

Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 10. С. 443–453
Thermal processes in engineering, 2025, vol. 17, no. 10, pp. 443–453

Научная статья
УДК 539.3
URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=186292>
EDN: <https://www.elibrary.ru/GCSFPZ>

Экспериментальное исследование и численное моделирование деформации трехслойной панели с нерегулярной структурой сот под действием внешней нагрузки

И.В. Котович¹✉, Д.Д. Власов²

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

²Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Российская Федерация

¹ilyakot@bk.ru✉

Аннотация. В статье рассматривается актуальная задача анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных сэндвич-панелей с сотовым заполнителем, содержащим локальные нерегулярности – вариации геометрии ячеек, под действием внешних нагрузок – давления и температурного поля. Традиционные методы расчета, основанные на предположении о регулярной и однородной структуре заполнителя, оказываются недостаточно точными в реальных условиях эксплуатации, что может приводить к избыточным запасам прочности или снижению надежности конструкций. В работе предложена методика, сочетающая аналитическую строгость и вычислительную экономичность. На основе теории изгиба трехслойных пластин по модели Тимошенко–Рейсснера первого порядка и с использованием двойных рядов Фурье построено решение краевой задачи для шарнирно опертой прямоугольной пластины. Введена поправка от влияния температуры через эквивалентные изгибающие моменты. Для учета слабой неоднородности заполнителя применен метод малых возмущений, позволяющий последовательно уточнять решение с учетом отклонений сдвиговых жесткостей от средних значений. Проведена экспериментальная валидация методики с использованием вакуумного нагружения и оптического метода корреляции цифровых изображений (DIC). Результаты показали высокую степень согласования между численно-аналитическими и экспериментальными данными по прогибам, что подтверждает применимость разработанного подхода для инженерного анализа панелей с нерегулярной сотовой структурой.

Ключевые слова: трехслойные панели, сотовый заполнитель, напряженно-деформированное состояние, нерегулярная структура, метод малых возмущений, двойные ряды Фурье, теория Тимошенко–Рейсснера, корреляция цифровых изображений

Для цитирования. Котович И.В., Власов Д.Д. Экспериментальное исследование и численное моделирование деформации трехслойной панели с нерегулярной структурой сот под действием внешней нагрузки // Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. 10. С. 443–453. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=186292>

Original article

Experimental investigation and numerical calculation of deformation in a three-layer panel with an irregular honeycomb core structure under external loading

I.V. Kotovich^{1✉}, D.D. Vlasov²

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

²*A.A. Blagonravov Institute of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

¹*ilyakot@bk.ru✉*

Abstract. This paper addresses the problem of determining the stress-strain state of three-layer sandwich panels with a honeycomb core containing local irregularities. The relevance of the research is driven by the widespread use of such structures in aerospace engineering, where an optimal balance between low weight and high stiffness and strength is critical, as well as the need to ensure reliability in the presence of defects or structural inhomogeneities. An analytical-numerical methodology is proposed, based on the first-order Timoshenko-Reissner theory for sandwich plates, expansion of the unknown displacement and rotation fields into double Fourier series, and the method of small perturbations to account for weak spatial variations in the shear stiffness of the core. The approach enables efficient incorporation of both simply supported boundary conditions and external mechanical loading, as well as thermal gradients. The thermal effect is modeled through equivalent bending moments proportional to the temperature difference between the face sheets. The experimental component includes testing of four panel specimens with varying honeycomb geometries under vacuum-induced uniform pressure; deformations were measured using the non-contact Digital Image Correlation (DIC) technique. Comparison between numerical predictions and experimental data demonstrates excellent agreement in terms of deflection fields, confirming the validity and practical applicability of the developed method. The proposed framework offers a reliable tool for the design and analysis of lightweight composite structures, enabling improved accuracy in structural assessment and potential weight reduction without compromising safety.

Keywords: sandwich panels, honeycomb core, stress-strain state, irregular structure, method of small perturbations, double Fourier series, Timoshenko-Reissner theory, Digital Image Correlation

For citation. Kotovich I.V., Vlasov D.D. Experimental investigation and numerical calculation of deformation in a three-layer panel with an irregular honeycomb core structure under external loading. *Thermal processes in engineering*. 2025, vol. 17, no. 10, pp. 443–453. (In Russ.). URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=186292>

Введение

Современные требования к снижению массы конструкций при сохранении или повышении их прочностных и жесткостных характеристик делают трехслойные панели с сотовым заполнителем особенно востребованными в авиастроении, ракетно-космической технике [1]. Однако традиционные методы расчета таких панелей предполагают регулярную, однородную структуру

заполнителя, что не соответствует реальным условиям эксплуатации, где часто встречаются нерегулярности – локальные повреждения, вариации геометрии ячеек, неоднородности свойств материалов [2]. Это приводит к неточностям в оценке напряженно-деформированного состояния (НДС), снижению надежности конструкций и избыточному запасу прочности. В связи с этим разработка методики расчета НДС трехслойных панелей с учетом локальных неоднородностей

нелей с нерегулярной сотовой структурой является актуальной научной и инженерной задачей [3]. Однако моделирование и расчет панелей с нерегулярной структурой заполнителя остаются недостаточно исследованными. Существующие подходы либо чрезмерно упрощают геометрию дефектов [4], либо требуют чрезвычайно больших вычислительных ресурсов при прямом моделировании каждой ячейки [5, 6]. Таким образом, отсутствует эффективная инженерная методика, сочетающая точность и вычислительную экономичность для анализа панелей с локальными нерегулярностями [7].

Постановка схемы решения

Для описания деформированного состояния трехслойной пластины в рамках модели Тимошенко–Рейснера первого порядка вводятся три основные функции: прогиб $w(x,y)$ и углы поворота нормали к срединной плоскости $\theta_x(x,y)$, $\theta_y(x,y)$. Эти функции удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений [8, 9]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_0 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right) - \\ & - k_x(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_0 \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial z} \right) \right) - \\ & - k_y(x) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[k_x(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_z \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_y(x) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \right] + q = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Границные условия соответствуют шарнирному опиранию по всем четырем краям прямоугольной пластины размерами $a \times b$ [8, 10]. На краях $x = 0$ и $x = a$ задаются условия:

$$w = 0, M_x = D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = 0,$$

а на краях $y = 0$ и $y = b$:

$$w = 0, M_y = D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = 0.$$

Учитывая однородность задачи по координате y и характер граничных условий, решение ищется в виде разложения в ряд Фурье по синусам и косинусам:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \times \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad (4)$$

$$\theta_x(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{x,n}(x) \times \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad (5)$$

$$\theta_y(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{y,n}(x) \times \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right). \quad (6)$$

Аналогичным образом представляется и внешняя нагрузка:

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \times \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad (7)$$

где коэффициенты Фурье определяются как

$$q_n = \begin{cases} \frac{4q}{n \times \pi}, & n - \text{нечетное}, \\ 0, & n - \text{четное}. \end{cases}$$

Такой подход позволяет свести исходную двумерную краевую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной x для каждого гармонического номера n , что существенно упрощает анализ и численную реализацию решения. После подстановки разложений в ряд Фурье для прогиба, углов поворота и нагрузки в исходную систему уравнений (1)–(3) и последующего интегрирования по координате y с использованием ортогональности тригонометрических функций, задача распадается по гармоникам. Для каждой фиксированной гармоники n получается система трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $w(x,y)$, $\theta_x(x,y)$, $\theta_y(x,y)$:

$$\begin{aligned} & D_{11} \times \theta_{x,n}''(x) - D_0 \times \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \times \theta_{x,n}(x) - \\ & - D_{12} \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \times \theta_{y,n}(x) = \\ & = k_y(x) \times \left(w_n'(x) - \theta_{x,n}(x) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D_0 \times \left(\frac{\pi n}{b} \right) \times \theta'_{y,n}(x) - D_{12} \times \theta'_{x,n}(x) - \\ - D_{22} \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \times \theta_{y,n}(x) = \\ = k_y(x) \times \left(\frac{\pi n}{b} \times w_n(x) - \theta_{y,n}(x) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \times [k_x(x) \times (w'_n(x) - \theta_{x,n}(x))] - \\ - k_y(x) \times \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \times w_n(x) + \\ + k_y(x) \times \left(\frac{\pi n}{b} \right) \times \theta_{y,n}(x) + q_n = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Границные условия на краях $x = 0$ и $x = a$, соответствующие шарнирному опиранию, принимают следующий вид для каждой гармоники:

$$w_n(0) = w_n(a) = 0, \quad (11)$$

$$D_{11} \times \theta'_{x,n}(0) - D_{12} \times \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \times \theta_{y,n}(0) = 0, \quad (12)$$

$$D_{11} \times \theta'_{x,n}(a) - D_{12} \times \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \times \theta_{y,n}(a) = 0. \quad (13)$$

Таким образом, исходная двумерная краевая задача с частными производными сводится к последовательному решению независимых одномерных задач для каждой моды n , что позволяет эффективно учитывать как неоднородность сдвиговых свойств заполнителя через функции $k_x(x)$ и $k_y(x)$, так и специфику граничных условий и внешнего нагружения [5].

Для анализа поведения трехслойной пластины со слабо неоднородным заполнителем применяется метод малых возмущений. Предполагается, что сдвиговые жесткости слабо отклоняются от своих средних (постоянных) значений:

$$k_x(x) = k_x^0 \times [1 + \varepsilon \times \varphi_x(x)], \quad (14)$$

$$k_y(x) = k_y^0 \times [1 + \varepsilon \times \varphi_y(x)], \quad (15)$$

где: k_x^0 , k_y^0 – постоянные средние значения сдвиговых жесткостей, $\varepsilon \ll 1$ – малый безразмерный параметр, а $\varphi_x(x)$, $\varphi_y(x)$ – заданные гладкие функции (например, $\sin(\pi x/a)$), описывающие форму неоднородности.

Решение ищется в виде разложения по степеням параметра ε :

$$\begin{aligned} w_n(x) = w_n^{(0)}(x) + \varepsilon \times w_n^{(1)}(x) + \\ + \varepsilon^2 \times w_n^{(2)}(x) \dots \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \theta_{x,n}(x) = \theta_x^{(0)}(x) + \varepsilon \times \theta_x^{(1)}(x) + \\ + \varepsilon^2 \times \theta_x^{(2)}(x) \dots \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \theta_{y,n}(x) = \theta_y^{(0)}(x) + \varepsilon \times \theta_y^{(1)}(x) + \\ + \varepsilon^2 \times \theta_y^{(2)}(x) \dots \end{aligned} \quad (18)$$

В нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) система уравнений (16)–(18) становится линейной с постоянными коэффициентами и допускает аналитическое решение. Для одной гармоники по обеим координатам прогиб записывается в виде:

$$w_n^{(0)}(x) = W_n \times \cos(\alpha_m x), \quad (19)$$

где введены обозначения

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad (20)$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad (21)$$

а амплитуда W_n определяется из алгебраического уравнения:

$$W_n = \frac{q_n}{D_{11}(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 + \frac{k_x^0 \times k_y^0 (\alpha_m^2 + \beta_n^2)}{k_x^0 \times \beta_n^2 + k_y^0 \times \alpha_m^2}}. \quad (22)$$

Соответствующие углы поворота в нулевом приближении имеют вид:

$$\theta_{x,n}^{(0)}(x) = \alpha_m W_n \times \cos(\alpha_m x), \quad (23)$$

$$\theta_{y,n}^{(0)}(a) = \beta_n W_n \times \cos(\alpha_m x). \quad (24)$$

Первое приближение:

В первом порядке по ε подстановка разложений в систему (16)–(18) и сборка коэффициентов при ε^1 приводят к линейной неоднородной системе уравнений для поправок $w_n^{(1)}$, $\theta_{x,n}^{(1)}$, $\theta_{y,n}^{(1)}$

$$\begin{aligned} k_x^0 \alpha_m (\alpha_m W_{mn}^{(1)} - X_{mn}^{(1)}) + \\ + k_y^0 \beta_n (\beta_n W_{mn}^{(1)} - Y_{mn}^{(1)}) = \\ = -\alpha_m \sum_{r=1}^{\infty} (\alpha_r W_{rn}^{(0)} - X_{rn}^{(0)}) \times K_{mr}^{(1)} - \\ - \beta_n (\beta_n W_{mn}^{(0)} - Y_{mn}^{(0)}) \times k_y^{(1)}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} - (D_{11} \alpha_m^2 + D_0 \beta_n^2) X_{mn}^{(1)} - D_{12} \beta_n^2 Y_{mn}^{(1)} - \\ - k_x^0 (\alpha_m W_{mn}^{(1)} - X_{mn}^{(1)}) = \\ = - \sum_{r=1}^{\infty} (\alpha_r W_{rn}^{(0)} - X_{rn}^{(0)}) \times K_{mr}^{(1)}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & -D_{12}\alpha_m^2 X_{mn}^{(1)} - (D_{22}\beta_n^2 + D_0\alpha_m^2) Y_{mn}^{(1)} - \\ & - k_y^0 (\beta_n W_{mn}^{(1)} - Y_{mn}^{(1)}) = \\ & = -(\beta_n W_{mn}^{(0)} - Y_{mn}^{(0)}) \times k_y^{(1)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где введены коэффициенты возмущения:

$$K_{mr}^{(1)} = \frac{2}{a} \int_0^a k_x^0 \phi_x(x) \cos(\alpha_m x) \cos(\alpha_r x) dx, \quad (28)$$

$$k_y^{(1)} = \frac{1}{a} \int_0^a k_y^0 \phi_y(x) dx = 0, \quad (29)$$

если $\phi_y(x)$ не имеет нулевого среднего, то $k_y^{(1)} \neq 0$, но для простоты будем считать $k_y^{(1)} = 0$.

В рамках метода малых возмущений предполагается, что отклонения сдвиговых жесткостей от некоторых средних значений являются малыми. Наиболее естественный и физически обоснованный способ определения этих средних значений – интегральное усреднение по длине пластины в направлении неоднородности (координата x):

$$k_x^0 = \frac{1}{a} \int_0^a k_x(x) dx = \frac{h_c}{a} \int_0^a G_{xz}(x) dx, \quad (30)$$

$$k_y^0 = \frac{1}{a} \int_0^a k_y(x) dx = \frac{h_c}{a} \int_0^a G_{yz}(x) dx. \quad (31)$$

Таким образом, метод малых возмущений позволяет последовательно учитывать слабую неоднородность заполнителя, сохраняя аналитическую прозрачность решения. Итоговое приближенное решение задачи изгиба трехслойной пластины с учетом слабой неоднородности заполнителя записывается в виде:

$$\begin{aligned} w(x,y) & \approx \\ & \approx \sum_{n=1}^{\infty} [w_n^{(0)}(x) + \varepsilon \times w_n^{(1)}(x)] \times \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \theta_x(x,y) & \approx \\ & \approx \sum_{n=1}^{\infty} [\theta_{x,n}^{(0)}(x) + \varepsilon \times \theta_{x,n}^{(1)}(x)] \times \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \theta_y(x,y) & \approx \\ & \approx \sum_{n=1}^{\infty} [\theta_{y,n}^{(0)}(x) + \varepsilon \times \theta_{y,n}^{(1)}(x)] \times \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Для точного учета всех физических особенностей задачи – включая шарнирное опирание

по всем краям, поперечный сдвиг в заполнителе и возможную неоднородность его свойств – решение представляется в виде двойных рядов Фурье по обеим пространственным координатам x и y . Такой подход естественно согласуется с граничными условиями и позволяет эффективно использовать ортогональность тригонометрических функций.

Для шарнирно опертой прямоугольной пластины размерами $a \times b$ выбираются базисные функции, автоматически удовлетворяющие условиям $w = 0$ и $M = 0$ на всех краях. Прогиб и углы поворота записываются следующим образом:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \times \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \times \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (35)$$

$$\theta_x(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \times \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \times \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (36)$$

$$\theta_y(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \times \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \times \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (37)$$

Эти разложения автоматически удовлетворяют всем граничным условиям:

– на краях $x = 0, a$ и $y = 0, b$ прогиб $w = 0$ благодаря синусам;

– изгибающий момент $M_x = D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$ обращается в ноль при $x = 0$;

– аналогично, $M_y = 0$, при $y = 0, b$.

Коэффициенты X_{mn} и Y_{mn} представляют собой амплитуды углов поворота θ_x и θ_y в двойном ряде Фурье и не являются независимыми – они связаны с коэффициентом прогиба W_{mn} через физические соотношения, вытекающие из уравнений равновесия и кинематики трехслойной пластины. Эти связи зависят от сдвиговых жесткостей заполнителя и изгибных жесткостей обшивок. В теории трехслойных панелей кинематическая связь между прогибом и углами поворота выражается через поперечные сдвиговые деформации:

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x = \frac{Q_x}{k_x}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y = \frac{Q_y}{k_y}, \quad (39)$$

где Q_x, Q_y – поперечные силы, а k_x, k_y – сдвиговые жесткости заполнителя. Однако в рамках мо-

дельного подхода, особенно при использовании разложения в двойные ряды Фурье, удобнее использовать статические уравнения равновесия моментов, которые при постоянных изгибных жесткостях D_{ij} и постоянных k_x , k_y приводят к алгебраической системе, связывающей W_{mn} , X_{mn} , и Y_{mn} .

Из уравнений равновесия моментов для каждой моды (m,n) получаем линейную систему для **однородного** заполнителя ($k_x = \text{const}$, $k_y = \text{const}$):

$$\begin{aligned} [k_x - (D_{11}\alpha_m^2 + D_0\beta_n^2)]X_{mn} - D_{12}\beta_n^2 Y_{mn} &= \\ = k_x\alpha_m W_{mn}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} -D_{12}\alpha_m^2 X_{mn} + [k_y - (D_{22}\beta_n^2 + D_0\alpha_m^2)]Y_{mn} &= \\ = k_y\beta_n W_{mn}. \end{aligned} \quad (41)$$

Решая эту систему, находим:

$$\begin{aligned} X_{mn} &= \frac{k_x\alpha_m W_{mn} \times [k_y - (D_{22}\beta_n^2 + D_0\alpha_m^2)]}{\Delta_{mn}} + \\ &\quad + \frac{k_y\beta_n W_{mn} \times D_{12}\beta_n^2}{\Delta_{mn}}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} Y_{mn} &= \frac{k_y\beta_n W_{mn} \times [k_x - (D_{11}\alpha_m^2 + D_0\beta_n^2)]}{\Delta_{mn}} + \\ &\quad + \frac{k_x\alpha_m W_{mn} \times D_{12}\alpha_m^2}{\Delta_{mn}}, \end{aligned} \quad (43)$$

где определитель системы:

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} &= [k_x - (D_{11}\alpha_m^2 + D_0\beta_n^2)] \times \\ &\quad \times [k_y - (D_{22}\beta_n^2 + D_0\alpha_m^2)] - D_{12}^2\alpha_m^2\beta_n^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Если обшивки изотропны, то:

$$\begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = D, \\ D_{12} &= vD, \\ D_0 &= \frac{1-v}{2}D, \end{aligned}$$

где

$$D = \frac{E \times h_f}{1 - v^2} \left(\frac{h_c + h_f}{2} \right)^2. \quad (45)$$

В этом случае выражения для X_{mn} и Y_{mn} упрощаются, но сохраняют ту же структуру:

$$\begin{aligned} X_{mn} &= \alpha_m W_{mn} \times \\ &\quad \times \frac{k_x(k_y - D(\beta_n^2 + \frac{D_0}{D} \times \alpha_m^2) + v \times D \times \beta_n^2 \times k_y)}{\Delta_{mn}}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} Y_{mn} &= \beta_n W_{mn} \times \\ &\quad \times \frac{k_y(k_y - D(\alpha_n^2 + \frac{D_0}{D} \times \beta_n^2) + v \times D \times \alpha_n^2 \times k_x)}{\Delta_{mn}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Рассмотрим вариант решения для случая **неоднородного** заполнителя. Если $k_x = k_x(x)$, $k_y = k_y(x)$, то локальная алгебраическая связь между W_{mn} , X_{mn} , и Y_{mn} нарушается. В этом случае:

1) Решается полная система дифференциальных уравнений;

2) Коэффициенты W_{mn} , X_{mn} , и Y_{mn} находятся совместно из общей линейной системы;

3) В рамках метода малых возмущений используется разложение, где нулевое приближение $X_{mn}^{(0)}$, $Y_{mn}^{(0)}$ – вычисляется по формулам для однородного случая с k_x^0 , k_y^0 :

$$X_{mn} = X_{mn}^{(0)} + \varepsilon X_{mn}^{(1)}, \quad (48)$$

$$Y_{mn} = Y_{mn}^{(0)} + \varepsilon Y_{mn}^{(1)}. \quad (49)$$

Рассмотрим построение первого приближения в методе малых возмущений для трехслойной пластины со слабо неоднородным заполнителем. Все искомые величины разлагаются по степеням ε :

$$W_{mn} = W_{mn}^{(0)} + \varepsilon W_{mn}^{(1)} + \varepsilon^2 W_{mn}^{(2)} + \dots \quad (50)$$

$$X_{mn} = X_{mn}^{(0)} + \varepsilon X_{mn}^{(1)} + \varepsilon^2 X_{mn}^{(2)} + \dots \quad (51)$$

$$Y_{mn} = Y_{mn}^{(0)} + \varepsilon Y_{mn}^{(1)} + \varepsilon^2 Y_{mn}^{(2)} + \dots \quad (52)$$

При переходе к первому порядку $O(\varepsilon)$ система уравнений становится линейной неоднородной, причем правая часть полностью определяется уже известными величинами нулевого приближения. В частности, в уравнении для $W_{mn}^{(1)}$ возникает неоднородность, которую удобно обозначить как:

$$F_{mn} = -\alpha_m \sum_{r=1}^{\infty} (\alpha_r W_{rn}^{(0)} - X_{rn}^{(0)}) \times K_{mr}^{(1)}. \quad (53)$$

Система уравнений (25–27) сохраняет ту же линейную структуру, что и в нулевом приближении, но теперь имеет ненулевую правую часть только в первом уравнении. Это позволяет записать решение в операторной форме:

$$\begin{bmatrix} W_{mn}^{(1)} \\ X_{mn}^{(1)} \\ Y_{mn}^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{-1} \begin{bmatrix} F_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (54)$$

где \mathbf{L} – линейный оператор, соответствующий однородной (нулевой) задаче. Явно выразить решение можно через так называемое ядро отклика:

$$W_{mn}^{(1)} = \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{mr}^{(n)} \times (\alpha_r W_{rn}^{(0)} - X_{rn}^{(0)}), \quad (55)$$

где функции $\Gamma_{mr}^{(n)}$ зависят от жесткостей D_{ij} , k_x^0 , k_y^0 , а также от коэффициентов $K_{mr}^{(1)}$. На практике бесконечные суммы обрываются: $r = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$, что делает задачу вычислительно реализуемой. Таким образом, итоговое приближенное решение с точностью $O(\varepsilon^2)$ имеет вид:

$$w(x,y) \approx \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [W_{mn}^{(0)} + \varepsilon W_{mn}^{(1)}] \times \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad (56)$$

$$\theta_x(x,y) \approx \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [X_{mn}^{(0)} + \varepsilon X_{mn}^{(1)}] \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad (57)$$

$$\theta_y(x,y) \approx \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [Y_{mn}^{(0)} + \varepsilon Y_{mn}^{(1)}] \times \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y). \quad (58)$$

Таким образом, алгоритм численной реализации рассматриваемой методики заключается в последовательном выполнении следующих действий:

- 1) Задать функции неоднородности $\varphi_x(x)$, $\varphi_y(x)$, малый параметр ε , и количество мод M, N .
- 2) Вычислить коэффициенты нагрузки q_{mn} (ненулевые только при нечетных m, n).
- 3) Найти $W_{mn}^{(0)}$, $X_{mn}^{(0)}$, $Y_{mn}^{(0)}$ по замкнутым формулам для однородной пластины.
- 4) Численно вычислить матрицу возмущения $K_{mr}^{(1)}$ и скаляр $k_y^{(1)}$ через квадратуры.
- 5) Сформировать правую часть F_{mn} для каждого n .
- 6) Решить линейную систему размером $3M$ для каждой фиксированной гармоники n (можно использовать ту же матрицу, что и в нулевом приближении, так как оператор \mathbf{L} не меняется).
- 7) Собрать полное решение, включая поправку первого порядка.

Влияние неравномерного температурного поля

В трехслойной теории температурные деформации проявляются через эквивалентные моменты. Для симметричной пластины при одинаковом нагреве обшивок возникает только изгиб,

если температура различна в верхней и нижней обшивках. Задаваясь температурой верхней обшивки: $T^{(+)}(x)$, температура нижней обшивки: $T^{(-)}(x)$, получаем уравнение для температурного изгибающего момента:

$$M_x^T(x) = D_{11}\alpha_f \frac{\Delta T(x)}{h_c},$$

$$M_y^T(x) = D_{12}\alpha_f \frac{\Delta T(x)}{h_c}.$$

$M_{xy}^T(x) = 0$ (при однородном нагреве по y).

Где $\Delta T(x)$ – температурный градиент:

$$\Delta T(x) = T^{(+)}(x) - T^{(-)}(x).$$

Температурные моменты вводятся как начальные моменты в уравнения равновесия. Тогда система (1)–(3) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - M_x^T(x) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right) - \\ & - k_x(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - M_y^T(x) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right) - k_y(x) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[k_x(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_y(x) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \right] + q = 0. \end{aligned}$$

Используя базисные функции (57), (58), температурный градиент $\Delta T(x)$ также разлагается в ряд по косинусам:

$$\Delta T(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta T_m \cos(\alpha_m x),$$

$$\Delta T_m = \frac{2}{a} \int_0^a \Delta T(x) \cos(\alpha_m x) dx.$$

Тогда:

$$M_x^T(x) = \sum_{m=1}^{\infty} M_{x,m}^T \cos(\alpha_m x),$$

$$M_{x,m}^T = D_{11}\alpha_f \frac{\Delta T_m}{h_c}.$$

Применяя метод решения, описанный выше, получаем уравнение моментов по x с температурным членом:

$$-\left(D_{11}\alpha_m^2 + D_{66}\beta_n^2\right)X_{mn} - D_{12}\beta_n^2 Y_{mn} - \sum_{r=1}^{\infty} (W_{rn} - X_{rn})K_{nr}^{(x)} = -M_{x,m}^T \times \alpha_m \times \delta_{n1}.$$

Если температура одинакова по y , то только гармоники с $n = 1, 3, 5, \dots$ возбуждаются. Для простоты часто предполагают, что температура постоянна по y , и тогда влияние температуры проявляется только в гармониках с нечетным n . Но в наиболее общем случае, если $\Delta T = \Delta T(x)$ (не зависит от y), то после интегрирования по y :

$$\int_0^b \sin(\beta_n y) dy = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n \text{ нечетное,} \\ 0, & n \text{ четное.} \end{cases}$$

Поэтому температурный вклад в уравнение (2):

$$\begin{aligned} \text{Правая часть} &= \\ &= -M_{x,m}^T \times \alpha_m \times \frac{2}{n\pi} \quad (\text{для нечетных } n). \end{aligned}$$

Аналогично для уравнения (3):

$$\text{Правая часть} = -M_{y,m}^T \times \alpha_m \times \frac{2}{n\pi},$$

$$M_{y,m}^T = D_{12}\alpha_f \frac{\Delta T_m}{h_c}.$$

Таким образом, итоговая система (1)–(3) преобразуется в систему, учитывающую влияние температуры:

Для нечетных n :

$$\begin{aligned} &\sum_r (W_{rn} \alpha_r - X_{rn}) K_{mr}^{(x)} \alpha_m + \\ &+ k_y^{\text{avg}} (W_{mn} \beta_n - Y_{mn}) \beta_n = q_{mn}, \\ &- (D_{11}\alpha_m^2 + D_{66}\beta_n^2) X_{mn} - D_{12}\beta_n^2 Y_{mn} - \\ &- \sum_r (W_{rn} \alpha_r - X_{rn}) K_{mr}^{(x)} = -\alpha_m M_{x,m}^T \times \frac{2}{n\pi}, \\ &- D_{12}\alpha_m^2 X_{mn} - (D_{22}\beta_n^2 + D_{66}\alpha_m^2) Y_{mn} - \\ &- k_y^{\text{avg}} (W_{mn} \beta_n - Y_{mn}) = -\alpha_m M_{y,m}^T \times \frac{2}{n\pi}. \end{aligned}$$

Для четных n правые части второго и третьего уравнений системы обращаются в нуль. Если при этом неоднородность мала, то:

$$k_x(x) = k_x^0 [1 + \varepsilon \phi_x(x)],$$

$$\Delta T(x) = \Delta T^0 [1 + \varepsilon \psi(x)],$$

в нулевом приближении ($\varepsilon = 0$):

$$W_{mn}^{(0)} = \frac{q_{mn} + Q_{mn}^T}{\Lambda_{mn}},$$

где Q_{mn}^T – эквивалентная температурная нагрузка, связанная с $M_{x,m}^T$, $M_{y,m}^T$. В первом приближении правая часть F_{mn} включает:

- возмущение от $\phi_x(x)$,
- возмущение от $\psi(x)$ (через $M_{x,m}^{T(1)}$).

Таким образом, температурные деформации в трехслойной пластины с неоднородным заполнителем учитываются через температурные изгибающие моменты $M^T(x)$, $M^T_y(x)$, пропорциональные градиенту температуры между обшивками и зависящие от x , модификацию правых частей уравнений равновесия моментов и возбуждение только нечетных гармоник по y .

Экспериментальное определение деформаций трехслойной панели

Эксперимент с вакуумным нагружением трехслойной панели выбран как управляемый и повторяемый способ создания равномерного квазистатического перепада давления при минимальном влиянии контактных сил [11–13]. Опирание панели по бортикам обеспечивает близкую к шарнирной схеме закрепления с понятными граничными условиями, а центральный штуцер с линией откачки формирует однородное поле нагрузки по поверхности панели до уровня около $-0,5$ атм. Такая постановка исключает необходимость тяжелых штамповочных приспособлений, снижает риски внеконтактного нагружения и позволяет точечно варьировать уровень нагрузки, оставаясь в упругой области материала.

Оптическая система с верхними камерами и маркерным полем на поверхности панели выбрана как бесконтактный метод с высокой пространственной разрешающей способностью. Она позволяет восстановить полное поле перемещений и получить производные поля деформаций без внесения жесткостных и масс-инерционных возмущений, характерных для контактных датчиков. Корреляция цифровых изображений (Digital Image Correlation – DIC) – это бесконтакт-

ный оптический метод измерения деформации объекта (рис. 1) [14]. Суть методики заключается в отслеживании изменений состояния (изменении уровня насыщенности серого цвета) небольшого участка (subset) черно-белой текстуры в процессе нагружения. Анализ такой элементарной ячейки позволяет вычислить пространственное перемещение и деформацию на заданном участке. Для получения полной картины, поверхность образца, программным образом, делится на элементарные ячейки, анализ которых и позволяет вычислить поле распределения деформации по всей поверхности.

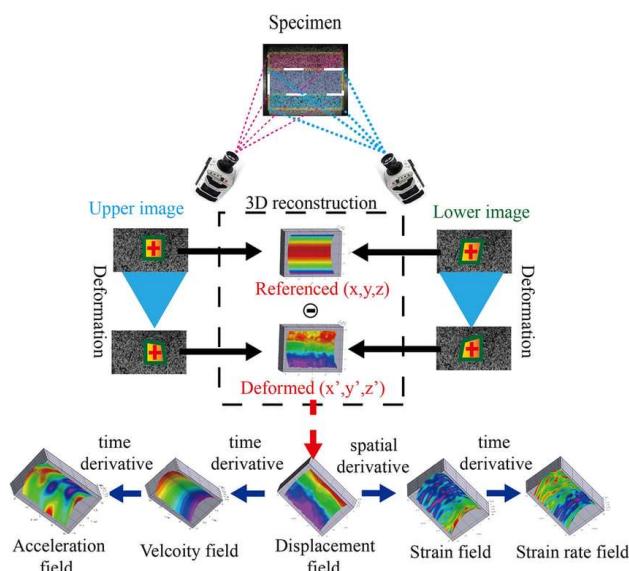


Рис. 1. Бесконтактный оптический метод измерения деформации объекта

Совмещение таких данных с численным решением дает возможность не только сверить интегральные метрики (максимальный прогиб, прогиб в центре), но и провести полевую валидацию: сопоставить картины изолиний прогибов, кривизну, локальные гребни деформаций возле дефектов и неоднородностей сот [2, 15]. Выбор вакуумного нагружения способствует высокой метрологической чистоте: давление задается и контролируется манометром, утечки идентифицируются. Жесткость опоры по бортикам и геометрическая начальная кривизна панели учитываются через нулевой оптический снимок состояния без нагрузки, что позволяет отделить собственные дефекты формы от вызванных нагрузкой деформаций. Пошаговое нагружение/разгружение с регистрацией поля перемеще-

ний позволяет проверить обратимость деформаций и убедиться в работе в упругом режиме, что важно для корректной калибровки линейно-упругих моделей. На рисунке 2 показана схема экспериментальной установки и вакуумный стол – оснастка.

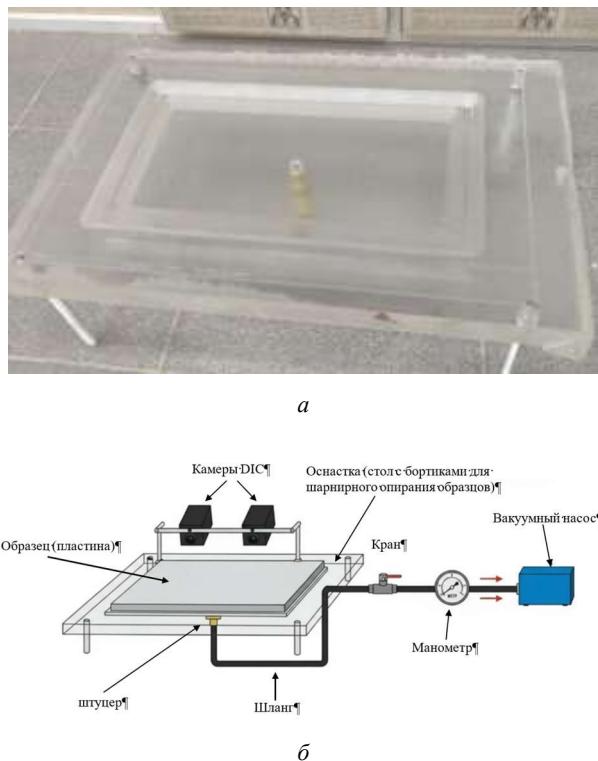


Рис. 2. Оснастка для расположения панели (а) и схема экспериментальной установки шарнирно опертой панели (б)

Для проведения экспериментальных исследований изготовлены 4 панели, с размерами 300 мм на 150 мм (рис. 3), с разными коэффициентами роста (1; 1,5; 2,0; 2,5) [13].

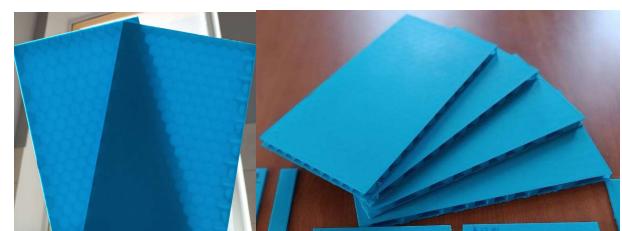


Рис. 3. Образцы для испытаний с размерами 300 мм на 150 мм

Результаты и обсуждение

После установки панели на рабочий стол-оснастку и герметизацию контура, проведены испытания сотовых панелей с различными типами заполнителей при создании разрежения

под пластиной до $q = -0,7$ бар. Используя метод корреляции цифровых изображений (DIC) получено поле прогибов трехслойной сэндвич-пластини с сотовым заполнителем (рис. 4), на основании которого определены поля перемещений [11, 16].

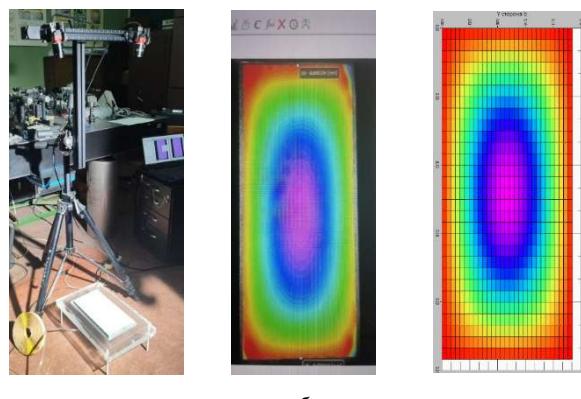


Рис. 4. Бесконтактный оптический метод измерения деформации панели при квазишарирном опирании с применением DIC метода (а) и распределение поля перемещений в трехслойной пластине с сотовой структурой полученное DIC методом (б) и численным решением (в)

По результатам проведенных экспериментальных $w_{\text{ЭКС}}$ и численных исследований $w_{\text{АН}}$ получены данные по прогибам панелей. Эти данные, полученные по каждому из испытуемых образцов, занесены в таблицу 1.

Таблица 1. Результаты экспериментальных данных с результатами, полученными в Программе и аналитическим решением

Тип	$w_{\text{ЭКС}}, \text{мм}$	$w_{\text{АН}}, \text{мм}$
Регулярная структура ($k = 1,0$)	1,45	1,43
$k = 1,5$	1,50	1,49
$k = 2,0$	1,62	1,60
$k = 2,5$	1,71	1,69

Сравнение результатов, полученных с помощью аналитико-численной модели, основанной на основе метода малых возмущений и двойных рядов Фурье, с экспериментальными данными показало высокую степень совпадения по ключевым компонентам напряженно-деформированного состояния – прогибам. Это подтверждает корректность принятых гипотез, включая использование модели Тимошенко–Рейсснера первого порядка и метода усреднения для определения эффективных сдвиговых жесткостей при слабой неоднородности структуры [5, 7, 9].

Заключение

Разработанная в работе методика расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных панелей с нерегулярным сотовым заполнителем позволяет эффективно и с высокой точностью учитывать локальные неоднородности структуры, не прибегая к ресурсоемкому прямому моделированию каждой ячейки. Использование разложения в двойные ряды Фурье в сочетании с методом малых возмущений обеспечивает аналитическую прозрачность и вычислительную экономичность, что особенно важно для инженерных приложений. Учет температурных воздействий через эквивалентные моменты расширяет применимость метода к реальным условиям эксплуатации. Экспериментальная валидация, проведенная с применением вакуумного нагружения и метода DIC, подтвердила высокую достоверность полученных решений. Таким образом, предложенный подход представляет собой перспективный инструмент для проектирования и анализа легких композитных конструкций, позволяющий повысить их надежность и снизить массу за счет более точного учета реального поведения материалов и структур.

Список источников

- Zhu L., Li N., Childs P.R.N. Light-weighting in aerospace component and system design // Propulsion and Power Research. 2018. Vol. 7. № 2. pp. 103–119.
- Медведский А.Л., Мартirosов М.И., Хомченко А.В. и др. Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной панели с сотовым заполнителем при наличии внутренних дефектов. // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2022. № 2. С. 675–684.
- Башаров Е.А. Расчет оптимальных конструктивных параметров и применение в аэрокосмических конструкциях трехслойных сотовых панелей из полимерных композиционных материалов. // Инженерный журнал: наука и инновации. 2024. № 10 (154).
- Зотов А.А., Волков А.Н. Приближенный метод расчета на изгиб трехслойных панелей с дискретным заполнителем // Деформация и разрушение материалов. 2023. № 7. С. 12–16.
- Vo T.P., Thai H.T., Nguyen T.K. et al. Flexural analysis of laminated composite and sandwich beams using a four-unknown shear and normal deformation theory // Composite Structures. 2017. Vol. 176. pp. 388–397.
- Рабинский Л.Н., Мартirosов М.И., Дедова Д.В. Расчетно-экспериментальное исследование трехслойных плоских панелей с обшивками из полимерных композитов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2025. № 4 (160).

7. Рабинский Л.Н., Мартиросов М.И., Дедова Д.В. и др. Исследование динамики композитных цилиндрических панелей с сотовым заполнителем с внутренними повреждениями под действием струи авиационного двигателя // СТИН. 2024. № 4. С. 30–33.
 8. Каленов В.Б., Савицкий Р.С., Баранников А.А. Исследование механических свойств трехслойных панелей с различными типами соединения сотового заполнителя // Труды ВИАМ. 2024. № 9 (139). С. 33–41.
 9. Биргер И.А., Панфилов П.И., Шорыгин А.Н. Прочность, устойчивость, колебания: справочник: в 3 т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 584 с.
 10. Каменев И.В., Семенов А.А. Устойчивость пологих ортотропных оболочек двойкой кривизны при шарнирно-подвижном закреплении контура // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 2. С. 32–43. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.04
 11. Гарридо Сильва Б., Алвеш Ф., Сардинья М. и др. Функционально-градиентные ячеистые сердцевины сэндвич-панелей, изготовленные аддитивным производством // Proc IMechE Part L: Journal of Materials: Design and Applications. 2022. P. 1–15. DOI: 10.1177/14644207221084611
 12. Wang X., Li X., Yue Z.-S. et al. Optimal Design of Metallic Corrugated Sandwich Panels with Polyurea-Metal Laminate Face Sheets for Simultaneous Vibration Attenuation and Structural Stiffness // Composite Structures. 2021. Vol. 256.
 13. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
 14. Wang, E., Shukla A. Blast Performance of Sandwich Composites with In-Plane Compressive Loading // Experimental Mechanics. 2011. DOI: 10.1007/s11340-011-9500-5
 15. Рабинский Л.Н., Мартиросов М.И., Дедова Д.В. Поведение плоских панелей с сотовым заполнителем при наличии внутренних дефектов различной формы // Труды МАИ. 2025. № 141.
 16. Павлов М.В., Титов С.А., Свиридов А.А. и др. Экспериментальное определение действительных прочностных характеристик элементов композиционных трехслойных панелей, вырезанных из агрегата ЛА. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2025. Т. 31. № 1. С. 101–116.
- Made of Polymer Composite Materials in Aerospace Structures. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2024;(10 (154)). (In Russ.).
4. Zotov AA, Volkov AN. An Approximate Method for Bending Analysis of Three-Layer Panels with a Discrete Core. *Deformation and Fracture of Materials*. 2023; (7):12–16. (In Russ.).
 5. Vo TP, Thai HT, Nguyen TK et al. Flexural Analysis of Laminated Composite and Sandwich Beams Using a Four-Unknown Shear and Normal Deformation Theory. *Composite Structures*. 2017;176:388–397.
 6. Rabinskii LN, Martirosov MI, Dedova DV. Computational and Experimental Study of Three-Layer Flat Panels with Polymer Composite Skins. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2025;(4 (160)).
 7. Rabinsky LN, Martirosov MI, Dedova DV et al. Study of the Dynamics of Composite Cylindrical Panels with Honeycomb Core and Internal Damage under the Influence of an Aircraft Engine Jet. *STIN*. 2024;(4):30–33. (In Russ.).
 8. Kalenov VV, Savitsky RS, Barannikov AA. Investigation of the Mechanical Properties of Three-Layer Panels with Different Types of Honeycomb Core Attachment. *Proceedings of VIAM*. 2024;(9 (139)):33–41. (In Russ.).
 9. Birger IA, Panfilov PI, Shorygin AN. Strength, Stability, Vibrations: Handbook. Vol. 1. Moscow: Mashinostroenie; 1968. 584 p. (In Russ.).
 10. Kamenev IV, Semenov AA. Stability of Shallow Orthotropic Doubly Curved Shells with Pin-Sliding Edge Supports. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*. 2018;(2):32–43. (In Russ.). DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.04
 11. Garrido Silva B, Alves F, Sardinha M et al. Functionally Graded Cellular Cores of Sandwich Panels Manufactured by Additive Manufacturing. *Proc IMechE Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. 2022:1–15. (In Russ.). DOI: 10.1177/14644207221084611
 12. Wang X, Li X, Yue Z-S et al. Optimal Design of Metallic Corrugated Sandwich Panels with Polyurea–Metal Laminate Face Sheets for Simultaneous Vibration Attenuation and Structural Stiffness. *Composite Structures*. 2021;256.
 13. Timoshenko SP, Woinowsky-Krieger S. Plates and Shells. Moscow: Nauka; 1966. 636 p. (In Russ.).
 14. Wang E, Shukla A. Blast Performance of Sandwich Composites with In-Plane Compressive Loading. *Experimental Mechanics*. 2011. DOI: 10.1007/s11340-011-9500-5
 15. Rabinskii LN, Martirosov MI, Dedova DV. Behavior of Flat Panels with Honeycomb Core in the Presence of Internal Defects of Various Shapes. *Trudy MAI*. 2025; (141). (In Russ.).
 16. Pavlov MV, Titov SA, Sviridov AA et al. Experimental Determination of the Actual Strength Characteristics of Elements of Composite Three-Layer Panels Cut from an Aircraft Assembly. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*. 2025;31(1):101–116. (In Russ.).

References

1. Zhu L, Li N, Childs PRN. Light-weighting in Aerospace Component and System Design. *Propulsion and Power Research*. 2018;7(2):103–119.
2. Medvedskii AL, Martirosov MI, Khomchenko AV et al. Study of the Stress–Strain State of a Three-Layer Panel with Honeycomb Core in the Presence of Internal Defects. *Izvestiya of Tula State University. Engineering Sciences*. 2022;(2):675–684. (In Russ.).
3. Basharov EA. Calculation of Optimal Design Parameters and Application of Three-Layer Honeycomb Panels