

Оптимизация перелета космического аппарата с электроракетной двигательной установкой к точке либрации L2 системы Земля-Луна

Старинова О.Л.*, Файн М. К.**

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.

Королева, СГАУ, Московское шоссе 34, Самара, 443086, Россия

**e-mail: solleo@mail.ru*

***e-mail: fain.maxim@gmail.com*

Аннотация

В данной статье рассматривается оптимизация перелета с заданной околоземной орбиты к точке либрации L2, с пролетом вблизи точки либрации L1 системы Земля-Луна. Перелет осуществляется космическим аппаратом, оснащенным электрореактивной двигательной установкой. Оптимальные по быстродействию законы управления получены с использованием формализма принципа максимума Понтрягина в рамках плоской ограниченной задачи трех тел с учетом эллиптичности орбиты Луны. Кроме того, был получен параметризованный закон управления и приведена оценка степени его неоптимальности.

Ключевые слова: космический аппарат, двигатель малой тяги, оптимизация траектории, точка либрации, электрореактивный буксир.

I Введение

Программы исследования космоса обладают высокой стоимостью, но не приносят скорой отдачи. Одним из возможных решений данной проблемы является использование перспективных высокопроизводительных электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) [1]. Применение ЭРДУ является одним из самых перспективных направлений исследований в области космических полетов. Некоторые технические особенности двигателей малой тяги и теоретические аспекты поиска оптимальных законов управления описаны в статьях [2-14].

Как показано в работах [7, 10, 13, 17], оптимальные межпланетные траектории и траектории перелетов к низкой окололунной орбите проходят вблизи точки либрации L_1 системы Земля-Луна. Для обеспечения устойчивой связи с исследовательскими аппаратами и обитаемой лунной базой на поверхности Луны потребуется размещение аппарата связи на гало-орбите у точки либрации L_2 . Поэтому, особенно в последнее время, ученые заинтересованы в создании космической станции, постоянно находящейся на гало-орбите в окрестности этой точки. Создание подобной космической станции повлечет за собой разработку транспортной системы, способной обеспечивать доставку необходимых грузов. Использование двигателей малой тяги позволит существенно повысить эффективность таких транспортных операций и сократить стоимость создания и содержания Лунной инфраструктуры.

В данной статье описана проектно-баллистическая оптимизация перелетов с заданной околоземной орбиты к точке либрации L_2 , с пролетом вблизи точки

либрации L1 системы Земля-Луна, с использованием ЭРДУ. Ускорение, создаваемое данной двигательной установкой, меньше гравитационных ускорений, создаваемых Землей и Луной [10, 13]. Поэтому оптимальные законы управления существенно зависят от гравитационных сил двух притягивающих центров и движение КА должно быть описано в рамках ограниченной задачи трех тел.

Данная постановка задачи усложняет нахождение оптимальных законов управления. Для решения подобных задач обычно используют численное интегрирование [4, 7-10] уравнений движения. Такой подход не позволяет оценить степень неоптимальности полученных решений, приводит к существенным вычислительным сложностям и не позволяет проанализировать различные проектные и баллистические параметры перелета.

Данная статья является продолжением наших предыдущих работ по теме оптимизации перелетов в системе Земля-Луна [18-19]. В данной статье мы представляем результаты оптимизации по времени перелетов с заданной околоземной орбиты к точке либрации L2, с пролетом вблизи точки либрации L1 системы Земля-Луна. Для вышеупомянутых перелетов найдены оптимальные законы управления для КА с ЭРДУ. Кроме того, проанализирована зависимость продолжительности перелета и удельным импульсом ЭРДУ.

II Описание модели системы

1. Математическая постановка задачи оптимизации перелета

Введем в рассмотрение:

- $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{V}(t), m_f(t), \mathbf{r}_E(t), \mathbf{r}_M(t), \mathbf{r}_S(t))^T \in \mathbf{X}$ – вектор фазовых

координат КА, который подчиняется граничным условиям, соответствующим цели перелета и возможным ограничениям; где \mathbf{X} – область возможных значений фазовых координат;

- $\mathbf{u}(t) = (\delta(t), \mathbf{e}(t))^T \in \mathbf{U}$ – вектор функций управлений, которые зависят от конструктивных особенностей КА и ДУ; где \mathbf{U} – область возможных значений функций управлений;

- $\mathbf{p} = (a_0, j_{sp})^T \in \mathbf{P}$ – вектор проектных параметров КА, ограниченных областью допустимых проектных параметров \mathbf{P} .

Здесь t – это текущее время, $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор КА, $\mathbf{V}(t)$ – вектор скорости КА, $m_f(t)$ – текущая масса израсходованного рабочего тела, $\mathbf{r}_E(t)$, $\mathbf{r}_M(t)$, $\mathbf{r}_S(t)$ – радиус-векторы Земли, Луны и Солнца соответственно, $\delta(t)$ – функция включения-выключения ДУ, $\mathbf{e}(t)$ – вектор направления тяги ДУ, a_0 – номинальное ускорение КА на опорной орбите, j_{sp} – удельный импульс ДУ.

Электрореактивный буксир (ЭРБ) – это КА, созданный для стыковки с целевым КА, его «захвата» и перемещения на другую орбиту с последующим отделением полезной нагрузки. ЭРБ способен неоднократно повторять вышеперечисленные операции.

Согласно рассматриваемым перелетам, необходимо записать граничные условия для трех орбит: околоземной орбиты, орбиты точки либрации L1 и орбиты точки либрации L2:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0, 0, \mathbf{r}_E(t_0), \mathbf{r}_M(t_0), \mathbf{r}_S(t_0))^T \in \mathbf{X}_0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1) &= (\mathbf{r}_{L1}(t_1), \mathbf{V}_{L1}(t_1), m_{f1}, \mathbf{r}_E(t_1), \mathbf{r}_M(t_1), \mathbf{r}_S(t_1))^T \in \mathbf{X}_{L1}, \\ t_1 &= t_0 + T_1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2) &= (\mathbf{r}_{L2}(t_2), \mathbf{V}_{L2}(t_2), m_{f1} + m_{f2}, \mathbf{r}_E(t_2), \mathbf{r}_M(t_2), \mathbf{r}_S(t_2))^T \in \mathbf{X}_{L2}, \\ t_2 &= t_0 + T_1 + T_2 \end{aligned} \quad (3)$$

В (1-3) t_i – время окончания соответствующего участка, а T_i – длительность соответствующего участка траектории. \mathbf{r}_0 и \mathbf{V}_0 – начальные радиус-вектор и вектор скорости КА, \mathbf{r}_{L1} и \mathbf{r}_{L2} – радиус-векторы точек либрации L1 и L2 (вычисляются с учетом эллиптичности орбит Земли и Луны). m_{f1} и m_{f2} – расходы топлива в течение перелетов Земля-L1 и L1-L2 соответственно.

Для оптимизации данных космических перелетов необходимо определить векторы $\mathbf{u}_{opt}(t)$ и \mathbf{p}_{opt} , чтобы обеспечить минимальное время перелета T , чтобы удовлетворить целям миссии согласно (1-3).

$$T = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}, \mathbf{p} \in \mathbf{P}} T | m = unfixed, \mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad (4)$$

2 Проектная модель электрореактивного буксира

На рисунке 1 [7-8] показаны возможные варианты внешнего вида ЭРБ с солнечной (а) и с ядерной энергоустановкой (б).

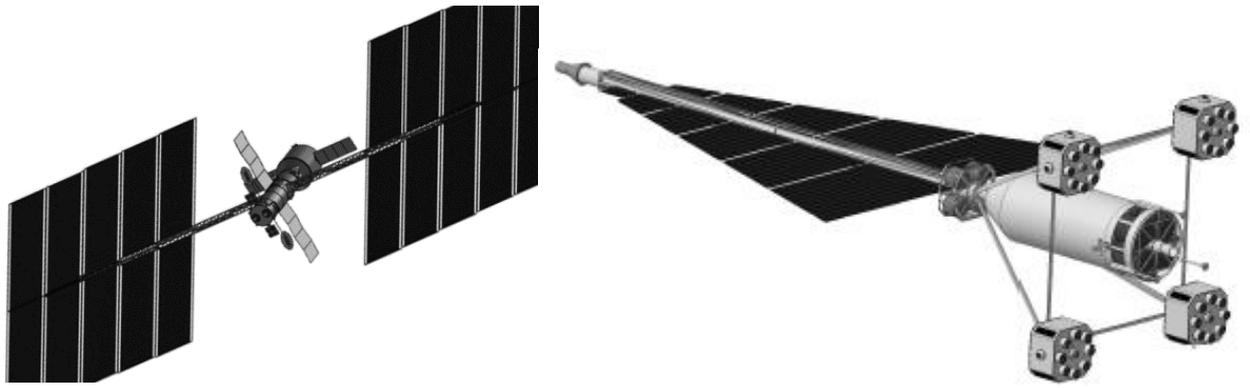


Рисунок 1 – Возможные варианты внешнего вида ЭРБ.

а) ЭРБ с солнечной энергоустановкой.

б) ЭРБ с ядерной электрической энергоустановкой [7]

Проектный облик ЭРБ зависит от выбранных проектных параметров. В данной статье в качестве проектного параметра был выбран удельный импульс ЭРДУ. При постоянной выходной мощности энергоустановки увеличение удельного импульса приводит к увеличению продолжительности перелета (критерий оптимизации миссии), уменьшению затрат топлива и увеличению массы ЭРБ.

Изучаемый ЭРБ состоит из следующих систем: солнечная или ядерная энергоустановка; ЭРДУ; баки, заполненные рабочим телом; конструктивные элементы и другие обслуживающие системы. Проектную модель КА с двигателями малой тяги будем строить на основе уравнения баланса масс его компонентов и систем на стартовой орбите.

$$m_0 = m_{pl} + m_{pp} + m_{ps} + \sum_{i=1}^2 m_{fi} + m_t + m_c \quad (5)$$

Здесь m_0 – масса ЭРБ на стартовой орбите, m_c – масса корпуса и конструкции ЭРБ, m_{pl} – масса полезной нагрузки, m_{pp} – масса энергоустановки, m_{ps} – масса ДУ, m_t

– масса баков. В первом приближении массы систем зависят от удельного импульса и номинальной тяги P_0 [7].

$$m_{pp} = \alpha_{pp} \frac{P_0 j_{sp} g}{2\eta_{pp} \eta_{ps}}, \quad m_{ps} = \gamma_{ps} P_0, \quad m_i = k \cdot \sum_{i=1}^2 m_{fi}, \quad m_c = \alpha_c \frac{P_0 j_{sp} g}{2\eta_{pp} \eta_{ps}} + \gamma_c P_0. \quad (6)$$

Здесь α_{pp} – удельная массовая характеристика энергоустановки, α_c – удельная масса конструкции по мощности, γ_{ps} – удельная масса двигательной установки, γ_c – удельная масса конструкции по тяге двигателей, η_{pp} – тяговый КПД ($\frac{N_{jf}}{N_{ps}}$ – отношение мощности реактивной струи к мощности, подаваемой на электроракетный двигатель), η_{ps} – мощностной КПД ($\frac{N_{sp}}{N_s}$ – отношение мощности, подаваемой солнечными батареями на электроракетный двигатель, к мощности излучения Солнца, падающего на поверхность батарей), k – удельный массовый коэффициент бака. Тяга и расход рабочего тела ЭРДУ зависят от фазовых координат КА (расстояние от КА до Солнца, деградация панелей солнечных батарей из-за радиационных поясов Земли, возможное затенение солнечных батарей, продолжительность работы ядерного реактора и т.д.). Поэтому масса топлива зависит от общего времени работы двигателей, номинальной тяги и удельного импульса.

$$m_f = \sum_{i=1}^2 m_{fi} = \frac{P_0}{j_{sp} g} \left(\int_{t_0}^{t_1} \chi(\mathbf{x}) \delta t + \int_{t_1}^{t_2} \chi(\mathbf{x}) \delta t \right) \quad (7)$$

Здесь m_{fi} – масса топлива при перелетах Земля-L1 и L1-L2, g – гравитационное ускорение Земли. Подставив (6-7) в (5), получим:

$$m_0 = m_{pl} + (\alpha_{pp} + \alpha_c) \frac{P_0 j_{sp} g}{2\eta_{pp} \eta_{ps}} + (\gamma_{ps} + \gamma_c) P_0 + (1+k) \frac{P_0}{j_{sp} g} \left(\int_{t_0}^{t_1} \chi(\mathbf{x}) \delta t + \int_{t_1}^{t_2} \chi(\mathbf{x}) \delta t \right) \quad (8)$$

Из (8) возможно выразить относительную массу полезной нагрузки μ_{pl} .

3 Моделирование барицентрического движения

Для расчета некомпланарного движения (раскрутка КА вокруг Земли, переход на орбиту точки либрации L1) используется комбинированная барицентрическая система координат (СК) (рисунок 2). Основная плоскость совмещена со средней плоскостью движения Луны, полярная ось направлена в этой плоскости в сторону точки весеннего равноденствия, центр координат находится в барицентре системы Земля-Луна.



Рисунок 2 – Некомпланарная барицентрическая система координат

Положение центра масс КА относительно барицентра определяется радиус-вектором r и аргументом широты КА u . Положение плоскости орбиты КА задается углами восходящего узла Ω и наклона i .

Уравнения движения в барицентрической СК имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}(\mathbf{x}) \left(\frac{a_0}{1-m_f} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \delta \mathbf{e} + \mathbf{g} + \mathbf{f} \right) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}, \quad \dot{m}_f = \frac{a_0}{j_{sp}} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \delta, \quad (9)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos i \sin u}{\sin i V_\varphi} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos u}{V_\varphi} \\ 0 & 0 & \frac{\sin u}{\sin i V_\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{V_\varphi}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{V_\varphi}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Векторы ускорения от притяжений Земли и Луны в местной СК определяются как:

$$\mathbf{g}_E = \frac{\mu_l - 1}{|r_z|^3} \begin{pmatrix} r + R_z (\cos(\eta - \Omega) \cos u + \sin(\eta - \Omega) \sin u \cos i) \\ R_z (-\cos(\eta - \Omega) \sin u + \sin(\eta - \Omega) \cos u \cos i) \\ -R_z \sin(\eta - \Omega) \sin i \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{g}_M = -\frac{\mu_l}{|r_l|^3} \begin{pmatrix} r - R_l (\cos(\eta - \Omega) \cos u + \sin(\eta - \Omega) \sin u \cos i) \\ R_l (-\cos(\eta - \Omega) \sin u + \sin(\eta - \Omega) \cos u \cos i) \\ R_l \sin(\eta - \Omega) \sin i \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Здесь R_z – расстояние от Земли до барицентра, R_l – расстояние от Луны до барицентра, η – долгота Луны, r_z – радиус-вектор КА относительно Земли, r_l –

радиус-вектор КА относительно Луны. Эти векторы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_z &= \begin{pmatrix} r(\cos\Omega \cos u - \sin\Omega \cos i \sin u) - R_z \cos \eta \\ r(\sin\Omega \cos u - \cos\Omega \cos i \sin u) - R_z \sin \eta \\ r \sin i \sin u \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}_l &= \begin{pmatrix} r(\cos\Omega \cos u - \sin\Omega \cos i \sin u) - \cos \eta \\ r(\sin\Omega \cos u - \cos\Omega \cos i \sin u) - \sin \eta \\ r \sin i \sin u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Все фазовые переменные являются безразмерными и определяются суммой гравитационных параметров Земли и Луны и радиусом усредненной орбиты Луны [11, 14]. При моделировании приняты следующие допущения: притяжение Солнца учитывается как возмущающее ускорение, то есть не учитывается при расчете оптимального управления; гравитационные поля Земли, Луны и Солнца являются центральными; в некоторые моменты времени КА проходит в области тени от Земли или Луны.

Направление тяги \mathbf{e} определяется в местной вращающейся СК $Ortn$, где ось Or проходит через центр Земли и КА, ось On перпендикулярна орбитальной плоскости, а ось Ot дополняет СК до правой. Вектор \mathbf{e} может быть выражен через углы поворота λ_1 и λ_2 (рисунок 2).

$$\mathbf{e} = (\cos\lambda_2 \cos\lambda_1 \quad \cos\lambda_2 \sin\lambda_1 \quad \sin\lambda_2)^T \quad (14)$$

Так как движение КА в рамках данной задачи происходит в одной плоскости, то необходимость в повороте плоскости орбиты КА отпадает, т.е. далее угол λ_2 принят равным нулю.

III Методы оптимизации

1 Выбор оптимального управления на барицентрическом участке

Исследование барицентрического участка траектории основано на ограниченной круговой задаче трех тел. На таких участках законы оптимального управления могут быть определены с помощью принципа максимума Понтрягина. Введем вектор сопряженных переменных $\lambda_x = (\lambda_r \ \lambda_u \ \lambda_{v_r} \ \lambda_{v_\phi} \ \lambda_\Omega \ \lambda_i)^T$ и дополнительную сопряженную переменную λ_m , соответствующую безразмерной массе топлива. Запишем гамильтониан для задачи оптимального управления в следующей форме:

$$H = \lambda_x^T \mathbf{M}(\mathbf{x}) \left(\frac{a_0}{1-m} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \delta \mathbf{e} + \mathbf{g} + \mathbf{f} \right) + \lambda_x^T \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + \lambda_m \frac{a_0}{j_{sp}} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \delta, \quad (15)$$

Оптимальный закон управления обеспечивает максимум гамильтониана и имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}_{opt}(t) = \frac{\lambda_x^T \mathbf{M}(\mathbf{x})}{\|\lambda_x^T \mathbf{M}(\mathbf{x})\|}, \quad \delta_{opt}(t) = \frac{1}{2} \left(\text{sign} \left(\lambda_x^T \mathbf{M}(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{e}}{1-m} + \frac{\lambda_m}{j_{sp}} \right) + 1 \right) \quad (16)$$

Сопряженные уравнения находятся через частные производные гамильтониана. Таким образом, задача отыскания оптимального управления

барицентрического перелета сводится к 6-параметрической краевой задаче. При этом необходимо найти такие начальные значения сопряженных переменных, чтобы на концах оптимальной траектории выполнялись начальное и конечное условия (1-3), с заданными уравнениями движения (11-15) и полученным оптимальным управлением (16). Для решения задачи в данной работе был использован модифицированный метод Ньютона с переменным шагом [16] и метод продолжения по параметру [17].

2 Структура приближенно оптимального управления

Для перелета КА в плоскости (перелет из точки либрации L1 в точку либрации L2) были разработаны программы приближенно оптимального управления.

Для получения линейных законов управления перелетами КА был использован метод последовательной линеаризации Федоренко [16], допускающий ограничения на функционалы, имеющих производные Фреше. Суть метода заключается в сведении вариационной задачи об оптимальном управлении к итерационно решаемой задаче линейного программирования путем последовательной линеаризации всех функционалов (критерия и ограничений) по кусочно-постоянным аппроксимациям управления в окрестности итерационно улучшаемых траектории и управления.

Функция управления движением разбивается на несколько ступенчатых участков для обеспечения большей точности. На рисунке 3 в качестве примера изображены 3 таких ступени:

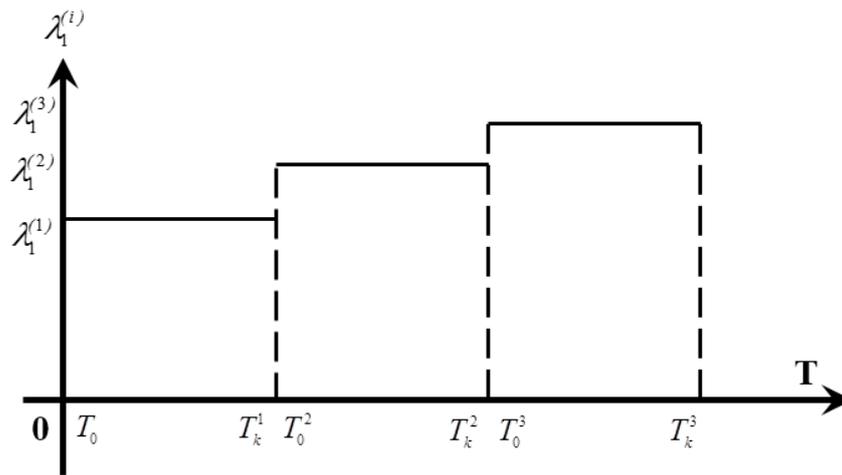


Рисунок 3 – Структура программы управления движением КА для перелетов L1-L2 и L2-L1.

На активных участках оптимальное направление тяги двигателя изменяется незначительно. Описанная структура управления может быть использована для построения приближенно-оптимального решения.

Тяга направлена под постоянным углом $\lambda_1^{(i)}$ к радиус-вектору КА. Таким образом, u кусочно-непрерывная функция управления, которую определяют следующие параметры: $\lambda_1^{(1)}, T^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, T^{(2)}, \lambda_1^{(3)}, T^{(3)}$ (каждый $\lambda_1^{(i)}$ и $T^{(i)}$ соответствует i -му участку траектории).

Для решения поставленной задачи необходимо найти следующие производные:

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda_1^{(i)}}; \frac{\partial I}{\partial T_0^{(i)}}; \frac{\partial I}{\partial T_k^{(i)}}; \frac{\partial I}{\partial T_0}; \frac{\partial I}{\partial T}; \frac{\partial I}{\partial a_0}; \frac{\partial I}{\partial c_0} \quad (17)$$

IV. Результаты моделирования и оптимизации

1 Рассматриваемые проектные варианты ЭРБ

Характеристики рассматриваемого ЭРБ подобны характеристикам лунного буксира [2, 4, 6, 7]. Проектные варианты различаются величиной удельного импульса, который находится в пределах от 2000 до 8000 с. Т.к. КПД двигателя зависит от удельного импульса, то номинальная величина тяги также различается для каждого проектного варианта. Входная мощность ДУ была принята равной 360 кВт для всех проектных вариантов. КПД по мощности был принят равным 40%. Удельные массовые характеристики энергоустановки $\alpha_{pp} = 21,8$ кг/кВт ($m_{pp} = 7850$ кг). Значения переменных из (8) были приняты следующим образом: $\gamma_{ps} = 51$ кг/Н, $\gamma_c = 37,7$ кг/Н, $\alpha_c = 7,1$ кг/кВт. В таблице 1 показаны массовые характеристики основных подсистем КА и общая сухая масса КА (m_d).

Начальная масса ЭРБ-КА, включая массу блока полезной нагрузки и топлива, без учета массы баков составляет 35000 кг для всех проектных вариантов.

Таблица 1 – Рассматриваемые проектные варианты ЭРБ

№	J_{sp} , с	η_{ps}	P_0 , Н	m_{ps} , кг	m_c , кг	m_d , кг
1	2000	0,60	21,60	1100,7	3370,3	12321,0
2	2500	0,60	17,28	880,6	3207,5	11938,0
3	3000	0,60	14,40	733,8	3098,9	11682,7
4	3500	0,65	13,37	628,8	3021,2	11500,0
5	4000	0,65	11,70	550,3	2963,2	11363,5
6	4500	0,65	10,40	489,2	2917,9	11257,1
7	5000	0,70	10,08	440,3	2881,7	11172,0
8	5500	0,70	9,16	400,0	2851,9	11102,0
9	6000	0,70	8,40	366,9	2827,4	11044,3
10	6500	0,75	8,31	338,9	2806,7	10995,6
11	7000	0,75	7,71	314,4	2788,6	10953,0
12	7500	0,75	7,20	293,5	2773,2	10916,7
13	8000	0,75	6,75	275,2	2759,6	10884,8

2 Результаты проектно-баллистической оптимизации

При перелете с околоземной орбиты на орбиту L1 предполагалось, что КА выведен на круговую околоземную орбиту высотой 360 км и наклоном 65° . На рисунке 4 показаны результаты моделирования околоземного участка траектории в пространственной барицентрической системе координат для КА с ЭРД тягой 14,4 Н и удельным импульсом 3000 с. В конечный момент времени КА попадает на орбиту, угол наклона которой в данной системе координат был принят равным 0.

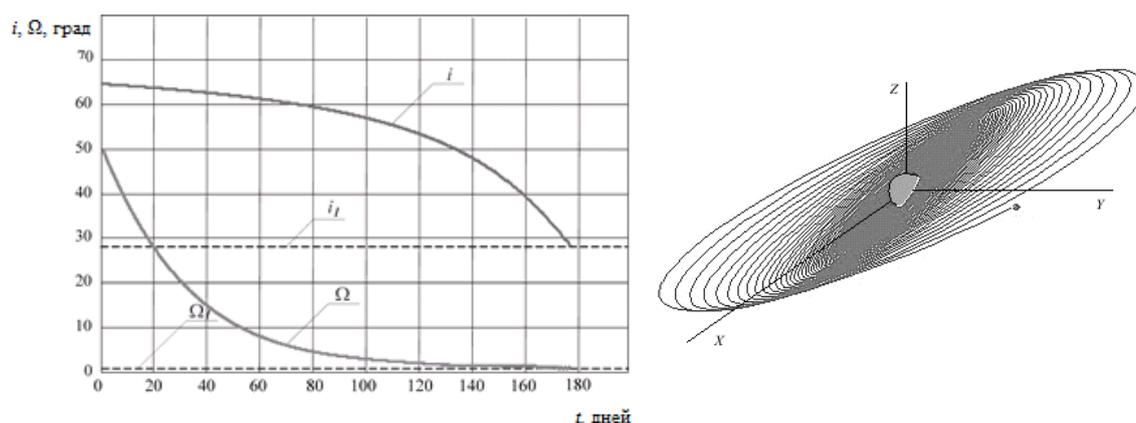


Рисунок 4 – Результаты моделирования околоземного участка траектории

а) Изменение наклона и
долготы восходящего узла

б) Траектория типового
околоземного перелета

Пунктиром (i_1) обозначено наибольшее возможное наклонение плоскости Лунной орбиты к плоскости экватора, которое в рамках данной задачи является наиболее благоприятным.

На рисунке 5 показаны результаты оптимизации и моделирования перелета в плоскости Земля-L1 для КА с ЭРД тягой 14,4 Н и удельным импульсом 3000 с.

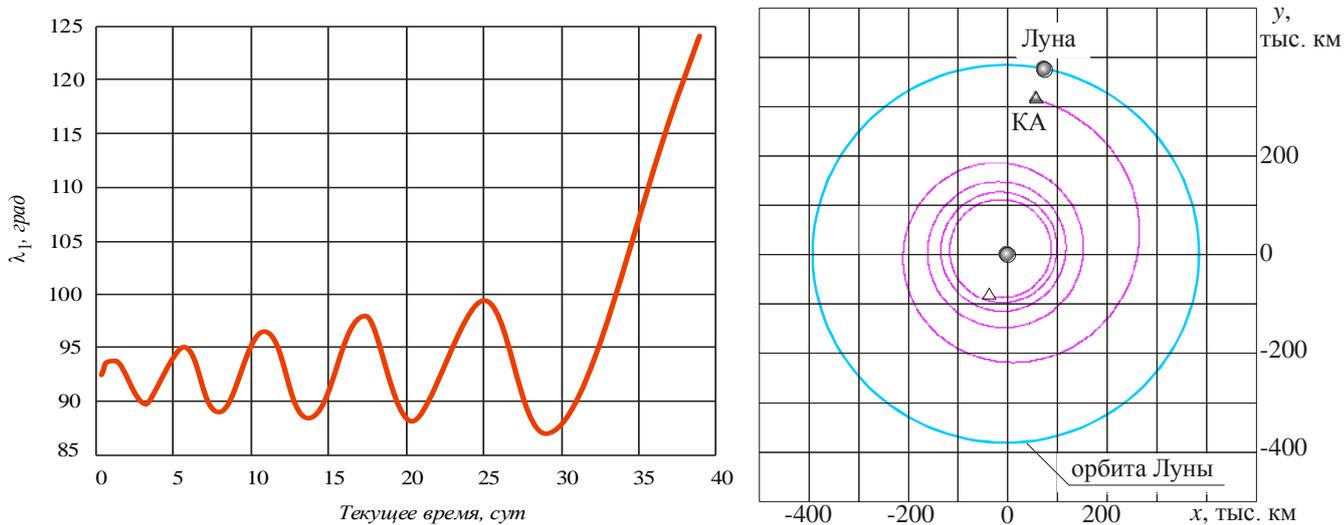


Рисунок 5 – Программа оптимального по быстродействию управления λ_1 и соответствующая траектория движения на участке перелета Земля – L1

На следующем этапе перелета (т.е. при перелете L1-L2) предполагалось, что КА помещен на круговую орбиту точки Лагранжа L1, а его конечной орбитой является круговая орбита точки Лагранжа L2. Движение всех тел в рамках данного перелета также происходит в плоскости

На рисунке 6 приведена программа управления λ_1 , полученная с помощью принципа максимума для перелета КА из точки либрации L1 в точку либрации L2 системы Земля-Луна.

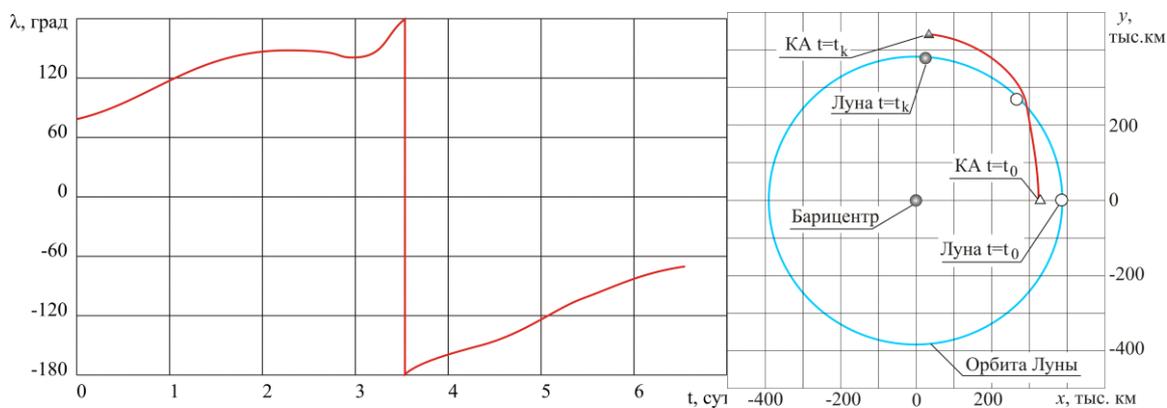


Рисунок 6 – Программа оптимального управления углом λ_1 и траектория движения на участке перелета L1 – L2 (принцип максимума)

На рисунке 7 приведена программа управления λ_1 , полученная с помощью метода последовательной линеаризации для перелета КА из точки либрации L1 в точку либрации L2 системы Земля-Луна.

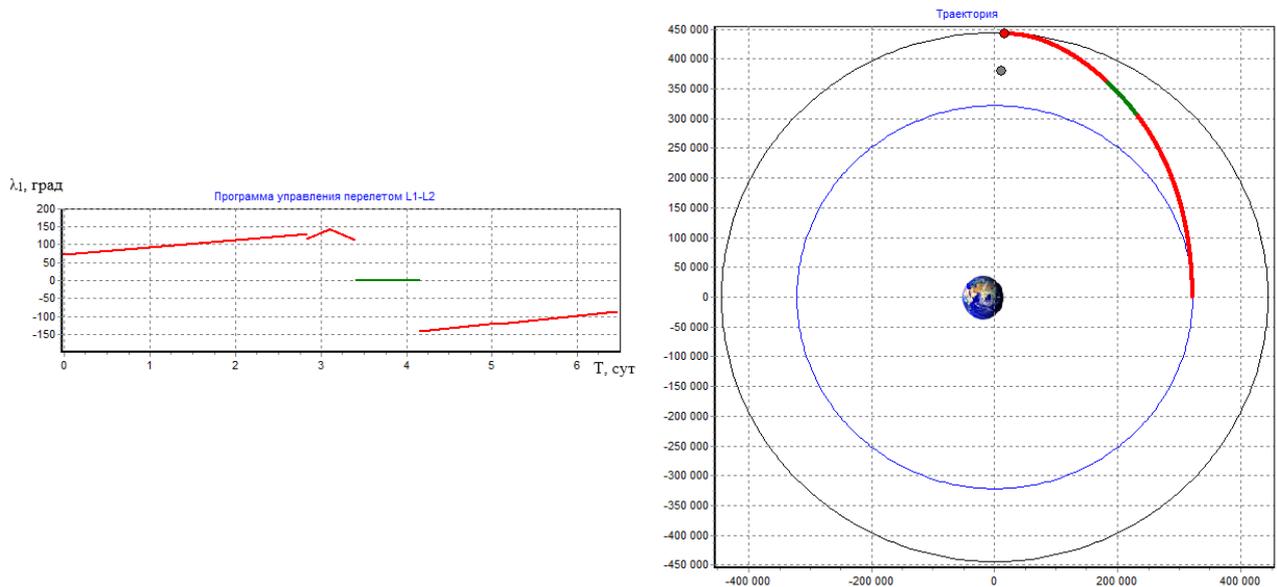


Рисунок 7 – Программа оптимального управления углом λ_1 и траектория движения на участке перелета L1 – L2 (метод последовательной линеаризации)

Как видно из рисунков 6-7, результаты, полученные методом последовательной линеаризации, хорошо согласуются с результатами, полученными методом максимума Понтрягина. Наибольшее влияние Луна оказывает на последних витках орбиты в моменты своего максимального сближения с КА. Использование критерия оптимальности по расходу топлива приводит к увеличению длительности перелета и уменьшению расхода рабочего тела.

Продолжительности участков и общая продолжительность перелета (T_1 , T_2 , T_1+T_2), расход топлива на участках (m_{f1} , m_{f2}), общий расход топлива ($m_{f1}+m_{f2}$) и относительная полезная нагрузка ($m_p = \frac{m_{pl}}{m_0}$) показаны в таблице 2.

Таблица 2 – Продолжительность и расход топлива перелетов Земля-L1, L1-L2

№	T_1 , сут	m_{f1} , кг	T_2 , сут	m_{f2} , кг	T_1+T_2 , сут	$m_{f1}+m_{f2}$, кг	m_p
1	120,0	11206,7	13,8	1288,47	133,8	12495,17	0,29
2	154,0	9255,1	14,0	836,87	168,0	10091,97	0,37
3	188,2	7853,5	14,7	610,92	202,9	8464,42	0,42
4	206,7	6792,8	15,1	498,60	221,8	7291,40	0,46
5	237,7	5975,1	15,5	392,15	253,2	6367,25	0,49
6	268,0	5336,9	15,8	315,99	283,8	5652,89	0,52
7	280,4	4802,2	16,2	282,19	296,6	5084,39	0,54
8	309,4	4369,9	16,5	237,55	325,9	4607,45	0,55
9	337,5	4007,3	16,8	203,41	354,3	4210,71	0,56
10	344,3	3704,7	17,0	188,01	361,3	3892,71	0,57
11	371,6	3447,9	17,6	167,53	389,2	3615,43	0,58
12	398,1	3217,1	18,0	149,41	416,1	3366,51	0,59
13	424,8	3037,8	18,5	135,05	443,3	3172,85	0,60

На рисунке 8 представлена зависимость между относительной массой полезной нагрузки и общим временем перелета.

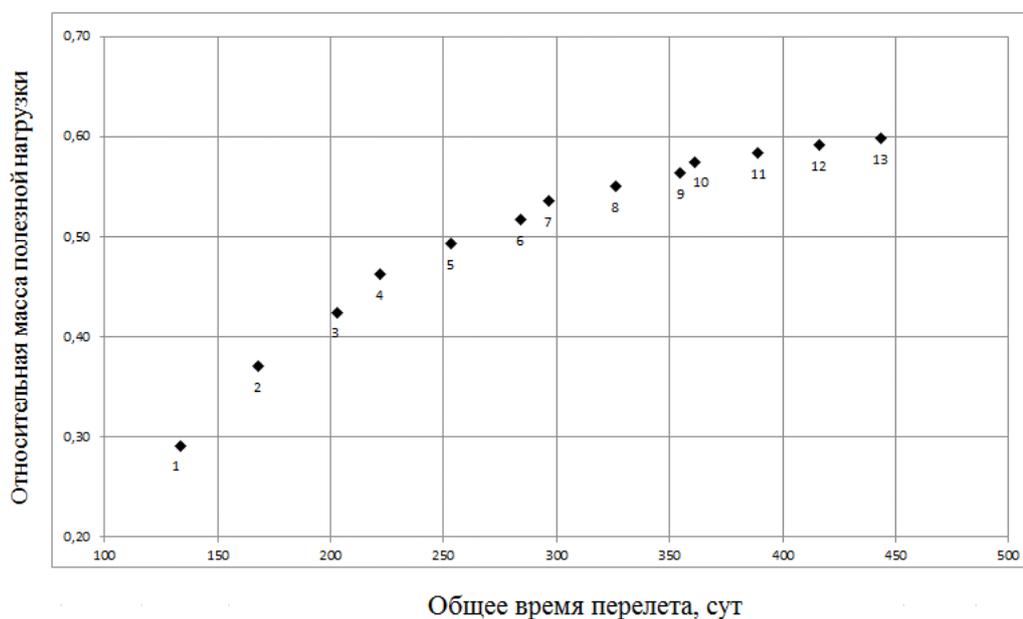


Рисунок 8 – Зависимость между относительной массой полезной нагрузки и минимальным временем перелета

На рисунке 9 представлены зависимости тяги и удельного импульса КА от общего времени перелета.

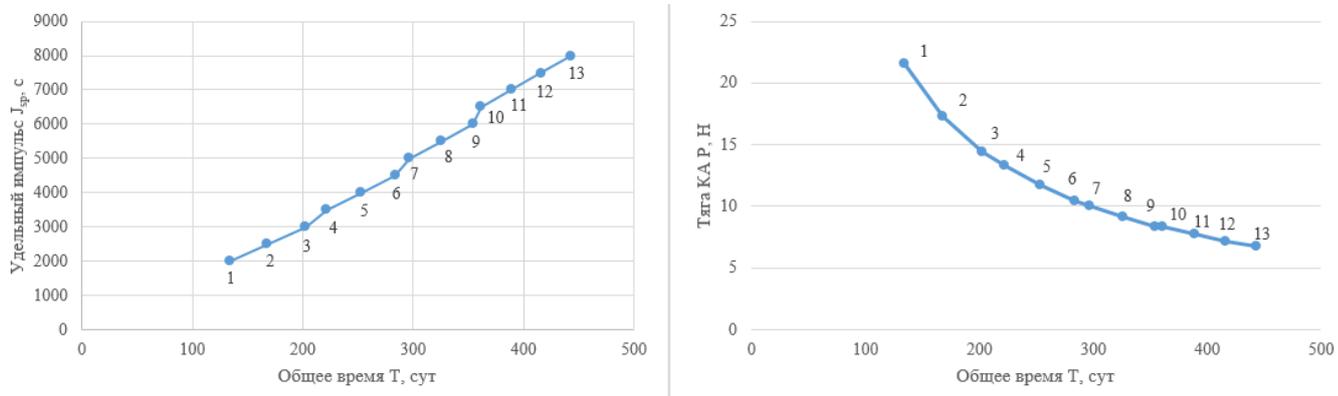


Рисунок 9 – Зависимость тяги и удельного импульса КА от общего времени перелета

По нашему мнению, наиболее целесообразными проектными вариантами ЭРБ являются проектные варианты от 3 до 9, т.к. их проектные характеристики обеспечивают относительную полезную нагрузку в пределах 0,42-0,56 и продолжительность перелета от 203 до 354 суток. Безусловно, если стоит задача осуществить перелет в кратчайшее время либо при наименьших затратах топлива, то следует выбрать проектные варианты 1 или 13 соответственно.

✓ Заключение

Использование принципа максимума Понтрягина в задаче трех тел позволяет найти оптимальные управляющие углы и соответствующие траектории для различных проектных вариантов перелетов Земля-L1 и L1-L2. Известные результаты согласуются с результатами, полученными авторами статьи. Очевидно, увеличивая продолжительность перелета, увеличивается расход топлива. Поэтому при баллистическом проектировании необходимо найти оптимальное соотношение

между расходом топлива и длительностью перелета. Таким образом, применяемый в статье метод демонстрирует свою эффективность при решении сложных задач оптимизации перелетов КА. Результаты работы могут быть использованы для отыскания требуемых проектно-баллистических параметров будущих перелетов в системе Земля-Луна.

Библиографический список

1. Jones, R. M., "Comparison of potential electric propulsion systems for orbit transfer," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 21, No. 1, 1984, pp. 88-95.
2. Rayman, M. D., and Williams, S. N., "Design of the first interplanetary solar electric propulsion mission," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 39, No. 4, 2002, pp. 589-595.
3. Hermel, J., Meese, R. A., Rogers, W. P., Kushida, R. O., and Beattie, J. R., "Modular, ion-propelled, orbit-transfer vehicle," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 25, No. 5, 1988, pp. 368-374.
4. Andrews, D. G., and Wetzel, E. D., "Solar Electric Space Tug to Support Moon and Mars Exploration Missions," *AIAA Space 2005 Conference & Exhibit*, AIAA-05-6739, AIAA, Long Beach, California, 2005.
5. Koppel, C., Moteurs, S., Marchandise, F., Estublier, D., and Jolivet, L., "The SMART-1 Electric Propulsion Subsystem In-Flight Experience," *40th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA 2004-3435, AIAA, Fort Lauderdale, Florida, 2004.

6. Galabova, K., Bounova, G., de Weck, O., and Hastings, D., “Architecting a family of space tugs based on orbital transfer mission scenarios,” *AIAA Space 2003 Conference & Exhibit*, AIAA 2003-6368, AIAA, Long Beach, CA, 2003.
7. Loeb H.W., Feili D., Popov G.A., Obukhov V.A., Balashov V.V., Mogulkin A.I., Murashkov V.M. , Nesterenko A.N., Khartov S., “*Design of High-Power High-Specific Impulse RF-IonThruster*,” 32nd International Electric Propulsion Conference, Wiesbaden, Germany, September 11 – 15, 2011.
http://erps.spacegrant.org/uploads/images/images/iepc_articledownload_1988-2007/2011index/IEPC-2011-290.pdf .
8. Burke, L. M., Martini, M. C. and Oleson, S. R., “A High Power Solar Electric Propulsion – Chemical Mission for Human Exploration of Mars,” *50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, AIAA 2014-3719, AIAA, Cleveland, OH, 2014
9. Yang, G., “Earth-moon Trajectory Optimization Using Solar Electric Propulsion,” *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 20, No. 5, 2007, pp. 452-463.
10. Geffroy, S.; Epenoy, R. “*Optimal low-thrust transfers with constraints---generalization of averaging techniques*,” *Acta Astronautica*, Volume 41, Number 3, August 1997, pp. 133-149
11. Betts, J. T., and Erb, S. O., “Optimal low thrust trajectories to the moon.” *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 2, No. 2, 2003, pp. 144-170.

12. Ozimek, M. T., and K. C. Howell. "Low-thrust transfers in the Earth-Moon system, including applications to libration point orbits," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 2, 2010, pp. 533-549.
13. Starinova, O. L., Kurochkin, D. V., and Materova, I. L. "Optimal control choice of non-Keplerian orbits with low-thrust propulsion," (2012, November). In 9TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICAL PROBLEMS IN ENGINEERING, AEROSPACE AND SCIENCES: ICNPAA 2012 (Vol. 1493, No. 1, pp. 964-971). AIP Publishing.
14. McKay, R., Macdonald, M., Biggs, J., and McInnes, C., "Survey of highly non-Keplerian orbits with low-thrust propulsion," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 34, No. 3, 2011, pp. 645-666.
15. Салмин В.В., Старинова О.Л. Оптимизация межпланетных перелетов КА с двигателями малой тяги с учетом эллиптичности и некомпланарности орбит планет // Космические исследования. 2001. Т.39. №1. С.51-59.
16. Казмерчук П.В., Малышев В.В., Усачев В.Е. Методика оптимизации траекторий, включающих гравиманевры космического аппарата с солнечным парусом // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 156-167.
17. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004. Т. 42. № 3. С. 260-279.

18. Fain. M.K., Starinova O.L. “*Ballistic optimization of the L1-L2 and L2-L1 low thrust transfers in the Earth-Moon system*”, (2015, June). In 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies: RAST 2015 (pp. 95-98).

19. Fain. M.K., Starinova O.L. “*The Stepwise Control Laws in the Problem of the Motion Optimization of the Electric Powered Transfers in the Earth-Moon System, Including L1-L2 and L2-L1 Missions*”, (2015, September). In 2015 International Conference on Environmental Engineering and Remote Sensing: EERS 2015 (pp. 126-129).