

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»

На правах рукописи



Гутник Сергей Александрович

**Динамика движения спутника относительно центра масс
с пассивными системами ориентации**

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. ф.-м. н., профессор

Сарычев Василий Андреевич

Москва — 2019

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Динамика спутника-гиростата на круговой орбите. Метод исследования	30
1.1. Постановка задачи	30
1.2. Уравнения движения системы	32
1.3. Положения равновесия спутника-гиростата	35
1.4. Метод исследования положений равновесия	47
1.5. Анализ эволюции условий существования положений равновесия	52
1.6. Исследование достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника-гиростата	66
1.7. Динамика спутника-гиростата с вектором гиростатического момента в главной плоскости инерции спутника	74
1.8. Исследование положений равновесия спутника-гиростата для других частных случаев	87
1.9. Сравнительный анализ общего и частных случаев	88
1.10. Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Положения равновесия	91
1.11. Достаточные условия устойчивости положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата	100
Глава 2. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов	111
2.1. Постановка задачи	111
2.2. Уравнения движения системы	113
2.3. Положения равновесия спутника	115
2.4. Метод исследования положений равновесия	126
2.5. Анализ эволюции условий существования положений равновесия	130

2.6. Исследование достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника	142
2.7. Динамика спутника с вектором аэродинамического момента в главной плоскости инерции спутника	153
2.8. Исследование положений равновесия спутника для других частных случаев	165
2.9. Сравнительный анализ общего и частных случаев	168
2.10. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Положения равновесия	171
2.11. Достаточные условия устойчивости положений равновесия осесимметричного спутника	177
2.12. Исследование положений равновесия осесимметричного спутника и их устойчивости	180
Глава 3. Динамика спутника под действием гравитационного и постоянного моментов	189
3.1. Постановка задачи	189
3.2. Уравнения движения	189
3.3. Положения равновесия спутника	190
3.4. Условия существования положений равновесия спутника	194
3.5. Исследование положений равновесия спутника с применением методов символьных вычислений	196
3.6. Исследование положений равновесия спутника	200
3.7. Исследование положений равновесия спутника для частных случаев	212
3.8. Методы и алгоритмы компьютерной алгебры, которые применялись для исследования положений равновесия спутника	213

Глава 4. Динамика гравитационно-ориентированного спутника при действии управляющих моментов	218
4.1. Постановка задачи	218
4.2. Уравнения движения	219
4.3. Положения равновесия спутника	221
4.4. Исследование необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости положений равновесия	223
4.5. Анализ переходных процессов	230
4.6. Случай осесимметричного спутника	236
Глава 5. Динамика системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите	245
5.1. Постановка задачи	245
5.2. Уравнения движения	246
5.3. Положения равновесия	250
5.4. Условия существования положений равновесия системы двух тел	252
Заключение	259
Список литературы	263

Введение

Актуальность темы исследования. Важным направлением развития современной космической техники является решение проблемы обеспечения и поддержания заданной ориентации искусственных спутников Земли. Определенная ориентация требуется как для коррекции траектории, так и для выполнения спутниками своих рабочих функций, таких как навигация, связь, проведение научных исследований. В зависимости от поставленных задач ориентация спутника может быть осуществлена с использованием активных или пассивных методов. Для проектов спутников без сложных программных маневров с очень большим временем активного функционирования более предпочтительно применение пассивных методов. При разработке пассивных систем ориентации можно использовать свойства гравитационного и магнитного полей, эффект сопротивления атмосферы и давление солнечного излучения, гироскопические свойства вращающихся тел. Главной особенностью пассивных систем ориентации является возможность функционировать продолжительное время без расходования энергии и рабочего тела, что существенно продлевает срок работы космических аппаратов. Подробный обзор работ по исследованию пассивных систем ориентации спутников и моделированию внешних сил действующих на спутники представлен в монографиях В.В. Румянцева [1], В.А. Сарычева [2], А.П. Маркеева [3], Б.В. Раушенбаха, Е.Н. Токаря [4], Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко [5], М.Ю. Овчинникова, В.И. Пенькова, Д.С. Ролдугина, Д.С. Иванова [6], в обзорах В.М. Морозова [7] и S.K. Shrivastava, V.J. Modi [88].

Среди пассивных систем, использующих свойства внешней среды, наибольшее распространение получили гравитационные системы ориентации, принцип работы которых основан на том, что в центральном ньютоновом поле сил спутник с неравными главными центральными

моментами инерции имеет на круговой орбите 24 положения равновесия, четыре из которых являются устойчивыми, соответствующие совпадению наибольшей оси эллипсоида инерции спутника с радиусом-вектором и наименьшей оси с нормалью к плоскости орбиты [8, 9, 10].

Первая модель гравитационной системы ориентации искусственных спутников Земли и исследование динамики этой системы представлены в работе Д.Е. Охоцимского и В.А. Сарычева [11]. При практической реализации спутников с гравитационной системой ориентации необходимо решать следующие основные задачи: задачу переориентации эллипсоида инерции спутника, увеличение его моментов инерции и, следовательно, увеличение восстанавливающих гравитационных моментов; задачу демпфирования собственных колебаний спутника и задачу связанную с неоднозначностью положения устойчивого равновесия спутника на орбите. Результаты, полученные в представленной диссертации, направлены на решение перечисленных выше задач.

В диссертации рассматриваются задачи движения искусственных спутников Земли относительно центра масс с различными типами пассивных систем ориентации в предположении, что влиянием движения спутника вокруг центра масс на движение центра масс по орбите можно пренебречь. Основное внимание в работе уделяется исследованию стационарных движений спутника и условий их устойчивости. Знание всех положений равновесия спутника и характера их устойчивости требуется для решения задачи, связанной с неоднозначностью положения устойчивого равновесия спутника на орбите. Если спутник, после отделения от последней ступени ракетносителя на заданную орбиту должен занять определенную устойчивую равновесную ориентацию, а углы и угловые скорости слишком велики, то их необходимо уменьшить с помощью системы предварительного успокоения до величин, позволяющих обеспечить выход спутника в нужное положение равновесия, либо дать возможность перейти спутнику в любое другое устойчивое положение

равновесия, после чего переориентировать его программным поворотом в заданное положение равновесия.

Гравитационные системы ориентации отличаются, в основном, методами демпфирования собственных колебаний спутника. Демпфирование может быть пассивным, полупассивным и активным. В спутниках с чисто пассивными системами демпфирования для рассеивания энергии собственных колебаний используется относительное движение стабилизируемого корпуса и одной или нескольких вспомогательных частей спутника. Пассивное демпфирование собственных колебаний спутника может осуществляться с помощью полости с плавающим в вязкой жидкости магнитом (магнитным демпфером) [12, 13]. Рассеивание энергии вращательного движения спутника осуществляется за счет потерь на вязкое трение в жидкости и за счет токов Фуко, наводимых магнитным полем намагниченной внутренней и внешней сферы магнитного демпфера при их относительном перемещении. Теоретические основы динамики систем ориентации с магнитным демпфером изложены в работах Ю.А. Садова [14 – 17]. Спутники с магнитным сферическим демпфером в настоящее время широко используются на практике.

Другим способом рассеивание энергии вращательного движения спутника можно осуществить за счет эффекта магнитного гистерезиса, путем установки на спутник нескольких гистерезисных стержней. Исследование вращательного движения спутника, происходящего под влиянием гистерезисных потерь с различными моделями гистерезиса проведено в работах [18–21, 154, 155]. Результаты выполненных исследований динамики спутников с гистерезисным демпфированием были применены при разработке простейших пассивных и полупассивных методов ориентации малых спутников [22, 146]. Подробное рассмотрение современных магнитных систем ориентации, в первую очередь применительно для малых спутников содержится в монографии М.Ю. Овчинникова, В.И. Пенькова, Д.С. Ролдугина, Д.С. Иванова [6].

В [11] было предложено присоединить к спутнику второе тело (стабилизатор) с трением в точке подвеса. При этом демпфируется относительная скорость спутника и стабилизатора.

Примером полупассивной системы демпфирования может служить гиродемпфер, представляющий собой два двухстепенных гироскопа, установленных в корпусе спутника с использованием вязкоупругого подвеса. Собственные колебания спутника вызывают прецессию связанных с демпфирующим устройством роторов гироскопов, что приводит к рассеиванию вращательной энергии спутника. Наиболее часто используемые в приложениях схемы конструкции спутников с гиродемпфером рассмотрены в работах [23–25].

Систематическое изложение проблем активного управления ориентацией искусственных спутников и космических аппаратов приведено в монографии Б.В. Раушенбаха, Е.Н. Токаря [4]. Спутники с активными системами управления ориентацией включают в себя, как правило, датчики ориентации и исполнительные элементы, которые создают моменты, позволяющие «демпфировать» колебания спутника. Свойства гравитационного поля служат для получения восстанавливающих моментов.

Введение в конструкцию вращающихся с постоянной угловой скоростью относительно корпуса спутника роторов позволяет получить новые, более сложные, положения равновесия спутника-гиростата, интересные для практических приложений. Спутник с расположенными в его корпусе статически и динамически уравновешенным роторами, называют спутником-гиростатом. К первым исследованиям влияния вращающегося ротора на динамику спутника относятся работы [27–31]. Основная масса публикаций по спутникам-гиростатам посвящена определению стационарных решений и исследованию устойчивости этих решений. При рассмотрении задач динамики спутников-гиростатов вводится понятие прямой и обратной задачи. Определение параметров,

задающих ориентацию спутника через инерционные характеристики и компоненты кинетического момента роторов называют прямой задачей. Если в число определяемых параметров входят и конструктивные характеристики системы (например, компоненты кинетического момента), то говорят об обратной задаче.

Задача определения положений относительного равновесия спутника-гиростата в простых случаях, когда главная ось инерции спутника совпадает в равновесном положении с одной из осей орбитальной системы координат или лежит в одной из плоскостей, образуемых осями орбитальной системы рассмотрены в работах [1, 32–35]. В общем случае исчерпывающее решение было найдено для обратной задачи [36–39].

Впервые решение обратной задачи было представлено в [38], где все положения равновесия спутника-гиростата определены из условий минимума динамического потенциала с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Наиболее простой метод решения обратной задачи был предложен в [36, 37].

Прямая задача была решена лишь для частных случаев, когда вектор гиростатического момента параллелен одной из главных центральных осей инерции спутника-гиростата или лежит в одной из координатных плоскостей связанной со спутником системы координат [32, 39–47].

Положения равновесия осесимметричного спутника-гиростата определены в [48]. В [40] определение числа положений равновесия и исследование достаточных условий их устойчивости для осесимметричного спутника-гиростата проведено для частного случая, когда вектор гиростатического момента совпадает с одной из главных центральных осей инерции спутника. В [49, 50] получены параметры системы, обеспечивающие устойчивость или неустойчивость равновесий осесимметричного спутника-гиростата с постоянным вектором гиростатического момента, который находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника. В [31, 51] исследуется вращательное движение

осесимметричного спутника-гиростата, вектор гиростатического момента которого направлен вдоль оси симметрии спутника, на круговой экваториальной орбите. На спутник действуют гравитационный, магнитный и аэродинамический моменты. В [52] рассмотрено движение спутника-гиростата, вектор гиростатического момента которого направлен вдоль нормали к плоскости орбиты под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Получено условие существования единственного устойчивого положения равновесия, что позволяет обеспечить однозначность трехосной аэродинамической ориентации спутника.

В [37, 53] рассматривается движение спутника с демпфирующими маховиками с учетом действия гравитационных моментов на круговой орбите. Исследована устойчивость положения равновесия системы спутник-маховики, проведен анализ влияния на спутник различных возмущающих эффектов.

Следует отметить большой цикл работ по динамике спутника-гиростата [54–61], посвященный изучению периодических движений в следующих случаях: спутник-гиростат на круговой и эллиптической орбитах, спутник-гиростат под действием аэродинамического момента, спутник-гиростат под действием магнитного момента. Во всех перечисленных случаях учитывалось влияние гравитационного момента, а также предполагалось, что вектор гиростатического момента параллелен одной из главных центральных осей инерции, центр давления аэродинамических сил лежит на одной из главных центральных осей инерции, величины гиростатического, аэродинамического и магнитного моментов велики, что позволило использовать результаты исследования уравнений движения спутника-гиростата с большим параметром [61].

В работах [62–64] излагаются некоторые подходы численного решения прямой задачи о положениях равновесия спутника-гиростата.

На круговых и слабо эллиптических орбитах в диапазоне высот до 700 километров для ориентации продольной оси спутника по набегающему

потоку, направление которого мало отличается от направления касательной к орбите, можно использовать аэродинамические моменты. Если спутник аэродинамически устойчив, то при нарушении его нормальной ориентации возникают восстанавливающие моменты по тангажу и рысканию, стремящиеся совместить продольную ось спутника с вектором скорости набегающего потока.

Динамика вращательного движения спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов, исследуется в значительном числе работ. Первое предложение по использованию аэродинамического момента в задаче ориентации искусственных спутников Земли было сделано Д.Е. Охоцимским в 1956 г. [11]. Он разработал оригинальную гравитационную систему ориентации спутника. Параметры этой системы были выбраны таким образом, чтобы и гравитационный, и аэродинамический моменты были стабилизирующими. Несколько позже простейшие схемы использования аэродинамических моментов для ориентации спутника были предложены в [65–69]. Более глубокие исследования влияния аэродинамического и гравитационного моментов на движение спутника около центра масс проведены в [1, 70 – 76].

Одно из первых исследований динамики спутника в плоскости круговой орбиты при совместном влиянии гравитационного и аэродинамического моментов проведено в [65], где для спутника в форме гантели и цилиндра в диапазоне высот от 130 до 600 км определены отношение аэродинамического момента к гравитационному, частота собственных колебаний спутника по тангажу и положения равновесия спутника в орбитальной системе координат в зависимости от высоты орбиты.

В упомянутых выше работах рассматривался лишь случай консервативного аэродинамического момента. На самом деле, аэродинамический момент для более сложной конфигурации спутника обладает и неконсервативной компонентой. В этом случае обобщенный

интеграл энергии не существует и приходится исследовать необходимые условия устойчивости положения равновесия спутника в орбитальной системе координат [77, 78]. Более подробно влияние неконсервативной аэродинамической компоненты рассмотрено в [79, 80] применительно к вращательному движению орбитальной станции *Салют-7*, подверженной действию гравитационного, аэродинамического и диссипативного моментов. Проведено оригинальное численно-аналитическое исследование, позволяющее объяснить основные характеристики самопроизвольно устанавливающегося режима гравитационной ориентации орбитальной станции *Салют-7*.

Первая успешная реализация чисто аэродинамической системы ориентации была осуществлена в нашей стране на спутниках *Космос-149* (1967 г.) и *Космос-320* (1970 г.). Система ориентации состоит из аэродинамического стабилизатора и гиродемпфера. Аэродинамический стабилизатор выполнен из тонкой жести в виде боковой поверхности усеченного конуса и установлен на четырех длинных (4-6 м) полых стержнях, соединенных с корпусом спутника. Аэродинамический стабилизатор приводит к появлению восстанавливающих аэродинамических моментов по тангажу (в плоскости орбиты) и рысканию (в плоскости, перпендикулярной радиусу-вектору), стремящихся совместить продольную ось спутника с направлением набегающего потока воздуха. Гиродемпфер (два двухстепенных гироскопа) обеспечивает демпфирование собственных колебаний спутника и появление восстанавливающих гироскопических моментов по рысканию и крену (поворот вокруг касательной к орбите). Основные проблемы динамики спутника с аэродинамической системой ориентации были исследованы в [23, 81–84].

Другой пример использования аэродинамического момента для ориентации спутников представляет разработанный американскими учеными малый спутник *PAMS* (проект *GAMES*) [85–87]. Демпфирование

собственных колебаний этого спутника обеспечивалось с помощью магнитных гистерезисных стержней. Спутник *PAMS* с одноосной аэродинамической системой ориентации был запущен на орбиту с борта корабля *Space Shuttle* в мае 1996 г.

Значительный цикл работ посвящен исследованию влияния аэродинамического момента на движение находящихся в режиме гравитационной ориентации орбитальных станций *Салют-6* и *Салют-7*, обладающих большими по площади солнечными батареями [89 – 92].

В работах [93–95] рассмотрены движения осесимметричного и близкого к осесимметричному спутника с учетом влияния гравитационного, восстанавливающего аэродинамического моментов, а также диссипативного момента от вихревых токов, наведенных в оболочке спутника магнитным полем Земли. Исследованы квазистационарные вращения спутника вокруг своей главной центральной оси минимального момента инерции, совершающей малые колебания относительно нормали к плоскости орбиты. Такой режим, близкий к режиму цилиндрической прецессии, применялся на орбитальной станции *Мир* [96]. В работе [97] рассмотрен режим одноосной аэродинамической ориентации спутника с учетом влияния гравитационного и большого восстанавливающего аэродинамического моментов. Основное внимание уделено колебаниям и вращениям спутника вокруг продольной оси, направленной по касательной к орбите, близкой к круговой.

С использованием схемы метода усреднения, предложенной Ф.Л. Черноусько [5] в работе [98], была исследована эволюция вращательного движения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Эллипсоид инерции спутника близок к сфере. Проведено исследование фазового портрета полученной усредненной системы при различных значениях входящих в нее параметров.

Подробное изложение метода усреднения в его классическом варианте с дополнениями в виде описания явных оценок точности

приближения и в обобщенном варианте (усреднение с несколькими малыми параметрами), в том числе применительно к задачам динамики движения спутников относительно центра масс в сложных гравитационных полях, с учетом влияния на движение спутника гравитационных полей Луны и Солнца (задачи 3, 4 тел), представлено в монографиях П.С. Красильникова [99, 156]. В [156] приводится описание как нерезонансных вращений спутника в первом приближении метода усреднения в предположении, что орбита спутника описывается квазипериодическими функциями времени, так и разных типов вращений спутника при спинорбитальных резонансах.

Основная масса работ по анализу динамики спутника под действием гравитационного и постоянного моментов посвящена определению стационарных движений и исследованию их устойчивости. Постоянный момент может быть создан, например, истечением газа или рабочего тела из корпуса спутника. В [77, 78, 80] показано, что влияние малого постоянного момента на динамику спутника аналогично действию неконсервативного компонента аэродинамического момента. В [100] была показана возможность существования положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов для некоторых частных случаев. В работе [37] был предложен метод решения прямой задачи определения положений равновесия спутника при действии постоянных моментов, численное исследование положений равновесия спутника проведено в [101]. Устойчивость положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов исследована в [102].

Движение спутника, на который, кроме гравитационного момента, действует активный управляющий момент, зависящий от проекций угловой скорости спутника, рассмотрено в работе [26], где определены все стационарные вращения осесимметричного спутника и исследована их устойчивость. Реализация таких управляющих моментов возможна, например, при использовании датчиков угловой скорости с осями

чувствительности, направленными вдоль осей связанной со спутником системы координат, и двигателей ориентации, сообщаемым спутнику моменты, пропорциональные сигналам этих датчиков.

Использование составной схемы гравитационной системы ориентации спутника, в соответствии с которой к телу спутника с помощью шарнира присоединяется второе тело (стабилизатор), позволяет путем выбора параметров стабилизатора сделать систему спутник-стабилизатор гравитационно-устойчивой. Стабилизатор в данной схеме используется в качестве демпфирующего устройства. Положение стабилизатора, который выполняется, как правило, в виде одной или нескольких выдвигных штанг с грузами на концах, фиксируется относительно корпуса спутника центрирующими пружинами.

Исследованию теории динамики гравитационной системы спутник-стабилизатор посвящен ряд работ [11, 72, 104–115]. В работе [104] выведены общие нелинейные уравнения движения системы спутник-стабилизатор, получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы на круговой орбите, определены амплитуды эксцентриситетных колебаний системы двух тел, обусловленные влиянием эллиптичности орбиты, и проведено исследование переходных процессов. В [72] показано, что учет сопротивления атмосферы приводит к увеличению частоты собственных колебаний системы спутник-стабилизатор на круговой орбите. В статьях [105–109] проведен анализ динамики системы спутник-стабилизатор с упрощенной схемой двухстепенного и одностепенного подвесов. Динамика движения двух соединённых шарниром тел в плоскости круговой орбиты исследовалась в работах [110–113]. Задача нахождения всех пространственных положений равновесия двух соединённых сферическим шарниром тел на круговой орбите в общем виде до сих пор не решена. Подробное исследование задачи о пространственных положениях равновесия системы двух осесимметричных тел проведено в работе [114].

Для анализа устойчивости стационарных движений спутника применяют различные методы, большинство из которых основывается на теории устойчивости, созданной А.М. Ляпуновым и развитой Н.Г. Четаевым В.В. Румянцевым, Е.А. Барбашиным Н.Н. Красовским, А.П. Маркеевым и др. Так, в [23, 36, 104, 116] для исследования устойчивости спутника с гравитационной системой ориентации применен второй метод Ляпунова и теорема Е.А. Барбашина – Н.Н. Красовского [117]. В [1, 38, 41] условия устойчивости получены путем исследования экстремума динамического потенциала. В работах [34, 51] использовалась теорема Четаева, а в качестве функции Четаева взята связка интегралов уравнений движения. В работах [34, 118, 119] при исследовании устойчивости стационарных движений спутника-гиростата применялась теорема Томпсона-Тэта-Четаева [120]. В [34] было проведено сравнение различных методов устойчивости, и на примере задачи устойчивости положений равновесия спутника-гиростата на круговой орбите показано удобство использования теоремы Томпсона-Тэта-Четаева. В [121] проанализированы границы применимости этой теоремы.

Основные направления исследования устойчивости движения спутников освещены в обзорах В.М. Морозова [7], А. Анчева, В.В. Румянцева [122], в монографии В.Н. Рубановского, В.А. Самсонова [123]. Современные методы исследования устойчивости материальных систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями Гамильтона с периодическими коэффициентами, и результаты применения данных методов к задачам об устойчивости движения спутника-твердого тела относительно центра масс на круговой и эллиптической орбитах представлены в монографии А.П. Маркеева [3]. С использованием методов, изложенных в [3], было получено строгое решение задачи об устойчивости нулевого положения равновесия спутника на круговой орбите, соответствующего совпадению его осей инерции с осями орбитальной системы координат [124]. Показано, что в зависимости от значений инерционных параметров возможна устойчивость по Ляпунову, формальная

устойчивость, устойчивость для большинства начальных данных. В работах [125–130] на основе методов, изложенных в [3], решен широкий класс задач об орбитальной устойчивости плоских колебаний спутника, который является твердым телом, обладающим геометрией масс пластины, на круговой орбите. В [125] предложен конструктивный алгоритм исследования орбитальной устойчивости периодических движений автономных гамильтоновых систем.

Целью и задачами диссертационной работы являются разработка аналитических и символьно-численных методов исследования задач динамики движения относительно центра масс спутника-гиростата, спутника подверженного действиям аэродинамического момента, постоянного момента, активного управляющего момента, зависящего от проекций угловой скорости и составной схемы спутник-стабилизатор.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы, сформулированы цели и задачи исследования, дается тематический обзор литературы и краткое содержание диссертации по главам, используемые методы исследования, дается оценка научной новизны полученных результатов, сведения о публикациях по теме диссертации и апробации работы.

Глава 1 посвящена методам исследования динамики движения спутника-гиростата на круговой орбите. Дана постановка прямой и обратной задачи, приводится краткий анализ полученных результатов для частных случаев данной задачи, сформулированы основные допущения о геометрии системы. Выведены уравнения движения спутника-гиростата. Получена система, определяющая стационарные уравнения движения спутника-гиростата в форме алгебраических уравнений. Описаны геометрические и алгебраические методы, с применением которых исходная система стационарных уравнений приведена к системе 2 алгебраических уравнений с двумя неизвестными, которая с

использованием понятия результата и систем компьютерной алгебры сведена к алгебраическому уравнению 12-го порядка относительно одной неизвестной.

Доказано, что спутник-гиростат на круговой орбите под действием гравитационного момента в общем случае может иметь не более 24 положений равновесия. Проведено полное исследование положений равновесия спутника-гиростата на круговой орбите для общего случая, которые определяются алгебраическим уравнением 12-го порядка.

Изложен численный метод исследования положений равновесия спутника-гиростата. В пространстве параметров численно определены области с одинаковым числом положений равновесия спутника-гиростата для широкого диапазона параметров системы и исследована эволюция изменения этих областей. Для случаев осесимметричного спутника-гиростата выведены уравнения, задающие границы между областями с равным числом положений равновесия.

Приведены результаты детального численно-аналитического исследования достаточных условий устойчивости полученных положений равновесия спутника-гиростата с использованием обобщенного интеграла энергии в качестве функции Ляпунова. Представлен подробный графический анализ результатов исследования устойчивости положений равновесия спутника-гиростата.

В случаях, когда вектор гиростатического момента спутника-гиростата находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает с осями, изложен метод исследования положений равновесия с использованием алгоритмов компьютерной алгебры и приведены аналитические результаты определения границ в плоскости параметров задачи, которые разделяют области с равным числом положений равновесия спутника-гиростата для всех трех случаев расположения вектора гиростатического момента в каждой из плоскостей, образуемых осями инерции.

Проведено исследование положений равновесия спутника-гиростата для 9 частных случаев, когда одна из главных осей инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом-вектором или касательной к орбите. Показано, что любая такая ориентация является равновесной. Представлены результаты исследования положений равновесия и достаточных условий их устойчивости для осесимметричного спутника-гиростата при любых значениях вектора гиросtatического момента.

В главе 2 рассмотрены задачи динамики движения спутника относительно центра масс, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов, на круговой орбите. Сформулированы основные допущения о характере действия сопротивления атмосферы на спутник. Выводятся формулы для описания модели влияния на спутник аэродинамического момента.

Проведено полное исследование положений равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов на круговой орбите, для общего случая, который определяется алгебраическим уравнением 12-го порядка. Доказано, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае может иметь не более 24 положений равновесия.

В пространстве параметров численно определены области с одинаковым числом положений равновесия спутника для широкого диапазона параметров системы и исследована эволюция изменения этих областей. Для случаев осесимметричного спутника выведены уравнения, задающие границы между областями с равным числом положений равновесия.

Проведено детальное численно-аналитическое исследование достаточных условий устойчивости полученных положений равновесия спутника с использованием обобщенного интеграла энергии в качестве

функции Ляпунова. Представлен подробный графический анализ результатов исследования устойчивости положений равновесия спутника.

В случаях, когда вектор аэродинамического момента спутника находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника, и не совпадает с осями, изложен метод исследования положений равновесия с использованием алгоритмов компьютерной алгебры и приведены аналитические результаты определения границ в плоскости параметров задачи, которые разделяют области с равным числом положений равновесия спутника для всех трех случаев расположения вектора аэродинамического момента в каждой из плоскостей, образуемых осями инерции.

Проведено исследование положений равновесия спутника для 9 частных случаев, когда одна из главных осей инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом-вектором или касательной к орбите. Показано, что любая такая ориентация является равновесной.

Представлены результаты исследования положений равновесия и достаточных условий их устойчивости для осесимметричного спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов при любых значениях вектора аэродинамического момента.

В главе 3 приводится полное решение задачи о стационарных движениях спутника на круговой орбите, на который, кроме гравитационного момента, действует постоянный момент, обусловленный, например, истечением газа из корпуса спутника.

Изложены различные методы с использованием понятия результата и алгоритмов построения базисов Гребнера, приведения исходной системы стационарных уравнений, задающей положения равновесия спутника, к одному алгебраическому уравнению, которое определяет все положения равновесия спутника. Доказано, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного и постоянного моментов в общем случае может иметь не более 24 положений равновесия.

Выполнено детальное исследование положений равновесия с использованием алгебраических методов и символьных вычислений.

Проведено вычисление полинома, задающего дискриминантную гиперповерхность для уравнения 6-го порядка, который определяет разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней и, соответственно, положений равновесия спутника. Представлены графические результаты исследования эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия в пространстве безразмерных параметров задачи.

В главе 4 исследуются положения равновесия спутника, на который, кроме гравитационного момента, действует активный управляющий момент, зависящий от проекций угловой скорости спутника. Такое управление можно обеспечить путем использования датчиков угловой скорости и двигателей ориентации. Действие управляющего момента позволяет получить новые положения равновесия и обеспечить асимптотическую устойчивость положений равновесия гравитационно-ориентированного спутника на круговой орбите.

Получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия спутника на основе критерия Рауса–Гурвица. Проведен детальный анализ эволюции областей выполнения необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия на плоскости безразмерных инерционных характеристик в зависимости от параметров управления. Исследован характер переходных процессов выхода системы на нулевое положение равновесия на основе методов численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения.

Рассмотрена задача о вращательном движении осесимметричного спутника на круговой орбите при действии гравитационных моментов и активного управляющего момента, проекции которого пропорциональны проекциям угловой скорости спутника.

Описаны методы компьютерной алгебры для получения из исходной системы стационарных уравнений алгебраического уравнение 4-го порядка, позволяющего определить стационарные движения осесимметричного спутника в орбитальной системе координат. Для рассматриваемой задачи описан метод разбиения пространства параметров на области с одинаковым числом стационарных решений с использованием построения дискриминантной гиперповерхности.

В главе 5 исследуется динамика движения системы двух тел (спутник-стабилизатор), соединенных сферическим шарниром, движущихся по круговой орбите. Рассматривается задача определения пространственных положений равновесия для схемы гравитационной системы ориентации спутника и демпфирующего устройства.

Приводятся решения задачи с использованием комбинированного подхода с применением методов линейной и компьютерной алгебры. Описаны методы, позволяющие определить новые классы пространственных равновесных решений задачи.

Используемые методы исследования основываются на классических методах механики космического полета, теоретической механики, теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости, методах математического моделирования, методах алгебры и компьютерной алгебры применительно к решению систем алгебраических уравнений.

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

1. Разработан символьно-численный метод исследования положений равновесия спутника и выполнено полное решение прямой задачи о положениях равновесия спутника-гиростата в общем случае для произвольных значений инерционных параметров и вектора гиростатического момента. Проведено численно-аналитическое исследование положений равновесия спутника-гиростата и достаточных условий устойчивости равновесий на круговой орбите.

2. Разработан аналитический метод решения задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника-гиростата для произвольных значений вектора гиростатического момента и проведен анализ найденных положений равновесия и достаточных условий их устойчивости.
3. Разработан символьно-аналитический метод решения задачи о положениях равновесия спутника-гиростата в случаях, когда вектор гиростатического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей.
4. Разработан символьно-численный метод решения прямой задачи о положениях равновесия спутника–твёрдого тела на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае для произвольных значений инерционных параметров и вектора аэродинамического момента и исследованы положения равновесия спутника и достаточные условия их устойчивости.
5. Разработаны методы решения задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического момента для произвольных значений вектора аэродинамического момента и проведен анализ положений равновесия спутника и достаточных условий устойчивости найденных положений равновесия.
6. Разработаны методы решения задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического момента в случаях, когда вектор аэродинамического момента находится в плоскости, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей. Проведено детальное исследование положений равновесия спутника и эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия.
7. Разработаны символьно-аналитические методы решения задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и

постоянного момента в связанной со спутником системе координат. Проведено исследование положений равновесия спутника и эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия.

8. Разработан метод исследования положений равновесия спутника, на который, кроме гравитационного момента, действует активный управляющий момент, зависящий от проекций угловой скорости спутника. Проведен анализ условий асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия и численное исследование переходных процессов пространственных колебаний спутника при различных параметрах управления.

9. Разработан символьно-аналитический метод решения задачи о стационарных движениях осесимметричного спутника на круговой орбите при действии гравитационного момента и активного управляющего момента.

10. Разработан комбинированный символьно-аналитический алгоритм определения равновесных стационарных конфигураций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром в центральном гравитационном поле на круговой орбите. Найдены и исследованы новые классы пространственных равновесных решений задачи и получены условия их существования в зависимости от безразмерных параметров системы. Определены значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия системы спутник-стабилизатор.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные в работе результаты могут быть использованы при проектировании пассивных гравитационных и аэродинамических систем управления ориентацией искусственных спутников Земли и космических станций.

Положения, выносимые на защиту:

1. Аналитический и символьно-численные методы определения всех положений равновесия спутника-гиростата движущегося по круговой орбите для заданных значений параметров задачи. На основе предложенных методов выполнено полное решение прямой задачи о положениях равновесия спутника-гиростата в общем случае для произвольных значений инерционных параметров и вектора гиросtatического момента. Проведено детальное численное исследование эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия. Определены значения бифуркационных параметров, при которых происходит изменение областей с равным числом положений равновесия. Численно-аналитические результаты анализа достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника-гиростата.

2. Разработан аналитический метод определения положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата и исследования достаточных условий их устойчивости. На основе разработанного метода выполнено решение прямой задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника-гиростата для произвольных значений вектора гиросtatического момента и проведен анализ достаточных условий устойчивости найденных положений равновесия.

3. Разработан символьно-аналитический метод определения положений равновесия спутника-гиростата в случаях, когда вектор гиросtatического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей. Решена задача о положениях равновесия спутника-гиростата в трех случаях, когда вектор гиросtatического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей. Проведено детальное аналитическое

исследование эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия.

4. Полное решение задачи о положениях равновесия спутника–твердого тела на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае для произвольных значений инерционных параметров и вектора аэродинамического момента. Проведено детальное численное исследование эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия. Определены значения бифуркационных параметров при которых происходит изменение областей с равным числом положений равновесия. Получены численно-аналитические результаты анализа достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника.

5. Разработан аналитический метод определения положений равновесия осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического момента и исследования достаточных условий их устойчивости, на основе которого выполнено решение задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника на круговой орбите для произвольных значений вектора аэродинамического момента и проведен анализ достаточных условий устойчивости найденных положений равновесия.

6. Символьно-аналитический метод решения прямой задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического момента в случаях, когда вектор аэродинамического момента находится в плоскости, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей. Проведено детальное аналитическое исследование положений равновесия и эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия.

7. Символьно-аналитические методы решения задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного момента в связанной со спутником системе координат с применением

алгебраических методов и методов символьных вычислений. Проведено детальное аналитическое исследование эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия спутника. Определены значения бифуркационных параметров при которых происходит изменение областей с равным числом положений равновесия.

8. Метод исследования положений равновесия спутника, на который кроме гравитационного момента действует активный управляющий момент, зависящий от проекций угловой скорости спутника. Результаты анализа условий асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия и численное исследование переходных процессов пространственных колебаний спутника при различных параметрах управления.

9. Разработан символьно-аналитический метод решения задачи о стационарных движениях осесимметричного спутника на круговой орбите при действии гравитационного момента и активного управляющего момента. Решена задача определения всех стационарных движений спутника для заданных значений параметров системы и проведен анализ эволюции изменения областей с равным числом стационарных движений спутника.

10. Комбинированный символьно-аналитический алгоритм определения равновесных стационарных конфигураций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром в центральном гравитационном поле на круговой орбите. Найдены и исследованы новые классы пространственных равновесных решений задачи и получены условия их существования в зависимости от безразмерных параметров системы. Определены значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия системы спутник-стабилизатор.

Достоверность и обоснованность результатов работы обеспечивается корректностью постановок задач, наличием полных и строгих доказательств утверждений, численных и символьных вычислений. Полученные в работе аналитические результаты подтверждаются

символьно-численным моделированием и сравнением с результатами, опубликованными отечественными и зарубежными авторами.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались автором на международных и всероссийских конференциях, ведущих научных совещаниях, семинарах и симпозиумах: на XII Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, ИПУ РАН, 2014 г.), на XII (2012 г.) и XIII (2016 г.) международной конференции им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» Москва, ИПУ РАН; на XXXV (2011 г.), XXXVI (2012 г.), XXXVII (2013 г.), XXXIX (2015 г.), XL (2016 г.), XLI (2017 г.), XLII (2018 г.) Академических чтениях по космонавтике, на Международной конференции «Математическое моделирование и вычислительная физика» (Дубна. ОИЯИ, 2013 г. и 2017 г.), на Международной конференции «Компьютерная алгебра». (Москва. ФИЦ ИУ РАН, ВЦ им. А.А. Дородницына, РУДН 2016 г., РЭУ им. Г.В. Плеханова 2017 г.), на Международном рабочем совещании «Компьютерная алгебра» (Дубна. ОИЯИ, 2011–2018 г.г.), на 2, 13, 15, 17–20 Международной конференции «Компьютерная алгебра в научных исследованиях (CASC)» (Мюнхен, ТУМ, 1999 г.; Кассель, КУ, 2011 г.; Берлин, СУБ, 2013 г.; Аахен, АУ, 2015 г.; Бухарест, БУ, 2016 г.; Пекин, КАН, 2017 г.; Лилль, ЛУ, 2018 г.). На заседаниях научного семинара по Компьютерной Алгебре (Москва, МГУ им. Ломоносова, ФИЦ ИУ РАН 2011, 2013 и 2018 г.г.); на 3-й Международной конференции по динамике и управлению космических систем (DYCOSS 2017) Международной Академии Астронавтики (ИАА) (Москва, РУДН, 2017 г.), на Международном симпозиуме по аэрокосмическим технологиям The First Aerospace Symposium «The Silk Road». (Долгопрудный. МФТИ, 6-8 декабря 2018 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 46 печатных работах, из них 22 статьи в рецензируемых журналах и изданиях [157–178] рекомендованных ВАК РФ, среди которых 20 публикаций в

изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и Web of Science, 8 препринтов [179–186] и 16 докладов и тезисов докладов.

Личный вклад соискателя. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В совместных работах по исследованию положений равновесия спутника и их устойчивости при действии внешних моментов вклад автора в постановку решенных задач и в интерпретацию полученных результатов был равным вкладом других соавторов, а само решение задач и соответствующие вычисления были выполнены диссертантом лично в процессе научной деятельности. Вклад автора в разработку методов определения положений равновесия и методов анализа их устойчивости был основным. Все представленные в диссертации результаты получены автором лично.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 280 страницах, содержит 106 иллюстраций и 3 таблицы. Библиография включает 186 наименований.

Глава 1. Динамика спутника-гиростата на круговой орбите. Метод исследования

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [157, 160, 163–166, 173].

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим движение спутника, представляющего собой твердое тело с расположенными внутри него роторами, оси которых фиксированы относительно корпуса спутника. Считаем, что каждый ротор статически уравновешен относительно оси вращения и обладает динамической симметрией относительно этой оси, а угловые скорости собственного вращения роторов относительно корпуса спутника постоянны. Спутник с расположенными внутри него статически и динамически уравновешенными роторами называют спутником-гиростатом или гиростатом.

Введение в конструкцию вращающихся с постоянной угловой скоростью относительно корпуса спутника роторов позволяет получить новые, более сложные, положения равновесия спутника-гиростата, интересные для практических приложений. Исследование динамики спутника-гиростата также дает возможность проанализировать влияние на спутник некомпенсированного постоянного кинетического момента.

Основная масса работ по спутникам-гиростатам посвящена определению стационарных движений и исследованию их устойчивости. Прежде чем перейти к подробному рассмотрению динамики спутника-гиростата, введем понятие прямой и обратной задачи. Определение параметров, задающих ориентацию спутника через инерционные характеристики и компоненты кинетического момента роторов, назовем прямой задачей. Если в число определяемых параметров входят и конструктивные параметры системы, например, компоненты кинетического момента, то будем говорить об обратной задаче.

Задаче определения положений относительного равновесия спутника-гиростата в простых случаях, когда главная ось инерции спутника в

равновесном положении совпадает с одной из осей орбитальной системы координат или лежит в одной из плоскостей, образуемых осями орбитальной системы, посвящено много работ [1, 32 – 35, 39, 42–44, 46, 47]. В общем случае исчерпывающее решение найдено для обратной задачи [36 – 38, 131]. В [38] все положения равновесия спутника-гиростата определены из условий экстремума динамического потенциала с помощью неопределенных множителей Лагранжа. В [131] положения равновесия выражены через специальные углы. В [36, 37] предложен простой метод решения уравнений для определения положений равновесия спутника-гиростата.

Прямая задача была решена лишь для частных случаев, когда суммарный кинетический момент маховиков совпадает с одной из осей или лежит в одной из координатных плоскостей связанной со спутником системы координат [32, 39 – 47]. В работах [40, 63, 64] излагаются некоторые подходы численного решения прямой задачи. Следует отметить большой цикл работ по динамике спутника-гиростата [54–61], посвященный изучению периодических движений в следующих случаях: спутник-гиростат на круговой и эллиптической орбитах, спутник-гиростат под действием аэродинамического момента, спутник-гиростат под действием магнитного момента. Во всех рассмотренных случаях учитывалось влияние гравитационного момента, а также предполагалось, что вектор гиростатического момента параллелен одной из главных центральных осей инерции, центр давления аэродинамических сил лежит на одной из главных центральных осей инерции, величины гиростатического, аэродинамического и магнитного моментов велики и это позволяет использовать результаты исследования уравнений движения спутника-гиростата с большим параметром [61].

1.2. Уравнения движения системы

Для записи уравнений движения спутника-гиростата определим абсолютную систему координат $CX_aY_aZ_a$ с началом отсчета в центре масс Земли C и введем две правые прямоугольные системы координат с началом в центре масс O спутника-гиростата (рис. 1.0). Плоскость CX_aY_a совпадает с плоскостью экватора, ось CZ_a совпадает с осью вращения Земли. $OXYZ$ – орбитальная система координат. Ось OZ направлена вдоль радиус-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника; ось OY перпендикулярна оси OZ и лежит в плоскости, проходящей через радиус-вектор и вектор скорости центра масс спутника (на круговой орбите ось OY направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс O спутника).

$Oxyz$ – связанная со спутником система координат; оси Ox , Oy , Oz – направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника.

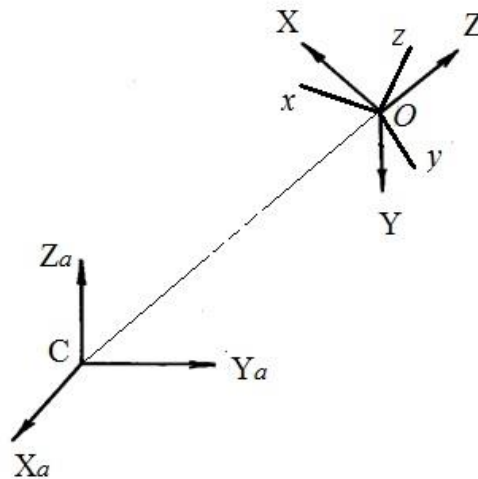


Рис. 1.0. Основные системы координат

Определим ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат с использованием углов Эйлера ψ , ϑ , φ . Направляющие косинусы осей Ox , Oy , Oz в системе $OXYZ$ выражаются

через классические углы Эйлера (рис.1.1.) с помощью соотношений [120, 132, 152]:

$$\begin{array}{ccc} & x & y & z \\ X & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ Y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ Z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi, \\ a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi, \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \vartheta, \\ a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi, \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi, \\ a_{23} &= -\cos \psi \sin \vartheta, \\ a_{31} &= \sin \vartheta \sin \varphi, \\ a_{32} &= \sin \vartheta \cos \varphi, \\ a_{33} &= \cos \vartheta. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

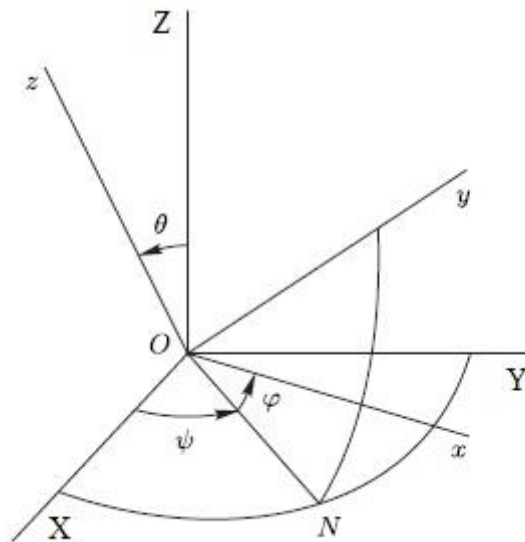


Рис. 1.1. Углы Эйлера

Проекции абсолютной угловой скорости вращения гиростата p , q , r выражаются через углы Эйлера следующим образом

$$\begin{aligned}
p &= \dot{\psi} a_{31} + \dot{\mathcal{G}} \cos \varphi + \omega a_{21}, \\
q &= \dot{\psi} a_{32} - \dot{\mathcal{G}} \sin \varphi + \omega a_{22}, \\
r &= \dot{\psi} a_{33} + \dot{\phi} + \omega a_{23}.
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Здесь

$$\omega = \frac{dv}{dt} = \omega_0 (1 + e \cos v)^2, \quad \omega_0 = \mu^{1/2} p_*^{-3/2}, \quad \mu = fM_0, \tag{1.2.3}$$

v – истинная аномалия, e – эксцентриситет, p_* – параметр орбиты, f – постоянная тяготения, M_0 – масса Земли.

Будем предполагать, что каждый ротор укреплен на жесткой оси, оба заостренных конца которой уперты в корпус спутника. Сухое трение в местах контакта оси с корпусом пренебрежимо мало, Тогда выражение для кинетической энергии гиростата можно представить в виде [2]

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n J_k \dot{\phi}_k^2 + \sum_{k=1}^n J_k (\alpha_k p + \beta_k q + \gamma_k r) \dot{\phi}_k, \tag{1.2.4}$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции гиростата; J_k – осевой момент инерции k -го ротора; $\dot{\phi}_k$ – угловая скорость вращения k -го ротора относительно корпуса спутника; $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ – постоянные направляющие косинусы оси симметрии k -го ротора относительно системы координат $Oxyz$. Силовая функция, определяющая влияние гравитационного поля Земли на спутник-гиростат, имеет следующий вид [2, 70]:

$$U = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho^3} [(A - C)a_{31}^2 + (B - C)a_{32}^2]. \tag{1.2.5}$$

Здесь $\rho = p_*/(1 + e \cos v)$. Пусть каждый маховик вращается относительно корпуса спутника с постоянной угловой скоростью ($\dot{\phi}_k = \text{const}$). Тогда,

введя обозначения $\bar{H}_1 = \sum_{k=1}^n J_k \alpha_k \dot{\phi}_k$, $\bar{H}_2 = \sum_{k=1}^n J_k \beta_k \dot{\phi}_k$, $\bar{H}_3 = \sum_{k=1}^n J_k \gamma_k \dot{\phi}_k$, получим следующие уравнения движения гиростата [2]:

$$\begin{aligned}
A\dot{p} + (C - B)qr - 3\frac{\mu}{\rho^3}(C - B)a_{32}a_{33} - \bar{H}_2r + \bar{H}_3q &= 0, \\
B\dot{q} + (A - C)rp - 3\frac{\mu}{\rho^3}(A - C)a_{33}a_{31} - \bar{H}_3p + \bar{H}_1r &= 0, \\
C\dot{r} + (B - A)pq - 3\frac{\mu}{\rho^3}(B - A)a_{31}a_{32} - \bar{H}_1q + \bar{H}_2p &= 0.
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t . На круговой орбите $\omega = \omega_0$ и уравнения движения спутника-гиростата (1.2.2), (1.2.6) примут вид

$$\begin{aligned}
A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \bar{H}_2r + \bar{H}_3q &= 0, \\
B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \bar{H}_3p + \bar{H}_1r &= 0, \\
C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \bar{H}_1q + \bar{H}_2p &= 0; \\
p = \bar{p} + \omega_0 a_{21}, \quad \dot{\bar{p}} = \dot{\psi} a_{31} + \dot{\mathcal{G}} \cos \varphi, \\
q = \bar{q} + \omega_0 a_{22}, \quad \dot{\bar{q}} = \dot{\psi} a_{32} - \dot{\mathcal{G}} \sin \varphi, \\
r = \bar{r} + \omega_0 a_{23}, \quad \dot{\bar{r}} = \dot{\psi} a_{33} + \dot{\varphi}.
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Для уравнений движения (1.2.7), (1.2.8) справедлив обобщенный интеграл энергии [2, 36, 37]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A - C)a_{31}^2 + (B - C)a_{32}^2] + \\
+ \frac{1}{2}\omega_0^2[(B - A)a_{21}^2 + (B - C)a_{23}^2] - \omega_0(\bar{H}_1 a_{21} + \bar{H}_2 a_{22} + \bar{H}_3 a_{23}) = \text{const.}
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

1.3. Положения равновесия спутника-гиростата

Положив в (1.2.7) и (1.2.8) $\psi = \psi_0 = \text{const}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = \text{const}$, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, а также $H_i = \bar{H}_i / \omega_0$ ($i = 1, 2, 3$), получим при $A \neq B \neq C$ уравнения

$$\begin{aligned}
(C - B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - H_2a_{23} + H_3a_{22} &= P = 0, \\
(A - C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - H_3a_{21} + H_1a_{23} &= Q = 0, \\
(B - A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - H_1a_{22} + H_2a_{21} &= R = 0,
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

позволяющие определить положения равновесия спутника-гиростата в орбитальной системе координат. Подставляя в (1.3.1) выражения для

направляющих косинусов (1.2.1) через углы Эйлера, получим три уравнения с неизвестными $\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0$, которые определяют все положения равновесия спутника-гиростата.

В последующем исследовании удобнее использовать эквивалентную систему

$$\begin{aligned} Pa_{11} + Qa_{12} + Ra_{13} &= 0, \\ Pa_{21} + Qa_{22} + Ra_{23} &= 0, \\ Pa_{31} + Qa_{32} + Ra_{33} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

которая представляет собой проекции уравнений (1.3.1) на оси орбитальной системы координат. Систему (1.3.2) можно представить в виде [157, 180]

$$\begin{aligned} 4(Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33}) + (H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}) &= 0, \\ Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33} &= 0, \\ (Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) + (H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

С учетом (1.2.1) систему (1.3.2) или (1.3.3) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными $\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0$. Другой способ замыкания уравнений (1.3.1), (1.3.3) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов (1.2.1)

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Для системы (1.3.1), (1.3.4) или (1.3.3), (1.3.4) возможны следующие две постановки задачи о положениях равновесия спутника-гиростата.

1. Прямая задача: заданы A, B, C, H_1, H_2, H_3 ; требуется определить все девять направляющих косинусов (или три угла Эйлера), т.е. найти все положения равновесия спутника-гиростата.

2. Обратная задача: заданы A, B, C и три направляющих косинуса; требуется определить H_1, H_2, H_3 и оставшиеся шесть направляющих

косинусов так, чтобы удовлетворялись уравнения (1.3.1), (1.3.4) или (1.3.3), (1.3.4).

Обратная задача решена в общем случае различными методами в [36 – 38, 131]. Впервые решение обратной задачи было представлено в [38], где все положения равновесия спутника-гиростата определены из условий минимума динамического потенциала с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа при фиксированных $A, B, C, a_{31}, a_{32}, a_{33}$. Наиболее простой метод решения обратной задачи был предложен в [36, 37].

Прямая задача была решена для некоторых частных случаев. В [1, 32 – 35, 40, 41, 43–47] для случая, когда вектор гиросtatического момента параллелен одной из главных центральных осей инерции спутника-гиростата (например, $H_2 \neq 0, H_1 = H_3 = 0, A \neq B \neq C$) были аналитически определены в зависимости от двух безразмерных параметров задачи все положения равновесия, получены в виде простых неравенств достаточные условия устойчивости этих положений равновесия. Решение задачи для случая, когда вектор гиросtatического момента параллелен одной из координатных плоскостей системы $Oxyz$ (например, $H_1 \neq 0, H_2 = 0, H_3 \neq 0, A \neq B \neq C$), рассмотрено в [39, 42, 173]. И, наконец, в [133, 164] были исследованы положения равновесия и их устойчивость для случая осесимметричного спутника-гиростата ($H_1 \neq 0, H_2 \neq 0, H_3 \neq 0, A \neq B = C$).

Прежде чем приступить к решению системы (1.3.3), (1.3.4), рассмотрим алгебраическую систему [36, 37]

$$\vec{m} \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 1, \quad (1.3.5)$$

где $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Если $|\vec{m} \times \vec{n}| \neq 0$, то решение системы (1.3.5) относительно неизвестных u_1, u_2, u_3 имеет вид

$$\vec{u}_{1,2} = \pm \frac{\vec{m} \times \vec{n}}{|\vec{m} \times \vec{n}|}. \quad (1.3.6)$$

При решении системы (1.3.3), (1.3.4) в качестве неизвестных удобно выбрать величины $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ и H_1, H_2, H_3 .

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} Aa_{31}a_{11} + Ba_{32}a_{12} + Ca_{33}a_{13} &= 0, \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} &= 0, \\ a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

первое уравнение которой является вторым уравнением системы (1.3.3), а второе и третье является первым и пятым условием ортогональности (1.3.4).

Так как уравнения (1.3.7) при $m_1 = Aa_{31}, m_2 = Ba_{32}, m_3 = Ca_{33}, n_1 = a_{31}, n_2 = a_{32}, n_3 = a_{33}, u_1 = a_{11}, u_2 = a_{12}, u_3 = a_{13}$ совпадают с (1.3.5), то

$$a_{11} = \pm \frac{(B-C)a_{32}a_{33}}{\sqrt{D}}, \quad a_{12} = \pm \frac{(C-A)a_{33}a_{31}}{\sqrt{D}}, \quad a_{13} = \pm \frac{(A-B)a_{31}a_{32}}{\sqrt{D}}, \quad (1.3.8)$$

где $D = (B-C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C-A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (A-B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2$. Используя свойства ортогональности для направляющих косинусов (1.3.4) и вводя обозначение $I_3 = Aa_{31}^2 + Ba_{32}^2 + Ca_{33}^2$, можно также получить

$$a_{21} = \pm \frac{(A-I_3)a_{31}}{\sqrt{D}}, \quad a_{22} = \pm \frac{(B-I_3)a_{32}}{\sqrt{D}}, \quad a_{23} = \pm \frac{(C-I_3)a_{33}}{\sqrt{D}}. \quad (1.3.9)$$

Используя выражения (1.3.9), можно показать, что

$$Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} = \pm \sqrt{D} = -\frac{1}{4}(H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}). \quad (1.3.10)$$

Тогда выражения (1.3.8) и (1.3.9) примут более простой вид

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{4(C-B)a_{32}a_{33}}{F}, & a_{21} &= \frac{4(I_3-A)a_{31}}{F}, \\
a_{12} &= \frac{4(A-C)a_{33}a_{31}}{F}, & a_{22} &= \frac{4(I_3-B)a_{32}}{F}, \\
a_{13} &= \frac{4(B-A)a_{31}a_{32}}{F}, & a_{23} &= \frac{4(I_3-C)a_{33}}{F}.
\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Здесь $F = H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}$.

Заметим, что уравнения (1.3.1) можно записать в векторном виде $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{Y}} \times \vec{\mathbf{f}}$, где $\vec{\mathbf{H}} = (H_1, H_2, H_3)$, $\vec{\mathbf{Y}} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $\vec{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3)$, $f_1 = (C-B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33})$, $f_2 = (A-C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31})$, $f_3 = (B-A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32})$ [17, 27]. Решение векторного уравнения относительно H_1, H_2, H_3 имеет вид

$$\vec{\mathbf{H}} = (\mu + I_2)\vec{\mathbf{Y}} - \vec{\mathbf{M}} - 3\sqrt{D}\vec{\mathbf{n}}.$$

Здесь $I_2 = Aa_{21}^2 + Ba_{22}^2 + Ca_{23}^2$, $\vec{\mathbf{M}} = (Aa_{21}, Ba_{22}, Ca_{23})$, μ – произвольная константа.

Таким образом, система (1.3.1) – (1.3.4) разрешена относительно неизвестных $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, H_1, H_2, H_3$. Полученное решение выражается через направляющие косинусы a_{31}, a_{32}, a_{33} , моменты инерции спутника A, B, C и произвольную константу μ . Произвольность выбора направляющих косинусов a_{31}, a_{32}, a_{33} , удовлетворяющих лишь третьему условию ортогональности (1.3.4) означает, что любая ось спутника может быть направлена на центр Земли.

Возводя левую и правую части уравнения (1.3.10) в квадрат, исключая из третьего уравнения (1.3.3) $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ с помощью (1.3.11) и добавляя третье уравнение (1.3.4), получим систему уравнений [157, 164, 180, 181]

$$\begin{aligned}
& 16[(B-C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C-A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (A-B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2] = \\
& = (H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33})^2, \\
& 4(B-C)(C-A)(A-B) a_{31} a_{32} a_{33} + [H_1(B-C) a_{32} a_{33} + H_2(C-A) a_{33} a_{31} + \\
& + H_3(A-B) a_{31} a_{32}] (H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}) = 0, \\
& a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1,
\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

для определения направляющих косинусов a_{31}, a_{32}, a_{33} . После решения системы (1.3.12) формулы (1.3.11) позволяют определить оставшиеся шесть направляющих косинусов.

Система уравнений (1.3.3) была, по-видимому, впервые приведена в [46] и [134]. В работе [62] и [157] система (1.3.3)–(1.3.4) с использованием соотношений (1.3.10), (1.3.11) была сведена к двум тригонометрическим уравнениям от двух неизвестных φ, ϑ . В [157] была доказана возможность получения из (1.3.12) одного алгебраического уравнения 12-го порядка от одной переменной $\operatorname{tg} \varphi$ путем замены a_{31}, a_{32}, a_{33} их выражениями через углы Эйлера φ, ϑ (1.2.1).

Систему (1.3.3) с использованием безразмерных параметров $h_i = H_i / (B - C)$ ($i = 1, 2, 3$), $\nu = (B - A) / (B - C)$ можно представить в следующем виде [11]:

$$\begin{aligned}
& -4(\nu a_{21} a_{31} + a_{23} a_{33}) + (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}) = 0, \\
& \nu a_{11} a_{31} + a_{13} a_{33} = 0, \\
& \nu a_{11} a_{21} + a_{13} a_{23} - (h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13}) = 0.
\end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Как показано в [165], выражения (1.3.11) и (1.3.12) с использованием безразмерных параметров примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{-4a_{32} a_{33}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{21} &= \frac{4[\nu a_{32}^2 - (1 - \nu) a_{33}^2] a_{31}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, \\
a_{12} &= \frac{4(1 - \nu) a_{33} a_{31}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{22} &= \frac{-4(\nu a_{31}^2 + a_{33}^2) a_{32}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, \\
a_{13} &= \frac{4\nu a_{31} a_{32}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{23} &= \frac{4[(1 - \nu) a_{31}^2 + a_{32}^2] a_{33}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}.
\end{aligned} \tag{1.3.14}$$

$$\begin{aligned}
& 16[a_{32}^2 a_{33}^2 + (1-\nu)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + \nu^2 a_{31}^2 a_{32}^2] = \\
& = (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33})^2 (a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2), \\
& 4\nu(1-\nu)a_{31}a_{32}a_{33} + [h_1 a_{32} a_{33} - h_2(1-\nu)a_{33}a_{31} - h_3 \nu a_{31} a_{32}] \times \\
& \times (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}) = 0, \\
& a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Отметим, что для обеспечения однородности правая часть первого уравнения (1.3.15) была умножена на $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$.

Учитывая однородность первых двух уравнений системы (1.3.15), разделим обе части первого уравнения на a_{33}^4 , второго уравнения на a_{33}^3 и получим алгебраическую систему двух уравнений относительно переменных $x = a_{31}/a_{33}$, $y = a_{32}/a_{33}$:

$$\begin{aligned}
& 16[y^2 + (1-\nu)^2 x^2 + \nu^2 x^2 y^2] = (h_1 x + h_2 y + h_3)^2 (1 + x^2 + y^2), \\
& 4\nu(1-\nu)xy + [h_1 y - h_2(1-\nu)x - h_3 \nu xy](h_1 x + h_2 y + h_3) = 0.
\end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Далее, подставляя выражения $a_{31} = xa_{33}$, $a_{32} = ya_{33}$ в последнее уравнение системы (1.3.15), получим выражение

$$a_{33}^2 = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}. \tag{1.3.17}$$

Систему уравнений (1.3.16) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
& a_0 y^2 + a_1 y + a_2 = 0, \\
& b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4 = 0,
\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

где

$$\begin{aligned}
a_0 &= h_2(h_1 - \nu h_3 x), \\
a_1 &= h_1 h_3 + [4\nu(1 - \nu) + h_1^2 - (1 - \nu)h_2^2 - \nu h_3^2]x - \nu h_1 h_3 x^2, \\
a_2 &= -(1 - \nu)h_2(h_1 x + h_3)x, \\
b_0 &= h_2^2, \\
b_1 &= 2h_2(h_1 x + h_3), \\
b_2 &= (h_2^2 + h_3^2 - 16) + 2h_1 h_3 x + (h_1^2 + h_2^2 - 16\nu^2)x^2, \\
b_3 &= 2h_2(h_1 x + h_3)(1 + x^2), \\
b_4 &= (h_1 x + h_3)^2(1 + x^2) - 16(1 - \nu)^2 x^2.
\end{aligned} \tag{1.3.19}$$

Исключим из системы двух уравнений (1.3.18) переменную y с использованием понятия результата [135]. Результат $R(x)$ уравнений (1.3.18) имеет вид

$$R(x) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Далее проведем подробное исследование уравнения $R(x) = 0$, которое можно получить путем символьных вычислений определителя матрицы результата с использованием системы компьютерной алгебры *Mathematica* 8.0 [136]. В результате вычисления результата получим алгебраическое уравнение 12-го порядка относительно x [165, 166, 181]

$$\begin{aligned}
& p_0 x^{12} + p_1 x^{11} + p_2 x^{10} + p_3 x^9 + p_4 x^8 + p_5 x^7 + p_6 x^6 + \\
& + p_7 x^5 + p_8 x^4 + p_9 x^3 + p_{10} x^2 + p_{11} x + p_{12} = 0,
\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

коэффициенты которого представляют собой довольно сложные полиномы, зависящие от четырех параметров ν, h_1, h_2, h_3

$$p_0 = -h_1^4 h_3^4 \nu^6,$$

$$p_1 = 2h_1^3 h_3^3 \nu^5 \left[2h_1^2 - h_2^2 (\nu - 1) - 2\nu (h_3^2 + 2\nu - 2) \right],$$

$$p_2 = -h_1^2 h_3^2 v^4 \left\{ 6h_1^4 + h_2^4 (v-1)^2 - h_2^2 (v-1) \left[16(v^3 - v^2) + (v-1) + h_3^2 (1-7v) \right] + \right. \\ \left. + h_1^2 \left[(-25v^2 + 26v - 1) + h_3^2 (v^2 - 16v + 1) + h_2^2 (v^2 - 8v + 7) \right] + \right. \\ \left. + 2v^2 \left[3h_3^4 + 8(v-1)^2 - 4h_3^2 (2v^2 - 7v + 5) \right] \right\},$$

$$p_3 = 2h_1 h_3 v^3 \left\{ 2h_1^6 + h_1^4 \left[(-13v^2 + 14v - 1) + 2h_3^2 (v^2 - 6v + 1) + h_2^2 (v^2 - 5v + 4) \right] + \right. \\ \left. + h_3^2 \left[-h_2^4 (v-1)^2 (2v-1) + h_2^2 (v-1)v \left[h_3^2 (1-4v) + (16v^3 - 16v^2 + v - 1) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + 2v^3 \left[-h_3^4 + 8(v-1)^2 (4v-5) + 2h_3^2 (7-11v+4v^2) \right] \right] - \right. \\ \left. - h_1^2 \left[h_2^4 (v-2)(v-1)^2 + h_2^2 (v-1) \left[(16v^3 - 16v^2 + v - 1) + h_3^2 (3v^2 - 13v + 3) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + 2v \left[-2(v-1)^2 (5v-1) + h_3^4 (v^2 - 6v + 1) + h_3^2 (18v^3 - 53v^2 + 38v - 3) \right] \right] \right\},$$

$$p_4 = -v^2 \left\{ h_1^8 + h_1^6 \left[-1 + 10v - 9v^2 + h_2^2 (3 - 4v + v^2) + 2h_3^2 (3 - 8v + 3v^2) \right] + \right. \\ \left. + h_3^2 \left[h_2^6 (v-1)^4 + \left\{ h_3^2 - 16(v-1)^2 \right\} v^4 (-4 + h_3^2 + 4v)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + h_2^4 (v-1)^2 v \left\{ -8(v-1)^2 (2v+1) + h_3^2 (3v-2) \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + h_2^2 (v-1)v^2 \left\{ h_3^4 (3v-1) + 16(v-1)^3 (1+8v) + h_3^2 (17-49v+64v^2-32v^3) \right\} \right] + \right. \\ \left. + h_1^2 \left[h_2^6 (v-1)^4 + h_2^4 (v-1)^2 \left\{ -(v-1)^2 (1+8v) + 2h_3^2 (4-9v+4v^2) \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + h_2^2 (v-1)v \left\{ 8(v-1)^3 (1+2v) + h_3^4 (14-33v+13v^2) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + h_3^2 (-4+38v-98v^2+64v^3) \right\} + 2v^2 \left\{ -8(v-1)^4 + h_3^6 (3-8v+3v^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + 4h_3^2 (v-1)^2 (7-63v+52v^2) + h_3^4 (-23+134v-187v^2+76v^3) \right\} \right] - \\ \left. - h_1^4 \left[h_2^4 (v-1)^2 (2v-3) + h_2^2 (v-1) \left\{ 4v-19v^2-2+17v^3 + h_3^2 (13-33v+14v^2) \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + v \left\{ h_3^4 (16-37v+16v^2) - 8(v-1)^2 (3v-1) + h_3^2 (209v-298v^2+121v^3-32) \right\} \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
p_5 = & 2h_1h_3v \left\{ -2h_2^6(v-1)^5 + 2h_1^6(v^2 - v + 1) - h_2^4(v-1)^2 v \left[(v-1)^2(11+4v) + \right. \right. \\
& \left. \left. + h_3^2(5-10v+6v^2) \right] \right\} - \\
& -2v^3 \left[40(v-1)^4(4v-1) + h_3^6(v^2 - v + 1) + 2h_3^2(v-1)^2(27-79v+56v^2) + \right. \\
& \left. + h_3^4(-15+46v-53v^2+22v^3) \right] - \\
& -h_2^2(v-1)v^2 \left[-8(v-1)^3(16v-1) + h_3^2(-33+131v-146v^2+48v^3) \right] - \\
& -h_2^2(v-1)v^2h_3^4(6v^2-8v+5) + \\
& +h_1^4 \left[h_2^2(6-14v+13v^2-5v^3) + v \left\{ 14-61v+92v^2-45v^3 - 2h_3^2(6-7v+6v^2) \right\} \right] + \\
& +h_1^2 \left[h_2^4(v-1)^2(6-10v+5v^2) + \right. \\
& \left. + h_2^2(v-1)v \left\{ -3+41v-56v^2+18v^3 + h_3^2(17-26v+17v^2) \right\} \right] + \\
& +2v^2h_3^4(6v^2-7v+6) + \\
& \left. +2v^2 \left\{ 2(v-1)^2(57v^2-64v+11) + h_3^2(67v^3-155v^2+125v-37) \right\} \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_6 = & - \left\{ h_2^8(v-1)^6 - 2h_2^6 \left[h_3^2(1-2v) + 8(v-1)^2 \right] v(v-1)^4 + h_1^8(v^2+1) - \right. \\
& -2h_2^2(v-1)v^2 \left[-84h_3^2(v-1)^2 + 128(v-1)^5 + 17h_3^4(v-1)v + h_3^6(-1+v-2v^2) \right] + \\
& +v^4(-4+h_3^2+4v)^2 \left[-17h_3^2(v-1)^2 + 16(v-1)^4 + h_3^4(1+v^2) \right] + \\
& +h_2^4(v-1)^2v^2 \left[96(v-1)^4 - 3h_3^2(v-1)^2(3+8v) + h_3^4(2-6v+6v^2) \right] + \\
& +h_1^6 \left[-2h_2^2(-2+3v-2v^2+v^3) + v \left\{ 8-25v+42v^2-25v^3 - 4h_3^2(4-3v+4v^2) \right\} \right] + \\
& -h_1^2 \left[2h_2^6(v-2)(v-1)^4 + h_2^4(v-1)^2v \left\{ 3(v-1)^2(8+3v) + h_3^2(20-34v+20v^2) \right\} \right] - \\
& +h_2^2(v-1)v^2 \left\{ h_3^4(30-40v+34v^2) - 168(v-1)^3v + 17h_3^2(-7+27v-27v^2+7v^3) \right\} \\
& +2v^3 \left\{ 8(v-1)^4(25v-8) + h_3^6(8-6v+8v^2) + 4h_3^2(v-1)^2(67-122v+67v^2) + \right. \\
& \left. + h_3^4(-104+247v-230v^2+87v^3) \right\} \Big] + \\
& +2h_1^4 \left[h_2^4(v-1)^2(3-3v+v^2) + h_2^2(v-1)v \left\{ -17v(v-1) + h_3^2(17-20v+15v^2) \right\} \right] + \\
& +v^22h_3^4(9-8v+9v^2) + \\
& \left. +v^2 \left\{ 4(v-1)^2(4-21v+21v^2) + h_3^2(-87+230v-247v^2+104v^3) \right\} \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_7 = & -2h_1h_3 \left\{ -2h_2^6(v-1)^5 + 2h_1^6(v^2 - v + 1) - \right. \\
& -h_2^4(v-1)^2 v \left[-(v-1)^2(4+11v) + h_3^2(5-10v+6v^2) \right] - \\
& -h_2^2(v-1)v^2 h_3^4(5-8v+6v^2) - \\
& -h_2^2(v-1)v^2 \left[-8(v-16)(v-1)^3 + h_3^2(-18+56v-41v^2+3v^3) \right] - \\
& -v^3 \left[80(v-4)(v-1)^4 + 2h_3^6(v^2 - v + 1) + 4h_3^2(v-1)^2(57-64v+11v^2) + \right. \\
& \left. + h_3^4(-45+92v-61v^2+14v^3) \right] + \\
& + h_1^4 \left[h_2^2(6-14v+13v^2-5v^3) - 2v \{ 53v-46v^2+15v^3-22 + h_3^2(6-7v+6v^2) \} \right] + \\
& + h_1^2 h_2^4(v-1)^2(6-10v+5v^2) + \\
& + h_1^2 \left[h_2^2(v-1)v \{ -48+146v-131v^2+33v^3 + h_3^2(17-26v+17v^2) \} + \right. \\
& + 2v^2 h_3^4(6-7v+6v^2) + \\
& \left. + 2v^2 \{ 2(v-1)^2(56-79v+27v^2) + h_3^2(-67+155v-125v^2+37v^3) \} \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_8 = & - \left\{ h_1^8 + h_1^6 \left[h_2^2(3-4v+v^2) + 2 \{ h_3^2(3-8v+3v^2) - 4(2-5v+3v^2) \} \right] + \right. \\
& + h_3^2 \left[h_2^6(v-1)^4 + v^4 \{ h_3^2 - (v-1)^2 \} (-4+h_3^2+4v)^2 - \right. \\
& - h_2^4(v-1)^2 v \{ h_3^2(2-3v) + (v-1)^2(8+v) \} + \\
& \left. + h_2^2(v-1)v^2 \{ 8(v-1)^3(2+v) + h_3^4(3v-1) + h_3^2(17-19v+4v^2-2v^3) \} \right] - \\
& - h_1^4 \left[h_2^2(v-1) \{ -32+64v-49v^2+17v^3 + h_3^2(13-33v+14v^2) \} + \right. \\
& + h_2^4(v-1)^2(2v-3) + \\
& \left. + v \{ h_3^4(16-37v+16v^2) - 16(v-1)^2(9v-8) + 2h_3^2(187v-134v^2+23v^3-76) \} \right] + \\
& + h_1^2 \left[h_2^6(v-1)^4 + 2h_2^4(v-1)^2 \{ h_3^2(4-9v+4v^2) - 4(2-3v+v^3) \} + \right. \\
& + h_2^2(v-1)v h_3^4(14-33v+13v^2) + \\
& + h_2^2(v-1)v \{ 16(v-1)^3(8+v) + h_3^2(-64+98v-38v^2+4v^3) \} + \\
& + v^2 \{ -256(v-1)^4 + 2h_3^6(3-8v+3v^2) + 8h_3^2(v-1)^2(52-63v+7v^2) + \\
& \left. + h_3^4(-121+298v-209v^2+32v^3) \} \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_9 = & -2h_1h_3 \left\{ 2h_1^6 + h_3^2 \left[-h_2^4(\nu-1)^2(2\nu-1) + \right. \right. \\
& + h_2^2(\nu-1)\nu \left\{ -16 + h_3^2(1-4\nu) + 16\nu - \nu^2 + \nu^3 \right\} + \\
& + \nu^3 \left\{ -2h_3^4 + 4(\nu-5)(\nu-1)^2 + h_3^2(13-14\nu + \nu^2) \right\} \left. \right] + \\
& + h_1^4 \left[h_2^2(4-5\nu + \nu^2) + 2 \left\{ -8 + 22\nu - 14\nu^2 + h_3^2(1-6\nu + \nu^2) \right\} \right] - \\
& - h_1^2 \left[h_2^2(\nu-1) \left\{ -16 + 16\nu - \nu^2 + \nu^3 + h_3^2(3-13\nu + 3\nu^2) \right\} - \right. \\
& - h_1^2 h_2^4(\nu-2)(\nu-1)^2 + 2\nu h_3^4(1-6\nu + \nu^2) + \\
& \left. + 2\nu \left\{ -8(\nu-1)^2(5\nu-4) + h_3^2(-18 + 53\nu - 38\nu^2 + 3\nu^3) \right\} \right] \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{10} = & -h_1^2 h_3^2 \left\{ 6h_1^4 + h_2^4(\nu-1)^2 - h_2^2(\nu-1) \left[(\nu^3 - \nu^2 + 16\nu - 16) + h_3^2(1-7\nu) \right] + \right. \\
& + \nu^2 \left[6h_3^4 + 16(\nu-1)^2 - h_3^2(\nu^2 - 26\nu + 25) \right] + \\
& \left. + h_1^2 \left[h_3^2(\nu^2 - 16\nu + 1) + h_2^2(\nu^2 - 8\nu + 7) - 8(5\nu^2 - 7\nu + 2) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$p_{11} = -2h_1^3 h_3^3 \left\{ 2h_1^2 - h_2^2(\nu-1) - 2\nu(h_3^2 + 2\nu - 2) \right\},$$

$$p_{12} = -h_1^4 h_3^4.$$

Уравнение (1.3.20) совместно с системами (1.3.14) – (1.3.18) позволяют определить все положения равновесия спутника-гиростата при заданных значениях параметров системы. Уравнение 12-го порядка относительно переменной $\operatorname{tg} \varphi = a_{31}/a_{32}$ было первоначально получено из системы (1.3.15) в [157, 160, 180], коэффициенты которого имели более громоздкий вид по сравнению с коэффициентами уравнения (1.3.20).

Покажем теперь, что спутник-гиростат на круговой орбите под действием гравитационного момента в общем случае ($h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0, A \neq B \neq C$) может иметь не более 24 положений равновесия. Число действительных корней алгебраического уравнения (1.3.20) четно и не превышает 12. По определению результанта каждому корню x_1 уравнения (1.3.20) соответствует общий корень y_1 системы (1.3.18). Подставляя значение действительного корня x_1 уравнения (1.3.20) в уравнения системы (1.3.18), найдем совпадающий корень y_1 этих уравнений. Для каждого решения (x_1, y_1) из уравнения (1.3.17) можно определить два значения a_{33} , а затем и соответствующие им величины $a_{31} = x_1 a_{33}$ и $a_{32} = y_1 a_{33}$. Таким образом, каждому действительному корню алгебраического уравнения (1.3.20) соответствуют два набора значений a_{31}, a_{32}, a_{33} , которые, в силу (1.3.14), однозначно определяют остальные направляющие косинусы $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$. Из приведенного доказательства следует, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного момента в общем случае ($h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0, A \neq B \neq C$) может иметь не более 24 положений равновесия.

1.4. Метод исследования положений равновесия

Для исследования положений равновесия спутника-гиростата ставится задача определения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (1.3.20). Уравнения

(1.3.20), (1.3.14)–(1.3.18) позволяют определить все положения равновесия спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента при заданных значениях безразмерных параметров задачи ν , h_1 , h_2 , h_3 .

Разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней уравнения определяется дискриминантной гиперповерхностью [137], которая задается дискриминантом многочлена (1.3.20). В символьном виде исследовать систему алгебраических уравнений, которая определяет множество особых точек дискриминантной гиперповерхности, в силу громоздкости выражений коэффициентов многочлена (1.3.20) не представляется возможным.

Зависимость числа действительных решений уравнения (1.3.20) от значений параметров исследовалась численно [165, 166, 181] с использованием пакета факторизации системы символьных вычислений *Mathematica* 8.0 [39]. Не нарушая общности, численные исследования проводились при выполнении условий $B > A > C$ ($0 < \nu < 1$). Проекция вектора гиростатического момента h_1, h_2, h_3 могут принимать любые ненулевые значения.

Можно показать [166], что для предельных случаев $\nu = 0$ и $\nu = 1$ (случаи осесимметричного спутника-гиростата) границы между областями с постоянным числом положений равновесия определяются аналитически.

Для осесимметричного случая спутника-гиростата $\nu = 0$ ($A = B$) система уравнений (1.3.13) упрощается и в результате можно получить уравнения двух окружностей в плоскости (h_1, h_2)

$$\begin{aligned} h_1^2 + h_2^2 &= (4^{2/3} - h_3^{2/3})^3, \\ h_1^2 + h_2^2 &= (1 - h_3^{2/3})^3, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

которые определяют границы областей с постоянным числом положений равновесия спутника-гиростата (рис.1.2) ($\nu = 0, h_3 = 0.01$).

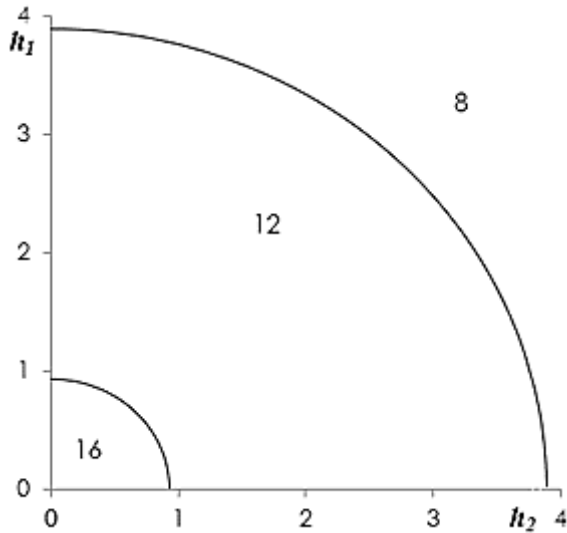


Рис. 1.2

Для осесимметричного случая $\nu = 1$ ($A = C$) система уравнений (1.3.13) также упрощается и тогда можно аналитически получить уравнения двух астроида в плоскости (h_1, h_2)

$$\begin{aligned} h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} &= 4^{2/3}, \\ h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} &= 1, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

определяющих области с постоянным числом положений равновесия (рис.1.3) ($\nu = 1.0, h_3 = 0.01$).

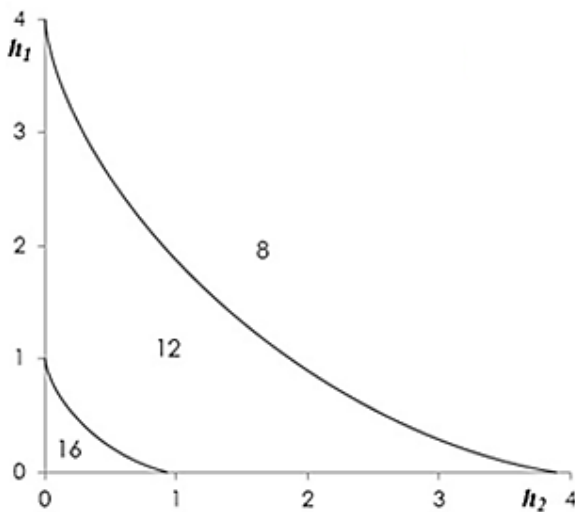


Рис. 1.3

Как показано в [164, 166], в случае осесимметричного спутника-гиростата существуют лишь 16, 12 и 8 положений равновесия, которым в пространстве параметров соответствуют 3 области с равным числом положений равновесия. Подробно осесимметричный случай спутника-гиростата рассмотрен в разделе 1.10.

Коэффициенты уравнения (1.3.20) зависят от 4 безразмерных параметров ν , h_1 , h_2 , h_3 , а в уравнения исходной системы (1.3.1) входят 6 параметров. При численном исследовании задачи уменьшение числа параметров имеет существенное значение.

Рассмотрим теперь более подробно свойства алгебраического уравнения (1.3.20). Из вида коэффициентов уравнения (1.3.20) следует, что число действительных корней не зависит от знаков параметров h_1 , h_2 , h_3 . Действительно, в выражения для коэффициентов уравнения (1.3.20) при четных степенях $x - p_{2k}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) параметры h_1 , h_2 , h_3 входят только в четной степени, а коэффициенты при нечетных степенях $x - p_{2k+1} = h_1 h_3 P_{2k+1}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) представляют собой произведение множителя $h_1 h_3$ на множитель, P_{2k+1} зависящий только от четных степеней h_1 , h_2 , h_3 . Следовательно, при изменении знаков параметров h_1 , h_2 , h_3 может измениться лишь знак произведения $h_1 h_3$ и, тем самым, знак действительных корней уравнения (1.3.20). Абсолютное значение и число действительных корней остается при этом неизменным.

Численный анализ числа действительных корней уравнения (1.3.20) проводился при положительных значениях h_1 , h_2 , h_3 и при условии $0 < \nu < 1$. Таким образом, размер области для численных расчетов можно было уменьшить в четыре раза. Вычисления проводились в узлах равномерной сетки на плоскости (h_1, h_2) при фиксированных значениях ν и h_3 . Численно определялись граничные точки, в которых происходит смена числа действительных корней. Фактически вычислялся двумерный срез

дискриминантной гиперповерхности, который задается неявно алгебраическим уравнением от двух параметров $g(h_1, h_2) = 0$. Экспериментальным путем было определено, что для получения гладких граничных кривых требуются вычисления с шагом сетки 0.0001. Вычисления с такой точностью становятся очень трудоемкими. Действительно, для размера области 4x4 на плоскости (h_1, h_2) требуется вычисление корней в 10^9 узлах. Поэтому вычисления проводилось в два этапа. На первом этапе проводилось вычисление количества действительных корней уравнения (1.3.20) в 10^7 узлах с шагом 0.001. На втором этапе число действительных корней вычислялось в окрестностях приближенно вычисленной границы между областями с постоянным числом действительных корней в узлах сетки с шагом 0.0001. Далее, при фиксированных значениях h_2 величина граничных точек h_1 определялась с заданной точностью методом деления отрезка вычисления пополам, реализованном на языке программирования системы *Mathematica* в виде пакета. Численные методы решений уравнений, реализованные в системе *Mathematica*, позволяют находить их корни с заданным значением точности. Это преимущество системы *Mathematica* позволило вычислять корни алгебраического уравнения при очень малых величинах коэффициентов, не превосходящих 10^{-48} , когда значения параметров h_1 и h_2 принимались равными 10^{-6} .

С учетом того, что уравнение (1.3.20) было получено при условии $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$, в окрестности нулевых значений параметров h_1, h_2, h_3 вычисления проводились с повышенной точностью с шагом равным 0.000001.

1.5. Анализ эволюции условий существования положений равновесия

Вычисления областей с одинаковым числом равновесий проводились при значениях $\nu=0.01$, $\nu=0.1$, $\nu=0.2$, $\nu=0.3$, $\nu=0.4$, $\nu=0.5$, $\nu=0.6$, $\nu=0.7$, $\nu=0.8$, $\nu=0.9$ и $\nu=0.99$ [181].

На рис. 1.4 – 1.22 представлены результаты вычислений эволюции границ между областями с равным числом действительных корней на плоскости (h_1, h_2) для значений $\nu=0.01$ (значение близкое к осесимметричному случаю), $\nu=0.2$, $\nu=0.5$, $\nu=0.8$, $\nu=0.99$ (значение близкое к осесимметричному случаю). Из уравнений (1.4.1) и (1.4.2), (рис.1.2, 1.3) следует, что для осесимметричного случая $\nu=0$ ($A=B$) границы между областями с постоянным числом действительных корней задаются уравнениями окружностей, а для осесимметричного случая $\nu=1$ ($A=C$) границы между областями с равным числом действительных корней задаются уравнениями астроида. На рис.1.4 представлены результаты вычисления границ областей с равным числом положений равновесия для значений параметров $\nu=0.2$ и $h_3=0.25$ для всех квадрантов плоскости, где существуют 24, 16, 12 и 8 положений равновесия. На рис. 1.5 – 1.20 представлены результаты вычислений только в первом квадранте для положительных значений h_1, h_2 .

Из анализа численных результатов следует, что при увеличении величины параметра h_3 области с постоянным числом действительных корней становятся меньше, пока не исчезают совсем. Точки в пространстве параметров, начиная с которых не существуют области с определенным числом действительных корней, будем называть бифуркационными точками. Результаты вычислений бифуркационных значений параметров представлены в Таблице 1.1

Из таблицы 1.1 следует, что бифуркационное значение параметра h_3 , при котором исчезают области, где существуют 24 равновесных решения (12 действительных корней), изменяется в соответствии с соотношением $h_3 = 1 - \nu$. Для областей с числом равновесий, равным 20 (10 действительных корней) бифуркационное значение параметра h_3 увеличивается при возрастании значений параметра ν до величины $\nu = 0.6$, и уменьшается при дальнейшем возрастании ν . Для областей с числом равновесий, равным 16 (8 действительных корней) бифуркационное значение параметра h_3 уменьшается при возрастании значений параметра ν . Области с числом равновесий, равным 12, уменьшаются при возрастании величины параметра h_3 . Центральная часть этих областей исчезает в окрестности начала координат при $h_3 = 4$. При значениях $h_3 \geq 4$ существуют маленькие области с числом равновесий, равным 12, и расположены они вблизи оси Oh_2 с характерными размерами вдоль осей h_1 и h_2 , не превосходящими величину 0.1. При возрастании величины h_3 эти области уменьшаются и смещаются вправо вдоль оси h_2 .

Рисунки 1.4–1.22 были получены при бифуркационных значениях h_3 , указанных в таблице 1.1, и значениях h_3 , равным средним величинам двух соседних бифуркационных точек.

Для первого значения инерционного параметра из таблицы 1.1 $\nu = 0.01$ в окрестности осесимметричного случая $\nu = 0$ проводились вычисления границ областей при следующих значениях h_3 : $h_3 = 0.01$ (в окрестности нуля, рис. 1.5), $h_3 = 0.495$ (средняя точка, рис. 1.6) и $h_3 = 0.99$ (бифуркационная точка, где исчезает область с числом равновесий, равным 24, рис. 1.7). Эти рисунки очень схожи с соответствующими рисунками для случая $\nu = 0$, формы кривых на которых задаются уравнениями (1.4.1). В случае осесимметричного спутника-гиростата число положений равновесия изменяется с ростом величины гиростатического момента от 16 до 8

(рис.1.2). В данном случае существуют только два бифуркационных значения параметра h_3 : $h_3 = 1$ и $h_3 = 4$.

Для значения инерционного параметра $\nu = 0.99$, близкого к осесимметричному случаю $\nu = 1$, были вычислены области с равным числом равновесий для следующих значений h_3 : $h_3 = 0.005$ (в окрестности нуля), $h_3 = 0.01$ (бифуркационная точка, где исчезает область с числом равновесий, равным 24, рис. 1.8) $h_3 = 0.5$ (средняя точка) и $h_3 = 1.0$ (бифуркационная точка, где исчезает область с числом равновесий, равным 16, рис. 1.9). Эти рисунки очень схожи с соответствующими рисунками для случая $\nu = 1$, формы кривых на которых задаются уравнениями (1.4.2) (рис.1.3). В данном случае также как и для случая $\nu = 0$, существуют только два бифуркационных значения параметра h_3 : $h_3 = 1$ и $h_3 = 4$.

В интервале $0.1 \leq \nu \leq 0.9$ был проведен численный анализ эволюции областей с постоянным числом равновесий, равным 24, 20, 16, 12 и 8. Шаг вычислений при изменении параметра ν принимался равным 0.1. (см. рис.1.4–1.22).

Рассмотрим подробнее характер изменения областей с числом равновесий, равным 24, 20, 16, 12 и 8 на примере, когда $\nu = 0.2$ (рис. 1.10 – 1.14). Анализ численных результатов показывает, что при $\nu = 0.2$ области с числом равновесий, равным 24, 20, 16, 12 и 8, существуют в плоскости (h_1, h_2) при $h_3 < 0.8$ (рис. 1.10, 1.11). На рис.1.10. ($\nu = 0.2, h_3 = 0.01$) область с числом равновесий, равным 24, находится в окрестности начала координат. Эта область отделяется от области с числом равновесий, равным 20, кривой, очень близкой к астроиде. Далее идут области с числом равновесий, равным 16 и 12. За границами области с числом равновесий, равным 12, существует только 8 положений равновесия. На рис.1.11. ($\nu = 0.2, h_3 = 0.4$) размеры областей с числом равновесий, равным 24, 20, 16, 12, становятся меньше чем соответствующие области на рис.1.10. При бифуркационном значении $h_3 = 0.8$ область с числом равновесий, равным

24, исчезает (рис. 1.12). На рис. 1.12. ($\nu=0.2$, $h_3=0.8$) область с числом равновесий, равным 20, находится в окрестности начала координат.

В интервале $0.8 < h_3 < 1.048$ существуют только четыре типа областей с числом равновесий, равным 20, 16, 12 и 8. При бифуркационном значении $h_3 = 1.048$ исчезает область с числом равновесий, равным 20 (рис. 1.13). На рис.1.13. показаны области с числом равновесий, равным 16, 12 и 8. В интервале $1.048 < h_3 < 3.264$ существуют три типа областей с числом равновесий, равным 16, 12 и 8. При бифуркационном значении $h_3 = 3.264$ область с числом равновесий, равным 16, исчезает (рис. 1.14). В интервале $3.264 < h_3 < 4$ остаются только два типа областей с числом равновесий, равным 12 и 8.

На рис. 1.15 – 1.22 представлена эволюция областей с постоянным числом равновесий для значений инерционного параметра $\nu=0.5$ и $\nu=0.8$. На рис. 1.17 и рис.1.21 в окрестности начала координат находится область с числом равновесий, равным 16.

Когда значения параметра гиросtatического момента h_3 превышает 4, для спутника-гиростата существуют только 8 равновесных ориентаций, которые соответствуют 4 действительным корням уравнения (1.3.20). Этот результат соответствует физическим соображениям. При большой величине вектора гиросtatического момента равновесия спутника ограничиваются направлением и величиной данного момента.

Таблица 1.1

Бифуркационные значения

ν	(24/20)	(20/16)	(16/12)	(12/8)
0.01	$h_1=0.00001$ $h_2=0.00001$ $h_3=0.990$	$h_1=0.0065$ $h_2=0.0001$ $h_3=0.999$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0006$ $h_3=3.959$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$
0.1	$h_1=0.00001$ $h_2=0.00001$ $h_3=0.900$	$h_1=0.0740$ $h_2=0.0001$ $h_3=1.021$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0682$ $h_3=3.610$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$
0.2	$h_1=0.00001$ $h_2=0.00001$ $h_3=0.800$	$h_1=0.1400$ $h_2=0.0001$ $h_3=1.048$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.1809$ $h_3=3.264$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$
0.3	$h_1=0.00001$ $h_2=0.0001$ $h_3=0.700$	$h_1=0.197$ $h_2=0.0001$ $h_3=1.082$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.3154$ $h_3=2.950$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$
0.4	$h_1=0.00001$ $h_2=0.00001$ $h_3=0.600$	$h_1=0.231$ $h_2=0.0001$ $h_3=1.124$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.4603$ $h_3=2.669$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$
0.5	$h_1=0.00001$ $h_2=0.0001$ $h_3=0.500$	$h_1=0.224$ $h_2=0.0001$ $h_3=1.182$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.6132$ $h_3=2.412$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$
0.6	$h_1=0.00001$ $h_2=0.00001$ $h_3=0.400$	$h_1=0.1236$ $h_2=0.0001$ $h_3=1.186$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.7778$ $h_3=2.167$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$
0.7	$h_1=0.00001$ $h_2=0.00001$ $h_3=0.300$	$h_1=0.0144$ $h_2=0.0001$ $h_3=1.105$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.9675$ $h_3=1.915$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$
0.8	$h_1=0.00001$ $h_2=0.0001$ $h_3=0.200$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0155$ $h_3=0.909$	$h_1=0.0001$ $h_2=1.2107$ $h_3=1.629$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$
0.9	$h_1=0.00001$ $h_2=0.00001$ $h_3=0.100$	$h_1=0.0004$ $h_2=0.0989$ $h_3=0.676$	$h_1=0.0001$ $h_2=1.5915$ $h_3=1.245$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$
0.99	$h_1=0.00001$ $h_2=0.00001$ $h_3=0.010$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.2521$ $h_3=0.168$	$h_1=0.0030$ $h_2=0.0001$ $h_3=0.997$	$h_1=0.0001$ $h_2=0.0001$ $h_3=4.0$

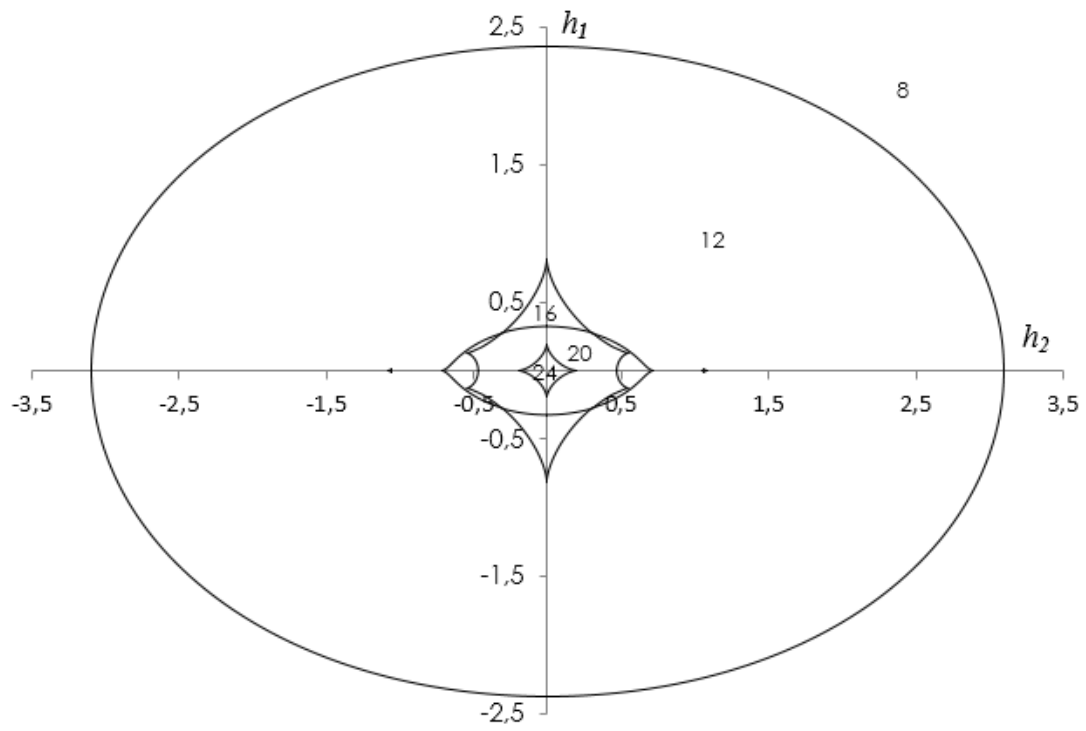


Рис. 1.4. $\nu=0.2$, $h_3 = 0.25$

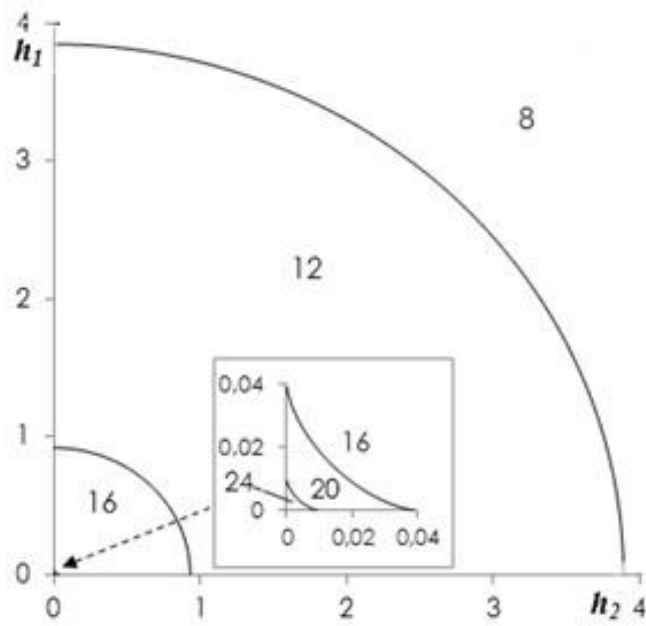
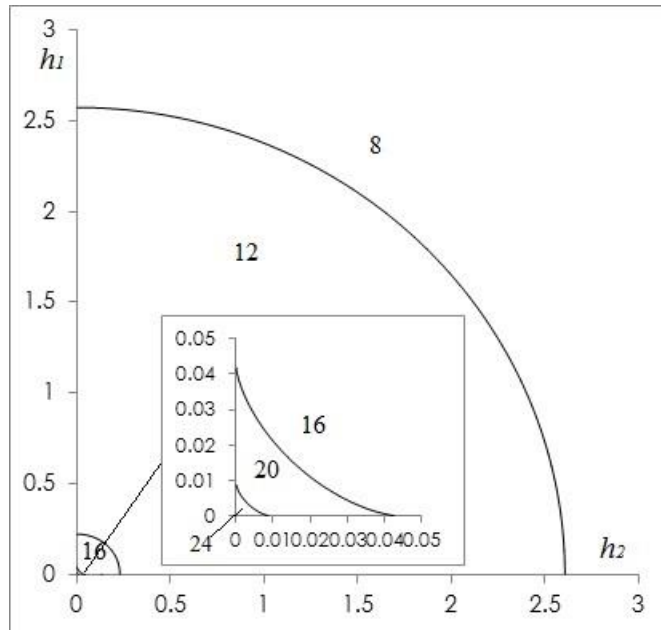
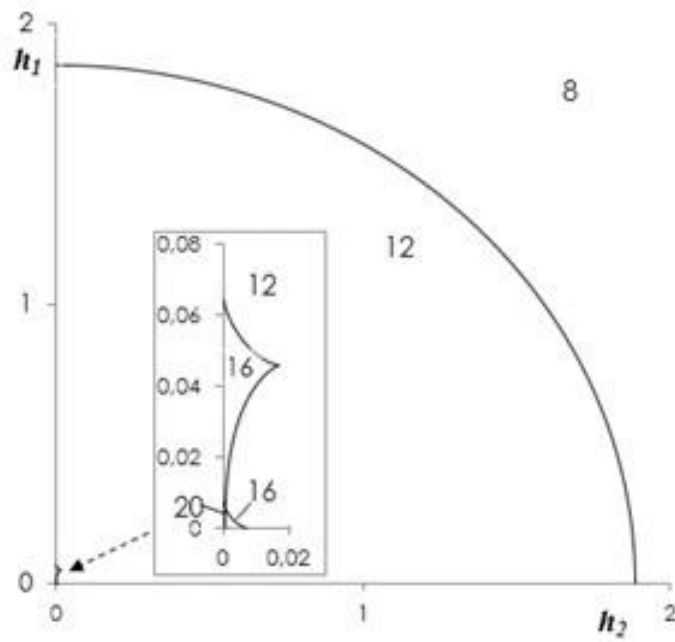


Рис.1.5. $\nu=0.01$, $h_3 = 0.01$

Рис. 1.6. $\nu=0.01$, $h_3 = 0.495$ Рис. 1.7. $\nu=0.01$, $h_3 = 0.99$

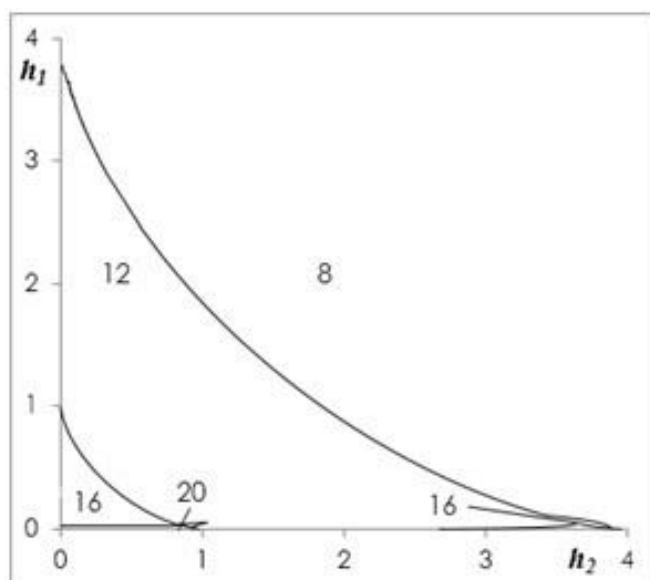


Рис. 1.8. $\nu=0.99$, $h_3 = 0.01$

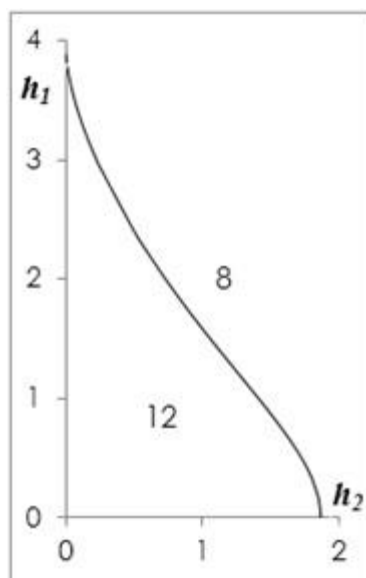
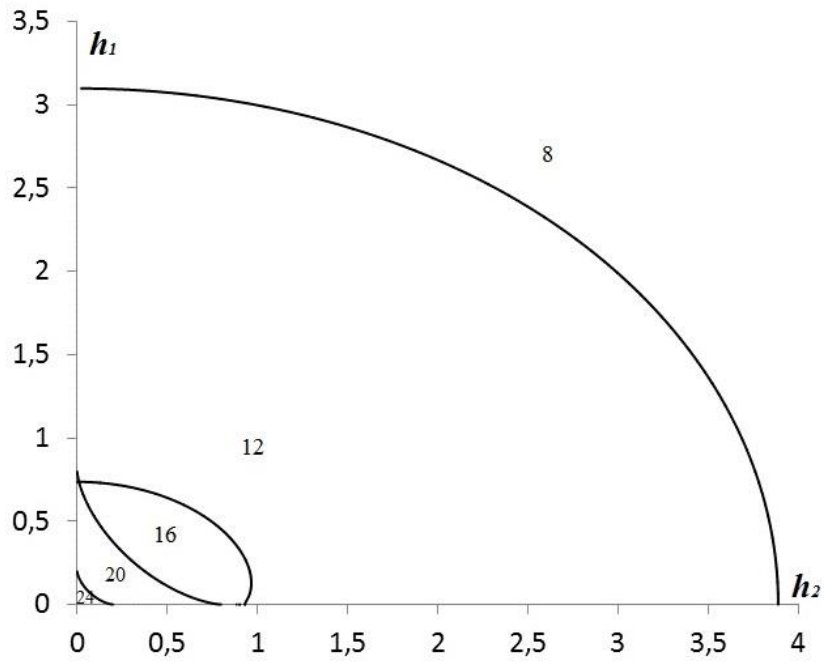
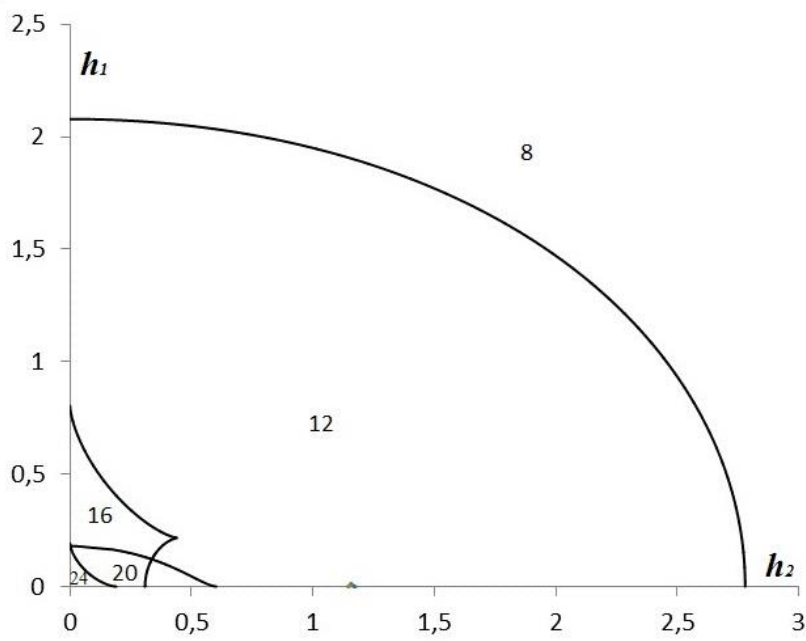
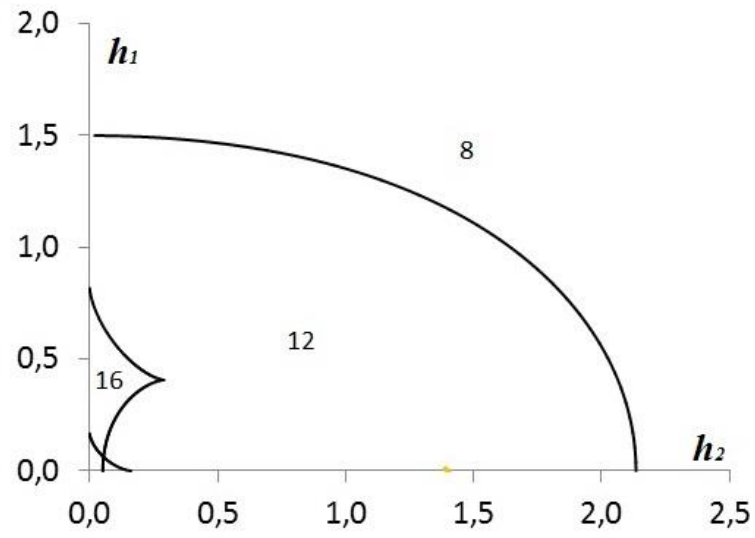
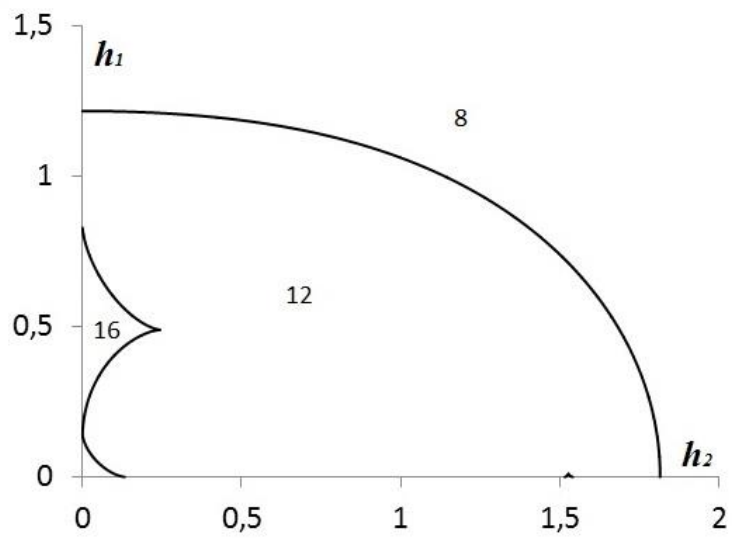
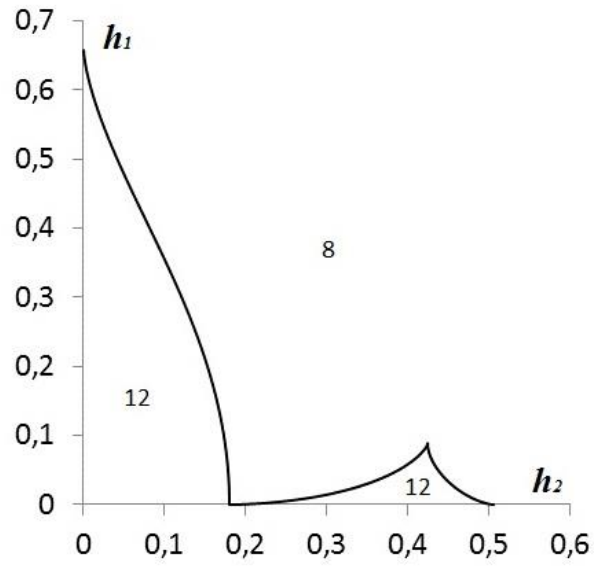
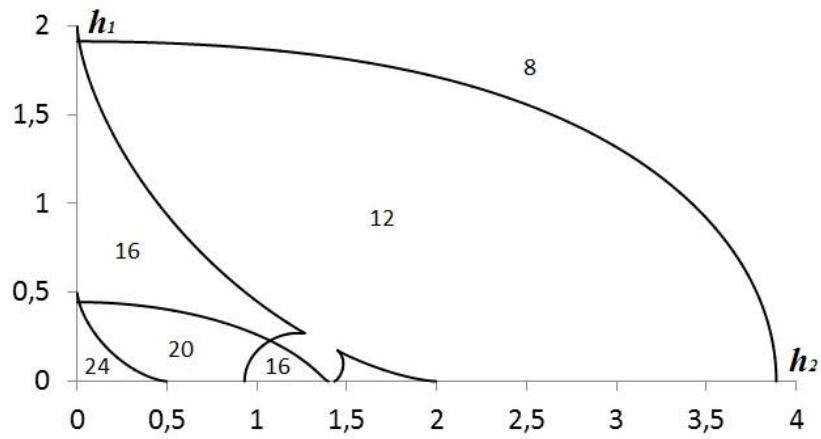
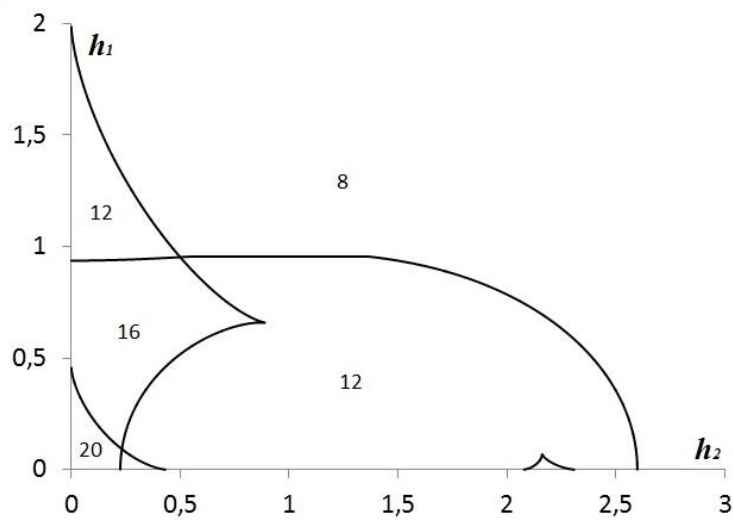


Рис. 1.9. $\nu=0.99$, $h_3 = 1.0$

Рис. 1.10. $\nu=0.2$, $h_3 = 0.01$ Рис. 1.11. $\nu=0.2$, $h_3 = 0.4$

Рис. 1.12. $\nu=0.2$, $h_3 = 0.8$ Рис. 1.13. $\nu=0.2$, $h_3 = 1.048$

Рис. 1.14. $\nu=0.2$, $h_3 = 3.264$ Рис. 1.15. $\nu=0.5$, $h_3 = 0.01$ Рис. 1.16. $\nu=0.5$, $h_3 = 0.5$

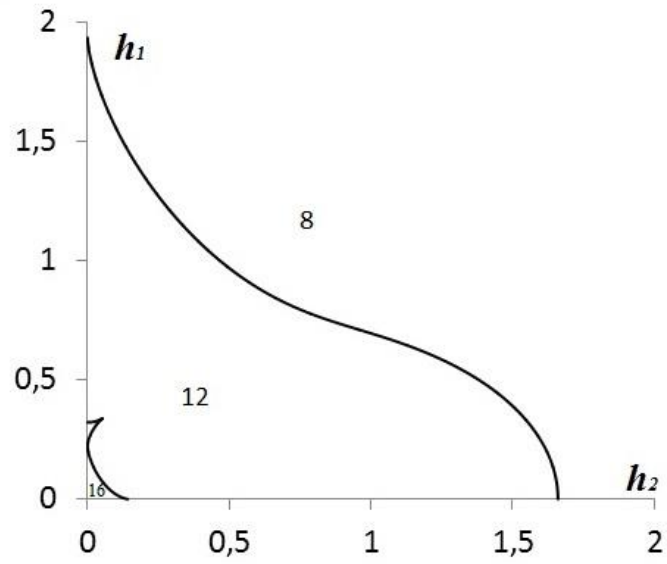


Рис. 1.17. $\nu=0.5$, $h_3 = 1.182$

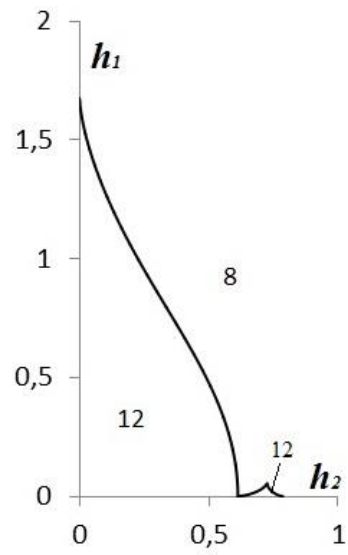
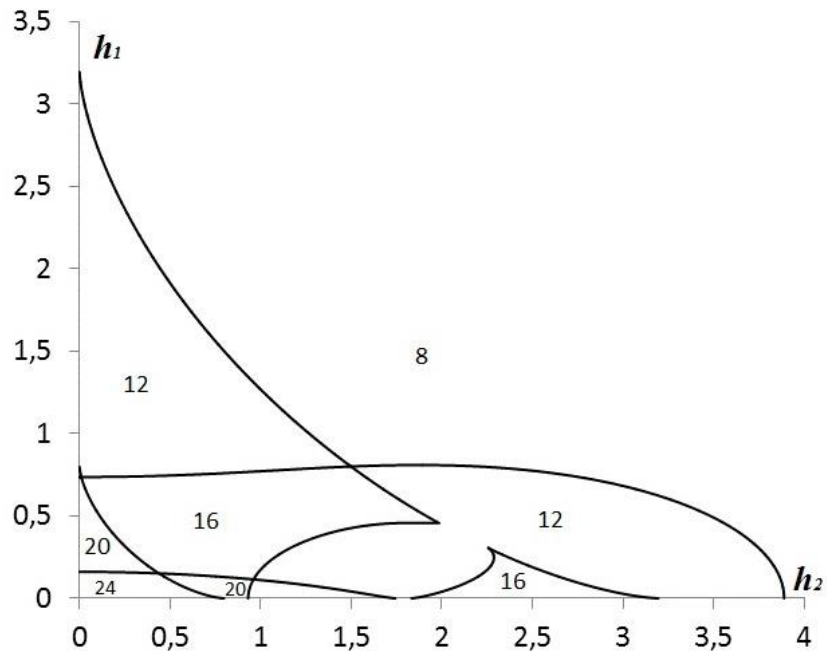
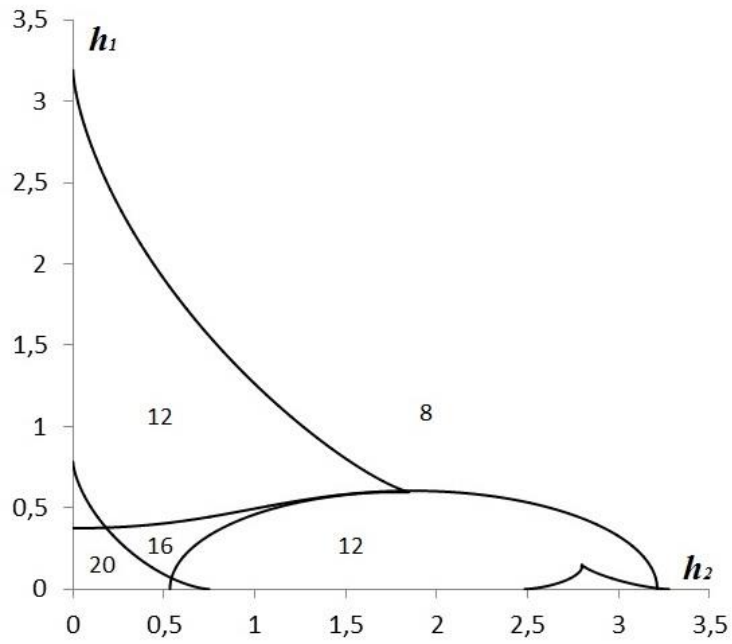


Рис. 1.18. $\nu=0.5$, $h_3 = 2.412$

Рис. 1.19. $\nu=0.8$, $h_3 = 0.01$ Рис. 1.20. $\nu=0.8$, $h_3 = 0.2$

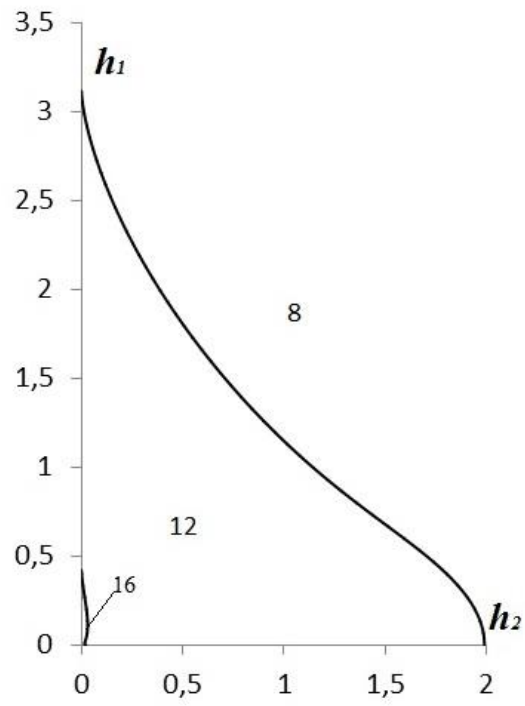


Рис. 1.21. $\nu=0.8$, $h_3 = 0.909$

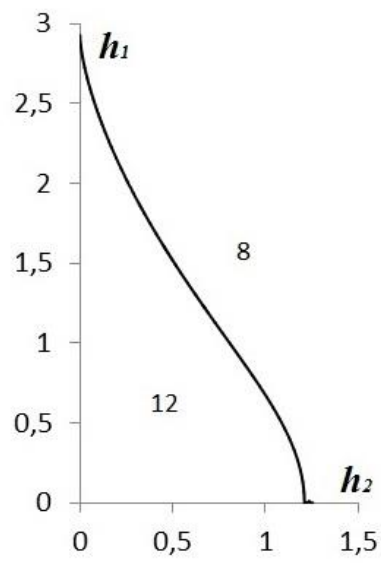


Рис. 1.22. $\nu=0.8$, $h_3 = 1.629$

1.6. Исследование достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника-гиростата

Уравнения (1.3.20) и (1.3.18) совместно с системой (1.3.14) позволяют определить все положения равновесия спутника-гиростата при заданных значениях инерционного параметра и компонентов вектора гиростатического момента.

Для исследования достаточных условий устойчивости полученных положений равновесия системы (1.3.13), (1.3.4) будем использовать обобщенный интеграл энергии (1.2.9) в качестве функции Ляпунова. Обобщенный интеграл энергии (1.2.9) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_0^2 \{3[(1 - \nu)a_{31}^2 + a_{32}^2] + \\ & + (\nu a_{21}^2 + a_{23}^2) - 2(h_1 a_{21} + h_2 a_{22} + h_3 a_{23})\} = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Представим углы ψ , \mathcal{G} , φ в виде

$$\psi = \psi_0 + \bar{\psi}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \bar{\mathcal{G}}, \quad \varphi = \varphi_0 + \bar{\varphi},$$

где $\bar{\psi}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\varphi}$ – малые отклонения от положения равновесия спутника $\psi = \psi_0 = \text{const}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = \text{const}$, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, удовлетворяющего системе уравнений (1.3.13). Тогда интеграл энергии (1.6.1) может быть представлен в виде [36, 37, 163, 166, 182]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_0^2 (A_{\psi\psi}\bar{\psi}^2 + A_{\mathcal{G}\mathcal{G}}\bar{\mathcal{G}}^2 + A_{\varphi\varphi}\bar{\varphi}^2 + \\ & + 2A_{\psi\mathcal{G}}\bar{\psi}\bar{\mathcal{G}} + 2A_{\psi\varphi}\bar{\psi}\bar{\varphi} + 2A_{\mathcal{G}\varphi}\bar{\mathcal{G}}\bar{\varphi}) + \Sigma = \text{const}, \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

где символ Σ обозначает члены выше второго порядка малости относительно $\bar{\psi}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\varphi}$ и

$$\begin{aligned}
A_{\psi\psi} &= \nu(a_{11}^2 - a_{21}^2) + (a_{13}^2 - a_{23}^2) + h_1 a_{21} + h_2 a_{22} + h_3 a_{23}, \\
A_{g_g} &= (3 + \cos^2 \psi_0)(1 - \nu \sin^2 \varphi_0) \cos 2\mathcal{G}_0 - \\
&\quad - \frac{1}{4} \nu \sin 2\psi_0 \cos \mathcal{G}_0 \sin 2\varphi_0 + (h_1 \sin \varphi_0 + h_2 \cos \varphi_0) \cos \psi_0 \cos \mathcal{G}_0 + h_3 a_{23}, \\
A_{\varphi\varphi} &= \nu[(a_{22}^2 - a_{21}^2) - 3(a_{32}^2 - a_{31}^2)] + h_1 a_{21} + h_2 a_{22}, \\
A_{\psi g} &= -\frac{1}{2} \sin 2\psi_0 \sin 2\mathcal{G}_0 + \nu(a_{11} a_{23} + a_{13} a_{21}) - \sin \psi_0 (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}), \\
A_{\psi\varphi} &= \nu(a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) - h_1 a_{12} + h_2 a_{11}, \\
A_{g\varphi} &= -\frac{3}{2} \nu \sin 2\mathcal{G}_0 \sin 2\varphi_0 + \nu(a_{21} \cos \varphi_0 + a_{22}) a_{23} - (h_1 \cos \varphi_0 - h_2 \sin \varphi_0) a_{23}.
\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Из теоремы Ляпунова следует, что положение равновесия устойчиво, если квадратичная форма

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_0^2(A_{\psi\psi}\bar{\psi}^2 + A_{g_g}\bar{g}^2 + A_{\varphi\varphi}\bar{\varphi}^2 + \\
&\quad + 2A_{\psi g}\bar{\psi}\bar{g} + 2A_{\psi\varphi}\bar{\psi}\bar{\varphi} + 2A_{g\varphi}\bar{g}\bar{\varphi})
\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

является определенно-положительной. Достаточные условия устойчивости запишем в виде следующих неравенств:

$$\begin{aligned}
A_{\psi\psi} &> 0, \\
A_{\psi\psi} A_{g_g} - (A_{\psi g})^2 &> 0, \\
A_{\psi\psi} A_{g_g} A_{\varphi\varphi} + 2A_{\psi g} A_{\psi\varphi} A_{g\varphi} - A_{\psi\psi} (A_{g\varphi})^2 - A_{g_g} (A_{\psi\varphi})^2 - A_{\varphi\varphi} (A_{\psi g})^2 &> 0.
\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Подставляя выражения $A_{\psi\psi}, A_{g_g}, A_{\varphi\varphi}, A_{\psi g}, A_{\psi\varphi}, A_{g\varphi}$ из (1.6.3) для соответствующего положения равновесия в (1.6.5), получим достаточные условия устойчивости для этого решения.

Для каждого набора значений параметров ν, h_1, h_2, h_3 с использованием численного пакета системы *Mathematica* определялся действительный корень x уравнения (1.3.20). Для наглядности представления положений равновесия спутника-гиростата результаты вычислений выразим через углы Эйлера. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{31}}{a_{32}} = \frac{x_1}{y_1} \text{ и } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{a_{31}}{a_{32}} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Угол \mathcal{G} ($0 \leq \mathcal{G} < \pi$) определяется соотношением $\cos \mathcal{G} = a_{33}$. Угол ψ ($0 \leq \psi < 2\pi$) также однозначно определяется с помощью соотношений (1.1)

$$\sin \psi = \frac{a_{13}}{\sin \mathcal{G}}; \quad \cos \psi = -\frac{a_{23}}{\sin \mathcal{G}}.$$

Таким образом, для каждого действительного корня (1.3.20) можно однозначно определить два набора углов ориентации ψ_0 , \mathcal{G}_0 , φ_0 , вычислить коэффициенты квадратичной формы (1.6.3) и проверить выполнение условий ее положительной определенности (1.6.5).

Так как $0 \leq \varphi < 2\pi$, то для каждого действительного корня $\operatorname{tg} \varphi = x_1/y_1$ существуют два значения угла φ (φ_1 и $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$). Из свойств коэффициентов квадратичной формы (1.6.3) следует, что достаточные условия устойчивости (1.6.5) для значений φ_1 и φ_2 одинаковы. Кроме того, можно показать, что условия (1.6.5) не зависят от знака параметров h_1, h_2, h_3 . Следовательно, численный анализ достаточных условий устойчивости равновесных решений уравнений (1.6.3) можно проводить лишь для положительных значений h_1, h_2, h_3 , одного значения угла φ (φ_1 или φ_2) и при выполнении условий $0 < \nu < 1$ (рис. 1.23).

На рисунках 1.24 – 1.33 показаны результаты вычислений зависимости угла φ от h_1 при фиксированных значениях ν , h_2 и h_3 ; пунктирной линией обозначены ветви положений равновесия, для которых выполняются достаточные условия устойчивости (1.6.5). В силу того, что достаточные условия устойчивости (1.6.5) для значений углов φ_1 и $\varphi_1 + \pi$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) одинаковы, численные результаты на рис.1.24–1.33 представлены для $0 \leq \varphi < \pi$.

Вычисления проводились при следующих значениях инерционного параметра: $\nu = 0.2$, $\nu = 0.6$, $\nu = 0.7$ и $\nu = 0.9$ (рис. 1.24–1.33). Из анализа результатов вычислений для указанных значений параметров следует, что для $h_3 < 1 - \nu$ и при малых значениях h_1, h_2 существуют 24 ветви положений

равновесия и для 4 ветвей из них условия устойчивости (1.6.5) выполняются (рис. 1.24). Существуют также 4 устойчивых положения равновесия для $\nu > 0.5$ и $h_3 \geq 1 - \nu$ (рис. 1.30, 1.32, 1.33).

При возрастании значений параметра h_1 происходит последовательное слияние ветвей положений равновесия в точках, соответствующих точкам пересечения прямой $h_2 = \text{const}$ с границами областей с равным числом положений равновесия. Например, на рис. 1.23 ($\nu = 0.2$, $h_3 = 0.4$) существуют 4 точки пересечения прямой линии $h_2 = 0.1$ с границами областей с равным числом положений равновесия $h_1 = 0.039$, $h_1 = 0.17$, $h_1 = 0.531$ и $h_1 = 2.077$; на рис. 1.24 ($\nu = 0.2$, $h_2 = 0.1$, $h_3 = 0.4$), в этих точках происходит слияние ветвей положений равновесия.

При значениях параметров h_1 , h_2 , h_3 гиростатического момента, равных или превосходящих 4, существуют только 8 положений равновесия (рис 1.29, 1.31) и лишь 2 из них являются устойчивыми. При больших значениях параметров h_1 , h_2 , h_3 равновесные значения угла φ приближаются к тривиальным решениям, при которых одна из осей орбитальной системы координат совпадает с одной из осей связанной со спутником системы координат. Характер устойчивости положений равновесия в зависимости от параметров задачи соответствует характеру устойчивости положений равновесия для осесимметричного случая [164], где было показано, что число положений равновесия спутника-гиростата, для которых выполняются достаточные условия устойчивости, также, как и в общем случае, изменяется от 4 до 2 при возрастании величины модуля гиростатического момента.

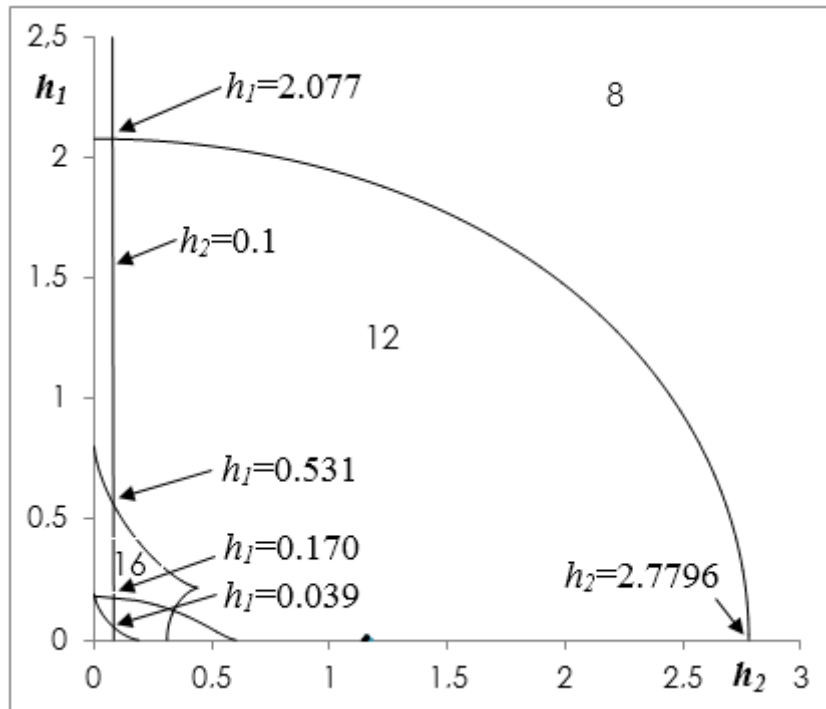


Рис. 1.23. $\nu=0.2$, $h_3 = 0.4$

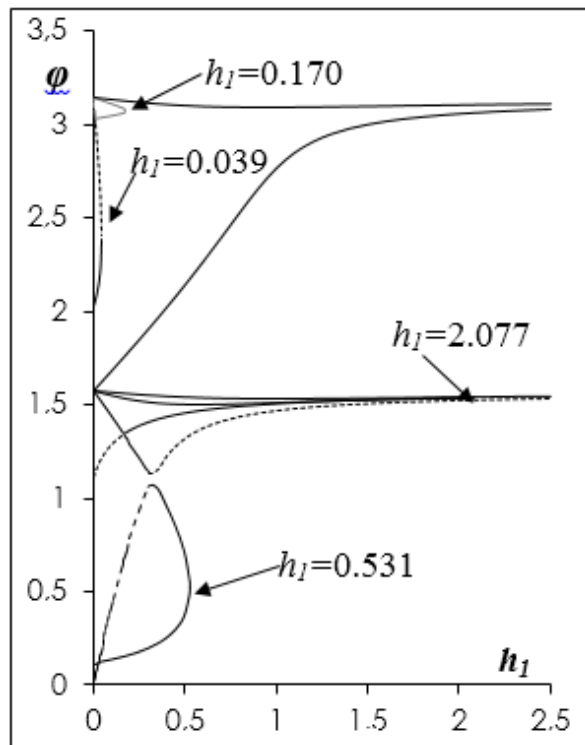


Рис. 1.24. $\nu=0.2$, $h_2 = 0.1$, $h_3 = 0.4$ (24 равновесия, 4 устойчивые)

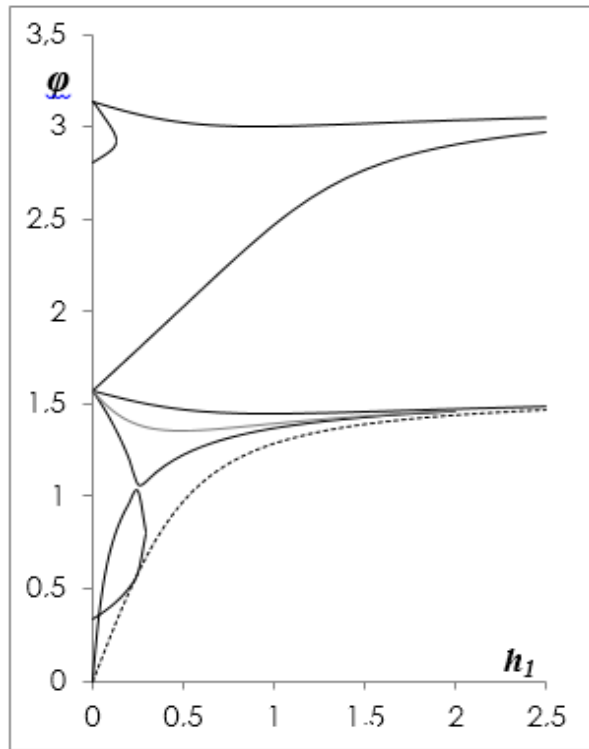


Рис. 1.25. $v=0.2$, $h_2 = 0.3$, $h_3 = 0.4$ (20 равновесий, 2 устойчивые)

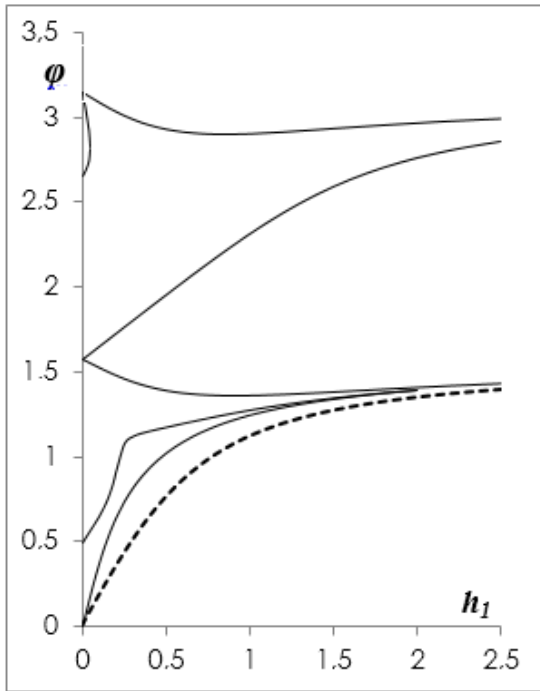


Рис. 1.26. $\nu=0.2$, $h_2=0.5$, $h_3=0.4$
(16 равновесий, 2 устойчивые)

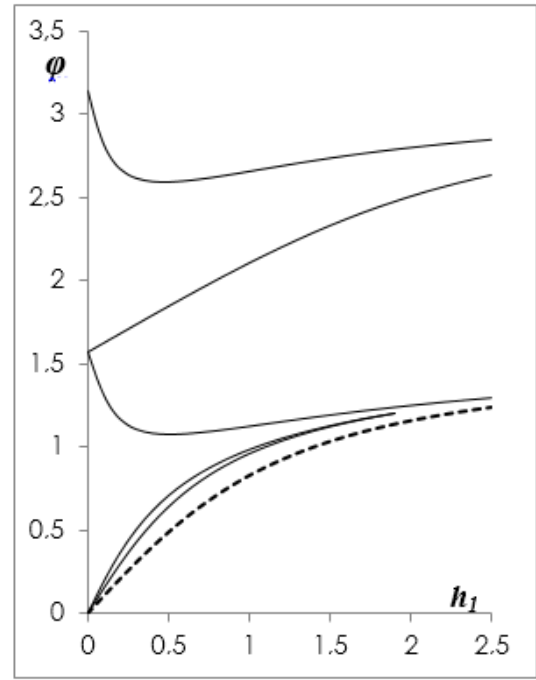


Рис. 1.27. $\nu=0.2$, $h_2=1.0$, $h_3=0.4$
(12 равновесий, 2 устойчивые)

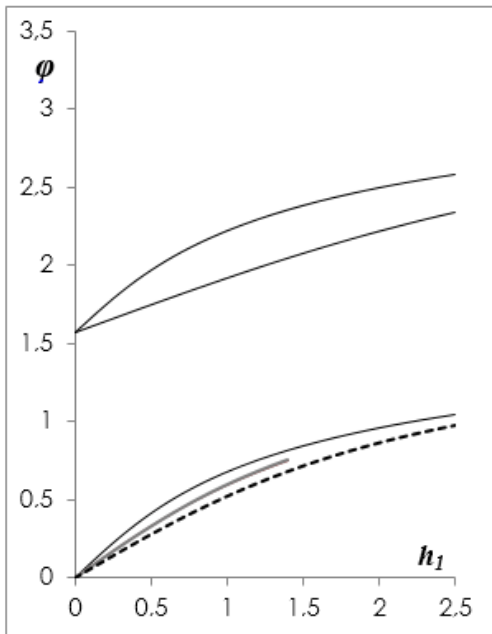


Рис. 1.28. $\nu=0.2$, $h_2=2.0$, $h_3=0.4$
(12 равновесий, 2 устойчивые)

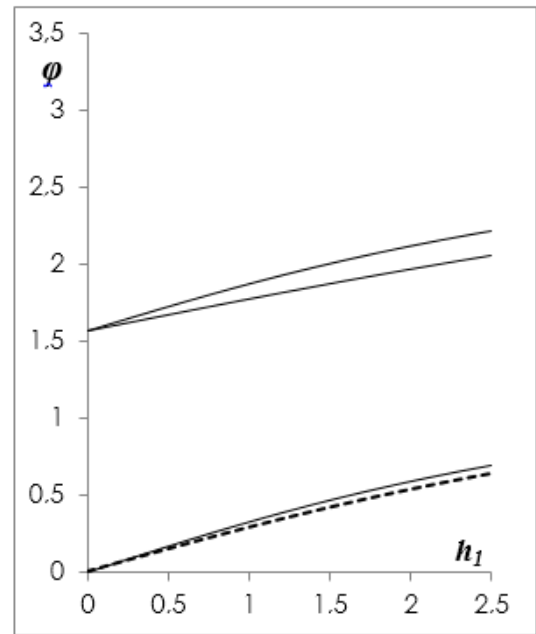


Рис. 1.29. $\nu=0.2$, $h_2=4.0$, $h_3=0.4$
(12 равновесий, 2 устойчивые)

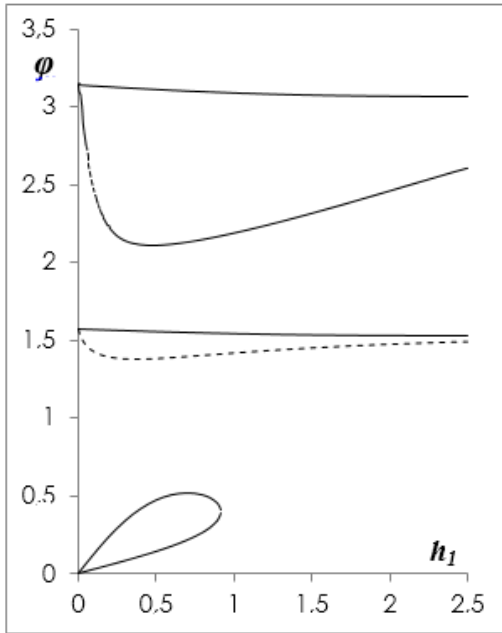


Рис. 1.30. $\nu=0.6$, $h_2=0.5$, $h_3=2.0$
(12 равновесий, 4 устойчивые)

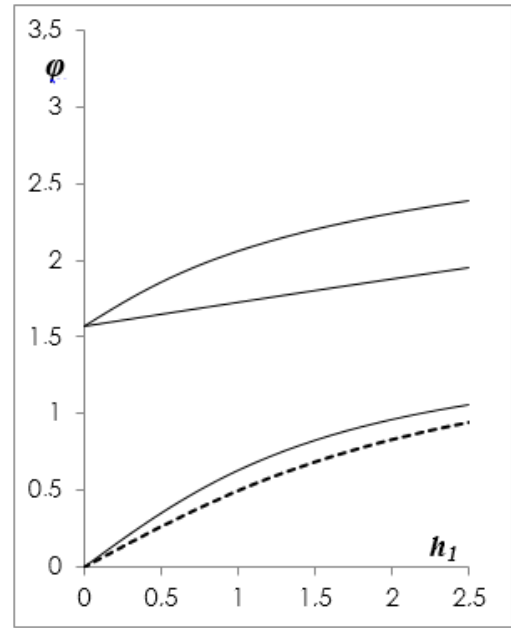


Рис. 1.31. $\nu=0.6$, $h_2=4.0$, $h_3=0.01$
(12 равновесий, 2 устойчивые)

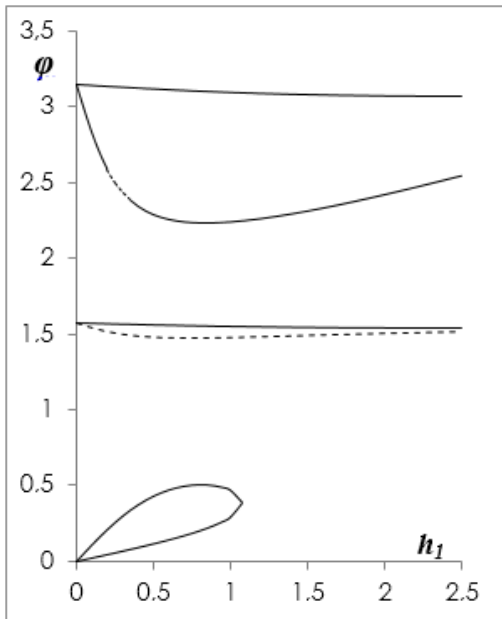


Рис. 1.32. $\nu=0.7$, $h_2=0.5$, $h_3=2.0$
(12 равновесий, 4 устойчивые)

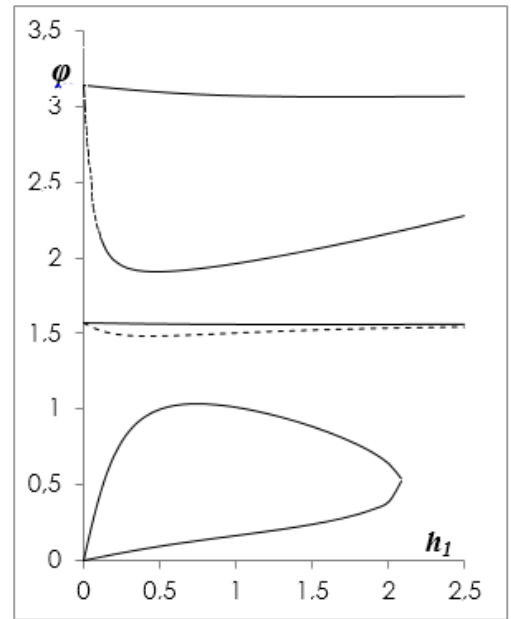


Рис. 1.33. $\nu=0.9$, $h_2=0.5$, $h_3=1.0$
(12 равновесий, 4 устойчивые)

1.7. Динамика спутника-гиростата с вектором гиростатического момента в главной плоскости инерции спутника

Основное внимание в данном разделе уделено символьным методам исследования положений равновесия спутника-гиростата в случаях, когда вектор гиростатического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника: 1) $H_1 \neq 0$, $H_2 \neq 0$, $H_3 = 0$; 2) $H_1 \neq 0$, $H_2 = 0$, $H_3 \neq 0$; и 3) $H_1 = 0$, $H_2 \neq 0$, $H_3 \neq 0$.

Система уравнений (1.3.1) и (1.3.4) была решена для случая 2) довольно сложными способами в работах [39, 42]. В данном разделе будут подробно рассмотрены все три случая.

1. Начнем с рассмотрения первого случая $H_1 \neq 0$, $H_2 \neq 0$, $H_3 = 0$, когда вектор гиростатического момента находится в плоскости Oxy . Тогда, вводя безразмерные параметры $h_i = H_i/(B - C)$, $\nu = (B - A)/(B - C)$, система (1.3.1) примет вид

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + h_2a_{23} &= 0, \\ (1 - \nu)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + h_1a_{23} &= 0, \\ \nu(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{22} + h_2a_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

Для нахождения решения алгебраической системы (1.7.1) и системы из шести условий ортогональности направляющих косинусов (1.3.4) применялись алгоритмы построения базисов Гребнера [138]. Метод построения базиса Гребнера представляет собой алгоритмическую процедуру для полного приведения задачи в случае системы полиномов от многих переменных к рассмотрению полинома от одной переменной. Основные положения алгоритма построения базиса Гребнера, приведены в главе 3.

Исследование проводилось с использованием реализованного в системе компьютерной алгебры Maple 15 [139] пакета построения базисов Гребнера Groebner[Basis]. В пакете Groebner[Basis] используется

комбинация пяти алгоритмов для вычисления базисов Гребнера для различных порядков мономов и областей значений коэффициентов полиномов. Тип алгоритма задается специальной опцией `method=meth`.

Перечислим эти алгоритмы: 1) `method=fgb` выполняет программу FGb, которая реализует алгоритм F4, разработанный Д.С. Фожером (J. Faugere), и поддерживает для коэффициентов полиномов поля рациональных и целых чисел. Данный алгоритм не поддерживает работу с параметрами (коэффициенты принадлежат полю рациональных функций). Для нашей задачи этот метод не подходит, так как коэффициенты полиномов системы (1.7.1), (1.3.4), зависят от трех параметров.

2) `method=maplef4` выполняет реализованный на языке Maple алгоритм F4. Данная реализация поддерживает все порядки мономов и типы коэффициентов полиномов из любого поля, а также вычисления в некоммутативных алгебрах Ore. Чаще всего этот метод является предпочтительней первого.

3) `method=buch` выполняет традиционную реализацию в системе Maple алгоритма Бухбергера [138]. Этот алгоритм поддерживает все типы полей для коэффициентов полиномов, все порядки мономов и все опции.

4) `method=fglm` выполняет алгоритм преобразования базиса Гребнера Фожера, Джиани, Лазарда и Мора (Faugere, Gianni, Lazard, Mora) [140].

5) `method=walk` выполняет алгоритм Walk преобразования базиса Гребнера, разработанный Коллартом, Калкбреном и Моллом (Collart, Kalkbrener, Mall), который поддерживает все коммутативные поля и порядки мономов и производит преобразование базиса Гребнера из одного порядка мономов в другой [141]. Опция `method=direct` реализует самый быстрый, реализованный на данный момент, универсальный прямой метод.

Наиболее эффективным методом вычисления базиса Гребнера для нашей задачи из всех вышеперечисленных способов оказался метод

исключающего блочного порядка `lexdeg` при явном указании метода работы алгоритма `-method=fglm`:

```
Groebner[Basis](F, lexdeg([a21, ..., a32], [a33]), method=fglm)
```

Здесь F — список из девяти полиномов f_i . В результате работы данной команды вначале выполняется программа с применением алгоритма F4; далее работает программа на основе алгоритма FGLM и, в результате, общее время вычисления базиса Гребнера составляет 6.89 сек. на персональном компьютере с процессором Intel Core i7 2.4 GHz и объемом оперативной памяти 8 Gb, что почти в пять раз быстрее первых двух способов.

Следует отметить, что при изменении лексикографического порядка в списке переменных удается получить в базисе Гребнера полином от одной неизвестной только для переменных a_{23} и a_{33} . Выпишем из построенного базиса Гребнера полином, который зависит только от одной переменной $x = a_{33}$

$$P(x) = P_1(x)P_2(x) = 0, \quad (1.7.2)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x(x^2 - 1), \\ P_2(x) &= p_0x^4 + p_1x^2 + p_2, \\ p_0 &= 16(1 - \nu)^2 p_3^2, \\ p_1 &= p_3(h_1^6 + (1 - \nu)(8\nu + (3 - \nu)h_2^2)h_1^4 - \\ &\quad -(1 - \nu)^2((2\nu - 3)h_2^4 + \\ &\quad + 16\nu^2(2h_2^2 - 1))h_1^2 + \\ &\quad + (1 - \nu)^4 h_2^2(h_2^2 - 4\nu)^2), \\ p_2 &= -\nu^2 h_1^2 h_2^2 (h_1^6 - (1 - \nu)(1 - 9\nu - \\ &\quad -(3 - \nu)h_2^2)h_1^4 - \\ &\quad -(1 - \nu)^2((2\nu - 3)h_2^4 + (17\nu^2 + \\ &\quad + 2(1 - \nu))h_2^2 + 8\nu(1 - 3\nu))h_1^2 + \\ &\quad + (1 - \nu)^4 (h_2^2 - 1)(h_2^2 - 4\nu)^2), \end{aligned}$$

$$p_3 = h_1^4 + 2(1-\nu)(h_2^2 + 4\nu)h_1^2 + \\ + (1-\nu)^2(h_2^2 - 4\nu)^2.$$

Для определения всех равновесий необходимо рассмотреть отдельно три случая: $a_{33} = 0$, $a_{33}^2 = 1$ и $P_2(a_{33}^2) = 0$.

В случае $a_{33} = 0$ система (1.7.1), (1.3.4) примет вид

$$\begin{aligned} 4\nu a_{21} a_{22} + h_2 a_{21} - h_1 a_{22} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{31}^2 &= 1, \\ a_{33} = a_{23} = a_{12} = a_{11} &= 0, \\ a_{31} = -a_{13} a_{22} \quad a_{32} &= a_{13} a_{21}. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Первые два уравнения системы (1.7.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} 16\nu^2 a_{21}^4 - 8\nu h_2 a_{21}^3 + (h_1^2 + h_2^2 - 16\nu^2) a_{21}^2 + 8\nu h_2 a_{21} - h_1^2 &= 0, \\ a_{22} &= \frac{h_2 a_{21}}{(h_1 - 4\nu a_{21})}. \end{aligned} \tag{1.7.4}$$

Найдя решения системы (1.7.4), значения остальных направляющих косинусов можно определить из уравнений системы (1.7.3). Из вида системы (1.7.4) следует, что первое алгебраическое уравнение четвертой степени может иметь не более 4 действительных корней, зависящих от параметров ν , h_1 , h_2 , а с учетом третьего уравнения (1.7.3) число действительных решений системы (1.7.3) не может превышать 8.

Проведем теперь исследование свойств системы (1.7.3). Первое уравнение этой системы представляет собой уравнение гиперболы, одна ветвь которой проходит через начало системы координат в плоскости переменных (a_{21}, a_{22}) , а второе уравнение описывает в этой плоскости единичную окружность. Число действительных решений системы (1.7.3) и, следовательно, системы (1.7.4) зависит от характера пересечений ветвей гиперболы и окружности. Одна ветвь гиперболы, которая проходит через начало координат, заведомо пересекается с окружностью в двух точках.

Если и другая ветвь гиперболы пересекается с окружностью, то имеем еще два решения. В случае касания ветви гиперболы с окружностью два решения сливаются в одно (существует кратный корень). Таким образом, система (1.7.3) с учетом того, что каждому корню a_{21} соответствуют два значения a_{31}, a_{32} (так как $a_{13} = \pm 1$) имеет либо восемь, либо четыре решения.

Определим границы в плоскости параметров (h_1, h_2) , разделяющие области с различным числом решений системы (1.7.3). Бифуркационными точками являются точки плоскости (h_1, h_2) , принадлежащие одновременно ветви гиперболы, не проходящей через начало координат, и окружности; в бифуркационных точках касательные к гиперболе и окружности совпадают. Условие совпадения касательных имеет вид

$$\frac{d(a_{21})}{d(a_{22})} = -\frac{4va_{22} + h_2}{4va_{21} - h_1} = -\frac{2a_{21}}{2a_{22}}$$

или

$$4v(a_{22}^2 - a_{21}^2) + h_2 a_{22} - h_1 a_{21} = 0. \quad (1.7.5)$$

Подставив выражение для a_{22} из (1.7.4) во второе уравнение (1.7.3) и уравнение (1.7.5) получим систему

$$\begin{aligned} \frac{h_2^2 a_{21}^2}{(4va_{21} - h_1)^2} &= 1 - a_{21}^2, \\ \frac{h_2^2 h_1}{(4va_{21} - h_1)^2} &= (4va_{21} - h_1). \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Исключая h_2^2 из системы уравнений (1.7.6), получим после несложных преобразований соотношение $a_{21} = (4v)^{-1/3} h_1^{1/3}$. Подставив, наконец, выражение для a_{21} во второе уравнение системы (1.7.6), получим уравнение астроида

$$h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = (4v)^{2/3}. \quad (1.7.7)$$

Внутри области $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} < (4\nu)^{2/3}$ существуют восемь решений системы (1.7.3); при пересечении кривой (1.7.7) (которую будем считать бифуркационной кривой), число решений уменьшается на 4; в области $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} > (4\nu)^{2/3}$ существуют четыре решения.

Рассмотрим теперь случай $a_{33}^2 = 1$. В этом случае система (1.7.1), (1.3.4) примет вид

$$\begin{aligned} \nu a_{21} a_{22} - h_1 a_{22} + h_2 a_{21} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{33}^2 &= 1, \\ a_{31} = a_{32} = a_{13} = a_{23} &= 0, \\ a_{11} = a_{22} a_{33}, \quad a_{12} &= -a_{21} a_{33}. \end{aligned} \tag{1.7.8}$$

Первые два уравнения системы (1.7.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nu^2 a_{21}^4 - 2\nu h_2 a_{21}^3 + (h_1^2 + h_2^2 - \nu^2) a_{21}^2 + 2\nu h_2 a_{21} - h_1^2 &= 0, \\ a_{22} &= \frac{h_2 a_{21}}{(h_1 - \nu a_{21})}. \end{aligned} \tag{1.7.9}$$

Применив использованный выше при исследовании системы (1.7.3) подход, можно показать, что и для системы (1.7.8) и (1.7.9) границей, отделяющей область существования восьми решений от области существования четырех решений, также является астроида

$$h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = \nu^{2/3}. \tag{1.7.10}$$

На рис. 1.34–1.36 представлены астроида (1.7.7) и (1.7.10) для значений ν равных 0.2, 0.5 и 0.8, которые делят плоскость (h_1, h_2) на три области с различным числом положений равновесия спутника-гиростата. На рисунках показаны области, где существуют 8, 6 и 4 действительных решений (16, 12 и 8 равновесий) для уравнений (1.7.4) и (1.7.9), при условиях $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} < \nu^{2/3}$, $\nu^{2/3} < h_1^{2/3} + h_2^{2/3} < (4\nu)^{2/3}$ и $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} > (4\nu)^{2/3}$ для первого и второго случая соответственно.

Рассмотрим далее третий случай, когда равновесия спутника определяются действительными корнями биквадратного уравнения $P_2(x) = 0$. Число действительных корней биквадратного уравнения четно и не превышает 4. Для каждого решения a_{33} из второго полинома из базиса Гребнера можно получить два значения a_{32} и далее соответствующее им значение a_{31} .

Для каждого набора значений a_{31} , a_{32} и a_{33} можно однозначно получить из исходной системы (1.7.1), (1.3.4) соответствующие значения остальных направляющих косинусов a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{22} , a_{23} . Таким образом, каждому действительному корню биквадратного уравнения (1.7.2) соответствуют два набора значений a_{ij} (две равновесные ориентации). Так как число действительных корней уравнения (1.7.2) не превышает 4, количество положений равновесия спутника в третьем случае не превышает 8.

Для переменной $t = x^2 = a_{33}^2$ из (1.7.2) получим квадратное уравнение относительно t :

$$P_2(t) = p_0 t^2 + p_1 t + p_2 = 0. \quad (1.7.11)$$

Уравнение (1.7.11) имеет следующие два корня:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_0 p_2}}{2p_0}; \\ t_2 &= \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0 p_2}}{2p_0}. \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

Можно показать, что дискриминант уравнения (1.7.11) неотрицателен, то есть выполняется условие $p_1^2 - 4p_0 p_2 \geq 0$ при любых значениях параметров системы. Тогда при выполнении неравенства $t_1 = a_{33}^2 > 0$ уравнение (1.7.11) будет иметь два действительных корня t_1 и t_2 ,

которым соответствуют четыре значения a_{33} . При этих условиях система (1.7.1), (1.3.4) (при $a_{33} \neq 0$, $a_{33} \neq \pm 1$) имеет 8 решений, которые соответствуют 8 равновесным ориентациям спутника. Эти положения равновесия существуют при значениях параметров, находящихся внутри области, ограниченной кривой линией $t_1(h_1, h_2, \nu) = 0$. На рис. 1.34–1.36 эти кривые отмечены значком t_1 .

В области, ограниченной кривыми $t_1(h_1, h_2, \nu) = 0$, $t_2(h_1, h_2, \nu) = 1$, где выполняются неравенства $t_1(h_1, h_2, \nu) < 0$ и $0 < t_2(h_1, h_2, \nu) < 1$, существуют только четыре положения равновесия, которые соответствуют одному корню t_2 . В области, находящейся за пределами границы, не существуют решения для третьего случая. На рис. 1.34–1.36 эти кривые отмечены значком t_2 .

Результаты анализа положений равновесий для третьего случая можно суммировать следующим образом: кривые $t_1(h_1, h_2, \nu) = 0$, $t_2(h_1, h_2, \nu) = 1$ делят плоскость (h_1, h_2) на три области, в которых существует 8 равновесий, 4 равновесия и область, где равновесия не существуют.

Финальное разбиение плоскости (h_1, h_2) на области с равным числом равновесий для всех трех случаев представлено на рис. 1.34–1.36 для фиксированных значений инерционного параметра $\nu = 0.2$, $\nu = 0.5$, $\nu = 0.8$. Кривые (1.7.7), (1.7.10), $t_1(h_1, h_2, \nu) = 0$, $t_2(h_1, h_2, \nu) = 1$ разделяют плоскость на области с числом равновесий, равным 24, 20, 16, 12 и 8.

2. Рассмотрим теперь случай, когда вектор гиросtatического момента лежит в плоскости Oyz и $H_1 = 0$, $H_2 \neq 0$, $H_3 \neq 0$. Система (1.3.1) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + h_2a_{23} - h_3a_{22} &= 0, \\ (1-\nu)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - h_3a_{21} &= 0, \\ \nu(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) + h_2a_{21} &= 0. \end{aligned} \tag{1.7.13}$$

Применяя описанный выше подход для исследования системы алгебраических уравнений, построим базис Гребнера для полиномов, системы (1.7.13), (1.3.4). Следует отметить, что при изменении лексикографического порядка в списке переменных удается получить в базисе Гребнера полином от одной неизвестной только для переменных a_{21} и a_{31} . Полином из базиса Гребнера, который зависит только от одной переменной, для данного случая a_{31} имеет вид

$$P_{hl}(a_{31}) = P_3(a_{31})P_4(a_{31}) = 0, \quad (1.7.14)$$

где

$$\begin{aligned} P_3(a_{31}) &= a_{31}(a_{31}^2 - 1), \\ P_4(a_{31}) &= p_{40}a_{31}^4 + p_{41}a_{31}^2 + p_{42}, \\ p_{40} &= 16\nu^2(1-\nu)^2 p_{43}^2, \\ p_{41} &= p_{43}(\nu^4 h_3^6 - \\ &\quad - \nu^2(1-\nu)(8\nu^2 + (3\nu-1)h_2^2)h_3^4 + \\ &\quad + \nu(1-\nu)^2((3\nu-2)h_2^4 + \\ &\quad + 16\nu(\nu^2 - 2h_2^2))h_3^2 + \\ &\quad + (1-\nu)^4 h_2^2(h_2^2 - 4\nu)^2), \\ p_{42} &= -h_2^2 h_3^2(\nu^4 h_3^6 - \nu^2(1-\nu)(\nu^2(9-\nu) + \\ &\quad + (3\nu-1)h_2^2)h_3^4 + \nu(1-\nu)^2((3\nu-2)h_2^4 + \\ &\quad + \nu(2\nu(1-\nu) - 17)h_2^2 + 8\nu^3(3-\nu))h_3^2 + \\ &\quad + (1-\nu)^4(h_2^2 - \nu^2)(h_2^2 - 4\nu)^2), \\ p_{43} &= \nu^2 h_3^4 - 2\nu(1-\nu)(h_2^2 + 4\nu)h_3^2 + \\ &\quad + (1-\nu)^2(h_2^2 - 4\nu)^2. \end{aligned}$$

Для исследования системы (1.7.13), (1.3.4) здесь также необходимо рассмотреть три случая: $a_{31} = 0$, $a_{31}^2 = 1$ и $P_4(a_{31}) = 0$.

В первом случае, когда $a_{31} = 0$, используя подход, описанный в пункте 1, можно получить бифуркационную кривую

$$h_2^{2/3} + h_3^{2/3} = 4^{2/3},$$

которая делит плоскость (h_2, h_3) на две области, где существуют 8 и 4 равновесных ориентации спутника. Во втором случае, когда $a_{31}^2 = 1$, тоже применяя описанный выше подход, можно показать, что для системы (1.7.13) бифуркационная кривая, разделяющая области существования восьми и четырех равновесных решений, также имеет вид астроида

$$h_2^{2/3} + h_3^{2/3} = 1.$$

Другие две кривые, которые являются границами областей с равным числом равновесий, могут быть получены из условий существования действительных корней биквадратного уравнения $P_4(a_{31}) = 0$. Эволюция областей с фиксированным числом равновесий в плоскости параметров (h_2, h_3) имеет похожий характер, который получен для случая, описанного в пункте 1.

3. В последнем случае, когда вектор гиросtatического момента лежит в плоскости Oxz и $(H_1 \neq 0, H_3 \neq 0)$, исходная система (1.3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} - h_3a_{22} &= 0, \\ (1 - \nu)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - h_3a_{21} + h_1a_{23} &= 0, \\ \nu(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

Построим базис Гребнера для полиномов, представляющих собой левые части системы (1.7.15), (1.3.4). Здесь также следует отметить, что при изменении лексикографического порядка в списке переменных удастся получить в базисе Гребнера полином от одной неизвестной только для переменных a_{22} и a_{32} . Вычисляя базис Гребнера для системы полиномов из левой части уравнений системы (1.7.15), (1.3.4), получим в результате полином, зависящий только от одной переменной a_{32} , который имеет следующий вид:

$$P_{h_2}(a_{32}) = P_5(a_{32})P_6(a_{32}) = 0. \quad (1.7.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
P_5(a_{32}) &= a_{32}(a_{32}^2 - 1), \\
P_6(a_{32}) &= p_{60}a_{32}^4 + p_{61}a_{32}^2 + p_{62}, \\
p_{60} &= 16\nu^2 p_{63}^2, \\
p_{61} &= p_{63}(h_1^6 + \nu((2 + \nu)h_3^2 + 8(1 - \nu))h_1^4 + \\
&\quad + \nu^2((2\nu + 1)h_3^4 - 32(1 - \nu)^2 h_3^2 + \\
&\quad + 16(1 - \nu)^2)h_1^2 + \nu^4 h_3^2(h_3^2 - 4(1 - \nu))^2), \\
p_{62} &= -h_1^2 h_3^2(h_1^6 + \nu((2 + \nu))h_3^2 + 8 - \\
&\quad - 9\nu)h_1^4 + \nu^2((2\nu + 1)h_3^4 - (17\nu^2 - 32\nu + 17)h_3^2 + \\
&\quad + 8(3\nu^2 - 5\nu + 2))h_1^2 + \nu^4(h_3^2 - 1)(h_3^2 - 4(1 - \nu))^2), \\
p_{63} &= h_1^4 + 2\nu(h_3^2 + 4(1 - \nu))h_1^2 + \nu^2(h_3^2 - 4(1 - \nu))^2.
\end{aligned}$$

Для исследования системы (1.7.15) необходимо рассмотреть случаи $a_{32} = 0$, $a_{32}^2 = 1$, $P_6(a_{32}^2) = 0$. В первом случае, когда $a_{32} = 0$, используя подход, описанный в пункте 1, можно получить бифуркационную кривую

$$h_1^{2/3} + h_3^{2/3} = (4(1 - \nu))^{2/3},$$

которая делит плоскость (h_1, h_3) на две области, где существуют 8 и 4 равновесных ориентации спутника. Во втором случае, когда $a_{32}^2 = 1$, бифуркационная кривая, разделяющая области существования восьми и четырех равновесных решений, также представляет астроиду

$$h_1^{2/3} + h_3^{2/3} = (1 - \nu)^{2/3}.$$

Другие две кривые, которые являются границами областей с равным числом равновесий, могут быть получены из условий существования действительных корней биквадратного уравнения $P_6(a_{32}^2) = 0$.

Эволюция областей с фиксированным числом равновесий в плоскости параметров (h_1, h_3) имеет схожий характер с первым случаем.

Для второго случая в работе [42] с использованием теоремы Ляпунова были получены достаточные условия устойчивости равновесных решений при $h_1 \neq 0$, $h_2 = 0$, $h_3 \neq 0$.

Полученные в рассмотренных выше трех случаях условия $a_{31} = 0$, $a_{31}^2 = 1$; $a_{32} = 0$, $a_{32}^2 = 1$ и $a_{33} = 0$, $a_{33}^2 = 1$ определяют все типы плоских решений данной задачи.

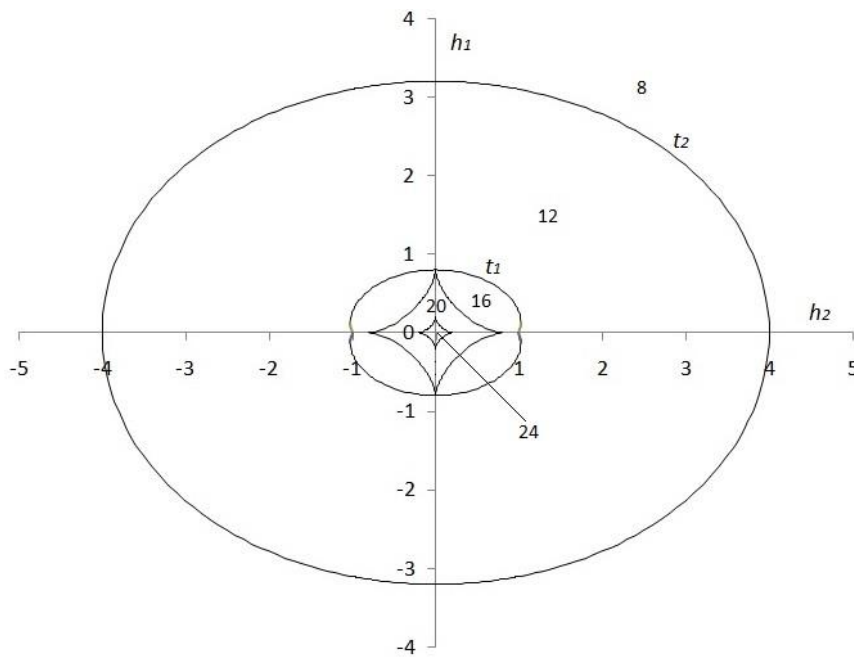
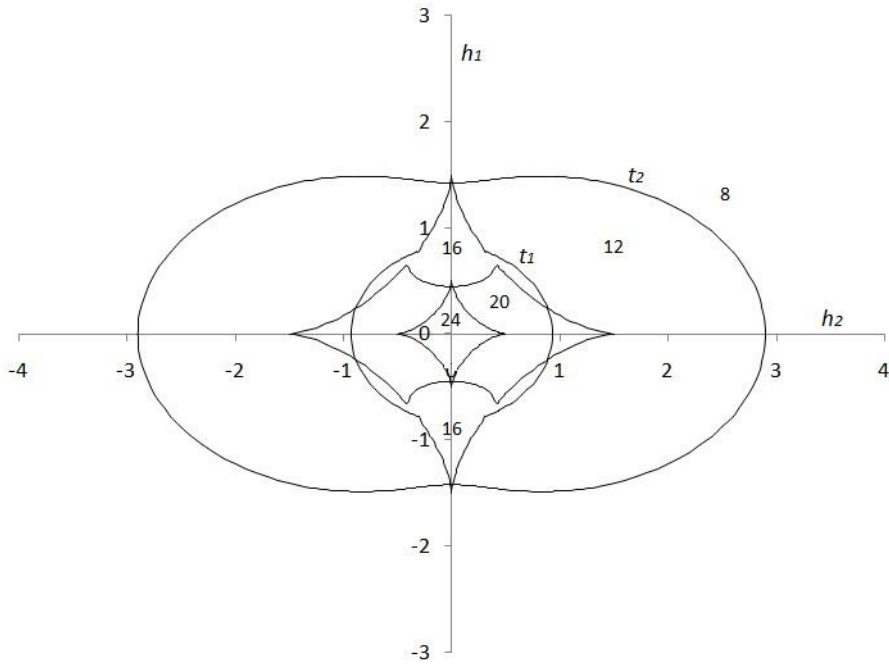
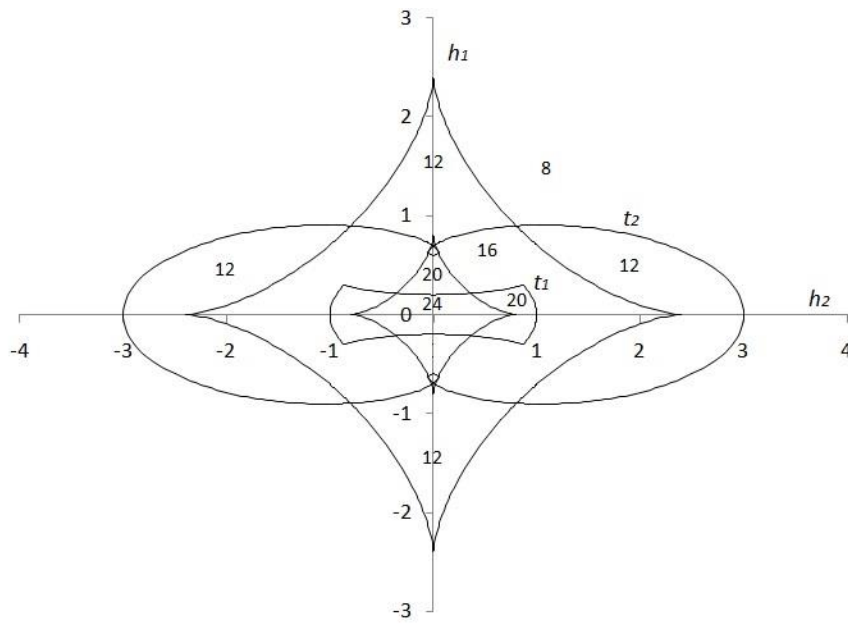


Рис. 1.34. $\nu=0.2$, $h_3=0$

Рис. 1.35. $\nu=0.5$, $h_3=0$ Рис. 1.36. $\nu=0.8$, $h_3=0$

1.8. Исследование положений равновесия спутника-гиростата для других частных случаев

Основное внимание в данном разделе уделено исследованию положений равновесия спутника-гиростата для частных случаев, когда одна из главных осей инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом-вектором или касательной к орбите. Рассмотрим вначале три случая, подробно изученных в разделе 1.7, когда оси инерции спутника Ox , Oy , Oz последовательно совпадают с осью OZ ($a_{31}^2 = 1$, $a_{32}^2 = 1$ и $a_{33}^2 = 1$). Получим условия существования равновесных ориентаций для этих случаев.

1. При $a_{31}^2 = 1$ из (1.3.1), (1.3.4) получим $H_1 = 0$, $a_{11} = a_{21} = a_{32} = a_{33} = 0$. Из результатов, представленных в разделе 1.7, следует, что бифуркационная кривая, разделяющая области существования восьми и четырех равновесных решений, имеет вид астроида

$$h_2^{2/3} + h_3^{2/3} = 1.$$

2. При $a_{32}^2 = 1$ из (1.3.1), (1.3.4) получим $H_2 = 0$, $a_{12} = a_{22} = a_{31} = a_{33} = 0$. Бифуркационная кривая имеет вид

$$h_1^{2/3} + h_3^{2/3} = (1 - \nu)^{2/3}.$$

3. При $a_{33}^2 = 1$ из (1.3.1), (1.3.4) получим $H_3 = 0$, $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$. Бифуркационная кривая имеет вид (1.7.10)

$$h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = \nu^{2/3}.$$

Рассмотрим далее еще три случая, представленных в разделе 1.7, когда оси Ox , Oy , Oz последовательно совпадают с осью OX .

4. При $a_{11}^2 = 1$ из (1.3.1), (1.3.4) получим $H_1 = 0$, $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$. Бифуркационная кривая имеет вид

$$h_2^{2/3} + h_3^{2/3} = 4^{2/3}.$$

5. При $a_{12}^2 = 1$ из (1.3.1), (1.3.4) получим $H_2 = 0$, $a_{11} = a_{13} = a_{22} = a_{32} = 0$. В этом случае бифуркационная кривая имеет вид

$$h_1^{2/3} + h_3^{2/3} = (4(1-\nu))^{2/3}.$$

6. При $a_{13}^2 = 1$ из (1.3.1), (1.3.4) получим $H_3 = 0$, $a_{11} = a_{12} = a_{23} = a_{33} = 0$ и бифуркационная кривая имеет вид (1.7.7)

$$h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = (4\nu)^{2/3}.$$

В случаях, когда оси Ox , Oy , Oz последовательно совпадают с осью OY положения равновесия возможны, только если вектор гиросtatического момента совпадает с какой-либо главной центральной осью инерции спутника.

7. При $a_{21}^2 = 1$ получим условия $H_1 \neq 0$, $H_2 = H_3 = 0$, $a_{11} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = 0$.

8. При $a_{22}^2 = 1$ получим условия $H_2 \neq 0$, $H_1 = H_3 = 0$, $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = 0$.

9. При $a_{23}^2 = 1$ получим следующие условия $H_3 \neq 0$, $H_1 = H_2 = 0$ и $a_{13} = a_{21} = a_{22} = a_{33} = 0$.

Рассмотрение случаев 1–9, когда одна из главных осей инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом–вектором или касательной к орбите, показывает, что любая такая ориентация является равновесной при выполнении условий, указанных в пунктах 1–9.

1.9. Сравнительный анализ общего и частных случаев

Задача определения положений равновесия спутника-гиростата в рассмотренных в разделе 1.8 простых случаях (1–9), когда главная ось инерции спутника в равновесном положении совпадает с одной из осей орбитальной системы координат или лежит в одной из плоскостей, образуемых осями орбитальной системы, подробно рассмотрена в работах [1, 32–35, 39, 42–44, 46, 47, 173].

Случай $H_1 = H_2 = 0$, $H_3 \neq 0$ (случай 9 из раздела 1.8) был подробно изучен в работе [46]. При этих условиях из второго уравнения (1.3.12) получим равенство $H_3^2 = 4(A - C)(B - C)$, которое выполняется, если вектор гиросtatического момента \vec{H} совпадает с осью максимального или минимального момента инерции. В этом случае первое уравнение системы (1.3.12) определяет два однопараметрических семейства равновесных решений. В [43, 44] было предложено более простое, по сравнению с [46], решение для случая 8. В [43, 44, 46] показано, что если модуль гиросtatического момента $|\vec{H}|$ достаточно мал, то существуют 24 изолированных положения равновесия. С ростом модуля гиросtatического момента число положений равновесия убывает, и при очень большом $|\vec{H}|$ возможны лишь 8 положений равновесия, когда вектор гиросtatического момента совпадает с нормалью к плоскости орбиты. В общем случае при значениях параметров гиросtatического момента, равных или превосходящих 4, также существуют только 8 положений равновесия (рис.1.29, 1.31).

Наиболее полное исследование устойчивости положений равновесия при $H_1 = H_3 = 0$, $H_2 \neq 0$ (случай 8 из раздела 1.8) проведено в [43, 47]. Отметим также работы [142, 143], в которых исследуется вращательное движение спутника-гиростата при условии $H_1 = H_3 = 0$, $H_2 \neq 0$. Построена область устойчивости для положения равновесия спутника, при котором оси связанной и орбитальной систем совпадают.

Для случаев 1–6 из раздела 1.8, когда вектор гиросtatического момента лежит в одной из координатных плоскостей системы $Oxyz$ [39, 42, 173] (рис. 1.34–1.36) число положений равновесия спутника-гиростата также уменьшается от 24 до 8 с шагом 4 при последовательном увеличении модуля вектора гиросtatического момента. В [173] символично получен вид бифуркационных кривых, которые задают границы областей с равным числом положений равновесия спутника-гиростата для всех случаев (1–6),

когда вектор гиросtatического момента лежит в координатной плоскости системы $Oxyz$.

Следует отметить, что результаты, полученные в разделе 1.7, позволяют определить точные значения точек пересечения бифуркационных кривых с осями на плоскости (h_1, h_2) при $h_3 = 0$ для общего случая задачи о положениях равновесия спутника-гиростата (см. раздел 1.5 рис. 1.4 – 1.22). Из сравнения, например, рисунков 1.10 при $\nu = 0.2$, 1.15 при $\nu = 0.5$ и 1.19 при $\nu = 0.8$ в плоскости (h_1, h_2) и значениях $h_3 = 0.01$ и соответствующих рисунков 1.34, 1.35, 1.36 для фиксированных значений инерционного параметра $\nu = 0.2$, $\nu = 0.5$, $\nu = 0.8$ и $h_3 = 0$ можно сделать вывод, что численные результаты, полученные для общего случая задачи, асимптотически сходятся к аналитическим решениям, полученным для частных случаев.

В общем случае проведенное численное исследование показало, что число положений равновесия спутника-гиростата, также как и в частных случаях, уменьшается от 24 до 8 с шагом 4 при последовательном увеличении модуля вектора гиросtatического момента. В таблице 1.1 представлены вычисленные значения параметров гиросtatического момента, при которых происходит изменение числа положений равновесия.

Следует отметить, что при $|\vec{H}| = 0$ мы получим хорошо известный результат, который заключается в том, что спутник с неравными главными центральными моментами инерции при действии только гравитационного момента имеет на круговой орбите 24 положения равновесия, четыре из которых являются устойчивыми [8–10].

1.10. Динамика осесимметричного спутника-гиростата.

Положения равновесия

В данном разделе представлены результаты исследования положений равновесия и достаточных условий их устойчивости для осесимметричного спутника-гиростата при любых значениях вектора гиростатического момента. Они качественно соответствуют результатам, полученным в разделах 1.3 – 1.6 для общего случая спутника-гиростата, где показана эволюция равновесных решений, которые определяются действительными корнями алгебраического уравнения 12-го порядка (1.3.20) с коэффициентами, зависящими от трех проекций гиростатического момента и безразмерного инерционного параметра системы $\nu = (B - A)/(B - C)$.

Для решения поставленной задачи направляющие косинусы осей связанной со спутником системы координат Ox, Oy, Oz в орбитальной системе координат $OXYZ$ удобнее выразить через самолетные углы тангажа α , рыскания β и крена γ (рис. 1.37) с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos(x, X) = \cos \alpha \cos \beta, \\
 a_{12} &= \cos(y, X) = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\
 a_{13} &= \cos(z, X) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\
 a_{21} &= \cos(x, Y) = \sin \beta, \\
 a_{22} &= \cos(y, Y) = \cos \beta \cos \gamma, \\
 a_{23} &= \cos(z, Y) = -\cos \beta \sin \gamma, \\
 a_{31} &= \cos(x, Z) = -\sin \alpha \cos \beta, \\
 a_{32} &= \cos(y, Z) = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\
 a_{33} &= \cos(z, Z) = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.
 \end{aligned}
 \tag{1.10.1}$$

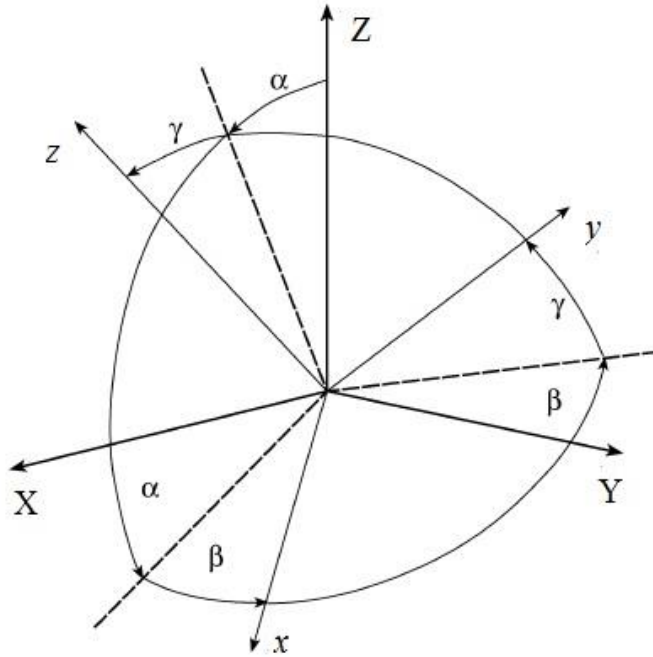


Рис.1.37. Самолетные углы α , β , γ

Тогда уравнения движения спутника-гиростата относительно его центра масс запишутся с использованием самолетных углов в следующем виде [2, 164, 179]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \bar{H}_2r + \bar{H}_3q &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \bar{H}_3p + \bar{H}_1r &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \bar{H}_1q + \bar{H}_2p &= 0; \end{aligned} \quad (1.10.2)$$

$$\begin{aligned} p &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma} = \bar{p} + \omega_0a_{21}, \\ q &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma = \bar{q} + \omega_0a_{22}, \\ r &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma = \bar{r} + \omega_0a_{23}. \end{aligned} \quad (1.10.3)$$

Здесь уравнения (1.10.2) совпадают с уравнениями (1.2.7), ω_0 – угловая скорость движения центра масс гиростата по круговой орбите; точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Для системы уравнений (1.10.2), (1.10.3) справедлив обобщенный интеграл энергии (1.2.9).

Положив в (1.10.2) и (1.10.3) $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, (α_0 , β_0 , γ_0 – постоянные величины), а также $H_i = \bar{H}_i / \omega_0$ ($i = 1, 2, 3$), получим при $A \neq B \neq C$ уравнения

$$\begin{aligned} (C - B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - H_2a_{23} + H_3a_{22} &= 0, \\ (A - C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - H_3a_{21} + H_1a_{23} &= 0, \\ (B - A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - H_1a_{22} + H_2a_{21} &= 0, \end{aligned} \quad (1.10.4)$$

позволяющие определить положения равновесия спутника-гиростата в орбитальной системе координат. Подставляя в (1.10.4) выражения для направляющих косинусов (1.10.1) через самолетные углы, получим три уравнения с неизвестными α_0 , β_0 , γ_0 , найдя которые, получим все положения равновесия спутника-гиростата. Другой, более удобный для исследования способ замыкания уравнений (1.10.4) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов (1.3.4). Уравнения (1.10.4) совпадают с уравнениями (1.3.1). В последующем исследовании удобнее использовать эквивалентную систему (1.3.3):

$$\begin{aligned} 4(Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33}) + (H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}) &= 0, \\ Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33} &= 0, \\ (Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) + (H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13}) &= 0. \end{aligned}$$

В данном разделе проводится исследование положений равновесия для частного случая осесимметричного спутника-гиростата, когда, например, $A \neq B = C$. В этом случае система (1.3.3) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} 4(A - B)a_{21}a_{31} + H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33} &= 0, \\ (A - B)a_{11}a_{31} &= 0, \\ (A - B)a_{11}a_{21} + H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (1.10.5)$$

Для системы уравнений (1.10.5) и (1.3.4) ставится следующая задача: при заданных параметрах $A - B$, H_1 , H_2 , H_3 требуется определить девять

направляющих косинусов a_{ij} , т.е. все положения равновесия осесимметричного спутника-гиростата.

Возможны следующие два случая: 1) $a_{11} = 0$, 2) $a_{31} = 0$.

Рассмотрим вначале первый случай. Из (1.10.5) и (1.3.4) в этом случае получим систему

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 0, \\
 4(A - B)a_{21}a_{31} + H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33} &= 0, \\
 H_2a_{12} + H_3a_{13} &= 0, \\
 a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\
 a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\
 a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\
 a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\
 a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\
 a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0;
 \end{aligned} \tag{1.10.6}$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (1.10.6) получаем

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= \pm \frac{H_3}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}, \quad a_{13} = \mp \frac{H_2}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}. \text{ Учитывая, что} \\
 a_{22} &= -a_{13}a_{31}, \quad a_{23} = a_{12}a_{31}, \quad a_{32} = a_{13}a_{21}, \quad a_{33} = -a_{12}a_{21}, \\
 H_2a_{32} + H_3a_{33} &= a_{21}(H_2a_{13} - H_3a_{12}) = \mp a_{21}\sqrt{H_2^2 + H_3^2},
 \end{aligned}$$

систему (1.10.6) можно представить следующим образом [48, 133]:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 0, \quad a_{12} = \pm \frac{H_3}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}, \quad a_{13} = \mp \frac{H_2}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}, \\
 a_{22} &= -a_{13}a_{31}, \quad a_{23} = a_{12}a_{31}, \quad a_{32} = a_{13}a_{21}, \quad a_{33} = -a_{12}a_{21}, \\
 4(A - B)a_{21}a_{31} + H_1a_{31} \mp a_{21}\sqrt{H_2^2 + H_3^2} &= 0, \quad a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1.
 \end{aligned} \tag{1.10.7}$$

Определив направляющие косинусы a_{21} и a_{31} из последних двух уравнений, можно получить все решения системы (1.10.7).

Для второго случая получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
a_{31} &= 0, \\
(A - B)a_{11}a_{21} + H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13} &= 0, \\
H_2a_{32} + H_3a_{33} &= 0, \\
a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\
a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\
a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\
a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\
a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0, \\
a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.10.8}$$

Используя аналогичный подход во втором случае, систему (1.10.5) и (1.3.4) можно представить в виде [48, 133]

$$\begin{aligned}
a_{12} &= -a_{21}a_{33}, \quad a_{13} = a_{21}a_{32}, \quad a_{22} = a_{11}a_{33}, \quad a_{23} = -a_{11}a_{32}, \\
a_{31} &= 0, \quad a_{32} = \pm \frac{H_3}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}, \quad a_{33} = \mp \frac{H_2}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}, \\
(A - B)a_{11}a_{21} + H_1a_{11} \pm a_{21}\sqrt{H_2^2 + H_3^2} &= 0, \quad a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{1.10.9}$$

Рассмотрим более подробно последние два уравнения системы (1.10.7). Запишем их в виде

$$\begin{aligned}
4a_{21}a_{31} + ma_{31} \mp na_{21} &= 0, \\
a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1
\end{aligned} \tag{1.10.10}$$

или

$$\begin{aligned}
16a_{21}^4 + 8ma_{21}^3 + (m^2 + n^2 - 16)a_{21}^2 - 8ma_{21} - m^2 &= 0, \\
a_{31} &= \frac{\pm na_{21}}{4a_{21} + m}.
\end{aligned} \tag{1.10.11}$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$m = \frac{H_1}{A - B}, \quad n = \frac{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}{A - B}.$$

Из системы (1.10.11) следует, что первое уравнение может иметь не более четырех действительных корней a_{21} , зависящих от параметров m и n . При учете второго уравнения число действительных решений системы (1.10.11) не может превышать восьми.

Исследуем свойства системы (1.10.10). Первое уравнение системы для обоих знаков перед последним членом в левой части представляет собой уравнения гипербол, две ветви которых проходят через начало системы координат $(a_{21} = 0, a_{31} = 0)$ в плоскости переменных a_{21}, a_{31} , а второе уравнение описывает в этой плоскости единичную окружность. Число действительных решений системы (1.10.10) зависит от характера пересечений гипербол и окружности. Ясно, что две ветви гипербол, которые проходят через начало координат, заведомо пересекаются с окружностью в четырех точках. Если и две другие ветви гипербол пересекаются с окружностью, то имеем еще четыре решения. В случае касания ветвей гиперболы с окружностью четыре решения сливаются в два (существуют два кратных корня). Таким образом, система (1.10.10), а следовательно, и система (1.10.7), может иметь либо восемь, либо четыре решения. На рис.1.38 представлен один из трех вариантов взаимного расположения ветвей гипербол и окружности для случая $m = n = 1$.

Определим границы в плоскости параметров m, n , разделяющие области с разным числом решений системы (1.10.10). Бифуркационными являются точки плоскости m, n , принадлежащие одновременно ветвям гипербол, не проходящих через начало координат, и окружности; в бифуркационных точках касательные к гиперболе и окружности совпадают. Условие совпадения касательных имеет вид

$$\frac{da_{31}}{da_{21}} = -\frac{4a_{31} \mp n}{4a_{21} + m} = -\frac{a_{21}}{a_{31}}.$$

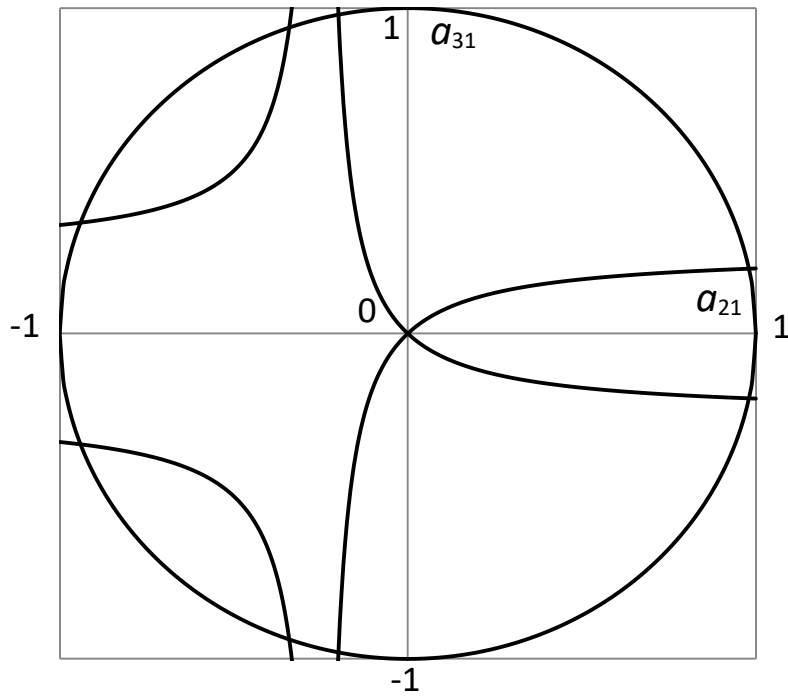
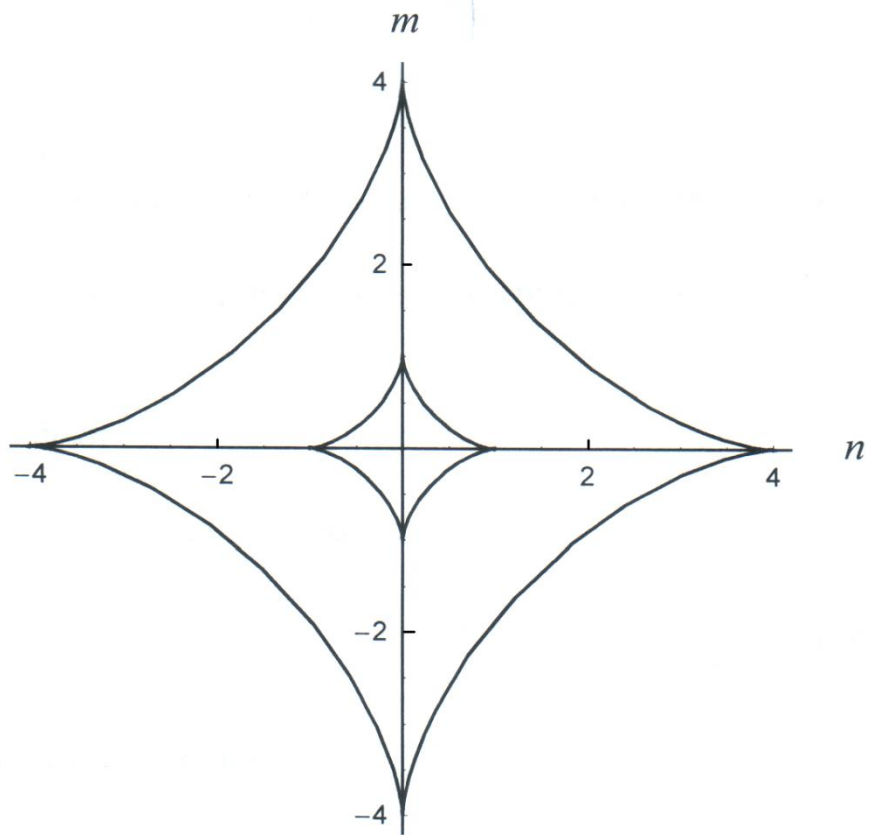
Рис.1.38. $m = n = 1$ 

Рис.1.39. Области существования 16, 12 и 8 равновесных ориентаций спутника-гиростата

или

$$4(a_{21}^2 - a_{31}^2) + ma_{21} \pm na_{31} = 0. \quad (1.10.12)$$

Подставив выражение для a_{31} из второго равенства (1.10.11) во второе уравнение (1.10.10) и уравнение (1.10.12), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{n^2 a_{21}^2}{(4a_{21} + m)^2} &= 1 - a_{21}^2, \\ \frac{mn^2}{(4a_{21} + m)^2} &= -(4a_{21} + m). \end{aligned} \quad (1.10.13)$$

Разделив левую (правую) часть первого уравнения этой системы на левую (правую) часть второго уравнения, получим после несложных преобразований соотношение $a_{21} = -4^{-1/3} m^{1/3}$. Подставив, наконец, выражение для a_{21} во второе уравнение системы (1.10.13), приходим к уравнению астроида

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 4^{2/3}. \quad (1.10.14)$$

Внутри области $m^{2/3} + n^{2/3} < 4^{2/3}$ существуют восемь решений системы (1.10.12), на кривой (1.10.14) существуют также восемь решений, среди которых имеются две пары совпадающих решений, в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 4^{2/3}$ существуют четыре решения.

Рассмотрим теперь последние два уравнения системы (1.10.9), записав их с использованием параметров m и n в виде

$$\begin{aligned} a_{11}a_{21} + ma_{11} \pm na_{21} &= 0, \\ a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (1.10.15)$$

или

$$\begin{aligned} a_{21}^4 + 2ma_{21}^3 + (m^2 + n^2 - 1)a_{21}^2 - 2ma_{21} - m^2 &= 0, \\ a_{11} &= \frac{\mp na_{21}}{a_{21} + m}. \end{aligned} \quad (1.10.16)$$

Применив использованный выше при исследовании системы (1.10.12) подход, можно показать, что и для системы (1.10.15) границей, отделяющей область существования восьми решений от области существования четырех решений, также является астроида

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 1. \quad (1.10.17)$$

Проведенные вычисления показывают, что границы (астроиды), разделяющие области с различным числом решений для систем (1.10.10) и (1.10.15), не зависят от знака перед последним членом в первом уравнении этих систем.

На рис. 1.39 представлены астроиды (1.10.14) и (1.10.17), выделяющие в плоскости m, n три области с различным числом положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата. В области $m^{2/3} + n^{2/3} \leq 1$ существуют 16 решений, в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 1, m^{2/3} + n^{2/3} \leq 4^{2/3}$ существуют 12 решений, в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 4^{2/3}$ существуют 8 решений.

Для двух других случаев осесимметричного спутника-гиростата, когда $A = B \neq C$ ($v = 0$) и $B \neq A = C$ ($v = 1$), используя подход, приведенный выше, из системы уравнений (1.3.3) были получены уравнения бифуркационных кривых (1.4.1), (1.4.2) (раздел 1.4), задающих границы между областями с равным числом положений равновесия.

Результаты данного раздела качественно близки результатам, полученным в разделе 1.7, где границы между центральными областями с равным числом положений равновесия также задаются уравнениями астроид.

1.11. Достаточные условия устойчивости положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата

Системы уравнений (1.10.11) и (1.10.16) при учете соотношений (1.10.7) и (1.10.9) определяют все решения системы (1.10.5), (1.3.4) и, тем самым, все положения равновесия гиростата, выраженные через направляющие косинусы. Примем во внимание, что первые уравнения каждой из систем (1.10.11) и (1.10.16) зависят от переменной $a_{21} = \sin \beta_0$. Каждому действительному корню a_{21} первого уравнения (1.10.11) соответствуют два значения направляющего косинуса $a_{31} = -\sin \alpha_0 \cos \beta_0$. Из выражений для $a_{21} = \sin \beta_0$ ($-\pi/2 \leq \beta_0 \leq \pi/2$) и a_{31} можно определить $\sin \alpha_0$. Используя первое, второе и третье уравнения (1.10.1), получим выражения для $\cos \alpha_0$, $\sin \gamma_0$ и $\cos \gamma_0$ и однозначно определим углы α_0 , β_0 и γ_0 . Аналогичные рассуждения справедливы для системы (1.10.16).

Для получения достаточных условий устойчивости положения равновесия

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \quad \beta = \beta_0 = \text{const}, \quad \gamma = \gamma_0 = \text{const}, \quad (1.11.1)$$

удовлетворяющего системе уравнений (1.3.4), (1.10.5), воспользуемся обобщенным интегралом энергии (1.2.9), который для гиростата ($B = C$) после введения малых отклонений $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ от положения равновесия (1.11.1), т.е. при

$$\alpha = \alpha_0 + \bar{\alpha}, \quad \beta = \beta_0 + \bar{\beta}, \quad \gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma}$$

может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{1}{2}\omega_0^2\{3(B-A)(a_{31}^2 - a_{11}^2)\bar{\alpha}^2 + \\ & + [(B-A)(1 + 3\sin^2 \alpha_0)\cos 2\beta_0 + H_1 a_{21} + H_2 a_{22} + H_3 a_{23}]\bar{\beta}^2 - \\ & - 2a_{21}(H_2 \sin \gamma_0 + H_3 \cos \gamma_0)\bar{\beta}\bar{\gamma} + (H_2 a_{22} + H_3 a_{23})\bar{\gamma}^2\} + \Sigma = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.11.2)$$

Символом Σ обозначены члены выше второго порядка малости относительно $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$.

В случае 1 $a_{11} = \cos \alpha_0 \cos \beta_0 = 0$ и, следовательно, $\cos \alpha_0 = 0$. Из второго и третьего уравнений системы (1.10.6) получаем соотношения

$$\begin{aligned} 4(A - B) \sin \beta_0 \cos \beta_0 + H_1 \cos \beta_0 - \sin \beta_0 (H_2 \cos \gamma_0 - H_3 \sin \gamma_0) &= 0, \\ H_2 \sin \gamma_0 + H_3 \cos \gamma_0 &= 0. \end{aligned}$$

Исключив с помощью этих соотношений величины $H_2 \sin \gamma_0 + H_3 \cos \gamma_0$ и $H_2 a_{22} + H_3 a_{23}$ из интеграла энергии (1.11.2), получим для него более простое выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [A \bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{3}{2} \omega_0^2 (B - A) \bar{\alpha}^2 \cos^2 \beta_0 + \\ + \frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{H_1 + 4(A - B) \sin^3 \beta_0}{\sin \beta_0} \bar{\beta}^2 + \\ + \frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{[H_1 + 4(A - B) \sin \beta_0] \cos^2 \alpha_0}{\sin \beta_0} \bar{\gamma}^2 + \Sigma = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.11.3)$$

Из теоремы Ляпунова следует, что решение (1.11.1) устойчиво, если квадратичная форма (1.11.3) определено - положительна, откуда получаем после перехода к параметру m достаточные условия устойчивости положений равновесия гиростата в случае 1

$$\begin{aligned} A - B < 0, \\ (m + 4 \sin^3 \beta_0) \sin \beta_0 < 0, \quad (m + 4 \sin \beta_0) \sin \beta_0 < 0. \end{aligned} \quad (1.11.4)$$

В случае 2 $a_{31} = -\sin \alpha_0 \cos \beta_0 = 0$, и следовательно, $\sin \alpha_0 = 0$. Аналогично предыдущему получаем достаточные условия устойчивости положений равновесия гиростата в случае 2

$$\begin{aligned} A - B > 0, \\ (m + \sin^3 \beta_0) \sin \beta_0 > 0, \quad (m + \sin \beta_0) \sin \beta_0 > 0. \end{aligned} \quad (1.11.5)$$

Отметим справедливость следующих неравенств:

$$m + 4 \sin \beta_0 > m + 4 \sin^3 \beta_0, \quad m + \sin \beta_0 > m + \sin^3 \beta_0 \quad \text{при } 0 < \sin \beta_0 < 1,$$

$$m + 4\sin \beta_0 < m + 4\sin^3 \beta_0, \quad m + \sin \beta_0 < m + \sin^3 \beta_0 \quad \text{при } -1 < \sin \beta_0 < 0.$$

Учитывая эти неравенства, области, где выполнены достаточные условия устойчивости (1.11.4) и (1.11.5), можно представить в более простом виде.

В случае 1 ($A - B < 0$) это области

$$0 < \sin \beta_0 < 1, \quad m + 4\sin \beta_0 < 0 \quad \text{и} \quad -1 < \sin \beta_0 < 0, \quad m + 4\sin \beta_0 > 0, \quad (1.11.6)$$

а в случае 2 ($A - B > 0$) это области

$$0 < \sin \beta_0 < 1, \quad m + \sin^3 \beta_0 > 0 \quad \text{и} \quad -1 < \sin \beta_0 < 0, \quad m + \sin^3 \beta_0 < 0. \quad (1.11.7)$$

Следует отметить, что в случае 1 (в случае 2) при значениях параметра m по модулю больше четырех (больше единицы) условия устойчивости (1.11.6) (условия устойчивости (1.11.7)) определяются лишь знаком параметра m и не зависят от значения $\sin \beta_0$.

Проанализируем полученные положения равновесия и соответствующие им достаточные условия устойчивости при изменении параметров m и n . Рассмотрим поведение решений в плоскости $n, \sin \beta_0$ при фиксированных значениях m . Каждое положение равновесия для случая 1 (случая 2) определяется выбором одного из корней алгебраического уравнения системы (1.10.11) (системы (1.10.16)) и выбором знака направляющего косинуса $a_{31}(a_{11})$.

Рассмотрим подробнее свойства алгебраических уравнений этих систем. Их коэффициенты зависят от безразмерных параметров m и n которые, в свою очередь, зависят от четырех размерных параметров гиростата $A - B, H_1, H_2, H_3$. Проекции вектора гиростатического момента и инерционный параметр $A - B$, а также безразмерные параметры m и n , могут принимать любые значения. Знак параметра n совпадает со знаком $A - B$. В выражениях для коэффициентов при четных степенях a_{21} в алгебраических уравнениях (1.10.11) и (1.10.16) параметры m и n входят во второй степени, а коэффициенты при нечетных степенях пропорциональны параметру m . Отсюда следует, что изменение знаков величин m и n при

сохранении их абсолютных значений не влияет на абсолютную величину корней алгебраических уравнений. При изменении знака параметра m меняются лишь знаки корней, а при изменении знака параметра n корни остаются неизменными. Следовательно, находить корни систем (1.10.11) и (1.10.16) для получения равновесных решений достаточно лишь при положительных значениях параметров m и n , а соответствующие решения для отрицательных значений m будут получаться изменением знака вычисленных корней при положительных m на противоположные. Графики ветвей решений для отрицательных значений m будут получаться зеркальным отображением графиков ветвей решений для соответствующих положительных значений m относительно оси абсцисс.

Точки пересечения прямых $n = \text{const}$ с астроидами (1.10.14) и (1.10.17) лежат на границах областей с постоянным числом действительных решений и, соответственно, постоянным числом положений равновесия гиростата. В точках $n = (1 - m^{2/3})^{3/2}$ и $n = (4^{2/3} - m^{2/3})^{3/2}$ ветви решений сливаются, когда исчезают четыре решения (становятся мнимыми два корня).

Точки пересечения графиков решений с осью ординат определяются аналитически. Это точки $a_{21} = \pm 1$, $a_{21} = -m/4$ в случае 1 и $a_{21} = \pm 1$, $a_{21} = -m$ в случае 2.

Достаточные условия устойчивости положений равновесия гиростата в силу перечисленных свойств алгебраических уравнений (1.10.11) и (1.10.16) будут изменяться в зависимости от знаков параметров m и n следующим образом: при изменении знака параметра n изменяется знак $A - B$ и, соответственно, изменяются достаточные условия устойчивости в случаях 1 и 2 на противоположные. Условия устойчивости (1.11.6) и (1.11.7) не зависят от знака параметра m , так как знак направляющего косинуса $a_{21} = \sin \beta_0$, удовлетворяющего уравнению (1.10.11) в случае 1 и уравнению (1.10.16) в случае 2, и знак параметра m изменяются одновременно.

Достаточные условия устойчивости равновесных решений (1.11.6) и (1.11.7) в случаях 1 и 2 не зависят от значений параметров h_2 и h_3 .

Графики, определяющие положения равновесия гиростата при разных m и n , можно разделить на три типа, соответствующие трем диапазонам изменения параметра m :

$$0 < |m| < 1, 1 < |m| < 4, |m| > 4.$$

Значения $m = 0$, $m = \pm 1$, $m = \pm 4$ являются бифуркационными. При этих значениях одна из ветвей решений вырождается в точку, при переходе через которую исчезают четыре решения; меняются типы графиков решений в связи с изменением числа действительных корней систем уравнений (1.10.11) и (1.10.16) и, соответственно, с изменением числа положений равновесия гиростата.

В случае $m = 0$ корни уравнений (1.10.11) определяются из соотношений

$$a_{21}^2 = 0, 16a_{21}^2 = 16 - n^2 \text{ при } n^2 \leq 16,$$

а корни уравнений (1.10.16) – из соотношений

$$a_{21}^2 = 0, a_{21}^2 = 1 - n^2 \text{ при } n^2 \leq 1.$$

Условия устойчивости выполняются только для равновесных решений в случае 2 ($n > 0$), в случае 1 условия устойчивости несовместны.

На рис. 1.40 и 1.41 показаны кривые равновесных решений в случае 1 (кривые 1) и случае 2 (кривые 2); штрихами выделены участки кривых, где выполняются достаточные условия устойчивости.

Для графиков первого типа ($0 < |m| < 1$) могут существовать все 16 равновесных решений. Приведем более подробное описание поведения найденных положений равновесия для графиков первого типа на примере случая $m = 0.25$ (верхняя часть рис.1.40). Видно, что при $|n| < n_1 \approx 0.468$ существуют 16 равновесных решений. Из них 8 решений (4 действительных корня полинома (1.10.11)) соответствуют случаю 1 и 8 решений (4 действительных корня полинома (1.10.16)) – случаю 2. При $n_1 \approx \pm 0.468$

прямые $n = \pm n_1$ имеют одну общую точку с кривой (1.10.17), ветви равновесных решений в случае 2 сливаются; при этом 4 решения в случае 2 перестают существовать. В интервале $n_1 < |n| < n_2 \approx 3.093$ имеем 12 положений равновесия. Прямые $n = \pm n_2$ имеют одну общую точку с кривой (1.10.14), где ветви равновесных решений в случае 1 сливаются. При $|n| > n_2$ существуют лишь 8 положений равновесия (4 ветви решений). Тогда в верхней части рис.1.40 случаю 1 соответствуют верхние кривые в верхней и нижней полуплоскости параметров n , $\sin \beta_0$, а случаю 2 нижние кривые.

Достаточные условия устойчивости выполняются для равновесных решений в случае 2 ($n > 0$), соответствующих нижним кривым в квадрантах $n > 0, \sin \beta_0 > 0$ и $n > 0, \sin \beta_0 < 0$, а в случае 1 ($n < 0$) – верхней кривой в квадранте $n < 0, \sin \beta_0 < 0$.

При $m = 1$ (средняя часть рис.1.40) в случае 2 происходит вырождение ветвей решений в нижней полуплоскости в точку (случай двух кратных корней $\sin \beta_0 = -1$). Слияние ветвей решений для случая 1 происходит при $n \approx 1.874$. При $m = 1$ существуют две устойчивые ветви решений – нижняя кривая в квадранте $n > 0, \sin \beta_0 > 0$ для случая 2 и верхняя кривая в квадранте $n < 0, \sin \beta_0 < 0$ для случая 1.

Характер графиков второго типа, соответствующих интервалам $1 < m < 4$ и $-4 < m < -1$, рассмотрим на примере варианта $m = 2$ (нижняя часть рис.1.40). При $|n| < 0.9$ существуют 12 равновесных решений, из них 8 решений соответствуют случаю 1 и 4 решения – случаю 2. Прямые $n = \pm 0.9$ имеют одну общую точку с кривой (1.10.16), где происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 1. При $|n| > 0.9$ существуют лишь 8 положений равновесия (4 ветви решений). Случаю 1 при $m = 2$ на рис.1.40 соответствуют верхняя кривая в верхней полуплоскости и верхняя кривая в нижней полуплоскости. Случаю 2 соответствуют нижняя

кривая в верхней полуплоскости и нижняя кривая в нижней полуплоскости параметров n , $\sin \beta_0$.

Достаточные условия устойчивости выполняются в случае 2 ($n > 0$) для равновесных решений, принадлежащих нижней кривой в квадранте $n > 0$, $\sin \beta_0 > 0$. В случае 1 ($n < 0$) достаточные условия устойчивости выполняются для равновесных решений, принадлежащих верхней кривой в квадранте $n < 0$, $\sin \beta_0 < 0$.

При $m = 4$ (верхняя часть рис.1.41) в случае 1 происходит вырождение нижних ветвей решений в нижней полуплоскости в точку, соответствующую случаю двух кратных корней $\sin \beta_0 = -1$, когда $n = 0$. При этом существуют две устойчивые ветви решений – нижняя в квадранте $n > 0$, $\sin \beta_0 > 0$ в случае 2 и верхняя в квадранте $n < 0$, $\sin \beta_0 < 0$ в случае 1.

При $|m| > 4$ на примере случая $m = 5$ (нижняя часть рис.1.41) представлены графики кривых третьего типа.

Как видно из графиков на рис. 1.40 и 1.41, при возрастании параметров m и n равновесные решения приближаются к тривиальным положениям равновесия, когда $\sin \beta_0 = 0$.

Численные результаты показывают, что в случае 2 при $n > 0$ и при $0 < |m| < 1$ существуют две устойчивые ветви равновесных решений (четыре устойчивых положения равновесия), при $|m| \geq 1$ существует одна устойчивая ветвь равновесных решений (два устойчивых положения равновесия). В случае 1 при $n < 0$ и $|m| > 0$ всегда существует одна устойчивая ветвь равновесных решений (два устойчивых положения равновесия).

Рассматриваемая в данном разделе задача по постановке и методу решения наиболее близка к исследованию, проведенному в работе [133]. Однако в [133] отсутствует определение бифуркационных значений

параметров системы, при которых изменяется число положений равновесия, определение числа положений равновесия и исследование достаточных условий их устойчивости проведено лишь для частного случая, когда вектор гиросtatического момента совпадает с одной из главных центральных осей инерции спутника, общий случай задачи при этом не рассматривался.

Определению стационарных движений осесимметричного спутника-гиростата, на который, кроме гравитационного момента, действуют другие внешние моменты, посвящен ряд работ. В [31, 51] проведено исследование вращательного движения осесимметричного спутника-гиростата ($A = B$, $H_1 = H_2 = 0$, $H_3 \neq 0$) на круговой экваториальной орбите при действии аэродинамического и магнитного моментов. В [31] определены семейства стационарных вращений спутника и получены достаточные условия их устойчивости. В [51] проведено подробное исследование положений равновесия спутника в орбитальной системе координат. Показано, что для спутника-гиростата, находящегося только под действием гравитационного и аэродинамического моментов, возможны лишь два типа решений: решения, когда главные центральные оси инерции спутника направлены вдоль осей орбитальной системы координат и решения, когда одна из главных центральных осей инерции спутника совпадает с осью орбитальной системы координат и спутник повернут относительно этой оси на постоянный угол. Результаты работы [51] обобщены в [147] с учетом сжатия Земли.

В [49, 50] получены условия на параметры системы, обеспечивающие устойчивость или неустойчивость относительных равновесий осесимметричного спутника-гиростата с постоянным вектором гиросtatического момента, который находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника ($H_1 > 0$, $H_2 > 0$, $H_3 = 0$) на круговой орбите. Проведен параметрический анализ условий гироскопической стабилизации неустойчивых равновесий спутника-гиростата.

Исследования выполнены с помощью символьно-численного моделирования с использованием пакета компьютерной алгебры *Mathematica*.

Подробное исследование влияния на динамику спутника гравитационного и аэродинамического моментов рассмотрено в Главе 2 настоящей работы.

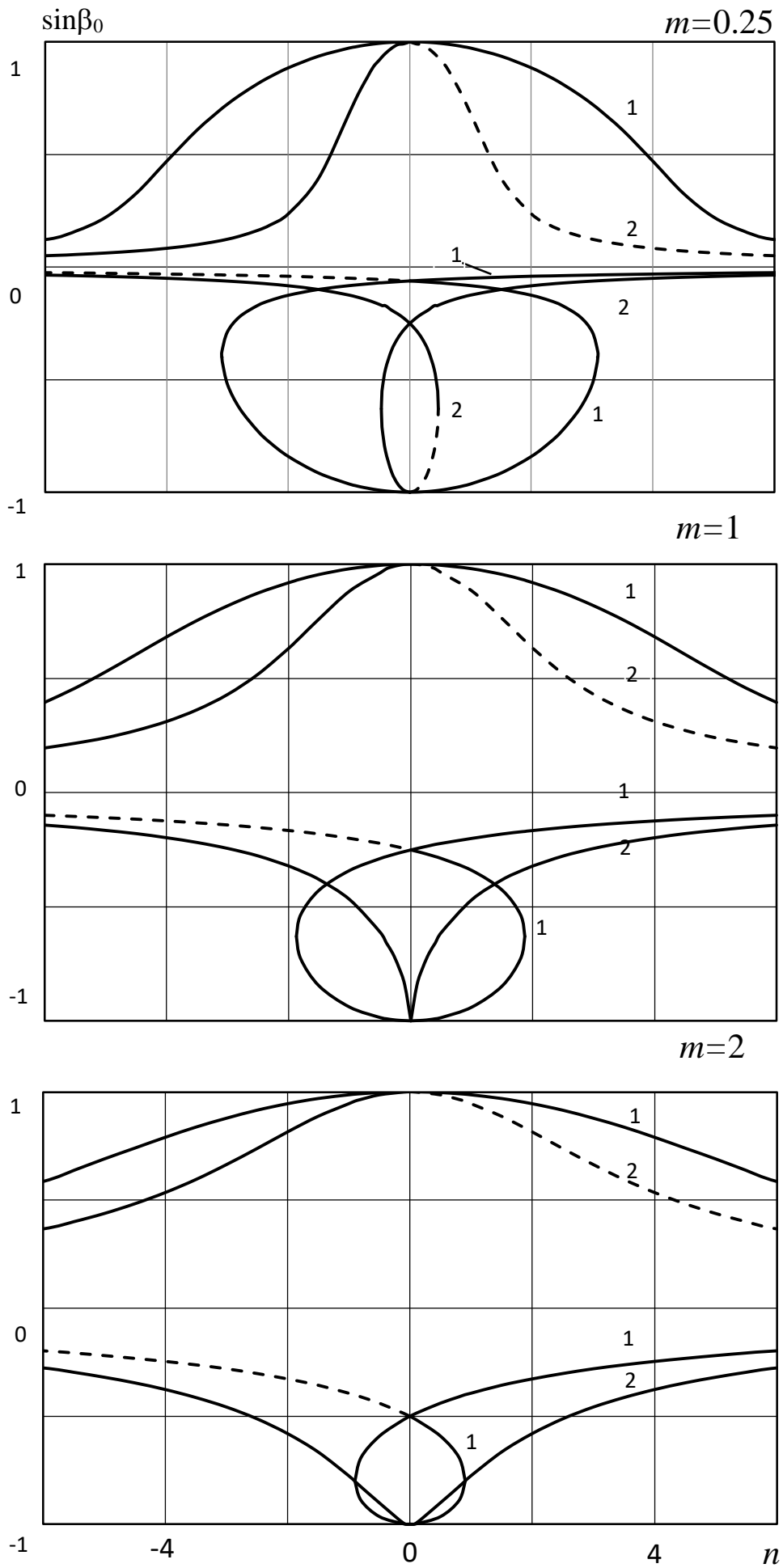


Рис.1.40.

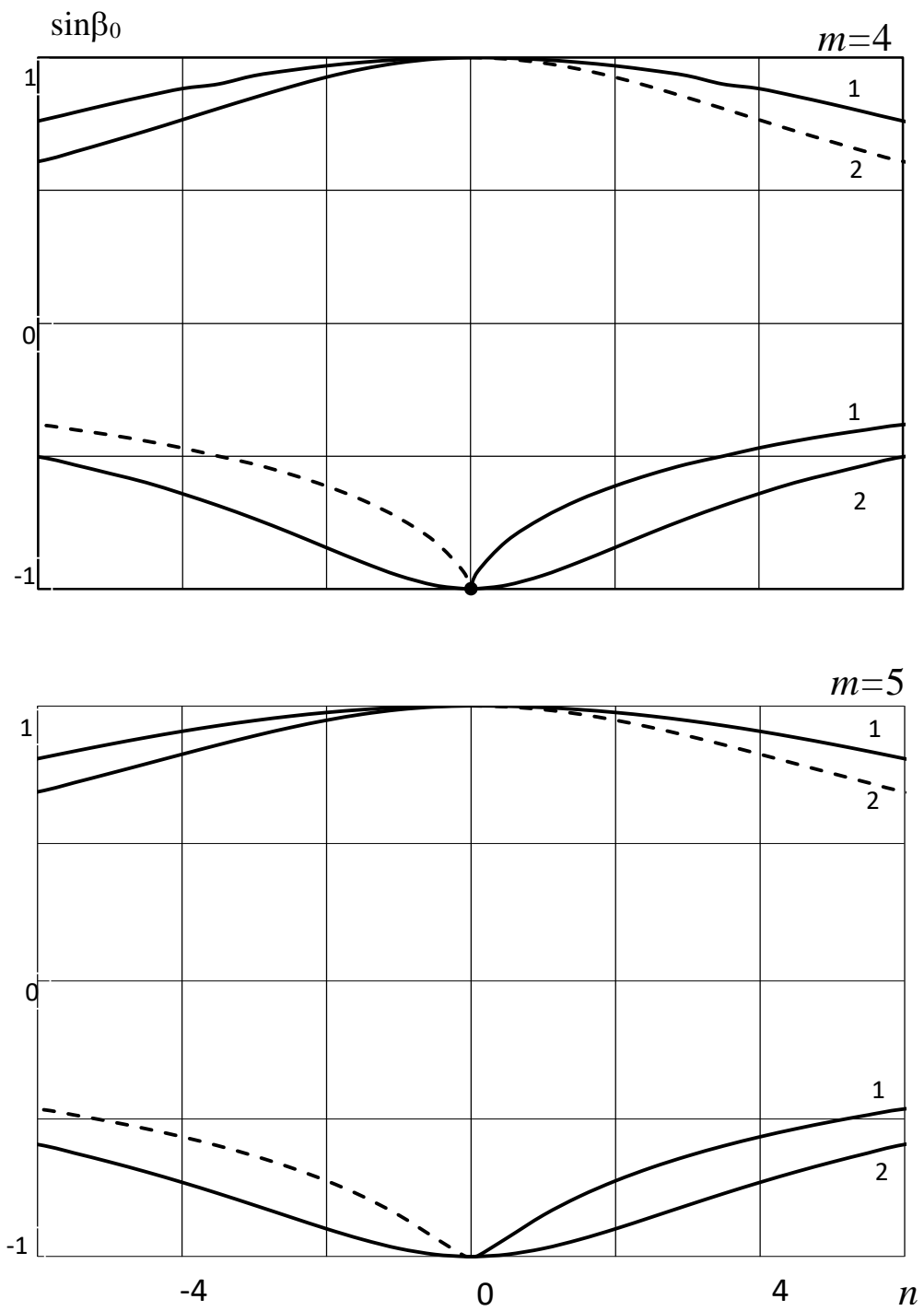


Рис. 1.41.

Глава 2. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [161, 162, 167, 169–171, 183, 184]

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим движение спутника–твёрдого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Сопротивление атмосферы зависит от параметров спутника и высоты орбиты и может оказывать существенное влияние на движение спутника относительно центра масс. Учитывая действие сопротивления атмосферы, будем исходить из следующих предположений: 1) Земля и окружающий ее слой атмосферы вращается с одной и той же угловой скоростью; 2) действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника относительно воздуха; 3) влиянием атмосферы на поступательное движение спутника можно пренебречь.

Предположение 1) на сравнительно низких высотах выполняется достаточно хорошо. С ростом высоты, по-видимому, будет наблюдаться уменьшение угловой скорости вращения атмосферы. Нарушение данного предположения может быть связано с порывами ветра и сезонными течениями в атмосфере. Предположение 2) выполняется точно лишь для спутников в форме конуса. Для спутников более сложной формы это предположение выполняется приближенно. Влияние сопротивления атмосферы на движение центра масс спутника сводится к медленному изменению параметров орбиты. Этими изменениями на протяжении не очень многих периодов колебаний спутника относительно центра масс, как правило, можно пренебречь.

Получим, при сделанных предположениях, выражения для аэродинамических моментов, действующих на спутник. Пусть a_p, b_p, c_p – координаты центра давления спутника в системе координат $Oxyz$, V_x, V_y, V_z – проекции скорости центра масс спутника относительно воздуха на оси орбитальной системы координат, рассчитываемые по формулам

$$\begin{aligned} V_x &= R_0 \sqrt{\frac{g_0}{p_*}} (1 + e \cos v) - \Omega \rho \cos i, \\ V_y &= \Omega \rho \sin i \cos u, \\ V_z &= R_0 \sqrt{\frac{g_0}{p_*}} e \sin v. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где Ω – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси; R_0 – радиус Земли, g_0 – ускорение силы тяжести на поверхности Земли, i – наклонение орбиты, u – аргумент широты. Направляющие косинусы вектора скорости запишутся в виде $V_x/V, V_y/V, V_z/V$, где $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$. Тогда, проекции аэродинамического момента на оси $Oxyz$ примут вид [2]

$$\begin{aligned} M_x &= -Q \left[b_p \left(\frac{V_x}{V} a_{13} + \frac{V_y}{V} a_{23} + \frac{V_z}{V} a_{33} \right) - c_p \left(\frac{V_x}{V} a_{12} + \frac{V_y}{V} a_{22} + \frac{V_z}{V} a_{32} \right) \right], \\ M_y &= -Q \left[c_p \left(\frac{V_x}{V} a_{11} + \frac{V_y}{V} a_{21} + \frac{V_z}{V} a_{31} \right) - a_p \left(\frac{V_x}{V} a_{13} + \frac{V_y}{V} a_{23} + \frac{V_z}{V} a_{33} \right) \right], \\ M_z &= -Q \left[a_p \left(\frac{V_x}{V} a_{12} + \frac{V_y}{V} a_{22} + \frac{V_z}{V} a_{32} \right) - b_p \left(\frac{V_x}{V} a_{11} + \frac{V_y}{V} a_{21} + \frac{V_z}{V} a_{31} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Здесь $Q = \frac{1}{2} \rho^* V^2 S c_x$, ρ^* – плотность атмосферы, S – характерная площадь спутника, c_x – коэффициент сопротивления, Q – сила сопротивления. Проекция силы сопротивления в орбитальной системе координат, равны $-Q(V_x/V, V_y/V, V_z/V)$.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{V_x}{V} a_{11} + \frac{V_y}{V} a_{21} + \frac{V_z}{V} a_{31}, \\ \bar{Y} &= \frac{V_x}{V} a_{12} + \frac{V_y}{V} a_{22} + \frac{V_z}{V} a_{32}, \\ \bar{Z} &= \frac{V_x}{V} a_{13} + \frac{V_y}{V} a_{23} + \frac{V_z}{V} a_{33},\end{aligned}$$

то соотношения (2.1.2) можно записать в более компактном виде $M_x = -Q(b_p \bar{Z} - c_p \bar{Y})$, $M_y = -Q(c_p \bar{X} - a_p \bar{Z})$, $M_z = -Q(a_p \bar{Y} - b_p \bar{X})$.

Основная масса работ по спутникам, подверженным действию гравитационного и аэродинамического моментов, посвящена определению стационарных движений и исследованию их устойчивости. Также как и в задаче исследования динамики спутника-гиростата, введем понятие прямой и обратной задачи. Определение параметров, задающих ориентацию спутника через инерционные характеристики и компоненты аэродинамического момента, назовем прямой задачей. Если в число определяемых параметров входят компоненты аэродинамического момента, то будем говорить об обратной задаче.

2.2. Уравнения движения системы

Для записи уравнений движения спутника будем использовать введенные в главе 1 орбитальную систему координат $OXYZ$ и связанную со спутником систему координат $Oxyz$, оси Ox , Oy , Oz которой направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат с использованием углов Эйлера ψ , ϑ , φ . Направляющие косинусы осей Ox , Oy , Oz в системе $OXYZ$ выражаются через классические углы Эйлера (рис.1.1.) с помощью соотношений (1.2.1). Проекции абсолютной угловой скорости вращения спутника p , q , r выражаются через углы Эйлера с помощью соотношений (1.2.2) – (1.2.3).

Силовая функция, определяющая действие сопротивления атмосферы Земли на спутник имеет следующий вид [37, 148]:

$$U_a = -Q(a_p \bar{X} + b_p \bar{Y} + c_p \bar{Z}). \quad (2.2.1)$$

Тогда формулы (2.1.2), определяющие проекции аэродинамического момента на оси $Oxyz$, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x &= a_{13} \frac{\partial U_a}{\partial a_{12}} - a_{12} \frac{\partial U_a}{\partial a_{13}} + a_{23} \frac{\partial U_a}{\partial a_{22}} - a_{22} \frac{\partial U_a}{\partial a_{23}} + a_{33} \frac{\partial U_a}{\partial a_{32}} - a_{32} \frac{\partial U_a}{\partial a_{33}}, \\ M_y &= a_{11} \frac{\partial U_a}{\partial a_{13}} - a_{13} \frac{\partial U_a}{\partial a_{11}} + a_{21} \frac{\partial U_a}{\partial a_{23}} - a_{23} \frac{\partial U_a}{\partial a_{21}} + a_{31} \frac{\partial U_a}{\partial a_{33}} - a_{33} \frac{\partial U_a}{\partial a_{31}}, \\ M_z &= a_{12} \frac{\partial U_a}{\partial a_{11}} - a_{11} \frac{\partial U_a}{\partial a_{12}} + a_{23} \frac{\partial U_a}{\partial a_{21}} - a_{21} \frac{\partial U_a}{\partial a_{22}} + a_{32} \frac{\partial U_a}{\partial a_{31}} - a_{31} \frac{\partial U_a}{\partial a_{32}}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Уравнения движения спутника относительно его центра масс в среде с сопротивлением запишутся в форме уравнений Эйлера с аэродинамическими моментами (2.2.2) и кинематическими соотношениями (1.2.8) [2, 148]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 3 \frac{\mu}{\rho^3} (C - B)a_{32}a_{33} + M_x, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= 3 \frac{\mu}{\rho^3} (A - C)a_{33}a_{31} + M_y, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 3 \frac{\mu}{\rho^3} (B - A)a_{31}a_{32} + M_z. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Здесь A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника, p, q, r – проекции угловой скорости спутника на оси Ox, Oy, Oz ; точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Рассмотрим движение спутника по круговой орбите ($e = 0, \omega = \omega_0$), пренебрегая увлечением атмосферы вращающейся Землей ($\Omega = 0$). Заметим, что учет вращения Земли приводит к появлению вынужденного решения с амплитудами колебаний $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$ по углам α, β и γ соответственно. В

работе [8] показано, что $A_\alpha \sim \varepsilon^2$, $A_\beta \sim \varepsilon$, $A_\gamma \sim \varepsilon$, где $\varepsilon = (\Omega/\omega_0)\sin i$. На экваториальной орбите ($i = 0$) вынужденное решение обращается в нуль. В диапазоне высот от 200 до 700 км отношение (Ω/ω_0) очень слабо зависит от высоты орбиты и при $i = 65^\circ$, $\varepsilon \approx 0.06$. Следовательно, в первом приближении можно пренебречь влиянием малого параметра ε на относительное движение спутника.

Тогда уравнения движения спутника (2.2.3), (1.2.8) примут вид [2, 148, 161, 162, 167]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \omega_0^2(H_2a_{13} - H_3a_{12}) &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \omega_0^2(H_3a_{11} - H_1a_{13}) &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \omega_0^2(H_1a_{12} - H_2a_{11}) &= 0; \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} + \omega_0 a_{21}, & \bar{p} &= \dot{\psi} a_{31} + \dot{\mathcal{G}} \cos \varphi, \\ q &= \bar{q} + \omega_0 a_{22}, & \bar{q} &= \dot{\psi} a_{32} - \dot{\mathcal{G}} \sin \varphi, \\ r &= \bar{r} + \omega_0 a_{23}, & \bar{r} &= \dot{\psi} a_{33} + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

В уравнениях (2.2.4), (2.2.5)

$$H_1 = -\frac{Qa_p}{\omega_0^2}, \quad H_2 = -\frac{Qb_p}{\omega_0^2}, \quad H_3 = -\frac{Qc_p}{\omega_0^2};$$

ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите; Без потери общности будем предполагать, что $B > A > C$. Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Для уравнений движения (2.2.4), (2.2.5) справедлив обобщенный интеграл энергии [2, 37, 148]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A - C)a_{31}^2 + (B - C)a_{32}^2] + \\ + \frac{1}{2}\omega_0^2[(B - A)a_{21}^2 + (B - C)a_{23}^2] - \omega_0^2(H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13}) = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

2.3. Положения равновесия спутника

Положив в (2.2.4) и (2.2.5) $\psi = \psi_0 = \text{const}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = \text{const}$, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, получим при $A \neq B \neq C$ уравнения

$$\begin{aligned}
(C - B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - H_2a_{13} + H_3a_{12} &= 0, \\
(A - C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - H_3a_{11} + H_1a_{13} &= 0, \\
(B - A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - H_1a_{12} + H_2a_{11} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Подставляя в (2.3.1) выражения для направляющих косинусов (1.2.1) через углы Эйлера, получим три уравнения с тремя неизвестными $\psi_0, \mathcal{Q}_0, \varphi_0$, найдя которые, получим все положения равновесия спутника-гиростата.

В дальнейшем исследовании удобнее использовать эквивалентную систему

$$\begin{aligned}
Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} &= 0, \\
3(Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33}) + (H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}) &= 0, \\
(Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - (H_1a_{21} + H_2a_{22} + H_3a_{23}) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

которая получается проектированием уравнений (2.3.1) на оси орбитальной системы координат. Систему (2.3.2) с использованием безразмерных параметров $h_i = H_i / (B - C)$, $(i = 1, 2, 3)$, $\nu = (B - A) / (B - C)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\nu a_{21}a_{31} + a_{23}a_{33} &= 0, \\
-3(\nu a_{11}a_{31} + a_{13}a_{33}) + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) &= 0, \\
\nu a_{11}a_{21} + a_{13}a_{23} + (h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Систему (2.3.2) или (2.3.3) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными $\psi_0, \mathcal{Q}_0, \varphi_0$. Другой способ замыкания уравнений (2.3.2) или (2.3.3) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов

$$\begin{aligned}
a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\
a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\
a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Система уравнений (2.3.2), (2.3.3) была решена для некоторых частных случаев. В статьях [148, 149] для случая, когда центр давления аэродинамических сил расположен на одной из главных центральных осей инерции спутника (например, $h_1 \neq 0, h_2 = h_3 = 0, A \neq B \neq C$), аналитически определены все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Для каждого положения равновесия спутника получены как достаточные, так и необходимые условия устойчивости. Исследована эволюция областей устойчивости в зависимости от двух безразмерных параметров задачи. Более сложный случай, когда центр давления аэродинамических сил лежит в одной из главных центральных плоскостей инерции спутника (например, $h_1 \neq 0, h_2 = 0, h_3 \neq 0, A \neq B \neq C$), рассмотрен в [150]. Здесь предложен метод численного определения всех положений равновесия в зависимости от трех безразмерных параметров задачи, получены достаточные условия их устойчивости. И, наконец, в статье [162] были исследованы положения равновесия осесимметричного спутника при $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0, A \neq B = C$.

Для системы (2.3.2), (2.3.4) или (2.3.3), (2.3.4) возможны следующие две постановки задачи о положениях равновесия спутника.

1. Прямая задача: заданы A, B, C, H_1, H_2, H_3 ; требуется определить все девять направляющих косинусов (или три угла Эйлера), т.е. найти все положения равновесия спутника.

2. Обратная задача: заданы A, B, C и три направляющих косинуса; требуется определить H_1, H_2, H_3 и оставшиеся шесть направляющих косинусов так, чтобы удовлетворялись уравнения (2.3.1), (2.3.4) или (2.3.3), (2.3.4).

Обратная задача была решена в общем случае в [37]. Прямая задача была решена для некоторых частных случаев, упомянутых выше.

Используя результаты решения алгебраической системы (1.3.5) из главы 1, рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned}
Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} &= 0, \\
a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0, \\
a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1,
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

первое уравнение которой является первым уравнением системы (2.3.2), а второе и третье являются шестым и вторым условием ортогональности (2.3.4).

Так как уравнения (2.3.5) при $m_1 = Aa_{31}$, $m_2 = Ba_{32}$, $m_3 = Ca_{33}$, $n_1 = a_{31}$, $n_2 = a_{32}$, $n_3 = a_{33}$, $u_1 = a_{21}$, $u_2 = a_{22}$, $u_3 = a_{23}$ совпадают с (1.3.5), то решение системы (2.3.5) имеет вид [37, 148]:

$$a_{21} = \pm \frac{(B-C)a_{32}a_{33}}{\sqrt{D}}, \quad a_{22} = \pm \frac{(C-A)a_{33}a_{31}}{\sqrt{D}}, \quad a_{23} = \pm \frac{(A-B)a_{31}a_{32}}{\sqrt{D}}, \tag{2.3.6}$$

где $D = (B-C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C-A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (A-B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2$. Используя

соотношения $a_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, $a_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$,

$a_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$ и вводя обозначение $I_3 = Aa_{31}^2 + Ba_{32}^2 + Ca_{33}^2$ получим также

$$a_{11} = \pm \frac{(I_3 - A)a_{31}}{\sqrt{D}}, \quad a_{12} = \pm \frac{(I_3 - B)a_{32}}{\sqrt{D}}, \quad a_{13} = \pm \frac{(I_3 - C)a_{33}}{\sqrt{D}}. \tag{2.3.7}$$

Решения (2.3.6) и (2.3.7) существуют при $D \neq 0$, когда любые два направляющих косинуса из трех a_{31} , a_{32} , a_{33} не обращаются в нуль одновременно. Эти частные случаи следует исследовать отдельно, используя исходную систему (2.3.2), (2.3.4).

Используя второе и третье уравнения (2.3.2), третье условие ортогональности (2.3.4) и выражения (2.3.7), можно показать, что

$$Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33} = \mp \sqrt{D} = \frac{1}{3}(H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}). \tag{2.3.8}$$

Тогда выражения (2.3.6) и (2.3.7) примут более простой вид [148]

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{3(B-C)a_{32}a_{33}}{F}, & a_{11} &= \frac{3(I_3 - A)a_{31}}{F}, \\
a_{22} &= \frac{3(C-A)a_{33}a_{31}}{F}, & a_{12} &= \frac{3(I_3 - B)a_{32}}{F}, \\
a_{23} &= \frac{3(A-B)a_{31}a_{32}}{F}, & a_{13} &= \frac{3(I_3 - C)a_{33}}{F}.
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Здесь $F = H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}$.

Заметим, что уравнения (2.3.1) можно записать в векторном виде

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{Y}} \times \vec{\mathbf{f}}, \quad \text{где} \quad \vec{\mathbf{H}} = (H_1, H_2, H_3), \quad \vec{\mathbf{Y}} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \quad \vec{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3),$$

$$f_1 = (C-B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}), \quad f_2 = (A-C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}), \quad f_3 = (B-A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}).$$

Решение векторного уравнения относительно H_1, H_2, H_3 имеет вид [37]:

$$\vec{\mathbf{H}} = \mu_2 \vec{\mathbf{Y}} + 3\sqrt{D}\vec{\mathbf{n}} + (A-B)(B-C)(C-A)a_{31}a_{32}a_{33}\vec{\mathbf{u}}.$$

Здесь, $\vec{\mathbf{n}} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$, $\vec{\mathbf{u}} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, μ_2 – произвольная константа. Таким образом, система (2.3.2) – (2.3.4) разрешена относительно неизвестных $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, H_1, H_2, H_3$. Полученное решение выражается через направляющие косинусы a_{31}, a_{32}, a_{33} , моменты инерции спутника A, B, C и произвольную константу μ_2 . Произвольность выбора направляющих косинусов a_{31}, a_{32}, a_{33} , удовлетворяющих лишь третьему условию ортогональности (2.3.4), означает, что любая ось спутника может быть направлена на центр Земли. Систему (2.3.1), (2.3.4) можно разрешить также относительно неизвестных $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, H_1, H_2, H_3$ и убедиться, что любую ось спутника можно направить по нормали к плоскости орбиты.

Возводя левую и правую части уравнения (2.3.8) в квадрат, исключая из третьего уравнения (2.3.2) $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ с помощью (2.3.9) и добавляя третье уравнение (2.3.4), получим систему уравнений [148, 161, 167]

$$\begin{aligned}
& 9[(B-C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C-A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (A-B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2] = \\
& = (H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33})^2, \\
& 3(B-C)(C-A)(A-B) a_{31} a_{32} a_{33} - [H_1(B-C) a_{32} a_{33} + H_2(C-A) a_{33} a_{31} + \\
& + H_3(A-B) a_{31} a_{32}] (H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}) = 0, \\
& a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

для определения направляющих косинусов a_{31}, a_{32}, a_{33} . После решения системы (2.3.10) формулы (2.3.9) позволяют определить оставшиеся шесть направляющих косинусов.

Система уравнений (2.3.10) была впервые приведена в [148]. В [149] была показана возможность получения из системы (2.3.10) одного алгебраического уравнения с одним неизвестным, используя подход работы [157].

Как показано в [167, 183], уравнения (2.3.9) и (2.3.10) с использованием безразмерных параметров примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{3[\nu a_{32}^2 - (1-\nu) a_{33}^2] a_{31}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{21} &= \frac{3 a_{32} a_{33}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, \\
a_{12} &= \frac{-3(\nu a_{31}^2 + a_{33}^2) a_{32}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{22} &= \frac{-3(1-\nu) a_{33} a_{31}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, \\
a_{13} &= \frac{3[(1-\nu) a_{31}^2 + a_{32}^2] a_{33}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{33} &= \frac{-3\nu a_{31} a_{32}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}};
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

$$\begin{aligned}
& 9[a_{32}^2 a_{33}^2 + (1-\nu)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + \nu^2 a_{31}^2 a_{32}^2] = \\
& = (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33})^2 (a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2), \\
& 3\nu(1-\nu) a_{31} a_{32} a_{33} - [h_1 a_{32} a_{33} - h_2(1-\nu) a_{33} a_{31} - h_3 \nu a_{31} a_{32}] \times \\
& \times (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}) = 0, \\
& a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Здесь, для обеспечения однородности правая часть первого уравнения (2.3.12) умножается на $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$.

Учитывая однородность первых двух уравнений (2.3.12), вводя переменные $x = \frac{a_{31}}{a_{33}}$, $y = \frac{a_{32}}{a_{33}}$ и разделив обе части первого уравнения (2.3.12)

на a_{33}^4 , а второго уравнения (2.3.12) на a_{33}^3 , получим алгебраическую систему двух уравнений относительно переменных x и y :

$$\begin{aligned} 9[y^2 + (1-\nu)^2 x^2 + \nu^2 x^2 y^2] &= (h_1 x + h_2 y + h_3)^2 (1 + x^2 + y^2), \\ 3\nu(1-\nu)xy - [h_1 y - h_2(1-\nu)x - h_3 \nu xy](h_1 x + h_2 y + h_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Далее, подставляя выражения $a_{31} = xa_{33}$, $a_{32} = ya_{33}$ в последнее уравнение системы (2.3.12), получим выражение

$$a_{33}^2 = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}. \quad (2.3.14)$$

Систему уравнений (2.3.14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_0 y^2 + a_1 y + a_2 &= 0, \\ b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4 &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= h_2(\nu h_3 x - h_1), \\ a_1 &= \nu h_1 h_3 x^2 - h_1 h_3 + [3\nu(1-\nu) - h_1^2 + (1-\nu)h_2^2 + \nu h_3^2]x, \\ a_2 &= (1-\nu)h_2(h_1 x + h_3)x, \\ b_0 &= h_2^2, \quad b_1 = 2h_2(h_1 x + h_3), \\ b_2 &= (h_2^2 + h_3^2 - 9) + 2h_1 h_3 x + (h_1^2 + h_2^2 - 9\nu^2)x^2, \\ b_3 &= 2h_2(h_1 x + h_3)(1 + x^2), \\ b_4 &= (h_1 x + h_3)^2(1 + x^2) - 9(1-\nu)^2 x^2. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Результант $R(x)$ уравнений (2.3.15) имеет следующий вид:

$$R(x) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Уравнение $R(x) = 0$ с использованием системы компьютерной алгебры *Mathematica* 8.0 [136] можно представить в виде алгебраического уравнения 12-го порядка относительно x [161, 167, 183]

$$\begin{aligned} p_0 x^{12} + p_1 x^{11} + p_2 x^{10} + p_3 x^9 + p_4 x^8 + p_5 x^7 + p_6 x^6 + \\ + p_7 x^5 + p_8 x^4 + p_9 x^3 + p_{10} x^2 + p_{11} x + p_{12} = 0, \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

коэффициенты которого представляют собой довольно сложные полиномы, зависящие от четырех параметров ν, h_1, h_2, h_3 :

$$p_0 = h_1^4 h_3^4 \nu^6,$$

$$p_1 = -2h_1^3 h_3^3 \nu^5 [2h_1^2 + (1-\nu)h_2^2 - 2\nu h_3^2 - 3\nu(1-\nu)],$$

$$\begin{aligned} p_2 = h_1^2 h_3^2 \nu^4 [6h_1^4 + h_1^2(h_2^2(\nu^2 - 8\nu + 7) + h_3^2(\nu^2 - 16\nu + 1) + 17\nu^2 - 16\nu - 1) \\ + h_2^4(1-\nu)^2 + h_2^2(1-\nu) + 3\nu^2(2h_3^4 + 3h_3^2(1-\nu^2) + 3(1-\nu)^2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 = -2h_1 h_3 \nu^3 [2h_1^6 + h_1^4(h_2^2(\nu^2 - 5\nu + 4) + 2h_3^2(\nu^2 - 6\nu + 1) \\ + 8\nu^2 - 7\nu - 1) + h_1^2(h_2^4(2-\nu)(1-\nu)^2 + h_2^2(1-\nu)(h_3^2(3\nu^2 - 13\nu + 3) \\ - (1-\nu)(9\nu^2 + 1)) - \nu(2h_3^4(\nu^2 - 6\nu + 1) + h_3^2(15\nu^3 - 8\nu^2 - 8\nu + 1) \\ - 3(1-\nu)^2(2\nu + 1))) + h_3^2(h_2^4(1-\nu)^2)(1-2\nu) \\ - h_2^2\nu(1-\nu)(h_3^2(1-4\nu) - (1-\nu)(9\nu^2 + 1) \\ + \nu^3(-2h_3^4 + 9h_3^2\nu(1-\nu) - 9(1-\nu)^2(3\nu - 2)))]], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_4 = & v^2 [h_1^8 + h_1^6(h_2^2(v^2 - 4v + 3) + 2h_3^2(3v^2 - 8v + 3) + 5v^2 - 4v - 1) \\
& + h_1^4(h_2^4((1 - v)^2)(3 - 2v) + h_2^2(1 - v)(h_3^2(14v^2 - 33v + 13) \\
& + 2(5v^3 - 6v^2 + 2v - 1)) + v(h_3^4(37v - 16(1 + v^2)) \\
& + h_3^2(-37v^3 + 46v^2 + v - 10) + 3(1 - v)^2(v + 2))] \\
& + h_1^2(h_2^6(1 - v)^4 + h_2^4(1 - v)^2(2h_3^2(4v^2 - 9v + 4) \\
& + (1 - v)^2(6v - 1)) - h_2^2v(1 - v)(h_3^4(13v^2 - 33v + 14) + 4h_3^2(9v^3 \\
& - 14v^2 + 6v - 1) + 3(1 - v)^3(2 - 3v)) + v^2(2h_3^6(3v^2 - 8v + 3) \\
& + h_3^4(54v^3 - 87v^2 + 30v + 3) - 18h_3^2v(1 - v)^2(8v - 7) - 9(1 - v)^4) \\
& + h_3^2(h_2^6(1 - v)^4 + h_2^4v(1 - v)^2(3v - 2)(h_3^2 - 3(1 - v)^2) \\
& + h_2^2v^2(1 - v)(h_3^4(1 - 3v) + 2h_3^2(9v^3 - 18v^2 + 14v - 5) \\
& - 9(1 - v)^3(6v - 1)) + v^4(h_3^2 - 9(1 - v)^2)(h_3^2 + 3(1 - v)^2)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_5 = & -2h_1h_3v [2h_1^6(v^2 - v + 1) + h_1^4(h_2^2(6 - 14v + 13v^2 - 5v^3) \\
& - v(2h_3^2(6v^2 - 7v + 6) + 10v^3 - 22v^2 + 5v + 7)) \\
& + h_1^2(h_2^4(1 - v)^2(5v^2 - 10v + 6) \\
& - h_2^2v(1 - v)(h_3^2(17v^2 - 26v + 17) + 11v^3 - 35v^2 + 27v - 3) \\
& + v^2(2h_3^4(6v^2 - 7v + 6) + h_3^2(29v^3 - 79v^2 + 47v + 3) \\
& - 3(1 - v)^2(22v^2 - 22v - 3))] + 2h_2^6(1 - v)^5 \\
& - h_2^4v(1 - v)^2(h_3^2(6v^2 - 10v + 5) + 2(1 - v)^2(9v - 5)) \\
& + h_2^2v^2(1 - v)(h_3^4(6v^2 - 8v + 5) + h_3^2(27v^3 - 83v^2 + 75v - 19) \\
& - 6(1 - v)^3(9v - 1)) + v^3(-2h_3^6(v^2 - v + 1) + h_3^4(2 - 22v + 29v^2 \\
& - 9v^3) + 9h_3^2(1 - v)^2(7v^2 - 10v + 2) - 18(1 - v)^4(3v + 1)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_6 = & h_1^8(v^2 + 1) - 2h_1^6(h_2^2(v^3 - 2v^2 + 3v - 2) + v(h_3^2(8v^2 - 6v + 8) + 2v^3 \\
& - 7v^2 + 2v + 3)) + 2h_1^4(h_2^4(1 - v)^2(v^2 - 3v + 3) \\
& - h_2^2v(1 - v)(h_3^2(15v^2 - 20v + 17) + 10v(1 - v)) + v^2(2h_3^4(9v^2 \\
& - 8v + 9) + h_3^2(13v^3 - 65v^2 + 55v - 3) - 3(1 - v)^2(7v^2 - 7v - 3))) \\
& - 2h_1^2(-h_2^6(2 - v)(1 - v)^4 \\
& + h_2^4v(1 - v)^2(h_3^2(10v^2 - 17v + 10) + (1 - v)^2(8v - 9)) \\
& - h_2^2v^2(1 - v)(h_3^4(17v^2 - 20v + 15) + 5h_3^2(7v^3 - 27v^2 + 27v - 7) \\
& - 21v(1 - v)^3) + v^3(h_3^6(8v^2 - 6v + 8) + h_3^4(3v^3 - 55v^2 + 65v - 13) \\
& - 27h_3^2(1 - v)^2(2v^2 - 5v + 2) + 9(1 - v)^4(2v + 3))) + h_2^8(1 - v)^6 \\
& + 2h_2^6v(1 - v)^4(h_3^2(2v - 1) + 6(1 - v)^2) \\
& + 2h_2^4v^2(1 - v)^2(h_3^4(3v^2 - 3v + 1) + h_3^2(1 - v)^2(9v - 8) + 27(1 - v)^4) \\
& + 2h_2^2v^3(1 - v)(h_3^6(2v^2 - v + 1) + 10h_3^4v(1 - v) + 21h_3^2(1 - v)^3 \\
& - 54(1 - v)^5) + v^4(h_3^2 + 3(1 - v))^2(h_3^4(v^2 + 1) - 10h_3^2(1 - v)^2 \\
& + 9(1 - v)^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_7 = & 2h_1h_3[2h_1^6(v^2 - v + 1) + h_1^4(h_2^2(-5v^3 + 13v^2 - 14v + 6) + v(-2h_3^2(6v^2 - 7v \\
& + 6) - 2v^3 + 22v^2 - 29v + 9)) - h_2^2v(1 - v)(h_3^2(17v^2 - 26v + 17) \\
& + 19v^3 - 75v^2 + 83v - 27) + h_1^2(h_2^4(1 - v)^2(5v^2 - 10v + 6) \\
& - v^2(-2h_3^4(6v^2 - 7v + 6) + h_3^2(3v^3 + 47v^2 - 79v + 29) \\
& + 9(1 - v)^2(2v^2 - 10v + 7))) + 2h_2^6(1 - v)^5 - h_2^4v(1 - v)^2(h_3^2(6v^2 \\
& - 10v + 5) + 2(1 - v)^2(5v - 9)) + h_2^2v^2(1 - v)(h_3^4(6v^2 - 8v + 5) \\
& + h_3^2(3v^3 - 27v^2 + 35v - 11) + 6(9 - v)(1 - v)^3) + v^3(-2h_3^6(v^2 - v \\
& + 1) + h_3^4(7v^3 + 5v^2 - 22v + 10) - 3h_3^2(1 - v)^2(3v^2 + 22v - 22) \\
& + 18(v + 3)(1 - v)^4)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_8 = & [h_1^8 + h_1^6(h_2^2(v^2 - 4v + 3) + 2h_3^2(3v^2 - 8v + 3) - 3(v^2 - 4v + 3)) \\
& + h_1^4(h_2^4((1 - v)^2)(3 - 2v) + h_2^2(1 - v)(h_3^2(14v^2 - 33v + 13) \\
& + 2(5v^3 - 14v^2 + 18v - 9)) + v(h_3^4(37v - 16(1 + v^2)) \\
& + 3h_3^2(v^3 + 10v^2 - 29v + 18) - 9(1 - v)^2(5v - 6))) \\
& + h_1^2(h_2^6(1 - v)^4 + h_2^4(1 - v)^2(2h_3^2(4v^2 - 9v + 4) + 3(1 - v)^2(2v - 3)) \\
& - h_2^2v(1 - v)(h_3^4(13v^2 - 33v + 14) + 4h_3^2(v^3 - 6v^2 + 14v - 9) \\
& - 9(v - 6)(1 - v)^3) + v^2(2h_3^6(3v^2 - 8v + 3) + h_3^4(-10v^3 + v^2 + 46v \\
& - 37) + 18h_3^2(1 - v)^2(7v - 8) - 81(1 - v)^4)) \\
& + h_3^2(h_2^6(1 - v)^4 - h_2^4v(1 - v)^2(h_3^2(2 - 3v) - (6 - v)(1 - v)^2) \\
& + h_2^2v^2(1 - v)(h_3^4(1 - 3v) + 2h_3^2(v^3 - 2v^2 + 6v - 5) \\
& + 3(1 - v)^3(3 - 2v)) + v^4(h_3^2 - (1 - v)^2)(h_3^2 - 3v + 3)^2)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_9 = & 2h_1h_3[2h_1^6 + h_1^4(h_2^2(v^2 - 5v + 4) + 2h_3^2(v^2 - 6v + 1) - 9(1 - v)) \\
& + h_3^2(h_2^4(1 - v)^2(1 - 2v) + h_2^2v(1 - v)(h_3^2(1 - 4v) - (1 - v)(9 + v^2)) \\
& + v^3(-2h_3^4 - 3(1 - v)^2(2 + v) + h_3^2(v^2 + 7v - 8))) \\
& + h_1^2(h_2^4(2 - v)(1 - v)^2 - h_2^2(1 - v)(h_3^2(3v^2 - 13v + 3) \\
& - (1 - v)(9 + v^2)) + v(9(1 - v)^2(3 - 2v) - 2h_3^4(v^2 - 6v + 1) \\
& + h_3^2(v^3 - 8v(1 + v) + 15))],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{10} = & h_1^2h_3^2[6h_1^4 + h_1^2(h_2^2(v^2 - 8v + 7) + h_3^2(v^2 - 16v + 1) - 9(1 - v^2)) \\
& + h_2^4(1 - v)^2 + h_2^2(1 - v)(h_3^2(1 - 7v) - (1 - v)(v^2 + 9) \\
& + v^2(6h_3^4 - h_3^2(v^2 + 16v - 17) + 9(1 - v)^2)],
\end{aligned}$$

$$p_{11} = 2h_1^3h_3^3[2h_1^2 + (1 - v)h_2^2 - 2vh_3^2 - 3v(1 - v)],$$

$$p_{12} = h_1^4h_3^4.$$

Покажем теперь, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае ($h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$, $h_3 \neq 0$, $A \neq B \neq C$) может иметь не более 24 положений равновесия. Число действительных корней полученного алгебраического уравнения (2.3.17) четно и не превышает 12. По определению результата каждому корню x_1 уравнения (2.3.17) соответствует общий корень y_1 системы (2.3.15). Подставляя значение действительного корня x_1 уравнения (2.3.17) в уравнения системы (2.3.15), найдем совпадающий корень y_1 этих уравнений. Для каждого решения (x_1, y_1) из уравнения (2.3.14) можно определить два значения a_{33} , а затем и соответствующие им величины $a_{31} = x_1 a_{33}$ и $a_{32} = y_1 a_{33}$. Таким образом, каждому действительному корню алгебраического уравнения (2.3.17) соответствуют два набора значений a_{31} , a_{32} , a_{33} , которые, в силу (2.3.11), однозначно определяют остальные направляющие косинусы a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{22} , a_{23} . Из приведенного доказательства следует, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае может иметь не более 24 положений равновесия.

2.4. Метод исследования положений равновесия

Для исследования положений равновесия спутника ставится задача определения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (2.3.17). Уравнения (2.3.17), (2.3.11) – (2.3.15) позволяют определить все положения равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов при заданных значениях безразмерных параметров задачи ν, h_1, h_2, h_3 .

Разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней уравнения определяется дискриминантной гиперповерхностью, которая задается дискриминантом многочлена (2.3.17). В символьном виде исследовать систему алгебраических уравнений, которая определяет множество особых точек дискриминантной гиперповерхности, в силу громоздкости выражений коэффициентов многочлена (2.3.17) не представляется возможным.

Зависимость числа действительных решений уравнения (2.3.17) от значений параметров исследовалась численно [161, 167, 183] с использованием пакета факторизации системы символьных вычислений *Mathematica*, который позволяет вычислять корни алгебраических уравнений с заданной точностью.

Не нарушая общности, численные исследования можно проводить при условии $B > A > C$, тогда $0 < \nu < 1$. Проекция вектора аэродинамического момента h_1, h_2, h_3 могут принимать любые ненулевые значения.

Коэффициенты уравнения (2.3.17) зависят от 4 безразмерных параметров ν, h_1, h_2, h_3 , а в уравнения исходной системы (6) входят 6 параметров H_1, H_2, H_3, A, B, C . При численном исследовании задачи уменьшение числа параметров имеет существенное значение.

Как показано в работе [162], для предельных случаев $\nu = 0$ и $\nu = 1$ (случаи осесимметричного спутника) границы между областями с постоянным числом равновесий определяются аналитически.

Для осесимметричного случая $\nu = 0$ ($A = B$) система уравнений (2.3.3) упрощается и в результате можно получить уравнения двух окружностей в плоскости (h_1, h_2) (рис.2.1) ($\nu = 0, h_3 = 0.01$), которые определяют границы областей с постоянным числом положений равновесия спутника:

$$\begin{aligned} h_1^2 + h_2^2 &= (3^{2/3} - h_3^{2/3})^3, \\ h_1^2 + h_2^2 &= (1 - h_3^{2/3})^3. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Для осесимметричного случая $\nu = 1$ ($A = C$) система стационарных уравнений (2.3.3) упрощается и в результате можно получить уравнения двух астронид в плоскости (h_1, h_2) (рис.2.2) ($\nu = 1.0, h_3 = 0.01$), которые определяют границы областей с постоянным числом равновесий спутника:

$$\begin{aligned} h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} &= 3^{2/3}, \\ h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} &= 1. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

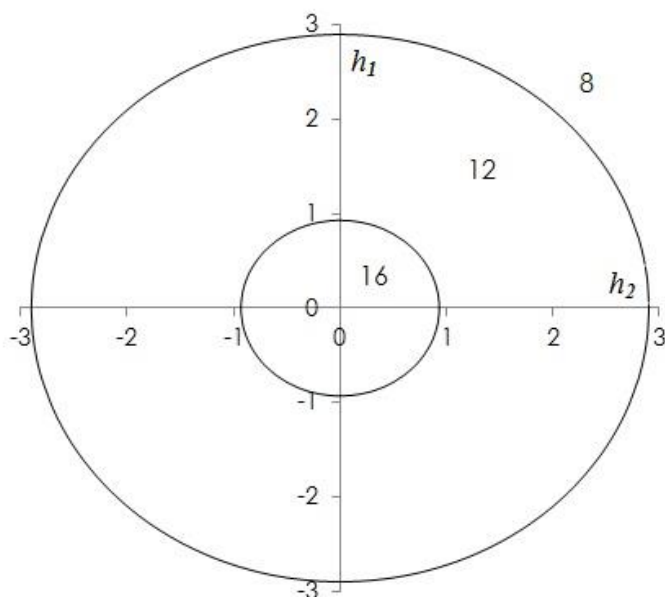
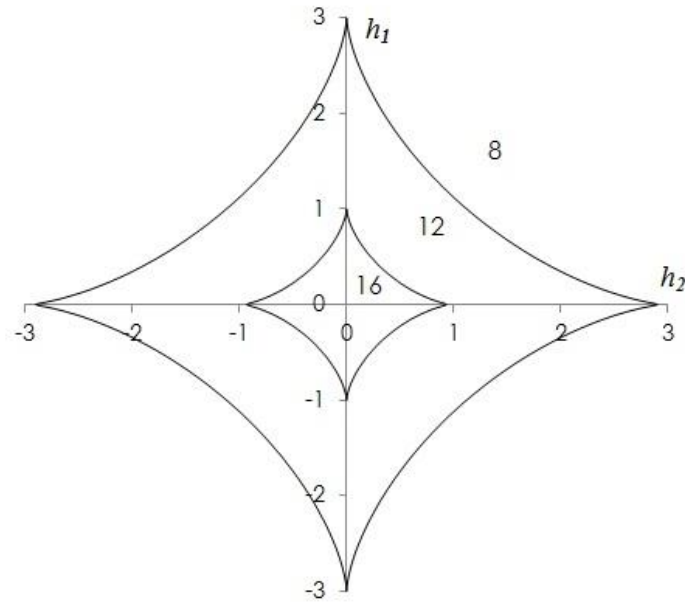


Рис. 2.1 $\nu=0, h_3 = 0.01$

Рис. 2.2 $\nu=1, h_3 = 0.01$

Как показано в [162], в случае осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов существуют лишь 16, 12 и 8 положений равновесия, которым в пространстве параметров соответствуют 3 области с равным числом положений равновесия. Подробно осесимметричный случай спутника рассмотрен в разделе 2.10.

Рассмотрим теперь более подробно свойства алгебраического уравнения (2.3.17). Из вида коэффициентов уравнения (2.3.17) следует, что число его действительных корней не зависит от знаков параметров h_1, h_2, h_3 . Действительно, выражения для коэффициентов уравнения (2.3.17) при четных степенях $x - p_{2k}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) параметры h_1, h_2, h_3 входят только в четной степени, а коэффициенты при нечетных степенях $x - p_{2k+1}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) представляет собой произведение сомножителей $p_{2k+1} = h_1 h_3 P_{2k+1}$, где множитель P_{2k+1} зависит только от четных степеней параметров h_1, h_2, h_3 . Следовательно, при изменении знаков параметров h_1, h_2, h_3 может изменяться лишь знак произведения $h_1 h_3$ и, тем самым, знак действительных корней уравнения (2.3.17). Абсолютное значение и число действительных корней остается при этом неизменным.

Численный анализ числа действительных корней уравнения (2.3.17) проводился при положительных значениях h_1, h_2, h_3 и при условии $0 < \nu < 1$. Вычисления проводились в узлах равномерной сетки на плоскости (h_1, h_2) при фиксированных значениях ν и h_3 . Численно определялись граничные точки, в которых происходит смена числа действительных корней. Фактически вычислялся двумерный срез дискриминантной гиперповерхности, который задается неявно алгебраическим уравнением от двух параметров $g(h_1, h_2) = 0$. Экспериментальным путем было определено, что для получения гладких граничных кривых требуются вычисления с шагом сетки 0.0001. Вычисления с такой точностью становятся очень трудоемкими. Действительно, для размера области 3×3 на плоскости (h_1, h_2) требуется вычисление корней в 10^9 узлах. Поэтому вычисления проводились в два этапа. На первом этапе проводилось определение числа действительных корней уравнения (2.3.17) в 10^7 узлах с шагом 0.001. На втором этапе число действительных корней определялось в окрестности приближенно вычисленной границы между областями с постоянным числом действительных корней в узлах сетки с шагом 0.0001.

Далее при фиксированных значениях h_2 величина граничных точек h_1 между двумя областями с различным постоянным числом действительных корней определялась с заданной точностью методом деления отрезка пополам, реализованном на языке программирования системы *Mathematica* в виде пакета. Численные методы решений уравнений, реализованные в системе *Mathematica*, позволяют вычислять корни алгебраического уравнения при очень малых величинах коэффициентов.

С учетом того, что уравнение (2.3.17) было получено при условии $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$, в окрестности нулевых значений параметров h_1, h_2, h_3 вычисления проводились с повышенной точностью с шагом равным 10^{-6} .

2.5. Анализ эволюции условий существования положений равновесия

Вычисления областей с одинаковым числом равновесий проводились при значениях $\nu = 0.01, \nu = 0.1, \nu = 0.2, \nu = 0.3, \nu = 0.4, \nu = 0.5, \nu = 0.6, \nu = 0.7, \nu = 0.8, \nu = 0.9$ и $\nu = 0.99$ [183].

На рис. 2.3–2.18 представлены результаты вычислений эволюции границ областей с равным числом действительных корней на плоскости (h_1, h_2) для значений $\nu = 0.01$ (в окрестности осесимметричного случая при $\nu = 0$), $\nu = 0.2, \nu = 0.5, \nu = 0.8, \nu = 0.99$ (в окрестности осесимметричного случая при $\nu = 1$).

Из уравнений (2.3.18) и (2.4.19), (рис.2.1, 2.2) следует, что для осесимметричного случая $\nu = 0$ ($A = B$) границы между областями с постоянным числом действительных корней задаются уравнениями окружностей, а для осесимметричного случая $\nu = 1$ ($A = C$) границы между областями с равным числом действительных корней задаются уравнениями астроид.

Из анализа численных результатов для заданных параметров ν следует, что при увеличении параметра h_3 размеры областей с постоянным числом действительных корней уменьшаются. Точки в пространстве параметров, начиная с которых исчезают области с определенным числом действительных корней, будем называть бифуркационными точками. Результаты вычислений бифуркационных значений параметров представлены в Таблице 2.1.

Вычисления были проведены для бифуркационных значений параметра h_3 , указанных в таблице 2.1 и для значений h_3 , соответствующих среднему значению расстояния между двумя соседними бифуркационными точками (рис.2.3 – 2.18).

Из таблицы 2.1 следует, что бифуркационные значения параметра h_3 , при котором исчезают области существования 24 равновесных решения (12 действительных корней), удовлетворяют соотношению $h_3 = 1 - \nu$.

Бифуркационные значения параметра h_3 , при которых исчезают области существования 20 равновесных решений (10 действительных корней), равны 1 при возрастании значения ν вплоть до значения $\nu = 0.6$, после чего уменьшаются в соответствии с соотношением $h_3 = 3(1 - \nu)$.

Для областей, где существуют 16 равновесных решений (8 действительных корней), бифуркационные значения параметра h_3 уменьшаются в соответствии с соотношением $h_3 = 3(1 - \nu)$ при возрастании значения ν вплоть до значения $\nu = 0.6$, после чего остаются равными 1.

Области с числом положений равновесия, равным 12, уменьшаются при возрастании величины параметра h_3 . Центральная часть этих областей исчезает при $h_3 = 3$. При значениях $h_3 \geq 3$ существуют области малых размеров с числом положений равновесия, также равным 12; эти области расположены вблизи оси Oh_2 с характерными размерами вдоль осей Oh_1 и Oh_2 , не превосходящими величину 10^{-1} (рис.2.9). При возрастании величины h_3 эти области уменьшаются и смещаются вправо вдоль положительной части оси Oh_2 и влево вдоль отрицательной части оси Oh_2 .

Рассмотрим пример в окрестности осесимметричного случая $\nu = 0$ для значения $\nu = 0.01$. В данном случае вычисления проводились при значениях параметра $h_3 = 0.01$ (в окрестности нулевого значения, рис.2.3). Кривые на рис. 2.3 очень схожи с соответствующими кривыми на рис. 2.1 для осесимметричного случая $\nu = 0$, которые определяются уравнениями (2.3.18). Как показано в работе [162], в случае осесимметричного спутника число положений равновесий может быть только 16, 12 и 8 и, соответственно, существуют только 3 области в пространстве параметров с

равным числом положений равновесия. В данном случае мы имеем только два бифуркационных значения параметра h_3 : $h_3 = 1$ и $h_3 = 3$.

Для значений инерционного параметра $\nu = 0.99$, близкого к осесимметричному случаю $\nu = 1$, вычисления границ областей проводилось при значениях $h_3 = 0.01$ (бифуркационная точка, где исчезает область с 24 положениями равновесия, рис. 2.18). Видно, что граничные кривые на рис. 2.18 при значениях инерционного параметра, стремящегося к 1, приближаются к соответствующим аналитическим кривым для осесимметричного случая $\nu = 1$ (рис. 2.2), которые определяются уравнениями (2.3.19). В данном случае мы имеем также два бифуркационных значения параметра h_3 : $h_3 = 1$ и $h_3 = 3$.

В интервале значений инерционного параметра $0.1 \leq \nu \leq 0.9$ было проведено численное исследование эволюции областей с постоянным числом положений равновесия 24, 20, 16, 12 и 8 (рис. 2.4 – 2.17).

Рассмотрим подробнее характер изменения областей с числом положений равновесия, равным 24, 20, 16, 12 и 8, на примере, когда $\nu = 0.2$ (рис. 2.4– 2.9).

Анализ численных результатов показывает, что при $\nu = 0.2$ области с числом положений равновесия, равным 24, 20, 16, 12 и 8, существуют в плоскости (h_1, h_2) при $h_3 < 0.8$ (рис. 2.4, 2.5). Из рис. 2.5 видно, что при возрастании величины h_3 размеры областей с числом положений равновесия, равным 24, 20, 16, 12, становятся меньше, чем соответствующие области на рис. 2.4. При бифуркационном значении $h_3 = 0.8$ область с числом положений равновесия, равным 24, исчезает совсем (рис. 2.6) и в интервале значений $0.8 < h_3 < 1.0$ существуют только четыре типа областей с числом положений равновесия, равным 20, 16, 12 и 8. При бифуркационном значении $h_3 = 1.0$ исчезает область с числом положений равновесия, равным 20 (рис. 2.7). В интервале значений $1.0 \leq h_3 < 2.4$

существуют только три типа областей с числом положений равновесия, равным 16, 12 и 8 (рис. 2.7).

При бифуркационном значении $h_3 = 2.4$ область с числом положений равновесия, равным 16, исчезает (рис.2.8). В интервале $2.4 \leq h_3 < 3$ остаются только два типа областей с числом положений равновесия, равным 12 и 8 (рис. 2.8). При $h_3 = 3.0$ области с числом положений равновесия, равным 12, исчезают в окрестности начала координат и при дальнейшем увеличении значений параметра h_3 вблизи оси Oh_2 появляются области малых размеров с числом положений равновесия, равным 12, (рис. 2.9).

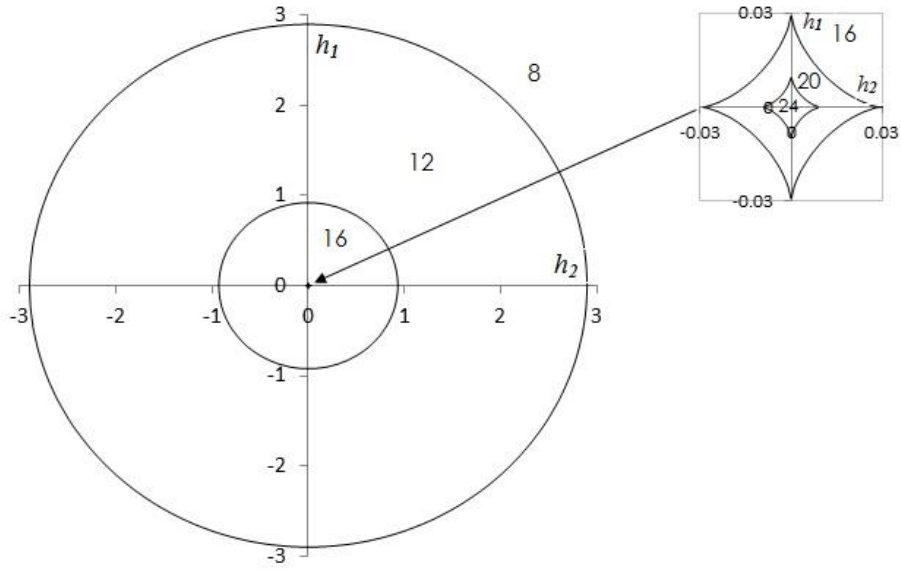
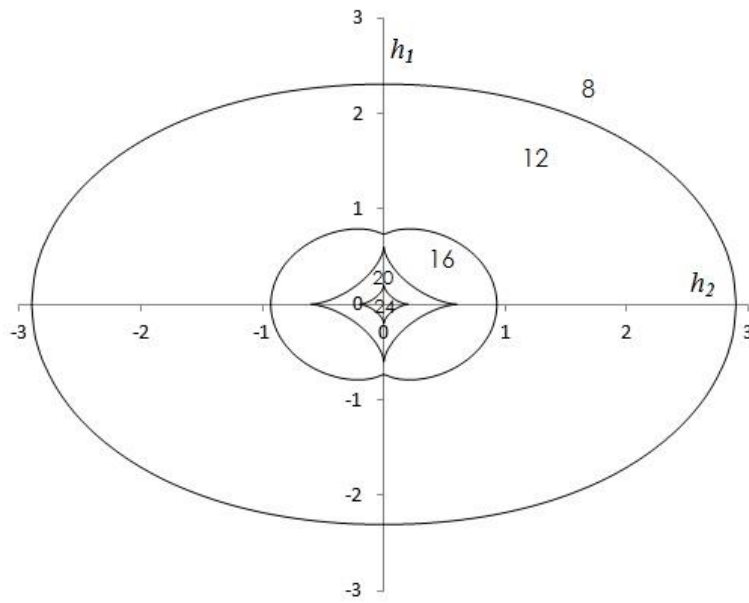
На рис. 2.10–2.17 представлена эволюция областей с постоянным числом положений равновесия для значений инерционных параметров $\nu = 0.5$ и $\nu = 0.8$.

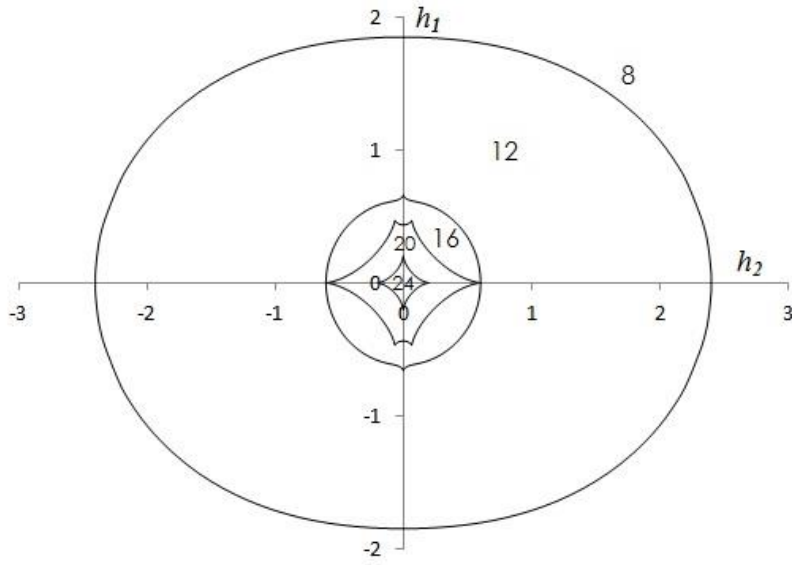
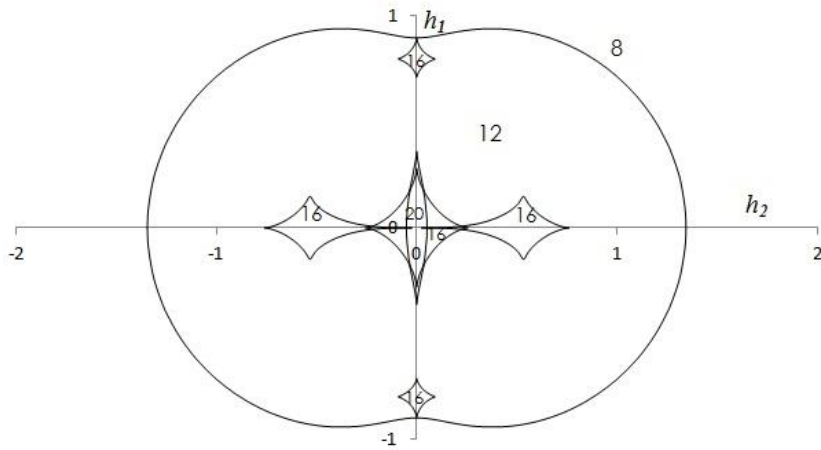
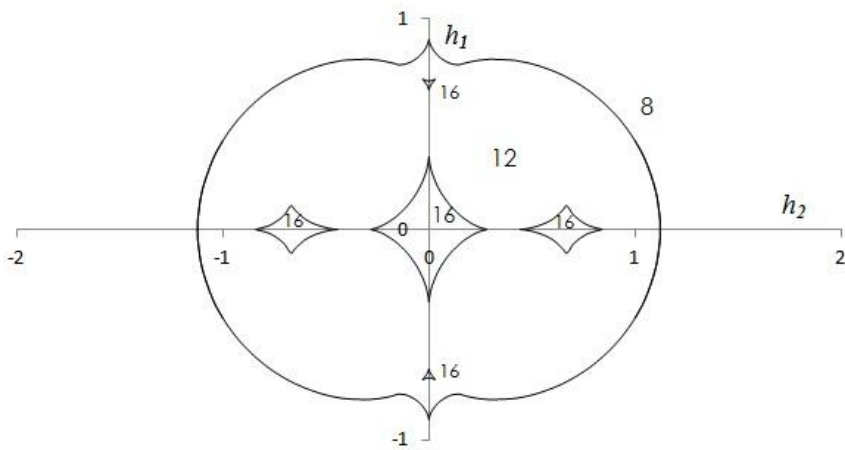
Когда значения параметра аэродинамического момента h_3 превышает 3, при любых значениях параметров h_1 и h_2 существуют 8 положений равновесия спутника, которые соответствуют 4 действительным корням уравнения (2.17).

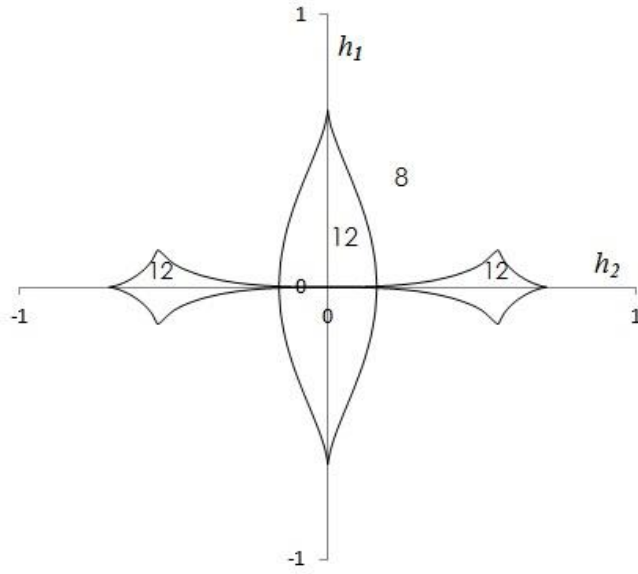
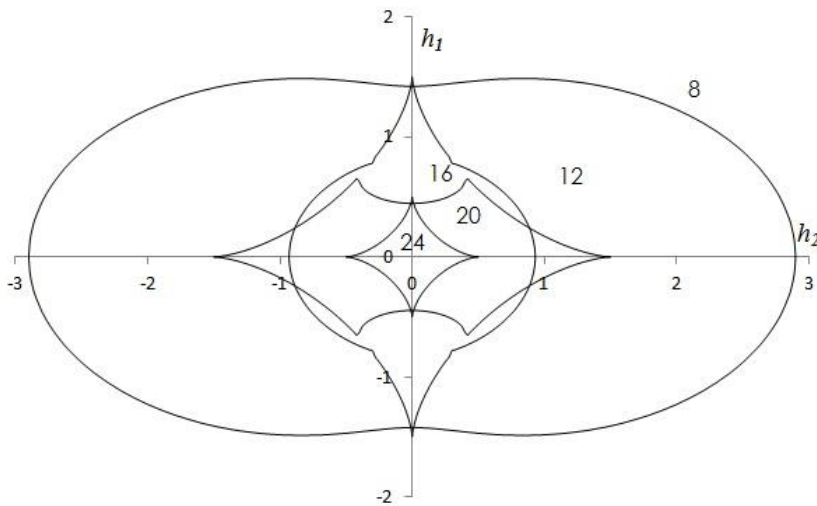
Таблица 2.1

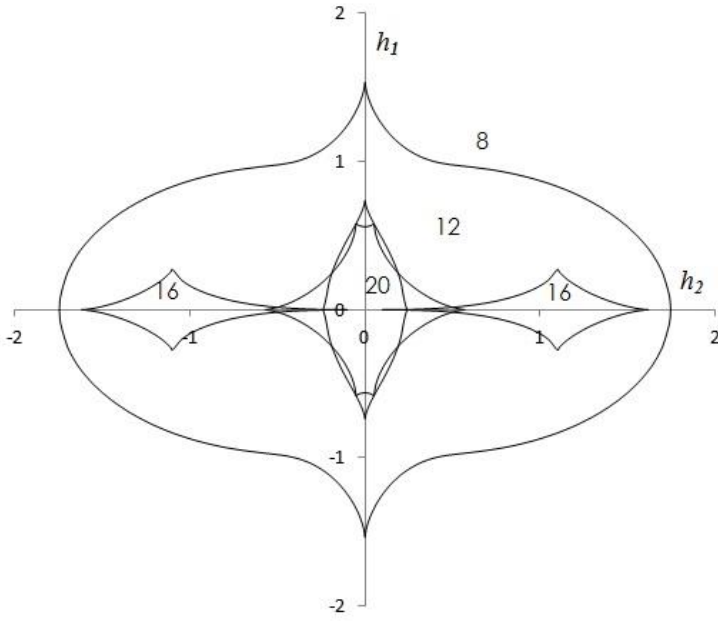
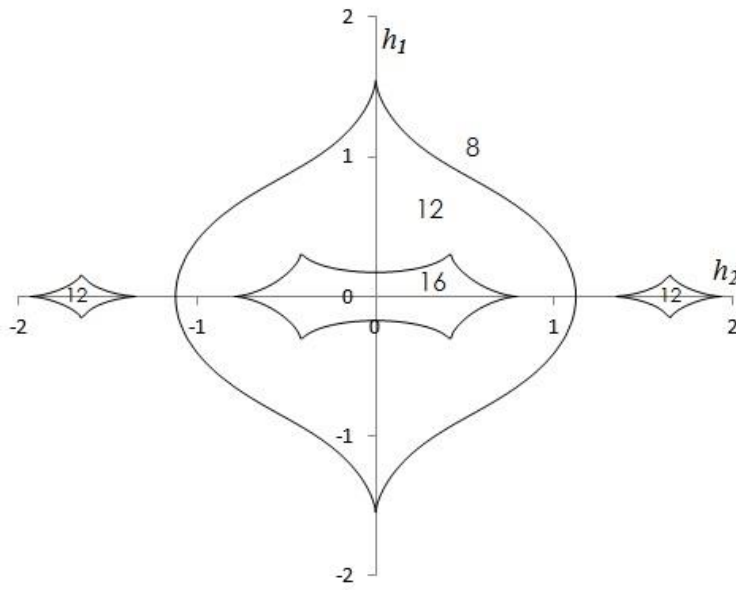
Бифуркационные значения ν , h_3

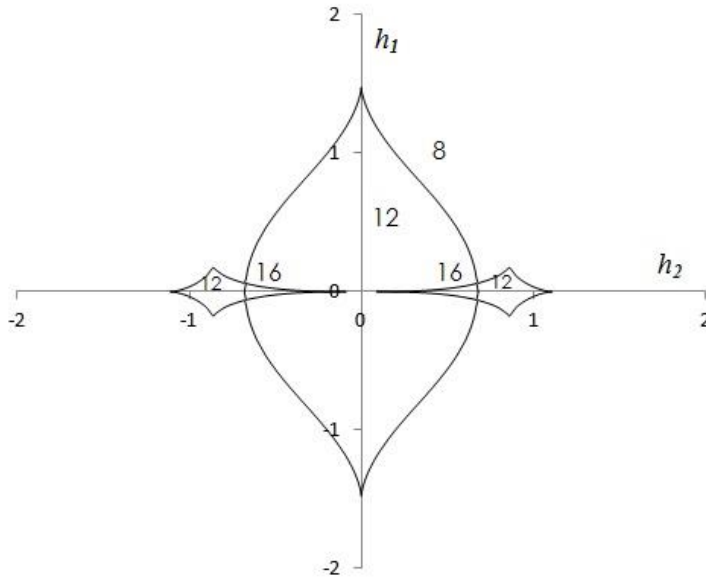
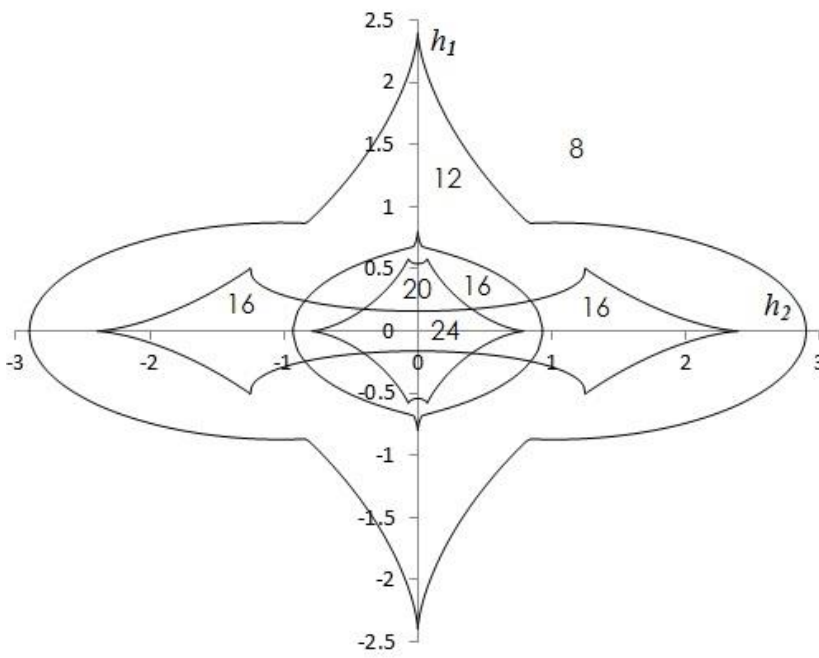
ν	h_3 (24/20)	h_3 (20/16)	h_3 (16/12)	h_3 (12/8)
0.01	0.99	1.0	2.97	3.0
0.1	0.90	1.0	2.7	3.0
0.2	0.80	1.0	2.4	3.0
0.3	0.70	1.0	2.1	3.0
0.4	0.60	1.0	1.8	3.0
0.5	0.50	1.0	1.5	3.0
0.6	0.40	1.0	1.2	3.0
0.7	0.30	0.9	1.0	3.0
0.8	0.20	0.6	1.0	3.0
0.9	0.10	0.3	1.0	3.0
0.99	0.01	0.03	1.0	3.0

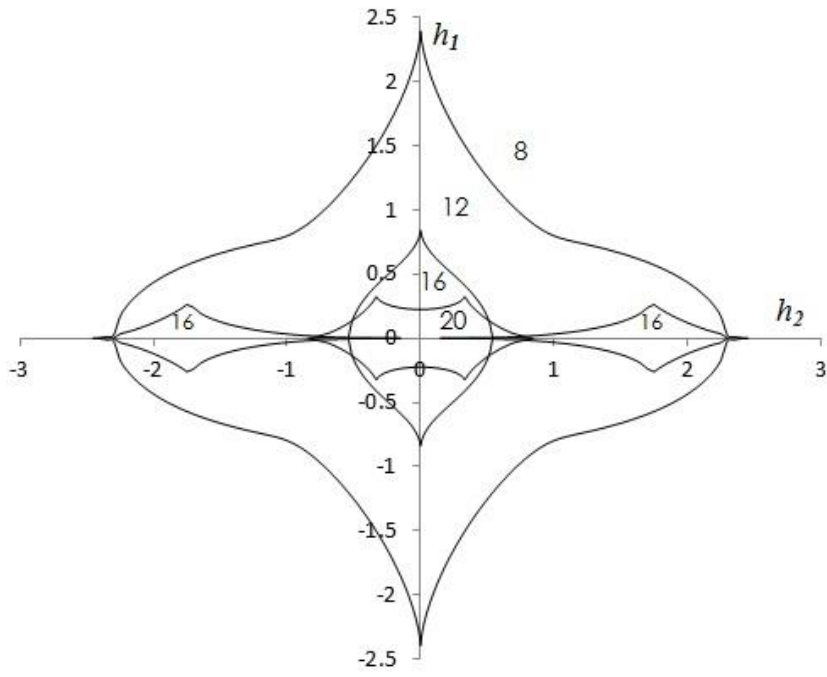
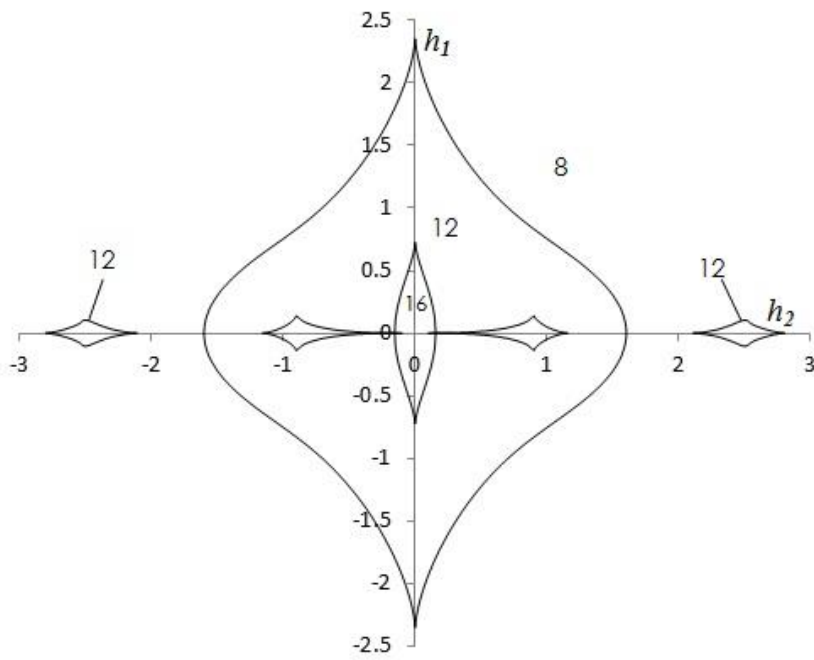
Рис. 2.3. $\nu=0.01$, $h_3 = 0.01$ Рис.2.4. $\nu=0.2$, $h_3 = 0.01$

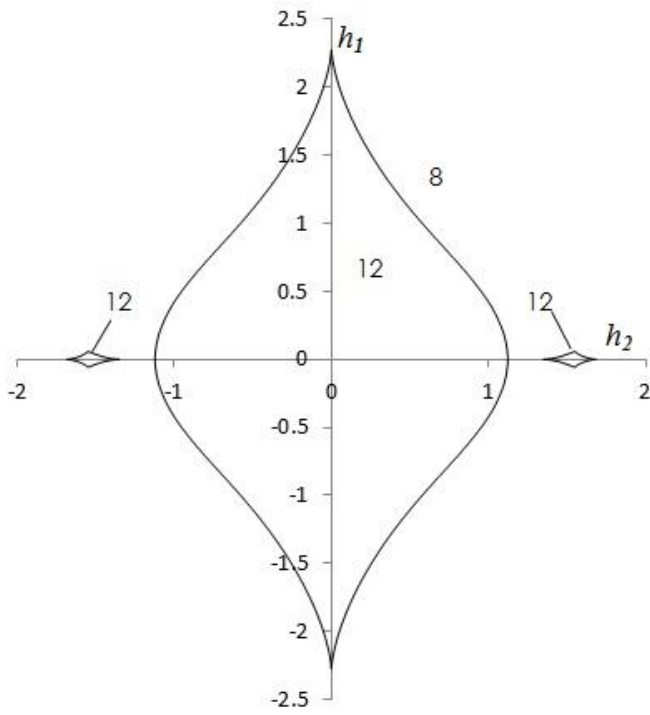
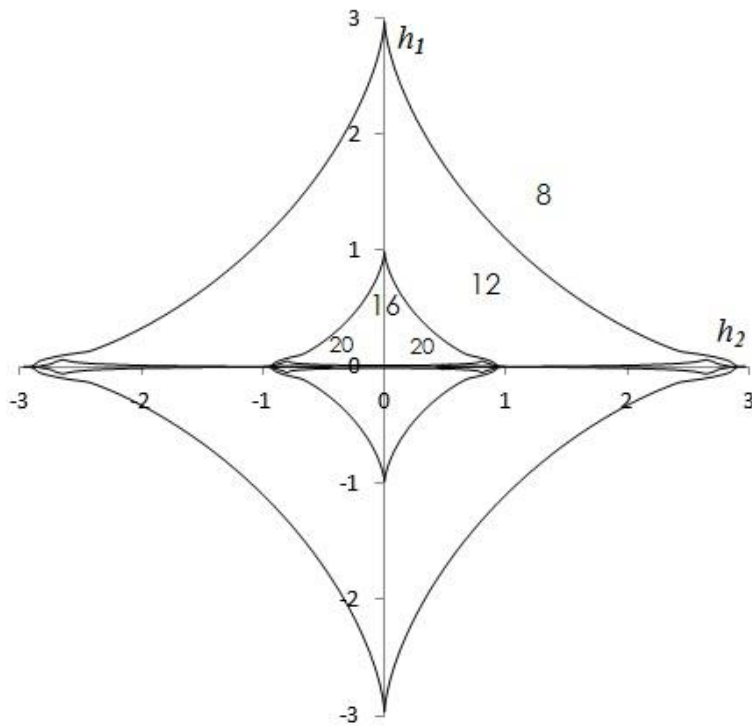
Рис. 2.5. $\nu=0.2$, $h_3 = 0.153$ Рис. 2.6. $\nu=0.2$, $h_3 = 0.8$ Рис. 2.7. $\nu=0.2$, $h_3 = 1.0$

Рис. 2.8. $v=0.2$, $h_3 = 2.4$ Рис. 2.9. $v=0.2$, $h_3 = 3.0$ Рис. 2.10. $v=0.5$, $h_3 = 0.01$

Рис. 2.11. $\nu=0.5$, $h_3 = 0.5$ Рис. 2.12. $\nu=0.5$, $h_3 = 1.0$

Рис. 2.13. $\nu=0.5$, $h_3 = 1.5$ Рис. 2.14. $\nu=0.8$, $h_3 = 0.01$

Рис. 2.15. $\nu=0.8$, $h_3 = 0.2$ Рис. 2.16. $\nu=0.8$, $h_3 = 0.6$

Рис. 2.17. $\nu=0.8$, $h_3 = 1.0$ Рис. 2.18. $\nu=0.99$, $h_3 = 0.01$

2.6. Исследование достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника

Уравнения (2.3.17) и (2.3.15) совместно с системой (2.3.9) позволяют определить все положения равновесия спутника при заданных значениях инерционного параметра и компонентов вектора аэродинамического момента.

Для исследования достаточных условий устойчивости полученных положений равновесия системы (2.3.3), (2.3.4) будем использовать обобщенный интеграл энергии (2.2.6) в качестве функции Ляпунова. Обобщенный интеграл энергии (2.2.6) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_0^2\{3[(1 - \nu)a_{31}^2 + a_{32}^2] + \\ & + (\nu a_{21}^2 + a_{23}^2) - 2(h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13})\} = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Представим углы ψ , ϑ , φ как $\psi = \psi_0 + \bar{\psi}$, $\vartheta = \vartheta_0 + \bar{\vartheta}$, $\varphi = \varphi_0 + \bar{\varphi}$, где $\bar{\psi}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\varphi}$ – малые отклонения от положения равновесия спутника $\psi = \psi_0 = \text{const}$, $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, удовлетворяющего системе уравнений (2.3.3), (2.3.4). Тогда интеграл энергии (2.6.1) может быть записан в виде [2, 169, 184]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_0^2(A_{\psi\psi}\bar{\psi}^2 + A_{\vartheta\vartheta}\bar{\vartheta}^2 + A_{\varphi\varphi}\bar{\varphi}^2 + \\ & + 2A_{\psi\vartheta}\bar{\psi}\bar{\vartheta} + 2A_{\psi\varphi}\bar{\psi}\bar{\varphi} + 2A_{\vartheta\varphi}\bar{\vartheta}\bar{\varphi}) + \Sigma = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

где символ Σ обозначает члены выше второго порядка малости относительно $\bar{\psi}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\varphi}$ и

$$\begin{aligned}
A_{\psi\psi} &= \nu(a_{11}^2 - a_{21}^2) + (a_{13}^2 - a_{23}^2) + h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13}, \\
A_{g_g} &= (3 + \cos^2 \psi_0)(1 - \nu \sin^2 \varphi_0) \cos 2g_0 - \\
&\quad - \frac{1}{4} \nu \sin 2\psi_0 \cos g_0 \sin 2\varphi_0 - (h_1 \sin \varphi_0 + h_2 \cos \varphi_0) \sin \psi_0 \cos g_0 + h_3 a_{13}, \\
A_{\varphi\varphi} &= \nu[(a_{22}^2 - a_{21}^2) - 3(a_{32}^2 - a_{31}^2)] + h_1 a_{11} + h_2 a_{12}, \\
A_{\psi g} &= -\frac{1}{2} \sin 2\psi_0 \sin 2g_0 + \nu(a_{11} a_{23} + a_{13} a_{21}) \sin \varphi_0 - \\
&\quad - \cos \psi_0 (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}), \\
A_{\psi\varphi} &= \nu(a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) + h_1 a_{22} - h_2 a_{21}, \\
A_{g\varphi} &= -\frac{3}{2} \nu \sin 2g_0 \sin 2\varphi_0 + \nu(a_{21} \cos \varphi_0 + a_{22} \sin \varphi_0) a_{23} - \\
&\quad - (h_1 \cos \varphi_0 - h_2 \sin \varphi_0) a_{13}.
\end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Из теоремы Ляпунова следует, что положение равновесия устойчиво, если квадратичная форма

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_0^2(A_{\psi\psi}\bar{\psi}^2 + A_{g_g}\bar{g}^2 + A_{\varphi\varphi}\bar{\varphi}^2 + \\
&+ 2A_{\psi g}\bar{\psi}\bar{g} + 2A_{\psi\varphi}\bar{\psi}\bar{\varphi} + 2A_{g\varphi}\bar{g}\bar{\varphi})
\end{aligned} \tag{2.6.4}$$

является определенно-положительной, то есть, выполняются условия

$$\begin{aligned}
A_{\psi\psi} &> 0, \\
A_{\psi\psi} A_{g_g} - (A_{\psi g})^2 &> 0, \\
A_{\psi\psi} A_{g_g} A_{\varphi\varphi} + 2A_{\psi g} A_{\psi\varphi} A_{g\varphi} - A_{\psi\psi} (A_{g\varphi})^2 - A_{g_g} (A_{\psi\varphi})^2 - A_{\varphi\varphi} (A_{\psi g})^2 &> 0.
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Подставляя выражения $A_{\psi\psi}, A_{g_g}, A_{\varphi\varphi}, A_{\psi g}, A_{\psi\varphi}, A_{g\varphi}$ из (2.6.3) для соответствующего положения равновесия в (2.6.5), получим достаточные условия устойчивости для этого решения.

Для каждого набора значений параметров ν, h_1, h_2, h_3 с использованием численного пакета системы *Mathematica* определялся действительный корень x уравнения (2.3.17). Для наглядности представления положений равновесия спутника-гиростата результаты вычислений выразим через углы Эйлера. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{31}}{a_{32}} = \frac{x_1}{y_1} \text{ и } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{a_{31}}{a_{32}} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Угол \mathcal{G} ($0 \leq \mathcal{G} < \pi$) определяется соотношением $\cos \mathcal{G} = a_{33}$. Угол ψ ($0 \leq \psi < 2\pi$) также однозначно определяется с помощью соотношений (1.1)

$$\sin \psi = \frac{a_{13}}{\sin \mathcal{G}}; \quad \cos \psi = -\frac{a_{23}}{\sin \mathcal{G}}.$$

Таким образом, для каждого действительного корня (2.3.17) можно однозначно определить два набора углов ориентации ψ_0 , \mathcal{G}_0 , φ_0 , вычислить коэффициенты квадратичной формы (2.6.3) и проверить выполнение условий ее положительной определенности (2.6.5).

Так как $0 \leq \varphi < 2\pi$, то для каждого действительного корня $\operatorname{tg} \varphi = x_1/y_1$ существуют два значения угла φ (φ_1 и $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$). Из свойств коэффициентов квадратичной формы (2.6.3) следует, что достаточные условия устойчивости (2.6.5) для значений φ_1 и φ_2 одинаковы. Кроме того, можно показать, что условия (2.6.5) не зависят от знака параметров h_1, h_2, h_3 . Следовательно, численный анализ достаточных условий устойчивости равновесных решений уравнений (2.3.3)–(2.3.4) можно проводить лишь для положительных значений h_1, h_2, h_3 , одного значения угла φ (φ_1 или φ_2) и при выполнении условий $0 < \nu < 1$ (рис. 2.19).

На рис. 2.20–2.32 показаны результаты вычислений зависимости угла φ от h_1 при фиксированных значениях параметров h_2, h_3 и ν ; пунктирной линией обозначены ветви положений равновесия, для которых выполняются достаточные условия устойчивости (2.6.5). В силу того, что достаточные условия устойчивости (2.6.5) для значений углов φ_1 и $\varphi_1 + \pi$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) одинаковы, численные результаты на рис. 2.20–2.32 представлены для $0 \leq \varphi < \pi$.

Вычисления проводились при следующих значениях инерционного параметра: $\nu = 0.2$, $\nu = 0.4$, $\nu = 0.5$ и $\nu = 0.8$. Из анализа результатов

вычислений для указанных значений параметров следует, что для $h_3 < 1 - \nu$ при малых значениях h_1, h_2 существуют 24 ветви положений равновесия и для четырех ветвей из них выполняются условия устойчивости (2.6.5) (рис. 2.20, 2.21, 2.29).

При возрастании значений параметра h_1 происходит последовательное слияние ветвей положений равновесия в точках, соответствующих точкам пересечения прямой $h_2 = \text{const}$ с границами областей с равным числом положений равновесия. Рассмотрим в качестве примера вариант расчета границ областей с равным числом положений равновесия при $\nu = 0.2, h_3 = 0.153$ (рис. 2.5, 2.19). В этом случае происходит слияние границ областей с числом положений равновесия, равным 20, представляющих собой кривые типа астроида и границ областей с числом положений равновесия, равным 16, представляющих собой кривые типа эллипсов в одной точке $h_2 = 0.604$. Данный рисунок представляет собой пример наиболее типичных областей с равным числом положений равновесия спутника, границы которых являются комбинациями астроида и эллипсов, подробно рассмотренных в работе [167]. На рис. 2.19 представлены четыре точки пересечения прямой линии $h_2 = 0.1$ с границами областей с равным числом положений равновесия, где $h_1 = 0.0463, h_1 = 0.3788, h_1 = 0.6104$ и $h_1 = 1.8479$; на рис. 2.20 ($\nu = 0.2, h_2 = 0.1, h_3 = 0.153$) показано, что в этих точках происходит слияние ветвей положений равновесия.

На рис. 2.21–2.25 показана эволюция характера изменения ветвей положений равновесия при изменении значений параметра h_2 от величины 0.05, когда существуют 24 ветви положений равновесия до величины 3.0, когда существуют 8 ветвей положений равновесия (при фиксированных $\nu = 0.2, h_3 = 0.01$). На рис. 2.21 и 2.22 показан характер изменения ветвей положений равновесия при увеличении значения параметра h_2 с величины

0.05 (рис. 2.21) до величины 0.2 (рис. 2.22). Число ветвей положений равновесия при этом уменьшается с 24 до 20, а число ветвей положений равновесия, для которых условия устойчивости (2.6.5) выполняются, уменьшаются с 4 до 2. При значении $h_3 = 0.6$ (рис. 2.23) существуют 16 ветвей положений равновесия, условия устойчивости (2.6.5) выполняются для двух из них. При возрастании h_2 до значения $h_2 = 1.0$ (рис. 2.24) число ветвей положений равновесия уменьшается до 12, условия устойчивости (20) выполняются для двух из них. Начиная со значения $h_2 = 3.0$ (рис. 2.25), число ветвей положений равновесия становится равным 8. При дальнейшем увеличении параметра h_2 число ветвей положений равновесия не изменяется и условия устойчивости (2.6.5) при этом выполняются также только для двух из них.

Существуют четыре устойчивых положения равновесия для $h_3 \geq 1$, когда имеют место 16 положений равновесия (рис. 2.26 – 2.28) и для $h_2 \geq 1$ (рис. 2.30). На этих рисунках можно проследить характер изменения 16 ветвей положений равновесия при изменении параметра ν с величины 0.2 до величин 0.4 и 0.5.

Рис. 2.26, 2.28 и 2.31 показывают характер изменения ветвей положений равновесия при изменении значений параметра ν с величины 0.2 до величины 0.8 при фиксированных значениях $h_2 = 0.1$, $h_3 = 1.0$.

При значениях параметров h_1 , h_2 , h_3 , равных или превосходящих 3, существуют 8 положений равновесия (рис. 2.25, 2.32) и лишь два из них являются устойчивыми. При больших значениях параметров h_1 , h_2 , h_3 равновесные значения угла φ приближаются к тривиальным решениям, при которых одна из осей, связанной со спутником системы координат, совпадает с какой-либо осью орбитальной системы координат. Характер устойчивости положений равновесия в зависимости от параметров задачи соответствует характеру устойчивости положений равновесия для

осесимметричного случая [162], где было показано, что число положений равновесия спутника, для которых выполняются достаточные условия устойчивости, так же как и в общем случае изменяется от четырех до двух при возрастании величины модуля аэродинамического момента.

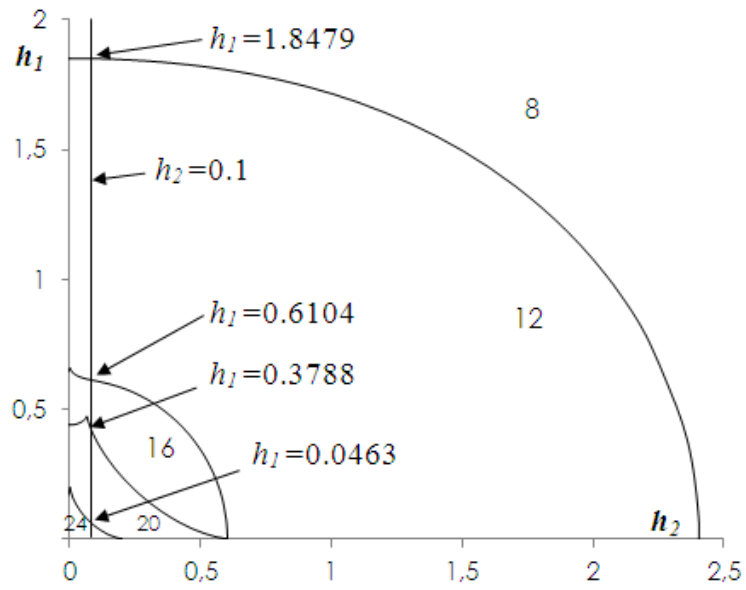


Рис. 2.19. $\nu=0.2$, $h_3 = 0.153$

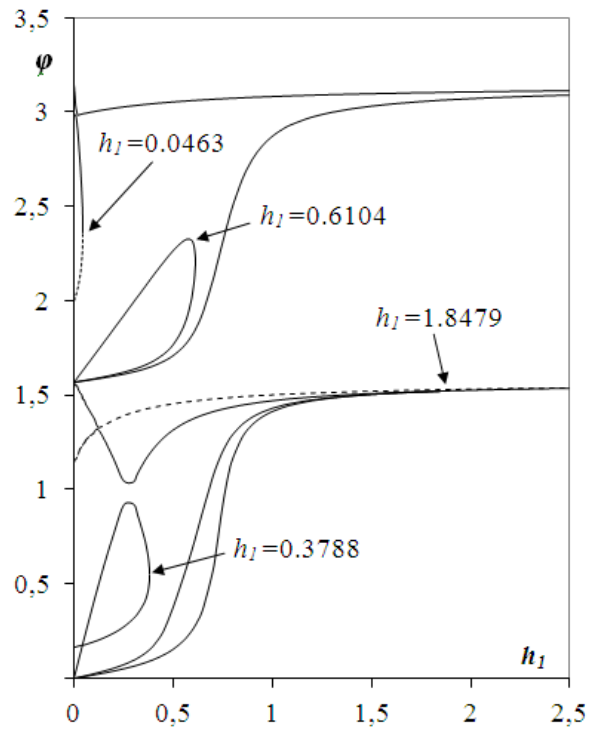


Рис. 2.20. $\nu=0.2$, $h_2 = 0.1$, $h_3 = 0.153$ (24 равновесия, 4 устойчивые)

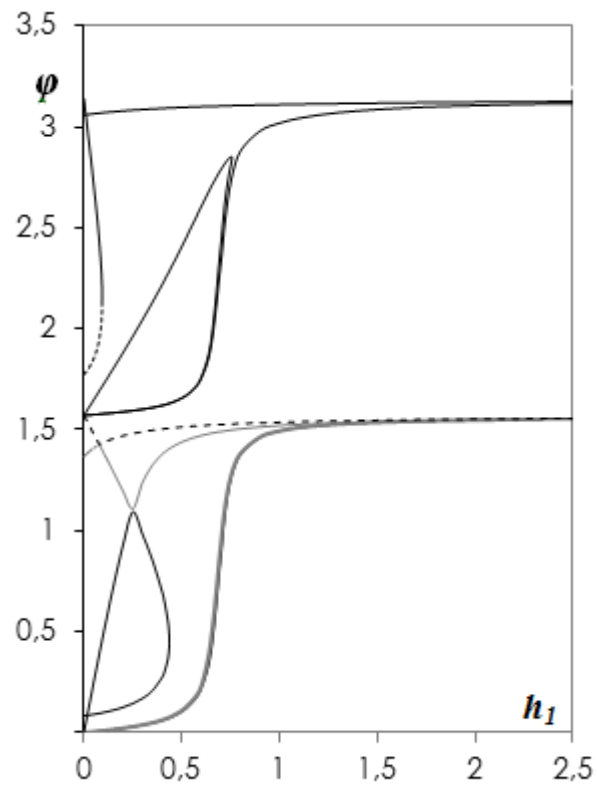


Рис. 2.21. $\nu=0.2$, $h_2=0.05$, $h_3=0.01$ (24 равновесия, 4 устойчивые)

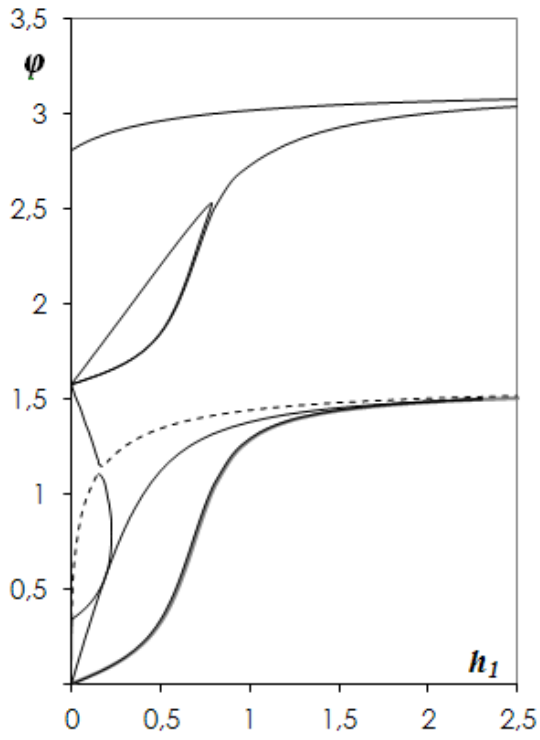


Рис. 2.22. $\nu=0.2$, $h_2=0.2$, $h_3=0.01$
(20 равновесий, 2 устойчивые)

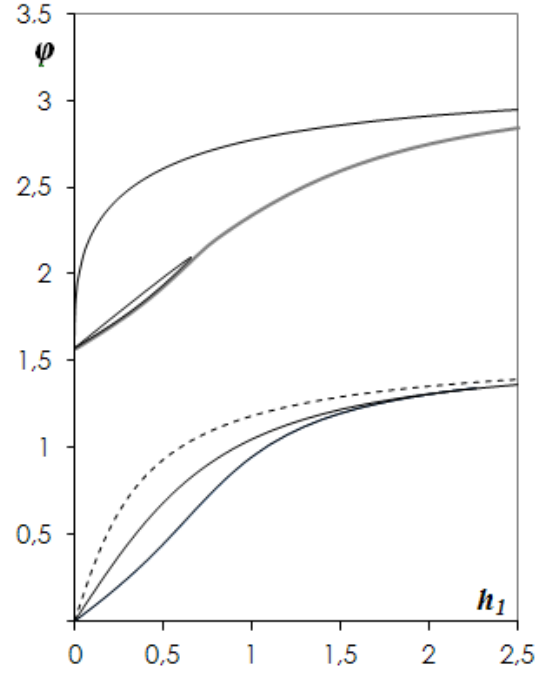


Рис. 2.23. $\nu=0.2$, $h_2=0.6$, $h_3=0.01$
(16 равновесий, 2 устойчивые)

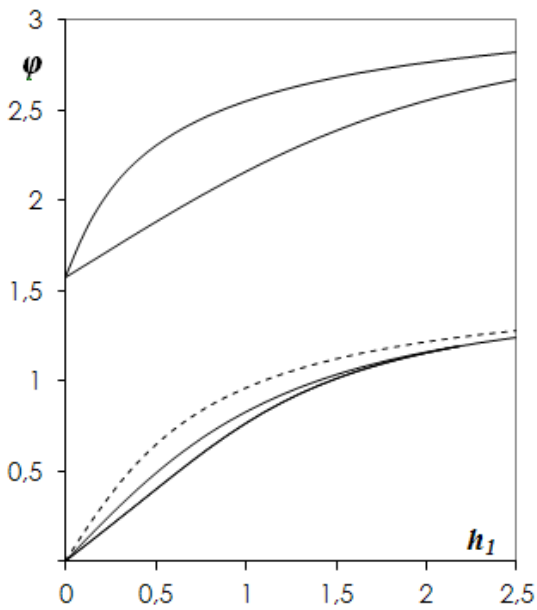


Рис. 2.24. $\nu=0.2$, $h_2=1.0$, $h_3=0.01$
(12 равновесий, 2 устойчивые)

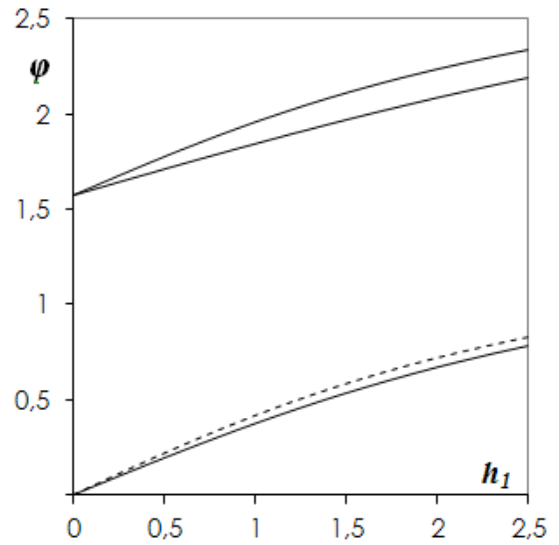


Рис. 2.25. $\nu=0.2$, $h_2=3.0$, $h_3=0.01$
(8 равновесий, 2 устойчивые)

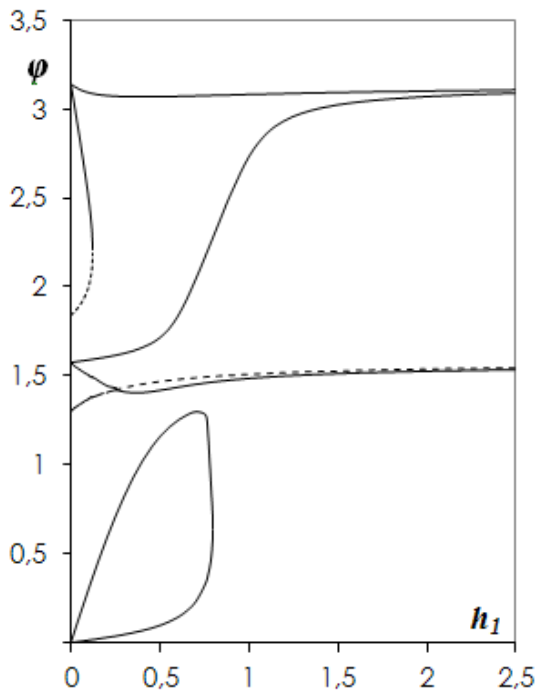


Рис. 2.26. $\nu=0.2$, $h_2=0.1$, $h_3=1.0$
(16 равновесий, 4 устойчивые)

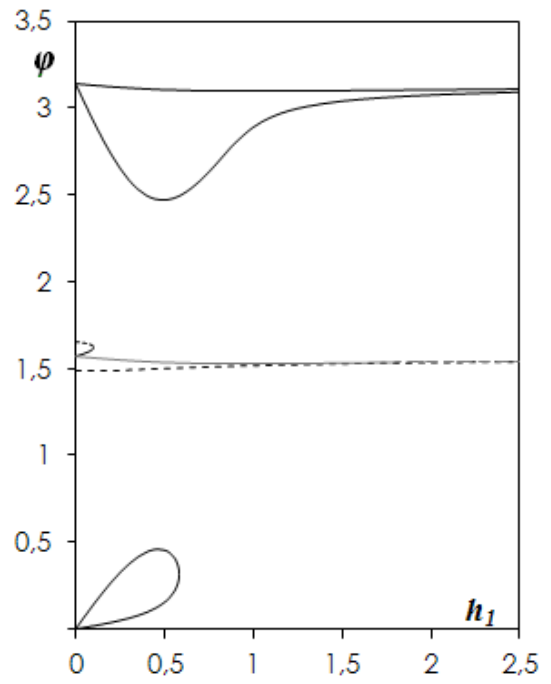


Рис. 2.27. $\nu=0.2$, $h_2=0.1$, $h_3=2.0$
(16 равновесий, 4 устойчивые)

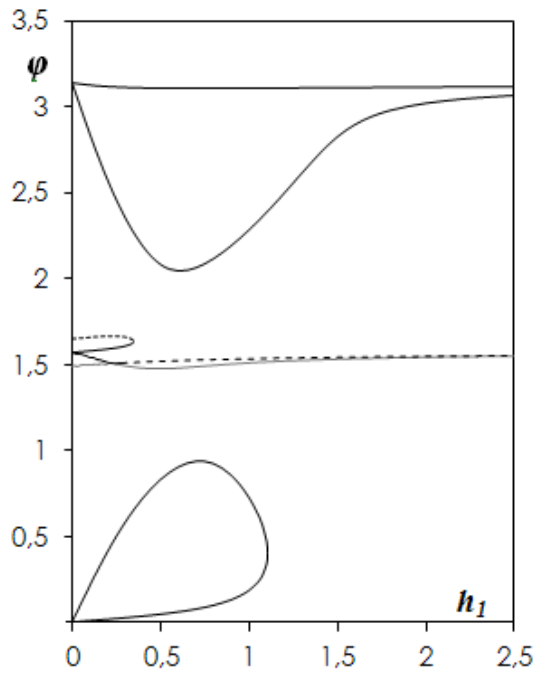


Рис. 2.28. $\nu=0.4$, $h_2=0.1$, $h_3=1.0$
(16 равновесий, 4 устойчивые)

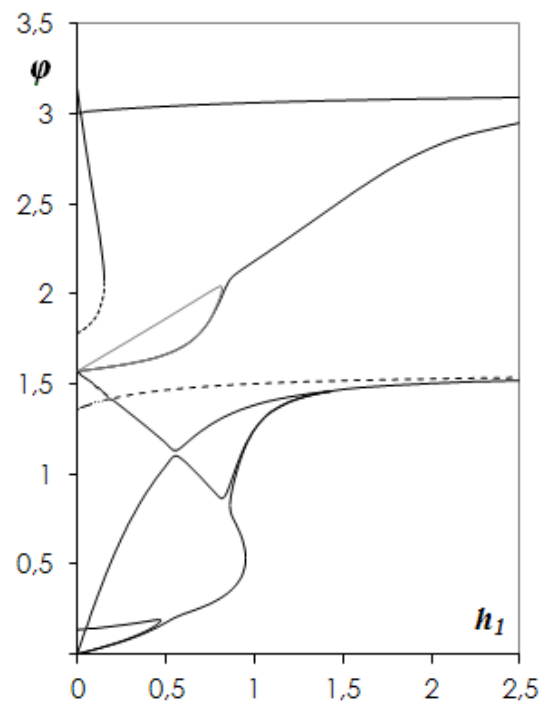


Рис. 2.29. $\nu=0.5$, $h_2=0.2$, $h_3=0.01$
(24 равновесия, 4 устойчивые)

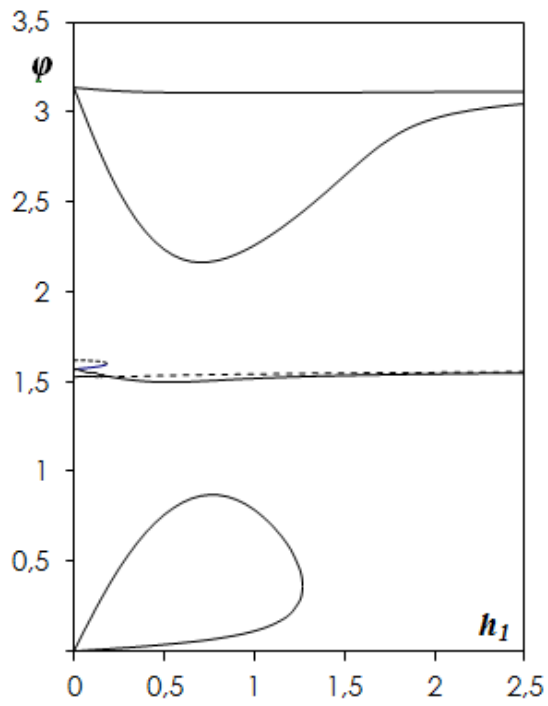


Рис. 2.30. $v=0.5$, $h_2=1.0$, $h_3=0.1$
(16 равновесий, 4 устойчивые)

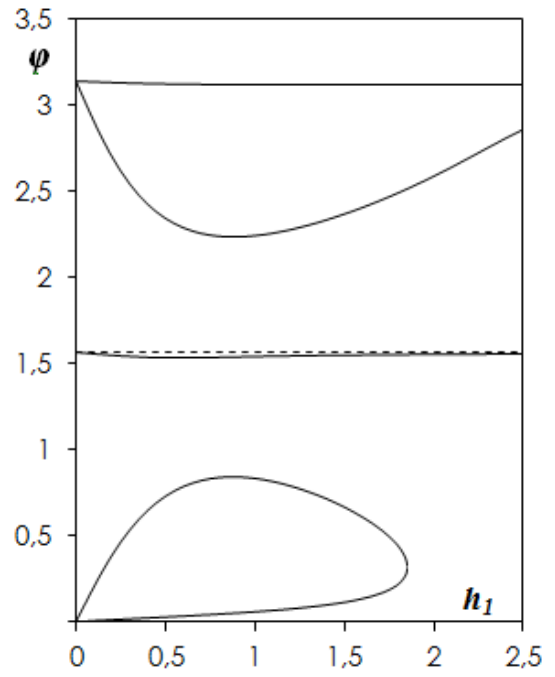


Рис. 2.31. $v=0.8$, $h_2=0.1$, $h_3=1.0$
(12 равновесий, 2 устойчивые)

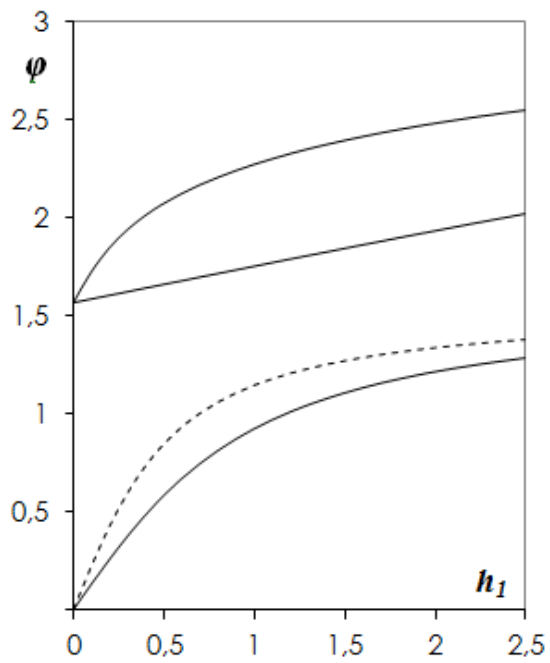


Рис. 2.32. $v=0.8$, $h_2=3.0$, $h_3=0.01$
(8 равновесий, 2 устойчивые)

2.7. Динамика спутника с вектором аэродинамического момента в главной плоскости инерции спутника

Основное внимание в данном разделе уделено символьным методам исследования положений равновесия в случаях, когда вектор аэродинамического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника: 1) $H_1 \neq 0, H_2 \neq 0, H_3 = 0$; 2) $H_1 \neq 0, H_2 = 0, H_3 \neq 0$; и 3) $H_1 = 0, H_2 \neq 0, H_3 \neq 0$.

Система уравнений (1.3.1) и (1.3.4) была решена для случая 2) довольно сложным способом в работе [150]. В данном разделе будут подробно рассмотрены все три случая.

1. Начнем с рассмотрения первого случая $H_1 \neq 0, H_2 \neq 0, H_3 = 0$, когда вектор аэродинамического момента находится в плоскости Oxy . Тогда, вводя безразмерные параметры $h_i = H_i / (B - C)$, $\nu = (B - A) / (B - C)$, система (2.3.1) примет вид

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + h_2a_{13} &= 0, \\ (1 - \nu)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + h_1a_{13} &= 0, \\ \nu(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{12} + h_2a_{11} &= 0. \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Для нахождения решения алгебраической системы (2.7.1) и системы из шести условий ортогональности направляющих косинусов (2.3.4) применялись алгоритмы построения базисов Гребнера [138].

Исследование проводилось с использованием реализованного в системе компьютерной алгебры Maple 15 [139] пакета построения базисов Гребнера Groebner[Basis]. Построим базис Гребнера системы полиномов (2.7.1)–(2.3.4) относительно лексикографического упорядочения переменных, используя метод plex

```
Groebner[Basis](F, plex([a11, ..., a32, a33])).
```

Здесь F – список из девяти полиномов f_i правых частей уравнений (2.7.1) – (2.3.4). Выпишем из построенного базиса Гребнера полином, который зависит только от одной переменной $x = a_{33}$

$$P(x) = P_1(x)P_2(x) = 0, \quad (2.7.2)$$

где

$$P_1(x) = x(x^2 - 1),$$

$$P_2(x) = p_0x^4 + p_1x^2 + p_2,$$

$$p_0 = 9(1 - \nu)^2 p_3^2,$$

$$p_1 = p_3(h_1^6 - (1 - \nu)(6\nu - (3 - \nu)h_2^2)h_1^4 - (1 - \nu)^2((2\nu - 3)h_2^4 + 9\nu^2(2h_2^2 - 1))h_1^2 + (1 - \nu)^4 h_2^2(h_2^2 + 3\nu)^2),$$

$$p_2 = -\nu^2 h_1^2 h_2^2 (h_1^6 - (1 - \nu)(1 + 5\nu - (3 - \nu)h_2^2)h_1^4 - (1 - \nu)^2((2\nu - 3)h_2^4 + 2(5\nu^2 - \nu + 1))h_2^2 - 3\nu(2 + \nu))h_1^2 + (1 - \nu)^4 (h_2^2 - 1)(h_2^2 + 3\nu)^2),$$

$$p_3 = h_1^4 + 2(1 - \nu)(h_2^2 - 3\nu)h_1^2 + (1 - \nu)^2 (h_2^2 + 3\nu)^2.$$

Для определения всех равновесий необходимо рассмотреть отдельно три случая: $a_{33} = 0$, $a_{33}^2 = 1$ и $P_2(a_{33}^2) = 0$.

В случае $a_{33} = 0$ система (2.7.1), (2.3.4), примет вид

$$3\nu a_{31} a_{32} + (h_1 a_{31} + h_2 a_{32}) a_{23} = 0,$$

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 = 1,$$

$$a_{23}^2 = 1, \quad (2.7.3)$$

$$a_{33} = a_{13} = a_{21} = a_{22} = 0,$$

$$a_{11} = -a_{23} a_{32} \quad a_{12} = a_{23} a_{31}.$$

Первые два уравнения системы (2.7.3) можно переписать в виде

$$9\nu^2 a_{31}^4 + 6\nu h_2 a_{31}^3 + (h_1^2 + h_2^2 - 9\nu^2) a_{31}^2 - 6\nu h_2 a_{31} - h_1^2 = 0,$$

$$a_{32} = \mp \frac{h_1 a_{31}}{(3\nu a_{31} \pm h_2)}. \quad (2.7.4)$$

Найдя решения системы (2.7.4), значения остальных направляющих косинусов можно определить из уравнений системы (2.7.3). Из вида системы (2.7.4) следует, что первое алгебраическое уравнение четвертой степени может иметь не более 4 действительных корней, зависящих от параметров ν , h_1 , h_2 , а с учетом второго уравнения число действительных решений системы (2.7.4) не может превышать 8.

Проведем теперь исследование свойств системы (2.7.3). Первое уравнение этой системы определяет две гиперболы, две ветви которой проходят через начало системы координат в плоскости переменных (a_{31}, a_{32}) , а второе уравнение описывает в этой плоскости единичную окружность. Число действительных решений системы (2.7.3) и, следовательно, системы (2.7.4) зависит от характера пересечений ветвей гипербол и окружности. Две ветви гиперболы, которые проходят через начало координат, заведомо пересекаются с окружностью в четырех точках.

Если и другие две ветви гипербол пересекаются с окружностью, то имеем еще четыре решения. В случае касания ветвей гипербол с окружностью четыре решения сливаются в два (существуют кратные корни). Таким образом, система (2.7.3) имеет либо восемь, либо четыре решения.

Определим границы в плоскости параметров (h_1, h_2) , разделяющие области с различным числом решений системы (2.7.3). Бифуркационными точками являются точки плоскости (h_1, h_2) , принадлежащие одновременно ветвям гипербол, не проходящим через начало координат, и окружности; в бифуркационных точках касательные к гиперболам и окружности совпадают. Условие совпадения касательных имеет вид

$$\frac{d(a_{31})}{d(a_{32})} = -\frac{3\nu a_{32} \pm h_1}{3\nu a_{31} \pm h_2} = -\frac{2a_{31}}{2a_{32}},$$

или

$$3\nu(a_{32}^2 - a_{31}^2) \pm h_1 a_{32} \mp h_2 a_{31} = 0. \quad (2.7.5)$$

Подставив выражение для a_{32} из (2.7.4) во второе уравнение (2.7.3) и уравнение (2.7.5), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{h_1^2 a_{31}^2}{(3\nu a_{31} + h_2)^2} &= 1 - a_{31}^2, \\ \frac{h_1^2 h_2}{(3\nu a_{31} + h_2)^2} &= -(3\nu a_{31} + h_2).\end{aligned}\tag{2.7.6}$$

Исключая h_1^2 из системы уравнений (2.7.6), получим после несложных преобразований соотношение $a_{31} = -(3\nu)^{-1/3} h_2^{1/3}$. Подставив далее выражение для a_{31} во второе уравнение системы (2.7.6), получим уравнение астроида

$$h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = (3\nu)^{2/3}.\tag{2.7.7}$$

Внутри области $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} < (3\nu)^{2/3}$ существуют восемь решений системы (2.7.3); при пересечении кривой (2.7.7) (которую будем считать бифуркационной кривой), число решений уменьшается на 4; в области $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} > (3\nu)^{2/3}$ существуют четыре решения.

Рассмотрим теперь второй случай $a_{33}^2 = 1$. В этом случае система (2.7.1), (2.3.4) примет вид

$$\begin{aligned}\nu a_{21} a_{22} + (h_1 a_{21} + h_2 a_{22}) a_{33} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{33}^2 &= 1, \\ a_{31} = a_{32} = a_{13} = a_{23} &= 0, \\ a_{11} = a_{22} a_{33}, \quad a_{12} &= -a_{21} a_{33}.\end{aligned}\tag{2.7.8}$$

Первые два уравнения системы (2.7.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\nu^2 a_{21}^4 + 2\nu h_2 a_{21}^3 + (h_1^2 + h_2^2 - \nu^2) a_{21}^2 - 2\nu h_2 a_{21} - h_1^2 &= 0, \\ a_{22} = \mp \frac{h_1 a_{21}}{(\nu a_{21} \pm h_2)}.\end{aligned}\tag{2.7.9}$$

Применив использованный выше при исследовании системы (2.7.3) подход, можно показать, что и для системы (2.7.8) и (2.7.9) границей, отделяющей область существования восьми решений от области существования четырех решений, также является астроида

$$h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = \nu^{2/3}. \quad (2.7.10)$$

На рис. 2.33–2.35 представлены астроида (2.7.7) и (2.7.10) для значений ν , равных 0.2, 0.5 и 0.8, которые делят плоскость (h_1, h_2) на три области с различным числом положений равновесия спутника. На рисунках показаны области, где существуют 8, 6 и 4 действительных решений (16, 12 и 8 равновесий) для уравнений (2.7.4) и (2.7.9), где выполняются условия $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} < \nu^{2/3}$, $\nu^{2/3} < h_1^{2/3} + h_2^{2/3} < (3\nu)^{2/3}$ и $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} > (3\nu)^{2/3}$ для первого и второго случая соответственно.

Рассмотрим далее третий случай, когда равновесия спутника определяются действительными корнями биквадратного уравнения $P_2(x) = 0$. Число действительных корней биквадратного уравнения $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ четно и не превышает 4. Для каждого решения a_{33} из второго полинома из базиса Гребнера можно получить два значения a_{32} и далее соответствующее им значение a_{31} .

Для каждого набора значений a_{31}, a_{32} и a_{33} можно однозначно получить из исходной системы (2.7.1), (2.3.4) соответствующие значения остальных направляющих косинусов $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$. Таким образом, каждому действительному корню биквадратного уравнения (2.7.2) соответствуют два набора значений a_{ij} (две равновесные ориентации). Так как число действительных корней уравнения (2.7.2) не превышает 4, количество положений равновесия спутника в третьем случае не превышает 8.

Для переменной $t = x^2 = a_{33}^2$ из (2.7.2) получим квадратное уравнение относительно t :

$$P_2(t) = p_0 t^2 + p_1 t + p_2 = 0. \quad (2.7.11)$$

Уравнение (2.7.11) имеет следующие два корня:

$$t_1 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_0 p_2}}{2p_0};$$

$$t_2 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0 p_2}}{2p_0}. \quad (2.7.12)$$

Можно показать, что дискриминант уравнения (2.7.11) неотрицателен, то есть выполняется условие $p_1^2 - 4p_0 p_2 \geq 0$ при любых значениях параметров системы. Тогда, при выполнении неравенства $t_1 = a_{33}^2 > 0$ уравнение (2.7.11) будет иметь два действительных корня t_1 и t_2 , которым соответствуют четыре значения a_{33} . При этих условиях система (2.7.1), (2.3.4) (при $a_{33} \neq 0$, $a_{33} \neq \pm 1$) имеет 8 решений, которые соответствуют 8 равновесным ориентациям спутника. Эти положения равновесия существуют при значениях параметров, находящихся внутри области, ограниченной кривой $t_1(h_1, h_2, v) = 0$. На рис. 2.33–2.35 эти кривые отмечены значком t_1 .

В области, ограниченной кривыми $t_1(h_1, h_2, v) = 0$, $t_2(h_1, h_2, v) = 1$, где выполняются неравенства $t_1(h_1, h_2, v) < 0$ и $0 < t_2(h_1, h_2, v) < 1$, существуют только четыре положения равновесия, которые соответствуют одному корню t_2 . В области, находящейся за пределами границы $t_2(h_1, h_2, v) = 1$, не существуют решения для третьего случая. На рис. 2.33–2.35 эти кривые отмечены значком t_2 .

Результаты анализа положений равновесий для третьего случая можно суммировать следующим образом: кривые $t_1(h_1, h_2, v) = 0$,

$t_2(h_1, h_2, \nu) = 1$ делят плоскость (h_1, h_2) на три области, в которых существует 8 равновесий, 4 равновесия и область, где равновесия не существуют.

Финальное разбиение плоскости (h_1, h_2) на области с равным числом равновесий для всех трех случаев представлено на рис. 2.33–2.35 для фиксированных значений инерционного параметра $\nu = 0.2$, $\nu = 0.5$, $\nu = 0.8$. Кривые (2.7.7), (2.7.10), $t_1(h_1, h_2, \nu) = 0$, $t_2(h_1, h_2, \nu) = 1$ разделяют плоскость на области с числом равновесий, равным 24, 20, 16, 12 и 8.

2. Рассмотрим теперь следующий случай, когда вектор аэродинамического момента лежит в плоскости Oyz и $H_1 = 0$, $H_2 \neq 0$, $H_3 \neq 0$. Система (2.3.1) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + h_2a_{13} - h_3a_{12} &= 0, \\ (1-\nu)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - h_3a_{11} &= 0, \\ \nu(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) + h_2a_{11} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

Применяя описанный выше подход для исследования системы алгебраических уравнений, построим базис Гребнера для полиномов, представляющих собой левые части уравнений системы (2.7.13), (2.3.4). Следует отметить, что при изменении лексикографического порядка в списке переменных удается получить в базисе Гребнера полином от одной неизвестной только для переменных a_{21} и a_{31} . Полином из базиса Гребнера, который зависит только от одной переменной, для данного случая a_{31} , имеет вид

$$P_{a1}(a_{31}) = P_3(a_{31})P_4(a_{31}) = 0, \quad (2.7.14)$$

где

$$P_3(a_{31}) = a_{31}(a_{31}^2 - 1),$$

$$P_4(a_{31}) = p_{40}a_{31}^4 + p_{41}a_{31}^2 + p_{42},$$

$$p_{40} = 9\nu^2(1-\nu)^2 p_{43}^2,$$

$$p_{41} = p_{43}(v^4 h_3^6 + v^2(1-\nu)(6v^2 - (3\nu-1)h_2^2)h_3^4 + \\ + v(1-\nu)^2((2\nu-3)h_2^4 + 9\nu(2h_2^2 - v^2))h_3^2 + \\ + (1-\nu)^4 h_2^2(h_2^2 + 3\nu)^2),$$

$$p_{42} = -h_2^2 h_3^2 (v^4 h_3^6 + v^2(1-\nu)(v^2(5+\nu) + (1-3\nu)h_2^2)h_3^4 + \\ + v(1-\nu)^2((3\nu-2)h_2^4 + 2\nu(v(1-\nu) - 5)h_2^2 + \\ + 3\nu^3(1+2\nu))h_3^2 + (1-\nu)^4(h_2^2 - v^2)(h_2^2 + 3\nu)^2),$$

$$p_{43} = v^2 h_3^4 + 2\nu(1-\nu)(h_2^2 - 3\nu)h_3^2 + (1-\nu)^2(h_2^2 + 3\nu)^2.$$

Для исследования системы (2.7.13), (2.3.4) здесь также необходимо рассмотреть три случая: $a_{31} = 0$, $a_{31}^2 = 1$ и $P_4(a_{31}) = 0$.

В первом случае, когда $a_{31} = 0$, используя подход, описанный в пункте 1, можно получить бифуркационную кривую

$$h_2^{2/3} + h_3^{2/3} = 3^{2/3},$$

которая делит плоскость (h_2, h_3) на две области, где существуют 8 и 4 равновесных ориентации спутника. Во втором случае, когда $a_{31}^2 = 1$, применяя описанный выше подход, можно показать, что для системы (2.7.13) бифуркационная кривая, разделяющая области существования восьми и четырех равновесных решений, также имеет вид астроида

$$h_2^{2/3} + h_3^{2/3} = 1.$$

Другие две кривые, которые являются границами областей с равным числом равновесий, могут быть получены из условий существования действительных корней биквадратного уравнения $P_4(a_{31}) = 0$, которые не превосходят 1. Эволюция областей с фиксированным числом равновесий в плоскости параметров (h_2, h_3) имеет похожий характер, который получен для случая, описанного в пункте 1.

3. В последнем случае, когда вектор аэродинамического момента лежит в плоскости Oxz и $H_2 = 0$ ($H_1 \neq 0$, $H_3 \neq 0$), исходная система (2.3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} - h_3a_{12} &= 0, \\ (1-\nu)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - h_3a_{11} + h_1a_{13} &= 0, \\ \nu(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

Построим базис Гребнера для полиномов, представляющих собой левые части системы (2.7.15), (2.3.4). Здесь также следует отметить, что при изменении лексикографического порядка в списке переменных удастся получить в базисе Гребнера полином от одной неизвестной только для переменных a_{22} и a_{32} . Вычисляя базис Гребнера для системы полиномов из левой части уравнений системы (2.7.15), (2.3.4), получим в результате полином, зависящий только от одной переменной a_{32} , который имеет следующий вид:

$$P_{a_2}(a_{32}) = P_5(a_{32})P_6(a_{32}) = 0. \quad (2.7.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_5(a_{32}) &= a_{32}(a_{32}^2 - 1), \\ P_6(a_{32}) &= p_{60}a_{32}^4 + p_{61}a_{32}^2 + p_{62}, \\ p_{60} &= 9\nu^2 p_{63}^2, \\ p_{61} &= p_{63}(h_1^6 + \nu((2+\nu)h_3^2 - 6(1-\nu))h_1^4 + \nu^2((2\nu+1)h_3^4 + \\ &\quad -18(1-\nu)^2 h_3^2 + 9(1-\nu)^2)h_1^2 + \nu^4 h_3^2(h_3^2 + 3(1-\nu))^2), \\ p_{62} &= -h_1^2 h_3^2 (h_1^6 + \nu((2+\nu))h_3^2 + 5\nu - 6)h_1^4 + \\ &\quad + \nu^2((2\nu+1)h_3^4 + 2(9\nu - 5\nu^2 - 5)h_3^2 + \\ &\quad + 3(\nu^2 - 4\nu + 3))h_1^2 + \nu^4(h_3^2 - 1)(h_3^2 + 3(1-\nu))^2), \\ p_{63} &= h_1^4 + 2\nu(h_3^2 - 3(1-\nu))h_1^2 + \nu^2(h_3^2 + 3(1-\nu))^2. \end{aligned}$$

Для исследования системы (2.7.15) необходимо рассмотреть случаи $a_{32} = 0$, $a_{32}^2 = 1$, $P_6(a_{32}^2) = 0$. В первом случае, когда $a_{32} = 0$, используя подход, описанный в пункте 1, можно получить бифуркационную кривую

$$h_1^{2/3} + h_3^{2/3} = (3(1-\nu))^{2/3},$$

которая делит плоскость (h_1, h_3) на две области, где существуют 8 и 4 равновесных ориентации спутника. Во втором случае, когда $a_{32}^2 = 1$, бифуркационная кривая, разделяющая области существования восьми и четырех равновесных решений, также представляет астроиду

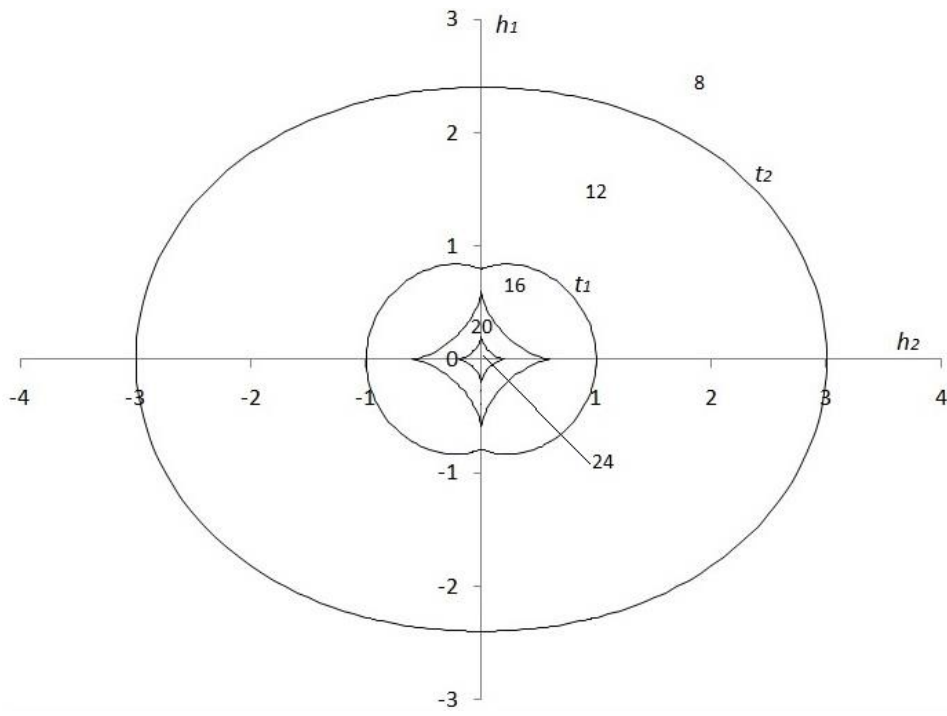
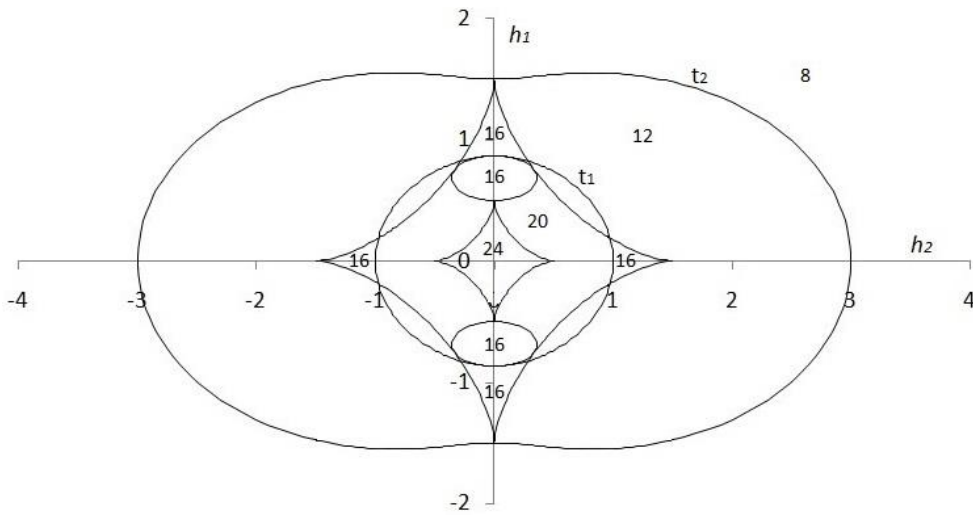
$$h_1^{2/3} + h_3^{2/3} = (1-\nu)^{2/3}.$$

Другие две кривые, которые являются границами областей с равным числом равновесий, могут быть получены из условий существования действительных корней биквадратного уравнения $P_6(a_{32}^2) = 0$.

Эволюция областей с фиксированным числом равновесий в плоскости параметров (h_1, h_3) имеет схожий характер с первым случаем.

Для второго случая в работе [150] с использованием теоремы Ляпунова были получены достаточные условия устойчивости равновесных решений при $h_1 \neq 0, h_2 = 0, h_3 \neq 0$.

Полученные в рассмотренных выше трех случаях условия $a_{31} = 0, a_{31}^2 = 1; a_{32} = 0, a_{32}^2 = 1$ и $a_{33} = 0, a_{33}^2 = 1$ определяют все типы плоских решений данной задачи.

Рис. 2.33. $\nu=0.2$, $h_3=0$ Рис. 2.34. $\nu=0.5$, $h_3=0$

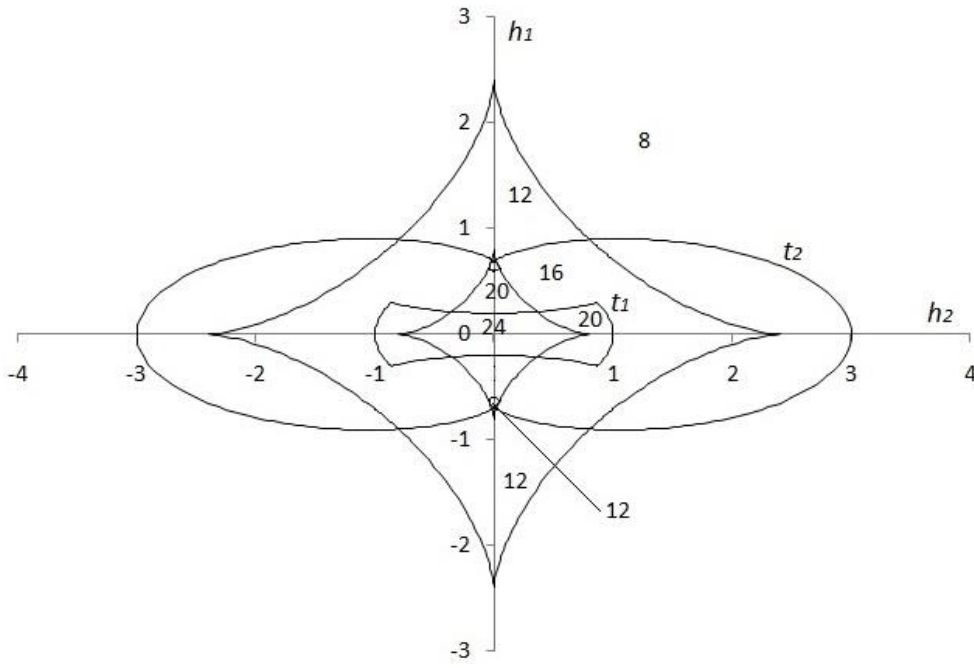


Рис. 2.35. $\nu=0.8$, $h_3=0$

2.8. Исследование положений равновесия спутника для других частных случаев

Основное внимание в данном разделе уделено исследованию положений равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов для частных случаев, когда одна из главных осей инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом-вектором или касательной к орбите [170].

Рассмотрим вначале первый случай, подробно изученный в пункте 1 раздела 2.7, когда ось Oz спутника совпадает с нормалью OY к плоскости орбиты ($a_{23}^2 = 1$, $a_{33} = 0$, $a_{13} = a_{21} = a_{22} = 0$, $H_3 = 0$). В этом случае направляющие косинусы определяются уравнениями (2.7.3). Система (2.7.3) сводится к алгебраическому уравнению четвертой степени (2.7.4) относительно переменной a_{31} . В разделе 2.7 показано, что в задаче существуют либо восемь, либо четыре решения. Бифуркационная кривая (2.7.7) $h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = (3\nu)^{2/3}$, разделяет области, где существуют 4 и 8 решений (рис. 2.36).

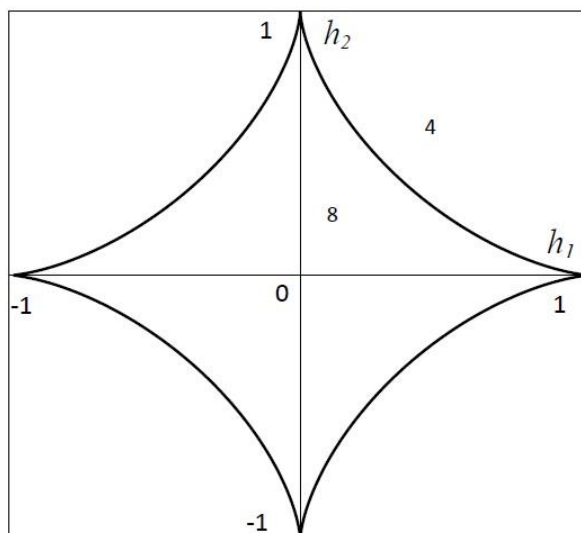
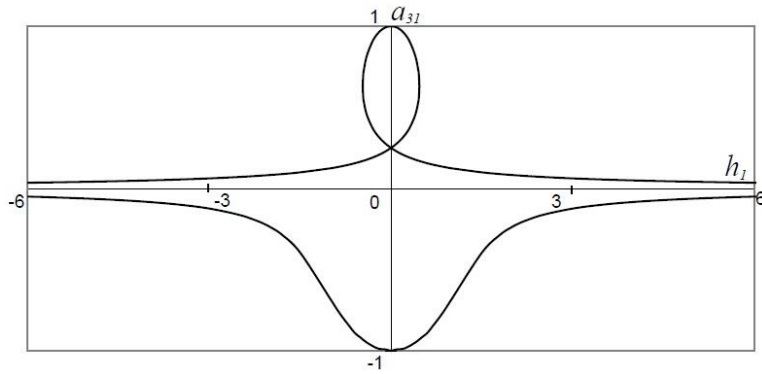


Рис. 2.36. $\nu=1/3$

Рис. 2.37. $v=1/3$, $h_2=1/4$

На рис. 2.37 приведен график решения алгебраического уравнения (2.7.4) при фиксированном значении параметра $h_2=1/4$.

Рассмотрим далее три случая, подробно изученных в разделе 2.7, когда оси инерции спутника Ox , Oy , Oz последовательно совпадают с осью OZ ($a_{31}^2=1$, $a_{32}^2=1$ и $a_{33}^2=1$). Получим условия существования равновесных ориентаций для этих случаев.

1. При $a_{31}^2=1$ из (2.3.1), (2.3.4) получим $H_1=0$, $a_{11}=a_{21}=a_{32}=a_{33}=0$. Из результатов, представленных в разделе 2.7, следует, что бифуркационная кривая, разделяющая области существования восьми и четырех равновесных решений, имеет вид астроида

$$h_2^{2/3} + h_3^{2/3} = 1.$$

2. При $a_{32}^2=1$ из (2.3.1), (2.3.4) получим $H_2=0$, $a_{12}=a_{22}=a_{31}=a_{33}=0$. Бифуркационная кривая имеет вид

$$h_1^{2/3} + h_3^{2/3} = (1-v)^{2/3}.$$

3. При $a_{33}^2=1$ из (2.3.1), (2.3.4) получим $H_3=0$, $a_{13}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=0$. Бифуркационная кривая имеет вид (2.7.10)

$$h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = v^{2/3}.$$

Рассмотрим далее еще три случая, представленных в разделе 2.7, когда оси Ox , Oy , Oz последовательно совпадают с осью OY

4. При $a_{21}^2 = 1$ из (2.3.1), (2.3.4) получим $H_1 = 0$, $a_{11} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = 0$.

Бифуркационная кривая имеет вид

$$h_2^{2/3} + h_3^{2/3} = 3^{2/3}.$$

5. При $a_{22}^2 = 1$ из (2.3.1), (2.3.4) получим $H_2 = 0$, $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = 0$. В этом случае бифуркационная кривая имеет вид

$$h_1^{2/3} + h_3^{2/3} = (3(1-\nu))^{2/3}.$$

6. Случай $a_{23}^2 = 1$, $H_3 = 0$, $a_{13} = a_{21} = a_{22} = a_{33} = 0$ рассмотрен выше.

В случаях, когда оси Ox , Oy , Oz последовательно совпадают с осью Ox , положения равновесия возможны, только если вектор аэродинамического момента совпадает с какой-либо главной осью инерции спутника.

7. При $a_{11}^2 = 1$ получим условия $H_1 \neq 0$, $H_2 = H_3 = 0$, $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$.

8. При $a_{12}^2 = 1$ получим условия $H_2 \neq 0$, $H_1 = H_3 = 0$, $a_{11} = a_{13} = a_{22} = a_{32} = 0$.

9. При $a_{13}^2 = 1$ получим следующие условия $H_3 \neq 0$, $H_1 = H_2 = 0$ и

$$a_{23} = a_{11} = a_{12} = a_{33} = 0.$$

Рассмотрение случаев 1 – 9, когда одна из главных осей инерции спутника совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом-вектором или касательной к орбите, показывает, что любая такая ориентация является равновесной, при выполнении условий, указанных в пунктах 1–9.

2.9. Сравнительный анализ общего и частных случаев

Задача определения положений равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов, в рассмотренных в разделе 2.8 простых случаях (1–9), когда главная ось инерции спутника в равновесном положении совпадает с одной из осей орбитальной системы координат или лежит в одной из плоскостей, образуемых осями орбитальной системы, подробно рассмотрена в работах [148–150, 170].

Случай, когда центр давления аэродинамических сил расположен на одной из главных центральных осей инерции спутника $H_1 \neq 0$, $H_2 = H_3 = 0$ (случай 7), был впервые исследован в работе [148]. При этих условиях из второго уравнения (2.3.10) получим равенство $H_1^2 = 3(B - A)(A - C)$, которое выполняется если $(B - A)(A - C) > 0$ ($B > A > C$, $0 < \nu < 1$), когда вектор аэродинамического момента \vec{H} совпадает с осью максимального или минимального момента инерции спутника. В этом случае первое уравнение системы (2.3.10) определяет два однопараметрических семейства равновесных решений. В [148] определены условия существования 24, 20, 16, 12 и 8 положений равновесия и получены достаточные условия устойчивости изолированных положений равновесия с использованием метода Ляпунова. В данной работе также было доказано, что рассматриваемая задача аналогична задаче определения положений равновесия спутника-гиростата. Показано, что если модуль аэродинамического момента $|\vec{H}|$ достаточно мал, то существуют 24 изолированных положения равновесия. С ростом модуля аэродинамического момента число положений равновесия убывает, и при очень большом $|\vec{H}|$ возможны лишь 8 положений равновесия, когда вектор аэродинамического момента совпадает с касательной к орбите. В общем случае при значениях параметров аэродинамического момента, равных или

превосходящих 3, также существуют только 8 положений равновесия (рис.2.25, 2.32).

Наиболее полное исследование устойчивости положений равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов, при $H_1 \neq 0$, $H_2 = H_3 = 0$ (случай 7), проведено в [149]. Для каждой равновесной ориентации получены как достаточные, так и необходимые условия устойчивости. Исследована эволюция областей устойчивости в зависимости от двух безразмерных параметров задачи при разных значениях параметра H_1 . Определены все бифуркационные значения параметра H_1 , соответствующие качественному изменению областей устойчивости.

Более сложный случай, когда центр давления аэродинамических сил лежит в одной из главных центральных плоскостей инерции спутника $Oxyz$, ($H_1 \neq 0$, $H_2 = 0$, $H_3 \neq 0$), рассмотрен в работе [150]. Здесь также определены все положения равновесия спутника в зависимости от трех безразмерных параметров задачи, детально изучена эволюция изменения областей с фиксированным числом положений равновесия и были определены все бифуркационные значения параметров системы, соответствующие качественному изменению этих областей и получены достаточные условия устойчивости положений равновесия с использованием метода Ляпунова.

Для случаев 1–6 из раздела 2.8, когда вектор аэродинамического момента лежит в одной из координатных плоскостей системы $Oxyz$ [150, 171] (рис. 2.33–2.35), число положений равновесия спутника также уменьшается от 24 до 8 с шагом 4 при последовательном увеличении модуля вектора аэродинамического момента. В [171] символично получен вид бифуркационных кривых, которые задают границы областей с равным числом положений равновесия спутника для всех случаев (1–6), когда

вектор аэродинамического момента лежит в координатной плоскости системы $Oxyz$ и не совпадает с ее осями.

Следует отметить, что результаты, полученные в разделе 2.7, позволяют определить точные значения точек пересечения бифуркационных кривых с осями на плоскости (h_1, h_2) при $h_3 = 0$ для общего случая задачи о положениях равновесия спутника (см. раздел 2.5, рис. 2.3 – 2.18). Из сравнения, например, рис. 2.4 при $\nu = 0.2$ и рис. 2.10 при $\nu = 0.5$ и 2.14 при $\nu = 0.8$ в плоскости (h_1, h_2) и значениях $h_3 = 0.01$ и соответствующих рисунков 2.33, 2.34, 2.35 для фиксированных значений инерционного параметра $\nu = 0.2$, $\nu = 0.5$, $\nu = 0.8$ и $h_3 = 0$ можно сделать вывод, что численные результаты, полученные для общего случая задачи, асимптотически сходятся к аналитическим решениям, полученных для частных случаев.

В общем случае проведенное численное исследование показало, что число положений равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов, также как и в частных случаях, уменьшается от 24 до 8 с шагом 4 при последовательном увеличении модуля вектора аэродинамического момента. В таблице 2.1 представлены вычисленные значения параметров аэродинамического момента, при которых происходит изменение числа положений равновесия.

Следует отметить, что при величине аэродинамического момента, равной нулю, мы получим хорошо известный результат, который заключается в том, что спутник с неравными главными центральными моментами инерции при действии только гравитационного момента имеет на круговой орбите 24 положения равновесия, четыре из которых являются устойчивыми [2, 70].

2.10. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Положения равновесия

В данном разделе представлены результаты исследования положений равновесия и достаточных условий их устойчивости для осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Они качественно соответствуют результатам, полученным в разделах 2.3 – 2.6 для общего случая спутника, где показана эволюция равновесных решений, которые определяются действительными корнями алгебраического уравнения 12-го порядка (2.3.17) с коэффициентами, зависящими от трех проекций аэродинамического момента и безразмерного инерционного параметра системы $\nu = (B - A)/(B - C)$.

Для решения поставленной задачи направляющие косинусы осей связанной со спутником системы координат Ox, Oy, Oz в орбитальной системе координат $OXYZ$ удобнее выразить через самолетные углы тангажа α , рыскания β и крена γ с помощью соотношений (1.10.1), рис. 1.37. Тогда уравнения движения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов относительно его центра масс запишутся с использованием самолетных углов в следующем виде [162, 183]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \omega_0^2(H_2a_{13} - H_3a_{12}) &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \omega_0^2(H_3a_{11} - H_1a_{13}) &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \omega_0^2(H_1a_{12} - H_2a_{11}) &= 0; \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

$$\begin{aligned} p &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma} = \bar{p} + \omega_0a_{21}, \\ q &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma = \bar{q} + \omega_0a_{22}, \\ r &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma = \bar{r} + \omega_0a_{23}. \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

Здесь уравнения (2.10.1) совпадают с уравнениями (2.2.4), ω_0 – угловая скорость движения центра масс гиростата по круговой орбите; точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Для системы уравнений (2.10.1), (2.10.2) справедлив обобщенный интеграл энергии (2.2.6).

Положив в (2.10.1) и (2.10.2) $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ – постоянные величины, получим при $A \neq B \neq C$ уравнения

$$\begin{aligned} (C - B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - H_2a_{13} + H_3a_{12} &= 0, \\ (A - C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - H_3a_{11} + H_1a_{13} &= 0, \\ (B - A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - H_1a_{12} + H_2a_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (2.10.3)$$

позволяющие после подстановки выражений для направляющих косинусов (1.10.1) определить неизвестные величины $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Другой, более удобный для исследования, способ замыкания уравнений (2.10.3) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов (1.3.4). Уравнения (2.10.3) совпадают с уравнениями (2.3.1). В последующем исследовании удобнее использовать эквивалентную систему (2.3.2):

$$\begin{aligned} Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} &= 0, \\ 3(Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33}) + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) &= 0, \\ (Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - (h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) &= 0, \end{aligned}$$

Основное внимание в данном разделе будет уделено нерассмотренному ранее частному случаю исследования положений равновесия осесимметричного спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов.

Пусть $A \neq B = C$, $H_1 \neq 0$, $H_2 \neq 0$, $H_3 \neq 0$. Тогда система (2.3.2), упрощаясь, принимает вид

$$\begin{aligned} (A - B)a_{21}a_{31} &= 0, \\ 3(A - B)a_{11}a_{31} + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) &= 0, \\ (A - B)a_{11}a_{21} - (h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

Для системы уравнений (2.10.4) и (2.3.4) ставится следующая задача: при заданных параметрах $A - B$, H_1, H_2, H_3 требуется определить девять

направляющих косинусов a_{ij} , т.е. все положения равновесия осесимметричного спутника.

Из системы уравнений (2.10.4) и условий ортогональности (2.3.4) получаем следующие два случая:

Случай 1

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= 0, \\
 3(A - B)a_{11}a_{31} + (H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}) &= 0, \\
 H_2a_{22} + H_3a_{23} &= 0, \\
 a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\
 a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\
 a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\
 a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\
 a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\
 a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.10.5}$$

Случай 2

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= 0, \\
 H_2a_{32} + H_3a_{33} &= 0, \\
 (A - B)a_{11}a_{21} - (H_1a_{21} + H_2a_{22} + H_3a_{23}) &= 0, \\
 a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\
 a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\
 a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\
 a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\
 a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\
 a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.10.6}$$

Рассмотрим вначале систему (2.10.5). Из третьего и пятого уравнений системы (2.10.5) получаем $a_{22} = \pm \frac{H_3}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}$, $a_{23} = \mp \frac{H_2}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}$. Учитывая

свойства определителя матрицы направляющих косинусов, получаем

$$a_{12} = a_{23}a_{31}, \quad a_{13} = -a_{22}a_{31}, \quad a_{32} = -a_{11}a_{23}, \quad a_{33} = a_{11}a_{22},$$

$$H_2 a_{32} + H_3 a_{33} = \pm a_{11} \sqrt{H_2^2 + H_3^2}.$$

Тогда система (2.10.5) может быть представлена в виде

$$a_{12} = a_{23}a_{31}, \quad a_{13} = -a_{22}a_{31},$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = \pm \frac{H_3}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}, \quad a_{23} = \mp \frac{H_2}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}},$$

$$a_{32} = -a_{23}a_{11}, \quad a_{33} = a_{22}a_{11}, \quad (2.10.7)$$

$$3(A - B)a_{11}a_{31} \pm a_{11}\sqrt{H_2^2 + H_3^2} + H_1 a_{31} = 0,$$

$$a_{11}^2 + a_{31}^2 = 1.$$

Рассмотрим теперь систему (2.10.6). Из второго и шестого уравнения этой системы получаем $a_{32} = \pm \frac{H_3}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}$, $a_{33} = \mp \frac{H_2}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}$. Учитывая, что

$$a_{12} = -a_{33}a_{21}, \quad a_{13} = a_{32}a_{21}, \quad a_{22} = a_{33}a_{11}, \quad a_{23} = -a_{32}a_{11},$$

$$H_2 a_{22} + H_3 a_{23} = \mp a_{11} \sqrt{H_2^2 + H_3^2},$$

систему (2.10.6) можно записать в следующем виде:

$$a_{12} = -a_{33}a_{21}, \quad a_{13} = a_{32}a_{21},$$

$$a_{22} = a_{33}a_{11}, \quad a_{23} = -a_{32}a_{11},$$

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = \pm \frac{H_3}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}, \quad a_{33} = \mp \frac{H_2}{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}, \quad (2.10.8)$$

$$(A - B)a_{11}a_{21} \pm a_{11}\sqrt{H_2^2 + H_3^2} - H_1 a_{21} = 0,$$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1.$$

Введем безразмерные параметры $m = \frac{H_1}{A - B}$, $n = \frac{\sqrt{H_2^2 + H_3^2}}{A - B}$. Тогда

последние два уравнения системы (2.10.7) запишутся в более простом виде

$$3a_{11}a_{31} + ma_{31} \pm na_{11} = 0, \quad (2.10.9)$$

$$a_{11}^2 + a_{31}^2 = 1,$$

или

$$9a_{11}^4 + 6ma_{11}^3 + (m^2 + n^2 - 9)a_{11}^2 - 6ma_{11} - m^2 = 0,$$

$$a_{31} = \frac{\mp na_{11}}{m + 3a_{11}}. \quad (2.10.10)$$

Решив систему (2.10.9) или (2.10.10), можно из первых семи уравнений системы (2.10.7) определить оставшиеся направляющие косинусы.

Первое уравнение системы (2.10.9) для обоих знаков перед последним членом в левой части представляет собой уравнения четырех гипербол, две ветви которых проходит через начало системы координат ($a_{11} = 0$, $a_{31} = 0$) в плоскости переменных a_{11} , a_{31} , а второе уравнение определяет в этой плоскости единичную окружность. Число действительных решений системы (2.10.9) и, следовательно, системы (2.10.7), зависит от характера пересечений гипербол и окружности. Ясно, что две ветви гипербол, которые проходят через начало координат, всегда пересекаются с окружностью в четырех точках. Если и две другие ветви гипербол пересекаются с окружностью, то имеем еще четыре решения. В случае касания ветвей гипербол с окружностью четыре решения сливаются в два (существуют две пары кратных корней). Таким образом, система (2.10.9) и система (2.10.7) имеет либо восемь, либо четыре решения. На рис.2.38– 2.40 представлены три различных варианта взаимного расположения ветвей гипербол и окружности.

Возможно провести и более детальное исследование свойств системы (2.10.9). Определим границы в плоскости m , n , разделяющие области с различным числом решений. Из приведенных выше рисунков следует, что точками бифуркации являются точки плоскости m , n , через которые проходят одновременно ветви гипербол и окружность и где касательные к этим кривым совпадают. Условие совпадения касательной к двум ветвям гипербол и окружности имеет вид

$$\frac{da_{31}}{da_{11}} = -\frac{3a_{31} \pm n}{3a_{11} + m} = -\frac{2a_{11}}{2a_{31}}$$

или

$$3(a_{31}^2 - a_{11}^2) - ma_{11} \pm na_{31} = 0. \quad (2.10.11)$$

Подставив выражение для a_{31} из (2.10.10) во второе уравнение (2.10.9) и уравнение (2.10.11), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{n^2 a_{11}^2}{(3a_{11} + m)^2} &= 1 - a_{11}^2, \\ \frac{mn^2}{(3a_{11} + m)^2} &= -(3a_{11} + m). \end{aligned} \quad (2.10.12)$$

Исключив n^2 из системы уравнений (2.10.12), после несложных преобразований получим соотношение $a_{11} = -3^{-1/3} m^{1/3}$. Подставив, наконец, выражение для a_{11} во второе уравнение (2.10.12), приходим к уравнению астроида

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 3^{2/3}. \quad (2.10.13)$$

Внутри области $m^{2/3} + n^{2/3} < 3^{2/3}$ существуют восемь решений; при переходе через кривую (2.10.13), являющуюся бифуркационной, происходит изменение числа решений на четыре; в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 3^{2/3}$ существуют четыре решения.

Рассмотрим теперь последние два уравнения системы (2.10.8), записав их с использованием параметров m и n в виде

$$\begin{aligned} a_{11}a_{21} - ma_{21} \pm na_{11} &= 0, \\ a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.10.14)$$

или

$$a_{11}^4 - 2ma_{11}^3 + (m^2 + n^2 - 1)a_{11}^2 + 2ma_{11} - m^2 = 0,$$

$$a_{21} = \frac{\pm na_{11}}{m - a_{11}}. \quad (2.10.15)$$

Применив предложенный выше при исследовании системы (2.10.9) подход, можно показать, что и для системы (2.10.14) бифуркационной кривой, отделяющей область существования восьми решений от области существования четырех решений, также является астроида

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 1. \quad (2.10.16)$$

На рис. 2.41 представлены астроида (2.10.13) и (2.10.16), выделяющие в плоскости m, n три области с различным числом положений равновесия осесимметричного спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов. В области $m^{2/3} + n^{2/3} < 1$ существуют 16 решений, в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 1$, $m^{2/3} + n^{2/3} < 3^{2/3}$ существуют 12 решений, в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 3^{2/3}$ существуют 8 решений.

2.11. Достаточные условия устойчивости положений равновесия осесимметричного спутника

Для исследования достаточных условий устойчивости полученных положений равновесия системы (2.10.4), (1.3.4) будем использовать обобщенный интеграл энергии (2.2.6) в качестве функции Ляпунова. Интеграл (2.2.6) для осесимметричного спутника ($B = C$) упрощается и принимает вид

$$\frac{1}{2}[A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{1}{2}\omega_0^2(A - B)(3a_{31}^2 - a_{21}^2) - \omega_0^2(H_1 a_{11} + H_2 a_{12} + H_3 a_{13}) = \text{const}. \quad (2.11.1)$$

Представим α, β, γ в виде $\alpha = \alpha_0 + \bar{\alpha}$, $\beta = \beta_0 + \bar{\beta}$, $\gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma}$, где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ – малые отклонения от положения равновесия $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$,

$\beta = \beta_0 = \text{const}$, $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, удовлетворяющего системе уравнений (2.10.4), (2.3.4). Тогда интеграл энергии (2.10.17) может быть представлен следующим образом [162]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{1}{2}\omega_0^2(A_{\alpha\alpha}\bar{\alpha}^2 + A_{\beta\beta}\bar{\beta}^2 + A_{\gamma\gamma}\bar{\gamma}^2 + \\ & + 2A_{\alpha\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta} + 2A_{\alpha\gamma}\bar{\alpha}\bar{\gamma} + 2A_{\beta\gamma}\bar{\beta}\bar{\gamma}) + \Sigma = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.11.2)$$

Здесь Σ обозначает члены выше второго порядка малости относительно $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$,

$$\begin{aligned} A_{\alpha\alpha} &= 3(A-B)\cos 2\alpha_0 \cos^2 \beta_0 + (H_1 a_{11} + H_2 a_{12} + H_3 a_{13}), \\ A_{\beta\beta} &= -(A-B)(1 + 3\sin^2 \alpha_0)\cos 2\beta_0 + H_1 a_{11} - \\ & - (h_2 \cos \gamma_0 - H_3 \sin \gamma_0)\cos \alpha_0 \sin \beta_0, \\ A_{\gamma\gamma} &= H_2 a_{12} + H_3 a_{13}, \\ A_{\alpha\beta} &= A_{\beta\alpha} = 7(A-B)a_{21}a_{31} \cos \alpha_0 = 0, \\ A_{\alpha\gamma} &= A_{\gamma\alpha} = -(H_2 a_{33} - H_3 a_{32}), \\ A_{\beta\gamma} &= A_{\gamma\beta} = -(H_2 \sin \gamma_0 + H_3 \cos \gamma_0)a_{11}. \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

Достаточные условия устойчивости положения равновесия $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$ (положительная определенность квадратичной формы (2.11.2)) имеют вид

$$A_{\alpha\alpha} > 0, A_{\beta\beta} > 0, A_{\beta\beta}A_{\gamma\gamma} - (A_{\beta\gamma})^2 > 0. \quad (2.11.4)$$

В случае 1 $a_{21} = \sin \beta_0 = 0$. Из второго и третьего уравнений системы (2.10.13) получаем соотношения

$$H_2 \sin \gamma_0 + H_3 \cos \gamma_0 = \frac{3(A-B)\cos \alpha_0 + H_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0} \sin \alpha_0, \quad (2.11.5)$$

$$H_2 \cos \gamma_0 - H_3 \sin \gamma_0 = 0.$$

Используя соотношения (2.11.5) и условие $\sin \beta_0 = 0$, получим выражения (2.11.3) в более простом виде

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha\alpha} &= \frac{3(A-B) \cos^3 \alpha_0 + H_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0}, \\
 A_{\beta\beta} &= -(A-B)(1 + 3 \sin^2 \alpha_0) + H_1 \cos \alpha_0 \cos \beta_0, \\
 A_{\gamma\gamma} &= \frac{3(A-B) \cos \alpha_0 + H_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0} \sin^2 \alpha_0, \\
 A_{\alpha\beta} &= A_{\beta\alpha} = 0, \quad A_{\alpha\gamma} = A_{\gamma\alpha} = 0, \\
 A_{\beta\gamma} &= A_{\gamma\beta} = -[3(A-B) \cos \alpha_0 \cos \beta_0 + H_1] \sin \alpha_0.
 \end{aligned} \tag{2.11.6}$$

Из (2.11.4) получаем достаточные условия устойчивости в случае 1

$$\begin{aligned}
 \frac{3(A-B) \cos^3 \alpha_0 + H_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0} &> 0, \\
 (B-A)(1 + 3 \sin^2 \alpha_0) + H_1 \cos \alpha_0 \cos \beta_0 &> 0, \\
 A - B &< 0.
 \end{aligned}$$

Вводя параметр m , получаем окончательно

$$\begin{aligned}
 a_{11}(m + 3a_{11}^3) &< 0, \\
 3a_{11}^2 + ma_{11} - 4 &< 0, \\
 A - B &< 0.
 \end{aligned} \tag{2.11.7}$$

В случае 2 $a_{31} = -\sin \alpha_0 \cos \beta_0 = 0$ и, следовательно, $\sin \alpha_0 = 0$. Из второго и третьего уравнений системы (2.10.6) получаем соотношения

$$\begin{aligned}
 H_2 \cos \gamma_0 - H_3 \sin \gamma_0 &= \frac{(A-B) \cos \alpha_0 \cos \beta_0 - H_1}{\cos \beta_0} \sin \beta_0, \\
 H_2 \sin \gamma_0 + H_3 \cos \gamma_0 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.11.8}$$

С учетом соотношений (2.11.8) и условия $\sin \alpha_0 = 0$ из (2.11.3) получаем

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\alpha} &= \frac{(A-B)\cos\beta_0(4\cos^2\beta_0-1) + H_1\cos\alpha_0}{\cos\beta_0}, \\
A_{\beta\beta} &= \frac{-(A-B)\cos^3\beta_0 + H_1\cos\alpha_0}{\cos\beta_0}, \\
A_{\gamma\gamma} &= \frac{-(A-B)\cos\beta_0 + H_1\cos\alpha_0}{\cos\beta_0} \sin^2\beta_0, \\
A_{\alpha\beta} &= A_{\beta\alpha} = 0, \quad A_{\beta\gamma} = A_{\gamma\beta} = 0 \\
A_{\alpha\gamma} &= A_{\gamma\alpha} = \frac{-(A-B)\cos\beta_0 + H_1\cos\alpha_0}{\cos\beta_0} \sin\beta_0.
\end{aligned} \tag{2.11.9}$$

Достаточные условия устойчивости (2.11.4) для положения равновесия в случае 2 имеют вид

$$\begin{aligned}
\cos\beta_0[(A-B)\cos\beta_0(4\cos^2\beta_0-1) + H_1\cos\alpha_0] &> 0, \\
\cos\beta_0[-(A-B)\cos^3\beta_0 + H_1\cos\alpha_0] &> 0, \\
A - B &> 0.
\end{aligned}$$

Вводя параметр m , получаем

$$\begin{aligned}
a_{11}[a_{11}(4a_{11}^2-1) + m] &> 0, \\
a_{11}(m - a_{11}^3) &> 0, \\
A - B &> 0.
\end{aligned} \tag{2.11.10}$$

Следует отметить, что условия устойчивости (2.11.7) для случая 1, когда $A - B < 0$, и условия устойчивости (2.11.10) для случая 2, когда $A - B > 0$, не могут выполняться одновременно.

2.12. Исследование положений равновесия осесимметричного спутника и их устойчивости

Проведем анализ эволюции полученных численно положений равновесия и соответствующих им достаточных условий устойчивости при изменении параметров m и n системы. Рассмотрим, например, поведение решений в плоскости a_{11} , n при фиксированных значениях m . Каждое положение равновесия для случая 1 (случая 2) определяется выбором

одного из корней алгебраического уравнения системы (2.10.10) (системы (2.10.15)) и выбором знака направляющего косинуса a_{31} (a_{21}).

Рассмотрим свойства алгебраических уравнений в системах (2.10.10) и (2.10.15). Коэффициенты уравнений зависят от безразмерных параметров m и n , которые, в свою очередь, определяются размерными параметрами осесимметричного спутника $A-B, H_1, H_2, H_3$. Проекция вектора аэродинамического момента и инерционный параметр $A-B$, а также безразмерные параметры m и n , могут принимать любые значения. Знак параметра n совпадает со знаком $A-B$. Так как параметры m и n входят в выражения для коэффициентов при четных степенях a_{11} алгебраических уравнений систем (2.10.10) и (2.10.15) во второй степени, а коэффициенты при нечетных степенях этих уравнений пропорциональны параметру m , то изменение знаков величин m и n при сохранении их абсолютных значений не влияет на абсолютную величину корней алгебраических уравнений. При изменении знака параметра m происходит лишь изменение знаков корней алгебраических уравнений, а при изменении знака параметра n корни алгебраических уравнений остаются неизменными. Следовательно, численное определение корней алгебраических систем (2.10.10), (2.10.15) для получения равновесных решений достаточно проводить при положительных значениях параметров m и n , а соответствующие решения для отрицательных значений m будут получаться изменением знака вычисленных корней при положительных m на противоположные. Графики ветвей решений для отрицательных значений m будут получаться зеркальным отображением графиков ветвей решений для соответствующих положительных значений m относительно оси абсцисс. Графики ветвей решений для отрицательных значений n будут получаться зеркальным отображением графиков ветвей решений для соответствующих значений m при положительных значениях n относительно оси ординат.

Точки пересечения прямых $n = \text{const}$ с астроидами (2.10.13) и (2.10.16) лежат на границах областей с постоянным числом действительных решений и, соответственно, постоянным числом положений равновесия осесимметричного спутника. Этим точкам соответствуют значения $n = (1 - m^{2/3})^{3/2}$ и $n = (3^{2/3} - m^{2/3})^{3/2}$; при данных значениях n происходит слияние ветвей решений, когда исчезают четыре решения (становятся мнимыми два корня). Точки пересечения графиков решений с осью ординат ($n = 0$) находятся аналитически и равны для случая 1 $a_{11} = \pm 1$ и $a_{11} = -m/3$, а для случая 2 $a_{11} = \pm 1$ и $a_{11} = m$.

Достаточные условия устойчивости положений равновесия спутника в силу перечисленных свойств алгебраических уравнений (2.10.10). (2.10.15) будут изменяться в зависимости от знаков параметров m и n следующим образом: при изменении знака параметра n изменяется знак $A - B$ и, соответственно, изменяются достаточные условия устойчивости для случаев 1 и 2 на противоположные.

При $A - B > 0$ ($n > 0$) условия устойчивости (2.11.10) для случая 2 при изменении знака параметра m (знака H_1) не изменятся, потому что знаки направляющего косинуса a_{11} , удовлетворяющего уравнению (2.10.15), и знаки параметра m изменяются одновременно. При $A - B < 0$ достаточные условия устойчивости (2.11.7) для случая 1 могут выполняться при $n < 0$. При изменении знака параметра m (знака H_1) условия устойчивости (2.11.7) также не изменятся в силу того, что знаки направляющего косинуса a_{11} , удовлетворяющего уравнению (2.10.10), и знаки параметра m изменяются одновременно. Достаточные условия устойчивости (2.11.7), (2.11.10) равновесных решений для случаев 1 и 2 не зависят от значений параметров H_2 и H_3 . Графики, определяющие положения равновесия спутника при различных m и n , можно разделить

на три типа, соответствующие трем диапазонам изменения параметра m : $0 < |m| < 1$, $1 < |m| < 3$, $|m| > 3$.

Параметры $m = 0$, $m = \pm 1$, $m = \pm 3$ являются бифуркационными. При этих значениях происходит вырождение одной из ветвей решений в точку, при переходе через которую исчезают четыре решения. При указанных бифуркационных значениях параметра m происходит изменение типов графиков решений, связанное с изменением числа действительных корней систем уравнений (2.10.10), (2.10.15) и, соответственно, с изменением числа положений равновесия осесимметричного спутника.

В случае $m = 0$ корни уравнений (2.10.10) определяются из соотношений $a_{11}^2 = 0$, $9a_{11}^2 = 9 - n^2$ при $|n| \leq 3$ и корни уравнений (2.10.15) из соотношений $a_{11}^2 = 0$, $a_{11}^2 = 1 - n^2$ при $|n| \leq 1$ соответственно. Условия устойчивости (2.11.7), (2.11.10) при $m = 0$ для случаев 1 и 2 не выполняются.

Для графиков первого типа ($0 < |m| < 1$) могут существовать все 16 равновесных решений. Приведем более подробное описание поведения найденных положений равновесия для графиков первого типа на примере случая $m = 0.25$ (рис.2.42). Как видно из рисунка, при $|n| < n_1 \approx 0.468$ существуют 16 равновесных решений. Из них 8 решений (4 действительных корня полинома (2.10.10)) соответствуют случаю 1 и 8 решений (4 действительных корня полинома (2.10.15)) соответствуют случаю 2. При значениях $n_1 \approx \pm 0.468$ прямые $n = \pm n_1$ имеют одну общую точку с астроидой (2.10.16). В этой общей точке происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 2, при этом 4 решения случая 2 перестают существовать.

В интервале $n_1 \leq n < n_2 \approx 2.184$ имеем 12 положений равновесия. Прямые $n = \pm n_2$ имеют одну общую точку с астроидой (2.10.13), где происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 1. При $|n| > n_2$

существуют лишь 8 положений равновесия (4 ветви решений), при этом случаю 1 на рис. 2.42 соответствуют верхняя положительная и верхняя отрицательная кривые, случаю 2 соответствуют нижняя положительная и нижняя отрицательная кривые.

Достаточные условия устойчивости (2.11.10) в случае 2 ($n > 0$) выполняются для равновесных решений, принадлежащих двум нижним положительным кривым, которые выходят из одной точки в правой полуплоскости. В случае 1 ($n < 0$) достаточные условия устойчивости выполняются для равновесных решений уравнения (2.10.10), принадлежащих двум верхним отрицательным кривым, которые также выходят из одной точки, как и для случая 1, но в левой полуплоскости.

При $m = 1$ происходит вырождение верхних положительных ветвей решений для случая 2 в точку (случай двух кратных корней $a_{11} = 1$) [186]. Слияние ветвей решений для случая 1 происходит при $n \approx 1.1225$. При $m = 1$ существуют устойчивая ветвь решений – нижняя положительная ветвь для случая 2 в правой полуплоскости и две верхних отрицательных ветви для случая 1 в левой полуплоскости.

Характер графиков второго типа, существующих в интервалах $1 < m < 3$ и $-3 < m < -1$, рассмотрим на примере случая $m = 2$ (рис. 2.43). При $|n| < 0.345$ существуют 12 равновесных решений, из них 8 решений соответствуют случаю 1 и 4 решения - случаю 2. Прямые $n = \pm 0.345$ имеют одну общую точку с астроидой (2.10.13), где происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 1. При $|n| > 0.345$ существуют лишь 8 положений равновесия (4 ветви решений); при этом случаю 1 на рис.2.43 соответствуют верхняя положительная и верхняя отрицательная кривые, а случаю 2 соответствуют нижняя положительная и нижняя отрицательная кривые.

Достаточные условия устойчивости (2.11.10) в случае 2 ($n > 0$) выполняются для равновесных решений, принадлежащих нижней

положительной кривой в правой полуплоскости. В случае 1 ($n < 0$) достаточные условия устойчивости выполняются для равновесных решений, принадлежащих двум верхним отрицательным кривым, которые выходят из одной точки в левой полуплоскости.

При $m = 3$ происходит вырождение нижних отрицательных ветвей решений для случая 1 в точку (случай двух кратных корней $a_{11} = -1$ при $n = 0$) [162, 186]. В этом случае существуют две устойчивые ветви решений – нижняя положительная для случая 2 в правой полуплоскости и верхняя отрицательная для случая 1 в левой полуплоскости.

При $|m| > 3$ существуют кривые третьего типа. На примере $m = 4$ (рис.2.44) представлен типичный график кривых третьего типа.

На рис. 2.42–2.44 цифрами 1 и 2 отмечены кривые равновесных решений для случаев 1 и 2 соответственно; пунктиром выделены участки кривых, на которых выполняются достаточные условия устойчивости.

Численные результаты показывают, что для случая 2 при $n > 0$ и при $0 < |m| < 1$ существуют две устойчивые ветви равновесных решений (четыре устойчивых положения равновесия), при значениях $|m| \geq 1$ существует одна устойчивая ветвь равновесных решений (два устойчивых положения равновесия). Для случая 1 при $n < 0$ и $0 < |m| < 3$ также существуют две устойчивые ветви равновесных решений (четыре устойчивых положения равновесия), при значениях $|m| \geq 3$ существует одна устойчивая ветвь равновесных решений (два устойчивых положения равновесия).

Отметим, что при возрастании параметров m и n равновесные решения приближаются к тривиальным положениям равновесия, когда $\cos \beta_0 = 0$ ($\beta_0 = \pm\pi/2$) для случая 2 и $\cos \alpha_0 = 0$ ($\alpha_0 = \pm\pi/2$) для случая 1. Положения равновесия спутника при больших значениях $|m|$ приближаются к положениям равновесия, когда ось симметрии Ox

спутника совпадает с осью OX орбитальной системы координат, направленной вдоль касательной к круговой орбите.

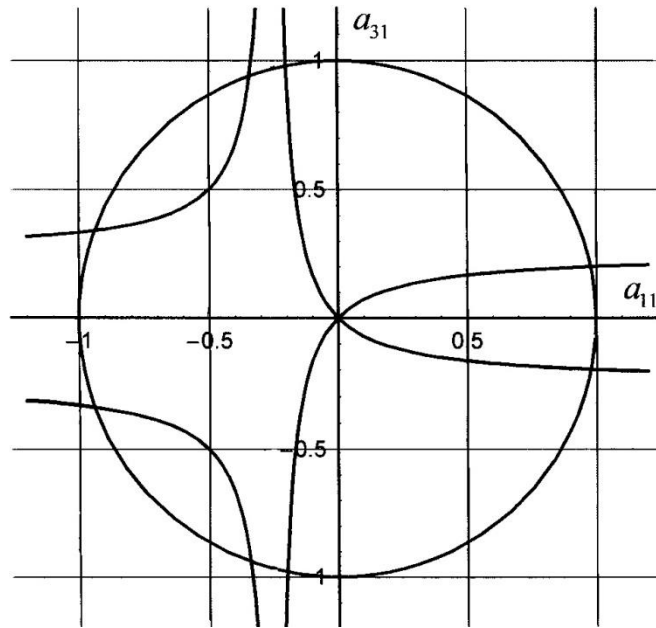


Рис. 2.38. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы
($m = n = 0.75$)

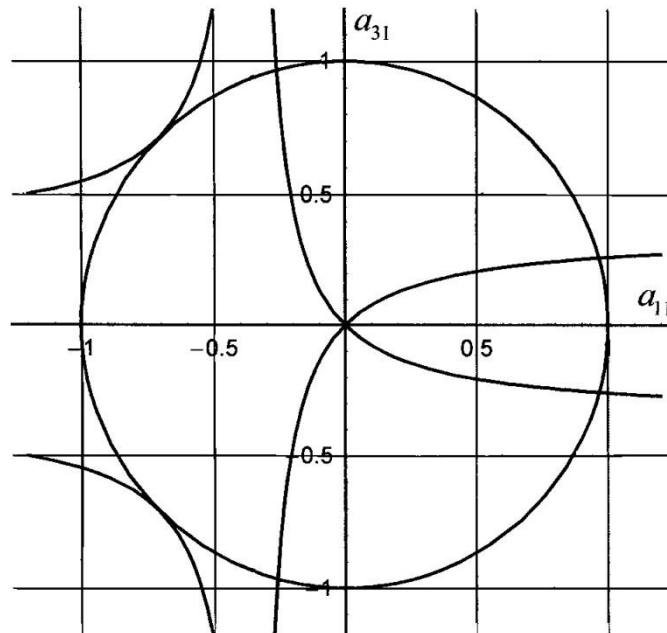


Рис. 2.39. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы
($m = n = 0.75\sqrt{2}$)

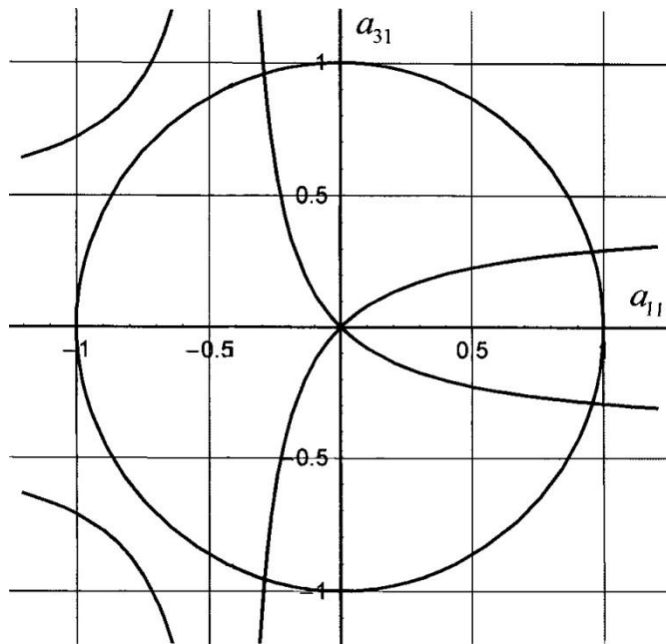


Рис. 2.40. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ($m = n = 1.25$)

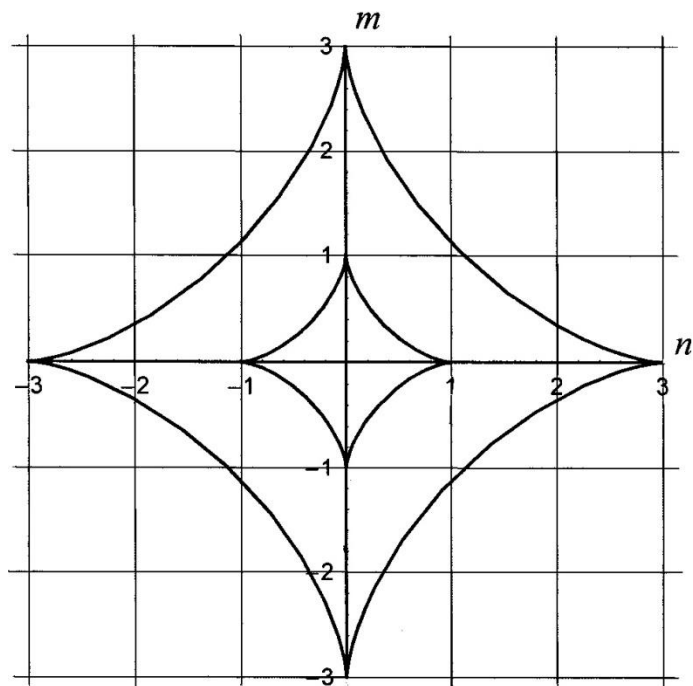
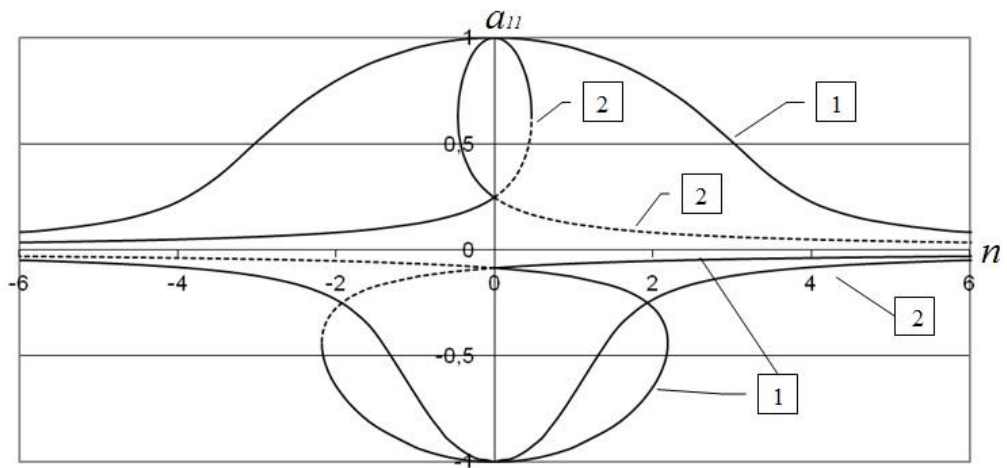
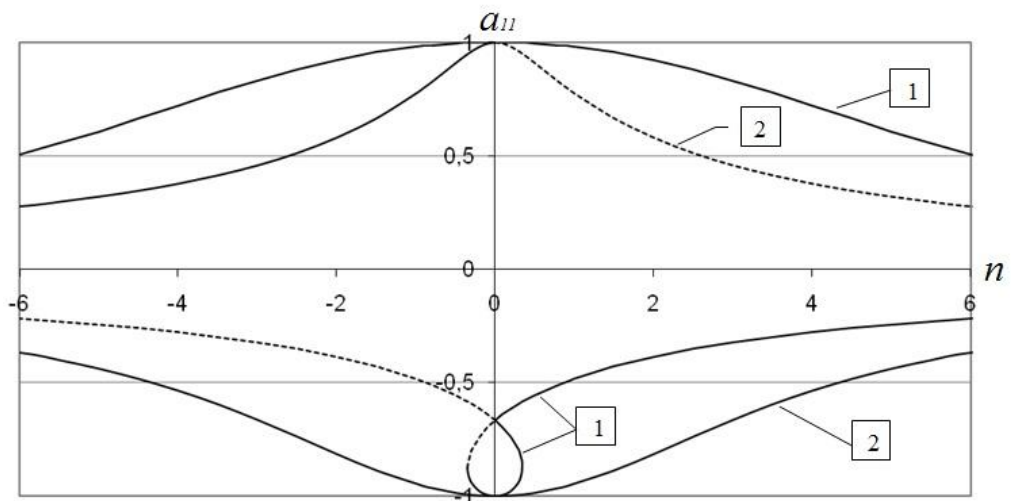
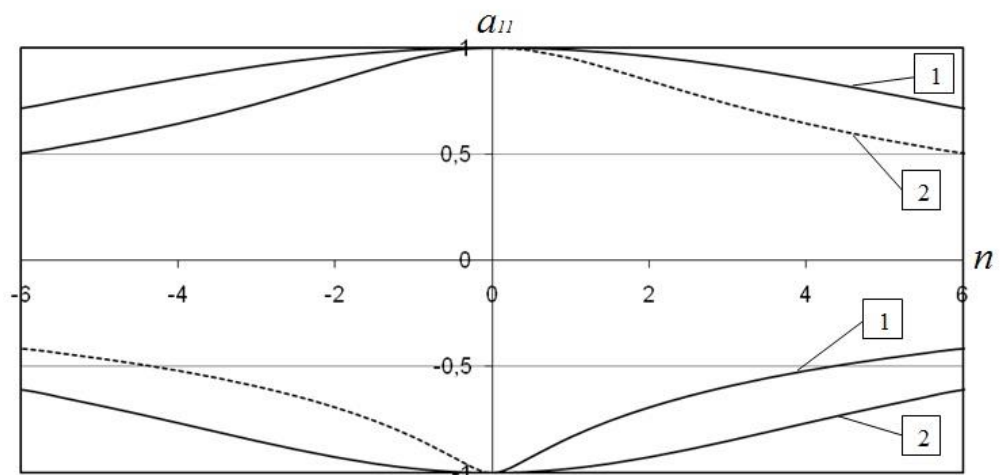


Рис. 2.41. Области существования 16, 12 и 8 равновесных ориентаций осесимметричного спутника

Рис. 2.42. $m=0.25$ Рис.2.43. $m=2$ Рис. 2.44. $m=4$

Глава 3. Динамика спутника под действием гравитационного и постоянного моментов.

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [158, 159, 168, 172, 185]

3.1. Постановка задачи

Данная глава посвящена исследованию положений равновесия спутника, на который, кроме гравитационного момента действует постоянный в связанной со спутником системе координат момент (далее постоянный момент), обусловленный, например, истечением газа или рабочего тела из его корпуса. Влияние на спутник постоянного момента изменяет его ориентацию и может вывести систему из рабочего положения равновесия. Поэтому очень важно исследовать взаимное влияние гравитационного и постоянного моментов на положения равновесия спутника на круговой орбите.

Основная масса работ по анализу динамики спутника под действием гравитационного и постоянного моментов посвящена определению стационарных движений и исследованию их устойчивости. Также как и в задаче исследования динамики спутника-гиростата, введем понятие прямой и обратной задачи. Определение параметров, задающих ориентацию спутника через инерционные характеристики и компоненты постоянного момента, назовем прямой задачей. Если в число определяемых параметров входят компоненты постоянного момента, то будем говорить об обратной задаче.

3.2. Уравнения движения

Рассмотрим движение спутника по круговой орбите. Пусть на спутник, кроме гравитационного момента, действует постоянный момент. Для записи уравнений движения спутника будем использовать введенные в главе 1 орбитальную систему координат $OXYZ$ и связанную со спутником

систему координат $Oxyz$, оси Ox , Oy , Oz которой направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат с использованием самолетных углов тангажа α , рыскания β и крена γ . Направляющие косинусы осей Ox , Oy , Oz в орбитальной системе координат выражаются через самолетные углы с помощью соотношений (1.10.1), рис.1.37.

Уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде [2, 37, 159]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \tilde{a} &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \tilde{b} &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \tilde{c} &= 0; \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} p &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma}, \\ q &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta}\sin\gamma, \\ r &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta}\cos\gamma. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

В уравнениях (3.2.1), (3.2.2) A , B , C – главные центральные моменты инерции спутника; p , q , r , \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} – проекции абсолютной угловой скорости спутника и проекции вектора постоянного момента на оси Ox , Oy , Oz ; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите. Точкой обозначено дифференцирование по времени t .

3.3. Положения равновесия спутника

Введем обозначения $a = \tilde{a}/\omega_0^2(C - B)$, $b = \tilde{b}/\omega_0^2(A - C)$, $c = \tilde{c}/\omega_0^2(B - A)$.

Положив в (3.2.1) и (3.2.2) $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, $\beta = \beta_0 = \text{const}$, $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, получим при $A \neq B \neq C$ и введенных выше обозначениях следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} - a &= 0, \\
a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31} - b &= 0, \\
a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32} - c &= 0,
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. С учетом (1.10.1) систему (3.3.1) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Другой способ замыкания уравнений (3.3.1) заключается в добавлении условий ортогональности направляющих косинусов (1.3.4)

$$\begin{aligned}
a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\
a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\
a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Уравнения (3.3.1) и (3.3.2) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно шести направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника. Для этой системы уравнений ставится следующая задача: при заданных a, b, c требуется определить все девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. После нахождения шести направляющих косинусов $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ оставшиеся направляющие косинусы a_{11}, a_{12}, a_{13} можно определить из условий ортогональности. Следует отметить, что для любой заданной ориентации спутника всегда существуют такие a, b и c , что эта ориентация является положением равновесия. В случае $a = b = c = 0$ было доказано существование 24 решений системы (3.3.1) – (3.3.2), определяющих положения равновесия твердого тела [8–10].

Следуя работе [159], покажем, что система (3.3.1) с использованием выражений направляющих косинусов через самолетные углы (1.10.1) и понятия результата может быть сведена к одному алгебраическому уравнению шестой степени от одной неизвестной с коэффициентами, представляющими собой полиномы от трех безразмерных параметров

задачи a, b и c . Подставим в уравнения (3.3.1) выражения для направляющих косинусов a_{ij} из (1.10.1) и перейдем к системе

$$\begin{aligned} & 3(\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma)(\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \\ & + \cos^2 \beta \sin \gamma \cos \gamma + a = 0, \\ & 3 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \cos \beta (1 + 3 \sin^2 \alpha) \sin \gamma = b, \\ & \sin \beta \cos \beta (1 + 3 \sin^2 \alpha) \cos \gamma + 3 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma = c \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

с неизвестными α, β и γ . Два последних уравнения в (3.3.3) линейны относительно $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$. Определитель этих уравнений $\Delta = [9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta (1 + 3 \sin^2 \alpha)] \cos^2 \beta$ отличен от нуля, если $\alpha \neq (k\pi)/2, \beta \neq (n\pi)/2$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4; n = 0, 1, -1$), так как $0 \leq \alpha \leq 2\pi, -\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$. При $\Delta \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= [3c \sin \alpha \cos \alpha - b \sin \beta (1 + 3 \sin^2 \alpha)] \cos \beta / \Delta, \\ \cos \gamma &= [3b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin \beta (1 + 3 \sin^2 \alpha)] \cos \beta / \Delta. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Приравнявая единице сумму квадратов правых частей уравнений (3.3.4) получим биквадратное относительно $\sin \beta$ уравнение

$$\begin{aligned} & (1 + 3 \sin^2 \alpha)^2 \sin^4 \beta - [(1 + 3 \sin^2 \alpha)^2 - 9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] \sin^2 \beta + \\ & + b^2 + c^2 - 9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

коэффициенты которого зависят только от угла α . Введем обозначения $x = (1 + 3 \sin^2 \alpha), y = \sin \beta, z = 3 \sin \alpha \cos \alpha$, тогда уравнение ((3.3.5) примет вид

$$f_1 = x^2 y^4 + (z^2 - x^2) y^2 + b^2 + c^2 - z^2 = 0. \quad (3.3.6)$$

Используя соотношения (3.3.4), исключим из первого уравнения (3.3.3) угол γ . Тогда, с учетом введенных обозначений это уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} f_2 &= bcx^3 y^4 + [bcx(2z^2 - 4) + a(b^2 + c^2)] y^2 - \\ & - 4(b^2 - c^2)zy + [a(b^2 + c^2) + bc(5 - x)]z^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Проведя редукцию полинома f_2 относительно f_1

$$\begin{aligned} f_3 &= f_2 - bcx f_1 = [bc(5x - 8) + a(b^2 + c^2)]xy^2 - \\ & - 4(b^2 - c^2)zy + 5bcz^2 + (b^2 + c^2)(az^2 - bcx) = 0, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

получим квадратичный полином по y .

Таким образом, мы имеем систему уравнений (3.3.6) и (3.3.8) относительно неизвестных x и y . Используя понятие результата [135], которое уже использовалось в главах 1–2, исключим Y из (3.3.6), (3.3.8) и получим с учетом соотношения $z^2 = -x^2 + 5x - 4$ и обозначений $r = (b^2 + c^2)$, $q = bc$ алгебраическое уравнение 6-й степени относительно x :

$$x^2(b^2 + c^2)^2(p_0x^4 + p_1x^5 + p_2x^4 + p_3x^3 + p_4x^2 + p_5x + p_6) = 0. \quad (3.3.9)$$

Здесь

$$p_0 = a^2r^4 + 10a^3qr^3 - 80a^3qr^2 + 2a^2q^2r^3 + 57a^2q^2r^2 - \\ - 544a^2q^2r - 32a^2r^3 + 400a^2r^2 + 10aq^3r^2 + 80aq^3r - \\ - 720aq^3 - 480aqr^2 + 2720aqr + q^4r^2 + 32q^4r - 144q^4 + \\ + 32q^2r^2 - 1088q^2r + 3600q^2 + 256r^2,$$

$$p_1 = 8(-3a^3qr^3 + 58a^3qr^2 - 40a^2q^2r^2 + 420a^2q^2r + \\ + 50a^2r^3 - 580a^2r^2 - 3aq^3r^2 - 83aq^3r + 522aq^3 - \\ - 8aqr^3 + 716aqr^2 - 4072aqr - 25q^4r + 90q^4 - \\ - 70q^2r^2 + 1690q^2r - 5220q^2 - 480r^2),$$

$$p_2 = 16(-40a^3qr^2 + 21a^2q^2r^2 - 336a^2q^2r - 95a^2r^3 + \\ + 1241a^2r^2 + 90aq^3r - 360aq^3 + 20aqr^3 - 1440aqr^2 + \\ + 9130aqr + 12q^4r - 27q^4 + 169q^2r^2 - \\ - 3769q^2r + 11169q^2 + 16r^3 + 1392r^2),$$

$$p_3 = 128(2a^3qr^2 + 20a^2q^2r + 15a^2r^3 - 310a^2r^2 - 8aq^3r + \\ + 18aq^3 - 2aqr^3 + 291aqr^2 - 2436aqr - 35q^2r^2 + \\ + 960q^2r - 2790q^2 - 20r^3 - 490r^2),$$

$$p_4 = 256(-3a^2r^3 + 158a^2r^2 - 100aqr^2 + 1340aqr + \\ + 9q^2r^2 - 509q^2r + 1422q^2 + 33r^3 + 348r^2),$$

$$p_5 = 2048(-10a^2r^2 + 3aqr^2 - 92aqr + 35q^2r - 90q^2 - 5r^3 - 30r^2),$$

$$p_6 = 4096(a^2r^2 + 10aqr - 4q^2r + 9q^2 + r^3 + 4r^2).$$

Для получения явного вида уравнения (3.3.9) был выполнен большой объем преобразований, которые первоначально проводились вручную и потребовали значительных затрат времени. Задача вычисления

коэффициентов уравнения (3.3.9) значительно упростилась с применением систем символьных вычислений.

3.4. Условия существования положений равновесия спутника

Уравнение (3.3.9) совместно с (3.3.4), (3.3.6) и (3.3.8) позволяют определить все положения равновесия спутника при действии гравитационного и постоянного моментов.

Покажем, что система (3.3.1) с учетом (1.10.1) имеет не более 24 действительных решений. По определению результата каждому корню x уравнения (3.3.9) соответствует общий корень y системы (3.3.6) и (3.3.8). Так как $x = 1 + 3\sin^2\alpha$ и $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, то любому действительному положительному корню уравнения (3.3.9) соответствуют два значения $\sin\alpha$ и четыре значения угла, обозначим их $\bar{\alpha}$, $\pi - \bar{\alpha}$, $\pi + \bar{\alpha}$ и $2\pi - \bar{\alpha}$. Подставляя $\bar{\alpha}$ ($\pi - \bar{\alpha}$, $\pi + \bar{\alpha}$, $2\pi - \bar{\alpha}$) в систему (3.3.6), (3.3.8), определим общий корень $y = \sin\beta$ уравнений этой системы, значению которого соответствующую угол $\bar{\beta}$, для положительного корня и $-\bar{\beta}$ для отрицательного значения корня ($-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$). Зная α и β , с помощью соотношений (3.3.4) можно однозначно определить угол γ ($0 \leq \gamma \leq 2\pi$). Итак, каждому действительному корню уравнения (3.3.9) соответствует 4 комбинации углов α , β и γ , которые с учетом выражений для направляющих косинусов (1.10.1) и соотношений (3.3.4) определяют 4 равновесные ориентации спутника. Так как число действительных корней алгебраического уравнения (3.3.9) не превышает 6, то спутник на круговой орбите под действием постоянного и гравитационного момента может иметь не более 24 положений равновесия.

Проведем теперь исследование уравнения (3.3.9) и его решений. Уравнение (3.3.9) было получено при условии $\Delta \neq 0$. Решения, которые получаются при снятии этого ограничения, возможны лишь в случае

$b = c = 0$. Поэтому исследование частного случая $b = c = 0$ будем проводить на основе исходных уравнений системы (3.3.1), (3.3.2).

Рассмотрим сначала общий случай задачи, когда $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$.

Определим область изменения значений параметров a, b и c Используя уравнения системы (3.3.1), запишем попарно суммы квадратов параметров в виде

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a_{21}^2 + 9a_{31}^2 - (a_{21}^2 - 3a_{31}^2)^2, \\ a^2 + c^2 &= a_{22}^2 + 9a_{32}^2 - (a_{22}^2 - 3a_{32}^2)^2, \\ b^2 + a^2 &= a_{23}^2 + 9a_{33}^2 - (a_{23}^2 - 3a_{33}^2)^2. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Исследование на экстремум правых частей (3.4.1) как функций переменных α, β и γ показывает, что их величина не превышает 4. Таким образом, получаем неравенства

$$b^2 + c^2 \leq 4, \quad a^2 + c^2 \leq 4, \quad b^2 + a^2 \leq 4. \quad (3.4.2)$$

Аналогично можно показать, что значения параметров a, b и c по абсолютной величине не превышают 2. Кроме того, просуммировав левые и правые части уравнений (3.4.1), получим соотношение

$$a^2 + b^2 + c^2 = 5 - \frac{1}{2}[(a_{21}^2 - 3a_{31}^2)^2 + (a_{22}^2 - 3a_{32}^2)^2 + (a_{23}^2 - 3a_{33}^2)^2]. \quad (3.4.3)$$

Выражение в квадратных скобках правой части (3.4.1) всегда положительно, поэтому справедливо неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 < 5. \quad (3.4.4)$$

Из вида коэффициентов уравнения (3.3.9) следует, что параметры b и c входят в них симметрично. В слагаемых коэффициентов p_i можно выделить сомножитель $aq = abc$ таким образом, что параметры a, b и c в части коэффициентов без этого сомножителя будут входить только в четных степенях. Поэтому для численного исследования уравнения (3.3.9) достаточно рассмотреть область изменения параметров ограниченную неравенством (3.4.4) и неравенствами

$$-2 \leq a \leq 2, \quad 0 \leq b \leq 2, \quad 0 \leq c \leq 2, \quad (3.4.5)$$

причем в плоскости (b, c) при фиксированном значении a в силу симметрии можно ограничиться параметрами в секторе между прямыми $c = b$ и $c = 0$.

Зависимость числа действительных решений уравнения (3.3.9) от значений параметров исследовалась численно [159, 185]. При фиксированных значениях a в узлах равномерной сетки на плоскости (b, c) определялось число действительных положительных корней. Численно определялись граничные точки, в которых происходит смена числа действительных корней. Фактически вычислялся двумерный срез дискриминантной гиперповерхности, который задается неявно алгебраическим уравнением от двух параметров $g(b, c) = 0$. При этом получались области с равным числом действительных корней.

В работе [101] с использованием подхода работы [159] была вычислена и построена дискриминантная гиперповерхность уравнения (3.3.9) и был проведен подробный анализ эволюции областей существования различного числа действительных корней (положений равновесий спутника) в форме двумерных срезов дискриминантной гиперповерхности при фиксированных значениях a в пространстве параметров задачи при выполнении условий (3.4.4), (3.4.5).

3.5. Исследование положений равновесия спутника с применением методов символьных вычислений

В данном разделе главное внимание будет уделено исследованию условий существования различного числа положений равновесия спутника с применением алгебраических методов и систем компьютерной алгебры.

Следуя работам [168, 172], рассмотрим подробнее системы (3.3.1) и (3.3.2), которые образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно шести неизвестных направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника. Решение системы (3.3.1) и (3.3.2) можно

получить, используя алгоритм построения базисов Гребнера [138] с применением системы символьных вычислений Maple [139]. Метод построения базисов Гребнера представляет собой алгоритмическую процедуру для полного приведения задачи в случае полиномов многих переменных к рассмотрению полинома одной переменной. Возможность применения алгоритмов построения базисов Гребнера для решения системы (3.3.1) и (3.3.2) впервые была показана в работах [158, 159]. Основные идеи метода построения базисов Гребнера будут изложены в разделе 3.8 данной главы.

Применяя систему символьных вычислений Maple, построим базис Гребнера полиномов (3.3.1) и (3.3.2) относительно упорядочения по полной степени переменных, выпишем полиномы из базиса Гребнера, зависящие только от четырех переменных $a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$:

$$\begin{aligned}
 &ba_{22}^2 - 3ba_{32}^2 + 12a_{31}a_{33} - ac + 3b = 0, \\
 &144a_{32}^2a_{33}^2 + (84a - 24bc)a_{32}a_{33} + 12a^2(a_{32}^2 + a_{33}^2) + \\
 &+ a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - 7abc = 0, \\
 &12ca_{33}^3 + 12ba_{32}a_{33}^2 - b(c^2 + 12)a_{32} - c(b^2 + 12)a_{33} + \\
 &+ 12ca_{33}a_{32}^2 + 12ba_{32}^3 + (ac^2 + ab^2 - 7bc)a_{31} = 0, \\
 &12aa_{31}a_{33}^2 + 12ba_{32}a_{33}^2 + a^2ba_{32} + ab^2a_{31} - (cb^2 + ca^2 - 7ab)a_{33} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Построив теперь базис Гребнера системы полиномов (3.5.1) относительно лексикографического упорядочения переменных, получим алгебраическое уравнение шестого порядка относительно только одной переменной $x = a_{33}^2$

$$P(x) = p_0x^6 + p_1x^5 + p_2x^4 + p_3x^3 + p_4x^2 + p_5x + p_6 = 0, \tag{3.5.2}$$

где

$$\begin{aligned}
p_0 &= 12^6, \\
p_1 &= -2 \cdot 12^6, \\
p_2 &= 12^4(25v - 6u^2 - 28uc + 144), \\
p_3 &= -2 \cdot 12^3(8c^2u^2 + u^2v - 24u^2 - 7cuv - 168uc - c^2v^2 + 150v), \\
p_4 &= 12^2(144v^2 - 51u^2v + 337u^2 + 28cuv^2 - 28cu^3 + 25c^2v^2 + \\
&+ 192c^2u^2 + 518cuv), \\
p_5 &= 24(12u^2v^2 - 62u^4 - 150u^2v + 3u^4v + 3c^2u^2v^2 + 84cuv^2 + 182cu^3 - \\
&- 7cu^3v - 136c^2u^2 + 14c^3uv^2), \\
p_6 &= (c^2v^2 + vu^2 + 12u^2 - 7cuv)^2, \quad v = a^2 + b^2, \quad u = ab.
\end{aligned}$$

Уравнение (3.5.2) с использованием метода построения базисов Гребнера получено впервые в [172]. В [158, 159] был построен базис Гребнера (3.5.1) полиномов (3.3.1) и (3.3.2) относительно упорядочения по полной степени переменных и было показано, что если исключить из третьего и четвертого уравнения (3.5.1) переменную a_{31} , то можно получить соотношение, зависящее только от a_{32} и a_{33} . Используя понятие результата, из второго уравнения (3.5.1) и полученного соотношения была исключена переменная a_{32} и в результате символьного вычисления определителя результата было определено алгебраическое уравнение относительно одной переменной a_{33} , которое в точности совпадает с уравнением (3.5.2). В [168] система (3.3.1) и (3.3.2) с применением другого порядка лексикографического упорядочения при построении базиса Гребнера была приведена к более простому по сравнению с (3.5.2) уравнению шестого порядка относительно переменной $x_1 = a_{23}^2$

$$P(x_1) = p_0x_1^6 + p_1x_1^5 + p_2x_1^4 + p_3x_1^3 + p_4x_1^2 + p_5x_1 + p_6 = 0, \quad (3.5.3)$$

где

$$p_0 = 4096,$$

$$p_1 = -8192,$$

$$p_2 = 256(16 - 6u^2 + 20uc + 17v),$$

$$p_3 = -128(u^2v + 8c^2u^2 - 8u^2 + 40uc + 5cuv + 34v - c^2v^2),$$

$$p_4 = 16(9u^4 + 257u^2 - 43u^2v + 16v^2 + 210cuv - 20cuv^2 + 20cu^3 + 17c^2v^2 + 64c^2u^2),$$

$$p_5 = 8(4u^2v^2 - 34u^2v - 38u^4 + 3u^4v - 130cu^3 + 5cu^3v - 20cuv^2 - 4c^2v^3 + 3c^2u^2v^2 - 68c^2u^2v - 10c^3uv^2),$$

$$p_6 = (4u^2 + u^2v + c^2v^2 + 5cuv)^2, \quad v = a^2 + b^2, \quad u = ab.$$

Однако для проведения исследования равновесных решений удобнее использовать уравнение (3.5.2) относительно переменной a_{33}^2 .

Уравнение (3.5.2) совместно с (3.3.1), (3.3.2) и (3.5.1) позволяет определить все положения равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и постоянного моментов. Отметим, что число действительных корней алгебраического уравнения (3.5.2) четно и не превышает шести. Покажем, что каждому действительному корню x уравнения (3.5.2) соответствуют четыре равновесных решения исходной системы (3.3.1), (3.3.2). Действительно, для каждого решения $x = a_{33}^2$ уравнения (3.5.2) можно найти два значения a_{33} , а затем из последних трех уравнений системы (3.5.1) однозначно определить соответствующие им величины a_{31} и a_{32} . Далее, для каждого набора направляющих косинусов a_{31}, a_{32}, a_{33} из первого уравнения системы (3.5.1) можно определить два значения a_{22} и из системы (3.3.1) – соответствующие им величины a_{21} и a_{23} . После того как набор из шести значений $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ найден, три оставшиеся величины a_{11}, a_{12}, a_{13} однозначно определяются из условий ортогональности направляющих косинусов. Из приведенных рассуждений следует, что так же как это было доказано в разделе 3.4, спутник на круговой орбите под действием гравитационного и постоянного момента в общем

случае $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$ может иметь не более 24 положений равновесия.

3.6. Исследование положений равновесия спутника

Уравнения (3.3.1), (3.3.2), (3.5.1), (3.5.2) позволяют определить все положения равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и постоянного моментов, при заданных значениях безразмерных параметров задачи a , b и c .

При исследовании положений равновесия спутника ставится задача определения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (3.5.2). Для выделения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней воспользуемся теоремой Меймана [137], из которой следует, что разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней определяется дискриминантной гиперповерхностью. В нашем случае дискриминантная гиперповерхность задается дискриминантом многочлена (3.5.2). Эта гиперповерхность содержит компоненту коразмерности 1, которая является границей областей с одинаковым числом вещественных корней. Множество особых точек дискриминантной гиперповерхности в пространстве параметров a , b и c задается следующей системой алгебраических уравнений:

$$P(x) = 0, \quad P'(x) = 0. \quad (3.6.1)$$

Символом «штрих» обозначено дифференцирование по переменной x .

Исключим переменную x из системы (3.6.1) путем вычисления определителя матрицы результата уравнений (3.6.1) с помощью символьных матричных функций системы Maple и получим в результате алгебраическое уравнение дискриминантной гиперповерхности в следующем виде:

$$(a^2 - b^2)^6 P_1^2(a, b, c) P_2(a, b, c) = 0. \quad (3.6.2)$$

Здесь $P_1(a, b, c)$ и $P_2(a, b, c)$ – полиномы 9 и 10 степени соответственно относительно a . Полином $P_1(a, b, c)$ имеет вид

$$P_1(a, b, c) = p_{1,0}a^9 + p_{1,1}a^8 + p_{1,2}a^7 + p_{1,3}a^6 + p_{1,4}a^5 + p_{1,5}a^4 + p_{1,6}a^3 + p_{1,7}a^2 + p_{1,8}a + p_{1,9}, \quad (3.6.3)$$

где

$$\begin{aligned} p_{1,0} &= 8b^3c^3, & p_{1,1} &= 7[49(b^4 + c^4) - 2b^2c^2(12c^2 - 6b^2 - 1)], \\ p_{1,2} &= -4bc[2b^4c^2 + 49(25c^2 - 72) + b^2(16c^4 + 636c^2 - 1813)], \\ p_{1,3} &= 14b^2[b^4(12c^2 - 49) + b^2(100c^4 + 393c^2 - 2401) + 2c^4 + 1035c^2 - 3528], \\ p_{1,4} &= -4b^3c[2b^4c^2 + 2b^2(16c^4 + 932c^2 - 2989) - 1029c^2 + 5929], \\ p_{1,5} &= -7b^4[b^4(12c^2 - 49) - b^2(200c^4 + 786c^2 - 4802) + 90c^4 + 2964c^2 - 16513], \\ p_{1,6} &= 4b^5c[2b^4c^2 - b^2(16c^4 + 636c^2 - 1813) + 49(21c^2 - 121)], \\ p_{1,7} &= 14b^6[2c^4(6b^2 + 1) - c^2(b^2 - 1035) - 3528], \\ p_{1,8} &= 196b^7c(72 - 25c^2), & p_{1,9} &= 343b^8c^4. \end{aligned}$$

$P_2(a, b, c)$ имеет следующий вид:

$$P_2(a, b, c) = p_{2,0}a^{10} + p_{2,1}a^9 + p_{2,2}a^8 + p_{2,3}a^7 + p_{2,4}a^6 + p_{2,5}a^5 + p_{2,6}a^4 + p_{2,7}a^3 + p_{2,8}a^2 + p_{2,9}a + p_{2,10}, \quad (3.6.4)$$

где

$$\begin{aligned}
p_{2,0} &= 729(b^2 + c^2)^4, \quad p_{2,1} = 15120bc(b^2 + c^2)^2, \\
p_{2,2} &= 729 b^{10} + 243b^8(24c^2 - 13) + 27b^6(513c^4 - 1638c^2 - 676) + \\
&+ b^4(13851c^6 - 82134c^4 + 91260c^2 + 27376) + \\
&+ b^2c^2(5832c^6 - 44226c^4 + 91260c^2 - 7456) + \\
&+ c^4(729c^6 - 3159c^4 - 18252c^2 + 27376), \\
p_{2,3} &= 70bc(405b^6 + 9b^4(75c^2 - 338) + b^2(675c^4 - 3276c^2 + 2704) + 405c^6 - \\
&- 3042c^4 + 2704c^2 - 1152), \\
p_{2,4} &= 2916b^{10}c^2 + 27b^8(513c^4 - 1638c^2 - 676) + \\
&+ b^6(21870c^6 - 167427c^4 + 314847c^2 + 132619) + \\
&+ b^4(13851c^8 - 167427c^6 + 771147c^4 - 903619c^2 - 118976) + \\
&+ b^2(2916c^{10} - 44226c^8 + 314847c^6 - 903619c^4 + 522288c^2 - 97344) + \\
&- 18252c^8 + 132619c^6 - 118976c^4 - 97344c^2 + 20736, \\
p_{2,5} &= 70bc(216b^8 + 9b^6(75c^2 - 338) + b^4(891c^4 - 3276c^2 + 15041) + \\
&+ b^2(675c^6 - 3276c^4 + 11492c^2 - 18440) + \\
&+ 216c^8 - 3042c^6 + 15041c^4 - 18440c^2 + 7488), \\
p_{2,6} &= 4374b^{10}c^4 + b^8(13851c^6 - 82134c^4 + 91260c^2 + 27376) + \\
&+ b^6(13851c^8 - 167427c^6 + 771147c^4 - 903619c^2 - 118976) + \\
&+ b^4(4374 c^{10} - 82134c^8 + 771147c^6 - 2647224c^4 + 3452995c^2 - 170183) + \\
&+ b^2(91260c^8 - 903619c^6 + 3452995c^4 - 3298542c^2 + 648288) + \\
&+ 27376c^8 - 118976c^6 - 170183c^4 + 648288c^2 - 134784, \\
p_{2,7} &= 70bc(432b^8c^2 + b^6(675c^4 - 3276c^2 + 2704) + \\
&+ b^4(675c^6 - 3276c^4 + 11492c^2 - 18440) + \\
&+ b^2(432c^8 - 3276c^6 + 11492c^4 - 11306c^2 + 29497) + \\
&+ 2704c^6 - 18440c^4 + 29497c^2 - 12168), \\
p_{2,8} &= 2916b^{10}c^6 + b^8c^2(5832c^6 - 44226c^4 + 91260c^2 - 7456) + \\
&+ b^6(2916c^{10} - 44226c^8 + 314847c^6 - 903619c^4 + 522288c^2 - 97344) + \\
&+ b^4(91260c^8 - 903619c^6 + 3452995c^4 - 3298542c^2 + 648288) + \\
&+ b^2(7456c^8 + 522288c^6 - 3298542c^4 + 4826593c^2 - 1045044) - \\
&- 36(2704c^6 - 18008c^4 + 29029c^2 - 6084),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,9} &= 70bc(216b^8c^4 + b^6(405c^6 - 3042c^4 + 2704c^2 - 1152) + \\
&+ b^4(216c^8 - 3042c^6 + 15041c^4 - 18440c^2 + 7488) + \\
&+ b^2(2704c^6 - 18440c^4 + 29497c^2 - 12168) - 72(c^2(4c^2 - 13)^2 - 54), \\
p_{2,10} &= 729b^{10}c^8 + b^8c^4(729c^6 - 3159c^4 - 18252c^2 + 27376) - \\
&- b^6(18252c^8 - 132619c^6 + 118976c^4 + 97344c^2 - 20736) + \\
&+ b^4(27376c^8 - 118976c^6 - 170183c^4 + 648288c^2 - 134784) - \\
&- 36b^2(2704c^6 - 18008c^4 + 29029c^2 - 6084) + 1296(c^2(4c^2 - 13)^2 - 36).
\end{aligned}$$

Теперь мы должны проверить, как изменяется число равновесий при пересечении одной из поверхностей (3.6.2). Это можно сделать численно, определив число равновесий в одной точке из каждой области $P_1(a, b, c) = 0$ и $P_2(a, b, c) = 0$ в пространстве параметров a , b и c .

Численный анализ показал, что только поверхность $P_2(a, b, c) = 0$ разделяет области с различным числом действительных корней уравнения (3.5.2). При пересечении границ поверхности $P_1(a, b, c) = 0$ смены числа действительных корней уравнения (3.5.2) не происходит. Случай $a^2 = b^2$ аналогичен случаю $b^2 = c^2$ и отдельно был рассмотрен в [101].

Уравнения (3.5.1) и (3.5.2) совместно с системой (3.3.1), (3.3.2) позволяют определить все положения равновесия спутника при заданных значениях компонентов вектора постоянного момента. Для исследования эволюции областей существования различного числа положений равновесия в зависимости от величины модуля вектора постоянного момента в пространстве безразмерных параметров a , b и c проведем подробный анализ поверхности $P_2(a, b, c) = 0$. Области изменения параметров a , b , c ограничены следующими неравенствами (3.4.2), (3.4.4):

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 5, \quad a^2 + b^2 \leq 4, \quad a^2 + c^2 \leq 4, \quad b^2 + c^2 \leq 4. \quad (3.6.5)$$

Из вида коэффициентов уравнения (3.5.2) следует, что параметры a и b входят в них симметрично. В слагаемых коэффициентов p_i можно

выделить сомножитель abc таким образом, что a , b и c будут входить в выражения коэффициентов только в четных степенях, поэтому замена $a \rightarrow -a$ приведет к симметричному повороту области распределения числа равновесных решений относительно либо оси b , либо оси c . Поэтому для численного исследования корней уравнения (3.5.2) достаточно рассмотреть область изменения параметров, ограниченную первым неравенством (3.6.5) и неравенствами

$$-2 \leq a \leq 0, \quad -2 \leq b \leq 2, \quad -2 \leq c \leq 2; \quad (3.6.6)$$

тогда в плоскости (b, c) при фиксированной величине a в силу симметрии можно ограничиться значениями параметров в секторе, ограниченном прямыми $c = b$ и $c = 0$. На диагонали квадрата $|b| \leq 2, |c| \leq 2$ при $|b| = |c|$ существует дополнительное ограничение $|b| \leq \sqrt{2}$. Зависимость числа действительных решений уравнения (3.5.2) от параметров определялась с учетом указанных ограничений, причем некоторые результаты классификации распределения числа действительных корней от величины параметров в области (3.6.5)–(3.6.6) из работы [101] применялись для данного исследования.

Результаты численно-аналитического анализа свойств и формы дискриминантной гиперповерхности $P_2(a, b, c) = 0$ наряду с непосредственным определением числа положений равновесия внутри области (3.6.6), представляющие собой двухмерные сечения поверхности в плоскости (b, c) при фиксированном значении параметра a , приведены ниже. Было определено, что большая часть областей с заданным числом положений равновесия образуются или исчезают на диагонали $|b| = |c|$ квадрата $|b| \leq 2, |c| \leq 2$. Значения параметра a , при которых происходит качественное изменение формы, взаимного расположения и числа областей с заданным числом положений равновесия, определим как

бифуркационные. Часть бифуркационных значений параметра a была найдена аналитически при рассмотрении частных случаев задачи [101], другая часть получена численно. Результаты вычислений бифуркационных значений параметра a представлены в Таблице 3.1, где указано число областей либо отдельных точек с фиксированным числом равновесий для каждого бифуркационного значения параметра.

На рис. 3.1–3.8 показаны результаты распределения областей с равным числом положений равновесия в случаях, когда происходит существенное изменение их характеристик. Классификация распределений была выполнена для значений a из диапазона $-2 \leq a \leq 0$, так как замена $a \rightarrow -a$ приведет к симметричному повороту области распределения числа равновесных решений относительно диагонали $|b|=|c|$, осей b и c . На рисунках изображены области с фиксированным числом положений равновесия в плоскости (b, c) (здесь b – вертикальная ось, c – горизонтальная ось), а границы областей представляют собой сечения поверхности $P_2(a, b, c) = 0$ плоскостью $a = \text{const}$. На рисунках обозначены области, в которых существуют 24, 16, 8 положений равновесия, и области, в которых равновесия не существуют (символ 0).

Первое бифуркационное значение $a = -2$. В этом случае существуют 4 равновесия при $b = c = 0$. В интервале $-2 \leq a \leq (-35 + \sqrt{193})/12$ существует только одна область с числом равновесий, равным 8.

Второе бифуркационное значение $a = (-35 + \sqrt{193})/12 \approx -1.759$ (рис.3.1). При этом значении существует область с числом равновесий, равным 8, и появляются две точки, где существуют 16 равновесий. В интервале $(-35 + \sqrt{193})/12 \leq a \leq -3/2$ существует одна область с числом равновесий, равным 8, и одна область с числом равновесий, равным 16. При значении $a = -3/2$ существуют две области с числом равновесий, равным 8,

и две области с числом равновесий, равным 16. Эти области пересекаются в точке $b = c = 0$ (рис. 3.2).

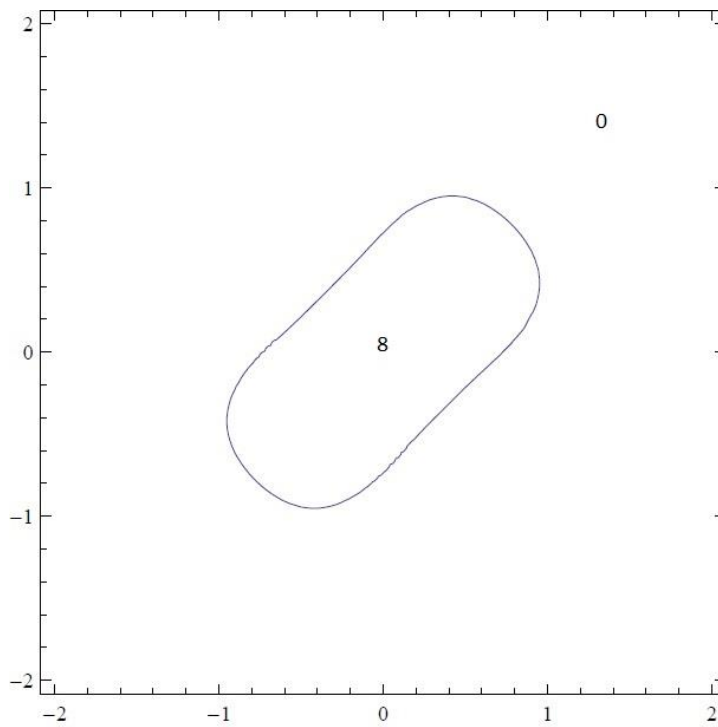


Рис. 3.1 Области для $a = (-35 + \sqrt{193})/12$

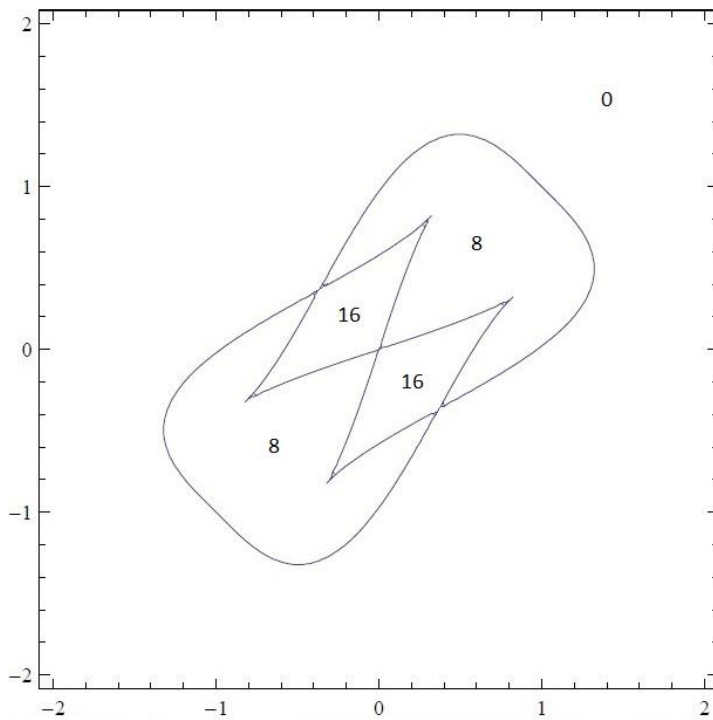


Рис. 3.2 Области для $a = -3/2$

При значении $a = (-25 + \sqrt{73})/12$ на диагонали $b = \pm c$ появляются две новые области с числом равновесий, равным 16. В следующей точке бифуркации $a = -7/6$ появляются четыре области с числом равновесий, равным 24. При значении $a = -1$ (рис.3.3) существуют две области с числом равновесий, равным 24, девять областей с числом равновесий, равным 16, две области с числом равновесий, равным 8, и появляются две отдельные точки на диагонали $b = c = \pm 1$ с числом равновесий, равным 8, в окрестности которых при дальнейшем увеличении параметра a до значения $a = -2/3$ возникают две области с числом равновесий, равным 8, и две смежные с ними области, где равновесия не существуют. На рис. 3.3 в центре области с числом равновесий, равным 16, и в углах квадрата более светлой линией показаны границы пересечения плоскости $a = -1$ с поверхностью $P_1(a, b, c) = 0$, при пересечении которых не происходит смены числа действительных корней уравнения (3.5.2).

При значении $a = -2/3$ (рис. 3.4) две области, где равновесий не существует, стягиваются в точки при $b = c = \pm 2/3$. При бифуркационном значении $a = -1/2$ (рис. 3.5) две области с числом равновесий, равным 24, сливаются в одну большую центральную область, пример которой изображен на рис.3.6 для значения $a = -0.495$, количество областей с числом равновесий, равным 16, при этом равно шести. Далее, при значении $a = (2 - \sqrt{22})/6 \approx -0.448$ количество областей с числом равновесий, равным 16, уменьшается с шести до четырех (рис. 3.7).

При $a = 0$ (рис. 3.8) количество областей с числом равновесий, равным 8, уменьшается с двух до одной, количество областей с числом равновесий, равным 16, равно четырем и в итоге мы имеем одну симметричную область в центре рисунка в форме квадрата с числом равновесий, равным 24, и одну область, где равновесий не существует. Для положительных значений

параметра a рисунки, аналогичные рис. 3.1–3.8, получаются путем их зеркального отражения относительно оси b на $-b$ либо оси c на $-c$.

Метод решения прямой задачи определения положений равновесия спутника при действии постоянных моментов был предложен в работе [37]. Рассматривая задачу получения положений равновесия спутника для заданных a , b и c на основе результатов решения алгебраической системы (1.3.5) из главы 1 в форме (1.3.6), был сделан переход от системы (3.3.1) к вспомогательной системе

$$\begin{aligned} (3a_{12}a_{13} + a)a_{21} + (3a_{11}a_{13} + b)a_{22} + (3a_{11}a_{12} + c)a_{23} &= 0, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

в которой первое уравнение получено умножением уравнений (3.3.1) на a_{21} , a_{22} , a_{23} соответственно и последующим сложением. Решение системы (3.6.7), (1.3.4) относительно неизвестных a_{21} , a_{22} , a_{23} имеет вид (1.3.6)

$$\begin{aligned} a_{21} &= \pm \frac{3(a_{13}^2 - a_{12}^2)a_{11} + ba_{13} - ca_{12}}{\sqrt{D}}, \\ a_{22} &= \pm \frac{3(a_{11}^2 - a_{13}^2)a_{12} + ca_{11} - aa_{13}}{\sqrt{D}}, \\ a_{23} &= \pm \frac{3(a_{12}^2 - a_{11}^2)a_{13} + aa_{12} - ba_{11}}{\sqrt{D}}. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Здесь

$$D = [3(a_{13}^2 - a_{12}^2)a_{11} + ba_{13} - ca_{12}]^2 + [3(a_{11}^2 - a_{13}^2)a_{12} + ca_{11} - aa_{13}]^2 + [3(a_{12}^2 - a_{11}^2)a_{13} + aa_{12} - ba_{11}]^2.$$

Значения a_{31} , a_{32} , a_{33} определяются из условий ортогональности. Таким образом, систему (3.3.1) можно разрешить относительно направляющих косинусов a_{11} , a_{12} , a_{13} и параметров a , b и c .

Исследование устойчивости положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов, так же как в случае

учета непотенциальной компоненты аэродинамического момента [80], приводит к характеристическому уравнению

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0 \quad (3.6.9)$$

с $a_1 = 0$. Если при этом $a_3 \neq 0$ и (или) $a_5 \neq 0$, то исследуемое положение равновесия неустойчиво. Добившись выполнения условий $a_3 = a_5 = 0$, можно надеяться на выполнение необходимых условий устойчивости. Такое исследование было проведено в [102]. Введение достаточного по величине диссипативного момента позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость положения равновесия спутника.

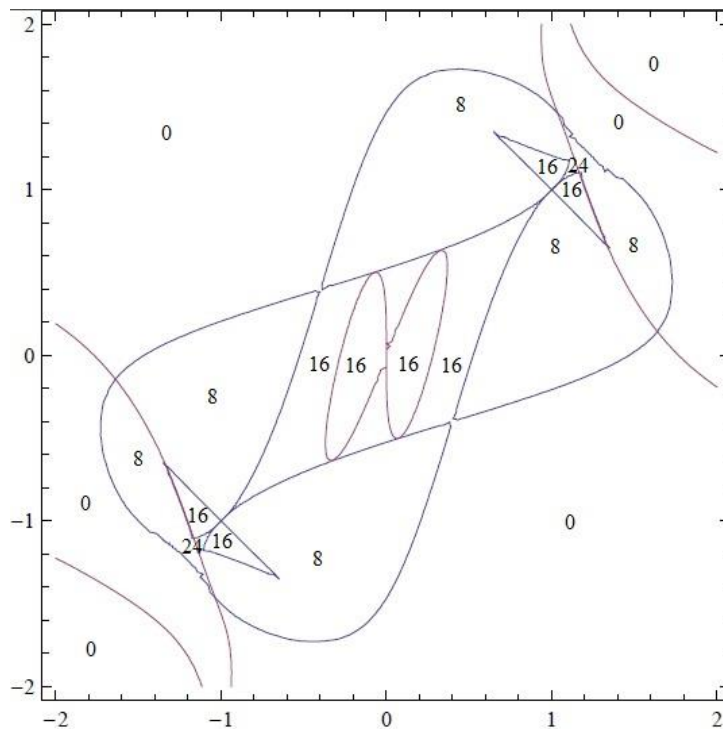
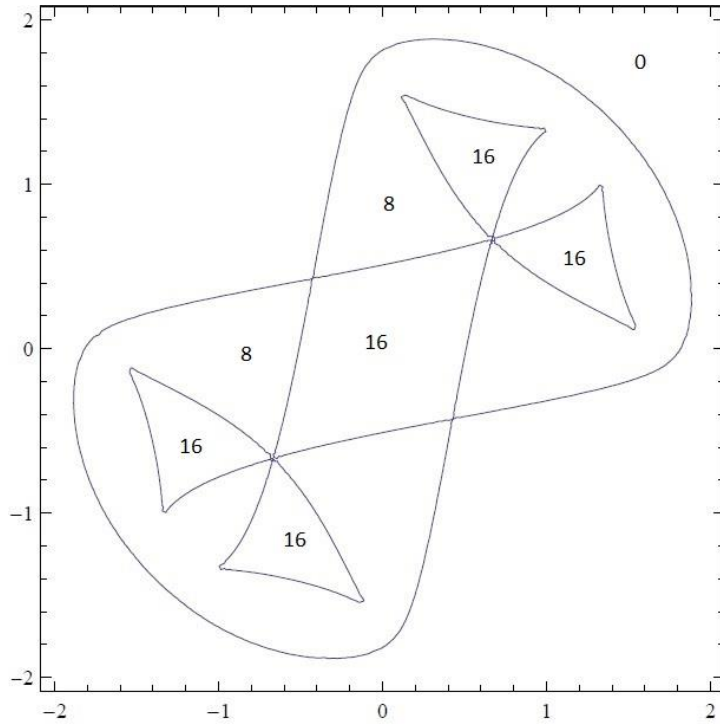
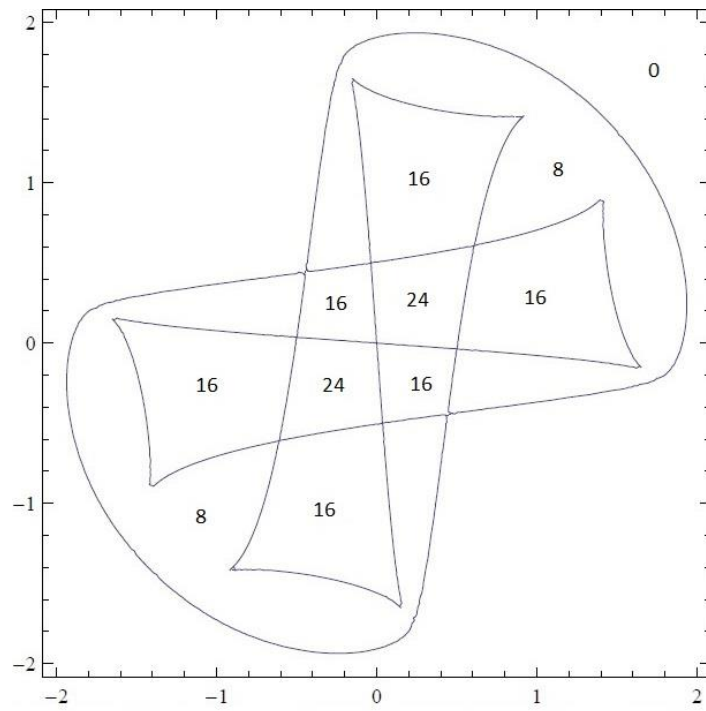
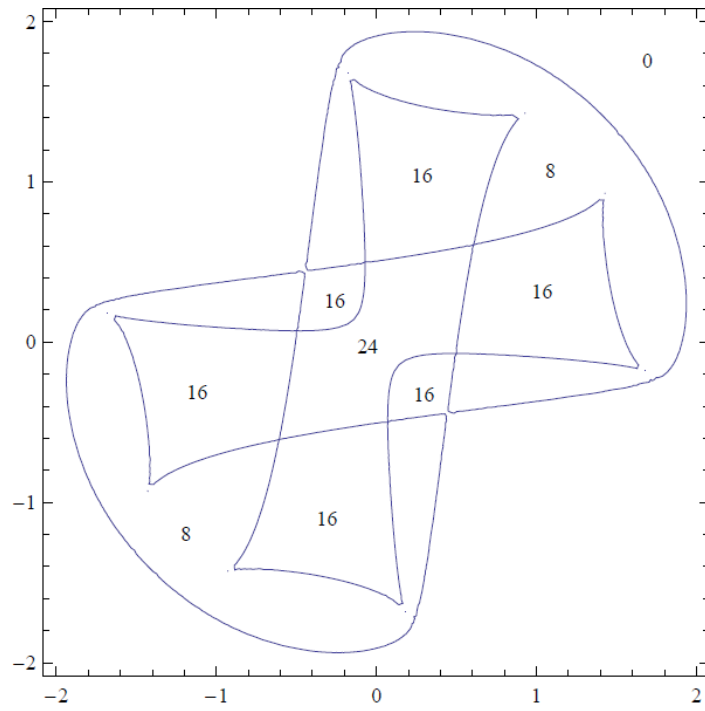
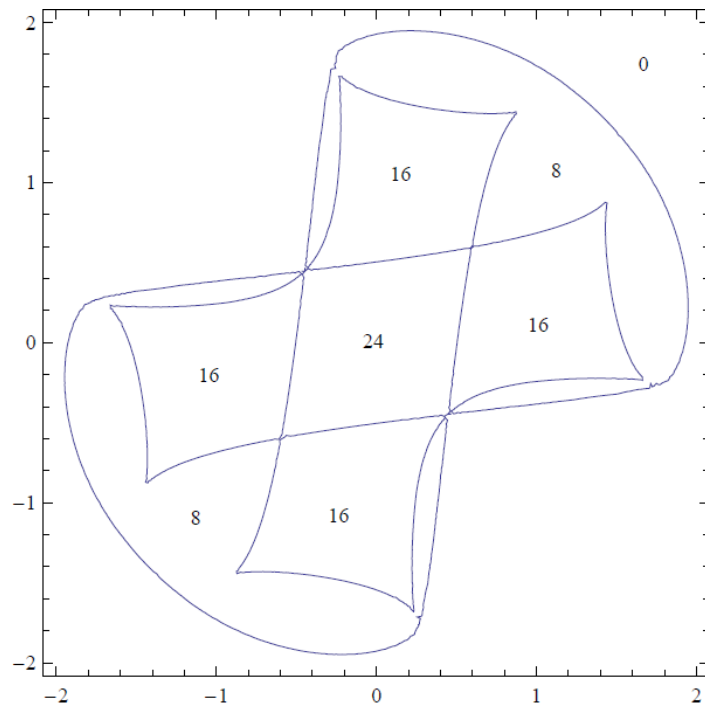
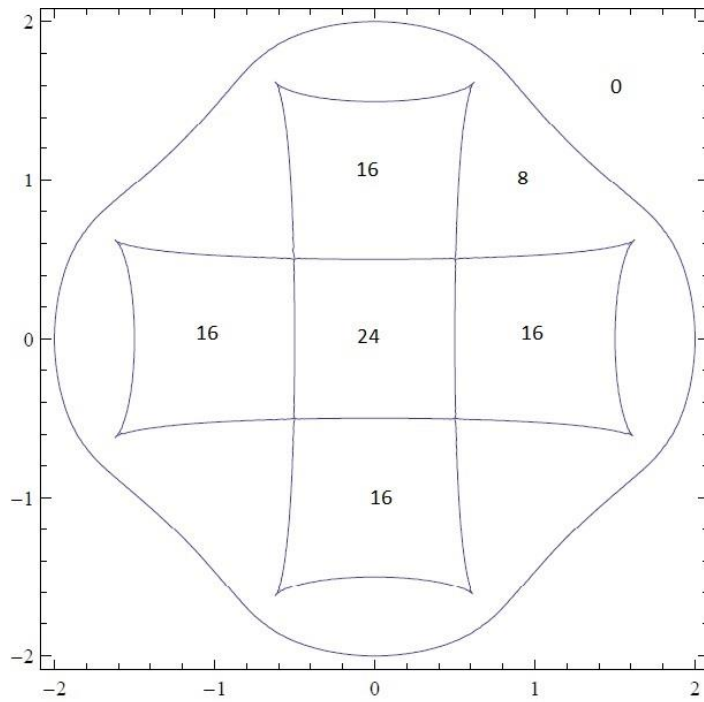


Рис. 3.3 Области для $a = -1$

Рис. 3.4 Области для $a = -2/3$ Рис. 3.5 Области для $a = -1/2$

Рис. 3.6 Области для $a = -0.495$ Рис. 3.7 Области для $a = (2 - \sqrt{22})/6$

Рис. 3.8 Области для $a = 0$

3.7. Исследование положений равновесия спутника для частных случаев

Рассмотрим частный случай задачи, когда вектор постоянного момента параллелен одной из главных центральных осей инерции спутника (например, $a \neq 0, b = c = 0$). Исследования данного случая было выполнено в работе [159]. Построив базис Гребнера системы полиномов (3.3.1), (3.3.2) относительно лексикографического упорядочения переменных, можно получить простое алгебраическое уравнение относительно только одной переменной a_{33}^2 :

$$(16a_{33}^4 - 16a_{33}^2 + a^2)(9a_{33}^4 - 9a_{33}^2 + a^2) = 0, \quad (3.7.1)$$

представляющее собой произведение двух квадратичных мономов. Заметим, что уравнение (3.7.1) можно получить, положив в (3.5.2) $b = c = 0$. Уравнение (3.7.1) при $|a| \leq 1/2$ определяет 24 равновесных решения исходной системы. При $1/2 \leq |a| \leq 3/2$ существуют 24 равновесных решений,

при $3/2 \leq |a| \leq 2$ возможны 8 решений, а при $|a| > 2$ решений нет, что соответствует условиям (3.4.2). В точках $|a|=1/2$, $|a|=3/2$, $|a|=2$ происходит смена числа действительных корней, они являются бифуркационными.

Случай, когда две проекции вектора постоянного момента равны по величине и отличны от нуля ($a \neq 0$, $b = c$), подробно рассмотрен в работе [101].

3.8. Методы и алгоритмы компьютерной алгебры, которые применялись для исследования положений равновесия спутника

Для решения систем алгебраических уравнений, которые определяют положения равновесия спутника, в Главах 1–3 применялись алгоритмы построения базисов Гребнера [138] и системы Компьютерной Алгебры *Mathematica* [136] и *Maple* [139].

Изложим кратко суть метода построения базисов Гребнера.

Пусть \mathbf{K} некоторое поле, $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо полиномов от n переменных над \mathbf{K} . Введем линейное упорядочение произведения степеней $x^i \dots y^j$. Возможны следующие упорядочения:

$1 < x < x^2 < \dots < y < xy < y^2 < \dots$ – лексикографический порядок;

$1 < x < x^2 < xy < \dots$ – линейное упорядочивание по степени.

На самом деле годится любое линейное упорядочение, обладающее следующими двумя свойствами:

1) $1 < t$ для любого произведения степеней $t \neq 1$.

2) если $s < t$, то $su < tu$, s, t, u – произведения степеней.

Вводится понятие упрощения полинома в силу системы уравнений.

Определение: g упрощается до h по модулю системы уравнений $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, если существует f из F , t, u такие, что $g = g_1 + at + g_2$, $f = cs + r$, $t = us$, $h = g - (a/c)uf = g_1 - (a/c)ur + g_2$, где a – отличный от нуля коэффициент при t в g , $g_1 < g_2$, s – старшее произведение степеней полинома f , c –

коэффициент при старшем произведении степеней, r – полином f без старшего произведения степеней. Проще говоря, g упрощается к h по модулю F , если h получается из g вычитанием подходящего произведения $(a/c)uf$, при этом старшее произведение степеней этого полинома совпадает с некоторым произведением степеней полинома g . Паре полиномов ставится в соответствие некоторый однозначно определяемый полином, который в смысле упорядочения проще старшего полинома.

Определение: Полином h дан в нормальной форме по модулю системы F , если не существует такого полинома h' , что h не упрощается до h' по модулю F . Полином h является нормальной формой полинома g по модулю F , если имеется последовательность редукций от $g \Rightarrow h$ и h дан в нормальной форме по модулю F .

Вообще говоря, могут иметься различные нормальные формы полинома g по модулю F $h_1 \neq h_2$.

Определение: Множество F называется базисом Гребнера, если для всяких полиномов g, h_1, h_2 таких, что h_1 и h_2 нормальные формы полинома g по модулю F , выполняется равенство $h_1 = h_2$.

Определение: S -полиномом, соответствующим полиномам f_1, f_2 , называется полином $SP(f_1, f_2) = u_1 f_1 - (c_1/c_2) u_2 f_2$, где c_1, c_2 – старшие коэффициенты f_1, f_2 ; u_1, u_2 таковы, что $s_1 u_1 = s_2 u_2$ совпадает с наименьшим общим множителем s_1, s_2 .

Заметим, что может существовать целая последовательность упрощений полинома относительно разных уравнений системы F .

Определение: алгоритм S называется алгоритмом нормальной формы, если для любых F и g редуцированный полином $S(f, g)$ является нормальной формой полинома g по модулю F .

АЛГОРИТМ

$G := F$ (F – исходная система уравнений)

$B := \{(f_i, f_j), f_i, f_j \in G\}$

while $B \neq$ пустому множеству do

(f_1, f_2) (одна из пар B)

$B := B \setminus (f_1, f_2)$ (удаление пары)

$h := SP(f_1, f_2)$ (вычисление S -полинома f_1, f_2)

$h := S(h)$ (вычисление нормальной формы h по модулю G)

if $h \neq 0$ then 1) добавить к B пару (h, f_j)

2) добавить к G элемент h

end while

end.

Теорема: для любого F алгоритм сходится и идеал F равен идеалу G ; G – базис Гребнера, соответствующий F .

Переменные полиномов из G «отделены»; иными словами, G имеет «треугольный» вид и содержит в точности один полином от одной переменной. Метод построения базиса Гребнера представляет собой алгоритмическую процедуру для полного приведения задачи в случае многих переменных к рассмотрению случая одной переменной.

В нашем случае, пример S -полинома f_1, f_2 представляет собой выражение (3.3.8), где $f_3 = SP(f_1, f_2) = f_2 - bcxf_1$.

Алгоритм построения базисов Гребнера превращается в алгоритм Гауса в случае, когда F состоит из линейных полиномов и в Алгоритм Евклида в случае, когда F состоит из полинома от одной переменной.

Алгоритм построения базисов Гребнера программно реализован во многих современных системах компьютерной алгебры, например, *Mathematica*, Maple.

Исследование алгебраических систем проводилось с использованием, реализованного в системе компьютерной алгебры Maple пакета построения базисов Гребнера Groebner[Basis]. В пакете Groebner[Basis] используется комбинация пяти алгоритмов для вычисления базисов Гребнера для различных порядков мономов и областей значений коэффициентов полиномов. Тип алгоритма задается специальной опцией method=meth.

Перечислим эти алгоритмы:

1) `method=fgb` выполняет программу `FGb`, которая реализует алгоритм, разработанный Д.С. Фожером (J. Faugere) и поддерживает для коэффициентов полиномов поля рациональных и целых чисел. Данный алгоритм не поддерживает работу с параметрами (коэффициенты принадлежат полю рациональных функций). Для наших задач этот метод не подходит так коэффициенты полиномов зависят от нескольких параметров задачи.

2) `method=maplef4` выполняет реализованный на языке Maple алгоритм `F4`. Данная реализация поддерживает все порядки мономов и типы коэффициентов полиномов из любого поля, а также вычисления в некоммутативных алгебрах Ore. Чаще всего этот метод является предпочтительней первого.

3) `method=buchberger` выполняет традиционную реализацию в системе Maple алгоритма Бухбергера [138], описанного выше. Этот алгоритм поддерживает все типы полей для коэффициентов полиномов, все порядки мономов и все опции.

4) `method=fglm` выполняет алгоритм преобразования базиса Гребнера, авторами которого являются Фожера, Джигани Лазард и Мора (J. Faugere, P. Gianni, P. Lazard, and T. Mora) [140].

5) `method=walk` выполняет алгоритм Walk преобразования базиса Гребнера, разработанный Коллартом, Калкбреном и Моллом (S. Collart, M. Kalkbrener, and D. Mall), который поддерживает все коммутативные поля и порядки мономов и производит преобразование базиса Гребнера из одного порядка мономов в другой [141], Опция `method=direct` выполняет самый быстрый, реализованный на данный момент, универсальный прямой метод.

Примеры первых успешных применений символьных вычислений в задачах физики и математики в нашей стране изложены в работе [144].

Таблица 3.1

Бифуркационные значения a

a	24	16	8	0
-2	–	–	1 точка	1 область
$(-35 + \sqrt{193})/12$	–	2 точки	1 область	1 область
-3/2	–	2 области	2 области	1 область
$(-25 + \sqrt{73})/12$	–	3 области	2 области	1 область
-7/6	4 области	11 областей	2 области	1 область
$-(2 + \sqrt{22})/6$	2 области	9 областей	2 области	1 область
-1	2 области	9 областей	2 области	1 область
			2 точки	2 точки
-35/39	–	5 областей	4 области	3 области
-2/3	–	5 областей	2 области	1 область
				2 точки
-1/2	2 области	6 областей	2 области	1 область
$(2 - \sqrt{22})/6$	1 область	4 области	2 области	1 область
0	1 область	4 области	1 область	1 область

Глава 4. Динамика гравитационно-ориентированного спутника при действии управляющих моментов

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [174–177]

4.1. Постановка задачи

Данная глава посвящена исследованию динамики вращательного движения спутника, движущегося в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите, на который, кроме гравитационного момента, действует управляющий момент, зависящий от проекций угловой скорости спутника. Такое управление можно обеспечить путем использования датчиков угловой скорости и двигателей ориентации.

Движение спутника, на который, кроме гравитационного момента действует управляющий момент, зависящий от проекций угловой скорости спутника, рассмотрено в работе [26], где определены все стационарные вращения осесимметричного спутника и исследована их устойчивость. Реализация таких управляющих моментов возможна, например, при использовании датчиков угловой скорости с осями чувствительности, направленными вдоль осей связанной со спутником системы координат, и двигателей ориентации сообщающих спутнику моменты, пропорциональные сигналам этих датчиков.

Действие управляющего момента позволяет получить новые положения равновесия и обеспечить асимптотическую устойчивость известных положений равновесия гравитационно-ориентированного спутника на круговой орбите.

В данной главе предложен метод определения всех положений равновесия (равновесных ориентаций) спутника в орбитальной системе координат при заданных значениях параметров управления и главных центральных моментов инерции. Для нулевого положения равновесия, когда оси связанной со спутником системы координат совпадают с осями

орбитальной системы координат, выводятся необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости с использованием критерия Рауса-Гурвица. Дается детальный анализ областей выполнения условий асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия в зависимости от трех безразмерных параметров задачи. Выполнено численное исследование процесса затухания пространственных колебаний спутника при различных коэффициентах управления.

Проведено исследование стационарных движений осесимметричного спутника при действии управляющего момента, проекции которого пропорциональны проекциям угловой скорости спутника. Изучены условия существования стационарных движений осесимметричного спутника, проведена классификация областей с равным числом стационарных решений в пространстве параметров задачи.

4.2. Уравнения движения

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс на круговой орбите. Пусть на спутник, кроме гравитационного момента, действует активный управляющий момент, зависящий от проекций вектора угловой скорости спутника.

Для записи уравнений движения спутника будем использовать введенные в главе 1 орбитальную систему координат $OXYZ$ и связанную со спутником систему координат $Oxyz$, оси Ox , Oy , Oz которой направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат с использованием самолетных углов тангажа α , рыскания β и крена γ . Направляющие косинусы осей Ox , Oy , Oz в орбитальной системе координат выражаются через самолетные углы с помощью соотношений (1.10.1), рис.1.37.

При малых колебаниях спутника углу тангажа соответствует поворот вокруг оси OY , углу рыскания – поворот вокруг оси OZ , углу крена – поворот вокруг оси OX .

Пусть на спутник действует управляющий момент, проекции суммарного вектора которого на оси Ox, Oy, Oz соответственно равны $M_x = -\bar{k}_1 p_1$, $M_y = -\bar{k}_2 (q_1 - \omega_0)$, $M_z = -\bar{k}_3 r_1$. Здесь $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ – параметры управления, p_1, q_1, r_1 – проекции угловой скорости спутника на оси Ox, Oy, Oz ; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите. Тогда уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде [176]:

$$\begin{aligned} Ap_1' + (C - B)q_1 r_1 - 3\omega_0^2 (C - B)a_{32}a_{33} &= M_x, \\ Bq_1' + (A - C)r_1 p_1 - 3\omega_0^2 (A - C)a_{33}a_{31} &= M_y, \\ Cr_1' + (B - A)p_1 q_1 - 3\omega_0^2 (B - A)a_{31}a_{32} &= M_z; \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} Ap_1' + (C - B)q_1 r_1 - 3\omega_0^2 (C - B)a_{32}a_{33} + \bar{k}_1 p_1 &= 0, \\ Bq_1' + (A - C)r_1 p_1 - 3\omega_0^2 (A - C)a_{33}a_{31} + \bar{k}_2 (q_1 - \omega_0) &= 0, \\ Cr_1' + (B - A)p_1 q_1 - 3\omega_0^2 (B - A)a_{31}a_{32} + \bar{k}_3 r_1 &= 0; \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= (\alpha' + \omega_0)a_{21} + \gamma', \\ q_1 &= (\alpha' + \omega_0)a_{22} + \beta' \sin \gamma, \\ r_1 &= (\alpha' + \omega_0)a_{23} + \beta' \cos \gamma. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

В уравнениях (4.2.1), (4.2.2) A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника. Штрихом обозначено дифференцирование по времени t .

Если ввести безразмерные параметры $\theta_A = A/B$, $\theta_C = C/B$, $p = p_1/\omega_0$, $q = q_1/\omega_0$, $r = r_1/\omega_0$, $\tilde{k}_1 = \bar{k}_1/\omega_0 B$, $\tilde{k}_2 = \bar{k}_2/\omega_0 B$, $\tilde{k}_3 = \bar{k}_3/\omega_0 B$ и от времени t перейти к безразмерной независимой переменной $\tau = \omega_0 t$, то система (4.2.1), (4.2.2) примет вид

$$\begin{aligned}
\theta_A \dot{p} + (\theta_C - 1)qr - 3(\theta_C - 1)a_{32}a_{33} + \tilde{k}_1 p &= 0, \\
\dot{q} + (\theta_A - \theta_C)rp - 3(\theta_A - \theta_C)a_{33}a_{31} + \tilde{k}_2 (q - 1) &= 0, \\
\theta_C \dot{r} + (1 - \theta_A)pq - 3(1 - \theta_A)a_{31}a_{32} + \tilde{k}_3 r &= 0;
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{aligned}
p &= (\dot{\alpha} + 1)a_{21} + \dot{\gamma}, \\
q &= (\dot{\alpha} + 1)a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma, \\
r &= (\dot{\alpha} + 1)a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

В уравнениях (4.2.3), (4.2.4) точкой обозначено дифференцирование по переменной τ .

4.3. Положения равновесия спутника

Положив в (4.2.3) и (4.2.4) $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, $\beta = \beta_0 = \text{const}$, $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, получим при $A \neq B \neq C$ уравнения

$$\begin{aligned}
a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + k_1 a_{21} &= 0, \\
a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31} + k_2 (a_{22} - 1) &= 0, \\
a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32} + k_3 a_{23} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Здесь $k_1 = \tilde{k}_1 / (\theta_C - 1)$, $k_2 = \tilde{k}_2 / (\theta_A - \theta_C)$, $k_3 = \tilde{k}_3 / (1 - \theta_A)$.

Систему (4.3.1) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Другой способ замыкания уравнений (4.3.1) заключается в добавлении трех условий ортогональности направляющих косинусов (1.3.4)

$$\begin{aligned}
a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\
a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\
a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Уравнения (4.3.1) и (4.3.2) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно шести направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника.

Для этой системы уравнений ставится следующая задача: при заданных k_1, k_2, k_3 требуется определить девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. После нахождения шести направляющих косинусов $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ оставшиеся направляющие косинусы a_{11}, a_{12}, a_{13} можно определить из условий ортогональности.

Для исследования условий существования различного числа положений равновесия спутника здесь можно применить алгоритм построения базисов Гребнера [138] с использованием системы символьных вычислений Maple [139].

Применяя систему символьных вычислений Maple, можно построить базис Гребнера полиномов (4.3.1), (4.3.2) относительно лексикографического упорядочения переменных и получить из базиса Гребнера полином, зависящий только от одной переменной a_{22} :

$$P(a_{22}, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3) = (a_{22}^2 - 1)[(\tilde{k}_1\tilde{k}_2 + \tilde{k}_2\tilde{k}_3 + \tilde{k}_1\tilde{k}_3 - 4)a_{22} - \tilde{k}_2(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_3)] = 0. \quad (4.3.3)$$

Для определения всех равновесий необходимо рассмотреть отдельно случаи $a_{22}^2 = 1$ и $a_{22} = \tilde{k}_2(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_3) / (\tilde{k}_1\tilde{k}_2 + \tilde{k}_1\tilde{k}_3 + \tilde{k}_2\tilde{k}_3 - 4)$. Оставшиеся направляющие косинусы системы (6), (7) $a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ можно определить приравняв соответствующие полиномы, входящие в базис Гребнера, нулю, и найти корни получившихся алгебраических уравнений. Коэффициенты этих уравнений имеют очень громоздкий вид. Следует отметить, что при изменении лексикографического порядка в списке переменных удастся получить в базисе Гребнера полиномы от одной неизвестной для переменных a_{21}, a_{23} и a_{32} , которые имеют восьмую степень от этих переменных и четвертую степень от их квадратов. Вычислив значения a_{21}, a_{23} и a_{32} , оставшиеся величины направляющих косинусов a_{31}, a_{33} можно однозначно получить из системы (4.3.1), (4.3.2).

В настоящей главе главное внимание уделено исследованию условий асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0, \gamma_0 = 0$, когда оси связанной со спутником системы координат совпадают с осями орбитальной системы координат.

4.4. Исследование необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости положений равновесия

Для исследования необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости полученных положений равновесия системы (4.3.1), (4.3.2) проведем линеаризацию уравнений системы (4.2.3), (4.2.4) в окрестности равновесной ориентации спутника $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$, удовлетворяющей системе (4.3.1), (4.3.2). Представим углы α, β, γ как $\alpha = \alpha_0 + \bar{\alpha}, \beta = \beta_0 + \bar{\beta}, \gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma}$, где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ – малые отклонения от положения равновесия спутника. Тогда линеаризованные в окрестности положения равновесия $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$ уравнения системы (4.2.3), (4.2.4) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
& \theta_A \ddot{\alpha} \sin \beta_0 + [2(\theta_C - 1)a_{22}a_{23} + \tilde{k}_1 a_{21}] \dot{\alpha} + 3(\theta_C - 1)(a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32}) \bar{\alpha} + \\
& + \cos \beta_0 [(\theta_A + \theta_C - 1) - 2(\theta_C - 1) \sin^2 \gamma_0] \dot{\beta} + \\
& + \cos \beta_0 \{ (\theta_C - 1) [(1 + 3 \sin^2 \alpha_0) \sin \beta_0 \sin 2\gamma_0 - \frac{3}{2} \sin 2\alpha_0 \cos 2\gamma_0] + \tilde{k}_1 \} \bar{\beta} + \\
& + \theta_A \ddot{\gamma} + \tilde{k}_1 \dot{\gamma} + (\theta_C - 1) [(a_{23}^2 - a_{22}^2) - 3(a_{33}^2 - a_{32}^2)] \bar{\gamma} = 0, \\
& \ddot{\alpha} a_{22} + [2(\theta_A - \theta_C) a_{21} a_{23} + \tilde{k}_2 a_{22}] \dot{\alpha} + 3(\theta_A - \theta_C) (a_{13} a_{31} + a_{11} a_{33}) \bar{\alpha} + \\
& + \ddot{\beta} \sin \gamma_0 + [(\theta_A - \theta_C - 1) \sin \beta_0 \cos \gamma_0 + \tilde{k}_2 \sin \gamma_0] \dot{\beta} - \\
& - \{ (\theta_A - \theta_C) [(1 + 3 \sin^2 \alpha_0) \cos 2\beta_0 \sin \gamma_0 + \frac{3}{2} \sin 2\alpha_0 \sin \beta_0 \cos \gamma_0] + \\
& + \tilde{k}_2 \sin \beta_0 \cos \gamma_0 \} \bar{\beta} + (\theta_A - \theta_C + 1) \dot{\gamma} a_{23} + [(\theta_C - \theta_A) (a_{21} a_{22} - 3a_{31} a_{32}) + \tilde{k}_2 a_{23}] \bar{\gamma} = 0, \\
& \theta_C \ddot{\alpha} a_{23} + \cos \beta_0 [2(1 - \theta_A) \sin \beta_0 \cos \gamma_0 - \tilde{k}_3 \sin \gamma_0] \dot{\alpha} + 3(1 - \theta_A) (a_{11} a_{32} + a_{12} a_{31}) \bar{\alpha} + \\
& + \theta_C \ddot{\beta} \cos \gamma_0 + [(\theta_C - \theta_A + 1) \sin \beta_0 \sin \gamma_0 + \tilde{k}_3 \cos \gamma_0] \dot{\beta} + \\
& + \{ (1 - \theta_A) [(1 + 3 \sin^2 \alpha_0) \cos 2\beta_0 \cos \gamma_0 - \frac{3}{2} \sin 2\alpha_0 \sin \beta_0 \sin \gamma_0] + \\
& + \tilde{k}_3 \sin \beta_0 \sin \gamma_0 \} \bar{\beta} - (\theta_A + \theta_C - 1) \dot{\gamma} a_{22} + [(1 - \theta_A) (a_{21} a_{23} - 3a_{31} a_{33}) - \tilde{k}_3 a_{22}] \bar{\gamma} = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Рассмотрим малые колебания спутника в окрестности нулевого решения

$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0. \tag{4.4.2}$$

Тогда из уравнений (4.4.1) получаем систему

$$\begin{aligned}
& \ddot{\alpha} + k_2 \dot{\alpha} + 3(\theta_A - \theta_C) \bar{\alpha} = 0, \\
& \theta_C \ddot{\beta} + k_3 \dot{\beta} - (\theta_A + \theta_C - 1) \dot{\gamma} + (1 - \theta_A) \bar{\beta} - k_3 \bar{\gamma} = 0, \\
& \theta_A \ddot{\gamma} + (\theta_A + \theta_C - 1) \dot{\beta} + k_1 \dot{\gamma} + k_1 \bar{\beta} + 4(1 - \theta_C) \bar{\gamma} = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Характеристическое уравнение системы (4.4.3) представляет собой произведение полиномов второй и четвертой степени относительно λ .

$$[\lambda^2 + k_2 \lambda + 3(\theta_A - \theta_C)](A_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4) = 0, \tag{4.4.4}$$

где

$$\begin{aligned}
A_0 &= \theta_A \theta_C, \quad A_1 = k_1 \theta_C + k_3 \theta_A, \\
A_2 &= k_1 k_3 + (\theta_A + \theta_C - 1)^2 + \theta_A (1 - \theta_A) + 4\theta_C (1 - \theta_C), \\
A_3 &= k_1 \theta_C + k_3 (3 + \theta_A - 3\theta_C), \quad A_4 = k_1 k_3 + 4(1 - \theta_A)(1 - \theta_C).
\end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (условия Рауса - Гурвица) нулевого решения (4.4.2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 k_2 > 0, \quad \theta_A - \theta_C > 0, \\
 \Delta_1 = A_1 = k_1\theta_C + k_3\theta_A > 0, \\
 \Delta_2 = A_1A_2 - A_0A_3 = k_1^2k_3\theta_C + k_1k_3^2\theta_A + \\
 + (1 - \theta_C)[k_1\theta_C(1 - \theta_A + 3\theta_C) + k_3\theta_A(1 - \theta_A)] > 0, \\
 \Delta_3 = A_1A_2A_3 - A_0A_3^2 - A_1^2A_4 = 3(1 - \theta_C)\{k_1^2k_3^2\theta_C + k_1k_3^3\theta_A + \\
 + k_1^2\theta_C^2(\theta_A + \theta_C - 1) + k_1k_3\theta_C[(\theta_A + \theta_C - 1)(2\theta_A - 1) + 3\theta_C(1 - \theta_C)] - \\
 - k_3^2\theta_A(1 - \theta_A)(\theta_A + \theta_C - 1)\} > 0, \\
 \Delta_4 = \Delta_3A_4 > 0, \quad A_4 = k_1k_3 + 4(1 - \theta_A)(1 - \theta_C) > 0.
 \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Рассмотрим частный случай, когда $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Тогда условия (4.4.5) примут более простой вид

$$\begin{aligned}
 k > 0, \quad \theta_A - \theta_C > 0, \\
 \Delta_1 = k(\theta_C + \theta_A) > 0, \\
 \Delta_2 = k[k^2 + (1 - \theta_C)^2]\theta_A + k[k^2 + (1 - \theta_C)(1 + 3\theta_C)]\theta_C - k(1 - \theta_C)\theta_A^2 > 0, \\
 \Delta_3 = 3k^2(1 - \theta_C)\{\theta_A^3 + (3\theta_C - 2)\theta_A^2 + [k^2 + (1 - \theta_C)(1 - 3\theta_C)]\theta_A + \\
 + \theta_C[k^2 + (1 - \theta_C)(1 + 2\theta_C)]\} > 0, \\
 \Delta_4 = \Delta_3A_4 > 0, \quad A_4 = k^2 + 4(1 - \theta_A)(1 - \theta_C) > 0.
 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Исследование эволюции областей, где выполняются необходимые и достаточные условия устойчивости (4.4.6), проводилось в плоскости (θ_A, θ_C) в зависимости от значений параметра k . Необходимо принять во внимание следующие, так называемые «неравенства треугольника» для реальных тел, которым должны удовлетворять параметры θ_A и θ_C : $1 + \theta_A \geq \theta_C$, $1 + \theta_C \geq \theta_A$, $\theta_A + \theta_C \geq 1$. Условия треугольника выделяют в плоскости (θ_A, θ_C) бесконечную полуполосу. В силу неравенства $\theta_A > \theta_C$ из условий (4.4.6), первое условие в неравенствах треугольника можно опустить, так как оно выполняется автоматически. Таким образом,

исследование существования выполнения условий (4.4.6) проводилось в полуполосе, ограниченной прямыми

$$\theta_C = 1 - \theta_A, \quad \theta_C = \theta_A, \quad \theta_C = \theta_A - 1. \quad (4.4.7)$$

На рис. 4.1–4.4 показано изменение границ областей, где выполняются условия асимптотической устойчивости (4.4.6) в зависимости от значений параметра k . Область, где выполняются необходимые и достаточные условия устойчивости (4.4.6), выделена серым цветом.

При малых значениях k , близких к нулю (рис. 4.1, $k = 0.01$), область устойчивости приближается к области, где выполняются необходимые и достаточные условия устойчивости для спутника - твердого тела при $k = 0$. Эта область ограничена прямыми $\theta_C = 1 - \theta_A$, $\theta_C = \theta_A$, $\theta_A = 1$ [2].

На рис. 4.2 при $k = 0.5$ подробно показаны кривые из условий (4.4.6), которые образуют границы области асимптотической устойчивости решения (4.4.2). Кривые $\Delta_2 = 0$, $A_4 = 0$ представляют собой гиперболы и условия $\Delta_2 > 0$, $A_4 > 0$ выполняются в областях, расположенных между ветвями этих гипербол. В выражение для Δ_3 входит сомножитель $(1 - \theta_C)$ и кубический полином по переменной θ_C в фигурных скобках. На рис. 4.2 эта кубическая кривая обозначена как $\Delta_3 / (1 - \theta_C)$. Для значений параметров θ_A, θ_C , расположенных выше кубической кривой $\Delta_3 / (1 - \theta_C) = 0$, выполняется неравенство $\Delta_3 / (1 - \theta_C) < 0$, а для параметров θ_A, θ_C , расположенных ниже этой кубической кривой, выполняется неравенство $\Delta_3 / (1 - \theta_C) > 0$. Область, расположенная выше кубической кривой при $\theta_C > 1$, где выполняется условие $\Delta_3 > 0$, нами не рассматривалась, так она не имеет общих точек с областью (4.4.7). Поэтому принималось во внимание условие выполнения неравенства $\Delta_3 > 0$ при значениях $\theta_C < 1$ и

$\Delta_3/(1-\theta_C) > 0$. На рис. 4.2 область выполнения условий (4.4.6) ограничена прямыми $\theta_C = 1 - \theta_A$, $\theta_C = \theta_A$, $\theta_C = 1$ и нижней ветвью гиперболы $A_4 = 0$.

При возрастании значений параметра k происходит увеличение области выполнения условий (4.4.6). При $k=1$ (рис. 4.3) область выполнения условий (4.5.6) представляет собой трапецию, ограниченную прямыми $\theta_C = 1 - \theta_A$, $\theta_C = \theta_A$, $\theta_C = 1$, $\theta_C = \theta_A - 1$. В этом случае нижняя ветвь гиперболы $A_4 = 0$ касается прямой $\theta_C = \theta_A - 1$. При дальнейшем увеличении параметра k область выполнения необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости (4.4.6) решения (4.4.2) не изменяется и остается в форме описанной выше трапеции, например, как показано на рис. 4.4 при $k = 1.1$.

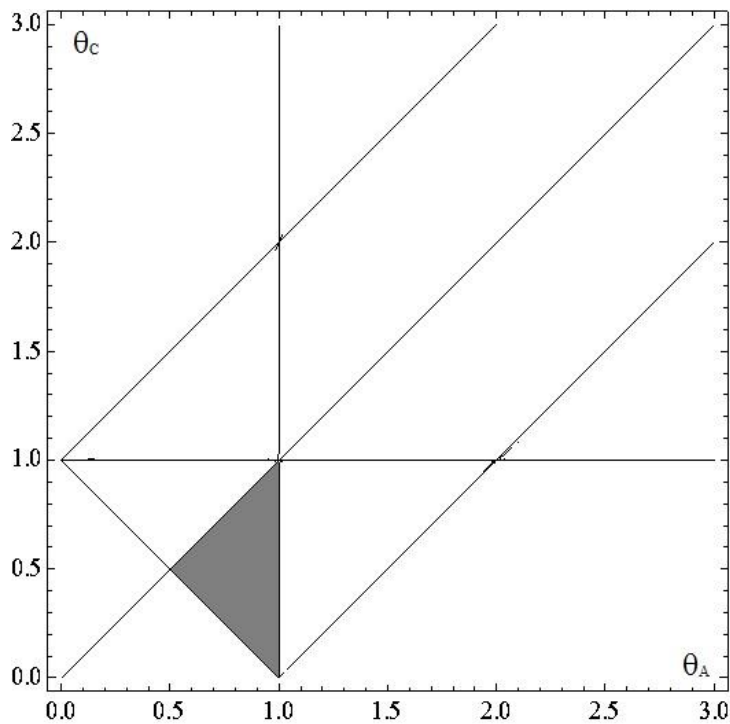


Рис. 4.1 Область выполнения условий асимптотической устойчивости системы при $k = 0.01$

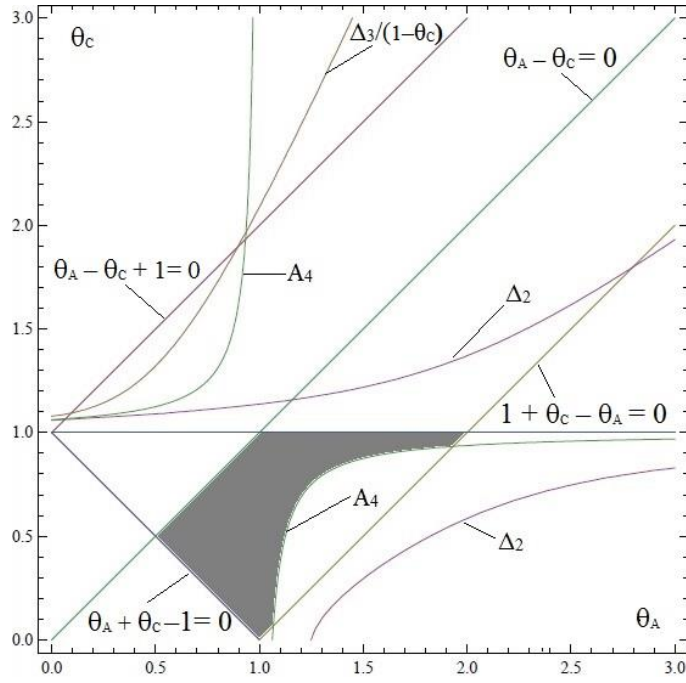


Рис. 4.2 Область выполнения условий асимптотической устойчивости системы при $k = 0.5$

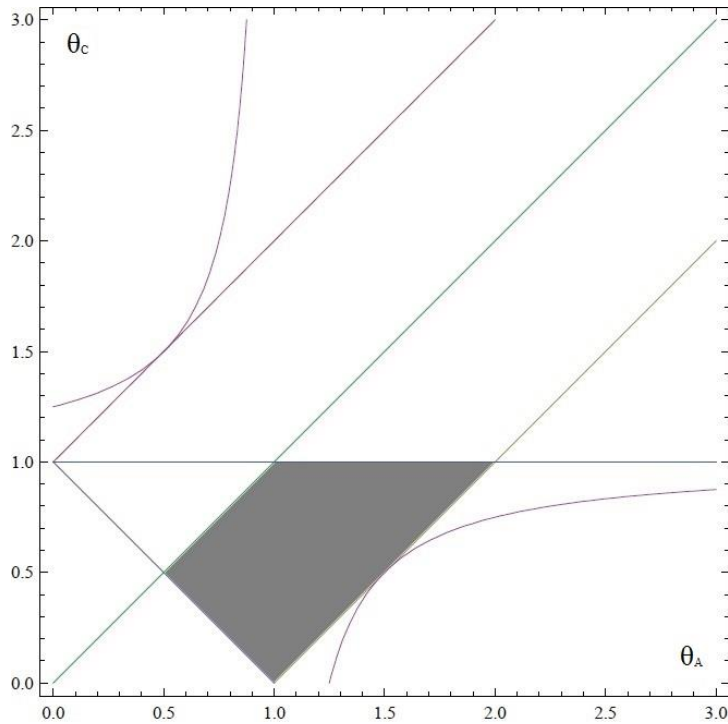


Рис. 4.3 Область выполнения условий асимптотической устойчивости системы при $k = 1.0$

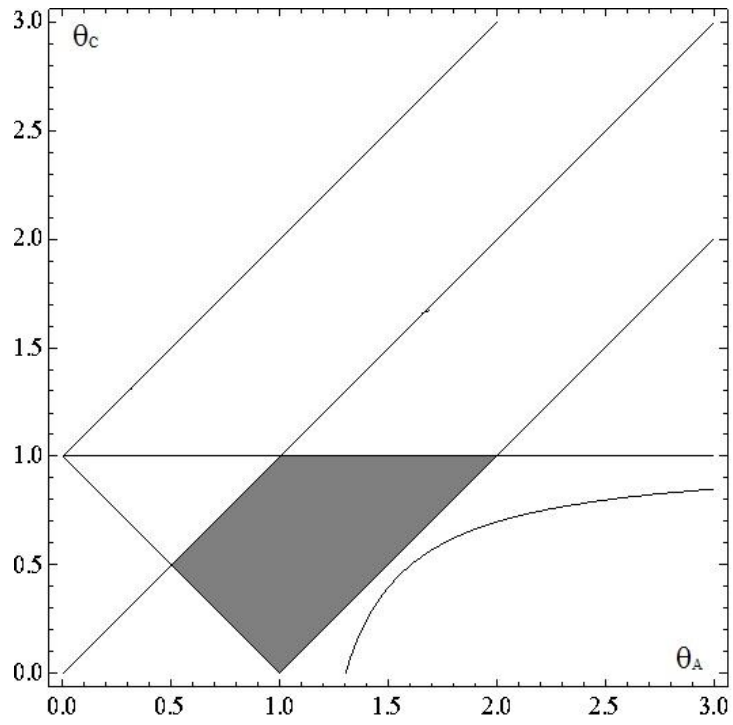


Рис. 4.4 Область выполнения условий асимптотической устойчивости системы при $k = 1.1$

4.5. Анализ переходных процессов

Проведем теперь анализ переходных процессов, описываемых системой дифференциальных уравнений (4.2.3), (4.2.4) при различных коэффициентах демпфирования. Перепишем систему (4.2.3), (4.2.4) в стандартном виде, удобном для численного интегрирования при условии, когда $k_1 = k_2 = k_3 = k$:

$$\begin{aligned}
 \dot{p} &= [(1 - \theta_C)qr - 3(1 - \theta_C)a_{32}a_{33} - kp] / \theta_A = 0, \\
 \dot{q} &= (\theta_C - \theta_A)rp - 3(\theta_C - \theta_A)a_{33}a_{31} - k(q - 1) = 0, \\
 \dot{r} &= [(\theta_A - 1)pq - 3(\theta_A - 1)a_{31}a_{32} - kr] / \theta_C = 0; \\
 \dot{\alpha} &= [(q \cos \gamma - r \sin \gamma) / \cos \beta] - 1, \\
 \dot{\beta} &= q \sin \gamma + r \cos \gamma, \\
 \dot{\gamma} &= p - (q \cos \gamma - r \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta.
 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Численное интегрирование системы (4.5.1) проводилось при фиксированных значениях параметров, удовлетворяющих условиям (4.4.6). Значения коэффициента демпфирования k изменялись в диапазоне от 0.01 до 2.0. Исследование системы (4.5.1) проводилось для трех случаев: $B = A > C$ ($\theta_A = 1, \theta_A > \theta_C$), $B > A > C$ ($\theta_A < 1, \theta_A > \theta_C$) и $A > B > C$ ($\theta_A > 1, \theta_A > \theta_C$). На рис. 4.5–4.8 приведены примеры переходных процессов, описываемых системой (4.5.1) для значений параметров $\theta_A = 1, \theta_C = 0.5$ и величин k , равных 0.2, 0.5, 1.0 и 1.5. Начальные значения переменных при расчетах были приняты равными 0.001.

Рис. 4.5 показывает характер переходного процесса при $\theta_A = 1, \theta_C = 0.5$ и значении $k = 0.2$. Следует отметить, что в этом случае процесс выхода системы на нулевое положение равновесия по углам β и γ происходит быстрее, чем по углу α и амплитуда колебаний по этим углам значительно меньше, чем по углу α . При величине коэффициента управления $k = 0.5$ процесс выхода системы на нулевое положение равновесия происходит примерно в два раза быстрее, чем при $k = 0.2$ (рис. 4.6).

При значении параметра k , равным 1 (рис. 4.7), скорость переходного процесса увеличивается, и система в данном случае выходит на нулевое положение равновесия по всем трем углам при значениях $\tau=10$, что соответствует примерно двум оборотам спутника по орбите. При значении $k=1.5$ (рис. 4.8) и при дальнейшем увеличении параметра k характер переходных процессов меняется незначительно.

Анализ характера переходных процессов в случае $B > A > C$ ($\theta_A < 1, \theta_A > \theta_C$) показал, что скорость выхода системы на нулевое положение равновесия выше по сравнению с осесимметричным случаем в силу увеличения гравитационного момента, а при $A > B > C$ ($\theta_A > 1, \theta_A > \theta_C$) скорость переходных процессов замедляется по сравнению с первым случаем.

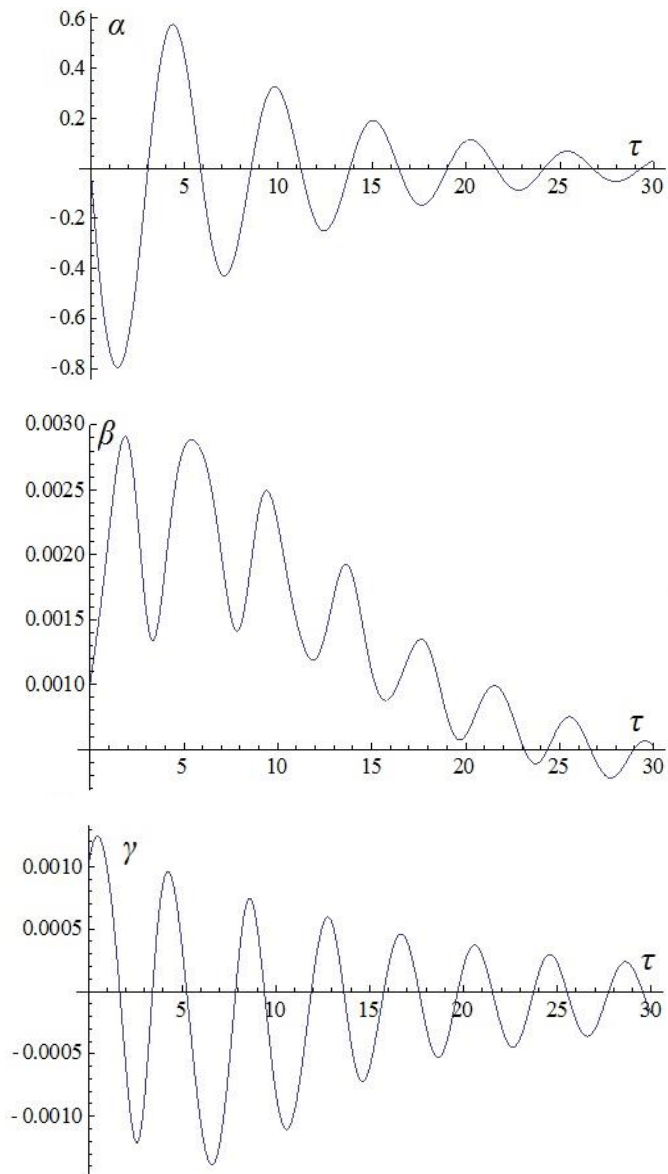


Рис. 4.5 Переходный процесс при $\theta_A = 1$, $\theta_C = 0.5$, $k = 0.2$

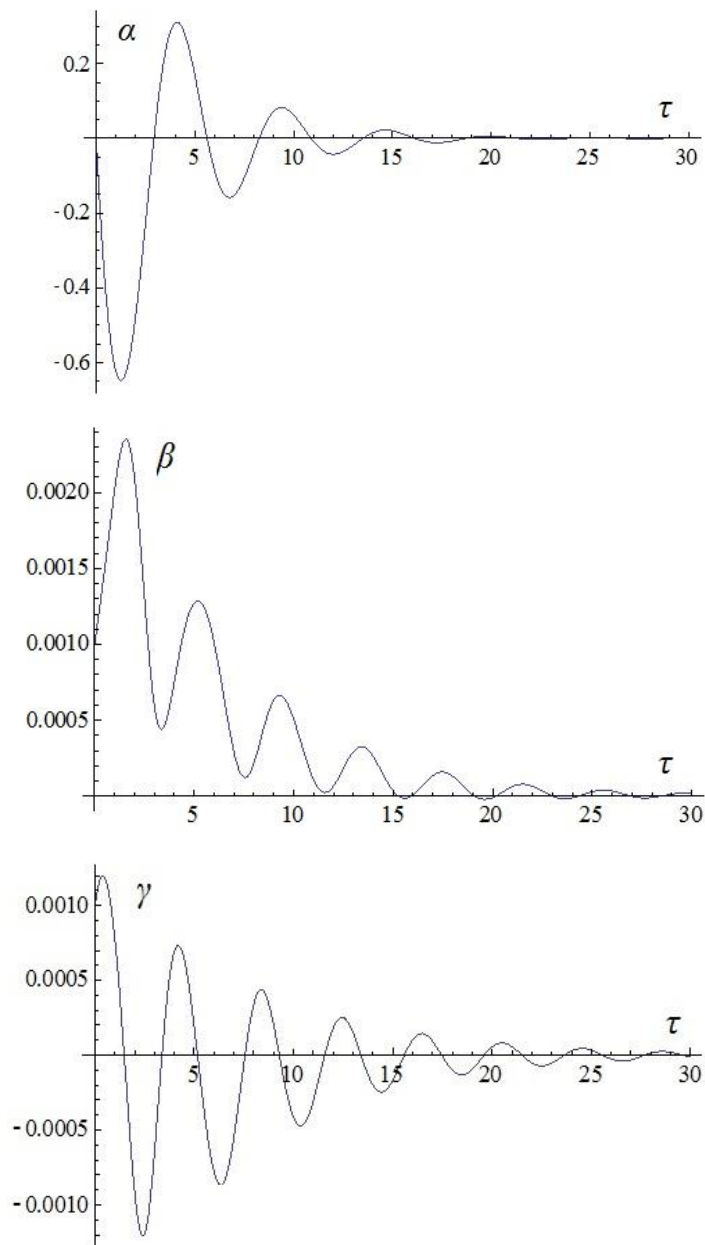


Рис. 4.6 Переходный процесс при $\theta_A = 1$, $\theta_C = 0.5$, $k = 0.5$

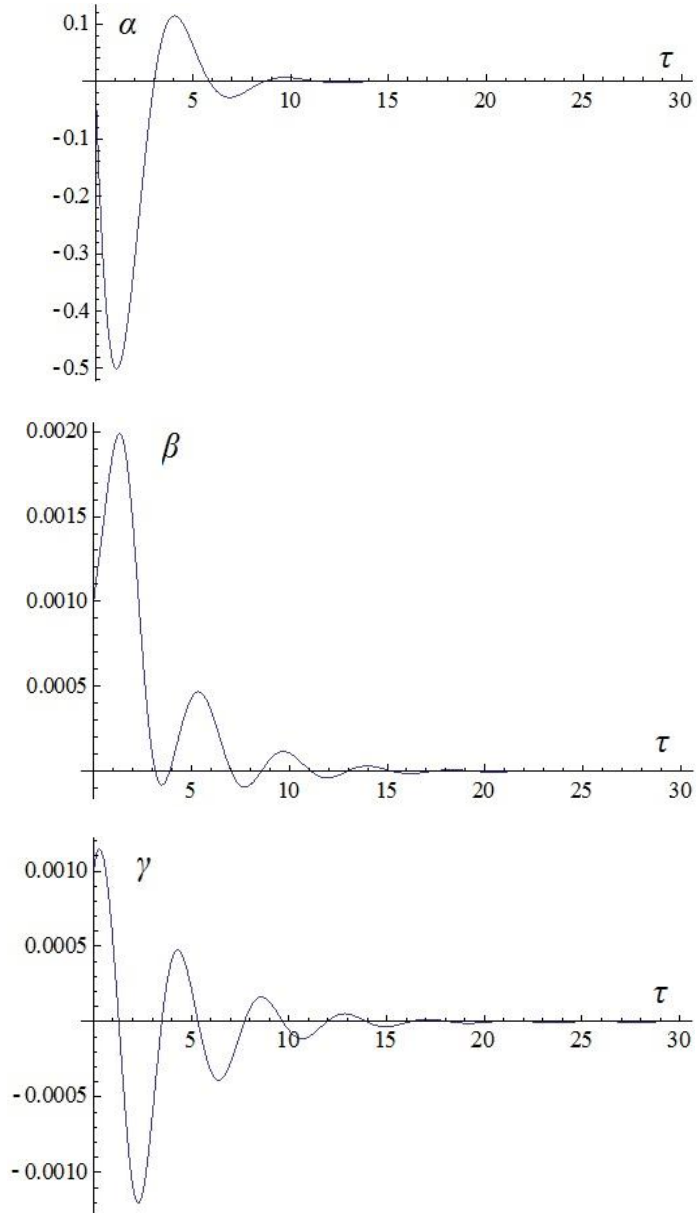


Рис. 4.7 Переходный процесс при $\theta_A = 1$, $\theta_C = 0.5$, $k = 1.0$

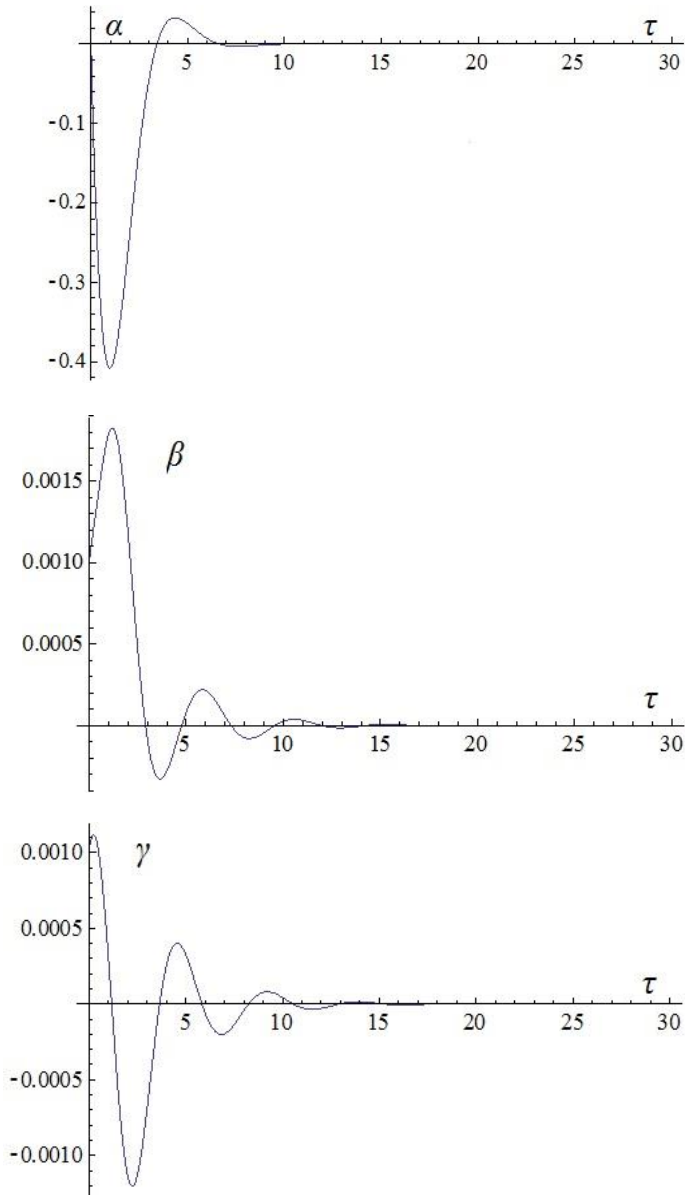


Рис. 4.8 Переходный процесс при $\theta_A = 1$, $\theta_C = 0.5$, $k = 1.5$

4.6. Случай осесимметричного спутника

Рассмотрим задачу о вращательном движении осесимметричного спутника на круговой орбите при действии гравитационных моментов и активного управляющего момента, проекции которого пропорциональны проекциям угловой скорости спутника.

Для записи уравнений движения спутника будем использовать введенные в главе 1 орбитальную систему координат $OXYZ$ и связанную со спутником систему координат $Oxyz$. Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат определим с использованием углов Эйлера ψ , ϑ и φ . Направляющие косинусы осей системы координат $Oxyz$ в орбитальной системе координат выражаются через углы Эйлера с помощью соотношений (1.2.1).

Пусть на спутник действует управляющий момент, проекции суммарного вектора которого на оси Ox , Oy , Oz соответственно равны $M_x = -\bar{k}_1 p$, $M_y = -\bar{k}_2 q$, $M_z = -\bar{k}_3 r$. Здесь \bar{k}_1 , \bar{k}_2 , \bar{k}_3 – параметры управления, p , q , r – проекции угловой скорости спутника на оси Ox , Oy , Oz ; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите. Тогда уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3(C - B)a_{32}a_{33} &= M_x / \omega_0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3(A - C)a_{33}a_{31} &= M_y / \omega_0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3(B - A)a_{31}a_{32} &= M_z / \omega_0; \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3(C - B)a_{32}a_{33} + \bar{k}_1 p / \omega_0 &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3(A - C)a_{33}a_{31} + \bar{k}_2 q / \omega_0 &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3(B - A)a_{31}a_{32} + \bar{k}_3 r / \omega_0 &= 0; \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

$$\begin{aligned}
p &= \dot{\psi} a_{31} + \dot{\mathcal{G}} \cos \varphi + a_{21}, \\
q &= \dot{\psi} a_{32} - \dot{\mathcal{G}} \sin \varphi + a_{22}, \\
r &= \dot{\psi} a_{33} + \dot{\varphi} + a_{23}.
\end{aligned} \tag{4.6.2}$$

В уравнениях (4.6.1), (4.6.2) A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника. Точкой обозначено дифференцирование по переменной $\tau = \omega_0 t$, где t – время.

Далее будет рассматриваться случай осесимметричного спутника $A = B$. В этом случае при условии $\bar{k}_3 = 0$ из третьего уравнения системы (4.6.1) имеем $\dot{r} = 0$, откуда можно получить интеграл движения $r = r_0 = \text{const}$.

Положив в (4.6.1) и (4.6.2) $\psi = \psi_0 = \text{const}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \text{const}$, получим при $A = B$, $\bar{k}_3 = 0$, $r = r_0$ уравнения

$$\begin{aligned}
-(A - C)r_0 a_{22} - 3(A - C)a_{32}a_{33} + a_{21}\bar{k}_1/\omega_0 &= 0, \\
(A - C)r_0 a_{21} - 3(A - C)a_{33}a_{31} + a_{22}\bar{k}_2/\omega_0 &= 0, \\
r_0 &= \dot{\varphi} + a_{23},
\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

позволяющие определить стационарные движения осесимметричного спутника в орбитальной системе координат. С учетом выражений для направляющих косинусов (1.2.1) систему (4.6.3) можно рассматривать как систему трех уравнений с тремя неизвестными ψ , \mathcal{G} и φ .

Другой более удобный для исследования способ замыкания уравнений (4.6.3) заключается в добавлении трех условий ортогональности направляющих косинусов (4.3.2). Уравнения (4.6.3) и (4.3.2) образуют замкнутую алгебраическую систему трех уравнений относительно 6 неизвестных направляющих косинусов, определяющих стационарные движения спутника.

Для этой системы уравнений ставится следующая задача: для заданных A, C, k_1, k_2, r_0 и $\dot{\varphi}$ требуется определить все шесть направляющих

косинусов. Остальные направляющие косинусы a_{11}, a_{12}, a_{13} могут быть получены из условий ортогональности. Отметим, что решения системы (4.6.3) и (4.3.2) существуют при $|r_0 - \dot{\varphi}| \leq 1$.

Вводя безразмерные параметры $k_1 = \bar{k}_1 / ((A - C) \omega_0)$, $k_2 = \bar{k}_2 / ((A - C) \omega_0)$ система (4.6.3) примет вид:

$$\begin{aligned} -r_0 a_{22} - 3a_{32} a_{33} + k_1 a_{21} &= 0, \\ r_0 a_{21} - 3a_{33} a_{31} + k_2 a_{22} &= 0, \\ r_0 - \dot{\varphi} - a_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Для нахождения решений алгебраической системы (4.6.4), (4.3.2) применялись алгоритмы построения базисов Гребнера. Построим базис Гребнера системы шести полиномов f_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), которые представляют собой левые части уравнений системы (4.6.4), (4.3.2) с шестью переменными направляющими косинусами с использованием реализованного в системе компьютерной алгебры Maple пакета построения базисов Гребнера Groebner[Basis]. относительно лексикографического упорядочения переменных, используя метод plex

```
Groebner[Basis]([f1, ..., f6], plex([a21, a22, a23, a31, a32, a33])).
```

Выпишем из построенного базиса Гребнера, полином, который зависит только от одной переменной $x = a_{33}^2$:

$$P(x) = p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0. \quad (4.6.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_0 &= 81, \\ p_1 &= 54(2r_0 \dot{\varphi} - 2\dot{\varphi}^2 - 3), \\ p_2 &= 9[6r_0^2(\dot{\varphi} - r_0)^2 + 2k_1 k_2 (\dot{\varphi} - r_0)^2 + 10r_0^2 - \\ &\quad - 12\dot{\varphi} r_0 + k_1^2 + k_2^2 + 9], \\ p_3 &= 3[(\dot{\varphi} - r_0)^2 - 1][3(k_1^2 + k_2^2) + \\ &\quad + 4k_1 k_2 r_0 (\dot{\varphi} - r_0) + 2r_0^2(2r_0 \dot{\varphi} - 2\dot{\varphi}^2 - 3)], \\ p_4 &= [(\dot{\varphi} - r_0)^2 - 1]^2 (k_1 k_2 + r_0^2)^2. \end{aligned}$$

При исследовании стационарных решений спутника ставится задача определения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (4.6.5). Число вещественных корней полученного алгебраического уравнения четно и не превышает 4. Каждому вещественному корню $x = a_{33}^2$ уравнения (4.6.5) с учетом условий ортогональности соответствуют 4 стационарных решения задачи и, соответственно, каждому корню a_{33} отвечают 2 стационарных решения. Из приведенных соображений следует, что осесимметричный спутник на круговой орбите под действием гравитационного и демпфирующего моментов может иметь не более 16 стационарных решений.

Для выделения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней воспользуемся теоремой Меймана [137], из которой следует, что разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней определяется дискриминантной гиперповерхностью.

В нашем случае дискриминантная гиперповерхность задается дискриминантом многочлена (4.6.5). Множество особых точек дискриминантной гиперповерхности в пространстве параметров k_1, k_2, r_0 и $\dot{\varphi}$ задается следующей системой алгебраических уравнений:

$$P(x) = 0, \quad P'(x) = 0. \quad (4.6.6)$$

Здесь $x = a_{33}^2$ и символ «штрих» обозначает дифференцирование по переменной x .

Исключим переменную x из системы (4.6.6) путем вычисления определителя матрицы результата уравнений (4.6.6) и получим в результате уравнение дискриминантной гиперповерхности в следующем виде:

$$(k_1 + k_2)^4 [(\dot{\varphi} - r_0)^2 - 1]^2 P_2(k_1, k_2, r_0, \dot{\varphi}) = 0. \quad (4.6.7)$$

Здесь $P_2(k_1, k_2, r_0, \dot{\varphi})$ – полином восьмой степени по переменной r_0 , который имеет вид

$$P_2(k_1, k_2, r_0, \dot{\varphi}) = p_{2,0}r_0^8 + p_{2,1}r_0^7 + p_{2,2}r_0^6 + p_{2,3}r_0^5 + p_{2,4}r_0^4 + p_{2,5}r_0^3 + p_{2,6}r_0^2 + p_{2,7}r_0 + p_{2,8} = 0, \quad (4.6.8)$$

где

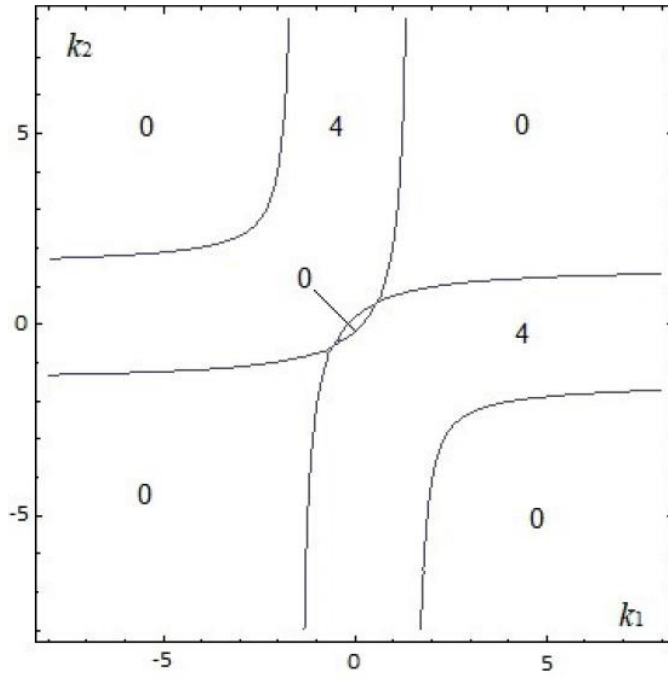
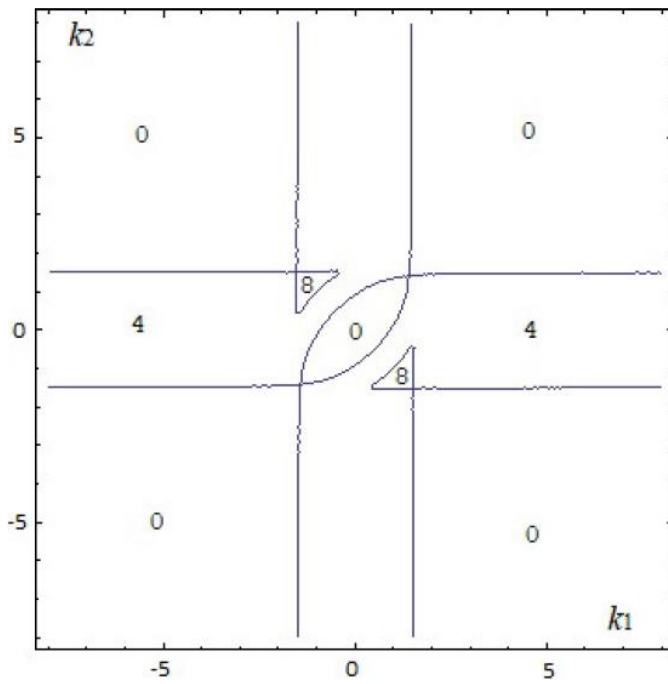
$$\begin{aligned} p_{2,0} &= 4096(k_1^2 + 4)(k_2^2 + 4), \\ p_{2,1} &= -2048((11k_2^2 + 34)k_1^2 + 34k_2^2 + 96)\dot{\varphi}, \\ p_{2,2} &= 128[k_2(34k_2^2 + 161)k_1^3 + 460\dot{\varphi}^2 + 22)k_1^2 + \\ &+ 2((201\dot{\varphi}^2 - 7)k_2^2 + k_2(161k_2^2 + 744)k_1 + \\ &+ 576(3\dot{\varphi}^2 + 1) + k_2^2(920\dot{\varphi}^2 + 44)], \\ p_{2,3} &= -32\dot{\varphi}[k_2(736k_2^2 + 2659)k_1^3 + \\ &+ 2((976\dot{\varphi}^2 - 53)k_2^2 + 36(43\dot{\varphi}^2 + 13))k_1^2 + \\ &+ k_2(2659k_2^2 + 8496)k_1 + 72((43\dot{\varphi}^2 + 13)k_2^2 + 48\dot{\varphi}^2 + 72)], \\ p_{2,4} &= (256k_2^4 + 2912k_2^2 - 4523)k_1^4 + 4k_2(16(828\dot{\varphi}^2 - 77)k_2^2 + \\ &+ 35008\dot{\varphi}^2 - 1703)k_1^3 + 2(1456k_2^4 + (21248\dot{\varphi}^4 + 1024\dot{\varphi}^2 + 9423)k_2^2 + \\ &+ 144(144\dot{\varphi}^4 + 171\dot{\varphi}^2 - 91))k_1^2 + 4k_2((35008\dot{\varphi}^2 - 1703)k_2^2 + \\ &+ 144(509\dot{\varphi}^2 + 77))k_1 - 4523k_2^4 + 20736(\dot{\varphi}^4 + 6\dot{\varphi}^2 + 1) + \\ &+ 288k_2^2(144\dot{\varphi}^4 + 171\dot{\varphi}^2 - 91), \\ p_{2,5} &= -4\dot{\varphi}[(256k_2^4 + 2272k_2^2 - 3873)k_1^4 + \\ &+ 4k_2(16(248\dot{\varphi}^2 - 67)k_2^2 + 7188\dot{\varphi}^2 - 543)k_1^3 + \\ &+ 2(1136k_2^4 + 3(640\dot{\varphi}^4 + 368\dot{\varphi}^2 + 1431)k_2^2 + \\ &+ 27(32\dot{\varphi}^4 + 152\dot{\varphi}^2 - 227))k_1^2 + \\ &+ 12k_2((2396\dot{\varphi}^2 - 181)k_2^2 + 9(328\dot{\varphi}^2 + 229))k_1 - \\ &+ 3873k_2^4 + 7776(\dot{\varphi}^2 + 1) + 54k_2^2(32\dot{\varphi}^4 + 152\dot{\varphi}^2 - 227)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,6} = & 2[(64k_2^3 - 44k_2)k_1^5 + (128(6\dot{\phi}^2 - 1)k_2^4 + \\
& + 16(322\dot{\phi}^2 - 41)k_2^2 + 207(7 - 47\dot{\phi}^2))k_1^4 + \\
& + 4k_2(16k_2^4 + (5344\dot{\phi}^4 - 2800\dot{\phi}^2 + 350)k_2^2 + \\
& + 9(656\dot{\phi}^4 + 43\dot{\phi}^2 - 84))k_1^3 + \\
& + 2(8(322\dot{\phi}^2 - 41)k_2^4 + 9(64\dot{\phi}^6 + 192\dot{\phi}^4 + 549\dot{\phi}^2 + 175)k_2^2 \\
& + 81(24\dot{\phi}^4 - 92\dot{\phi}^2 - 17))k_1^2 - 4k_2(11k_2^4 - 9(656\dot{\phi}^4 + 43\dot{\phi}^2 - 84)k_2^2 - \\
& - 81(40\dot{\phi}^4 + 116\dot{\phi}^2 + 17))k_1 - 9(23(47\dot{\phi}^2 - 7)k_2^4 - \\
& - 18(24\dot{\phi}^4 - 92\dot{\phi}^2 - 17)k_2^2 - 648\dot{\phi}^2)], \\
p_{2,7} = & -4\dot{\phi}[(64k_2^3 - 84k_2)k_1^5 + (128(2\dot{\phi}^2 - 1)k_2^4 + \\
& + 48(26\dot{\phi}^2 - 7)k_2^2 - 2673\dot{\phi}^2 + 999)k_1^4 + \\
& + 4k_2(16k_2^4 + 6(160\dot{\phi}^4 - 136\dot{\phi}^2 + 35)k_2^2 + \\
& + 27(18\dot{\phi}^4 + 19\dot{\phi}^2 - 18))k_1^3 + \\
& + 6(8(26\dot{\phi}^2 - 7)k_2^4 + 9(8\dot{\phi}^4 + 15\dot{\phi}^2 + 35)k_2^2 - \\
& - 81(3\dot{\phi}^2 + 4))k_1^2 - 12k_2(7k_2^4 - 9(18\dot{\phi}^4 + 19\dot{\phi}^2 - 18)k_2^2 - \\
& - 81(5\dot{\phi}^2 + 4))k_1 - 27k_2^2((99\dot{\phi}^2 - 37)k_2^2 + 4\dot{\phi}^2 + 72)], \\
p_{2,8} = & 4k_1^6(4k_2^2 - 9) + 8k_1^5k_2(8(2\dot{\phi}^2 - 1)k_2^2 - \\
& - 27\dot{\phi}^2 + 18) - 36k_1((6\dot{\phi}^2 - 4)k_2^5 + \\
& + (-81\dot{\phi}^4 + 72\dot{\phi}^2 + 9)k_2^3 - 162\dot{\phi}^2k_2) + \\
& + k_1^4(32(8\dot{\phi}^4 - 8\dot{\phi}^2 + 3)k_2^4 + \\
& + 36(24\dot{\phi}^4 - 8\dot{\phi}^2 - 7)k_2^2 + 81(18\dot{\phi}^2 - 27\dot{\phi}^4 + 1)) + \\
& + 2k_1^2(8k_2^6 + 18(24\dot{\phi}^4 - 8\dot{\phi}^2 - 7)k_2^4 - \\
& - 81(\dot{\phi}^4 - 14\dot{\phi}^2 - 3)k_2^2 - 1458\dot{\phi}^2) - \\
& - 9(4k_2^6 + 9(27\dot{\phi}^4 - 18\dot{\phi}^2 - 1)k_2^4 + 324\dot{\phi}^2k_2^2) + \\
& + 4k_1^3k_2(16(2\dot{\phi}^2 - 1)k_2^4 + \\
& + 36(16\dot{\phi}^6 - 20\dot{\phi}^4 + 7\dot{\phi}^2 + 2)k_2^2 + \\
& + 81(9\dot{\phi}^4 - 8\dot{\phi}^2 - 1)).
\end{aligned}$$

Теперь мы должны проверить как изменяется число стационарных движений при пересечении поверхности (4.6.8). Это можно сделать численно, определив число стационарных решений в одной точке из каждой

области $P_2(k_1, k_2, r_0, \dot{\varphi}) = 0$ в пространстве параметров k_1, k_2, r_0 и $\dot{\varphi}$. Стационарным движениям спутника отвечают только положительные вещественные корни, не превосходящие 1. При вычислении корней уравнения (4.6.5) при значениях параметров из областей с равным числом стационарных решений было получено, что значения корней удовлетворяют указанным выше условиям. Так, например, в области, где существуют 8 действительных корней a_{33} (4 корня x) при $r_0 = 0.5$, $\dot{\varphi} = 1.0$ (рис. 4.10) при $k_1 = 1$ и $k_2 = -1.5$, численно получены следующие положительные корни, не превосходящие 1: $x_1 = 0.0860$, $x_2 = 0.3307$, $x_3 = 0.5279$, $x_4 = 0.7219$; при $r_0 = 1.0$, $\dot{\varphi} = 0.9$ (рис. 4.11), при $k_1 = 1.5$ и $k_2 = -1.2$, также получены 4 положительных корня x , не превосходящих 1: $x_1 = 0.0635$, $x_2 = 0.1295$, $x_3 = 0.9556$, $x_4 = 0.9846$. Численные результаты не означают, что вещественные корни будут положительны и не превышать 1 для всех значений параметров из областей с равным числом действительных корней. Поэтому можно лишь утверждать, что число стационарных движений спутника не превышает число действительных корней из данной области.

На рис. 4.9–4.11 представлены наиболее характерные распределения областей с равным числом действительных корней уравнения (4.6.5) для значений r_0 и $\dot{\varphi}$ в диапазоне от 0.1 до 1. На рисунках показаны области с равным числом действительных корней уравнения (4.6.5) в плоскости (k_1, k_2) (здесь k_1 – горизонтальная ось, а k_2 – вертикальная), которые являются сечениями поверхности $P_2(k_1, k_2, r_0, \dot{\varphi}) = 0$ при фиксированных значениях $r_0 = \text{const}$ и $\dot{\varphi} = \text{const}$. На рисунках указаны области, где существуют 8 и 4 действительных корня a_{33} (16 и 8 стационарных решений) уравнения (4.6.5) и области, где действительных корней не существует.

Рис. 4.9 $r_0 = 0.1$, $\phi = 1.0$ Рис. 4.10 $r_0 = 0.5$, $\phi = 1.0$

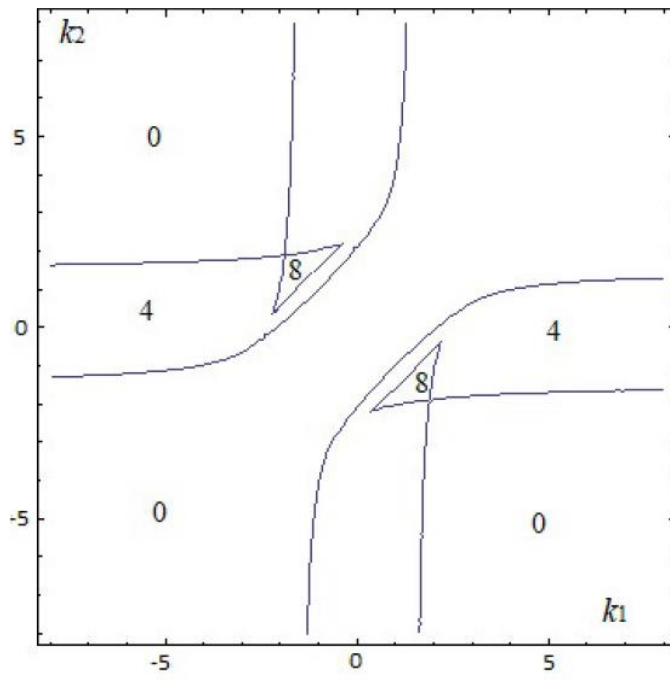


Рис. 4.11 $r_0 = 1.0$, $\dot{\phi} = 0.9$

Глава 5. Динамика системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите

Результаты данной главы опубликованы в работе автора [178].

5.1. Постановка задачи

Данная глава посвящена исследованию динамики системы двух тел (спутник-стабилизатор), соединенных сферическим шарниром, движущихся в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите.

В 1956 году Д.Е. Охоцимский предложил принципиальную составную схему гравитационной системы ориентации спутника и демпфирующего устройства, в соответствии с которой к телу спутника с помощью шарнира P присоединено второе тело, которое назовем стабилизатор (рис 5.1). Системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ образованы главными центральными осями инерции соответственно спутника и стабилизатора. $CX_aY_aZ_a$ – абсолютная система координат с началом в центре масс Земли C , $OXYZ$ – орбитальная система координат. O – центр масс системы двух тел; O_1 и O_2 – центры масс первого и второго тела соответственно.

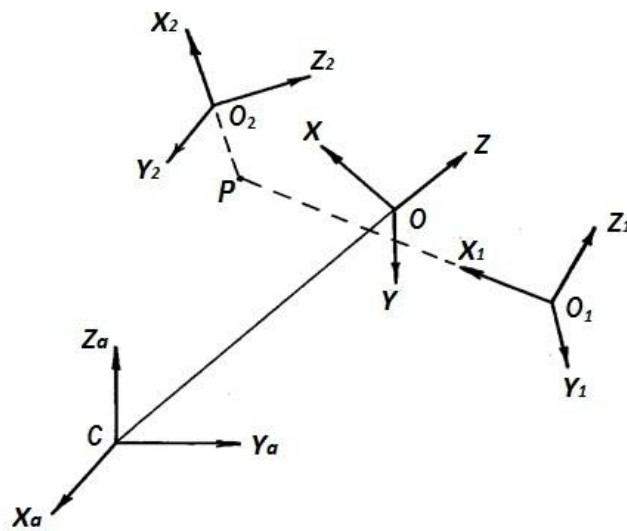


Рис. 5.1 Основные системы координат для схемы спутник-стабилизатор

Стабилизатор предлагалось выполнить в виде двух одинаковых по длине, жестко сцепленных друг с другом стержней с равными грузами на концах. Положение стабилизатора относительно спутника фиксируется центрирующими пружинами. Параметры стабилизатора (длина стержней, вес, угол раствора между стержнями) выбираются таким образом, чтобы при жестком закреплении стабилизатора относительно спутника система спутник-стабилизатор была гравитационно-устойчивой. Предложенная схема спутник-стабилизатор является достаточно простой и в тоже время общей, так как она решает задачу ориентации при любых параметрах спутника. Вес стабилизатора составляет незначительную часть веса спутника.

Общие идеи предложенной Д.Е. Охоцимским гравитационной системы ориентации спутников с использованием составной схемы спутник-стабилизатор с трехосным подвесом изложены в работах [2, 11].

В данной главе рассматривается задача определения пространственных положений равновесия (равновесных ориентаций) системы спутник-стабилизатор в орбитальной системе координат при заданных значениях главных центральных моментов инерции тел системы, получены условия их существования в зависимости от безразмерных параметров системы. Проведен символьно-численный анализ эволюции условий существования различного числа равновесий в пространстве безразмерных параметров задачи.

Рассмотрен случай, когда шарнир P расположен в точке пересечения осей O_1x_1 , O_2x_2 . Определен широкий класс положений равновесия системы двух тел в орбитальной системе координат и получены достаточные условия их устойчивости.

5.2. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о движении системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите.

Для записи уравнений движения спутника будем использовать введенные в главе 1 абсолютную систему координат $CX_aY_aZ_a$ с началом в центре масс Земли C , орбитальную систему координат $OXYZ$ и связанную с каждым телом системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$, оси которых направлены вдоль главных центральных осей тела 1 и тела 2 (рис. 5.1).

Ориентацию системы координат $O_ix_iy_iz_i$ относительно орбитальной системы координат определим с использованием самолетных углов тангажа α_i , рыскания β_i и крена γ_i . Направляющие косинусы осей Ox_i , Oy_i , Oz_i в орбитальной системе координат выражаются через самолетные углы с помощью соотношений (1.10.1). Тогда выражения для кинетической энергии и силовой функции имеют вид [2]

$$2T = (M_1 + M_2)(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + \sum_{i=1}^2 \left[(A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2) + Ms_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i s_i^T \right] - 2Ms_1 \mathbf{S}_1^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{S}_2 s_2^T, \quad (5.2.1)$$

$$U = \mu \frac{M_1 + M_2}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\rho^3} \sum_{i=1}^2 \left[(B_i + C_i - 2A_i) a_{31}^{(i)2} + (C_i + A_i - 2B_i) a_{32}^{(i)2} + (A_i + B_i - 2C_i) a_{33}^{(i)2} - Ms_i s_i^T \right] + \frac{\mu M}{\rho^3} \mathbf{s}_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{s}_2^T + \frac{3}{2} \frac{\mu M}{\rho^3} \left[(a_1 a_{31}^{(1)} + b_1 a_{32}^{(1)} + c_1 a_{33}^{(1)}) - (a_2 a_{31}^{(2)} + b_2 a_{32}^{(2)} + c_2 a_{33}^{(2)}) \right]^2. \quad (5.2.2)$$

Здесь введены обозначения для матриц

$$\mathbf{s}_i = [a_i \ b_i \ c_i], \quad \mathbf{A}_n = [a_{kj}^{(i)}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)],$$

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} 0 & -r_i & q_i \\ r_i & 0 & -p_i \\ -q_i & p_i & 0 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2).$$

Кроме того, в (5.2.1), (5.2.2) M_i – масса, $M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$, A_i, B_i, C_i – главные центральные моменты инерции, a_i, b_i, c_i – координаты шарнира P в системе координат $O_ix_iy_iz_i$ (рис. 5.1), p_i, q_i, r_i – проекции абсолютной

угловой скорости i -го тела на оси системы координат Ox_i, Oy_i, Oz_i . x_0, y_0, z_0 – абсолютные координаты центра масс системы спутник–стабилизатор. Индекс $i = 1, (i = 2)$ относится к телу 1 – спутнику (телу 2, стабилизатору).

Далее рассмотрим случай $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = 0$, когда шарнир P расположен в точке пересечения осей O_1x_1, O_2x_2 . Тогда выражения для кинетической энергии и силовой функции (5.2.1) и (5.2.2) на круговой орбите ($e = 0, \frac{\mu}{\rho^3} = \omega_0^2$) примут более простой вид

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2}[A_1 p_1^2 + (B_1 + Ma_1^2)q_1^2 + (C_1 + Ma_1^2)r_1^2] + \\
 & + \frac{1}{2}[A_2 p_2^2 + (B_2 + Ma_2^2)q_2^2 + (C_2 + Ma_2^2)r_2^2] - \\
 & - Ma_1 a_2 [(r_1 a_{12} - q_1 a_{13})(r_2 b_{12} - q_2 b_{13}) + (r_1 a_{22} - q_1 a_{23})(r_2 b_{22} - q_2 b_{23}) + \\
 & + (r_1 a_{32} - q_1 a_{33})(r_2 b_{32} - q_2 b_{33})],
 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{3}{2}\omega_0^2 [(C_1 - A_1 + Ma_1^2)a_{31}^2 + (C_1 - B_1)a_{32}^2] + \\
 & + \frac{3}{2}\omega_0^2 [(C_2 - A_2 + Ma_2^2)b_{31}^2 + (C_2 - B_2)b_{32}^2] + \\
 & + Ma_1 a_2 \omega_0^2 (a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} - 2a_{31} b_{31}).
 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Используя выражения для кинетической энергии и силовой функции (5.2.3) и (5.2.4), определяющей действие гравитационного поля Земли на систему двух тел, соединенных сферическим шарниром, уравнения движения этой системы можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода [120, 152, 153] в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& A_1 \dot{p}_1 + (C_1 - B_1) q_1 r_1 = 3\omega_0^2 (C_1 - B_1) a_{32} a_{33}, \\
& (B_1 + Ma_1^2) \dot{q}_1 - Ma_1 a_2 (a_{13} b_{13} + a_{23} b_{23} + a_{33} b_{33}) \dot{q}_2 + \\
& + Ma_1 a_2 (a_{13} b_{12} + a_{23} b_{22} + a_{33} b_{32}) \dot{r}_2 + \\
& + Ma_1 a_2 \{a_{13} [r_2 (p_2 b_{13} - r_2 b_{11}) - q_2 (q_2 b_{11} - p_2 b_{12})] + \\
& + a_{23} [r_2 (p_2 b_{23} - r_2 b_{21}) - q_2 (q_2 b_{21} - p_2 b_{22})] + \\
& + a_{33} [r_2 (p_2 b_{33} - r_2 b_{31}) - q_2 (q_2 b_{31} - p_2 b_{32})]\} + \\
& + [(A_1 - C_1) - Ma_1^2] r_1 p_1 = 3\omega_0^2 (A_1 - C_1) a_{33} a_{31} - \\
& - Ma_1 \omega_0^2 [a_2 (a_{13} b_{11} + a_{23} b_{21} + a_{33} b_{31}) + 3a_{33} (a_1 a_{31} - a_2 b_{31})], \\
& (C_1 + Ma_1^2) \dot{r}_1 + Ma_1 a_2 [(a_{12} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{32} b_{33}) \dot{q}_2 - \\
& - (a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{32} b_{32})] \dot{r}_2 - \\
& - Ma_1 a_2 \{a_{12} [r_2 (p_2 b_{13} - r_2 b_{11}) - q_2 (q_2 b_{11} - p_2 b_{12})] + \\
& + a_{22} [r_2 (p_2 b_{23} - r_2 b_{21}) - q_2 (q_2 b_{21} - p_2 b_{22})] + \\
& + a_{32} [r_2 (p_2 b_{33} - r_2 b_{31}) - q_2 (q_2 b_{31} - p_2 b_{32})]\} + \\
& + [(B_1 - A_1) + Ma_1^2] p_1 q_1 = 3\omega_0^2 (B_1 - A_1) a_{31} a_{32} + \\
& + Ma_1 \omega_0^2 [a_2 (a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{32} b_{31}) + 3a_{32} (a_1 a_{31} - a_2 b_{31})], \\
& A_2 \dot{p}_2 + (C_2 - B_2) q_2 r_2 = 3\omega_0^2 (C_2 - B_2) b_{32} b_{33}, \\
& (B_2 + Ma_2^2) \dot{q}_2 - Ma_1 a_2 [(a_{13} b_{13} + a_{23} b_{23} + a_{33} b_{33}) \dot{q}_1 - \\
& - (a_{12} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{32} b_{33}) \dot{r}_1] + Ma_1 a_2 \{b_{13} [r_1 (p_1 a_{13} - r_1 a_{11}) - \\
& - q_1 (q_1 a_{11} - p_1 a_{12})] + b_{23} [r_1 (p_1 a_{23} - r_1 a_{21}) - q_1 (q_1 a_{21} - p_1 a_{22})] + \\
& + b_{33} [r_1 (p_1 a_{33} - r_1 a_{31}) - q_1 (q_1 a_{31} - p_1 a_{32})]\} + \\
& + [(A_2 - C_2) - Ma_2^2] r_2 p_2 + Ma_2 b_1 \{b_{13} [p_1 (q_1 a_{11} - p_1 a_{12}) - \\
& - r_1 (r_1 a_{12} - q_1 a_{13})] + b_{23} [p_1 (q_1 a_{21} - p_1 a_{22}) - r_1 (r_1 a_{22} - q_1 a_{23})] + \\
& + b_{33} [p_1 (q_1 a_{31} - p_1 a_{32}) - r_1 (r_1 a_{32} - q_1 a_{33})]\} = 3\omega_0^2 (A_2 - C_2) b_{33} b_{31} - \\
& - M \omega_0^2 a_2 [a_1 (a_{11} b_{13} + a_{21} b_{23} + a_{31} b_{33}) - 3b_{33} (a_2 b_{31} - a_1 a_{31})], \\
& (C_2 + Ma_2^2) \dot{r}_2 + Ma_1 a_2 [(a_{13} b_{12} + a_{23} b_{22} + a_{33} b_{32}) \dot{q}_1 - \\
& - (a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{32} b_{32}) \dot{r}_1] + [(B_2 - A_2) + Ma_2^2] p_2 q_2 - \\
& - Ma_1 a_2 \{b_{12} [r_1 (p_1 a_{13} - r_1 a_{11}) - q_1 (q_1 a_{11} - p_1 a_{12})] + \\
& + b_{22} [r_1 (p_1 a_{23} - r_1 a_{21}) - q_1 (q_1 a_{21} - p_1 a_{22})] + \\
& + b_{32} [r_1 (p_1 a_{33} - r_1 a_{31}) - q_1 (q_1 a_{31} - p_1 a_{32})]\} = 3\omega_0^2 (B_2 - A_2) b_{31} b_{32} + \\
& + M \omega_0^2 a_2 [a_1 (a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} + a_{31} b_{32}) + 3b_{32} (a_2 b_{31} - a_1 a_{31})].
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
p_1 &= (\dot{\alpha}_1 + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma}_1, \\
q_1 &= (\dot{\alpha}_1 + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta}_1 \sin \gamma_1, \\
r_1 &= (\dot{\alpha}_1 + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta}_1 \cos \gamma_1, \\
p_2 &= (\dot{\alpha}_2 + \omega_0)b_{21} + \dot{\gamma}_2, \\
q_2 &= (\dot{\alpha}_2 + \omega_0)b_{22} + \dot{\beta}_2 \sin \gamma_2, \\
r_2 &= (\dot{\alpha}_2 + \omega_0)b_{23} + \dot{\beta}_2 \cos \gamma_2.
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

В уравнениях (5.2.5), (5.2.6) a_{ij} , b_{ij} направляющие косинусы определяющие ориентацию первого и второго тела, соответственно, в орбитальной системе координат, точкой обозначено дифференцирование по времени t . Эти уравнения достаточно просто выводятся с использованием систем компьютерной алгебры *Mathematica*, *Maple*.

5.3. Положения равновесия

Положив в уравнениях (5.2.5) и (5.2.6) $\alpha_i = \alpha_{i0} = \text{const}$, $\beta_i = \beta_{i0} = \text{const}$, $\gamma_i = \gamma_{i0} = \text{const}$, получим при $A_i \neq B_i \neq C_i$ уравнения [178]

$$\begin{aligned}
a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} &= 0, \\
m_1(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + (b_{21}a_{23} - 3b_{31}a_{33}) &= 0, \\
n_1(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - (b_{21}a_{22} - 3b_{31}a_{32}) &= 0, \\
b_{22}b_{23} - 3b_{32}b_{33} &= 0, \\
m_2(b_{23}b_{21} - 3b_{33}b_{31}) + (a_{21}b_{23} - 3a_{31}b_{33}) &= 0, \\
n_2(b_{21}b_{22} - 3b_{31}b_{32}) - (a_{21}b_{22} - 3a_{31}b_{32}) &= 0,
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

позволяющие определить положения равновесия системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, в орбитальной системе координат.

В уравнениях (5.3.1) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
m_1 &= [(A_1 - C_1) - Ma_1^2]/Ma_1a_2; \quad m_2 = [(A_2 - C_2) - Ma_2^2]/Ma_1a_2; \\
n_1 &= [(B_1 - A_1) - Ma_1^2]/Ma_1a_2; \quad n_2 = [(B_2 - A_2) - Ma_2^2]/Ma_1a_2.
\end{aligned}$$

С учетом выражений для направляющих косинусов (1.10.1) систему (5.3.1) можно рассматривать как систему 6 уравнений с неизвестными $\alpha_{i0}, \beta_{i0}, \gamma_{i0}$ ($i = 1, 2$).

Другой более удобный для исследования способ замыкания уравнений (5.3.1) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов

$$\begin{aligned} a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, & b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2 &= 1, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, & b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 &= 1, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0, & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Уравнения (5.3.1) и (5.3.2) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно 12 направляющих косинусов, определяющих положения равновесия системы двух тел.

Для этой системы уравнений ставится следующая задача: при заданных m_1, m_2, n_1, n_2 требуется определить все 12 направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия системы в орбитальной системе координат. После нахождения направляющих косинусов $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, оставшиеся направляющие косинусы $a_{11}, a_{12}, a_{13}, b_{11}, b_{12}, b_{13}$, могут быть получены из условий ортогональности.

Проведем подробное исследование решений системы алгебраических уравнений (5.3.1), (5.3.2).

Рассмотрим сначала случай равновесных решений, когда конфигурация связки двух тел находится в плоскости орбиты при $\beta_{i0} = \gamma_{i0} = 0$ и $\alpha_{i0} \neq 0$. Этот случай рассматривался в работах [103] и [110].

В плоском случае система (5.3.1), (5.3.2) примет простой вид:

$$\begin{aligned}
a_{33}(m_1 a_{31} + b_{31}) &= 0, \\
b_{33}(m_2 a_{31} + a_{31}) &= 0, \\
a_{11}^2 = \cos^2 \alpha_1, a_{12} &= 0, a_{13}^2 = \sin^2 \alpha_1, \\
a_{21} = 0, a_{22}^2 &= 1, a_{23} = 0, \\
a_{31}^2 = \sin^2 \alpha_1, a_{32} &= 0, a_{33}^2 = \cos^2 \alpha_1, \\
b_{11}^2 = \cos^2 \alpha_2, b_{12} &= 0, b_{13}^2 = \sin^2 \alpha_2, \\
b_{21} = 0, b_{22}^2 &= 1, b_{23} = 0, \\
b_{31}^2 = \sin^2 \alpha_2, b_{32} &= 0, b_{33}^2 = \cos^2 \alpha_2.
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Система (5.3.3) имеет следующие 4 типа решений:

$$\begin{aligned}
\sin \alpha_1 = 0, \sin \alpha_2 &= 0, \\
\cos \alpha_1 = 0, \cos \alpha_2 &= 0, \\
\cos \alpha_1 = 0, (\sin \alpha_1 + m_2 \sin \alpha_2) &= 0, \\
\cos \alpha_2 = 0, (m_1 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

В [110] рассмотрены плоские колебания системы двух тел, определены все положения равновесия (5.3.4). При $|m_1| \geq 1$, $|m_2| \geq 1$ в зависимости от знаков параметров возможно существование 8 физически различных положений равновесия. С использованием интеграла энергии в качестве функции Ляпунова получены достаточные условия устойчивости положений равновесия. Рассмотрена возможность обеспечения асимптотической устойчивости положений равновесия при наличии диссипации. Условия устойчивости решений уравнений динамики относительно уравнений связей определяются в работе [145].

5.4. Условия существования положений равновесия системы двух тел

Для исследования условий существования различного числа положений равновесия системы двух тел рассматривалась возможность применения различных алгоритмов построения базисов Гребнера [138], которые были подробно описан в Главе 3.

Для вычислений базисов Гребнера применялась система компьютерной алгебры Maple 17 [139]. Исследования показали, что прямым способом применением методов построения базисов Гребнера решить систему (5.3.1), (5.3.2) не удастся, ввиду ее большой размерности [178], поэтому был предложен комбинированный алгоритм решения данной задачи.

Рассмотрим второе, третье, пятое и шестое уравнения системы (5.3.1) относительно переменных $a_{21}, a_{31}, b_{21}, b_{31}$. Эти уравнения образуют однородную подсистему

$$\begin{aligned}
 (m_1 a_{23})a_{21} - (3m_1 a_{33})a_{31} + (a_{23})b_{21} - (3a_{33})b_{31} &= 0, \\
 (n_1 a_{22})a_{21} - (3n_1 a_{32})a_{31} - (a_{22})b_{21} + (3a_{32})b_{31} &= 0, \\
 (b_{23})a_{21} - (3b_{33})a_{31} + (m_2 b_{23})b_{21} - (3m_2 b_{33})b_{31} &= 0, \\
 -(b_{22})a_{21} + (3b_{22})a_{31} + (n_2 b_{22})b_{21} - (3n_2 b_{32})b_{31} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Определитель системы (5.4.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Delta = (m_1 n_1 m_2 n_2 + 1)a_{11}b_{11} - (m_1 m_2 + n_1 n_2)(a_{22}b_{33} - a_{32}b_{23})(a_{33}b_{22} - a_{23}b_{32}) + \\
 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)(a_{22}b_{32} - a_{32}b_{22})(a_{23}b_{33} - a_{33}b_{23}).
 \end{aligned}$$

Если $\Delta \neq 0$, то $a_{21} = a_{31} = b_{21} = b_{31} = 0$ и система (5.3.1) разделяется на две подсистемы

$$\begin{aligned}
 a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} &= 0, \\
 a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\
 a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\
 a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0; \\
 b_{22}b_{23} - 3b_{32}b_{33} &= 0, \\
 b_{22}^2 + b_{23}^2 &= 1, \\
 b_{32}^2 + b_{33}^2 &= 1, \\
 b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Решения системы (5.4.2) можно получить с использованием метода построения базиса Гребнера. Выпишем из построенного базиса Гребнера некоторые полиномы, которые зависят от переменных a_{22} и a_{33} : $a_{22}(a_{22}^2 - 1)$,

$a_{33}(a_{33}^2 - 1)$, $a_{22}^2 - a_{33}^2$. Решения системы (5.4.2) из построенного базиса Гребнера можно получить в следующем виде:

$$a_{22}^2 = 1, a_{23} = 0, a_{32} = 0, a_{33}^2 = 1; \quad b_{22}^2 = 1, b_{23} = 0, b_{32} = 0, b_{33}^2 = 1. \quad (5.4.3)$$

$$a_{22} = 0, a_{23}^2 = 1, a_{32}^2 = 1, a_{33} = 0; \quad b_{22} = 0, b_{23}^2 = 1, b_{32}^2 = 1, b_{33} = 0. \quad (5.4.4)$$

Имеем всего 8 различных решений: четыре решения, когда $a_{22}^2 = 1$, $a_{33}^2 = 1$ (решения (5.4.3)) и четыре решения, когда $a_{23}^2 = 1$, $a_{32}^2 = 1$ (решения (5.4.4)).

Условие $\Delta \neq 0$, например, для решения, когда $a_{22} = a_{33} = b_{22} = b_{33} = 1$, выполняются при следующих ограничениях на параметры системы: $m_1 m_2 (n_1 n_2 - 1) + (m_1 - n_1) n_2 + m_2 n_1 \neq 0$. При $\Delta = 0$ получим случай параметрических решений системы (5.4.1) [151].

Рассмотрим теперь первое и второе уравнения системы (5.3.1). Они образуют однородную подсистему относительно переменных a_{23} и a_{33}

$$\begin{aligned} (a_{22})a_{23} - 3(a_{32})a_{33} &= 0, \\ (m_1 a_{21} + b_{21})a_{23} - 3(m_1 a_{31} + b_{31})a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Если определитель системы (5.4.5) $\Delta_1 = a_{22} b_{31} - a_{32} b_{21} - m_1 (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) \neq 0$, то $a_{23} = 0$, $a_{33} = 0$.

Уравнения 4 и 5 системы (5.3.1) так же образуют однородную подсистему относительно переменных b_{23} и b_{33} :

$$\begin{aligned} (b_{22})b_{23} - 3(b_{32})b_{33} &= 0, \\ (m_2 b_{21} + a_{21})b_{23} - 3(m_2 b_{31} + a_{31})b_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Если определитель системы (5.4.6) $\Delta_2 = b_{22} a_{31} - a_{21} b_{32} - m_2 (b_{21} b_{32} - b_{22} b_{31}) \neq 0$, то $b_{23} = 0$, $b_{33} = 0$.

Если определители $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, то $a_{23} = 0$, $a_{33} = 0$, $b_{23} = 0$, $b_{33} = 0$, и система (5.3.1) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned}
n_1(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - (b_{21}a_{22} - 3b_{31}a_{32}) &= 0, \\
n_2(b_{21}b_{22} - 3b_{31}b_{32}) - (a_{21}b_{22} - 3a_{31}b_{32}) &= 0, \\
a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1, & b_{21}^2 + b_{22}^2 &= 1, \\
a_{31}^2 + a_{32}^2 &= 1, & b_{31}^2 + b_{32}^2 &= 1, \\
a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} &= 0, & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

Решения системы (5.4.7) можно получить методом построения базиса Гребнера с использованием опции лексикографического упорядочения по переменным. Выпишем из построенного базиса Гребнера для системы (5.4.7) полином, который зависит только от одной переменной a_{32}

$$P_1(a_{32})P_2(n_1, n_2, a_{32}) = 0. \tag{5.4.8}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
P_1(a_{32}) &= a_{32}(a_{32}^2 - 1), \\
P_2(n_1, n_2, a_{32}) &= 64n_1^2(4n_1n_2 - 1)(n_1n_2 - 1)a_{32}^4 - \\
&- 32(2n_1^2 - 1)(4n_1n_2 - 1)(n_1n_2 - 1)a_{32}^2 + [(4n_1n_2 + 2)^2 - 9(n_1 + n_2)^2].
\end{aligned}$$

Кроме того, из построенного базиса Гребнера следуют соотношения

$$a_{21}^2 = a_{32}^2, \quad a_{22}^2 = a_{31}^2; \quad b_{21}^2 = b_{32}^2, \quad b_{22}^2 = b_{31}^2. \tag{5.4.9}$$

Систему (5.4.7) с учетом соотношений (5.4.9) можно переписать в более простом виде

$$\begin{aligned}
4n_1a_{21}a_{22} - b_{21}a_{22} - 3b_{22}a_{21} &= 0, \\
4n_2b_{21}b_{22} - a_{21}b_{22} - 3a_{22}b_{21} &= 0, \\
a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\
b_{21}^2 + b_{22}^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Решение системы (5.4.10) сводится к решению биквадратного уравнения $P_2(n_1, n_2, a_{32}) = 0$ из (5.4.8).

Используя соотношения (5.4.8) и (5.4.9), выпишем все решения системы (5.4.7).

1. Решения, которые получены из условия $P_1(a_{32}) = 0$ ($a_{32} = 0$), имеют следующий вид:

$$a_{32} = 0, a_{31}^2 = 1, a_{21} = 0, a_{22}^2 = 1; \quad b_{21} = 0, b_{22}^2 = 1, b_{31}^2 = 1, b_{32} = 0. \quad (5.4.11)$$

Решения (5.4.11) существуют при выполнении условий

$$\Delta_1 = (b_{31} - m_1 a_{31}) \neq 0, (|m_1| \neq 1); \Delta_2 = (a_{31} - m_2 b_{31}) \neq 0, (|m_2| \neq 1).$$

2. Решения, которые получены из условия $P_1(a_{32}) = 0$ ($a_{32}^2 = 1$), имеют следующий вид:

$$a_{32}^2 = 1, a_{31} = 0, a_{21}^2 = 1, a_{22} = 0; \quad b_{21}^2 = 1, b_{22} = 0, b_{31} = 0, b_{32}^2 = 1. \quad (5.4.12)$$

Решения (5.4.12) существует при выполнении условий

$$\Delta_1 = (b_{21} + n_1 a_{21}) \neq 0, (|n_1| \neq 1); \Delta_2 = (a_{21} + n_2 b_{21}) \neq 0, (|n_2| \neq 1).$$

3. В третьем случае ($P_2(n_1, n_2, a_{32}) = 0$) система (5.4.7) имеет следующие решения при $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_{32}^2 &= \frac{(2n_1^2 - 1)}{4n_1^2} \pm \frac{(8n_1^3 n_2 - 5n_1(n_1 + n_2) + 2)\sqrt{(4n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 1)}}{8n_1^2(4n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 1)}, \\ a_{31}^2 &= 1 - a_{32}^2, \quad a_{33} = 0; \quad a_{21}^2 = a_{32}^2, \quad a_{22}^2 = a_{31}^2, \quad a_{23} = 0; \\ b_{32}^2 &= \frac{(2n_2^2 - 1)}{4n_2^2} \pm \frac{(8n_2^3 n_1 - 5n_2(n_1 + n_2) + 2)\sqrt{(4n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 1)}}{8n_2^2(4n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 1)}, \\ b_{31}^2 &= 1 - b_{32}^2, \quad b_{33} = 0; \quad b_{21}^2 = b_{32}^2, \quad b_{22}^2 = b_{31}^2, \quad b_{23} = 0. \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Решения (5.4.13) существуют при выполнении условий $n_1 n_2 < 1/4$, $n_1 n_2 > 1$.

Далее, аналогично предыдущему случаю, рассмотрим первое и третье уравнения системы (5.3.1) относительно переменных a_{22} , a_{32} и четвертое и шестое уравнения системы (5.3.1) относительно переменных b_{22} и b_{32} .

Если определитель первой подсистемы относительно переменных a_{22} и a_{32}

$$\Delta_3 = b_{21} a_{33} - a_{23} b_{31} + n_1 (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) \neq 0, \quad \text{то} \quad a_{22} = 0, \quad a_{32} = 0. \quad \text{Если}$$

определитель второй подсистемы относительно переменных b_{22} и b_{32}

$$\Delta_4 = a_{21} b_{33} - b_{23} a_{31} + n_2 (b_{23} b_{31} - b_{21} b_{33}) \neq 0, \quad \text{то} \quad b_{22} = 0, \quad b_{32} = 0.$$

Если определители $\Delta_3 \neq 0$ и $\Delta_4 \neq 0$, то $a_{22} = 0$, $a_{32} = 0$, $b_{22} = 0$,

$b_{32} = 0$ и тогда система (5.3.1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
m_1(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) + (b_{21}a_{23} - 3b_{31}a_{33}) &= 0, \\
m_2(b_{23}b_{21} - 3b_{33}b_{31}) + (a_{21}b_{23} - 3a_{31}b_{33}) &= 0, \\
a_{21}^2 + a_{23}^2 = 1, & \quad b_{21}^2 + b_{23}^2 = 1, \\
a_{31}^2 + a_{33}^2 = 1, & \quad b_{31}^2 + b_{33}^2 = 1, \\
a_{21}a_{31} + a_{23}a_{33} = 0, & \quad b_{21}b_{31} + b_{23}b_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

Решения системы (5.4.14), также как и в предыдущем случае, получим с использованием алгоритма построения базиса Гребнера. Число полиномов в построенном базисе Гребнера равнялось 27. Выпишем из построенного базиса Гребнера для системы (5.4.14) полином, который зависит только от одной переменной a_{33} в виде

$$P_3(a_{33})P_4(m_1, m_2, a_{33}) = 0. \tag{5.4.15}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
P_3(a_{33}) &= a_{33}(a_{33}^2 - 1), \\
P_4(m_1, m_2, a_{33}) &= 256m_1^2(2m_1m_2 + 1)^2 a_{33}^4 - \\
&- 8(2m_1m_2 + 1)(64m_1^3m_2 + 32m_1(m_1 - m_2) - 25)a_{33}^2 + \\
&+ [(8m_1m_2 - 5)^2 - 36(m_1 - m_2)^2].
\end{aligned}$$

Кроме того, из построенного базиса Гребнера следуют соотношения

$$a_{21}^2 = a_{33}^2, \quad a_{23}^2 = a_{31}^2; \quad b_{21}^2 = b_{33}^2, \quad b_{23}^2 = b_{31}^2. \tag{5.4.16}$$

Используя соотношения (5.4.15) и (5.4.16), выпишем все решения системы (5.4.14):

4. Решения, которые получены из условия $P_3(a_{33}) = 0$ ($a_{33} = 0$), имеют следующий вид:

$$a_{33} = 0, \quad a_{31}^2 = 1, \quad a_{21} = 0, \quad a_{23}^2 = 1; \quad b_{21} = 0, \quad b_{23}^2 = 1, \quad b_{31}^2 = 1, \quad b_{33} = 0. \tag{5.4.17}$$

Эти решения существуют при выполнении условий

$$\Delta_3 = (b_{31} - n_1 a_{31}) \neq 0, (|n_1| \neq 1); \quad \Delta_4 = (a_{31} - n_2 b_{31}) \neq 0, (|n_2| \neq 1).$$

5. Решения, которые получены из условия $P_3(a_{33}) = 0$ ($a_{33}^2 = 1$) имеют вид

$$a_{33}^2 = 1, \quad a_{31} = 0, \quad a_{21}^2 = 1, \quad a_{23} = 0; \quad b_{21}^2 = 1, \quad b_{23} = 0, \quad b_{31} = 0, \quad b_{32}^2 = 1. \tag{5.4.18}$$

Эти решения существуют при выполнении условий

$$\Delta_3 = (b_{21} + n_1 a_{21}) \neq 0, (|n_1| \neq 1); \quad \Delta_4 = (a_{21} - n_2 b_{21}) \neq 0, (|n_2| \neq 1).$$

б. В случае, когда $P_4(m_1, m_2, a_{33}) = 0$, система (5.4.14) имеет следующие решения при $\Delta_3 \neq 0, \Delta_4 \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_{33}^2 &= \frac{1}{2} - \frac{32m_1 m_2 + 25}{64m_1^2(2m_1 m_2 + 1)} \pm \frac{(8m_1^2 - 5)\sqrt{64m_1 m_2(m_1 m_2 + 1) + 25}}{64m_1^2(2m_1 m_2 + 1)}, \\ a_{31}^2 &= 1 - a_{33}^2, \quad a_{32} = 0; \quad a_{21}^2 = a_{33}^2, \quad a_{23}^2 = a_{31}^2, \quad a_{22} = 0; \\ b_{33}^2 &= \frac{1}{2} - \frac{32m_1 m_2 + 25}{64m_2^2(2m_1 m_2 + 1)} \pm \frac{(8m_2^2 - 5)\sqrt{64m_1 m_2(m_1 m_2 + 1) + 25}}{64m_2^2(2m_1 m_2 + 1)}, \\ b_{31}^2 &= 1 - b_{33}^2, \quad b_{32} = 0; \quad b_{21}^2 = b_{33}^2, \quad b_{23}^2 = b_{31}^2, \quad b_{22} = 0. \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Выражение $64m_1 m_2(m_1 m_2 + 1) + 25$ неотрицательно для любых m_1, m_2 .

Таким образом, мы получили для общего случая семейства равновесных решений (5.4.3), (5.4.4), (5.4.11), (5.4.12), (5.4.13), (5.4.17), (5.4.18), (5.4.19) исходной системы 12 алгебраических уравнений (5.3.1), и (5.3.2), при ограничениях $\Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0, \Delta_4 \neq 0$. Условия выполнения данных ограничений можно проверить численно для каждого набора параметров системы.

В заключение данного параграфа следует отметить, что комбинация методов компьютерной и линейной алгебры позволяет провести исследование широкого класса равновесных решений системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите при определенных ограничениях на параметры задачи.

На основании полученных результатов с использованием символьных методов показано, что на круговой орбите могут существовать как плоские так и пространственные конфигурации системы двух тел, находящихся в положении равновесия.

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Разработаны аналитический и символьно-численные методы определения всех положений равновесия спутника-гиростата для заданных значений параметров задачи. На основе предложенных методов решена прямая задачи о положениях равновесия спутника-гиростата в общем случае для произвольных значений инерционных параметров и вектора гиростатического момента. Выполнено детальное численное исследование эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия. Определены значения бифуркационных параметров, при которых происходит изменение областей с равным числом положений равновесия. Проведен численно-аналитический анализ достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника-гиростата.

2. Разработан аналитический метод определения положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата и исследования их устойчивости. На основе данного метода получено решение задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника-гиростата для произвольных значений вектора гиростатического момента и выполнен анализ достаточных условий устойчивости найденных положений равновесия.

3. Разработан символьно-аналитический метод определения положений равновесия спутника-гиростата в случаях, когда вектор гиростатического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей. Выполнено детальное аналитическое исследование положений равновесия спутника-гиростата и эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия.

4. На основе символьно-аналитических методов определения всех положений равновесия спутника-гиростата выполнено полное решение задачи о положениях равновесия спутника–твёрдого тела на круговой орбите под

действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае для произвольных значений инерционных параметров и вектора аэродинамического момента. Проведено детальное численное исследование эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия. Определены значения бифуркационных параметров, при которых происходит изменение областей с равным числом положений равновесия. Проведен численно-аналитический анализ достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника.

5. Разработан аналитический метод определения положений равновесия осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического момента и исследования их устойчивости, на основе которого выполнено решение задачи о положениях равновесия осесимметричного спутника на круговой орбите для произвольных значений вектора аэродинамического момента и проведен анализ достаточных условий устойчивости найденных положений равновесия.

6. Разработан символьно-аналитический метод определения положений равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического момента в случаях, когда вектор аэродинамического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и не совпадает ни с одной из этих осей. Проведено детальное аналитическое исследование положений равновесия спутника и эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия.

7. Разработаны символьно-аналитические методы решения прямой задачи о положениях равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного момента в связанной со спутником системе координат. Проведено детальное аналитическое исследование положений равновесия спутника и эволюции изменения областей с равным числом положений равновесия. Определены значения бифуркационных параметров, при которых происходит изменение областей с равным числом положений равновесия.

8. Разработан метод исследования положений равновесия спутника, на который, кроме гравитационного момента действует активный управляющий момент, зависящий от проекций угловой скорости спутника. Выполнен анализ условий асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия и численное исследование переходных процессов пространственных колебаний спутника при различных параметрах управления.

9. Разработан символьно-аналитический метод решения задачи о стационарных движениях осесимметричного спутника на круговой орбите при действии гравитационного момента и активного управляющего момента. Решена задача определения всех стационарных движений спутника для заданных значений параметров системы и проведен анализ эволюции изменения областей с равным числом стационарных движений спутника.

10. Разработан комбинированный символьно-аналитический алгоритм определения равновесных стационарных конфигураций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, в центральном гравитационном поле на круговой орбите. Найдены и исследованы новые классы пространственных равновесных решений задачи и получены условия их существования в зависимости от безразмерных параметров системы. Определены значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия системы спутник-стабилизатор.

На основе полученных в работе результатов можно сделать следующие выводы:

1. Разработанные в диссертации символьно-численные методы дают в сочетании с теоремами Ляпунова и Рауса сравнительно простые и эффективные алгоритмы исследования положений равновесия спутника и их устойчивости на круговой орбите при действии гравитационного, гиросtatического, аэродинамического, постоянного и активного управляющего моментов.

2. Использование маховиков, влияние аэродинамических и постоянных моментов в системах пассивной стабилизации дает возможность

соответствующим подбором параметров получить более широкий диапазон устойчивых стационарных движений, чем для спутника-твердого тела.

3. Применение активного управляющего момента, зависящего от проекций угловой скорости, позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость положений равновесия гравитационно-ориентированного спутника на круговой орбите.

4. Использование активных управляющих моментов позволяет обеспечить стационарные вращения осесимметричного спутника. Получены соотношения, определяющие зависимость изменения ориентации оси симметрии спутника в орбитальной системе координат от параметров управляющего момента для широкого диапазона значений.

5. Составная схема спутник-стабилизатор, состоящая из двух соединенных сферическим шарниром тел, позволяет решать задачу ориентации при любых параметрах спутника и обеспечить гравитационно-устойчивые пространственные конфигурации системы.

Основные результаты диссертации опубликованы в 46 печатных работах, из них 22 статьи в рецензируемых журналах и изданиях [157–178] рекомендованных ВАК РФ, среди которых 20 публикаций в изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и Web of Science, 8 препринтов [179–186] и 16 докладов и тезисов докладов.

Список литературы

1. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. Вычисл. Центр АН СССР. – М.:, 1967.– 141 с.
2. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Серия «Исследование космического пространства». Т. 11. – М.: ВИНТИ, 1978. – 224 с.
3. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 396 с.
4. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. – М.: Наука, 1974. –598 с.
5. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция движения твердого тела относительно центра масс. – М. Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015.– 308 с.
6. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Иванов Д.С. Магнитные системы ориентации малых спутников. — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2016. –366 с
7. Морозов В.М. Устойчивость движения космических аппаратов. Итоги науки и техники. Сер. «Общая механика». – М.: ВИНТИ АН СССР, 1971. – С. 5-83.
8. Белецкий В.В. О либрации спутника // Искусственные спутники Земли. 1959. Вып. 3. – С. 13-31.
9. Sarychev V.A. Asymptotically Stable Stationary Rotational Motions of a Satellite // Proc. of the 1st IFAC Symposium on Automatic Control in Space. New York. Plenum Press. 1966. P. 277–286.
10. Likins P.W., Roberson R.E. Uniqueness of Equilibrium Attitudes for Earth-Pointing Satellites // J. Astronaut Sci. 1966. – Vol. 13, No. 2. – P. 87–88.

11. Охоцимский Д.Е., Сарычев В.А. Система гравитационной стабилизации искусственных спутников // Сб. «Искусств. Спутники Земли». – М.: изд. АН СССР, 1963. – №16. – С.5–9.
12. Соколов Л.В. Магнитный демпфер для системы гравитационной ориентации // Сб. «Управление в пространстве». Т.1. – М.: Наука, 1973. – С. 174–179.
13. Садов Ю.А. Периодические движения спутника с магнитным демпфером в плоскости круговой орбиты // Космические исследования. – 1969. – Т.7, №1. – 51-60.
14. Садов Ю.А. Быстрое вращение спутника с магнитным демпфером. 1. Движение демпфера // Космические исследования. – 1970. – Т. 8, №4. – С.547-556.
15. Садов Ю.А. Быстрое вращение спутника с магнитным демпфером. 2. Движение вектора кинетического момента в консервативном приближении // Космические исследования. – 1974.– Т.12, № 4.– С.518-526.
16. Садов Ю.А. Быстрое вращение спутника с магнитным демпфером. 3. Учет изменений состояния демпфера // Космические исследования. – 1978.– Т.16, №3. – С. 345-352.
17. Садов Ю.А. Быстрое вращение спутника с магнитным демпфером. 4. Диссипативная эволюция. Резонансные эффекты // Космические исследования. – 1986. – Т.24, №4. – С. 553-563.
18. Сарычев В.А., Пеньков В.И., Овчинников М.Ю. Математическая модель гистерезиса, основанная на магнитомеханической аналогии // Математическое моделирование. – 1989.– Т.1, №4. – С.122-133.
19. Сарычев В.А., Пеньков В.И., Овчинников М.Ю., Герман А.Д. Движение гравитационно-ориентированного спутника с гистерезисными стержнями в плоскости полярной орбиты // Космические исследования. – 1988. – Т.26, №5. – С. 654-668.
20. Сарычев В.А., Пеньков В.И., Овчинников М.Ю., Герман А.Д. Влияние гистерезисного стержня, установленного вдоль оси наибольшего момента

- инерции спутника, на его движение в режиме гравитационной ориентации // *Космические исследования*. – 1989. – Т.27, №6. – С. 849-860.
21. Герман А.Д., Овчинников М.Ю., Сарычев В.А., Пеньков В.И. Нерезонансные движения спутника с гистерезисными стержнями в режиме гравитационной ориентации // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1989. – №6. – С.3-12.
22. Ovchinnikov M. Methods to obtain the principal parameters of simple attitude control systems for small satellites // *Acta Astronautica*. – 1998. – Vol.43, No.11-12. – P.597-605.
23. Сарычев В.А. Условия устойчивости системы гравитационной стабилизации спутников с гиродемпфированием // *Astronautica Acta*. – 1969. – Vol.14, No.4. – P. 299-310.
24. Сарычев В.А., Луканин К.В., Мирер С.А. Оптимальные параметры гравитационно-гироскопических систем ориентации спутников // *Космические исследования*. – 1975. – Т.13, №3. – С.311-321.
25. Sarychev V.A., Mirer S.A. The use of gyrodampers in passive satellite attitude control systems // *J. of the Astronaut. Sci.* – 1977. – Vol.25, No.3. – P.179-205.
26. Сарычев В.А. Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника // *Космические исследования*. – 1965. – Т.3, №5. – С.667-673.
27. Roberson R.E. Torques on a satellite vehicle from internal moving parts // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1958. – Vol.25. – P. 196-200.
28. Huston R.L. Gyroscopic stabilization of space vehicles // *AIAA J.* – 1963. – Vol.1, No.7. – P. 1694-1696.
29. Huston R.L. Gyroscopic attitude stabilization // *J. of Spacecraft and Rockets*. – 1964. – Vol.1, No.5. – P.562-563.
30. Landon V.D., Stewart B. Nutational stability of an axisymmetric body containing a rotor // *J. of Spacecraft and Rockets*. – 1964. Vol.1, No.6. P.682-684.
31. Морозов В.М. Об устойчивости движений гиростата под действием гравитационных, магнитных и аэродинамических моментов // *Космические исследования*. – 1967. – Т. 5, № 5. – С. 727-732.

32. Roberson R.E. Equilibria of orbiting gyrostats // J. Astronaut. Sci. – 1968. – Vol.15, No. 5. – P. 242-248.
33. Roberson R.E. Rotors in gravity-stabilized satellites // Evolut. attitude et stabilization satellites. Colloq. int., Paris, 1968, P. 319-348.
34. Roberson R.E. Stability of orbiting gyrostats in the elementary cases // Ing. - Arch. – 1970. – Vol.39, No. 5. – P. 317-329.
35. Roberson R.E., Hooker W.W. Gravitational equilibria of a rigid body containing symmetric rotors // Proc. 17-th Internat. Astronaut. Congr., Madrid, 1966, 1967, Vol.4. P. 203-210.
36. Роберсон Р.Е., Сарычев В.А., Яковлев Н.И. Динамика гравитационно-ориентированного спутника с маховиками // Космические исследования. – 1975. – Т. 13, № 5. – С. 619-631.
37. Сарычев В.А., Яковлев Н.И. Исследование динамики гравитационно-ориентированного спутника с маховиками // Препринт ИПМ АН СССР. – 1973. – №32. – 73 с.
38. Степанов С.Я. О множестве стационарных движений спутника-гиростата в центральном ньютоновом поле и их устойчивость // ПММ. – 1969. – Т. 33, № 4. – С. 737-744.
39. Longman R.W. Gravity-Gradient Stabilization of Gyrostat Satellites with Rotor Axes in Principal Planes // Celestial Mechanics. – 1971. – Vol. 3, No. 2. – P. 169-188.
40. Анчев А.А. О стабилизации относительного равновесия спутника с маховиками // Космические исследования. – 1966. – Т. 4, № 2. – С. 192-202.
41. Румянцев В.В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника с роторами // Вестник Моск. университета. Сер. мат. мех. – 1970.– №2. – С.83-96.
42. Сарычев В.А., Мирер С.А., Дегтярев А.А. Динамика спутника-гиростата с вектором гиростатического момента в главной плоскости инерции // Космические исследования. – 2008. – Т. 46, № 1. – С. 61-74.

43. Сарычев В.А., Мирер С.А., Дегтярев А.А. Динамика спутника-гиростата с одной ненулевой компонентой вектора гиростатического момента. // Космические исследования. – 2005. – Т. 43. № 4. С. 283-294.
44. Sarychev V.A., Mirer S.A. Relative equilibria of a gyrostatt satellite with internal angular momentum along a principal axis // Acta Astronautica. – 2001. – Vol.49, No. 11. – P. 641-644.
45. Longman R.W. Stable tumbling motions of a dual-spin satellite subject to gravitational torques // AIAA Journal. – 1973. – Vol.11, No. 7. – P. 916-921.
46. Longman R.W. The equilibria of orbiting gyrostatts with internal angular momenta along principal axes // Proc. of the Symposium on Gravity Gradient Attitude Stabilization, El Segundo, Calif., 1968.
47. Longman R.W., Hagedorn P., Beck A. Stabilization due to gyroscopic coupling in dual-spin satellites subject to gravitational torques // Celestial Mechanics. – 1981. – Vol. 25, № 4. – P. 353-373.
48. Сарычев В.А. Динамика осесимметричного спутника-гиростата под действием гравитационного момента // Космические исследования. – 2010. – Т. 48, №2. – С. 192-197.
49. Banshchikov A.M. Research on the stability of relative equilibria of oblate axisymmetric gyrostatt by means of symbolic-numerical modelling // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). – Vol. 8136. – P. 61–71. Springer International Publishing, Cham Heidelberg, 2015.
50. Чайкин С.В., Банщиков А.В. О гироскопической стабилизации относительных равновесий орбитального осесимметричного гиростата // Математическое моделирование. – 2013. –Т. 25, №5.– С. 109–122.
51. Морозов В.М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов // Космические исследования. – 1969. – Т. 7, № 3. – С. 395-401.
52. Сарычев В.А., Бирюкова М.П., Гутник С.А. О положениях равновесия спутника-гиростата на круговой орбите // Космические исследования. – 1982. – Т.20, №6. – С. 837-847.

53. Яковлев Н.И. О динамике гравитационно ориентированного спутника-гиростата с демпфирующим маховиком // Космические исследования. – 1977. – Т.15, №4. – С. 511-516.
54. Сазонов В.В. Периодические колебания спутника-гиростата относительно центра масс на круговой орбите // Космические исследования. – 1983. – Т.21, №6. – С. 838-850.
55. Сазонов В.В. Периодические колебания спутника-гиростата относительно центра масс на эллиптической орбите // Космические исследования. – 1984. – Т.22, №2. – С. 147-158.
56. Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические колебания спутника-гиростата с большим собственным кинетическим моментом // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – №1. – С. 3-12.
57. Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические колебания спутника-гиростата относительно центра масс под действием аэродинамического и гравитационного моментов // Космические исследования. – 1988. – Т.26, №4. – С. 492-507.
58. Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические колебания спутника-гиростата относительно центра масс под действием магнитного и гравитационного моментов // Космические исследования. – 1990. – Т.28, №1. – С. 22-34.
59. Воронин А.А. Задача аэрогироскопической ориентации искусственных спутников Земли // Космические исследования. – 1997. – Т.35, №4. – С.405-413.
60. Воронин А.А. О возможности трехосной магнитогироскопической ориентации искусственных спутников Земли // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1997. – №5. – С. 3-14.
61. Сазонов В.В. Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // ПММ. – 1983. – Т.47, №5. – С. 707-719.

62. Анчев А. Лилов Л. Равновесни ориентации на спътник–жиростат по кругова орбита при фиксирани вътрешни движения // Теоретична и приложна механика. – 1978. – Т. 9, № 4. – С. 9-29.
63. Яковлев Н.И. О положениях относительного равновесия гиростата // Препринт ИПМ АН СССР. – 1976.– №78.
64. Longman R.W. Attitude equilibria and stability of arbitrary gyrostat satellites under gravitational torques // J. Brit. Interplanet. Soc. – 1975. – Vol.28, No.1. – P. 38-46.
65. De Bra D.B. The effect of aerodynamic forces on satellite attitude // Journal of the Astronautical Sci. – 1959. – Vol. 6, No. 3. – P. 40-45.
66. Roberson R.E. Attitude control of a satellite - an outline of the problems // Proc. of the 7th International Astronautical Congress. 1958. P. 317-339.
67. Schrello D.M. Aerodynamic influences on satellite librations // ARS Journal. – 1961. – Vol. 31, № 3. – P. 442-444.
68. Schrello D.M. Dynamic stability of aerodynamically responsive satellites // Journal of Aerospace Sci. – 1962. – Vol. 29, No. 10. – P. 1145-1155, 1163.
69. Wall J.K. The feasibility of aerodynamic attitude stabilization of a satellite vehicle // American Rocket Soc. Preprints. – 1959. – No. 787.
70. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
71. Морозов В.М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов // Вестник МГУ. Сер. математики, механики. – 1968. – № 6. – С. 109-111.
72. Сарычев В.А. Влияние сопротивления атмосферы на систему гравитационной стабилизации искусственных спутников Земли // Космические исследования. – 1964. – Т. 2, № 1. – С. 23-32.
73. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Динамика спутника с пассивной аэродинамической системой ориентации // Космические исследования. – 1994. – Т. 32, № 6. – С. 561-575.

74. Meirovitch L., Wallace F.B., Jr. On the effect of aerodynamic and gravitational torques on the attitude stability of satellites // AIAA Journal. – 1966. – Vol. 4, No. 12. – P. 2196-2202.
75. Modi V.J., Shrivastava S.K. On the limiting regular stability and periodic solutions of a gravity oriented system in the presence of the atmosphere // Canadian Aeronautics and Space Institute Transactions. – 1972. – Vol. 5, No.1. – P. 5-10.
76. Sarychev V.A. Dynamics of a satellite gravitational stabilization system with consideration of atmosphere resistance // Proc. of the 11th International Congress on Applied Mechanics. – 1965. P. 429-435.
77. Frik M.A. Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques // AIAA Journal. – 1970. – Vol. 8, No. 10. – P. 1780-1785.
78. Nurre G.S. Effects of aerodynamic torques on an asymmetric, gravity stabilized satellite // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1968. – Vol. 5, No. 9. – P. 1046-1050.
79. Сазонов В.В., Петров А.Л. Эволюция режима гравитационной ориентации вращающегося спутника под действием непотенциального аэродинамического момента // Космические исследования. – 1987. – Т. 25, № 4. – С.508-522.
80. Сазонов В.В. Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника // Космические исследования. – 1989. – Т. 27, № 6. – С.836-848.
81. Драновский В.И., Зигунов В.Н., Новоселова Н.Г., Соколов Л.В. Математическая нелинейная модель гироаэродинамической системы ориентации // Сб. "Космическая стрела. Оптические исследования атмосферы". – М.: Наука. 1974. – С. 47-54.
82. Сарычев В.А., Мирер С.А., Златоустов В.А. Оптимальные параметры аэрогироскопической системы ориентации спутников // Космические исследования. – 1984. – Т. 22, № 3. – С. 369-380.

83. Сарычев В.А., Садов Ю.А. Анализ динамики спутника с гироаэродинамической системой ориентации // Сб. "Космическая стрела. Оптические исследования атмосферы". – М.: Наука, 1974. – С. 71-88.
84. Sarychev V.A. Aerodynamic stabilization system of the satellite // Proc. of the International Conference on Attitude Changes and Stabilization of Satellites. 1968. P. 177-183. Paris, France.
85. Kumar R.R., Mazanek D.D., Heck M.L. Parametric and classical resonance in passive satellite aerostabilization // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1996. – Vol. 33, No. 2. – P. 228-234.
86. Pacini L., Skillman D. A passive aerodynamically stabilized satellite for low Earth orbit // AAS Paper 95-173. – Feb. 1995. – P. 625-630.
87. Kumar R.R., Mazanek D.D., Heck M.L. Simulation and Shuttle Hitchhiker validation of passive satellite aerostabilization // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1995. – Vol. 32, № 5. – P. 806-811.
88. Shrivastava S.K., Modi V.J. Satellite attitude dynamics and control in the presence of environmental torques – a Brief survey // J. Guid., Contr. and Dyn. – 1983. – Vol. 6. – P. 461-471.
89. Гречко Г.М., Сарычев В.А., Легостаев В.П., Сазонов В.В., Гансвинд И.Н. Гравитационная ориентация орбитального комплекса "Салют-6-Союз" // Космические исследования. – 1985. – Т. 23, № 5. – С. 659-675.
90. Sarychev V.A., Legostaev V.P., Sazonov V.V., Belyaev M.Yu., Gansvind I.N., Tyun T.N. The passive attitude motion of the orbital stations Salyut-6 and Salyut-7 // Acta Astronautica. – 1987. – Vol. 15, № 9. – P. 635-640.
91. Sarychev V.A., Sazonov V.V. Gravity gradient stabilization of large space stations // Acta Astronautica. – 1981. – Vol. 8. No. 5-6. – P. 549-573.
92. Sarychev V.A., Sazonov V.V. Gravity gradient stabilization of the Salyut-Souz orbital complex // Acta Astronautica. – 1984. – V. 11, No. 7-8. – P. 435-447.
93. Нейштадт И.А., Сазонов В.В. Периодические колебания оси симметрии спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов

- на круговой орбите // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 2003. – № 4. – С.20-35.
94. Бозюков А.Ю., Сазонов В.В. Об одном способе гравитационной ориентации вращающегося спутника // Космические исследования. – 2006. – Т. 44, № 6. – С.541-552.
95. Бозюков А.Ю., Сазонов В.В. Исследование эволюции режима закрутки спутника в плоскости орбиты // Космические исследования. – 2007. – Т. 45, №2. – С.150-164.
96. Бабкин Е.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М. Неуправляемое вращательное движение орбитальной станции МИР в последние месяцы полета // Космические исследования. – 2003. – Т. 41, № 3. – С.285-294.
97. Сазонов В.В. Одноосная аэродинамическая ориентация искусственных спутников // Космические исследования. – 1985. – Т. 23, № 4. – С.518-529.
98. Кузнецова Е.Ю., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов на круговой орбите // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 2000. – № 2. – С.3-14.
99. Красильников П.С. Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2015. – 528 с.
100. Garber T.B. Influence of Constant Disturbing Torques on the Motion of Gravity Gradient Stabilized Satellites // AIAA J. 1963. Vol. 1, No. 4. – P.968-969.
101. Sarychev V.A., Paglione P., Guerman A. Influence of Constant Torque on Equilibria of a Satellite in a Circular Orbit // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2003. – Vol. 87, No. 3. – P. 219–239.
102. Sarychev V.A., Paglione P., Guerman A.D. Stability of Equilibria for a Satellite Subject to Gravitational and Constant Torques // J. Guidance Control and Dynamics. – 2008. – Vol. 31, № 2. – P. 386-394.

103. Сарычев В.А. Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника // Космические исследования. – 1965, – Т.3, №5. – С. 667-673.
104. Сарычев В.А. Исследование динамики системы гравитационной стабилизации // Сб. «Искусств. Спутники Земли», М., изд. АН СССР. – 1963, №16. – С. 10-33.
105. Сарычев В.А. Упрощение схемы системы гравитационной стабилизации спутника // Космические исследования. – 1964. – Т.2, №1. – С. 33-45.
106. Пеньков В.И., Сарычев В.А. Гравитационная система стабилизации спутников с одностепенным шарнирным подвесом // Космические исследования. – 1977. – Т.15, №4. – С. 499–510.
107. Сарычев В.А., Яковлев Н.И. Оптимальные по быстродействию параметры спутника с двумя стабилизаторами // Космические исследования. – 1977. – Т.15, №3. – С. 352-362.
108. Сарычев В.А., Яковлев Н.И. О стационарных движениях спутника с гироскопом в ньютоновом поле // Изв. АН СССР. МТТ.–1976, №6. С.41-49.
109. Сарычев В.А., Пеньков В.И. О быстродействии гравитационной системы стабилизации спутников с демпфирующей пружиной // Космические исследования. – 1977. – Т.15, №5. – С. 683–689.
110. Сарычев В.А. Положения относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите// Космические исследования. – 1967. – Т.5, №3. – С. 360–364.
111. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников // Космические исследования. – 1976. – Т.14, №2. – С.198–208.
112. Сарычев В.А., Мирер С.А. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник–стабилизатор // Космические исследования. – 1976. – Т.14, №2. – С. 209–219.
113. Sarychev V.A., Mirer S.A., Sazonov V.V. Plane oscillations of a gravitational system satellite-stabilizer with maximal speed of response // Acta Astronautica. – 1976. – Vol.3, No.9–10. – P. 651-669.

114. Сарычев В.А. Положения равновесия системы двух соединенных сферическим шарниром осесимметричных тел на круговой орбите // *Космические исследования*. – 1999. – Т.37, №2. – С.176–181.
115. Zajac E.E. Damping of a gravitationally oriented two-body satellite // *ARS Journal*. – 1962. – Vol.32, No.12. – P. 1871-1875.
116. Сазонов В.В. Гравитационная ориентация искусственных спутников с гироскопами // *Космические исследования*. – 1988.– Т.26, №2. – С. 315-317.
117. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом. // *ДАН СССР*. – 1952. – Т.86, №3. – С. 453-456.
118. Zajac E.E. The Kelvin-Tait-Chetaev theorem and extension // *J. Astronaut. Sci.* – 1964. – Vol. 11, No. – P. 46-49.
119. Longman R.W. Stability analysis of all possible equilibria for gyrostatt satellites under gravitational torques // *AIAA Journal*. – 1972. – Vol.10, No. 6. – P. 800-806.
120. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1990. – 591 с.
121. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений свободных систем // *Космические исследования*. – 1968. – Т.6, №5. – С. 643-648.
122. Анчев А., Румянцев В.В. О динамике и устойчивости гироскопов // *Успехи механики*. – 1979. – Т.2, №3. – С. 3-45.
123. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
124. Маркеев А.П., Сокольский А.Г. К задаче об устойчивости относительного равновесия спутника на круговой орбите // *Космические исследования*. – 1975. – Т.13, №2. –С. 139-146.
125. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских вращений спутника на круговой орбите // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2006.– №4. – С. 63-85.
126. Маркеев А.П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // *Космические исследования*. – 1975. – Т. 13, №3. – С.322-336.

127. Маркеев А.П., Сокольский А.Г. Исследование устойчивости плоских периодических движений спутника на круговой орбите // Изв. АН СССР. МТТ. – 1977. – №4. – С. 46-57.
128. Markeev A.P., Bardin B.S. On stability of planar oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 2003. – Vol.85, No.1. – P. 51-66.
129. Бардин Б.С., Чекин А.М. Об орбитальной устойчивости плоских колебаний спутника на круговой орбите // *Космические исследования*. – 2008. Т.46, №3. – С. 279-288.
130. Холостова О.В. Об устойчивости плоских колебаний спутника на круговой орбите // *Известия РАН. Мех. тв. тела*. – 2008, №2. – С. 27-42.
131. Longman R.W., Roberson R.E. General solution for the equilibria of orbiting gyrostats subject to gravitational torques // *J. Astronaut. Sci.* – 1969. – Vol.16, No.2. – P. 49-58.
132. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматлит, 1961. – 824 с.
133. Anchev A. Equilibrium orientations of symmetric gyrostatt satellites with a specified internal angular momentum // *Bulgarian Academy of Sciences. Theoretical and Applied Mechanics*. – 1973, Year IV. – No.1. – P.85-93.
134. Анчев А. Об устойчивости относительного равновесия спутника с роторами // *Българска академия на науките, Известия на Математическия институт*. – 1968.– Т. 11. – С. 149-158.
135. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
136. <http://www.wolfram.com/mathematica>
137. Мейман Н.Н. Некоторые вопросы расположения корней полиномов // *Успехи мат. наук*. – 1949. – Т. 4, № 6. – С. 154–188.
138. Buchberger B., Theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms // *SIGSAM Bull.* – 1976. – Vol. 10, No. 3. – P. 19-29.
139. Char B.W., Geddes K.O., Gonnet G.H., Monagan M.B., and Watt, S.M., *Maple Reference Manual*. – Waterloo, Canada: Watcom, 1992.

140. Faugere J., Gianni P., Lazard P., and Mora T., Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering // *J. Symbolic Comput.* – 1993. – Vol. 16. – P. 329–344.
141. Collart S., Kalkbrener M., and Mall D., Converting bases with the Gröbner walk // *J. Symbolic Comput.* – 1997. – Vol. 3, No. 4. – P. 465–469.
142. Crespo da Silva M. R. M. Non-linear resonant attitude motions in gravity-stabilized gyrostat satellites // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 1972. – Vol.7, No.6. – P. 621-641.
143. Crespo da Silva M. R. M. Attitude stability of a gravity stabilized gyrostat satellite // *Celest. Mech.* – 1970. – Vol. 2, No 2. – P. 147-165.
144. Гердт В. П., Ширков Д.В., Тарасов О. В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике // *Успехи физических наук.* – 1980. – Т.130, Вып. 1. – С. 113-147.
145. Мухарлямов Р.Г. Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // *Известия РАН. Теория и системы управления.* – 2015. – №1. – С. 15-28.
146. Овчинников М.Ю., Шаргородский В.Д., Пеньков В.И., Мирер С.А., Герман А.Д., Немучинский Р.Б. Наноспутник REFLECTOR. Выбор параметров системы ориентации // *Космические исследования.* – 2007. Т.45, №1. – С. 67-84.
147. Анчев А. Атанасова П., Бонев Б. О положениях равновесия спутника-гиростата на круговой экваториальной орбите и их устойчивости // *Теор. и прилож. мех. БЪЛГ. АН.* – 1970, № 2. – С.91-101.
148. Sarychev V.A., Mirer S.A. Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* – 2000. – Vol. 76, No. 1. – P. 55-68.
149. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A., Duarte E.K. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* – 2007. – Vol.97, № 4. – P.267-287.

150. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A. Equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques with pressure center in a principal plane of inertia // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 2008. Vol. 100, No. 4. – P. 301-318.
151. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
152. Апель П. Теоретическая механика. Т.1-2. – М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.; 487 с.
153. Мухарлямов Р.Г. Уравнения движения механических систем – М.: изд. РУДН, 2001. – 99 с.
154. Rauschenbakh V.V., Ovchinnikov M.Yu., McKenna-Lawlor S. *Essential Space-Flight Dynamics and Magnetospherics*. – Kluwer Academic Publishers, 2002. – 416 p.
155. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли. Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. Т.23. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. – 104 с.
156. Красильников П.С. Вращение твердого тела относительно центра масс в ограниченной задаче трех тел. – М.: МАИ, 2018. – 172 с.
157. Сарычев В.А., Гутник С.А. К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата // *Космические исследования*. – 1984. – Т.22, № 3. – С.323-326.
158. Gutnik S.A. Application of Computer Algebra to Investigation of the Relative Equilibria of a Satellite //In: *Proc. of Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation. ACM ISSAC'93*. – ACM Press, New York, 1993. P. 63-64.
159. Сарычев В.А., Гутник С.А. Равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов // *Космические исследования*. – 1994. – Т. 32, № 4-5. – С. 43-50.
160. Gutnik S.A. Symbolic-numeric investigations for stability analysis of Lagrange systems // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 2001. – Vol.57. – P.211-215.

161. Gutnik S.A. Symbolic-numeric investigation of the aerodynamic forces influence on satellite dynamics // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Heidelberg. – 2011. – Vol. 6885. – P. 192-199.
162. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Космические исследования. – 2012. – Т. 50, № 5. – С. 394-402.
163. Gutnik S.A., Sarychev V.A. Symbolic-Numerical investigation of gyrostat satellite dynamics // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Berlin Heidelberg. – 2013. – Vol. 8136. – P. 169–178.
164. Гутник С.А., Сарычев В.А. Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Положения равновесия и их устойчивость // Прикладная математика механика. – 2014. – Т. 78. Вып. 3. – С. 356-368.
165. Гутник С.А., Сарычев В.А. Символьно - численные методы исследования положений равновесия спутника-гиростата // Программирование. – 2014. – № 3. – С. 49-58.
166. Гутник С.А., Сантуш Л., Сарычев В.А., Силва А. Динамика спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента. Положения равновесия и их устойчивость // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2015. – №3. – С. 142-155.
167. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия // Космические исследования. – 2015. – Т. 53, № 6. – С. 488-496.
168. Gutnik S.A., Guerman A., Sarychev V.A. Application of Computer Algebra Methods to Investigation of Influence of Constant Torque on Stationary Motions of Satellite// Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Cham. – 2015. – Vol. 9301. – P. 198–209.
169. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование

- устойчивости положений равновесия // Космические исследования. – 2016. – Т.54, №5. – С. 415-426.
170. Sarychev V.A., Gutnik S.A. On the Different Types of Equilibria of Satellite Subject to Gravitational and Aerodynamic Torques in a Circular Orbit //Published in: Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems International Conference (Pyatnitskiy's Conference). – 2016. IEEE Xplore.
<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=7532297>
171. Gutnik S.A., Sarychev V.A. A Symbolic investigation of the influence of aerodynamic forces on satellite equilibria // Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Springer. Cham. – 2016. – Vol. 9890. – P. 243–254.
172. Герман А.Д., Гутник С.А., Сарычев В.А. Динамика спутника под действием гравитационного и постоянного моментов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2017. Т. 56, №1. – С. 128-140.
173. Гутник С.А., Сарычев В.А. Применение методов компьютерной алгебры для исследования стационарных движений спутника-гиростата // Программирование. – 2017. – Т. 43, № 2. – С. 35–44.
174. Gutnik S.A., Sarychev V.A. A symbolic study of the satellite dynamics subject to damping torques // Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer, Cham. – 2017. Vol. 10490. – P. 167–182.
175. Sarychev V.A., Gutnik S.A. Satellite dynamics under the influence of gravitational and damping torques //Advances in the Astronautical Sciences, Publisher: Univelt Inc. – 2017, V.161, Article number Code 213319. P. 3-12.
176. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика гравитационно-ориентированного спутника при действии активных демпфирующих моментов // Космические исследования. – 2018. – Т. 56, №1. – С. 77-84.
177. Гутник С.А., Сарычев В.А. Применение методов символьных вычислений для исследования стационарных движений осесимметричного спутника // Программирование. – 2018. – Т. 44, № 2. – С. 94–99.

178. Гутник С.А., Сарычев В.А. Применение методов компьютерной алгебры для исследования динамики системы двух связанных тел на круговой орбите // Программирование. – 2019. – Т. 45, № 2. – С. 32–40.
179. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Исследование положений равновесия и их устойчивости // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2011. – №11. – 28 с.
180. Сарычев В.А., Гутник С.А. Исследование положений равновесия спутника-гиростата // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. – 1990. – №84. – 31 с.
181. Sarychev V.A., Gutnik S.A., Silva A., Santos L. Dynamics of gyrostat satellite subject to gravitational torque. Investigation of equilibria // Preprint Keldysh Institute for Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences. – 2012. – No.63. – 35 p.
182. Sarychev V.A., Gutnik S.A., Silva A., Santos L. Dynamics of gyrostat satellite subject to gravitational torque. Stability analysis // Preprint Keldysh Institute for Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences. – 2013. – No.25. – 36 p.
183. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2014. – № 39. – 36 с.
184. Сарычев В.А., Гутник С.А. Исследование устойчивости положений равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Общий случай // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2015. – № 33. – 25 с.
185. Сарычев В.А., Гутник С.А. Исследование положений равновесия спутника при действии гравитационного и постоянного моментов // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. – 1991. – №71. – 18 с.
186. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2011. – №12. – 32 с.