался спектр поперечных колебаний консольного дюралюминиевого цилиндрического стержня длиной  $l=0,745\text{ м}$  с диаметром  $d=24,7\text{ мм}$  при различной величине затяжки резьбовой шпильки на конце стержня 1 (Рисунок 3.4б,в) в массивный стальной стол 2 со шлифованной поверхностью в месте контакта. Для статического измерения величины угловой жесткости заделки консоли при помощи датчика перемещения 3 типа ЛИР-14 определялся прогиб её конца под действием гири 4 массой  $200\text{ г}$ .

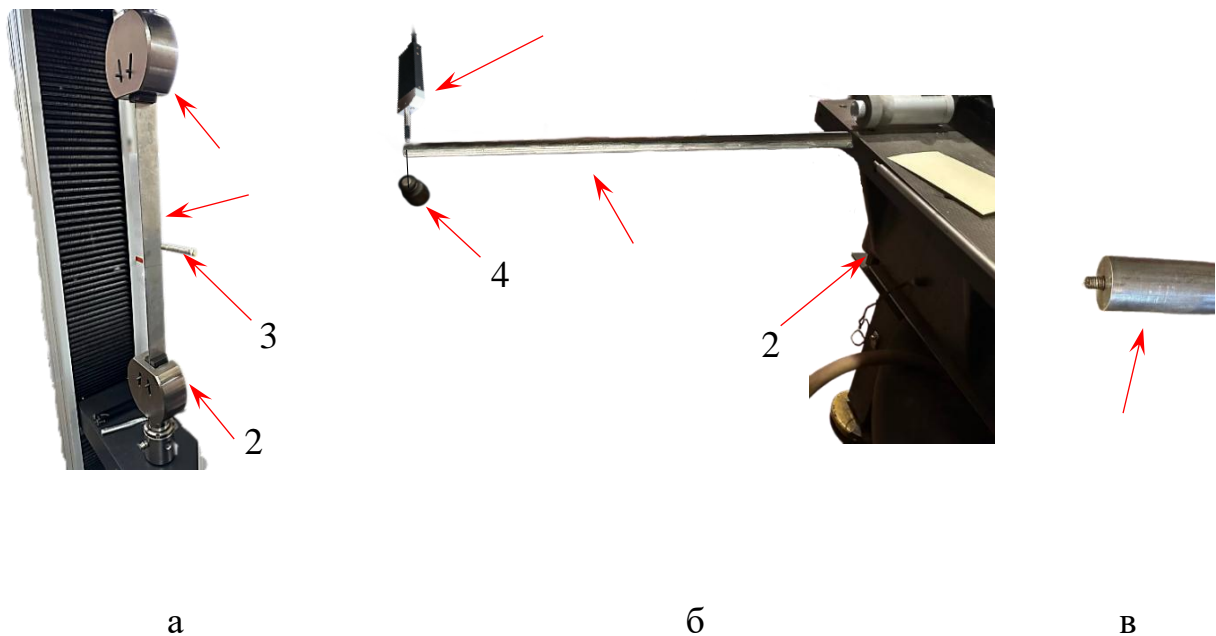
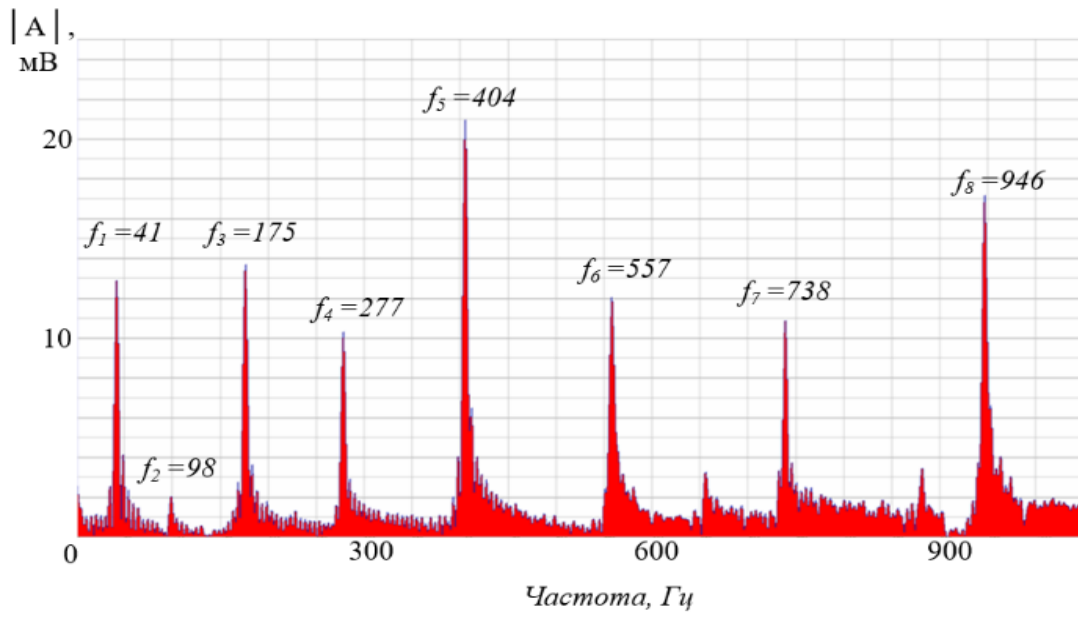
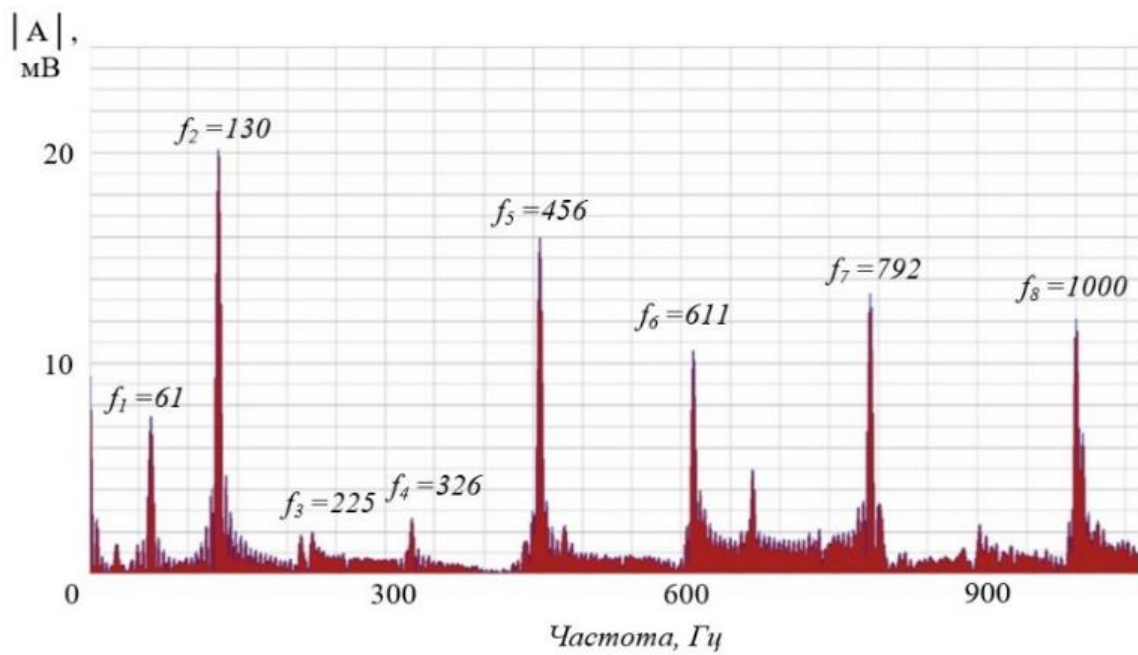


Рисунок 3.4 – Экспериментальная установка для статического и динамического определения продольной силы (а) и угловой жёсткости крепления (б) образцов; резьбовая шпилька для ввинчивания консоли в массивный стол (в)

На рисунках 3.5-3.6 приведены фрагменты спектров колебаний экспериментальных образцов в акустическом диапазоне: на рисунке 3.5 - спектры полосы при растяжении силами  $0,15\text{ кН}$  (а) и  $1,97\text{ кН}$  (б), а на рисунке 3.6 - спектры консоли при максимально возможной (а) и слегка ослабленной (б) затяжке резьбового крепления.

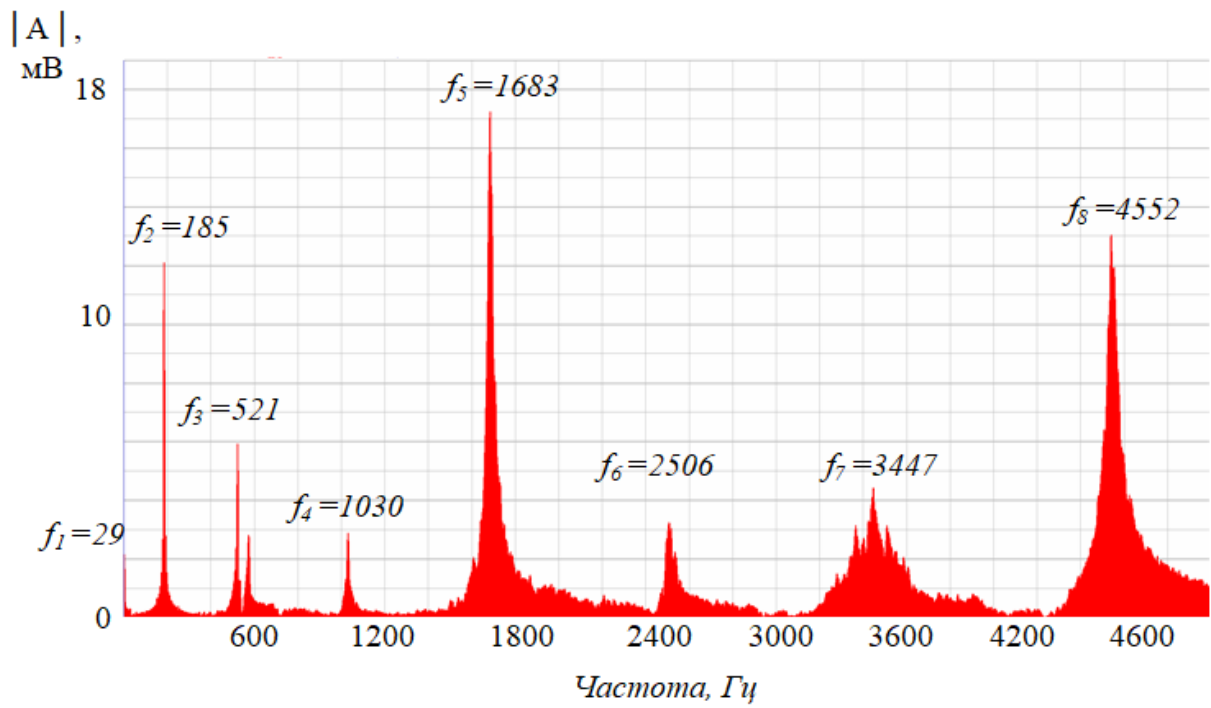


а

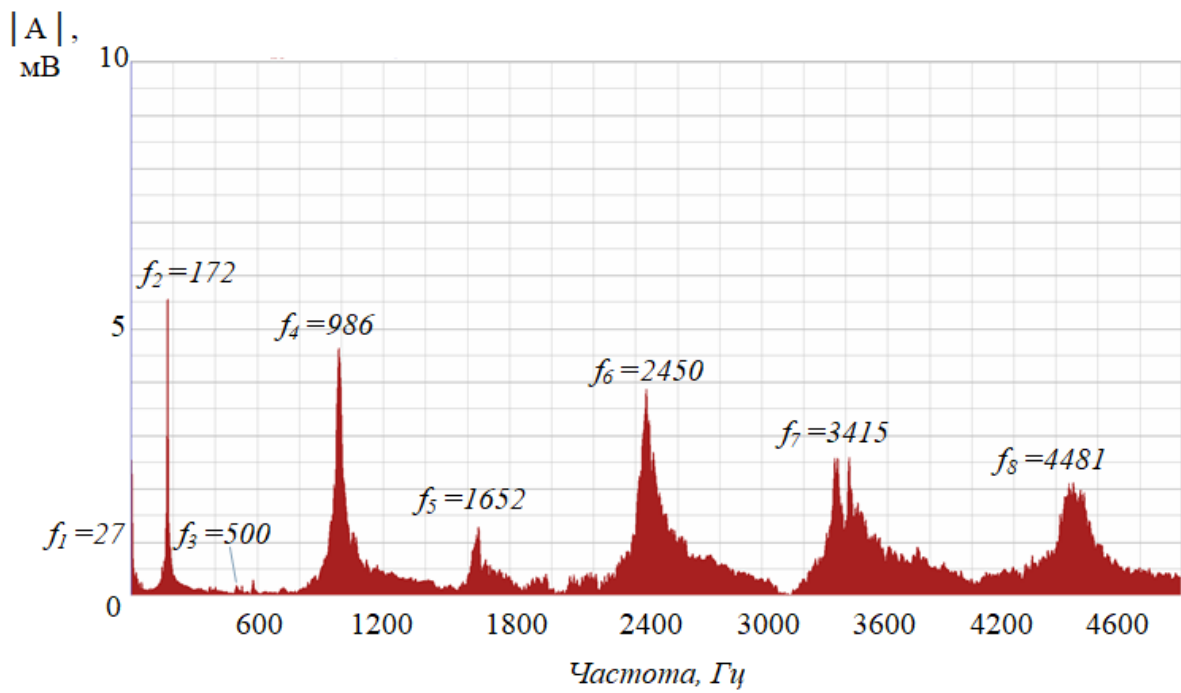


б

Рисунок 3.5 – Экспериментальные акустические спектры полосы при растяжении силой 0,15 кН (а) и 1,97 кН (б)



а



б

Рисунок 3.6 – Экспериментальные акустические спектры консольного стержня при максимальной (а) и слегка ослабленной затяжке (б)

В таблице 3.3.1 приведены зарегистрированные собственные частоты полосы при малой ( $f^{(A)}_i$ ) и значительной ( $f^{(B)}_i$ ) растягивающих силах ( $i=1, 2, \dots, 8$ ). Частоты в экспериментальных спектрах образцов выделяются в соответствии с теоретическими спектрами; остальное отнесено к шуму и частотам колебаний, не связанных с поперечными колебаниями в плоскости возбуждения.

Таблица 3.3.1 – Экспериментальные собственные частоты тонкостенной полосы при малой ( $f^{(A)}_i$ ) и значительной ( $f^{(B)}_i$ ) растягивающей силе в Гц

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^{(A)}_i$	41	98	175	277	404	557	738	946
$f^{(B)}_i$	61	130	225	326	456	611	792	1000

Из сопоставления спектров, изображённых на рисунке 3.5а,б, и значений частот в таблице 3.3.1 видно, что растяжение образца силой 1.97 кН по сравнению с 0,15 кН приводит к увеличению значений собственных частот, соответствующих идентичным формам колебаний, что позволяет использовать эффект их изменения при решении обратной задачи определения внутренних силовых факторов в полосе. Также можно отметить увеличение шага между частотами с ростом продольной нагрузки.

При сопоставлении результатов, полученных по различным расчётным моделям, можно отметить, что для данной тонкостенной полосы при возбуждении колебаний в плоскости наименьшей жесткости учет сдвиговой деформации и инерции вращения не дает принципиальных отличий в определении растягивающей силы, чего нельзя сказать о результатах для второго экспериментального образца, - консольного цилиндрического стержня, используемого при тестировании методики определения угловой жесткости упругого узла.

Определение величины продольной силы и коэффициентов угловой жесткости зажимов тонкостенной полосы по экспериментальным частотам производилось с помощью, описанного выше, стохастического метода. Границы поиска продольной силы были взяты от 0 до 4000 Н, начальное приближение задавалось в 1800 Н.

Результаты расчётов с использованием одной первой, двух, ..., восьми собственных частот представлены в виде диаграммы на рисунке 3.7. Видно, что с приемлемой погрешностью менее 2% (1950 Н против 1970 Н в статике) продольная сила определяется при учёте не более чем пяти первых собственных частот поперечных колебаний стержня, что важно при анализе спектров, зашумленных паразитными частотами. Следует также отметить, что коэффициент угловой жесткости захватов при последовательном увеличении верхней границы поиска в диапазоне от 0 до 100000 Нм/рад каждый раз достигал верхней границы заданного диапазона, что указывает на допустимость считать захваты жесткими заделками.

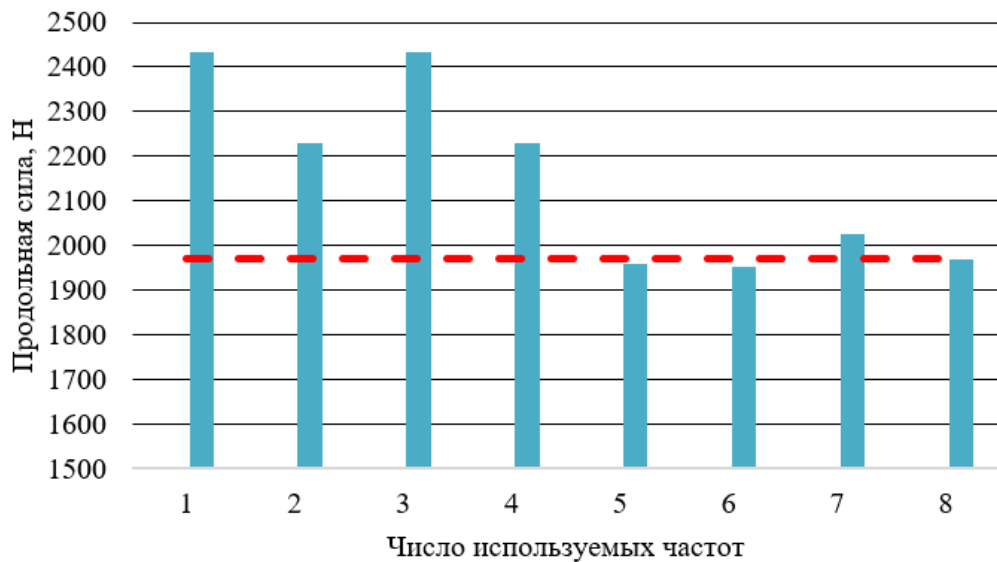


Рисунок 3.7 – Значения продольной силы, определённые динамическим методом по одной первой, двум, ..., восьми собственным частотам; штриховой линией показано значение продольной силы, заданное в растягивающей установке

В случае консольного стержня угловая жесткость упругого узла является основной неизвестной. В таблице 3.3.2 приведены восемь первых собственных частот дюралюминиевого цилиндрического консольного стержня при различной величине угловой жесткости упругого узла до и после незначительного ослабления затяжки.

Таблица 3.3.2 – Собственные частоты консольного стального стержня до ( $f^{(C)}_i$ ) и после ( $f^{(D)}_i$ ) ослабления затяжки в Гц

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^{(C)}_i$	29	185	521	1030	1683	2506	3447	4552
$f^{(D)}_i$	27	172	500	986	1652	2450	3415	4481

По графикам амплитудно-частотных зависимостей (Рисунок 3.6) и данным таблицы 3.3.2 видно, что ослабление величины затяжки приводит к снижению собственных частот консоли, что позволяет использовать это снижение при решении обратной задачи определения угловой жесткости заделки; при этом учитывается преобладающее влияние на частоту поперечных колебаний угловой жёсткости в сравнении с линейной жёсткостью заделки [98].

Используя стохастический метод минимизации функции потерь по аналогии с, рассмотренным выше, растянутым образцом, для измеренных независимо механических свойств материала консоли ( $E = 72$  ГПа,  $\rho = 2780$  кг/м<sup>3</sup>), по первым четырем собственным частотам ввинченного до упора консольного стержня получены следующие коэффициенты угловой жесткости по модели Тимошенко и Эйлера-Бернулли соответственно: 56590 Нм/рад, 47600 Нм/рад. Границы поиска угловой жесткости заделки были приняты от 40000 до 60000 Нм/рад, начальное значение - 50000 Нм/рад. Сопоставляя с результатом, полученным статическим методом ( $c = 55500$  Нм/рад), можно утверждать о заниженном более чем 10% значении коэффициента жесткости, полученном по модели Эйлера-Бернулли, тогда как при использовании модели Тимошенко отличие от эксперимента составляет менее 2%. Коэффициент угловой жесткости заделки после незначительного ослабления резьбовой затяжки консоли, определённый через набор экспериментально зарегистрированных частот, составил 21550 Нм/рад, тогда как по статическим измерениям - 20790 Нм/рад. Различие здесь составило менее 4%.

Как видно из этих и других сопоставлений, не включённых в текст, рассмотренный метод определения жесткостей заделки достаточно чувствительный; отличия в частотах собственных колебаний консоли, не превышающие 7%, позволяют определить резкое снижение угловой жёсткости заделки (в приведенном примере – в 2.6 раза).

### 3.4. Эффект разнонаправленного изменения собственных частот при растяжении стержня

Предметом экспериментального изучения были послеударные колебания стального стержня круглого поперечного сечения 1 (Рисунок 3.8), закрепленного в разрывной машине МИМ.2 двумя цилиндрическими захватами 2, имитирующими упругие заделки, при различном статическом растяжении силами 0.1, 5, 10, 15.2 кН. Длина стержня между захватами  $l = 197$  мм, диаметр 10 мм. Для построения диаграммы растяжения образца использовался навесной экстензометр 3 типа ДД-25.1.

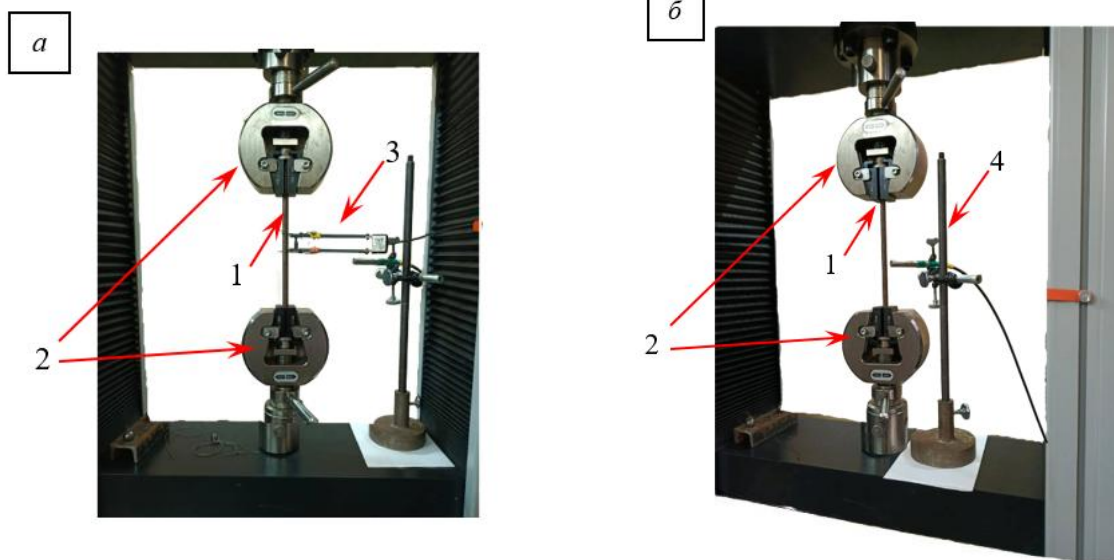


Рисунок 3.8 – Экспериментальная установка для построения диаграммы растяжения (а) и регистрации собственных частот (б)

Поперечные колебания стержня возбуждались ударом металлического шарика в двух местах: посередине и на четверти длины стержня, что обеспечивало

регистрацию как симметричных, так и антисимметричных форм колебаний. Регистрация осуществлялась бесконтактно с помощью лабораторного микрофона 4 (Рисунок 3.8б), соединённого со спектроанализатором типа А19-У2, данные из которого поступали в ЭВМ. В таблице 3.4.1 приведены по четыре первых собственных частот поперечных колебаний стержня при разных значениях растягивающей силы.

Таблица 3.4.1 – Собственные частоты стержня  $f$ , Гц в зависимости от растягивающей силы  $N$ , кН

$N$ , кН	0,1	5	10	15,2
$f_1$	936	948	963	999
$f_2$	2521	2524	2526	2582
$f_3$	4835	4809	4765	4896
$f_4$	7828	7766	7701	7788

Ниже приведена диаграмма (Рисунок 3.9), показывающая изменения частот собственных колебаний с увеличением растягивающей силы, из которой видно, что с увеличением значения силы при растяжении стержня происходит увеличение значения первой собственной частоты на всех уровнях растяжения, однако эта тенденция с ростом порядкового номера частоты не продолжается.

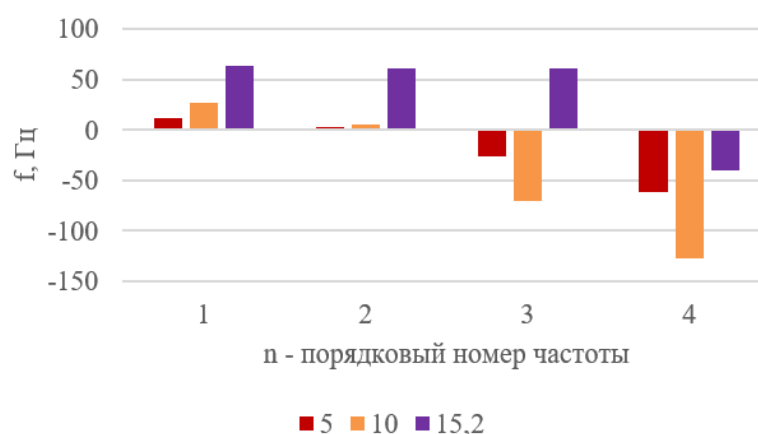


Рисунок 3.9 – Отличия собственных частот  $\Delta f$ , Гц при различной величине натяга  $N$ , кН от частот ненагруженного стержня

Наблюдаемый эффект можно объяснить последовательным снижением значения модуля упругости с ростом растягивающей силы. На рисунке 3.10 приведена диаграмма растяжения образца, показанного на рисунке 3.8 в диапазоне от 0 до 30 кН. Видно, что наклон касательной к кривой нагружения уменьшается с ростом нагрузки, что означает некоторое снижение модуля упругости материала образца по сравнению со значением при меньших нагрузках. Данное обстоятельство обычно не учитывается при расчёте собственных частот поперечных колебаний стержня со значительной растягивающей продольной нагрузкой [76].

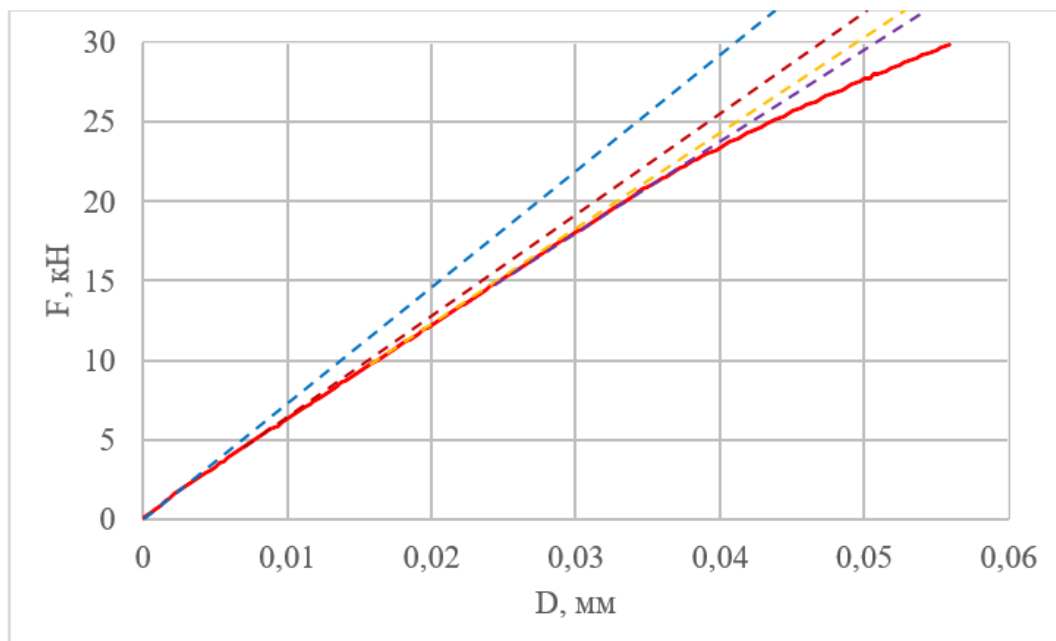


Рисунок 3.10 – Диаграмма растяжения образца (сила – удлинение на базе экстензометра 25 мм)

В качестве обоснования рассмотрим колебания шарнирно-опертого стержня, растянутого продольной силой, по более простой модели Эйлера-Бернулли [76,99].

Для шарнирно-опёртого стержня с натягом частоты колебаний определяются по формуле [95]:

$$f_i = \frac{i}{2l} \sqrt{\frac{N}{m} + \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \frac{EI}{m}}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.4.1)$$

из которой выводится связь изменения частоты  $\Delta f$  с изменением натяжения  $\Delta N$  и изменением модуля упругости  $\Delta E$ :

$$\Delta f_i = \frac{-\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 EI \Delta E + N \Delta N}{2 \left( \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 EI + N \right)} \quad (3.4.2)$$

Из (3.4.2) видно, что увеличение натяга приводит к повышению частоты, но относительное влияние этого фактора снижается с ростом порядкового номера частоты. Напротив, влияние снижения модуля упругости возрастает с ростом порядкового номера частоты.

В таблице 3.4.2 приведены результаты расчётов, показывающие поведение первых четырёх частот для стержня со параметрами: длина 197 мм, диаметр 10 мм, материал – сталь, плотность 7800 кг/м<sup>3</sup>, модуль упругости первоначальный 200 ГПа, затем (при большом растяжении) - 195 ГПа. Первый расчёт сделан для ненапрянутого стержня с модулем 200 ГПа, второй – для силы натяжения 5 кН при модуле 195 ГПа.

Таблица 3.4.2 – Сравнение расчётных частот

№ частоты	Частота, Гц. (Ненатянутый стержень, E = 200 ГПа)	Частота, Гц. (Натяжение 5000 Н, E = 195 ГПа)	Разность частот, Гц
1	512	555	43
2	2050	2075	25
3	4611	4605	-6
4	8198	8147	-51

Из приведенных результатов видно, что тенденция, отмеченная при экспериментальном определении частот поперечных колебаний растянутого стержня, подтверждается и в расчётном случае.

### 3.5. Теоретический и экспериментальный анализ спектра частот балки Тимошенко в окрестности критической частоты

Дифференциальные уравнения и граничные условия, описывающие по модели ТБТ собственные изгибные колебания стержня со свободными концами, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{kAG}{EI} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \quad \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - kAG \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0, \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0,l} = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \right|_{x=0,l} = 0 \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

где  $w(x,t)$  – динамический прогиб стержня,  $\theta(x,t)$ ,  $G$ ,  $k$  – угол, модуль и коэффициент сдвига,  $A$ ,  $I$  – площадь и момент инерции поперечного сечения,  $E$ ,  $\rho$  – модуль упругости и плотность материала стержня. Полагая

$$\{w(x,t), \theta(x,t)\} = \{W(x), \Theta(x)\} \exp(i\omega t)$$

и исключая угол сдвига из системы уравнений (3.5.1), приходим к разрешающему уравнению относительно функции прогиба стержня:

$$\frac{EI}{\rho A} W^{IV}(x) + \frac{I\omega^2}{A} \left(1 + \frac{E}{kG}\right) W''(x) - \omega^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) W(x) = 0, \quad \omega_c^2 = \frac{kGA}{\rho I} \quad (3.5.2)$$

Характер решений этого уравнения зависит от знака коэффициента при нелинейном члене. Анализ соответствующего характеристического уравнения показывает, что при  $\omega < \omega_c$  решение этого уравнения содержит осциллирующую и экспоненциальные компоненты, которые, после удовлетворения граничным условиям дают спектр изгибных колебаний. При  $\omega > \omega_c$  решение уравнения (3.5.2) содержит две компоненты, осциллирующие с разной изменчивостью, что приводит

к двум спектрам колебаний. Вследствие этого, частота  $f_c = \omega_c / 2\pi$  названа критической.

Предметом экспериментального изучения были послеударные поперечные колебания стержня, горизонтально подвешенного на двух эластичных нитях, имитирующих граничные условия свободных концов стержня. В качестве образца была взята латунная полоса длиной  $L = 0,69\text{ м}$  с поперечным сечением  $6 \times 60\text{ мм}$ . Такой образец был подобран по аналогии с образцом из [61], где критическая частота теории Тимошенко располагалась в акустическом спектре. Колебания в плоскости наибольшей жесткости возбуждались ударом молотка или металлическим шариком по соответствующей грани. С противоположной стороны от места удара устанавливался лабораторный микрофон, соединённый со спектроанализатором типа А19-У2, данные из которого поступали в ЭВМ; состав экспериментального оборудования показан на рисунке 3.11, а на рисунке 3.12 приведен зарегистрированный в окрестности критической частоты участок спектра колебания полосы.

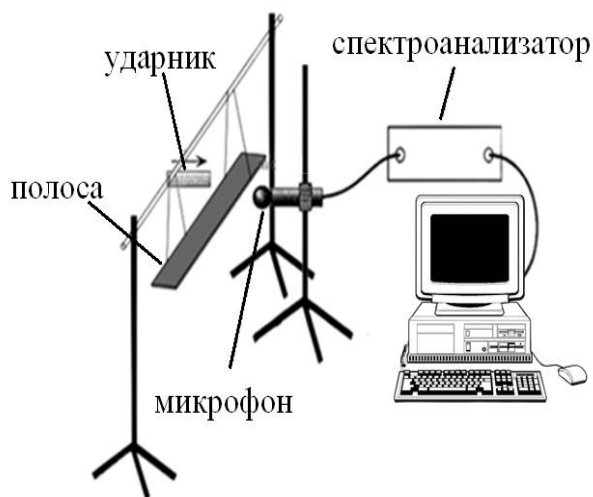


Рисунок 3.11 – Схема образца и экспериментального оборудования

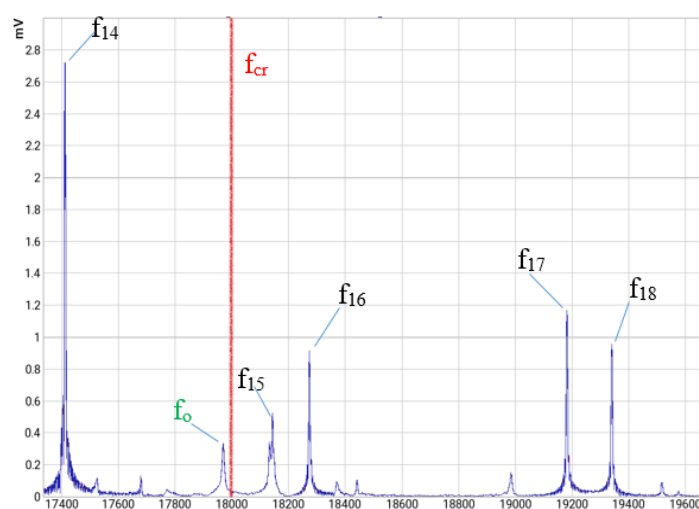


Рисунок 3.12 – Фрагмент спектра поперечных колебаний в районе критической частоты Тимошенко

Для корректного сопоставления экспериментальных данных с результатами по ТБТ необходимо знание значений исходных механических параметров, входящих в уравнения (3.5.1). В данном случае это относится к модулю упругости  $E$  и

коэффициенту Пуассона  $\nu$ , который содержится в коэффициенте сдвига; для стержня прямоугольного сечения  $k=10(1+\nu)/(12+11\nu)$  [103]. По справочным данным по модулю упругости и коэффициенту Пуассона латуни имеется определённый разброс:  $E=(89\div115)ГПа$ ,  $\nu=0,32\div0,42$ .

Для определения модуля упругости и коэффициента Пуассона на тестируемом образце латунной полосы выполнялось несколько видов испытаний. 1. Статическое растяжение полосы на испытательной машине МИМ.2 с применением навесного экстензометра ДД-25.1. В результате серии измерений получены следующие значения:  $E=99,2 ГПа$ ,  $\nu=0,347$ . 2. Динамические испытания. Ввиду того, что в исходных уравнениях (3.5.1) модуль упругости входит всюду в отношении к плотности материала, целесообразным представляется в динамических испытаниях определение не его, а величины  $c$ , представляющей собой скорость продольных волн в материале полосы. Для определения этой величины использован подход, описанный в [89], где, задавая скорость звука в возможном диапазоне значений, определяется отличие расчётных значений собственных частот ( $f_n^{calc}$ ) от экспериментальных ( $f_n^{exp}$ ):

$$\Delta(c) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\Delta f_n(c)|, \quad \Delta f_n(c) = f_n^{calc}(c) - f_n^{exp}$$

На рисунке 3.13 приведен график зависимости  $\Delta(c)$  по  $N=14$  первым собственным частотам, из которого видно, что минимальное отклонение между экспериментальным и расчетным наборами частот имеет место при  $c=3500$  м/с. Полученные результаты согласуются с непосредственным определением скорости распространения волны по начальной стадии амплитудно-временной зависимости (Рисунок 3.14) послеударных продольных колебаний  $c=2l/\Delta\tau = 1.38/0.000394=3502$  м/с, возбуждаемых ударом по одному из торцов полосы.

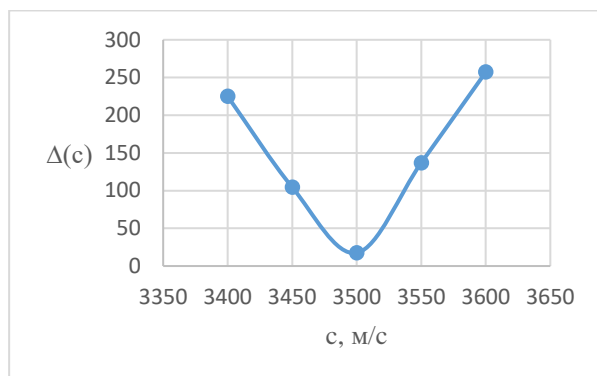


Рисунок 3.13 – Определение скорости звука из условия минимума разницы между наборами частот

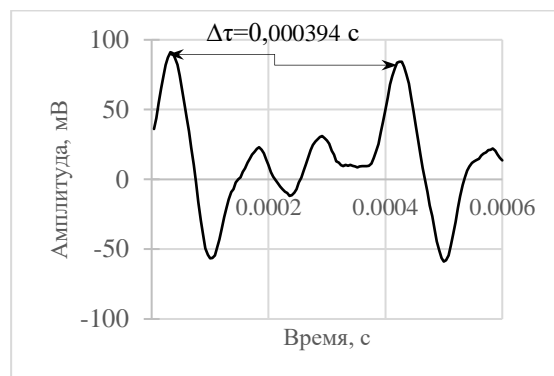


Рисунок 3.14 – Амплитудно-временная зависимость в начальном интервале

В таблице 3.5.1 приведены использованные наборы экспериментальных и теоретических частот.

Таблица 3.5.1 – Собственные частоты в Гц

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$
Тимошенко	441	1163	2149	3320	4619	6001	7435	8900	10382
Эксперимент	433	1160	2147	3316	4617	6001	7433	8899	10379
	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$	$f_{17}$	$f_{18}$
Тимошенко	11868	13347	14808	16242	17542	18338	18535	19358	19583
Эксперимент	11862	13340	14791	16184	17411	18143	18273	19182	19340

Из таблицы 3.5.1 видно, что согласование между экспериментальными и расчетными частотами оказалось гораздо выше, чем в [61]; максимальное расхождение по частотам составило менее 2% по первой частоте, а в районе критической частоты (18 кГц) - менее 1,5%, что свидетельствует о более тщательном определении механических параметров полосы. Так как возбуждение колебаний происходит в плоскости наибольшей жёсткости поперечного сечения и разница между наибольшей и наименьшей жесткостями очень большая, то в спектре возбуждаемых поперечных колебаний в районе критической частоты наблюдаются и, легко

возбуждаемые, частоты изгибных колебаний в плоскости наименьшей жесткости, одна из которых, частота  $f_0$ , расположена у критической частоты (Рисунок 3.12).

По полученным результатам можно констатировать сближение частот в окрестности критической частоты, что может быть использовано как критерий выявления полосы частот, в котором расположена критическая частота Тимошенко, после которой собственные частоты располагаются в близких парах друг к другу, что также отмечено в [61].

## **Глава 4. Оптико-акустическая диагностика дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций и степени их заживания**

В данной главе описан метод синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической информации, объединяющий возможности обоих подходов в диагностике напряжённо-деформированного состояния и дефектов тонкостенных элементов конструкций. Для реализации объединённого подхода разработан стенд, на котором выполнена диагностика ослабления затяжки отдельных точек в много-точечном закреплении границ тестовых пластин в форме кардиоиды и эллипса; при этом снижение собственных частот колебаний пластин обнаруживало факт ослабления затяжки в каком-то месте границы, а искажение резонансных форм колебаний пластины отображенных на спекл-интерферограмме, прямо указывало на место ослабления затяжки.

### **4.1. Влияние граничных условий на спектр колебаний стержневых и пластинчатых элементов конструкций**

В случае механических систем, таких как стержневые и пластинчатые элементы конструкций, граничные условия могут существенно влиять на спектр колебаний этих элементов. В зависимости от типа граничного условия, колебания могут иметь различный вид. Например, закреплённому краю соответствуют узлы колебаний, а свободному — пучности. Влиянию граничных условий на спектр колебаний стержневых элементов конструкций было уделено внимание в главе 3, где на примере консольного стержня был продемонстрирован сдвиг собственных частот резонансных форм колебаний при различной величине затяжки шпильки на одном из концов консоли в массивный стол. Аналогичным образом, уменьшение количества связей или величины жесткости пластинчатых элементов конструкции приводит к снижению собственных частот резонансных форм колебаний, что может быть использовано как критерий по определению величины несовершенства граничных условий.

#### **4.2. Диагностика несовершенств граничных условий по спектру акустического сигнала**

О наличии дефектов можно судить по изменению спектрального состава её вибрационного и звукового полей тонкостенного элемента конструкции. Метод свободных колебаний основан на исследовании частотного спектра колебаний, возбуждаемых в изучаемом объекте. Этот метод заключается в возбуждении собственных затухающих колебаний в твердом теле с определенной массой, гибкостью и механическим сопротивлением с помощью удара. Наличие дефектов, таких как трещины или неравномерности, параметры колебательной системы, такие как гибкость и масса, изменяются, что влечет изменение частоты и спектрального состава собственных колебаний. Этот метод может быть использован для контроля качества различных материалов и конструкций, таких как металлические детали, композитные материалы, стекло и другие. Важно отметить, что он также применяется в области неразрушающего контроля изделий и структур в различных отраслях. Недостатком диагностики такого типа является то, что при этом не определяется место локализации дефекта закрепления, что представляется возможным по искажению спекл-интерферограммы поля перемещений поверхности пластины, о котором говорится в следующем разделе.

#### **4.3. Спекл-интерферометрия изгиба стержней и пластин в условиях жёсткой и ослабленной заделки краёв**

Интерферометрические способы измерения имеют ряд преимуществ по сравнению с другими методами, например, тензометрией. Они обеспечивают качественно иной уровень наглядности и информативности результатов. Кроме того, интерферометрия позволяет бесконтактно измерять перемещения поверхности объектов на достаточно больших площадях при различных видах нагружения: статическом, динамическом и температурном. Перемещения регистрируются одновременно в любой выбранной точке наблюдаемого участка поверхности.

При исследовании изгиба стержней или пластин необходимо учитывать условия закрепления краёв, которые могут существенно влиять на характер и величину деформации.

Спекл-интерферограммы форм резонансных колебаний стержней и пластин представляет собой регулярную картину чередующихся темных и светлых полос, отражающих расположение линий уровня резонансного прогиба пластины с шагом по высоте, равным половине длины волны излучения примененного в интерферометре лазера (в данном случае - твердотельного зелёного лазера - этот шаг составляет 0.266 мкм). Регистрируемые интерференционные полосы визуальны подобны контуру границы, прогиб на которой равен нулю, и огибают её на некотором расстоянии. На рисунках, представленных в параграфе 4.3.3, видно, что узловые линии в отсутствии дефектов в закреплении границы коаксильны заделанному контуру. При ослаблении заделки краев в каждом из случаев возникает «флюс» в полосе, ближайшей к заделке, указывающий место дефекта. В качестве расширения теоретических моделей и объектов экспериментальных исследований для диагностики дефектов границы закрепления рассматриваются тонкостенные элементы на примере эллиптической пластины и пластины в форме кардиоиды.

#### **4.3.1 Оптико-акустический стенд для диагностики несовершенств закрепления тонкостенных элементов конструкций**

Для объединения возможностей метода акустической спектроскопии и электронной спекл-интерферометрии был собран оптико-акустический стенд. В акустическую часть стенда вошли контактные возбудители колебаний: ударный молоток AU02 с датчиком силы AC21 и несколькими насадками, шарики из закалённой стали разных диаметров и масс, вибровозбудитель Роботрон 11075, бесконтактные электромагнитные возбудители вибрации, высокоточный генератор сигналов ГЗ-122, усилитель Verstarker LV 103, частотомер ЧЗ-63, направленные микрофоны типа BSWA MA231 с равномерной частотной характеристикой в звуковом диапазоне частот и достаточной осевой чувствительностью для выделения дискретных

составляющих сигнала в диапазоне до 50 кГц, соединяемые с двух, либо четырёх-канальными спектроанализаторами А19-У2, А17-У4 и через них, - с ЭВМ. На рисунке 4.1 представлена аппаратура акустической части стенда, предназначенная для возбуждения и регистрации колебаний образцов.

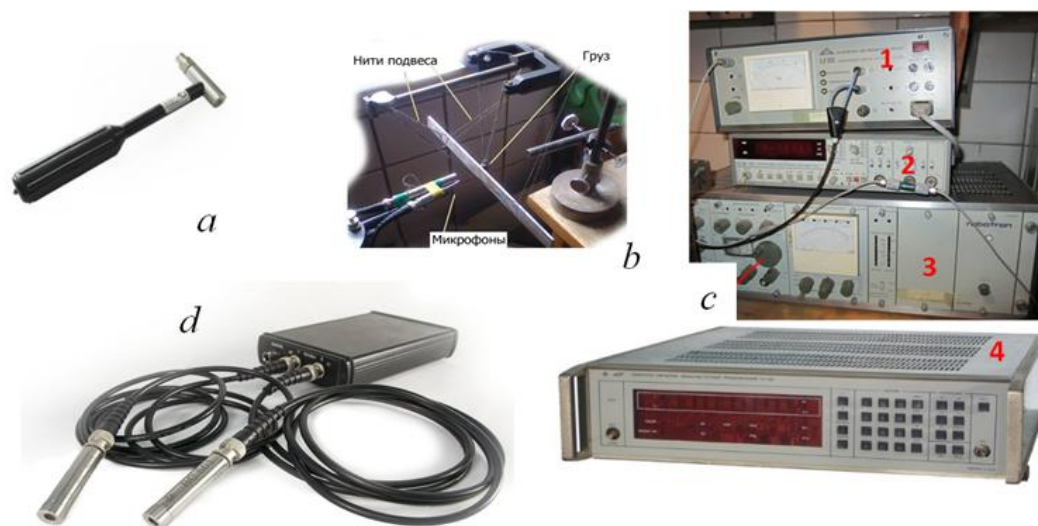


Рисунок 4.1 – Акустическая часть оптико-акустического стенда: а - ударный молоток, б - груз (шарик) на подвесах, с - аппаратный блок: 1 - усилитель LV 103, 2 - частотомер ЧЗ-63, 3 - генератор сигналов с плавной регулировкой частоты Роботрон 11075, 4 – прецизионный генератор сигналов ГЗ-122, d - микрофоны, соединенные со спектроанализатором А19-У2

Оптическая часть оптико-акустического стенда представлена спекл-интерферометром, собранном по модифицированной схеме Майкельсона в составе твердотельного одночастотного термостабилизированного лазера LCM-S-111, 10-ти мегапиксельной камеры AV10115DN, полупрозрачного зеркала, установленного под углом  $45^\circ$  к направлениям падающих и отражённых лучей, стеклянных пластинок с диффузионно отражающими поверхностями, закрепленных на кубике с отверстиями, а также лазерного триангуляционного датчика РФ603. При закреплении образцов предусмотрена возможность параллельного съема акустической и спекл-интерферометрической информации. С помощью оптической части стенда экспериментально определялись резонансные формы колебаний пластин. Схема оптической части стенда представлена на рисунке 4.2.

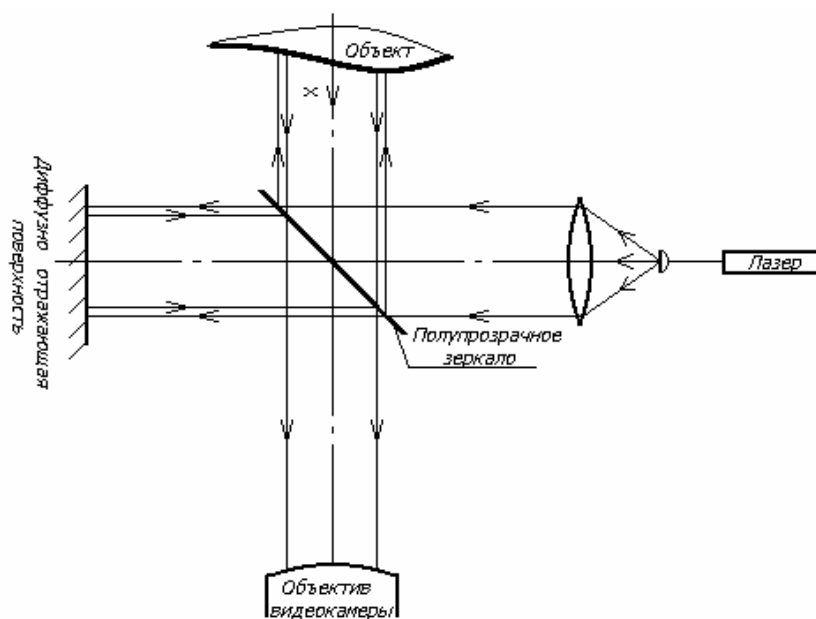


Рисунок 4.2 – Схема оптической части стенда

На монтажную площадку оптического блока установлены следующие элементы: лазер (твердотельный, длина волны 532 нм, мощность 20 мВт); полупрозрачное зеркало напротив лазера, установленное к падающему лучу под углом  $45^\circ$ , сетевая видеокамера марки Arecont Vision AV10115 с матрицей 1/2 дюйма с максимальным размером изображения  $3648 \times 2752$  (10 Мп)), которая подключена к персональному компьютеру; объект, представляющий собой тонкую стальную пластину с диффузно - отражающей поверхностью.

В процессе эксперимента луч от лазера падает на полупрозрачное зеркало, которое разделяет его на два: опорный и предметный (объектный). Опорный луч проходит через полупрозрачное зеркало, отражается от диффузной поверхности, размещенной на стенке опоры зеркала, возвращается на полупрозрачное зеркало, отражаясь от которого, попадает в видеокамеру. Предметный луч отражается от полупрозрачного зеркала, падает на исследуемый объект, отражается от него, проходит через полупрозрачное зеркало и также попадает в видеокамеру.

Вид сверху на оптическую часть стенда представлен на рисунке 4.3.

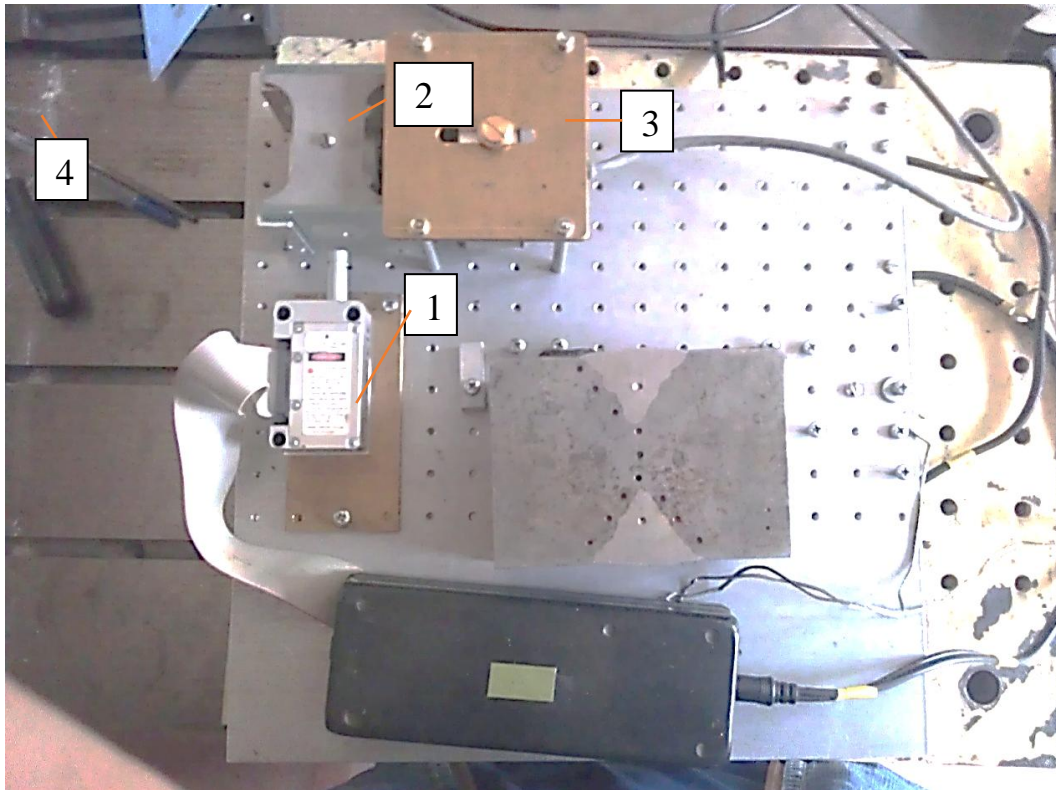


Рисунок 4.3 – Оптическая часть станда: 1 – лазерный модуль с расширителем пучка, 2 - полупрозрачное зеркало, 3 – видеокамера, 4 - объект наблюдения

#### **4.3.2 Оптико-акустическая диагностика дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций и степени их залечивания на примере эллиптической пластины**

В качестве образца была выбрана алюминиевая эллиптическая пластина, представленная на рисунке 4.4 с отношением полуосей  $a/b$  равным 2, большой полуосью  $a = 100$  мм, толщиной 1 мм, на 10 винтах крепления к накладкам, обеспечивающих условия жёсткого защемления по контуру.



Рисунок 4.4 – Экспериментальный образец – эллиптическая пластина

Диагностика и залечивание дефектов крепления эллиптической пластины проводилась методом синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической информации. Метод позволяет судить не только о наличии дефектов по изменению спектрального состава её вибрационного и звукового полей, но и даёт возможность определения места дефекта по искажению спекл-интерферограммы поля перемещений поверхности пластины. Так, для определения спектра частот пластины в форме эллипса можно использовать теоретическую модель колебаний или использовалось ударное возбуждение поперечных колебаний с регистрацией их с помощью спектроанализатора. Пример таких спектров в интервале 0 – 2,4 кГц приведен на рисунке 4.5 для эллиптической пластины при затяжке всех болтов (*а*) и после ослабления группы болтовых соединений, скреплявших край пластины с левой стороны (*б*). На рисунке 4.5б можно отметить, что при регистрации спектра положение микрофона совпало с узлом второй резонансной формы. Амплитуды экспериментальных спектров акустического давления по осям ординат отложены в единицах электрического сигнала, поступающего с микрофона (мВ), частоты в Гц.

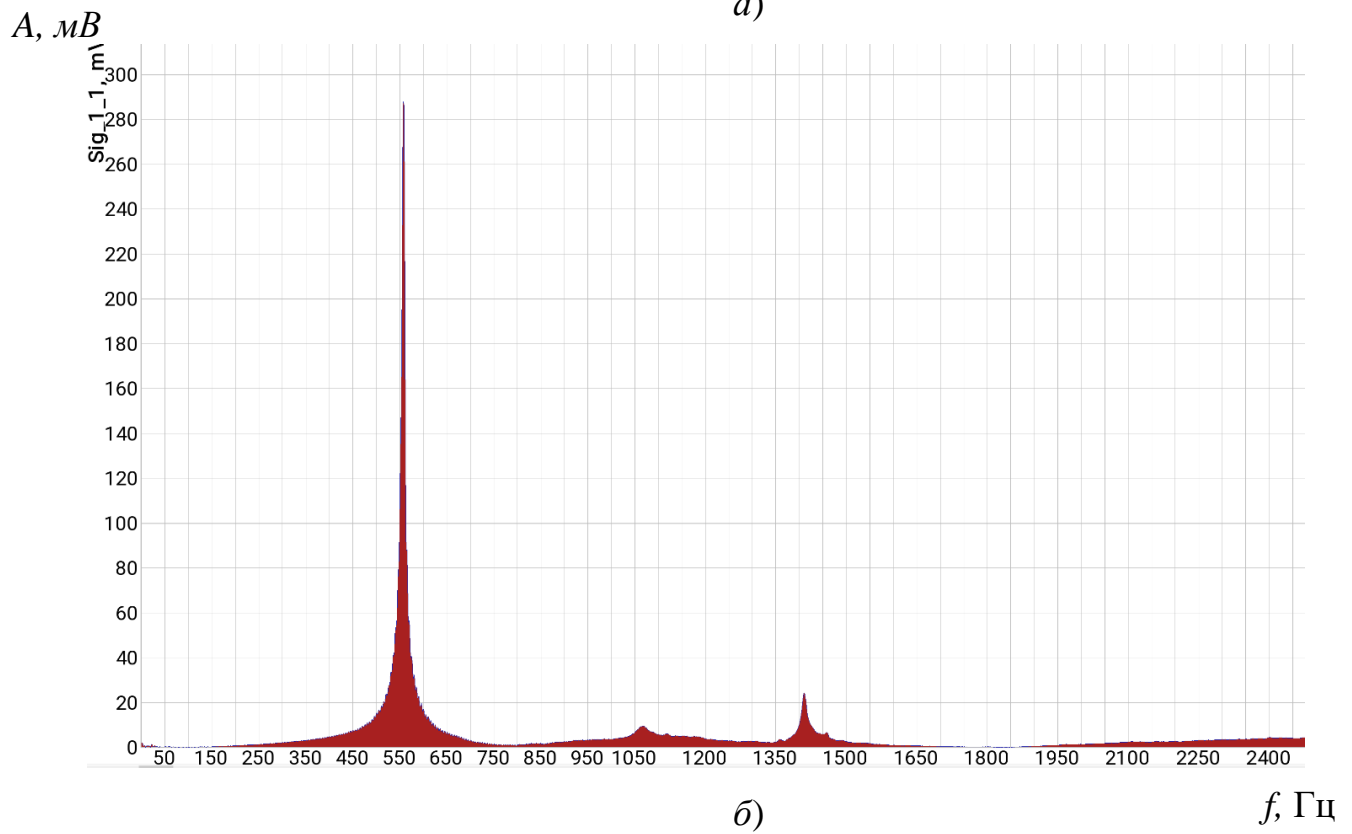
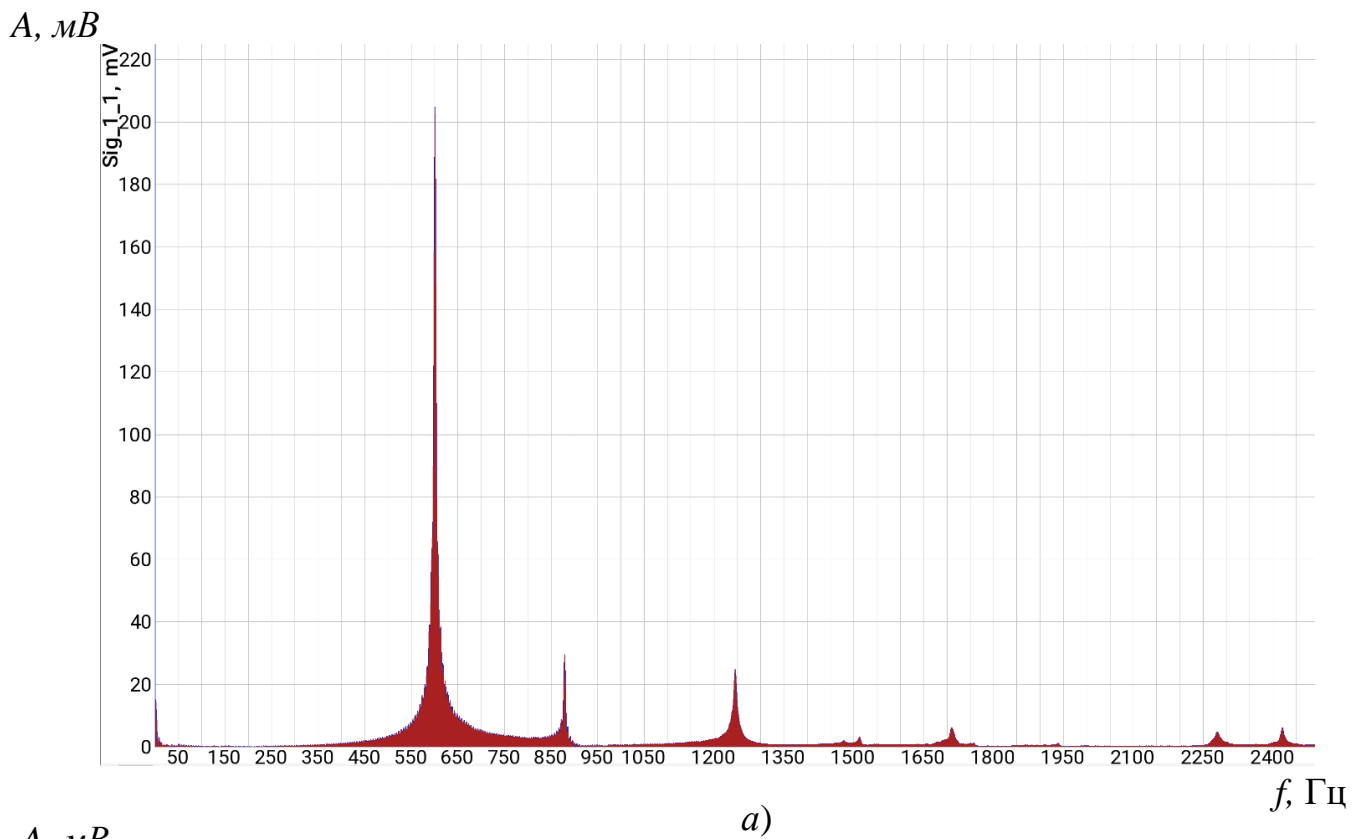


Рисунок 4.5 – Экспериментальные акустические спектры эллиптической пластины при затяжке всех болтов ( $a$ ) и после ослабления группы болтовых соединений, скреплявших край пластины с левой стороны ( $b$ )

Для моделирования было выбрано снижение затяжки трёх рядом стоящих (слева) винтов крепления пластины для оценки первой и второй резонансной формы, а также снижение затяжки двух рядом стоящих (сверху по центру) винтов крепления для оценки изменений третьей резонансной формы (Рисунок 4.6).

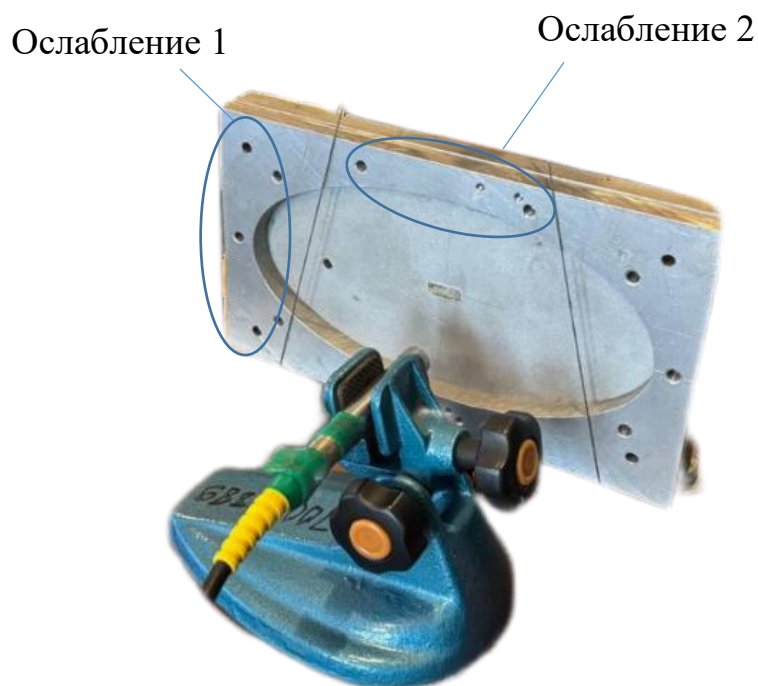
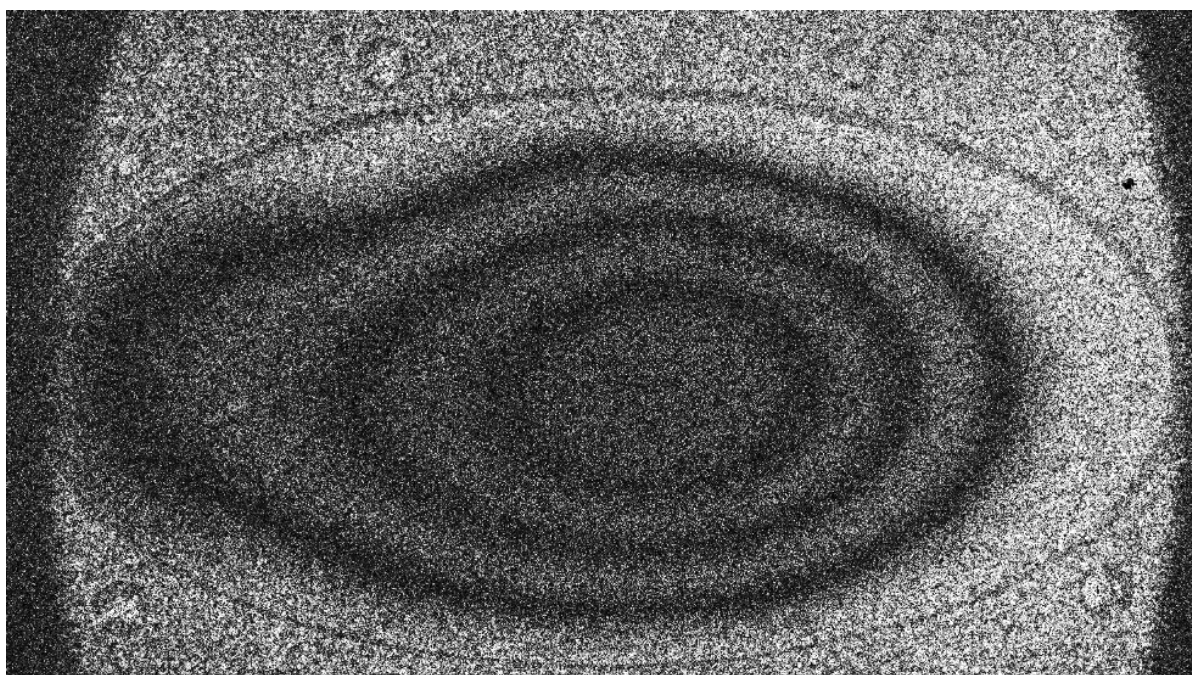
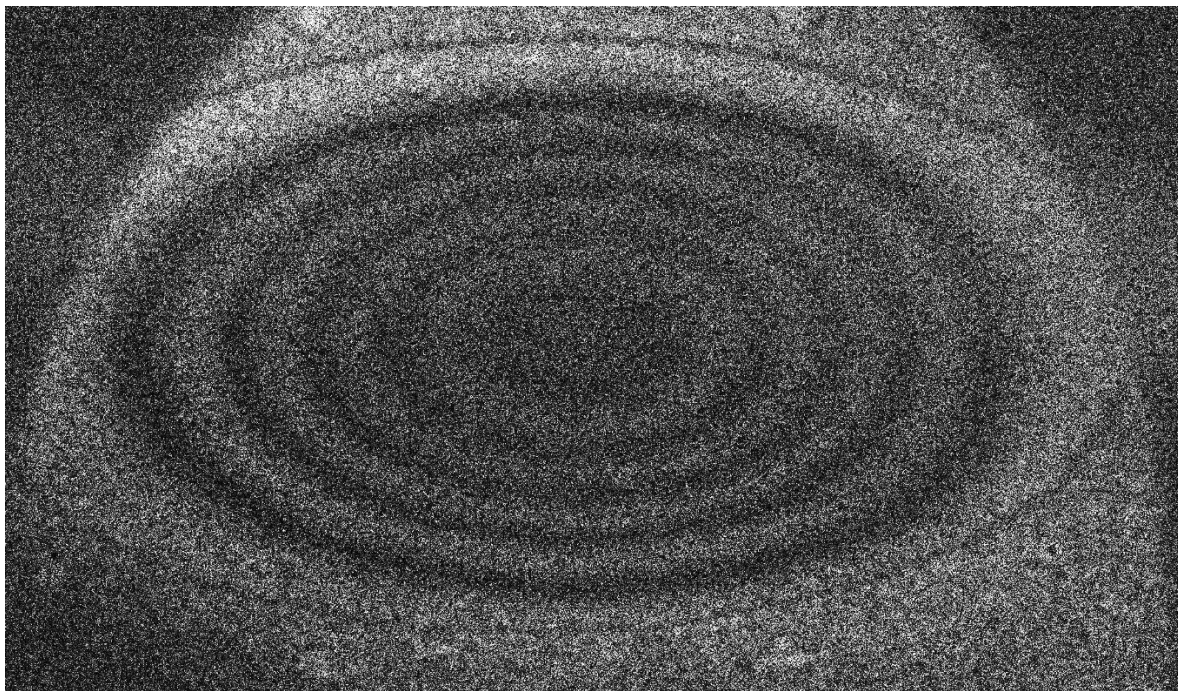
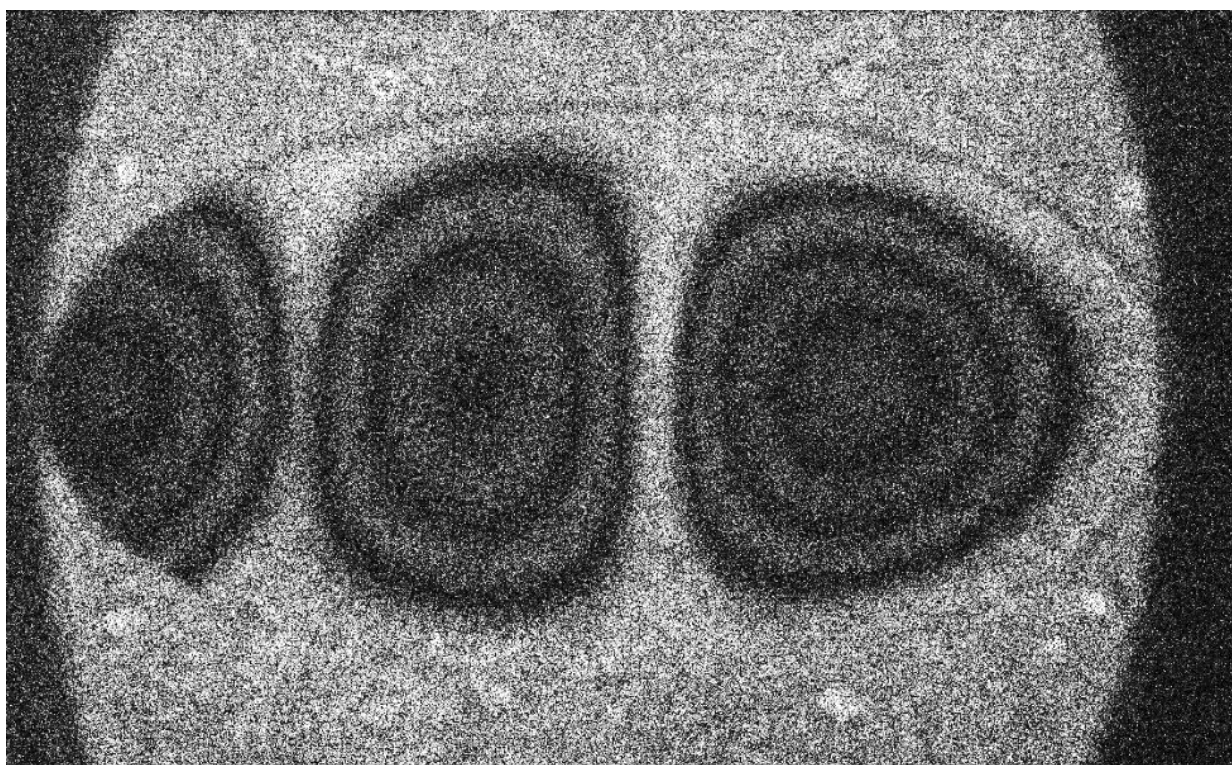
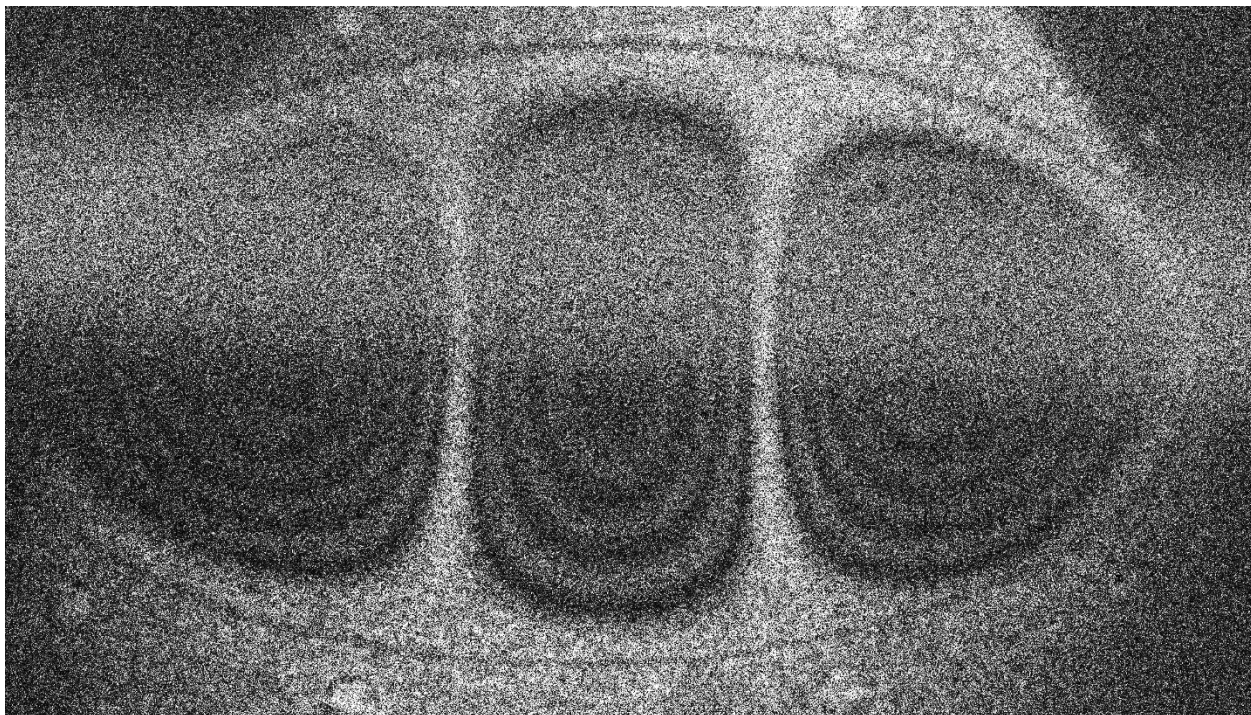


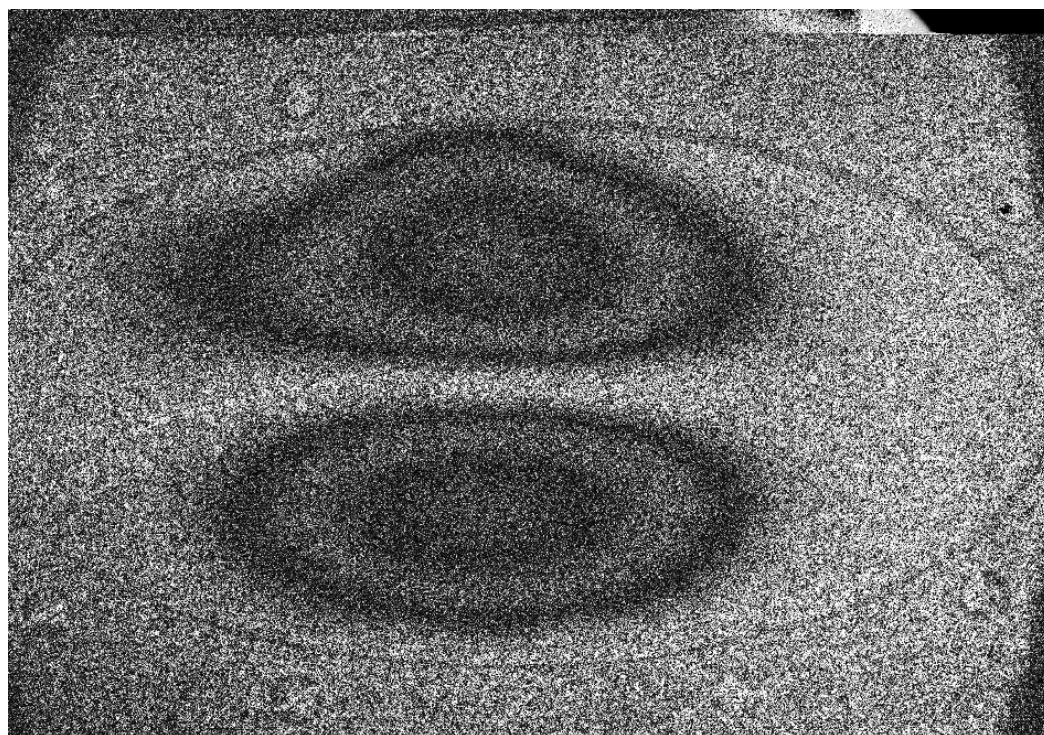
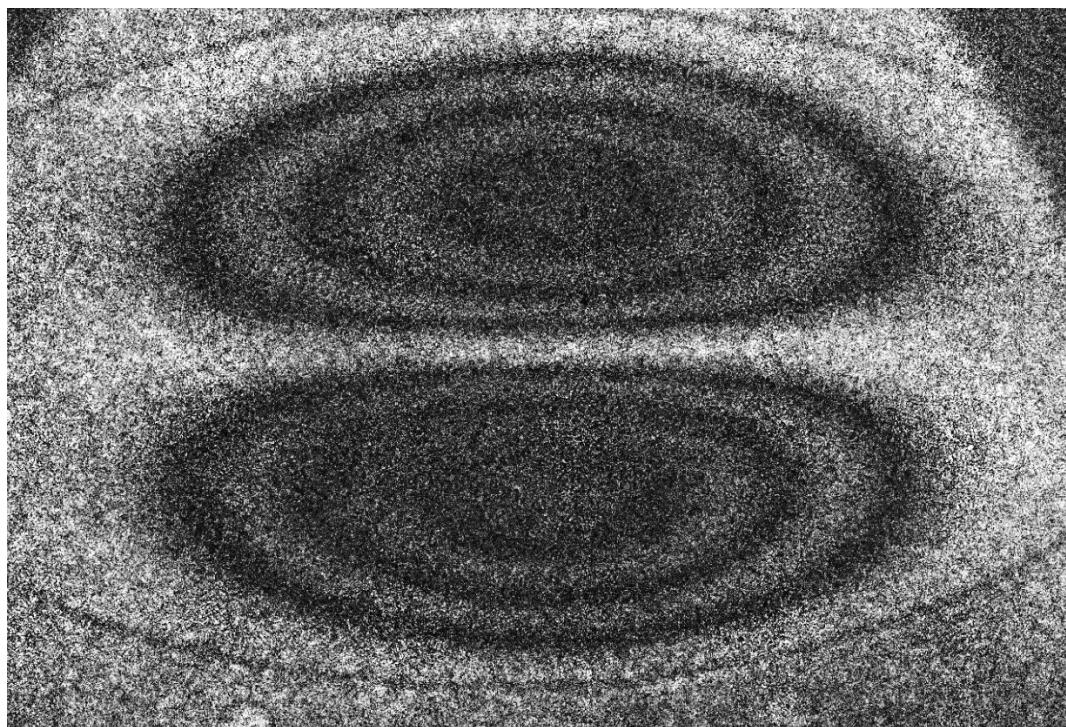
Рисунок 4.6 – Карта ослаблений винтов крепления экспериментального образца – эллиптической пластины

На рисунке 4.7 приведены пары спекл-интерферограмм резонансных форм колебаний эллиптической пластины до и после различного ослабления затяжки отдельных групп болтовых соединений для различных частот. Так, на рисунке 4.7а,б виден результат ослабления болтов, скреплявших край пластины с левой стороны, как показано на рисунке 4.6, а на рисунке 4.7в - у середины верхней части широкой стороны.



a)





в)

Рисунок 4.7 – Спекл-интерферограммы резонансных форм колебаний пластины в форме эллипса при частотах 600 Гц (а), 878 Гц (б), 1244 Гц (в) для полной затяжки и частичном ослаблении отдельных групп винтов крепления пластины

Для первой формы колебаний частота снизилась до 557 Гц при частоте, соответствующей полному закреплению, - 600 Гц, а спекл-интерферограмма исказилась так, что на ней появился «флюс», указывающий на место ослабления заделки с левой стороны (Рисунок 4.7а).

Для второй формы колебаний спекл-интерферограмма исказилась так, что на ней произошло смещение узловых линий симметричной формы в сторону «флюса», указывающего на место ослабления заделки с левой стороны (Рисунок 4.7б). В данном случае частота снизилась до 810 Гц при частоте, соответствующей полному закреплению, 878 Гц.

Для третьей формы колебаний спекл-интерферограмма исказилась так, что произошло нарушение коаксильности линий уровня и появился «флюс», указывающий на место ослабления заделки в середине верхней части пластины (Рисунок 4.7в). В данном случае собственная частота снизилась до 1182 Гц при частоте, соответствующей полному закреплению, - 1244 Гц.

Уравнения колебаний защемленной по краю эллиптической пластины имеют наглядное приближённое аналитическое решение, рассмотренное в работе [110]. Для вычисления оценок частот и низших форм колебаний в ней применен модифицированный метод Релея – Ритца, основанный на введении обобщенных полярных координат и задании осциллирующей функции поперечного смещения от полярного угла с фиксированным числом узловых линий. Нетрудно обобщить полученное решение на случай оценки любых форм колебаний.

Постановка задачи о нахождении собственных частот и форм колебаний эллиптической пластины, защемленной по краю, сводится к решению следующей краевой задачи:

$$\Delta \Delta w - \lambda w = 0, \quad (x, y) \in D \quad (4.3.2.1)$$

$$w|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \{x, y : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\} \quad (4.3.2.2)$$

где  $w=w(x,y)$  – функция прогиба,  $n$  – нормаль к эллиптическому контуру,  $a$  – большая,  $b$  – меньшая полуоси эллипса,  $\Delta$  – оператор Лапласа. Искомыми в задаче

(4.3.2.1), (4.3.2.2) являются частотные параметры  $\lambda_n$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) и соответствующие собственные функции  $w_n$ . Собственные частоты выражаются через  $\lambda_n$  по формуле:

$$\omega_n = h \sqrt{\frac{E\lambda_n}{3\rho(1-\nu^2)}} \quad (4.3.2.3)$$

в которой  $h$  – полутолщина пластины,  $\rho$ ,  $E$ ,  $\nu$  – соответственно плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона.

Краевая задача, записанная выше, эквивалентна вариационной задаче о минимуме функционала

$$J[w] = \iint_D (\Delta w)^2 dx dy \quad (4.3.2.4)$$

при изопериметрическом условии

$$\Phi[w] = \iint_D w^2 dx dy = 1 \quad (4.3.2.5)$$

на классе дважды дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям.

Введем новые переменные — обобщенные полярные координаты  $r, \varphi$ :

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (4.3.2.6)$$

(на границе эллипса  $r = 1$ ).

В этих координатах функцию прогиба пластины можно представить в виде:

$$w(r, \varphi) = V(r) \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (4.3.2.7)$$

При выполнении условий (4.3.2.2), (4.3.2.4), (4.3.2.5) и требования ограниченности функции  $w(r, \varphi)$  и ее производной при  $r = 0$ :

$$V(1) = \frac{dV(1)}{dr}, \quad |V(0)| \leq M, \quad \left| \frac{dV(0)}{dr} \right| \leq M \quad (4.3.2.8)$$

выражение для радиальной компоненты функции прогиба пластины может быть представлено с помощью функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя  $n$ -го порядка.

$$V(r) = c_1 J_n(\gamma r) + c_2 I_n(\gamma r) \quad (4.3.2.9)$$

с параметром  $\gamma$ , определяемым из решения вариационной задачи (4.3.2.4), (4.3.2.5). В частном случае осесимметричных колебаний получим:

$$J[w] = \frac{\pi ab}{4} \int_0^1 \left\{ A \left[ \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right] + \frac{2}{r} B \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right\} r dr \quad (4.3.2.10)$$

$$\Phi[w] = 2\pi ab \int_0^1 w^2 r dr = 1$$

$$A = \frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}, \quad B = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{6}{a^2 b^2}$$

Используя для решения вариационной задачи (4.3.2.10) метод Лагранжа и составляя уравнение Эйлера — Лагранжа, приходим к линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} - \mu^4 w = 0, \quad \mu^4 = \frac{8\lambda}{A} \quad (4.3.2.11)$$

решение которого имеет вид (4.3.2.9) при  $n=0$  и  $\gamma=\mu$ .

Из краевых условий (4.3.2.8) получаем систему алгебраических уравнений относительно постоянных  $c_1, c_2$ :

$$c_1 J_0(\mu) + c_2 I_0(\mu) = 0, \quad c_1 J_1(\mu) - c_2 I_1(\mu) = 0 \quad (4.3.2.12)$$

равенство нулю определителя которой приводит к частотному уравнению

$$J_0(\mu) I_1(\mu) + I_0(\mu) J_1(\mu) = 0 \quad (4.3.2.13)$$

В данном случае это уравнение определяет приближенные значения (оценки сверху) собственных частот осесимметричных колебаний эллиптической пластины.

Наименьший корень уравнения (4.3.2.13) равен  $\mu_{10}=3.1961$ .

Тогда выражение

$$\lambda_{10} = \frac{\mu_{10}^4}{8} \left( \frac{3}{a^4} + \frac{3a^4}{R^8} + \frac{2}{R^4} \right) \quad (4.3.2.14)$$

даст оценку сверху для наименьшего собственного числа, а

$$f_{10} = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}} \sqrt{\lambda_{10}} \quad (4.3.2.15)$$

- оценку сверху для наименьшей собственной частоты. Для рассматриваемой эллиптической пластины первая расчётная частота  $f_{10}$  составляет 618 Гц, отличие которой от экспериментального значения составляет 3%.

Аналогичным образом выводится частотное уравнение для любой формы:

$$J_n(\gamma)I'_n(\gamma) - J'_n(\gamma)I_n(\gamma) = 0, \quad n=1,2,\dots \quad (4.3.2.16)$$

Так, при  $n=1$  значение частотного параметра  $\gamma=4.611$ , а соответствующая величина первой расчётной частоты  $f_{11}=1390$  Гц для формы колебаний, зафиксированной на рисунке 4.7в; соответствующее значение экспериментальной частоты - 1244 Гц.

### **4.3.3 Оптико-акустическая диагностика дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций и степени их залечивания на примере кардиоидной пластины**

Поскольку теоретическая модель колебаний пластины-кардиоиды до сих пор не построена, в данном параграфе рассмотрен метод синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической информации для диагностики дефектов на примере диагностики дефектов в закреплении границы тестовой пластины в форме кардиоиды. Метод позволяет судить не только о наличии дефектов по изменению спектрального состава её вибрационного и звукового полей, но и даёт возможность определения места дефекта по искажению спекл-интерферограммы поля перемещений поверхности пластины.

На рисунке 4.8 представлены компоненты оптико-акустического стенда: слева оптический блок, регистрирующий спекл-интерферограммы резонансных колебаний с лицевой поверхности образца, в центре - один из образцов в форме кардиоидной пластины, скреплённой с основанием несколькими винтами, справа - часть акустического блока, обеспечивающего возбуждение и регистрацию резонансных частот колебаний с тыльной стороны образца.



Рисунок 4.8 – Оптико-акустический стенд: слева - оптический блок, в центре - один из образцов, справа - часть акустического блока для возбуждения и регистрации резонансных частот колебаний с тыльной стороны образца

Теоретическая модель колебаний пластины кардиоиды до сих пор не построена. Для определения спектра частот пластины в форме кардиоиды использовалось ударное возбуждение поперечных колебаний с регистрацией их с помощью спектроанализатором. Пример такого спектра в интервале 0 - 8 кГц приведен на рисунке 4.9, где идентифицированы 8 первых собственных частот пластины.

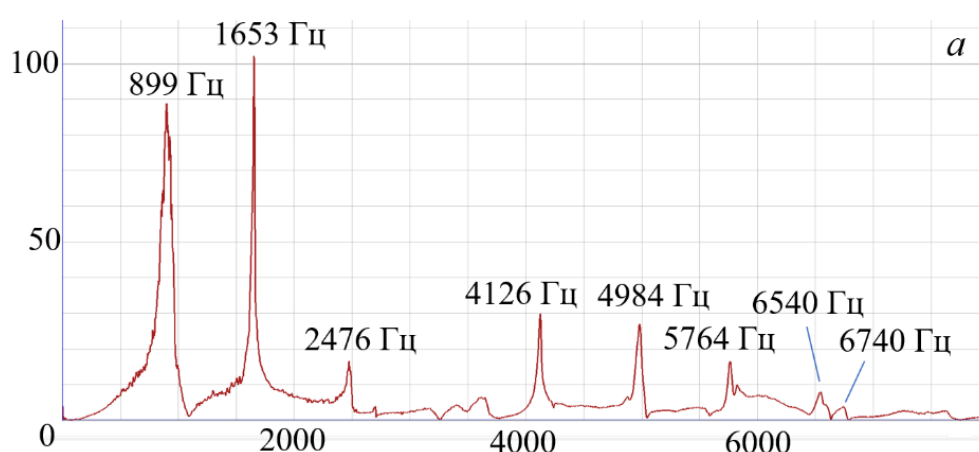


Рисунок 4.9 – Экспериментальный спектр собственных частот колебаний пластины-кардиоиды в диапазоне частот 0-8000 Гц при исходной затяжке винтов крепления пластины

На рисунке 4.10а представлена фотография спекл-интерферограммы формы резонансных поперечных колебаний пластины–кардиоиды на первой собственной частоте – 899 Гц.

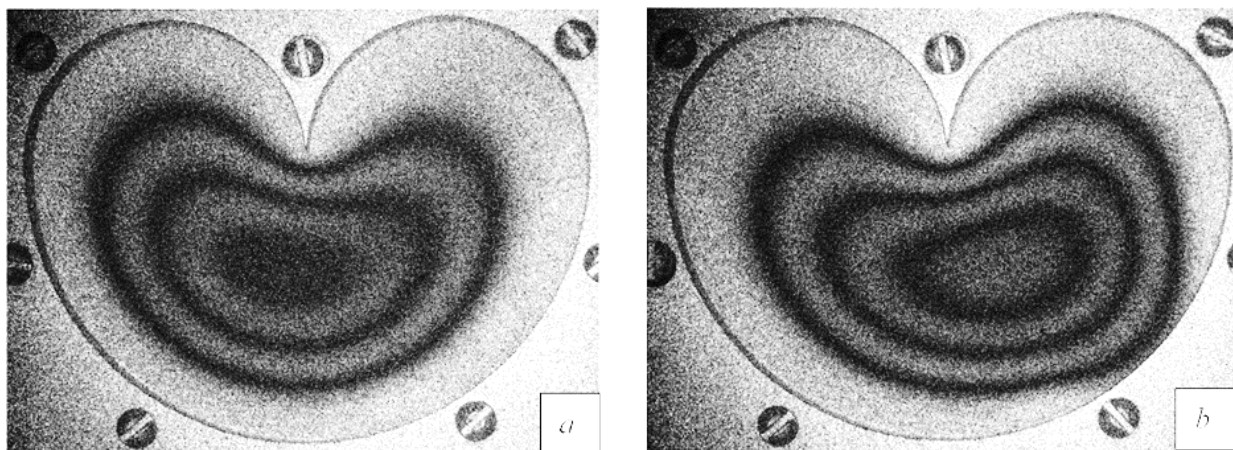


Рисунок 4.10 – Спекл-интерферограмма первой формы колебаний пластины в форме кардиоиды: *a* - при полной затяжке всех винтов крепления контура, *b* - при ослабленной затяжке двух винтов заделки

Полученная спекл-интерферограмма формы резонансных колебаний пластины представляет собой регулярную картину чередующихся темных и светлых полос, отражающих расположение линий уровня резонансного прогиба пластины с шагом по высоте, равным половине длины волны излучения примененного в интерферометре лазера (в данном случае - твердотельного зелёного лазера); этот шаг составляет 0.266 мкм. Видно, что зарегистрированные интерференционные полосы визуально подобны контуру границы, прогиб на которой равен нулю, и огибают её на некотором расстоянии.

Характерным дефектом, возникающим при вибрации конструкций, является локальное ослабление её закрепления. Здесь такой дефект моделировался снижением затяжки двух рядом стоящих (внизу справа) винтов крепления пластины. Это, с одной стороны, вызывало снижение резонансной частоты колебаний пластины, а с другой, - искажение системы интерференционных полос в окрестности заделки. В данном случае частота снизилась до 875 Гц, а спекл-интерферограмма исказилась так, что на ней появился «флюс», указывающий на место ослабления заделки. На рисунке 4.10b показана эта интерферограмма.

По приведённым признакам можно контролировать как степень локального ослабления граничных условий, так и степень «залечивания» дефекта путём затягивания ослабленных винтов в заделке. Соответствующая интерферограмма после затяжки ослабленных винтов мало отличается от изображённой на рисунке 4.10а. Однако она была получена не при частоте 899 Гц, а при 903 Гц, что свидетельствует о перетяжке слабо затянутых винтов в заделке по сравнению с исходным уровнем. Соответствующий спектр показан на рисунке 4.11.

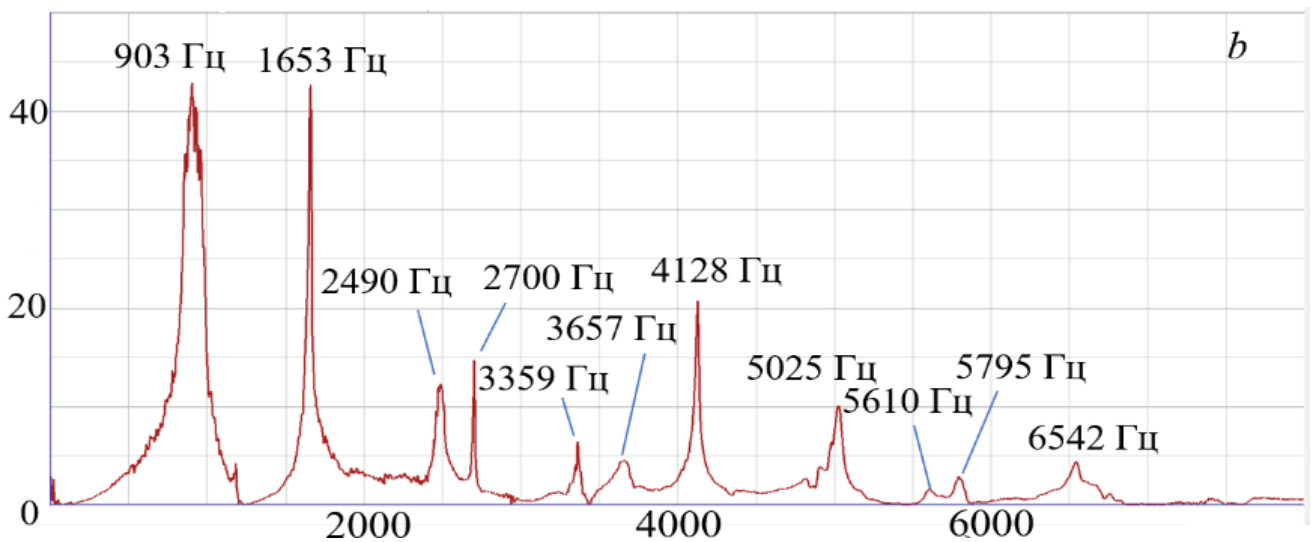


Рисунок 4.11 – Экспериментальный спектр собственных частот колебаний пластины-кардиоиды при повторной затяжке ослабленных винтов крепления пластины

Проведенное тестирование показало преимущества объединения виброакустической и спекл-интерферометрической диагностики на примере диагностики локального ослабления закрепления границ тестовых пластин. Важный признак такого дефекта - снижение резонансной частоты колебаний - является лишь интегральным признаком, по которому не определяется конкретное место расположения дефекта на контуре заделки. В то же время по конфигурации полос спекл-интерферограммы, полученной на сниженной резонансной частоте колебаний пластины, однозначно определяется место расположения дефекта заделки контура, по-

сле устранения которого восстанавливается исходная собственная частота колебаний пластины и спекл-интерферограмма соответствующей формы резонансных колебаний.

## Заключение

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Исследованы спектры акустического давления послеударных продольных колебаний при наличии трения, коэффициент которого определяется по совокупности многочастотных затухающих колебаний стержня после ударного воздействия в зависимости от соотношения между массой ударника и стержня, и поперечных колебаний при различной величине статического растяжения и условий закрепления реальных стержневых систем.

2. Разработана методика и стенд для экспериментального изучения спектра акустического давления послеударных продольных колебаний стержня. Выявлен и изучен эффект сдвига по частоте амплитудного максимума в спектре акустического давления при послеударных продольных колебаниях стержня. Показано, что величина этого сдвига может зависеть от параметров, определяющих период осцилляции, а именно от среды распространения звука, расстояния до приёмника и от отношения масс ударника и стержня. Показано, что при ударе по стержню ударником большей массы амплитуды скорости выходного конца на разных частотах отличаются друг от друга значительно сильнее осциллирующего эффекта функции; таким образом, максимум акустического давления соответствует частоте основного тона. При стремлении отношения масс соударяющейся пары к нулю спектр меняется и диктующим максимум оказывается осциллирующий эффект.

3. Разработан новый усовершенствованный частотный метод оценки усилий и узловых жесткостей в стержнях. Выполнены исследования по экспериментальной верификации усовершенствованного частотного метода определения растягивающих усилий и жесткостей закрепления стержневых элементов строительных конструкций на основе модели колебаний балки Тимошенко и разработанных алгоритма и программы для ЭВМ оптимального поиска значений продольного уси-

лия и жёсткости заделки стержня по спектру зарегистрированных частот. Предложенные расчетные модели и методики способны обеспечить существенное снижение трудоемкости проведения таких испытаний.

4. Впервые выявлена и объяснена особенность разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации. Показана необходимость учета изменения начального модуля упругости в процессе деформирования при частотной диагностике усилий в стержневых элементах. Так, при изменении начального значения модуля упругости на 3% при статическом растяжении для рассматриваемого тестового образца 3-я собственная частота поперечных колебаний оказывается ниже 1-ой собственной частоты при начальном модуле упругости в отсутствии статического растяжения.

5. Проведен теоретический и экспериментальный анализ спектров частот балки Тимошенко в окрестности критической частоты. При рассмотрении поперечных колебаний используемая методика по определению физических величин на примере скорости звука приводит к согласованию теоретических и экспериментальных наборов частот. Экспериментально верифицированы близкие пары частот за частотой Тимошенко.

6. Создан и протестирован оптико-акустический стенд и новая методика синхронного съёма виброакустической и спекл-интерферометрической информации, пригодная для диагностики дефектов закрепления тонкостенных элементов конструкций и анализа степени их устранения. Проведенное тестирование показало преимущества объединения виброакустической и спекл-интерферометрической диагностики дефектов на примере диагностики дефектов в закреплении границы тестовой пластины. Важный признак такого дефекта - снижение резонансной частоты колебаний - является лишь интегральным признаком, по которому невозможно определить конкретное место расположения дефекта на контуре заделки. В

то же время по конфигурации полос спекл-интерферограммы, полученной на сниженной резонансной частоте колебаний пластины, однозначно определяется место расположения дефекта заделки контура пластины.

### **Перспективы дальнейшей разработки темы диссертации**

Учет более уточнённых моделей соударения и продольных колебаний для определения контактной силы и акустического давления. Совершенствование методик частотной оценки усилий и алгоритмов поиска решений. Исследование возможности перехода к полностью не повреждающему способу диагностики продольных усилий в арматурных стержнях с использованием, возбуждаемых ударом, продольных колебаний стержней.

### Список литературы

1. Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955. 504 с.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
4. Saint-Venant A. Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques // J. de Math. (Liouville) Ser.2. T.12. 1867, P. 237-276.
5. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // Za. f. Math. (Crelle). 1881. Bd 92. P. 156-171.
6. Sears J. E. On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1908. Vol. 14, P. 49-106.
7. Бидерман В.Л. Теория удара. - М.: Машгиз, 1952. 76 с.
8. Гольдсмит В. Удар. Теория и динамические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
9. Al-Mousawi M.M. On experimental studies of longitudinal and flexural wave propagations: An annotated bibliography // Applied Mechanics Reviews. – Vol. 39. – 1986. – P. 853-864.
10. Hu B., Schiehlen W., Eberhard P. Comparison of Analytical and Experimental Results for Longitudinal Impacts on Elastic Rods // Journal of Vibration and Control. – 2003. – Vol. 9. – P. 157-174. – DOI: 10.1177/107754603030745.
11. Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик П. Е. Колебания стержня, вызванные продольным ударом тела // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 480, № 2. – С. 164-169. – DOI: 10.7868/S0869565218140074.
12. Беляев А.К., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Тонкий стержень при продольном динамическом сжатии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – № 4. – С. 19-34.
13. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Влияние дефекта массы на частоты и формы продольных колебаний стержня // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 1. – С. 135-144.
14. Акуленко Л. Д., Гавриков А. А., Нестеров С.В. Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы

продольных колебаний // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 6. – С. 98-107. – DOI: 10.1134/S0572329919060023.

15. Shifrin E.I., Popov A.L., Lebedev I.M., Chelyubeev D.A., Kozintsev V.M. Numerical and experimental verification of a method of identification of localized damages in a rod by natural frequencies of longitudinal vibration // Acta Mechanica. – 2021. – Vol. 232, Iss.5. – P. 1797–1808. DOI: 10.1007/s00707-020-02919-w.

16. Скобельцын С. А., Пешков Н. Ю. Рассеяние звука неоднородным упругим эллиптическим цилиндром в акустическом полупространстве // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 7. – С. 183-200.

17. Tolokonnikov L. A., Larin N. V. Scattering by a cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves emitted by a linear source in a plane waveguide // Math. Models Comput. Simul. – 2022. – Vol. 14, Iss.2. – P. 250–260. DOI: 10.1134/S2070048222020156.

18. Пешков Н. Ю., Скобельцын С. А. Рассеяние звука упругим цилиндром с кусочно-непрерывным неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2020. – № 10. – С. 214-226.

19. Беляев А.К., Ма Ч., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П., Шурпатов А.О. Динамика стержня при продольном ударе телом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т. 4, №3. – С. 506-515.

20. Weaver W., Timoshenko S.P., Young D.H. Vibration Problems in Engineering, Wiley, 1990.

21. Christopherson D.G. Effect of shear in transverse impact on beams // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. – 1951. – Vol. 165. – P. 176–188.

22. Arnold R.N. Impact stresses in a freely supported beam // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. – 1937. – Vol. 137. – P. 217–281.

23. Christoforou A.P. Analysis of simply-supported orthotropic cylindrical shells subject to lateral impact loads // Journal of Applied Mechanics. – 1990. – Vol. 57. – P. 376–382.

24. Polocos T., Kasal B., Hallermann A., Li X. What was Timoshenko's small-increment method? With an application to low-velocity impact of a woodbeam // *Journal of Dynamic Behavior of Materials*. – 2017. – Vol. 3. – P. 45–63.
25. Schwieger H. A simple calculation of the transverse impact on beams and its experimental verification // *Experimental Mechanics*. – 1965. – Vol. 5 – P. 378–384.
26. Yamamoto S., Sato K., Koseki H. A study on lateral impact of Timoshenko beam // *Computational Mechanics*. – 1990. – Vol. 6. – P. 101–108.
27. McMillan A.J., Darby M.I., Jones B.C., Evans G.R. Calculation of forces due to transverse impact of damped polycrystalline graphite beams // *Carbon*. – 1994. – Vol. 34. – P. 121–125.
28. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Transient response of thin bodies subjected to impact: wave approach // *Shock and Vibration Digest*. – 2007. – Vol. 39 – P. 273–309.
29. Barnhart K.E., Goldsmith W. Stresses in beams during transverse impact // *Journal of Applied Mechanics*. – 1957. – P. 440–446.
30. Darby M.I. Calculations of impact stresses in polycrystalline graphite rods // *Journal of Materials Science*. – 1984. – Vol.19. – P. 1930–1938.
31. Eringen A.C., Transverse impact on beams and plates // *Journal of Applied Mechanics*. – 1953. – Vol. 20. – P. 461–468.
32. Evans G.R., Jones G.R., McMillan G.R., Darby M.I. New numerical method for the calculation of impact forces // *Journal of Physics D: Applied Physics*. – 1991. – Vol.24. – P. 854–858.
33. Goens H.E. Elastische Untersuchungen an Eisen-Einkristallen, *Zeitschrift für Elektrochemie und angewandte physikalische Chemie*. – 1931. – Vol.37. – P. 539–540.
34. Traill-Nash R.W., Collar A.R. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. – 1953. – Vol. 6 – P. 186–222.
35. Abbas B.A.H., Thomas J. The second frequency spectrum of Timoshenko beams' // *Journal of Sound and Vibration*. – 1977. – Vol. 51. – P. 123–137.
36. Bhashyam G.R., G. Prathap G. The second Frequency spectrum of Timoshenko beams // *Journal of Sound and Vibration*. – 1981. – Vol. 76. – P. 407–420.

37. Christoforou A.P., Yigit A.S. Transient response of a composite beam subject to elasto-plastic impact // *Compos. Eng.* – 1995. – Vol. 5 – P. 459–470.
38. Dolph C.L. On the Timoshenko theory of transverse beam vibration // *Q. Appl. Math.* – 1954. – Vol. 12. – P. 175–187.
39. Levinson M., Cooke D.W., On the two frequency spectra of Timoshenko beams *Journal of Sound and Vibration.* – 1982. – Vol. 84. – P. 319–326.
40. Stephen N.G. The second spectrum of Timoshenko beam theory—Further assessment // *Journal of Sound and Vibration.* – 2006. – Vol. 292. – P. 372–389.
41. Bhattacharjee A., Chatterjee A. Interplay between dissipation and modal truncation in ball-beam impact // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics.* – 2017. – Vol.12. – DOI: 10.1115/1.4036830
42. Shankar K., Keane A.J. Energy flow predictions in a structure of rigidly joined beams using receptance theory // *Journal of Sound and Vibration.* – 1995. – Vol. 185. – P. 867–890.
43. Y. Tang Numerical evaluation of uniform beam modes // *Journal of Engineering Mechanics.* – 2003. – Vol.129. – P. 1475–1477.
44. G.B. Warburton, The vibration of rectangular plates // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers.* – 1954. – Vol. 168. – P. 371–384.
45. Gonçalves P.J.P., Peplow A., Brennan M.J. Exact expressions for numerical evaluation of high order modes of vibration in uniform Euler-Bernoulli beams // *Applied Acoustics.* – 2018. – Vol.141. – P. 371–373.
46. Khasawneh F.A., D. Segalman D. Exact and numerically stable expressions for Euler-Bernoulli and Timoshenko beam modes // *Applied Acoustics.* – 2019. – Vol. 151. – P. 215–228.
47. Bhattacharjee A., Chatterjee A. Transverse impact of a Hertzian body with an infinitely long Euler-Bernoulli beam // *Journal of Sound and Vibration.* – 2018. – Vol. 429. – P.147–161.
48. Qi X., Yin X. Experimental studying multi-impact phenomena exhibited during the collision of a sphere onto a steel beam // *Advances in Mechanical Engineering.* – 2016. – Vol.8 (2016). – P. 1-16.

49. Qi X., Yin X. Sub-impacts of simply supported beam struck by steel sphere—Part II: numerical simulations // *Advances in Mechanical Engineering*. – 2016. – Vol. 9. – P. 1-11.
50. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. A ray method of solving problems connected with a shock interaction // *Acta Mech.* – 1994. – Vol.102. – P.103–121.
51. McAllister Q.P., Gillespie J.W., VanLandingham M.R. The energy dissipative mechanisms of particle-fiber interactions in a textile composite // *Journal of Composite Materials*. – 2013. – Vol. 48. – P. 3553–3567.
52. Sockalingam S., Gillespie J.W., Keefe M. Dynamic modeling of Kevlar KM2 single fiber subjected to transverse impact // *International Journal of Solids and Structures*. – 2015. – Vol. 67-68. – P. 297–310.
53. Xie W., Zhang R., Headrick R.J., Taylor L.W., Kooi S., Pasquali M., Muftu S., Lee J.H. Dynamic strengthening of carbon nanotube fibers under extreme mechanical impulses // *Nano Lett.* – 2019. – Vol.19. – P. 3519–3526.
54. Hunter S.C. The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space // *J. Mech. Phys. Solid.* – 1960. – Vol.8. – P. 219–234.
55. Phillips J.W., Calvit H.H. Impact of rigid sphere on a viscoelastic plate // *Journal of Applied Mechanics*. – 1967. – Vol. 34. – P. 873–878.
56. Ahn J., Stewart D.E. A viscoelastic Timoshenko beam with dynamic frictionless impact // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. – 2009. – Vol. 12. – P. 1–22.
57. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Two approaches for studying the impact response of viscoelastic engineering systems: an overview // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2013. – Vol. 66. – P. 755–773.
58. Popov I.I., Rossikhin Y.A., Shitikova M.V., Ta-Peng C. Impact response of a viscoelastic beam considering the changes of its microstructure in the contact domain // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2015. – Vol. 19, Issue 4. – P. 455-481.
59. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V., Meza M.G.E. Impact response of a Timoshenko-type viscoelastic beam considering the extension of its middle surface // *SpringerPlus*. – 2016. – Vol. 5 Art. Num. 206, DOI: 10.1186/s40064-016-1751-2.

60. Zhang, Runyang & Müftü, Sinan. (2021). Elastic impact of a spherical particle with a long, stationary, fixed Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*. – 2021. – 495. 115892. – DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115892.
61. Brøns M., Thomsen J.J. Experimental testing of Timoshenko predictions of supercritical natural frequencies and mode shapes for free-free beams // *Journal of Sound and Vibration*. – 2019. – 459, [114856].
62. Morozov N. F., Tovstik P. E. Transverse rod vibrations under a short-term longitudinal impact // *Doklady Physics*. – 2013. – Vol. 58, Issue 9. – P. 387-391.
63. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями. – 2-е изд., испр. и доп. – М., 1971. – 180 с.
64. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука: Физматлит, 1995. – 352 с.
65. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарные задачи для упругой полуплоскости с подвижной точкой смены граничных условий // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2016. – № 3. – С. 188–206. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.13.
66. Kovaleva A., Manevitch L.I. 2016 Autoresonance versus localization in weakly coupled oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2016. – Vol. 320. – P. 1–8.
67. Kuznetsov A.P., Sataev I.R. Turukina L.V. Forced synchronization of two coupled van der Pol self-oscillators (in Russian) // *Nelineynaya Dinamika*. – 2011. – Vol. 7. – №.3. – P. 411–25.
68. Barabanov I.N., Tkhai V.N. 2021 *J. Phys.: Conf. Ser.* 1959 012003 DOI: 10.1088/1742-6596/1959/1/012003.
69. Широков В.С., Алпатов В.Ю., Гордеев Е.А. Исследование жесткости узлов соединений ригеля и стойки модульных быстровозводимых зданий // *Вестник МГСУ*. – 2021. – Т.16.– С.20–29. DOI: 10.22227/ 1997-0935.2021.1.20-29.

70. Туснина В. М., Платонова В. Д. Численный анализ жесткости фланцевых узлов «балка-колонна» // Промышленное и гражданское строительство. – 2020. – № 9. – С. 28-33. DOI: 10.33622/0869-7019.2020.09.28-33.
71. Вознесенский А.С., Куткин Я.О., Красилов М.Н., Устинов К.Б. О возможности оперативной оценки состояния анкерного крепления и кровли подземных горных выработок акустическими методами // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. — 2013. — № 13. — С. 183–196.
72. Briccoli Bati S., Toniatti U. Experimental Methods for Estimating In Situ Tensile Force in Tie-Rods // Journal of Engineering Mechanics. – 2001. – Vol. 127. – P. 1275–1283.
73. Tullini N., Rebecchi G., Laudiero F. Bending Tests to Estimate the Axial Force in Tie-Rods // Mechanics Research Communications. – 2012. – Vol. 44. – P. 57–64.
74. ГОСТ 22362-77. Конструкции железобетонные. Методы измерения силы натяжения арматуры.
75. Gentilini C., Marzani A., Mazzotti M. Nondestructive Characterization of Tie-Rods by Means of Dynamic Testing, Added Masses and Genetic Algorithms // Journal of Sound and Vibration. – 2013. – Vol. 332. – P. 76–101.
76. Lagomarsino S., Calderini C. The Dynamical Identification of the Tensile Force in Ancient Tie-Rods // Engineering Structures. – 2005. – Vol. 27. – P. 846–856.
77. Collini L., Garziera R., Riabova K. Vibration Analysis for Monitoring of Ancient Tie-Rods // Shock and Vibration. – 2017. – Vol. 2017. – P. 1-12. <https://doi.org/10.1155/2017/7591749>.
78. Coisson E., Collini L., Ferrari L., Garziera R., Riabova K. Dynamical Assessment of the Work Conditions of Reinforcement Tie-Rods in Historical Masonry Structures // Int. J. Archl. Herit. – 2019. – Vol. 13. – P. 1–13. doi:10.1080/15583058.2018.1563231.
79. Camassa D., Castellano A., Fraddosio A., Miglionico G., Piccioni M.D. Dynamic Identification of Tensile Force in Tie-Rods by Interferometric Radar Measurements // Appl. Sci. – 2021. – Vol. 11. <https://doi.org/10.3390/app11083687>.

80. Campagnari S., di Matteo F., Manzoni S., Scaccabarozzi M., Vanali M. Estimation of Axial Load in Tie-Rods Using Experimental and Operational Modal Analysis // Journal of Vibration and Acoustics. – 2017. – Vol. 139(4). <https://doi.org/10.1115/1.4036108>.
81. Cescatti E., Da Porto F., Modena C. Axial Force Estimation in Historical Metal Tie-Rods: Methods, Influencing Parameters, and Laboratory Tests // Int. J. Arch. Herit. – 2019. – Vol. 13. – P. 317–328.
82. Tullini N., Rebecchi G., Laudiero F. Reliability of the Tensile Force Identification in Ancient Tie-Rods Using One Flexural Mode Shape // Int. J. Arch. Herit. – 2019. – Vol. 13. – P. 402–410.
83. Duvnjak I., Ereiz S., Damjanović D., Bartolac M. Determination of Axial Force in Tie Rods of Historical Buildings Using the Model-Updating Technique // Appl. Sci. – 2020. – Vol. 10. 6036. <https://doi.org/10.3390/app10176036>.
84. Rainieri C., Aenlle M.L. The influence of parameter estimation error on the accuracy of a vibration based tensile load estimation technique // In Proc. of the ISMA 2016 — Int. Conf. on Noise and Vibration Eng. and USD 2016 — Int. Conf. on Uncertainty in Struct. Dynamics, Leuven, Belgium, 19–21 Sept. – 2016. – P. 1697–1710.
85. Resta C., Chellini G., De Falco A. Dynamic Assessment of Axial Load in Tie-Rods by Means of Acoustic Measurements // Buildings. – 2020. – Vol. 10. 23. <https://doi.org/10.3390/buildings10020023>.
86. Чернышев Г.Н. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах / Г.Н. Чернышев, А.Л. Попов, В.М. Козинцев, И.И. Пономарев; М.: Наука, Физматлит. 1996. – 240 с.
87. Метод отверстия в диагностике остаточных напряжений / А. Л. Попов, В. М. Козинцев, Д. А. Челюбеев, А. Л. Левитин // Прикладная математика и механика. – 2021. – Т. 85. – № 2. – С. 210-238.
88. Vladimirov A. P. Dynamic Speckle Interferometry of Microscopic and Macroscopic Processes in Deformable Media // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2015. – Iss. 6. – P. 27-57. –DOI: 10.17804/2410-9908.2015.6.027-057.

89. Попов, А. Л., Садовский С. А. (2021). О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2021. – Т.8, №2. – С.270–281. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.207>.
90. Зегжда С.А. Соударение упругих тел. - СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. –316 с.
91. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. – 623 с.
92. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2. М.: Физматлит, 1985. –560 с.
93. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. М.: МГУ, 1960. – 336 с.
94. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3. М.: Машгиз. 1959. – 1118 с.
95. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа. 1980. – 408 с.
96. Doye J.P.K. Structural consequences of the range of the interatomic potential: a menagerie of clusters // J. Chem. Soc., Faraday Trans. – 1997. – Vol. 93. – P. 4233-4244.
97. Сивак М.А., Тимофеев В.С. Построение робастных нейронных сетей с различными функциями потерь // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – Т.82, № 2. – С. 67-82. – DOI 10.17212/2782-2001-2021-2-67-82.
98. Устинов К.Б. Об уточнении граничных условий для балочной модели кантилевера атомно-силового микроскопа и их влиянии на интерпретацию результатов измерений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 3. – С. 182-188.
99. Крутиков О.В., Гершуни И.Ш. Определение усилий в канатах пролетного строения Ворошиловского моста в городе Ростов-на-Дону// Институт Гипростроймост. – 2015. – №9. – С.107-111.
100. Попов А.Л., Козинцев В.М., Челюбеев Д.А., Азаров А.А. Оптико-акустическая диагностика дефектов элементов тонкостенных конструкций и степени

их залечивания // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2022. – № 4(54). – С.25-33.

101. Азаров, А. А. Некоторые особенности частотной идентификации осевой нагрузки в балочных образцах / А. А. Азаров, А. Л. Попов, Д. А. Челюбеев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 3(57). – С. 84-90. – DOI 10.37972/chgpu.2023.57.3.007.

102. Азаров А.А., Попов А.Л., Челюбеев Д.А. О некоторых особенностях спектра продольных колебаний и звукоизлучения стержня // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – № 88. – С. 53–65. – DOI: 10.17223/19988621/88/5.

103. Азаров А.А., Попов А.Л. Экспериментальная верификация частотного метода оценки осевой нагрузки и несовершенства граничных условий в арматурных стержнях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 3. – С. 108–117. – DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.09.

104. Азаров А. А., Попов А. Л. Экспериментально-теоретический анализ начальной стадии продольных колебаний стержня после ударного воздействия // XLVII Гагаринские чтения. Сборник трудов Международной молодежной научной конференции. Секция «Механика и моделирование материалов и технологий» – Москва : ИПМех РАН, 2021. – С. 6-10.

105. Азаров А. А. Ударное возбуждение продольных колебаний стержня со свободными концами // Дни студенческой науки. Сборник докладов научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ студентов ИФО НИУ МГСУ. – Москва : НИУ МГСУ, 2021. – С. 216-219.

106. Попов А.Л., Козинцев В.М., Челюбеев Д.А., Азаров А.А. Оптико-акустическая диагностика дефектов элементов тонкостенных конструкций и степени их залечивания // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и

механики. Сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2023. – С. 1122-1125.

107. Азаров А. А. О соответствии теоретических моделей поперечных колебаний стержня экспериментальным данным // Дни студенческой науки. Сборник докладов научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ студентов ИЦТМС НИУ МГСУ. – Москва : НИУ МГСУ, 2022. – С. 418–421.

108. Азаров А. А., Попов А.Л. Теоретический и экспериментальный анализ спектра частот балки Тимошенко в окрестности критической частоты // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Сборник докладов. Том 3. – Санкт-Петербург : Политех-Пресс, 2023. – С. 333-335.

109. Азаров А.А., Попов А.Л., Челюбеев Д.А. Эффект разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении балки // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2024. – С. 1024-1029.

110. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В., Попов А.Л. Собственные колебания защемленной по краю эллиптической пластины // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 1. – С. 174-180.

111. Liu, X., Zhao, Y., Zhou, W. & Banerjee, J. R. (2022). Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories. *Applied Mathematical Modelling*. – 2022. – Vol. 104. – P. 401-420. DOI: 10.1016/j.apm.2021.11.023.

112. Han S.M., Benaroya H., Wei T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories// *Journal of Sound and Vibration*. – 1999. – 225(5). – P. 935-988. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2257.

113. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023685946 Российская Федерация. Спектральное определение коэффициентов

жесткости и силовых факторов локально-стохастическим методом : № 2023665731  
: заявл. 26.07.2023 : опубл. 01.12.2023 / А. А. Азаров.

## Приложение А

## Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023685946

**Спектральное определение коэффициентов жесткости и  
силовых факторов локально-стохастическим методом**

Правообладатель: *Азаров Артур Александрович (RU)*Автор(ы): *Азаров Артур Александрович (RU)*

Заявка № 2023665731

Дата поступления 26 июля 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 01 декабря 2023 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

#Программная реализация алгоритма определения продольной силы и коэффициентов жесткости заделки на языке Python

#Загрузка библиотек

from sympy import \*

from sympy import symbols

from sympy import Matrix

from chebpy import chebfun

import numpy as np

import math

from scipy import optimize

from scipy.optimize import basinhopping

import collections

import collections.abc as collections

import numpy as np; from pychebfun import \*

from chebpy import chebfun

#Присвоение переменных

x, y, E, G, rho, Y, alpha, F, l = symbols("x, y, E, G, rho, Y, alpha, F, l ")

#Присвоение значений исходным физическим и геометрическим параметрам

E=, G=, rho=, Y=, alpha=, F=, l=

# Ввод экспериментальных частот

qq = [f<sub>n</sub>, ..., f<sub>2</sub>, f<sub>1</sub>]

# Начальные значения варьируемых неизвестных (коэффициенты жесткости и силовые факторы)

x = [x<sub>0</sub>, x<sub>1</sub>]

# Частотное уравнение, содержащее неизвестные коэффициенты жесткости и силовые факторы (y - теоретическая частота, входящая в частотное уравнение)

```

def f(x):

    return chebfun(lambda y: ... ,[ymin, ymax])

# Корни частотного уравнения

def rts(x):

    return (f(x).roots())

# Функция ошибки

def df(x):

    return 1/n *sum(abs(rts(x)-qq))

# Метод basin-hopping

# Начальные значения варьируемых неизвестных (коэффициенты жесткости
и силовые факторы)

x0 = [x0start, x1start]

# Диапазон значений варьируемых неизвестных

xmin = [x0min, x1min]

xmax = [x0max, x1max]

# переписать граничные условия для L-BFGS-B

bounds = [(low, high) for low, high in zip(xmin, xmax)]

# Итерационный метод численной оптимизации L-BFGS-B

minimizer_kwargs = dict(method="L-BFGS-B", bounds=bounds)

# Минимизация функции ошибок

res = basinhopping(df, x0, minimizer_kwargs=minimizer_kwargs, niter=,step-
size=)

print(res)

```

**Приложение Б****Внедрение результатов диссертационной работы****ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ  
ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ****ГРУППА  
ЭТАЛОН****ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ  
«ЭТАЛОНПРОЕКТ»**В Диссертационный совет 24.2.327.07  
125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4**Акт о внедрении  
результатов научно-исследовательской деятельности по теме  
«Исследование упруго-акустических эффектов при ударных возбуждениях стержней»**

Настоящим подтверждаем, что результаты диссертационного исследования Азарова А.А. на тему: «Исследование упруго-акустических эффектов при ударных возбуждениях стержней» обладают актуальностью и представляют практический интерес.

При диагностике проектных усилий и качества узловых соединений стержневых элементов металлических конструкций, предложенные расчетные модели и методики, направленные на совершенствование частотного метода оценки, а также программа «Спектральное определение коэффициентов жесткости и силовых факторов локально-стохастическим методом» позволили получать достоверные результаты в широком диапазоне отношения длины к габаритам поперечного сечения при анализе спектров, зашумленных паразитными частотами окружающего шума строительных работ.

Руководитель службы-главный конструктор  
ООО ЭТАЛОНПРОЕКТ ОП в г. Москве  
Дайков М.А.

  
(подпись)

Заместитель генерального директора ООО ЭТАЛОНПРОЕКТ,  
руководитель ОП в г. Москве  
Астафьев А.Л.

  
(подпись)