

## **Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй**

**Кравчук М. О.\*, Кудимов Н. Ф.\*\*, Сафронов А. В.\*\*\***

*Центральный научно исследовательский институт машиностроения, ЦНИИмаш,  
ул. Пионерская, 4, Королев, Московская область, 141070, Россия*

*\*e-mail: [xxxmaxxxx3@yandex.ru](mailto:xxxmaxxxx3@yandex.ru)*

*\*\*e-mail: [nfkudim@tsnimash.ru](mailto:nfkudim@tsnimash.ru)*

*\*\*\*e-mail: [avsafon@tsnimash.ru](mailto:avsafon@tsnimash.ru)*

### **Аннотация**

В работе, на основе осредненных уравнений Навье-Стокса с модифицированной моделью турбулентной вязкости SST, представлены результаты расчетов сверхзвуковых холодных и горячих турбулентных струй. Валидация численной методики проведена на экспериментальных данных. Даны рекомендации по применению моделей турбулентности для горячих сверхзвуковых струй.

**Ключевые слова:** сверхзвуковые струи, турбулентность, изобарические струи, начальный участок струи.

### **1. Введение**

Сверхзвуковые струйные течения широко встречаются в авиационной и ракетной технике. Правильное моделирование таких течений является сложной задачей, включающей физически корректное моделирование процессов турбулентности и разрешение сложной ударно-волновой структуры. Наиболее чувствительны к параметрам турбулентности, являются сверхзвуковые изобарические струи, поэтому в данной статье рассматриваются проблемы моделирования таких течений методом RANS с различными моделями турбулентности и методом LES. Приведено сравнение расчетов с экспериментом. Даны рекомендации по применению моделей турбулентности для горячих сверхзвуковых струй.

## **2. Постановка задачи**

Расчетная область представляла собой цилиндр. Диаметр основания цилиндра равен  $40R_a$  (где  $R_a$  – радиус среза сопла), длина цилиндра -  $100 R_a$ . Расчет проводился от среза сопла для холодной и горячей струи. На всех границах расчетной области – давление и температура окружающей среды (в случае сверхзвукового течения данные и параметры потока «сносятся» из расчетной области).

Расчетная сетка обеспечивала порядка 20 ячеек на радиус среза сопла. Для метода RANS была использована расчетная сетка в осесимметричной постановке (двумерная), общее число расчетных ячеек порядка 200 тыс. Время счёта на 8 логических ядрах – 3 часа. Для метода расчета LES использовалась трёхмерная

сетка, число расчетных ячеек порядка 5млн. Время счёта на 8 логических ядрах – 14 суток. Использовался расчетный пакет Ansys Fluent V.15.0, для модификаций стандартных моделей турбулентности использовались user-defined function – подпрограммы, написанные на языке C++, которые компилировались в библиотеки и подключались к основной программе.

При описании турбулентных течений в рамках осредненных по Рейнольдсу/Фавру уравнений Навье-Стокса, для замыкания системы уравнений использовалась двухпараметрическая модель Ментера SST[1] с учетом сжимаемости Вилкокса[2].

Модель турбулентности SST[2] является двухпараметрической и предполагает решение уравнений для энергии турбулентности  $k$  и удельной скорости диссипации  $\omega$ :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho k u_j - (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = P - \beta^* \rho \omega k;$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \omega u_j - (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \frac{\gamma}{\nu_t} P - \beta \rho \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j};$$

где

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4\rho \sigma_\omega k}{CD_{k\omega} d^2} \right]$$

$$CD_{k\omega} = \max \left( \frac{2\rho \sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right)$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2), \arg_2 = \max \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right)$$

Константы в уравнениях определяются следующим образом:

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2,$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}, \sigma_{k1} = 0.85, \sigma_{\omega 1} = 0.5, \beta_1 = 0.075$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}, \sigma_{k2} = 1.0, \sigma_{\omega 2} = 0.856, \beta_2 = 0.0828$$

$$\beta^* = 0.09(1 + 1.5(F(M_t))), \kappa = 0.42, a_1 = 0.31$$

$$F(M_t) = (M_t^2 - M_{t0}^2)H(M_t - M_{t0})$$

$$M_t^2 = \frac{2k}{a^2}, M_{t0} = 0.25, a = \sqrt{\gamma RT}$$

турбулентная вязкость связана с энергией турбулентности и скоростью

диссипации следующим соотношением:  $\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)}$ , где  $S = \sqrt{2s_{ij}s_{ij}}$ .

Для численного решения уравнений применяется TVD схема 2-ого порядка аппроксимации по времени и пространству.

На срезе сопла задаются кинетическая энергия пульсаций скорости (которая является физической величиной) и масштаб турбулентности. Согласно [3, 4, 5], для сверхзвуковых струй эти величины можно принять следующими:

$$k_a = \frac{3}{2}(aU_a)^2, a = 0.01 \div 0.05, \quad (1)$$

где  $a$  – интенсивность турбулентного потока.

$$\ell_a = bRa, b = 0.01 \div 0.05. \quad (2)$$

На внешней границе свободной струи, в случае отсутствия искусственной турбулизации потока, кинетическая энергия пульсаций  $k_e$  и турбулентная вязкость  $\nu_e$  принимаются малыми величинами:  $k_e/U_a^2 \sim 10^{-6}$ ,  $\nu_e/(U_a R_a) \sim 10^{-6}$ , а скорости диссипации вычисляются по этим уровням с помощью соотношений (1). Практически

полагается, что турбулентная вязкость на внешней границе струи соответствует ламинарной [3].

Принято: на срезе сопла  $a=0.02$ ,  $b=0.01$ , на внешней границе свободной струи:  
 $k_e/U_a^2=10^{-6}$ ,  $\nu_e/(U_a R_a)=10^{-6}$ .

### 3. Экспериментальные данные

Наиболее известные систематические измерения влияния температуры на распределение осевой скорости сверхзвуковых изобарических струй даны в работе [6]. В этих испытаниях рассматривались изобарические горячие струи воздуха при  $p_a=P_a/P_e=1$ , числе Маха на срезе сопла  $M_a=2$  и температуре в камере, которая изменялась в диапазоне 300-1370К.

Для получения общей картины сравнения расчетов с экспериментом, экспериментальные данные работы [6] были обобщены в работе [3] следующими зависимостями:

$$U/U_a=1-\exp(-0.216/f-5.84/f^{2.5}), \text{ при } f < 4, \quad (3)$$

$$f=X/X_{CT}, \quad X_{CT}=X_{C300}(0.64+0.36K_H), \quad (4)$$

здесь  $X_{CT}$  – длина начального участка «горячих» струй;

$K_H=C_{pe}T_e/(C_{pa}T_0)$  – энтальпийный фактор;

$C_{pe}, C_{pa}$  – теплоемкости газов внешней среды и на срезе сопла, соответственно;

$T_e, T_0$  – температуры внешней среды и в камере, соответственно.

$X_{C300}$  – длина начального участка "холодных" струй ( $T_e = T_0$ ), которая вычисляется с учетом влияния показателя адиабаты на срезе сопла  $\gamma$  для горячих струй по критерию  $\gamma M_a^2$ :

$$X_{C300}/R_a = 0.44 + 8.97(\gamma Ma^2)^{0.45}, \quad (5)$$

здесь  $R_a$  – радиус среза сопла,  $U_a$  – скорость на срезе сопла.

Характер зависимости длины начального участка струи от температуры приведен в таблице 1.

Таблица 1.

Характер зависимости длины начального участка сверхзвуковой струи от температуры  $T_0$  при  $C_{pe} = C_{pa}$ ,  $T_e = 300\text{K}$ .

$T_0, \text{K}$	300	600	1000	1500	2500	3000
$K_H = C_{pe} T_e / (C_{pa} T_0)$	1	0.5	0.3	0.2	0.12	0.1
$0.64 + 0.36 K_H$	1	0.82	0.748	0.712	0.6832	0.676

## 4. Результаты расчетов

### 4.1. Холодные струи ( $T_0 = 300\text{K}$ )

На рисунках представлены результаты расчётов изобарических сверхзвуковых осесимметричных струй с применением модели турбулентности  $k-\omega\text{SST}$ , в сравнении с зависимостями (1-3). Принятый критерий, по которому можно судить о длине начального участка струи ( $X_{0.75}$ ) – расстояние от среза сопла на котором скорость вдоль оси струи падает на 25% по сравнению со скоростью на срезе ( $U/U_a = 0.75$ ).

На рисунке 1 приведена зависимость длины начального участка холодной струи, отнесенная к радиусу сопла ( $X/R_a$ ), от числа Маха.

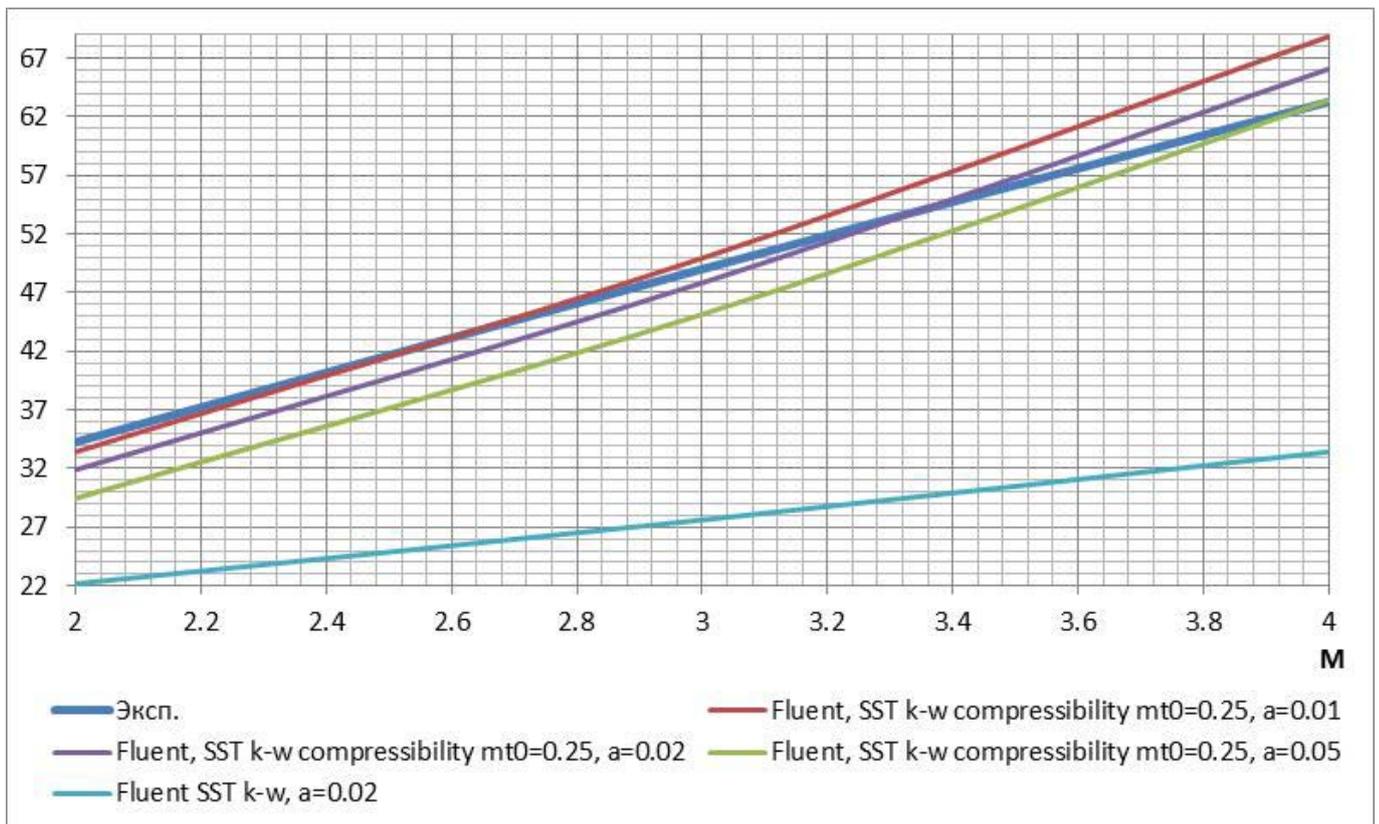


Рисунок 1. Длина начального участка изобарической холодной струи

Как видно из графика, модель турбулентности без поправок Вилкокса на сжимаемость занижает дальность струй (длину начального участка), а турбулентная интенсивность потока оказывает незначительное влияние на длину начального участка изобарической струи, показатель 0.02 для этого параметра является оптимальным. В дальнейшем, для всех расчетов примем это значение параметра  $a$ .

На рисунке 2 по оси абсцисс отложены расстояния от среза сопла, отнесенные к длине начального участка  $X_{ст}$ , на оси ординат – скорость на оси струи, отнесенная к скорости на срезе сопла. Данные приведены для холодных струй. Экспериментальные данные построены по обобщающей зависимости из[3]:

$$U_x/U_{xa}=1-\exp(-0.357/f-3.5/f^2); \quad (6)$$

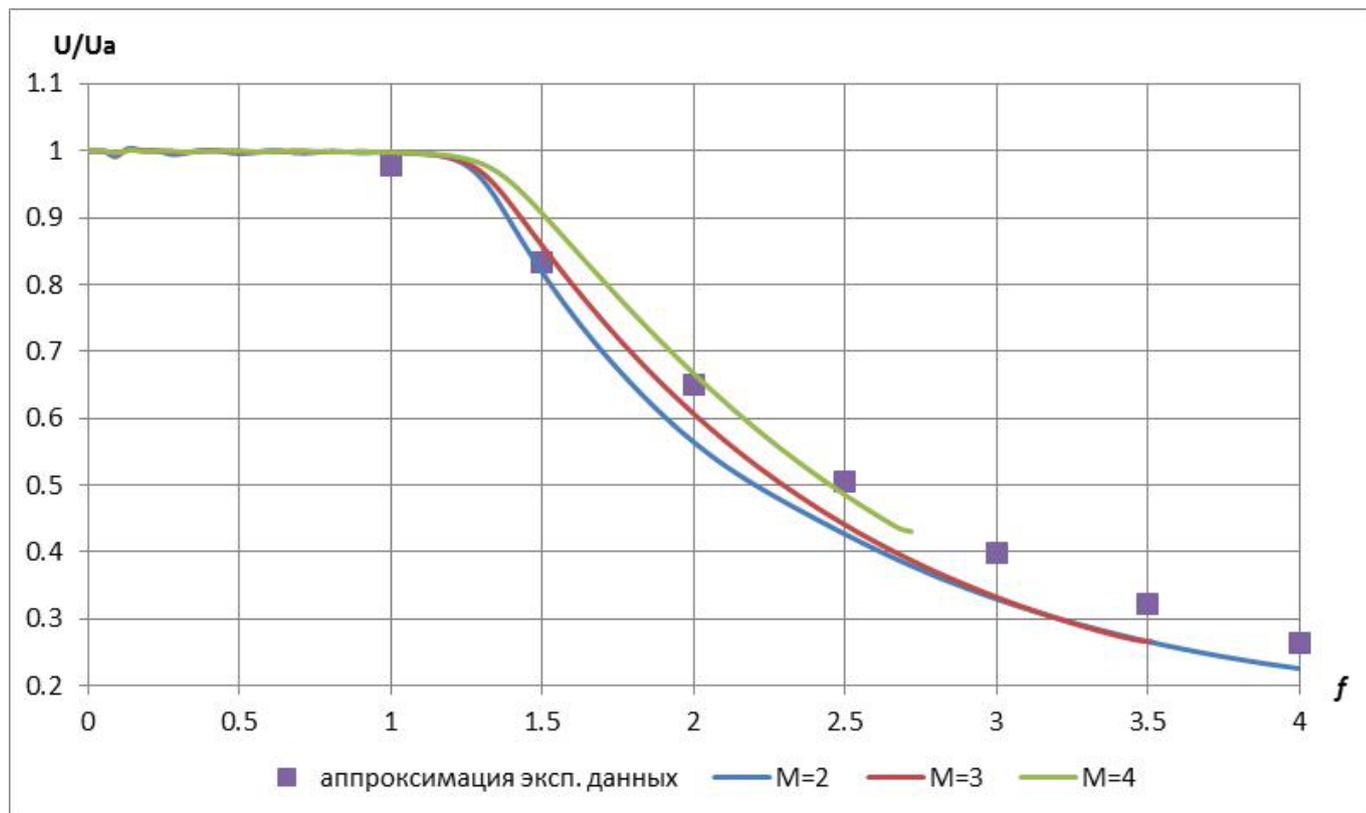


Рисунок 2. Распределение скорости по оси холодной струи, модель SSTc поправкой на сжимаемость.  $M_{i0}=0.25$ ,  $a=0.02$ .

При низких числах Маха, расчетные данные хуже согласовываются с экспериментальными – они немного занижают скорость на дальнем расстоянии от среза сопла.

## 4.2. Горячие струи

Рассмотрим график зависимости длины начального участка горячей струи ( $T_0 \geq 500\text{K}$ ), отнесенной к радиусу сопла ( $X/Ra$ ), от температуры.

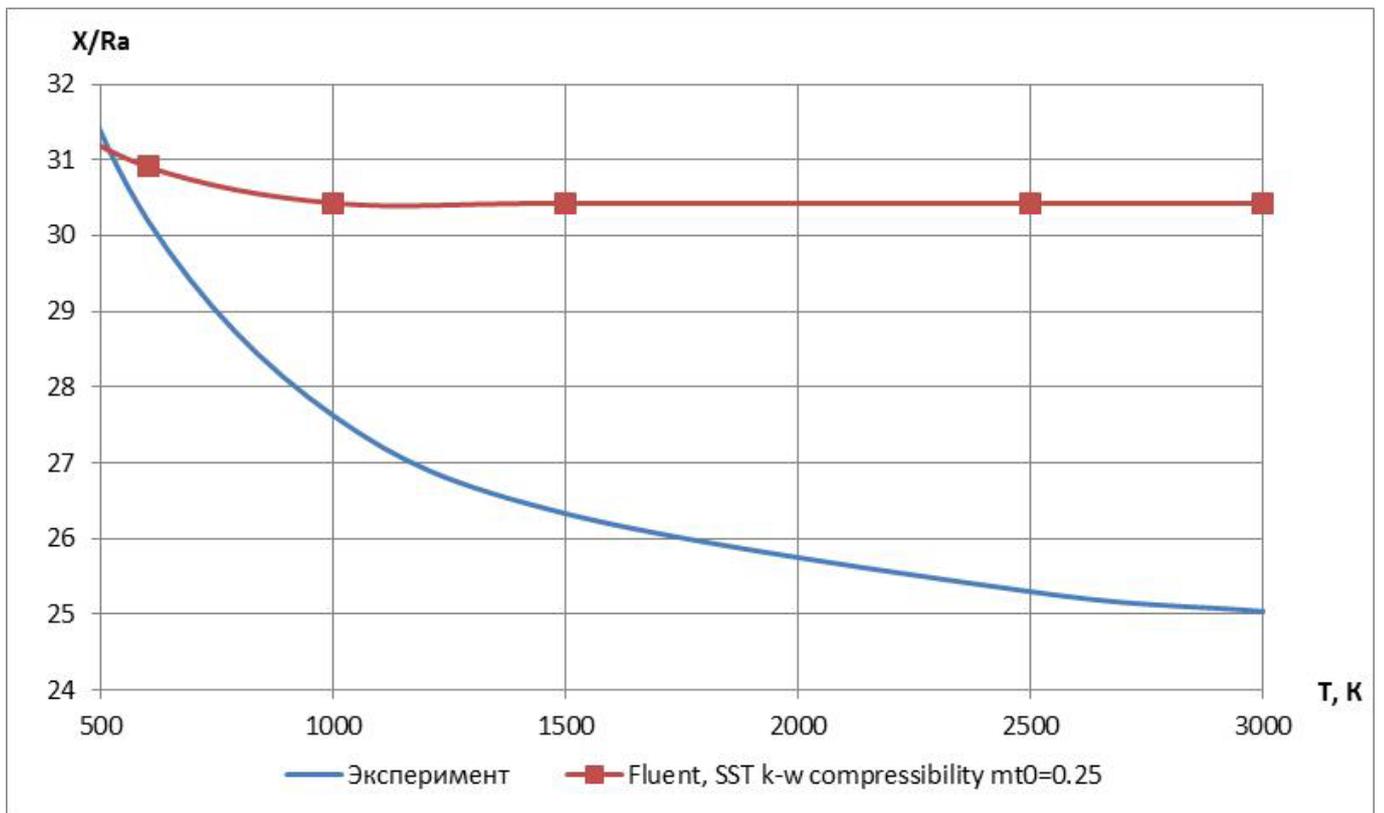


Рисунок 3. Длина начального участка горячей изобарической струи.

Далее, рассмотрим график профиля скорости по оси струи, отнесенный к начальному участку.

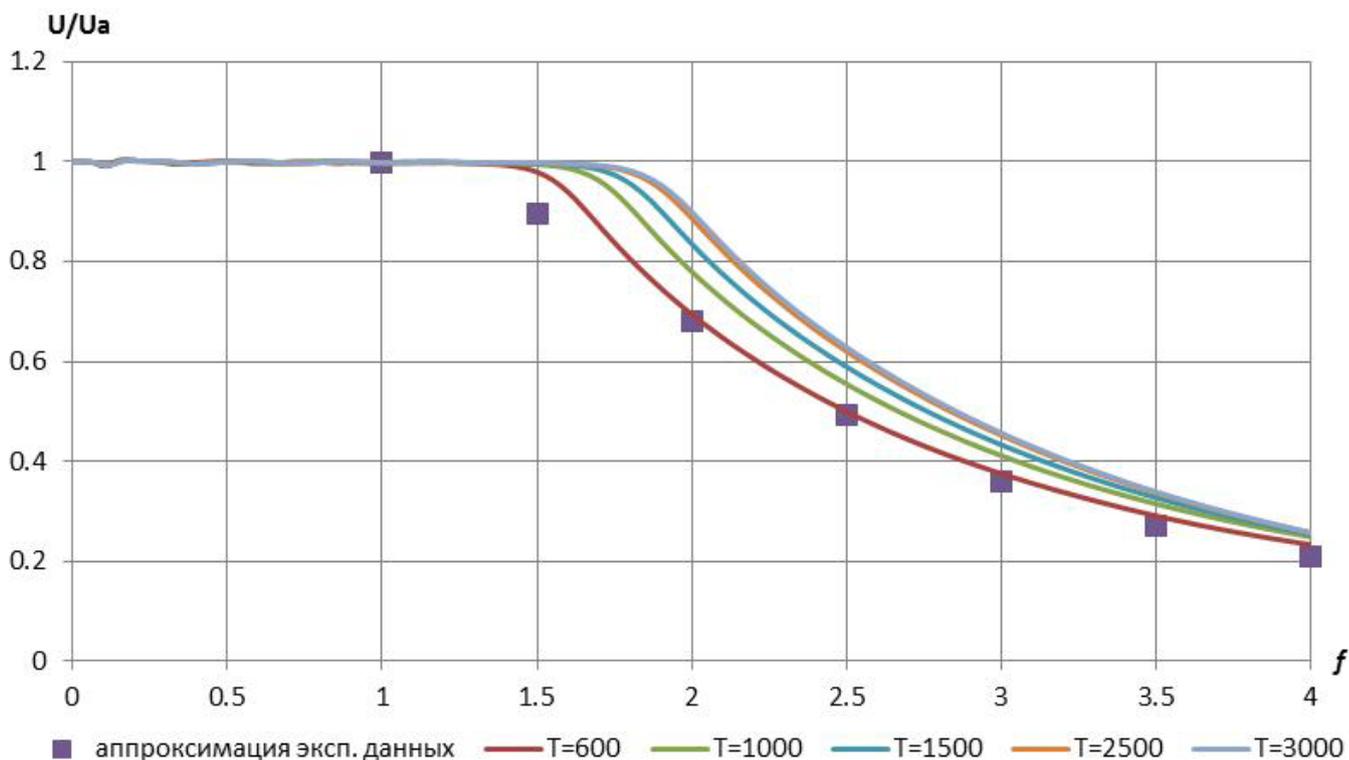


Рисунок 4. Распределение скорости на оси горячей струи. Модель SST поправкой на сжимаемость.  $M_{t0}=0.25$ .

Из рис. 4 и рис. 5 видно, что для расчета горячих струй, стандартная модель турбулентности SSTk- $\omega$  не подходит. В этом случае возможны следующие подходы: вводить дополнительные поправки на температуру (например, [7], учитывающие градиент полной температуры) или модифицировать модель, поменяв пороговое значение числа Маха турбулентных пульсаций  $M_{t0}$  (для холодных струй  $M_{t0}=0.25$ ).

Путем проведения методических расчетов были установлены оптимальные значения параметра  $M_{t0}$ , которые необходимо задавать для моделирования горячих струй, они сведены в таблице ниже.

Таблица 2.

Рекомендуемое пороговое значение числа Маха турбулентных пульсаций в зависимости от температуры при  $Ma=2$ , в сравнении с аппроксимацией (3-5).

$T_0$ , К	300	600	1000	1500	2500	3000
$M_{t0}$	0.25	0.26	0.31	0.33	0.35	0.36

Сравним экспериментальную и расчетную (при значениях  $M_{t0}$  указанных в таблице) зависимость дальности струи от температуры.

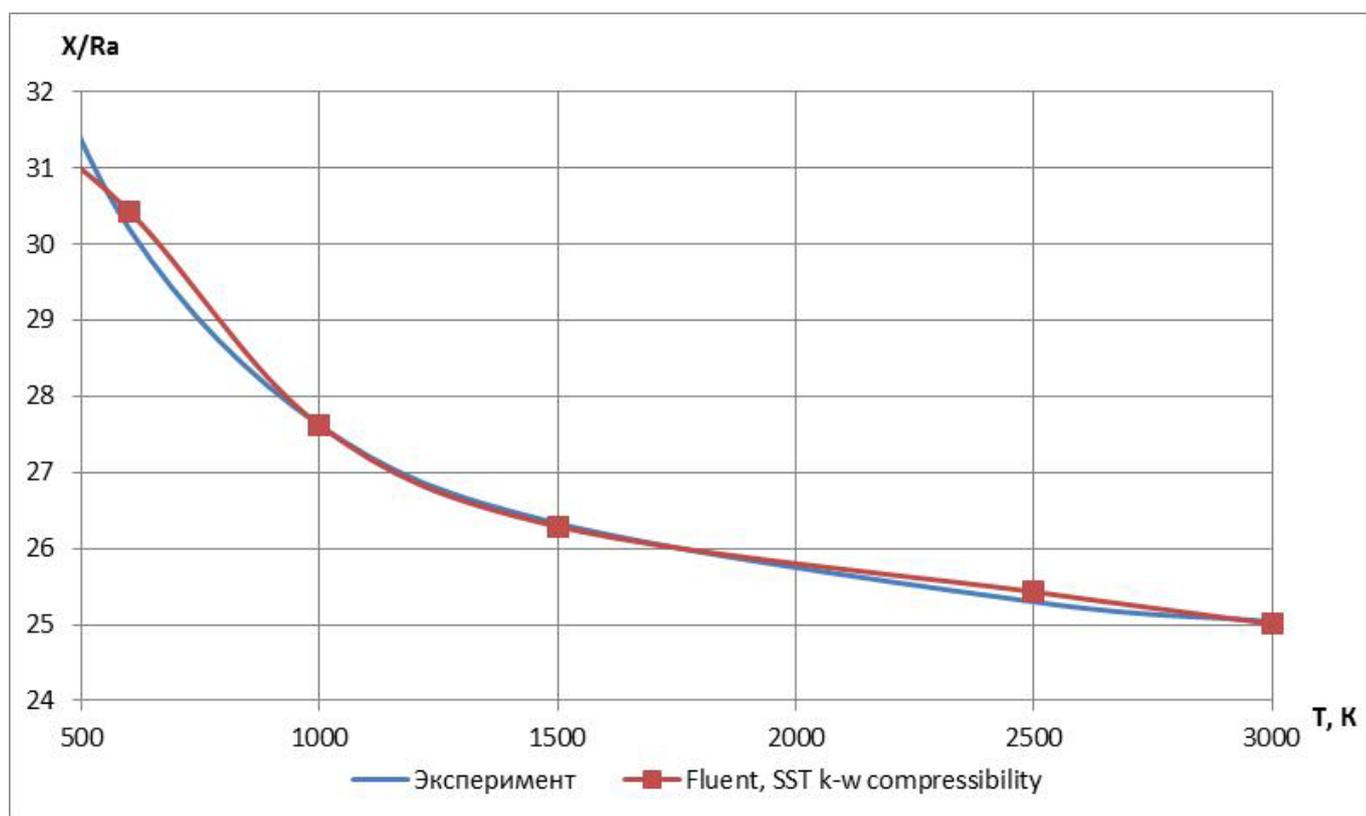


Рисунок 5. Длина начального участка изобарической струи.

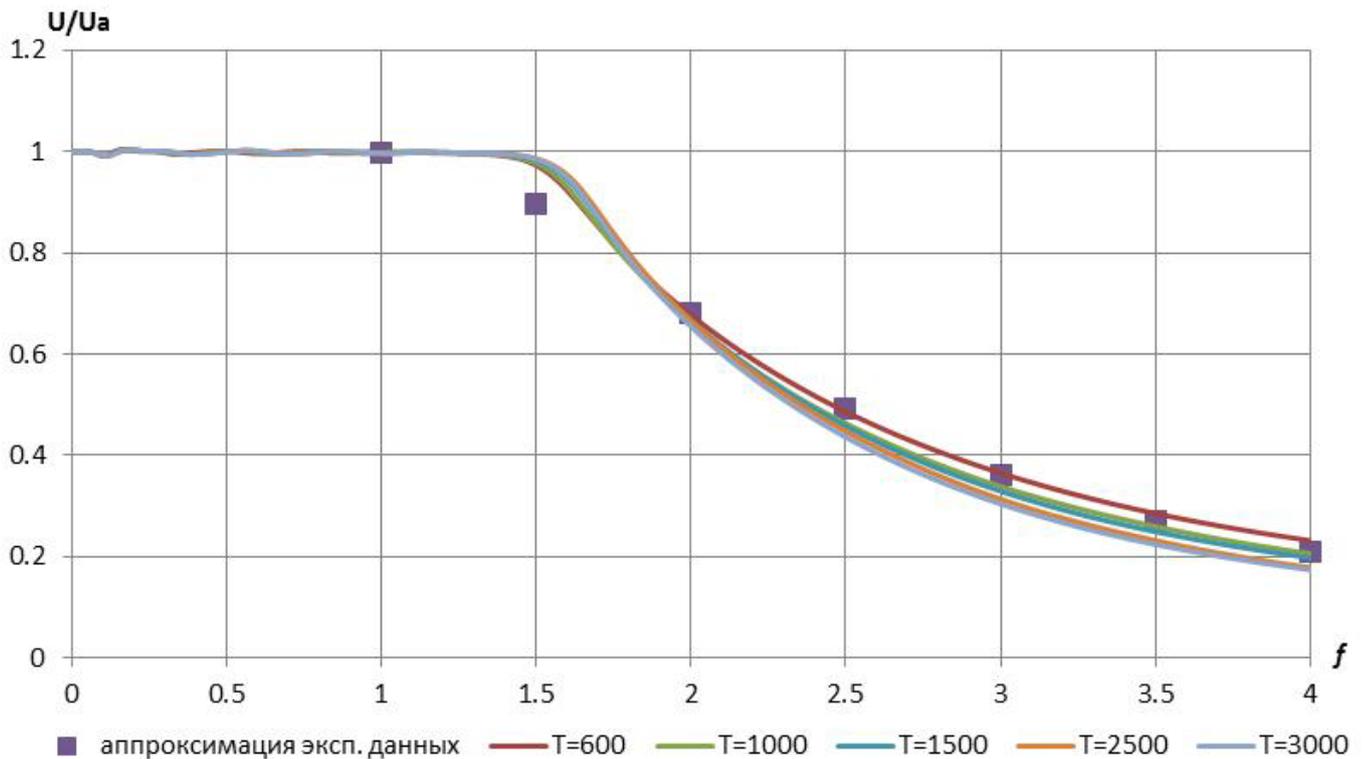


Рисунок 6. Распределение скорости на оси струи. Модель SST с поправкой на сжимаемость.

### 5. Поправки на температуру Абдоль-Хамида.

Еще один способ модифицировать модель турбулентности для расчета горячих струй – ввести поправки на температуру. В стандартной двухпараметрической модели Ментера SST[1] в формуле удельной скорости диссипации:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k};$$

коэффициент  $\beta^*$  принимается константой  $\beta^* = C_\mu = 0.09$ .

Абдоль-Хамид предположил, что коэффициент  $C_\mu$  зависит от градиента полной температуры с помощью следующей зависимости:

$$C_{\mu} = 0.09 \left( 1 + \frac{T_g^3}{0.041 + F(M_t)} \right);$$

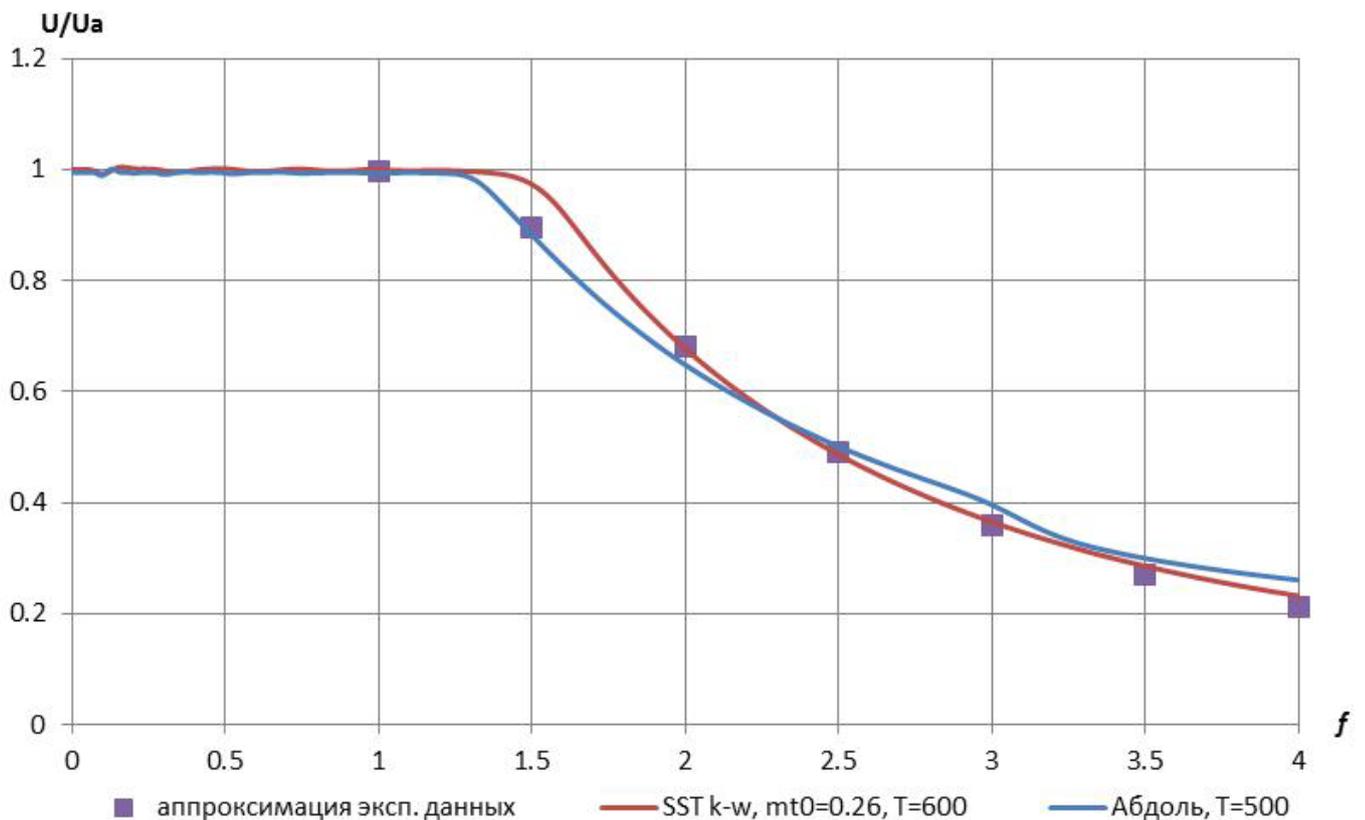
где

$$T_g = \frac{|\nabla T_0| * \left( k^{3/2} / \varepsilon \right)}{T_0};$$

и значение числа Маха турбулентных пульсаций:

$$M_t = \sqrt{2k} / a.$$

Ниже представлен график профиля струи для модели SSTk- $\omega$ , с измененным  $M_{t0}$  и график профиля струи для модели турбулентности с поправками Абдоль-Хамида.



## Рисунок 7.

Из рис. 7 видно, что модель турбулентности с поправками Абдоль-Хамида лучше согласовывается с экспериментальными данными, чем модель SSTk- $\omega$ .

## 6. LES

Идея LES (Large Eddy Simulation) состоит в разрешении турбулентных вихрей, чей размер больше размера ячейки расчетной сетки и моделировании мелких. При такой постановке, необходимо создавать расчетную сетку с такими ячейками, которых достаточно что бы разрешить большую часть энергетического спектра турбулентности.

При расчёте использовалась подсеточная модель вихревой вязкости WALE. В модели WALE, вихревая вязкость описывается соотношением:

$$\mu_t = \rho L_s^2 \frac{\left( S_{ij}^d S_{ij}^d \right)^{3/2}}{\left( \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \right)^{5/2} + \left( S_{ij}^d S_{ij}^d \right)^{5/4}};$$

где  $L_s$  и  $S_{ij}^d$  в модели WALE, определены, как:

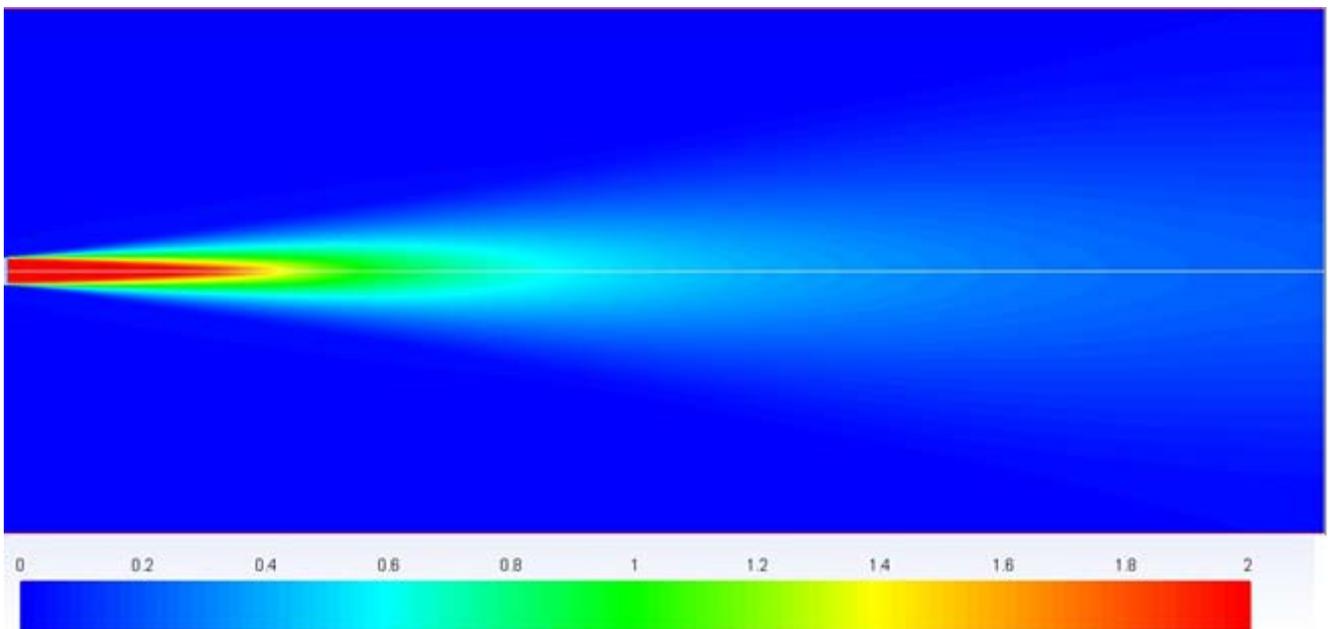
$$L_s = \min\left(kd, C_w V^{1/3}\right);$$

где  $k$  – константа Кармена,  $d$  – расстояние до стенки.

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} \left( \bar{g}_{ij}^2 + \bar{g}_{ij}^2 \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{g}_{kk}^2, \quad \bar{g}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j};$$

В ANSYS Fluent, по умолчанию, задана константа  $C_w=0.325$ , как наиболее подходящая для большинства задач. В модели WALE, для ламинарной подвижной среды, турбулентная вязкость приравнивается к нулю. Это позволяет правильно моделировать ламинарные зоны. Модель Смагоринского-Лилли, например, не дает значение турбулентной вязкости, равное нулю. Поэтому модель WALE предпочтительнее.

Расчет методом LES нужно проводить в нестационарной постановке. Все величины при этом пульсируют с течением времени (Рисунок 8). Метод LES имеет потенциал для получения более достоверных результатов, чем методы RANS. Однако, метод LES более требователен к вычислительным ресурсам, чем RANS метод.



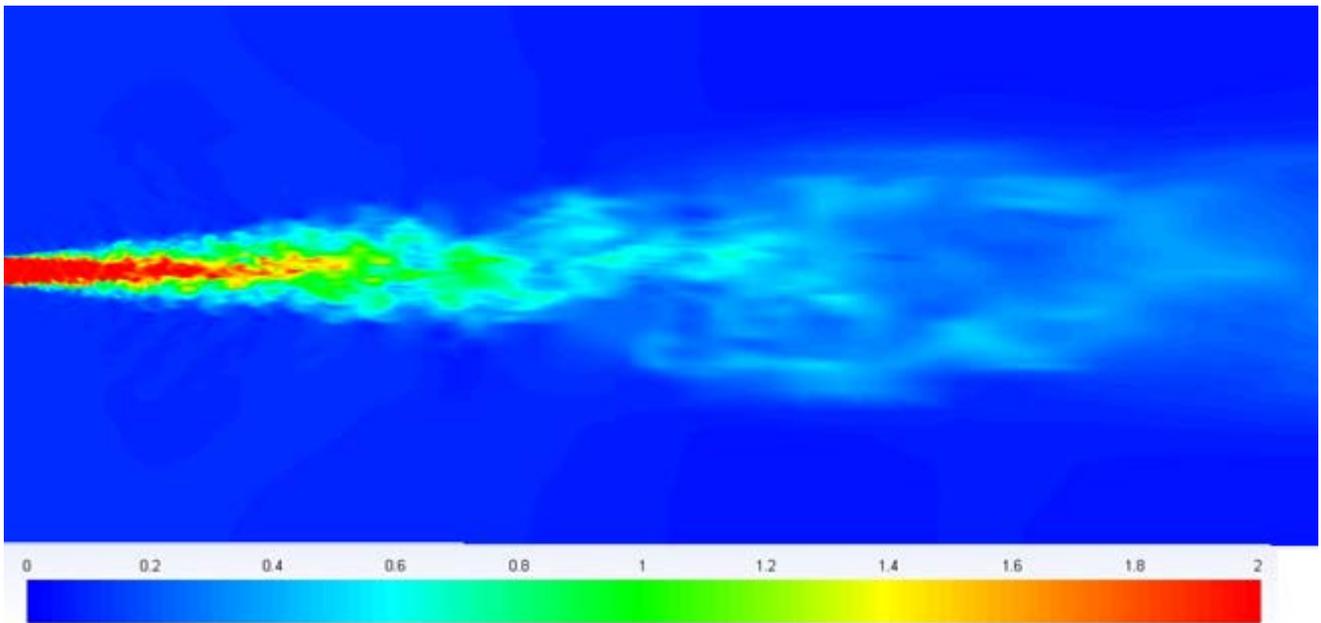
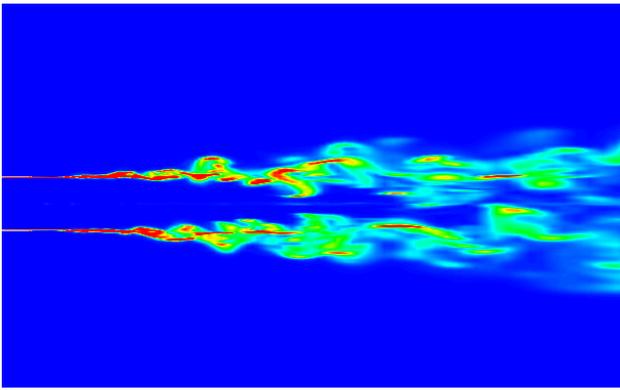
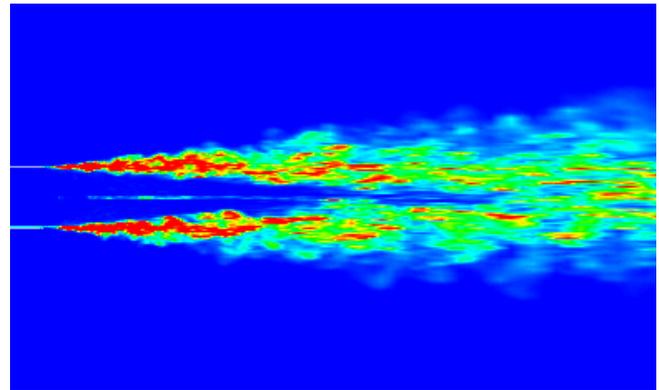


Рисунок 8. Расчет методом RANS (верхняя картинка) и методом LES (нижняя картинка, мгновенное поле) горячей струи [6],  $M_a=2$ ,  $T_0=1370\text{K}$ . Поле числа Маха.

В рассматриваемом случае использовалась расчетная сетка с общим числом ячеек порядка 5 млн. Для экономии вычислительных ресурсов в расчетах не учитывалось течение в сопле с детальным разрешением пограничного слоя, расчеты проводились от среза сопла. В качестве расчетных схем использовались схемы второго порядка аппроксимации по времени и пространству с решением задачи распада-разрыва методом Roe, а также схемой третьего порядка MUSCL и низкодиссипативным методом Roe. Различие в применяемых подходах можно видеть на Рисунке 8 – применение низкодиссипативной схемы приводит к более детальной картине развития процессов смешения.



Roe, 2-order upwind



Low-diffusion Roe, 3-order MUSCL

Рисунок 9 – Распределение завихренности в слое смешения сверхзвуковой струи [6] ( $M=2$ ,  $T_0=1370\text{K}$ ) для различных вариантов применяемых численных схем

Сравнение полученных распределений скорости по оси струи в рамках различных методов приведено на Рисунке 10. Видно, что классический метод LES-WALE хорошо согласуется с данными эксперимента для холодной струи, но для горячих струй получено существенное занижение дальности струи. На Рисунке 11 представлено сравнение энергии турбулентности по оси струи методами LES и RANS. Видно, что методом LES ядро струи имеет меньшую протяженность, и начало турбулентного смешения начинается раньше. Профиль турбулентной энергии для метода LES более крутой и достигает больших значений, что оказывает влияние на профиль скорости. Отметим также, что для получения осредненной скорости потребовалось порядка 3 величин пролетного времени, в то же время для получения среднеквадратичных значений (как, например, турбулентной энергии) потребовалось 8 величин пролетного времени.

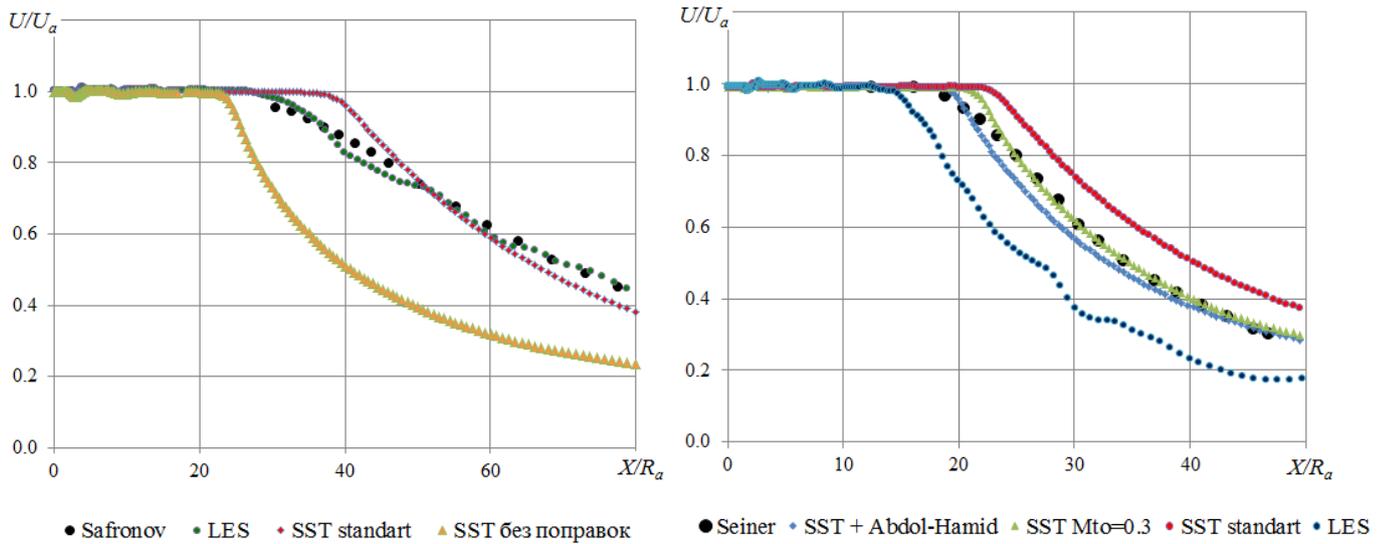


Рисунок 10. Сравнение скорости по оси струи различными моделями RANS и LES для холодной  $T_0=300\text{K}$ ,  $Ma=3$  (слева) и горячей  $T_0=1370\text{K}$ ,  $Ma=2$  (справа) струй

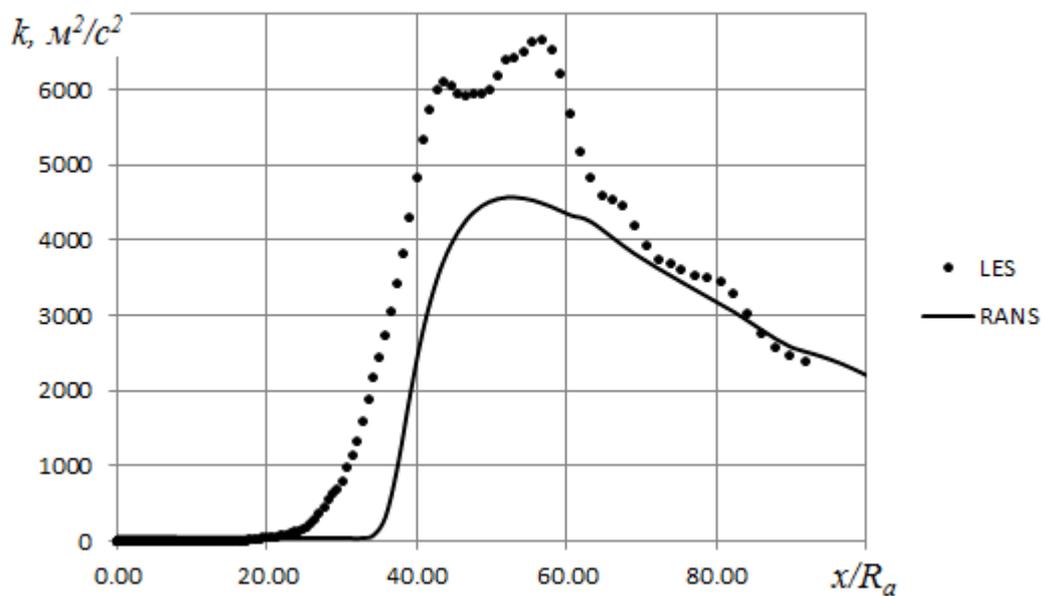


Рисунок 10. Сравнение турбулентной энергии по оси струи методами RANS и LES для горячей струи  $Ma=3$ ,  $T_0=300\text{K}$

## 7. Выводы

Путем сравнения результатов расчетов с экспериментальными данными установлено:

- 1) Модель  $k-\omega$  с поправками Вилкокса на сжимаемость существенно завышает дальнобойность сверхзвуковых горячих струй, а без поправок занижает.
- 2) Устранение этого недостатка для изобарических струй возможно с помощью изменения порогового значения числа Маха турбулентных пульсаций ( $M_{t0}$ ), либо, вводом поправок Абдоль-Хамида, учитывающих градиент полной температуры.
- 3) Даны рекомендации по изменению числа  $M_{t0}$  в зависимости от температуры струи при числе Маха на срезе сопла  $M_a=2$ .
- 4) Метод LES (WALE) для холодных струй согласуется с экспериментальными данными, а для высокотемпературных струй существенно завышает уровень турбулентности и тем самым занижает дальнобойность.

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 14-08-01149.*

### **Библиографический список**

1. Menter F. «Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications.» AIAA Journal, Vol. 32, 1994, pp. 1598–1605.
2. Wilcox D. C. Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, Inc., La Canada, CA 91011, 3rd ed., 2006.
3. Сафронов А. В. О применимости моделей турбулентной вязкости для расчета сверхзвуковых струйных течений // Физико-химическая кинетика в газовой динамике 2012, Т.13, выпуск №1 :<http://chemphys.edu.ru/issues/2012-13-1/articles/305/>

4. Kenzakowski D.C. Turbulence modeling improvements for jet noise prediction using PIV datasets//AIAA–2004–2978, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, 10–13 May.- 2004.
5. Кудимов Н. Ф., Сафронов А. В., Третьякова О. Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Электронный журнал «Труды МАИ», 2013, № 70: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=44440> (дата публикации 25.11. 2013)
6. Seiner, J.M., Ponton, M.K., Jansen, B.J., and Lagen, N.T. The Effect of Temperature on Supersonic Jet Noise Emission// DGLR/AIAA Paper 92–02–046.- 1992.
7. Abdol-Hamid, K. S., Massey, S. J., and Elmiligui, A., “Temperature Corrected Turbulence Model for High Temperature Flow,” Journal of Fluids Engineering, Vol. 126, 2004, pp. 844.