

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования «Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

Тун Тун Вин

**АНАЛИЗ ДИНАМИКИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С
УПРУГИМИ КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ МАССАМИ**

Специальность 01.02.01. “Теоретическая механика”

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор

МАРКОВ Юрий Георгиевич

Москва 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ УПРУГОЕ-ТВЕРДОЕ ТЕЛО ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС В НЬЮТОНОВСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СИЛ	15
1.1. Вывод уравнений движения системы из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа	15
1.2. Динамика собственных форм колебаний системы при наличии вращательных и центробежных сил инерции	18
1.3. Задача о движении деформируемого спутника на участке разворота	28
1.4. Плоские движения деформируемого спутника в гравитационном поле сил	33
1.5. Анализ динамической системы упругое-твердое тело в режиме переориентации.....	37
Глава 2. ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА (КА) С УПРУГИМИ И ДИССИПАТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В РЕЖИМЕ ОРИЕНТАЦИИ	40
2.1. Уравнения движения деформируемого КА относительно центра масс при наличии гиросtabilизаторов	43
2.2. Уравнения для нормальных координат	44
2.3. Исследование устойчивости режима ориентации КА	48
2.4. Задача переориентации КА при наличии осциллирующего момента от гиродинов	57
Глава 3. ОРБИТАЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕЖЁСТКОГО КА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СИЛ.....	62

3.1. Постановка Задачи	62
3.2. Уравнения поступательно-вращательного движения спутника, при наличии упругих и диссипативных элементов	65
3.3. Устойчивость стационарных движений деформируемого спутника	79
Глава 4. ДОЛГОСРОЧНАЯ МОДЕЛЬ ПАРАМЕТРОВ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ ПВЗ В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ.....	88
4.1. Динамические модели колебаний земного полюса и неравномерности осевого вращения Земли	89
4.2. Применение долгосрочной модели ПВЗ в спутниковой навигации	95
Заключение	101
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	102

Введение

Общая характеристика работы. Данная диссертационная работа посвящена исследованию движения сложных механических систем с упругими и диссипативными элементами относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле сил.

Актуальность темы исследования. Теоретическое исследование движения сложных механических систем - трудная математическая задача. Поэтому научный и практический интерес представляет решение модельных задач, позволяющих понять характерные закономерности движения многокомпонентных тел и конструкций, т.е. систем, состоящих из твёрдых тел, материальных точек и звеньев с распределёнными параметрами, для которых процессы деформирования обратимы и существует потенциальная энергия упругой деформации.

Большое число задач динамики твёрдого деформируемого тела исследованы в работах А.И. Лурье [45, 46], Ф.Л. Черноусько [71-74], Л.В. Докучаева [31-32], Д.М. Климова [36, 41], В.Ф. Журавлёва [36], В.Г. Вильке [14,15,18-27], В.В. Сидоренко [64], А.П. Маркеева [49] и ряда других авторов. Детальное описание движения механических систем с бесконечным числом степеней свободы приводит к дифференциальным уравнениям, в большинстве случаев не поддающимся аналитическому исследованию, так что возникает необходимость численного моделирования для получения конечного результата. Вопросы эволюции поступательно-вращательного движения деформируемых небесных тел под действием гравитационно-приливных сил изучались в работах Дж. Дарвина [30], У. Манка и Г. Макдональда [48], П. Голдрайха и С. Пила [28],

В.В. Белецкого [8-10], Ф.Л. Черноушко [74-75], Д.М. Климова [41], В.Г. Вильке [25-27], А.П. Маркеева [49] и других, например [37, 38, 50]. Уравнения поступательно-вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил, полученные в работе Вильке, содержат ряд новых механических эффектов, связанных с вращением шара, с диссипацией энергии при деформациях и с эллиптичностью орбиты. Важное прикладное значение для космодинамики имеет задача движения спутника с упругими и диссипативными элементами в центральном гравитационном поле сил.

В ряде работ В.Г. Вильке [22-23], В.В. Сидоренко [64], А.П. Маркеева [49], посвящённых эволюции быстрых вращений механической системы в центральном гравитационном поле сил, спутник моделируется сплошной упругой средой или упругим-твёрдым телом, обладающим внутренним трением. С помощью основных теорем динамики и уравнений Лагранжа второго рода получена замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающих движение такой среды. Для анализа уравнений движения применяется способ, аналогичный асимптотическому методу, разработанному Ф.Л. Черноушко [71] для механических систем, содержащих упругие и диссипативные элементы. Метод исследования представляет собой синтез методов модального анализа и малого параметра.

В работах В.Г. Вильке, Ю.Г. Маркова [16, 25, 26] изучается обобщение рассматриваемой задачи на случай, когда механическая система представляет собой осесимметричное вязкоупругое тело, имеющее общую границу с твёрдой частью и движущееся в центральном ньютоновском гравитационном поле сил. В результате выявлен следующий эффект, свойственный деформируемым системам с диссипацией: вращение системы вокруг центра масс замедляется,

при этом модуль вектора кинетического момента системы монотонно убывает. Сам вектор кинетического момента эволюционирует в сторону плоскости орбиты, а центр масс стремится занять положение, при котором угол между нормалью к плоскости орбиты и вектором кинетического момента системы равен определённой величине, зависящей от текущего значения угловой скорости вращения системы. Когда угловая скорость системы становится сопоставима с орбитальной, предположение о быстрых вращениях нарушается, наблюдается гравитационный захват системы, при котором вектор кинетического момента стремится занять положение по нормали к плоскости орбиты.

На основе трудов С.Г. Михлина [58], Н.А. Кильчевского [40], Ф.Л. Черноусько [72, 75], Д.М. Климова [36, 41], В.Ф. Журавлева [36] и ряда других авторов, например [61], постулируется справедливость вариационного принципа Гамильтона и существование плотности функции Лагранжа для рассматриваемых деформируемых систем. Это позволяет описывать движение таких непрерывных систем в рамках обобщения аналитической классической механики.

Основные методы аналитической механики – методы Лагранжа и Гамильтона – широко применяются в динамике механических систем, имеющих конечное число степеней свободы [12, 43]. Вариационный принцип Гамильтона остаётся справедливым и для непрерывных систем (сплошных сред), но уже не всегда позволяет получить замкнутую систему уравнений, определяющих движение сплошной среды. Это обстоятельство связано с тем, что состояние среды определяется не только положением и скоростями её частиц, но и другими дополнительными параметрами, например, температурой или

химическими характеристиками. Однако в целом ряде случаев можно описать движение сплошной среды независимо от немеханических параметров. Сюда можно отнести математические модели упругих сред, идеальной жидкости и другие [42, 44, 47]. Принцип Гамильтона представляет иногда наиболее естественный способ составления уравнений движения таких систем.

В диссертации будут рассматриваться только такие деформируемые механические системы, которые могут быть описаны в рамках обобщения классической механики без привлечения термодинамических процессов. Деформированное состояние среды будет соответствовать линейной теории упругости малых деформаций, точнее, линейной теории вязкоупругости [13].

В работе используется асимптотический подход к построению приближенных уравнений, описывающих движение деформируемой механической системы относительно центра масс. В работах В.Г. Вильке [21, 22], Ю.А. Садова [62], В.В. Сидоренко [64] получил развитие метод разделения движений и усреднение его модификации для механических систем с бесконечным числом степеней свободы. Движение исследуется в канонических переменных с использованием функции Рауса.

В рассматриваемых модельных динамических задачах оказывается недостаточным применять классический подход теоретической механики, основанный на модели абсолютно твердого тела. Использование вариационных принципов позволяет распространить формализм лагранжевой и гамильтоновой механики на деформируемое твёрдое тело. Особенностью изучаемых задач является наличие в них составляющих движения, имеющих различные

характерные времена, а также применимость линейной теории упругости малых деформаций.

В работе [74] рассматриваются движения вязкоупругого твердого тела относительно центра масс, причём в качестве сплошной вязкоупругой среды выбрана реологическая модель Кельвина-Фойгта [39, 63]. Упругое тело предполагается обладающим малой податливостью: частоты его собственных колебаний много больше угловой скорости вращения. Показано, что при некоторых общих предположениях влияние внутренней упругости и диссипации сводится к действию на вспомогательное абсолютно твердое тело (тело с замороженными деформациями) возмущающих моментов, состоящих из однородных многочленов четвертой и пятой степеней от компонент угловой скорости тела.

В статье [75] рассмотрены вопросы эволюции быстрых вращений механических систем, состоящих из упругого или упругого-твёрдого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле сил. Упругая часть системы моделировалась сплошной средой, обладающей внутренним трением.

Для прикладных задач наибольший интерес представляет исследование движения механических систем с упругими и диссипативными элементами при малых значениях углового ускорения, что обеспечивается в двух практически важных случаях: при вращении тела вокруг оси, близкой к одной из главных центральных осей инерции, и при вращении тела, близкого по своим техническим характеристикам к сфере.

Переходные процессы, связанные с изменением режима ориентации нежёсткого спутника, а именно: гашение начальных угловых скоростей,

возникающих после отделения спутника от ракеты-носителя; закрутка космического аппарата (КА) до определённой угловой скорости; программные повороты, учитывающие дрейф от деформации конструкции; процесс приведения ориентации к заданной - должны учитываться в алгоритмах формирования оценок ориентации [60, 76].

Данные задачи о движении деформируемых тел относительно центра масс в гравитационном поле сил являются объектом исследования диссертационной работы.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование динамических моделей механических систем с упругими и диссипативными элементами относительно центра масс, движущихся в центральном гравитационном поле сил.

Научная новизна:

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

1. Исследована динамика системы упругое-твёрдое тело на участке разворота при наличии осциллирующего момента. Получены аналитические выражения, позволяющие оценить отклонение движения системы от программного для твёрдого спутника.

2. Показана возможность демпфирования угловых колебаний спутника, обладающего вязкоупругостью, за счёт внутреннего трения в материале конструкции на соответствующих временных интервалах.

3. Выведены приближенные дифференциальные уравнения, описывающие поступательно-вращательное движение КА, содержащего деформируемые элементы, в центральном гравитационном поле сил. Определяются стационарные движения системы, и исследуется их устойчивость.

4. Изучена роль фундаментальных составляющих параметров вращения деформируемой Земли (колебаний земного полюса и неравномерности вращения Земли) в задаче спутниковой навигации. Даны оценки точностных характеристик координат местоположения объекта.

Теоретическая и практическая значимость. Важное прикладное значение имеет задача приведения космического аппарата (спутника) из произвольного движения в заданное угловое положение в инерциальной или орбитальной системе координат. Повышенные требования к точности ориентации спутников обуславливают учёт влияния упругих деформаций на движение всей конструкции как целого относительно центра масс. Поэтому разработка математических моделей, с помощью которых может быть рассмотрена динамика таких систем в задаче переориентации, повышение точности гравитационной стабилизации спутника, угловое движение при наличии органов управления, поступательно-вращательное движение деформируемого спутника является основополагающей.

Данная работа имеет теоретическое значение для развития механики систем с бесконечным числом степеней свободы.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту: На защиту выносятся следующие положения:

1. Исследованы колебательные процессы, связанные с ориентацией нежёсткого спутника относительно центра масс. Показана возможность демпфирования угловых колебаний спутника, обладающего упругостью, за счёт внутреннего трения в материале конструкции на соответствующих временных интервалах.

2. На примере модельной задачи изучены вращательные движения космического аппарата с упругими и диссипативными элементами как целого относительно центра масс с учётом органов системы управления – двухстепенных гиросtabilизаторов – в режиме ориентации. Показано, при каких предположениях упругие колебания не оказывают влияния на плоский разворот спутника и когда он невозможен. Исследован вопрос асимптотической устойчивости КА.

3. Найдены аналитические выражения, позволяющие оценить отклонение движения такой системы от программного (для твёрдого спутника – дрейф угловой скорости), обусловленные деформируемостью конструкции.

4. Получены приближённые дифференциальные уравнения, описывающие поступательно-вращательное движение спутника, содержащего деформируемые элементы, в центральном гравитационном поле сил. Показано, что дифференциальные уравнения поступательного и вращательного движения спутника связаны между собой посредством членов, наличие которых обусловлено деформируемостью системы. Найдены стационарные движения и исследована их устойчивость.

5. Разработана долгосрочная модель вычисления параметров вращения Земли на длительных интервалах времени для обработки высокоточных

измерений топоцентрических дальностей до ИСЗ типа Эталон. Получена оценка априорной величины остаточных отклонений для наблюдений спутника Эталон, которая составила приблизительно 1.8 м.

Достоверность и апробация результатов. Достоверность результатов обеспечивается с помощью математически обоснованных методов классической механики в сочетании с методами механики сплошных сред и снабжены необходимыми ссылками на литературу. Отмечается согласованность основных результатов с работами других авторов. Качественные результаты подтверждены численными экспериментами. Основные результаты диссертации докладывались автором на конференциях.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях журналов из списка ВАК: две в журнале “Космонавтика и ракетостроение”, и одна в журнале “Известия РАН. Теория и системы управления”.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все выносимые на защиту результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Она содержит 110 страниц машинописного текста, включающего 13 рисунков и список литературы из 79 наименований.

В первой главе автором в сжатой форме даны некоторые сведения о построении функционалов внутренних упругих и диссипативных сил в

деформируемых системах, вводится модель линейной теории упругости малых деформаций. Приводится уравнение упругих деформаций, совпадающее с вариационным принципом Даламбера-Лагранжа, применённого для соответствующих деформациям виртуальных перемещений. Кратко излагается сущность модального подхода к изучению динамики деформируемых систем. Когда упругое тело совершает повороты и перемещения как целое относительно центра масс, деформации отсчитываются в некоторой подвижной (связанной с подвижной средой) системе координат. При этом массовые силы включают в себя силы инерции переносного движения. Различные способы выбора связанной системы координат обсуждаются в работах [41].

Если свободная механическая система может быть представлением состоящей из «несущего» абсолютно твердого тела и «носимых» упругих тел, то подвижные оси связываются с твердой частью системы и деформации отсчитываются относительно несущего тела [46]. В других случаях, при отсутствии абсолютно твердого тела, вводится так называемая система «средних» осей Тиссерана.

Вторая глава включает в себя решение важной прикладной задачи, связанной с режимами ориентации космического аппарата с упругими и диссипативными элементами.

Известно [60], что реальные КА и установленные на них системы ориентации значительно отличны от идеальных моделей. Реальный КА не является абсолютно жёстким, а представляет собой вязкоупругую конструкцию с большим числом внутренних степеней свободы. Упругие колебания системы как целого могут существенным образом сказаться на процессе управления ориентацией, в частности, поперечные упругие колебания корпуса приводят к соответствующим поворотам площадок, на которых установлены датчики

угловых скоростей. Далее разгрузка гироскопов (уменьшение кинетического момента) с помощью реактивных двигателей системы ориентации приводит к нарушению точного режима ориентации, возникает необходимость прогноза моментов времени начала разгрузок при поддержании заданной ориентации КА.

В третьей главе получены приближённые дифференциальные уравнения, описывающие поступательно-вращательное движение КА с учётом его деформируемости в центральном гравитационном поле сил. Показано, что посредством деформируемости, поступательное и вращательное движения КА взаимосвязаны.

В четвёртой главе диссертации рассматривается влияние параметров вращения Земли (колебаний земного полюса и неравномерности вращения Земли) на высокоточное определение топоцентрических дальностей до спутников типа Эталон.

Параметры вращения Земли играют важную роль в задачах управления и навигации космических аппаратов. Малопараметрическая численно-аналитическая модель вращательно-колебательных движений Земли применяется на длительном интервале времени в обработке высокоточных измерений топоцентрических дальностей до ИСЗ Эталон-1 и Эталон-2. Представленная в этой главе модель может быть использована в алгоритмах спутниковой навигации.

Глава 1. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ УПРУГОЕ-ТВЕРДОЕ ТЕЛО ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС В НЬЮТОНОВСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СИЛ

1.1. Вывод уравнений движения системы из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа

Важное прикладное значение имеет задача приведения спутника из произвольного начального в заданное угловое положение в инерциальной или орбитальной системе координат. Представляется целесообразным получить в явном виде дифференциальные уравнения, описывающие малые колебания по собственным формам произвольного осесимметричного упругого КА. В эти уравнения в качестве коэффициентов входят проекции угловой скорости спутника, а также их квадраты, произведения и производные по времени. В качестве примера рассмотрена динамика такой системы на участке разворота при переориентации.

Пусть спутник представляет собой динамически симметричную механическую систему, состоящую из упругой (однородной и изотропной) и твердой частей. Ось динамической симметрии является осью симметрии упругой части в недеформированном состоянии. Перемещения частиц упругой среды относительно твердого тела на части осесимметричной границы равны нулю, другая часть границы свободна. Предполагается, что центр масс спутника–точка C - обращается по заданной орбите и движение системы относительно центра масс – вращение как целого и упругие колебания – не влияет на орбитальное движение.

При деформациях центр масс системы смещается из точки C в точку C' на вектор \mathbf{u}_c . Для описания деформированного состояния введём систему координат $C'x'_1x'_2x'_3$, оси которой параллельны главным центральным осям инерции недеформированной системы $Cx_i (i=1,2,3)$. Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = (u_1, u_2, u_3)$ – упругое смещение частицы, характеризуемой в недеформированном состоянии радиус-вектором \mathbf{r} относительно системы координат $Cx_1x_2x_3$ ($\mathbf{r} \in \Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 – области, занимаемые твердым и упругим телами соответственно). Принцип Даламбера-Лагранжа для рассматриваемой системы запишется так:

$$\int_{\Omega_2} \{ \ddot{\mathbf{u}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}[\mathbf{r} + \mathbf{u}'] + \boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}, [\mathbf{r} + \mathbf{u}']] + 2[\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{u}}'] + \mu R^{-3}(\mathbf{r} + \mathbf{u}') - \\ - 3\mu R^{-3}(\mathbf{R}^0, \mathbf{r} + \mathbf{u}') \} \delta \mathbf{u} \rho_2 + (\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1) \\ (\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{u}_c)$$

Здесь $\mathbf{R} = R\mathbf{R}^0$ – радиус-вектор центра масс спутника, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – абсолютная угловая скорость системы координат $Cx_1x_2x_3$ в проекциях на соответствующие оси, $\nabla E[\mathbf{u}]$ – градиент квадратичного функционала линейной теории упругости малых деформаций; $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi b E[\dot{\mathbf{u}}]$ – диссипативный функционал; χ – безразмерный коэффициент рассеивания в среде, $b > 0$ – размерная константа; $0 < \chi \ll 1$, $b > 0$; ρ_1 и ρ_2 – плотность твердой и упругой частей соответственно, при этом

$$\bar{\rho} = \begin{cases} \rho_1, & \mathbf{r} \in \Omega_1 \\ \rho_2, & \mathbf{r} \in \Omega_2 \end{cases}$$

В дальнейшем предполагается, что деформациями, вызванными силами гравитационного притяжения, можно пренебречь (при необходимости эти деформации учитываются). Решение уравнения (1.1) в случае осесимметричной упругой части с осесимметричными граничными условиями, согласно [51], будем искать в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [q_k(t) \mathbf{V}_k(\mathbf{r}) + p_k(t) \mathbf{W}_k(\mathbf{r})], \quad (1.2)$$

где $q_k(t), p_k(t)$ – обобщенные (нормальные) координаты, а $\mathbf{V}_k(\mathbf{r})$ и $\mathbf{W}_k(\mathbf{r})$ – собственные формы свободных упругих колебаний системы, соответствующие собственной частоте ν_k и удовлетворяющие условиям ортонормированности:

$$(U_k, U_l) = \int_{\Omega_2} U_k U_l dx = \delta_{kl}, \quad \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

Заметим, что при $k=0$ собственные формы \mathbf{V}_0 и \mathbf{W}_0 описывают крутильные и продольно-поперечные деформации, при $k=1$ формы \mathbf{V}_1 и \mathbf{W}_1 соответствуют деформациям изгибного типа, при $k \geq 2$ формы имеют число узлов по параллелели, равное k . Каждому k соответствует семейство собственных форм $\{\mathbf{V}_{km}\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{\mathbf{W}_{km}\}_{m=0}^{\infty}$ и собственных частот $\{\nu_{km}\}_{m=0}^{\infty}$, которые в дальнейшем для получения аналитических выкладок не учитываются, и предполагается, что каждому k соответствует одно значение m .

Подставим разложение (1.2) в уравнение (1.1), выражая $\delta \mathbf{u}$ через вариации обобщенных координат. На области Ω_1 $\mathbf{u} = -\mathbf{u}_c$ не зависит от \mathbf{r} , причем

$$\mathbf{u}_c = m^{-1} \int_{\Omega} \rho_2 \mathbf{u} dx, \quad m = \int_{\Omega} \tilde{\rho} dx.$$

С учетом равенства $\rho_2^{-1}\nabla E[U_k]=v_k^2U_k$ из (1.1) следуют уравнения для нормальных координат:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_k + \chi b \gamma_k^2 \dot{q}_k + \gamma_k^2 q_k + \left([\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}], \mathbf{V}_k \right) + \left([\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]], \mathbf{V}_k \right) + \\ \left([\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{u}], \mathbf{V}_k \right) + \left([\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}]], \mathbf{V}_k \right) + 2 \left([\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{u}}], \mathbf{V}_k \right) - \\ - \int \left[\ddot{\mathbf{u}}_c + [\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{u}_c] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_c]] + 2 [\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{u}}_c], \delta \mathbf{u} \right] dx = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\delta_{q_l} = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ 1, & l = k. \end{cases}; \quad \delta_{q_l} = 0.$$

Уравнение для p_k получается из (1.3) заменой $\mathbf{V}_k \rightarrow \mathbf{W}_k$.

1.2. Динамика собственных форм колебаний системы при наличии вращательных и центробежных сил инерции

Коэффициенты разложения инерционных вращательных и центробежных сил по ортонормированным собственным формам представляются следующим образом [16, 19, 33]:

$$\left([\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]], \mathbf{V}_k \right) = \sum_{i,j=1}^3 n_{ij} b_{kij}, \quad \left([\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]], \mathbf{W}_k \right) = \sum_{i,j=1}^3 n_{ij} c_{kij},$$

где

$$\begin{aligned} n_{11} &= -(\omega_2^3 + \omega_3^2), \quad n_{12} = n_{21} = \omega_1 \omega_2, \quad n_{13} = n_{31} = \omega_1 \omega_3, \\ n_{22} &= -(\omega_1^2 + \omega_3^2), \quad n_{23} = n_{32} = \omega_2 \omega_3, \quad n_{33} = -(\omega_1^2 + \omega_2^2), \\ b_{kij} &= \int_{\Omega_2} V_{ki} x_j dx, \quad c_{kij} = \int_{\Omega_2} W_{ki} x_j dx, \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$V_{ki} = (\mathbf{V}_k, \mathbf{e}_i)$, $W_{ki} = (\mathbf{W}_k, \mathbf{e}_i)$ – проекции векторов \mathbf{V}_k и \mathbf{W}_k на ось Cx_i, \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$) – орт по оси Cx_i ,

$$\begin{aligned}([\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}], \mathbf{V}_k) &= \dot{\omega}_3(b_{k21} - b_{k12}) + \dot{\omega}_2(b_{k13} - b_{k31}) + \dot{\omega}_1(b_{k32} - b_{k23}), \\([\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}], \mathbf{W}_k) &= \dot{\omega}_3(c_{k21} - c_{k12}) + \dot{\omega}_2(c_{k13} - c_{k31}) + \dot{\omega}_1(c_{k32} - c_{k23}).\end{aligned}$$

Учитывая, что $n_{ij} = n_{ji}$ ($i=1,2; j=2,3; j \neq i$), можно записать:

$$\begin{aligned}([\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}]], \mathbf{V}_k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 n_{ij} (q_1 A_{1kij} + p_1 B_{1kij}), \\([\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}]], \mathbf{W}_k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 n_{ij} (q_1 C_{1kij} + p_{11} D_{1kij}).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Далее

$$\begin{aligned}([\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{u}}], \mathbf{V}_k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \{ \omega_1 [\dot{q}_1 (A_{1k23} - A_{1k32}) + \dot{p}_1 (B_{1k23} - B_{1k32})] + \\&\quad + \omega_2 [\dot{q}_1 (A_{1k31} - A_{1k13}) + \dot{p}_1 (B_{1k31} - B_{1k13})] + \\&\quad + \omega_3 [\dot{q}_1 (A_{1k12} - A_{1k21}) + \dot{p}_1 (B_{1k12} - B_{1k21})] \}, \\([\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{u}}], \mathbf{W}_k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \{ \omega_1 [\dot{q}_1 (C_{1k23} - C_{1k32}) + \dot{p}_1 (D_{1k23} - D_{1k32})] + \\&\quad + \omega_2 [\dot{q}_1 (C_{1k31} - C_{1k13}) + \dot{p}_1 (D_{1k31} - D_{1k13})] + \\&\quad + \omega_3 [\dot{q}_1 (C_{1k12} - C_{1k21}) + \dot{p}_1 (D_{1k12} - D_{1k21})] \}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Из формул (1.6) выражения для $([\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{u}}], \mathbf{W}_k)$ и $([\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{u}}], \mathbf{V}_k)$ следуют очевидным образом и поэтому в диссертационной работе не приводятся. Здесь введены обозначения для коэффициентов:

$$\begin{aligned}A_{1kij} &= \int_{\Omega_2} V_{1i} V_{ki} dx, & B_{1kij} &= \int_{\Omega_2} W_{1i} V_{ki} dx, \\C_{1kij} &= \int_{\Omega_2} V_{1i} W_{ki} dx, & D_{1kij} &= \int_{\Omega_2} W_{1i} W_{ki} dx.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Далее, пусть

$$d_{ki} = \int_{\Omega_2} V_{ki} dx, \quad f_{ki} = \int_{\Omega_2} W_{ki} dx.$$

После вычислений с использованием выражений для \mathbf{V}_k и \mathbf{W}_k в цилиндрической (ρ, φ, z) и декартовой (x_1, x_2, x_3) системах координат получим, что отличны от нуля только следующие коэффициенты:

$$d_{12} = f_{11} = \pi \int_{\Omega_2^*} (U_1 + V_1) dx^*, \quad f_{03} = 2\pi \int_{\Omega_2^*} W_0 dx^*, \quad dx^* = \rho d\rho dz,$$

где Ω_2^* получено сечением Ω_2 полуплоскостью, проходящей через ось симметрии. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_c &= \rho_2 m^{-1} (f_{11} p_1, d_{12} q_1, f_{03} p_0) = (u_{1c}, u_{2c}, u_{3c}), \\ \int_{\Omega_2} (\ddot{\mathbf{u}}_c, \delta \mathbf{u}) dx &= \rho_2 m^{-1} (f_{03} \ddot{p}_0 \delta p_0 + f_{11}^2 \ddot{p}_1 \delta p_1 + d_{12}^2 \ddot{q}_1 \delta q_1), \\ \int_{\Omega_2} ([\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_c]], \delta \mathbf{u}) dx &= \rho_2 m^{-1} \{ f_{03} [d_{12} \omega_3 (\omega_1 p_1 + \omega_2 q_1) - \\ &\quad - f_{03} (\omega_1^2 + \omega_2^2) p_0] \delta p_0 + d_{12} [-d_{12} (\omega_1^2 + \omega_3^2) p_1 + \\ &\quad + \omega_1 (\omega_2 d_{12} q_1 + \omega_3 f_{03} p_0)] \delta p_1 + d_{12} [-d_{12} (\omega_1^2 + \omega_3^2) q_1 + \\ &\quad + \omega_2 (\omega_1 d_{12} p_1 + \omega_3 f_{03} p_0)] \delta q_1 \}, \\ \int_{\Omega_2} ([\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{u}}_c], \delta \mathbf{u}) dx &= \rho_2 m^{-1} [f_{03} d_{12} (\omega_1 \dot{q}_1 - \omega_2 \dot{p}_1) \delta p_0 + \\ &\quad + d_{12} (\omega_2 f_{03} \dot{p}_0 - \omega_3 d_{12} \dot{q}_1) \delta p_1 + d_{12} (\omega_3 d_{12} \dot{p}_1 - \omega_1 f_{03} \dot{p}_0) \delta p_1]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Выражение для $\int_{\Omega_2} ([\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{u}_c], \delta \mathbf{u}) dx$ для краткости опускается. Ранее в (1.3) было

показано, что отличны от нуля только следующие коэффициенты в (1.4):

$$\begin{aligned} b_{212} = b_{221} = c_{211} = -c_{222}, \quad b_{123} = c_{113}; \quad b_{132} = c_{131}, \\ b_{012} = -b_{021}, \quad c_{011} = c_{022}, \quad c_{003}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Свойство осесимметричности упругого тела позволяет проинтегрировать выражения (1.7) по цилиндрической координате φ от 0 до 2π .

Влияние собственных форм самих на себя описывается коэффициентами вида $A_{kkij}, B_{kkij}, D_{kkij}, C_{kkij}$, причем имеют место равенства

$$A_{kkij} = A_{kkji}, D_{kkij} = D_{kkji}, \quad C_{kkij} = B_{kkji} \quad (k=0,1,2,\dots).$$

Вычисления показывают, что при $k > 1$ все неравные нулю из этих коэффициентов можно объединить общей формулой

$$A_{kk11} = A_{kk22} = D_{kk11} = D_{kk22} = \frac{\pi}{2} \int_{\Omega_{2^*}} (U_k^2 + V_k^2) dx^*,$$

$$A_{kk33} = D_{kk33} = 1 - 2A_{kk11} = \pi \int_{\Omega_{2^*}} W_k^2 dx^*, \quad (k=2,3,\dots)$$

(так как $(\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_k) = 1 = A_{kk11} + A_{kk22} + A_{kk33}$),

$$B_{kk12} = C_{kk21} = -B_{kk21} = -C_{kk12} = \pi \int_{\Omega_{2^*}} U_k V_k dx^*. \quad (1.10)$$

При $k=0$ отличны от нуля будут следующие коэффициенты:

$$A_{kk33} = D_{kk33} = 1 - 2A_{kk11} = \pi \int_{\Omega_{2^*}} V_0^2 dx^* = \frac{1}{2}.$$

Здесь учтено свойство ортонормированности $\mathbf{V}_0 = (-V_0 \sin \varphi, V_0 \sin \varphi, 0)$ и $W_0 = (U_0 \cos \varphi, U_0 \sin \varphi, W_0)$ - в проекциях на оси системы координат $Cx_1x_2x_3$.

$$B_{0012} = -B_{0021} = C_{0021} = -C_{0012} = \pi \int_{\Omega_2^*} U_0 V_0 dx^*,$$

$$D_{0011} = D_{0022} = \pi \int_{\Omega_2^*} U_0^2 dx^*, \quad D_{0033} = 2\pi \int_{\Omega_2^*} W_0^2 dx^* = 1 - 2D_{0011}.$$

Далее при $k = 1$ имеем:

$$A_{1111} = C_{1112} = B_{1121} = D_{1122} = \frac{\pi}{4} \int_{\Omega_2^*} (U_1 - V_1)^2 dx^*,$$

$$A_{1112} = D_{1111} = \frac{\pi}{4} \int_{\Omega_2^*} (3U_1^2 + 2U_1 V_1 + 3V_1^2) dx^*,$$

$$A_{1133} = D_{1133} = \pi \int_{\Omega_2^*} W_1^2 dx^* = 1 - A_{1111} - A_{1122}, \quad (1.11)$$

$$C_{1121} = B_{1112} = \frac{\pi}{4} \int_{\Omega_2^*} (U_1^2 + V_1^2 + 6U_1 V_1) dx^*.$$

Все остальные коэффициенты A_{1ikj} равны нулю после интегрирования по φ .

Коэффициенты, обусловленные влиянием формы с номером l на форму с номером k ($l \neq k$), можно объединить общей формулой, начиная с $k \geq 1$. Пусть $k = 1, 2, \dots; l > k$. Тогда для $l = k + 1$ отличными от нуля будут выражения:

$$A_{lk13} = D_{lk13} = C_{lk23} = -B_{lk23} = \frac{\pi}{2} \int_{\Omega_2^*} W_k (U_l + V_l) dx^*,$$

$$A_{lk31} = D_{lk31} = C_{lk32} = -B_{lk32} = \frac{\pi}{2} \int_{\Omega_2^*} W_l (U_k - V_k) dx^*. \quad (1.12)$$

Далее, для $l = k + 2$ отличными от нуля будут

$$\begin{aligned}
A_{lk22} = -A_{lk11} = B_{lk12} = B_{lk21} &= \frac{\pi}{4} \int_{\Omega_2^*} (U_l + V_l)(V_k - U_k) dx^*, \\
D_{lk11} = -D_{lk22} = C_{lk12} = C_{lk21} &= \frac{\pi}{4} \int_{\Omega_2^*} (U_l + V_l)(V_k - U_k) dx^* = -A_{lk22}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

При $l > k + 2$

$$A_{lkij} = B_{lkij} = D_{lkij} = C_{lkij} = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Случай $k = 0$ общей формулой не описывается, поэтому приведем значения коэффициентов отдельно:

при $l = 1$

$$\begin{aligned}
-A_{1031} = B_{1032} &= \pi \int_{\Omega_2^*} V_0 W_1 dx^*, \\
C_{1023} = D_{1013} &= \pi \int_{\Omega_2^*} W_0 (U_1 + V_1) dx^*, \\
C_{1032} = D_{1031} &= \pi \int_{\Omega_2^*} U_0 W_1 dx^*,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

при $l = 2$

$$\begin{aligned}
A_{2022} = -A_{2011} = B_{2012} = B_{2021} &= \frac{\pi}{2} \int_{\Omega_2^*} V_0 (U_2 + V_2) dx^*, \\
C_{2012} = C_{2021} = D_{2011} = -D_{2022} &= \frac{\pi}{2} \int_{\Omega_2^*} U_0 (U_2 + V_2) dx^*,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Выписанных формул (1.15) – (1.18) достаточно для учета влияния всех собственных форм с различными l и k друг на друга, так как имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
A_{lkij} &= A_{klji}, \quad D_{lkij} = D_{klji}, \quad B_{lkij} = C_{klji}, \\
C_{lkij} &= B_{lkji} \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}
\tag{1.16}$$

Динамика собственных форм колебаний системы при наличии вращательных и центробежных сил инерции описывается бесконечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений [20-21]. Подставляя выражения (1.4) – (1.15) в (1.3) и используя соотношения (1.16), после некоторых дополнительных преобразований выпишем эту систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_0 + \chi b v_0^2 \dot{q}_0 + v_0^2 q_0 + B_0(2\omega_3 \dot{p}_0 + \dot{\omega}_3 p_0) + A_{1031}[2(\omega_1 \dot{p}_1 + \omega_2 \dot{q}_1) \\
+ \dot{\omega}_1 p_1 + \dot{\omega}_2 q_1 + \omega_3(\omega_1 q_1 - \omega_2 p_1)] - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)A_{01}q_0 + \\
+ A_2[(\omega_1^2 - \omega_2^2)q_2 - 2\omega_1 \omega_2 p_2] = 2b_{012} \dot{\omega}_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + a_3)\ddot{p}_0 + \chi b v_0^2 \dot{p}_0 + v_0^2 p_0 - B_0(2\omega_3 \dot{q}_0 + \dot{\omega}_3 q_0) - a_5[2(\omega_2 \dot{p}_1 - \omega_1 \dot{q}_1) \\
+ \dot{\omega}_2 p_1 - \dot{\omega}_1 q_1] - [(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)D_{0011} + (\omega_1^2 - \omega_2^2)(D_{0033} + a_3)]p_0 + \\
+ a_8 \omega_3(\omega_1 p_1 - \omega_2 q_1) + [(\omega_1^2 - \omega_2^2)p_2 + 2\omega_1 \omega_2 q_2]D_2 = \\
= a_4(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2c_{011} \omega_3^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + a_1)\ddot{q}_1 + \chi b v_1^2 \dot{q}_1 + v_1^2 q_1 - A_{1031}(2\omega_2 \dot{q}_0 + \dot{\omega}_2 q_0 - \omega_1 \omega_3 q_0) - \\
- a_5(2\omega_1 \dot{p}_0 + \omega_1 p_0) + a_6(2\omega_3 \dot{p}_1 + \dot{\omega}_3 p_1) + A_2^-[2(\omega_1 \dot{p}_2 + \omega_2 \dot{q}_2) + \\
+ \dot{\omega}_1 p_2 + \dot{\omega}_2 q_2] + a_8 \omega_2 \omega_3 p_0 + a_9 \omega_1 \omega_2 p_1 - \\
- [(\omega_2^2 + \omega_3^2)A_{11} + (\omega_1^2 + \omega_3^2)(A_{12} + a_1) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)A_{13}]q_1 + \\
+ A_2^+ \omega_3(\omega_1 q_2 - \omega_2 p_2) + A_3[(\omega_1^2 + \omega_2^2)q_3 - 2\omega_1 \omega_2 p_3] = a \dot{\omega}_1 - a_7 \omega_2 \omega_3,
\end{aligned}
\tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}
(1 + a_1)\ddot{p}_1 + \chi b v_1^2 \dot{p}_1 + v_1^2 p_1 - A_{1031}(2\omega_1 \dot{q}_0 + \dot{\omega}_1 q_0 - \omega_2 \omega_3 q_0) + \\
+ a_5(2\omega_2 \dot{p}_0 + \dot{\omega}_2 p_0) - a_6(2\omega_3 \dot{q}_1 + \dot{\omega}_3 q_1) + A_2^-[2(\omega_2 \dot{p}_2 - \omega_1 \dot{q}_2) + \\
+ \dot{\omega}_2 p_2 + \dot{\omega}_1 q_2] + a_8 \omega_1 \omega_3 p_0 + a_9 \omega_1 \omega_2 q_1 - [(\omega_1^2 + \omega_3^2)A_{11} + \\
+ (\omega_2^2 + \omega_3^2)(A_{12} + a_1) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)A_{13}]p_1 + A_2^+ \omega_3(\omega_1 p_2 + \omega_2 q_2) + \\
+ A_3[(\omega_1^2 - \omega_2^2)p_3 + 2\omega_1 \omega_2 q_3] = -a \dot{\omega}_2 - a_7 \omega_1 \omega_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_k + \chi b v_k^2 \dot{q}_k + v_k^2 q_k + B_k (2\omega_3 \dot{p}_k + \dot{\omega}_3 p_k) + A_{k+1}^- [2(\omega_1 \dot{p}_{k+1} + \omega_2 \dot{q}_{k+1}) + \\
& + \dot{\omega}_1 p_{k+1} + \dot{\omega}_2 q_{k+1} + A_k^- [2(\omega_1 \dot{p}_{k-1} + \omega_2 \dot{q}_{k-1}) + \dot{\omega}_1 p_{k-1} - \\
& - \dot{\omega}_2 q_{k-1}] + A_k (\omega_1^2 - \omega_2^2) q_{k-2} + 2D_k \omega_1 \omega_2 p_{k-2} + \\
& + A_k^+ \omega_3 (\omega_1 q_{k-1} + \omega_2 p_{k-1}) - [(\omega_1^2 - \omega_2^2 + 2\omega_3^2) A_{k1} + \\
& + (\omega_1^2 - \omega_2^2) A_{k3}] q_k + A_{k+1} \omega_3 (\omega_1 q_{k+1} - \omega_2 p_{k+1}) + \\
& + [(\omega_1^2 - \omega_2^2) q_{k+2} - 2\omega_1 \omega_2 p_{k+2}] A_{k+2} = f_{q_k} \quad (k=2,3,\dots),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{p}_k + \chi b v_k^2 \dot{p}_k + v_k^2 p_k - B_k (2\omega_3 \dot{q}_k + \dot{\omega}_3 q_k) + A_{k+1}^- [2(\omega_2 \dot{p}_{k+1} + \omega_1 \dot{q}_{k+1}) + \\
& + \dot{\omega}_2 p_{k+1} - \dot{\omega}_1 q_{k+1}] - A_k^- [2(\omega_1 \dot{q}_{k-1} + \omega_2 \dot{p}_{k-1}) + \dot{\omega}_1 q_{k-1} + \\
& + \dot{\omega}_2 p_{k-1}] + D_k (\omega_1^2 - \omega_2^2) p_{k-2} - 2A_k \omega_1 \omega_2 q_{k-2} + A_k + \omega_3 (\omega_1 p_{k-1} - \omega_2 q_{k-1}) - \\
& - [(\omega_1^2 - \omega_2^2 + 2\omega_3^2) A_{k1} + (\omega_1^2 - \omega_2^2) A_{k3}] p_k + A_{k+1}^+ \omega_3 (\omega_1 p_{k+1} + \omega_2 q_{k+1}) + \\
& + [(\omega_1^2 - \omega_2^2) p_{k+2} + 2\omega_1 \omega_2 q_{k+2}] A_{k+2} = f_{p_k} \quad (k=2,3,\dots),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& f_{q_2} = -2\omega_1 \omega_2 b_{212}, f_{p_2} = (\omega_2^2 - \omega_1^2) b_{212}, \quad f_{q_k} = f_{p_k} = 0 \Leftrightarrow k \geq 3, \\
& a = b_{123} - b_{132}, a_1 = -\rho_2 m^{-1} d_{12}^2, a_2 = -\rho_2 m^{-1} f_{03} d_{12}, a_3 = -\rho_2 m^{-1} f_{03}^2, \\
& a_4 = c_{011} + c_{033}, a_5 = a_2 + C_{1023} - C_{1032}, a_6 = a_1 + B_{1112} - B_{1121}, \\
& a_7 = b_{123} + b_{132}, a_8 = a_2 + C_{1032} + C_{1023}, a_9 = a_1 + B_{1112} + B_{1121}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Далее

$$B_i = 2B_{ii12}, \quad A_{ij} = A_{ijj} \quad (i=0,1,2,\dots; j=1,2,3).$$

При $k \geq 2$ введены обозначения:

$$\begin{aligned}
A_{k+1}^- &= A_{k+1,k,31} - A_{k+1,k,13}, & A_{k+1}^+ &= A_{k+1,k,31} + A_{k+1,k,13}, \\
A_k &= A_{k,k-2,11}, & D_k &= D_{k,k-2,11}, & A_{k3} &= 1 - 2A_{k1}.
\end{aligned}$$

Начиная с $k = 3$ имеет место равенство $D_k = A_k$.

Для описания движения деформированной системы как целого относительно центра масс необходимо дополнить систему (1.17) динамическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned}
& J_{12}\dot{\omega}_1 + J_{22}\dot{\omega}_2 + J_{23}\dot{\omega}_3 + \dot{J}_{12}\omega_1 + \dot{J}_{22}\omega_2 + \dot{J}_{23}\omega_3 + (J_{11} - J_{33})\omega_1\omega_3 + \\
& J_{13}(\omega_3^2 - \omega_1^2) + J_{12}\omega_2\omega_3 - J_{23}\omega_1\omega_2 = M_2 - (\mathbf{e}_2, d\mathbf{G}_u / dt), \quad (1.19) \\
& \mathbf{G}_u = \int_{\Omega} \tilde{\rho}[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{u}}'] dx.
\end{aligned}$$

Остальные два уравнения могут быть получены циклической перестановкой индексов: $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$. Здесь $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ – проекции момента внешних сил на связанные оси $C'x'_1x'_2x'_3$; J_{ij} – компоненты тензора инерции деформированной системы в осях $C'x'_i$, которые в линейном приближении запишутся в виде:

$$J_{11} = A + \tilde{J}_{11}, \quad J_{22} = A + \tilde{J}_{22}, \quad J_{33} = C + \tilde{J}_{33}, \quad \tilde{J}_{11} = 2 \int_{\Omega} (x_2 u'_2 + x_3 u'_3) \tilde{\rho} dx,$$

$$\tilde{J}_{22} = 2 \int_{\Omega} (x_1 u'_1 + x_3 u'_3) \tilde{\rho} dx, \quad \tilde{J}_{33} = 2 \int_{\Omega} (x_1 u'_1 + x_2 u'_2) \tilde{\rho} dx,$$

$$J_{ij} = J_{ji} = -2 \int_{\Omega} (x_i u'_j + x_j u'_i) \tilde{\rho} dx, \quad (i=1,2; j=2,3; j \neq i),$$

где A и C соответственно экваториальный и осевой моменты инерции недеформированной системы. Значения J_{ij} выражаются через нормальные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \tilde{J}_{11} = 2\rho_2(a_4 p_0 - b_{212} p_2), \quad \tilde{J}_{22} = 2\rho_2(a_4 p_0 + b_{212} p_2), \quad J_{12} = 2\rho_2 b_{212} q_2, \\
& \tilde{J}_{33} = 4\rho_2 c_{011} p_0, \quad J_{13} = -\rho_2 a_7 p_1, \quad J_{13} = -\rho_2 a_7 q_1.
\end{aligned} \quad (1.20)$$

Далее

$$d\mathbf{G}_u / dt = \rho_2 [-a(\ddot{q}_1 + \omega_3 \dot{p}_1) + 2\omega_2 \dot{q}_0 b_{021}, a(\ddot{p}_1 - \omega_3 \dot{q}_1) - \\ - 2\omega_1 \dot{q}_0 b_{021}, a(\omega_1 \dot{p}_1 + \omega_2 \dot{q}_1) + 2\ddot{q}_0 b_{021}].$$

Если проекции M_i заданы как функции времени t , то система уравнений (1.17), (1.19) с учетом (1.20) замкнута и описывает как динамику малых упругих колебаний, так и движение вокруг центра масс деформированной системы как целого под действием приложенного момента.

Отметим, что линеаризованная постановка с квадратичным функционалом упругой потенциальной энергии составляет основу теории упругости малых деформаций. По виду правых частей уравнений (1.17) можно сделать вывод, что малость деформаций в задаче о движении системы упругое-твердое тело относительно центра масс возможна, если переносные силы и инерции малы по сравнению с упругими восстанавливающими силами, пропорциональными членам $v_i^2 q_i$ и $v_i^2 p_i$. В этом случае линейная теория позволяет в первом приближении вычислить деформации. Если, кроме того, частоты движения системы как целого и собственные частоты движения по внутренним степеням свободы сильно разнесены, то для нахождения вынужденных упругих колебаний целесообразно рассматривать квазистатические деформации [21]. В других случаях, для изучения движения в окрестности резонанса или при возмущении начальных условий по q_i и p_i , следует пользоваться уравнениями вида (1.17), описывающими упругие колебания.

1.3. Задача о движении деформируемого спутника на участке разворота

В качестве примера рассмотрим динамику системы упругое-твердое тело на участке разворота при переориентации. Получим аналитические выражения, позволяющие оценить величину отклонения движения такой системы от программного (для твердого спутника). При осуществлении оптимального по быстродействию разворота вокруг оси Sx_2 значения M_i на участке ускорения будут:

$$M_1 = M_3 = 0, M_2 = M(1 + \varepsilon_1 \cos \mu t), M > 0 - \text{const}, 0 < \varepsilon_1 \ll 1. \quad (1.21)$$

Будем предполагать, что малая осциллирующая добавка в выражении для M_2 обусловлена, например, несовершенством работы исполнительных органов. Непосредственной проверкой можно убедиться, что если в начальный момент времени $t = 0$ принять

$$\omega_1(0) = \omega_3(0) = q_k(0), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.22)$$

то эти нулевые значения переменных будут сохраняться во все время движения. Иными словами, система уравнений (1.17), (1.19) совместно с (1.21) и (1.22) имеет частное решение

$$\omega_1 = \omega_3 = q_k = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.23)$$

описывающее плоские вращения КА.

Пусть t_* и $\omega_* = A^{-1}Mt_*$ – соответственно расчетные значения продолжительности участка ускорения и угловой скорости твердого спутника в

момент его окончания. Введем безразмерное время $\tau = \nu t$, ν – наименьшая собственная частота свободных упругих колебаний системы. После замены переменных:

$$\omega_i = \tilde{\omega}_i \omega_*, \quad t = \nu^{-1} \tau$$

уравнение (1.19) примет вид

$$\tilde{\omega}_2 + \tilde{J}_{22}' \tilde{\omega}_2 J_{22}^{-1} = \tau_*^{-1} (1 + \varepsilon_1 \cos \tilde{\mu} \tau) (1 - \tilde{J}_{22} A^{-1}) - \tilde{a} \varepsilon^{-1} p_1'', \quad (1.24)$$

где

$$\tau_* = \nu t_*, \quad \tilde{\mu} = \mu \nu^{-1}, \quad J_{22}^{-1} \cong A^{-1} (1 - \tilde{J}_{22} A^{-1}), \quad \tilde{a} = a J_{22}^{-1} \rho_2.$$

С учетом (1.23) уравнения упругих колебаний будут:

$$\begin{aligned} & (1 + a_3) p_0'' + \varkappa \sigma_0^2 p_0' + \sigma_0^2 p_0 - \varepsilon a_5 (2\tilde{\omega}_2 p_1' + \tilde{\omega}_2' p_1) - \\ & - \varepsilon^2 \tilde{\omega}_2^2 (D_{0011} + D_{0033} + a_3) p_0 - \varepsilon^2 \tilde{\omega}_2^2 D_2 p_2 = \varepsilon^2 a_4 \tilde{\omega}_2^2, \\ & (1 + a_1) p_1'' + \varkappa \sigma_1^2 p_1' + \sigma_1^2 p_1 + \varepsilon a_5 (2\tilde{\omega}_2 p_0' + \tilde{\omega}_2' p_0) + \\ & + \varepsilon A_2^- (2\tilde{\omega}_2 p_2' + \tilde{\omega}_2' p_2) - \varepsilon^2 \tilde{\omega}_2^2 (A_{12} + A_{13} + a_1) p_1 - \varepsilon^2 \tilde{\omega}_2^2 A_3 p_3 = -\varepsilon a \tilde{\omega}_2', \\ & p_k'' + \varkappa \sigma_k^2 p_k' + \sigma_k^2 p_k + \varepsilon A_{k+1}^- (2\tilde{\omega}_2 p_{k+1}' + \tilde{\omega}_2' p_{k+1}) - \\ & - \varepsilon A_k^- (2\tilde{\omega}_2 p_{k-1}' + \tilde{\omega}_2' p_{k-1}) - \varepsilon^2 \tilde{\omega}_2^2 p_{k-2} D_k \varepsilon^2 \tilde{\omega}_2^2 (A_{k1} + A_{k3}) p_k - \\ & - \varepsilon^2 \tilde{\omega}_2^2 p_{k+2} A_{k+2} = f_{p_k}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$f_{p_2} = \varepsilon^2 \tilde{\omega}_2^2 b_{212}, \quad f_{p_k} = 0 \Leftrightarrow k \geq 3,$$

где $\varepsilon = \omega_* \nu^{-1}$, $\varkappa = \chi b \nu$, $\sigma_i = \nu_i \nu^{-1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь штрихом обозначено дифференцирование по безразмерной переменной $\tau = \nu t$.

Рассматривается случай малых деформаций, при котором отношение $\varepsilon \ll 1$. Будем предполагать, что характерное время T_1 затухания свободных упругих колебаний на наименьшей частоте ν ($T_1 \sim \varkappa^{-1}$) существенно превосходит период T_0 этих колебаний ($T_0 \sim 1$), но намного меньше времени τ_* движения системы как целого вокруг центра масс - времени разворота. Это позволяет считать все переходные процессы по нормальным координатам закончившимися и учитывать только вынужденные упругие колебания системы. Положим для определенности, что величина \varkappa порядка ε . Заметим, что по физическому смыслу задачи величина τ_*^{-1} порядка ε , однако формально это обстоятельство в ходе решения задачи можно не учитывать. Введенные выше соотношения представляются в виде неравенств следующим образом:

$$0 < \varepsilon \sim \tau_*^{-1} \ll \varkappa \sim \varepsilon_1 \ll 1. \quad (1.26)$$

Решение системы уравнений (1.24) - (1.25) будем искать методом Пуанкаре, полагая, что в начальный момент времени спутник был неподвижен и недеформирован, т. е.

$$\omega_k(0) = p_k(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

Анализ уравнений (1.24) - (1.25) показывает, что с учетом (1.27) функции $\tilde{\omega}_2$ и p_k представимы в виде ряда по степеням малого параметра ε следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_2 &= \tilde{\omega}_{20} + \varepsilon^2 \tilde{\omega}_{22} + \dots, p_1 = \varepsilon p_{11} + \varepsilon^2 p_{13} + \dots, \\ p_0 &= \varepsilon^2 p_{02} + \dots, p_2 = \varepsilon^2 p_{22} + \dots, p_k = \varepsilon^k p_{kk} + \dots, k = 3, 4, \dots\end{aligned}\quad (1.28)$$

Система уравнений для функций $\tilde{\omega}_{20}$ и p_{11} будет

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{20}' &= \tau_*^{-1} (1 + \varepsilon_1 \cos \tilde{\mu} \tau) - \tilde{a}_0 p_{11}'', \tilde{a}_0 = a A^{-1} p_2, \\ (1 + a_1) p_{11}'' &+ \chi \sigma_1^2 p_{11}' + \sigma_1^2 p_{11} = -a \tilde{\omega}_{20}'.\end{aligned}$$

Её частное решение найдем в виде

$$\begin{aligned}p_{11} &= \Phi \cos(\tilde{\mu} \tau - \varphi) - \frac{a}{\tau_* \sigma_1^2}, \quad \cos \varphi = -\frac{\sigma_1^2 - \tilde{\mu}^2 (1 + \tilde{a}_1)}{\sigma_1^2 \tilde{m}_1}, \\ \tilde{\omega}_{20} &= \tau_*^{-1} \left(\tau + \frac{\varepsilon_1}{\tilde{\mu}} \sin \tilde{\mu} \tau \right) + \tilde{a}_0 \tilde{\mu} \Phi \sin(\tilde{\mu} \tau - \varphi), \quad \tilde{a}_1 = a_1 - a \tilde{a}_0, \\ \sin \varphi &= -\frac{\tilde{\mu} \chi}{\tilde{m}_1}, \quad \Phi = \frac{a \varepsilon_1}{\tau_* \tilde{m}_1 \sigma_1^2}, \quad \tilde{m}_1 = \left\{ \left[1 - \frac{\tilde{\mu}^2}{\sigma_1^2} (1 + \tilde{a}_1) \right]^2 + \tilde{\mu}^2 \chi^2 \right\}^{1/2}.\end{aligned}\quad (1.29)$$

Уравнения для p_{02} и p_{22} аналогичны друг другу. Например, из (1.25) следует уравнение для p_{02} :

$$(1 + a_3) p_{02}'' + \chi \sigma_0^2 p_{02}' + \sigma_0^2 p_{02} - a_5 (2 \tilde{\omega}_{20} p_{11}' + \tilde{\omega}_{20}' p_{11}) = a_4 \tilde{\omega}_{20}^2. \quad (1.30)$$

Для определения функции p_{22} требуется в решении, найденном для p_{02} , сделать следующие замены:

$$\sigma_0 \rightarrow \sigma_2, \quad a_5 \rightarrow A_2^-, \quad a_4 \rightarrow b_{212}, \quad a_3 \rightarrow 0. \quad (1.31)$$

Подставляя в (1.30) p_{11} и $\tilde{\omega}_{20}$ согласно (1.29), получим

$$(1+a_3)p_{02}'' + 2\sigma_0^2 p_{02}' + \sigma_0^2 p_{02} = F_1 + F_2 \tau^2 + (F_3 + F_6 \tau) \cos \tilde{\mu} \tau + (F_4 + F_5 \tau) \sin \tilde{\mu} \tau + F_7 \cos 2\tilde{\mu} \tau + F_8 \sin 2\tilde{\mu} \tau, \quad F_i = \text{const}, \quad (i=1, \dots, 8). \quad (1.32)$$

В дальнейшем при определении закона движения деформированного спутника как целого ограничимся учетом колебательных составляющих в p_{02} и p_{22} . В конечную формулу войдут лишь выражения

$$F_5 = 2\varepsilon_1 \tau_*^{-2} [\tilde{\mu} \tilde{\Phi} \cos \varphi (a_4 \tilde{a}_0 - a_5) + a_4 \tilde{\mu}^{-1}], \\ F_8 = 2\varepsilon_1 \tau_*^{-2} \tilde{\mu} \tilde{\Phi} \sin \varphi (a_5 - a_4 \tilde{a}_0), \quad \Phi = \varepsilon_1 \tau_*^{-1} \tilde{\Phi}.$$

Из уравнения (1.24) с учетом представления (1.28) получим

$$\tilde{\omega}'_{22} = -(\tilde{J}'_{22} \tilde{\omega}_{20} + \tilde{J}_{22} \tilde{\omega}'_{20}) A^{-1}, \quad \tilde{J}_{22} = 2\rho_2 (a_4 p_{02} + b_{212} p_{22}). \quad (1.33)$$

Структура частного решения уравнения (1.32), соответствующего вынужденным упругим колебаниям, имеет вид

$$p_{02} = (E_1 + E_2 \tau) \sin \tilde{\mu} \tau + (E_3 + E_4 \tau) \cos \tilde{\mu} \tau + E_5 \cos 2\tilde{\mu} \tau + E_6 \sin 2\tilde{\mu} \tau, \quad (1.34)$$

где E_i — некоторые постоянные, зависящие от F_i . Подставим (1.34) и аналогичное ему выражение для p_{22} в (1.33). Для выделения медленно меняющейся составляющей в $\tilde{\omega}_{22}$ усредним правую часть (1.33) по переменной $y = \tilde{\mu} \tau$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Имеем

$$\tilde{\omega}'_{22} = \Lambda, \quad \Rightarrow \tilde{\omega}_{22} = \Lambda \tau, \\ \Lambda = \varepsilon_1 \rho_2 \tau_*^{-1} [(\tilde{\mu}^{-1} - \tilde{a}_0 \tilde{\mu} \tilde{\Phi} \cos \varphi)(a_4 E_2 + b_{212} H_2) - \\ - \tilde{a}_0 \tilde{\mu} \tilde{\Phi} \sin \varphi (a_4 E_4 + b_{212} H_4)], \quad (1.35)$$

где H_i получается из E_i с помощью замены (1.31). Подставляя выражение (1.34) в (32), найдем

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \left\{ F_6 \varkappa \sigma_0^2 \tilde{\mu} - F_5 [\tilde{\mu}^2 (1 + a_3) - \sigma_0^2] \right\} / m_0^2, \\
 m_0 &= \left\{ [\tilde{\mu}^2 (1 + a_3) - \sigma_0^2]^2 + \varkappa^2 \sigma_0^4 \tilde{\mu}^2 \right\}^{1/2}, \\
 E_4 &= \frac{E_2 [\sigma_0^2 - \tilde{\mu}^2 (1 + a_3)] - F_5}{\varkappa \sigma_0^2 \tilde{\mu}}.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Из (1.28) и (1.35), (1.36) следует, что отклонение фактической угловой скорости упругого спутника от программной (для твердого спутника) происходит в среднем линейно по времени. Скорость нарастания этого отклонения является величиной порядка $\varepsilon^2 \tau_*^{-3} \varepsilon_1^2$ или, учитывая соотношения (1.26), порядка $\varepsilon^5 \varepsilon_1^2$ и за время $\tau = \tau_*$ составит величину порядка $\varepsilon^4 \varepsilon_1^2$. Относительная ошибка $(\omega_2 - \omega_{20}) / \omega_{20}$ постоянна во все время движения и является величиной порядка $\varepsilon^4 \varepsilon_1^2$. Заметим, что при резонансах вида $\tilde{\mu}(1 + \tilde{a}_1) = \sigma_1^2$, $\tilde{\mu}(1 + a_3) = \sigma_0^2$ и $\tilde{\mu} = \sigma_2^2$ величина отклонения фактического движения от расчетного увеличивается в \varkappa^{-1} , т. е. в ε_1^{-1} раз по сравнению с безрезонансным случаем.

1.4. Плоские движения деформируемого спутника в гравитационном поле сил

Не учитывая внешних моментов, которыми в задачах управления часто можно пренебречь, спутник представляется колебательной системой без внешних восстанавливающих моментов (моментов, пропорциональных отклонениям угловой координаты от равновесного положения), без внешних демпфирующих моментов (моментов, пропорциональных угловой скорости) и

без естественного положения равновесия. В данном случае единственными моментами, действующими на КА, являются управляющие моменты, создаваемые исполнительными органами системы ориентации [56].

При решении задачи стабилизации оси симметрии спутника Sx_3 в заданном направлении X воспользуемся управляющим моментом вида : $M = -k_1\alpha - k_2\dot{\alpha}$, где α – угол между направлениями оси X и x ; k_1 и k_2 – коэффициенты обратной связи по углу и скорости поворота соответственно.

Дифференциальные уравнения движения системы как целого вокруг центра масс имеют вид:

$$(A + J_{22})\dot{\omega}_2 + J_{12}\dot{\omega}_1 + \dot{J}_{12}\omega_1 + J_{23}\dot{\omega}_3 + \dot{J}_{22}\omega_2 + \dot{J}_{23}\omega_3 + J_{12}\omega_2\omega_3 - J_{23}\omega_1\omega_2 + (A - C + J_{11} - J_{33})\omega_1\omega_3 + J_{13}(\omega_3^2 - \omega_1^2) = M_2 - (\mathbf{e}_2, \frac{d\mathbf{G}_u}{dt}), \quad (1.37)$$

$$J_{11} = 2\rho(a_4p_0 - b_{212}p_2), \quad J_{22} = 2\rho(a_4p_0 + b_{212}p_2), \quad J_{33} = 4\rho C_{011}p_0, \\ J_{12} = -2\rho b_{212}q_2, \quad J_{13} = -\rho a_7p_1, \quad J_{23} = -\rho a_7q_1,$$

$$\mathbf{G}_u = \int_{\Omega} \rho[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{u}}]dx = \rho(-a\dot{q}_1, a\dot{p}_1, 2b_{021}\dot{q}_0),$$

$$\frac{d\mathbf{G}_u}{dt} = \rho[-a(\ddot{q}_1 + \omega_3\dot{p}_1) + 2\omega_2\dot{q}_0b_{021}, a(\ddot{p}_1 - \omega_2\dot{q}_1) - 2\omega_1\dot{q}_0b_{021}, \\ a(\omega_1\dot{p}_1 + \omega_2\dot{q}_1) + 2\ddot{q}_0b_{021}],$$

Два других уравнения могут быть получены из (1.37) циклической перестановкой индексов $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$. Здесь $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ и $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – проекции управляющего момента и угловой скорости спутника на оси $Sx_i (i=1, 2, 3)$, связанные с твёрдой частью; $J_{ij}[p_k, q_k]$ – компоненты тензора

инерции деформированной системы в осях Cx_i , A и C – экваториальный и осевой моменты инерции недеформированной системы соответственно; Ω – область, занимаемая упругой частью конструкции с плотностью $\rho = \text{const}$, \mathbf{e}_i – орт по оси Cx_i .

Для реализации плоского движения системы вокруг оси Cx_2 (предполагается, что центр масс недеформированной системы C' принадлежит твёрдой части) необходимо в начальный момент времени $t=0$ выполнение равенств:

$$\omega_1(0) = \omega_3(0) = q_k(0) = 0, \quad (k=0,1,2,\dots,\infty)$$

Можно убедиться, что эти нулевые значения будут сохраняться во всё время движения. Тогда исходная система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} (A + J_{22})\dot{\omega}_2 + J_{22}\omega_2 &= M_2 - \rho a \ddot{p}_1, \\ (1 + a_3)\ddot{p}_0 + \chi b \gamma_0^2 \dot{p}_0 - 2a_5 \omega_2 \dot{p}_1 - a_5 \dot{\omega}_2 p_1 &= a_4 \omega_2^2 (1 + a_1) \ddot{p}_1 + \chi b \gamma_1^2 \dot{p}_1 + \\ + \gamma_1^2 p_1 + A_2 (2\omega_2 \dot{p}_2 + \dot{\omega}_2 p_2) + a_5 (2\omega_2 \dot{p}_0 + \dot{\omega}_2 p_0) &= -a \dot{\omega}_2, \end{aligned} \quad (1.38)$$

где $M_2 = -Ak^2\alpha$, $\omega_2 = \dot{\alpha}$, $[k^2] = c^{-2}$, а коэффициенты $a, a_1, A_{k+1}^{-1}, b_{212}$ зависят от геометрии упругой части [35].

Далее рассматривается физически обоснованный случай позволяющий перейти к квазистатической постановке задачи. Предполагается, что выполняются условия: $k \ll \nu$, где $\nu = \min\{\nu_i\}$ – наименьшая собственная частота свободных колебаний упругой части спутника относительно его твёрдой части,

и вводится малый параметр $\varepsilon = \frac{k}{v} \ll 1$. Тогда систему уравнений (1.38) можно

переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= -\alpha(1 - J_{22}A^{-1}) - A^{-1}J'_{22}\alpha' - \rho aA^{-1}p'aA^{-1}p_1'', \\ (1 + a_1)\varepsilon^2 p_1'' + \varkappa\varepsilon\sigma_1^2 p_1' + \sigma_1^2 p_1 + \varepsilon^2 A_2^{-1}(2\alpha' p_2' + \alpha'' p_2) &= -\varepsilon^2 a\alpha'', \\ \varepsilon^2 p_2'' + \varkappa\varepsilon\sigma_2^2 p_2' + \sigma_2^2 p_2 - \varepsilon^2 A_2^{-1}(2\alpha' p_1' + \alpha'' p_1) &= \varepsilon^2 b_{212}\alpha', \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\sigma_i = \frac{v_i}{v}, \quad (') = \frac{d}{d\tau}, \quad \tau = kt.$$

Угол α в процессе управления КА может изменяться в широких пределах так что $\alpha \sim 1$. Отметим, что в уравнениях (1.39) опущены функции p_k с индексами $k \geq 3$, имеющие более высокий порядок малости, чем p_1 и p_2 а также функции p_0 , влияние которых на процесс стабилизации аналогично влиянию p_2 .

Решение второго и третьего уравнений в (1.39) при условии, что $\varepsilon \ll \varkappa \ll 1$ ($\varkappa = \chi b v, b > 0$), описывающее квазистатические деформации системы, может быть найдено в виде

$$p_1 = \varepsilon^2 a \sigma_1^{-2} (\alpha - \varkappa \varepsilon \alpha'), \quad p_2 = \varepsilon^2 b_{212} \sigma_2^{-2} (\alpha_1^{12} - 2 \varkappa \varepsilon a \alpha'), \quad (1.40)$$

функции p_1 и p_2 имеют вид (1.40) в асимптотическом приближении, начиная с некоторого момента времени $t > T_1$, $T_1 \sim (\varkappa v)^{-1}$ – характерное время затухания колебаний КА с собственными высокими частотами и малой амплитудой порядка ε^2 около некоторого текущего значения α . Подставляя (1.40) в первое уравнение в (1.39), преобразуем его к виду:

$$\alpha'' = -\alpha - \varepsilon^2 \left[\tilde{a}(\varkappa \alpha') + \tilde{b} \alpha (3\alpha^{12} + 4\varkappa \alpha \alpha') - 2\tilde{b} \varkappa \alpha^{13} \right],$$

$$\tilde{a} = \rho A a^2 \sigma_1^{-2} > 0, \tilde{b} = 2\rho b_{212}^2 A^{-1} \sigma_2^{-2} > 0. \quad (1.41)$$

Решение уравнения (1.41) представим как $\alpha = x \cos y$, причем функции x и y удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} x' &= -\varepsilon^2 \Phi_1(x, y), & \Phi_1 &= \Phi \sin y, \\ y' &= 1 - \varepsilon^2 x^{-1} \Phi_2(x, y), & \Phi_2 &= \Phi \cos y, \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\Phi = \tilde{a}x(\cos y + \varkappa \sin y) + \tilde{b}x^3 \cos y(3 \sin^2 y - 2\varkappa \sin 2y) + 2\tilde{b} \varkappa x^3 \sin^3 y.$$

Усредняя правые части уравнений (1.42) по переменной y на периоде 2π , получим:

$$x' = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \varkappa \left(\tilde{a} + \frac{1}{2} \tilde{b} x^2 \right), \quad y' = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\tilde{a} + \frac{3}{4} \tilde{b} x^2 \right).$$

Отсюда следует, что если в M_y отсутствует демпфирующая составляющая, то эту роль могут выполнять вязкоупругие свойства материала. Однако время затухания колебаний может быть велико: $O[(\varepsilon^3 \varkappa)^{-1}]$.

1.5. Анализ динамической системы упругое-твердое тело в режиме переориентации

Для определения положения оси симметрии спутника в орбитальной системе координат введем в рассмотрение угол $\alpha = \tau - \alpha_2 + \frac{\pi}{2}$, где α_2 — угол поворота аппарата вокруг оси Sx_2 , орбитальной плоскости орбиты центра масс.

При этом направляющие косинусы будут: $\gamma_1 = \sin\alpha$, $\gamma_3 = \cos\alpha$. Уравнение для $\alpha(t)$ запишется в виде:

$$\alpha'' + 3\beta\gamma_1\gamma_3 + \beta\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \quad (1.43)$$

здесь

$$\begin{aligned} \alpha_0 = & -3\varepsilon^2 A^{-1} \rho_2 \{2\gamma_1\gamma_3[(\lambda_{02} + \lambda_2)(1-\alpha')^2 + (1-3\gamma_3^2 - 6\varkappa\varepsilon\alpha'\gamma_1\gamma_3)(\lambda_{01} + \lambda_2) + \\ & + 2\lambda_2] + 3(\gamma_3^2 - \gamma_1^2)[\gamma_1\gamma_3 - \varepsilon\varkappa\alpha'(\gamma_3^2 - \gamma_1^2)]\lambda_{11}\} - 12\varepsilon^2 A^{-1} \rho_2 [\gamma_1\gamma_3 - \\ & - \varkappa\varepsilon\alpha'(\gamma_3^2 - \gamma_1^2)]\alpha'[\alpha\lambda_{12} + (1-\alpha')(\lambda_{02} + \lambda_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & 12\varkappa\varepsilon^2 A^{-1} \rho_2 \alpha'(1-\alpha')^2(\gamma_3^2 - \gamma_1^2)(\lambda_{03} + \lambda_2) + \\ & + 6\varepsilon^2 A^{-1} \rho_2 \gamma_1\gamma_3 \{[6\varkappa\varepsilon\gamma_1\gamma_3 - (1-3\gamma_3^2)](\lambda_{02} + \lambda_2) - (1-\alpha')^2(\lambda_{03} + \lambda_2) - 2\lambda_2\} + \\ & + 3\varepsilon^2 A^{-1} \rho_2 [-\gamma_1\gamma_3 + \varkappa\varepsilon\alpha'(\gamma_3^2 - \gamma_1^2)][3(\gamma_3^2 - \gamma_1^2)\lambda_{12} + 4\alpha^{12}\lambda_{13}], \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\lambda_{01} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{0m}^{-2} (c_{0m11} - c_{0m33})^2, \quad \lambda_{02} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{0m}^{-2} (c_{0m11}^2 - c_{0m33}^2),$$

$$\lambda_{03} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{0m}^{-2} (c_{0m11} + c_{0m33})^2, \quad \lambda_{11} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{1m}^{-2} (b_{1m23} + b_{1m32})^2,$$

$$\lambda_{12} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{1m}^{-2} (b_{1m32}^2 - b_{1m23}^2), \quad \lambda_{13} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{1m}^{-2} (b_{1m23} - b_{1m32})^2,$$

$$\lambda_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2m}^{-2} b_{2m12}^2.$$

Из (1.43) следует, что существуют две серии положений равновесия спутника в орбитальной системе координат:

$$1) \alpha = \{\pi n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}, \quad 2) \alpha = \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \right\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}.$$

Уравнения в вариациях для первой серии положений равновесия будут:

$$\alpha' + a_1 \alpha' + a_2 \alpha = 0, \quad (\alpha - \alpha' \ll O(1))$$

$$a_1 = 3\varepsilon^2 \kappa A^{-1} \rho_2 \{3\lambda_{11} + \beta[4(\lambda_{03} + \lambda_2) + 3\lambda_{12}]\}, \quad (1.44)$$

$$a_2 = 3\{\beta - \varepsilon^2 A^{-1} \rho_2 [2(\lambda_{02} + \lambda_2 - 2\lambda_{01}) + 3\lambda_{11} + \beta[3\lambda_{12} - 2(2\lambda_{02} - \lambda_{03} - \lambda_2)]]\}.$$

Из (1.44) следует, что это положение равновесия асимптотически устойчиво. В таком положении ось симметрии Sx_3 коллинеарна радиусу-вектору \mathbf{R} центра масс КА, а сам спутник деформирован по формам с номерами $k=2$ под действием центробежных сил инерции и по формам с номером $k=0$ (продольно-поперечные деформации под действием центробежных и гравитационных сил). Вторая серия положений равновесия, при которой ось симметрии спутника ортогональна \mathbf{R} , неустойчива.

Глава 2. ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА (КА) С УПРУГИМИ И ДИССИПАТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В РЕЖИМЕ ОРИЕНТАЦИИ

В данной главе исследуются вращательные движения космического аппарата с упругими и диссипативными элементами как целого относительно центра масс с учетом органов системы управления, выполненных в виде двухстепенных гиросtabilизаторов, в режиме ориентации. Рассмотрены колебательные процессы, связанные с ориентацией КА, когда члены, обусловленные упругими колебаниями конструкции, сопоставимы с гироскопическими членами. Изучается модельная задача переориентации КА. Показано, при каких предположениях упругие колебания не оказывают влияния на плоский разворот спутника и когда он невозможен. Найдены аналитические выражения, позволяющие оценить отклонения КА от программного движения (дрейф угловой скорости).

Теоретические исследования вращательного движения сложных механических систем являются трудной математической задачей [31, 34, 37, 50, 52, 57, 68, 69]. Качественный анализ таких систем может иметь существенное значение для фундаментальных исследований в данной области.

Рассмотрены колебательные процессы, связанные с ориентацией КА, когда члены обусловленные упругими колебаниями конструкции, сопоставимы с гироскопическими членами. Изучена модельная задача переориентации КА, показано при каких предположениях упругие колебания системы не оказывают влияния на плоский разворот КА и когда он невозможен.

Следует отметить, что по мере увеличения размеров КА влияние упругих свойств конструкции в переходных процессах, связанных с изменением режима ориентации, а также необходимость их учета возрастает. Достижение высокой точности ориентации КА требует учета влияния упругих колебаний на вращательное движение всей системы как целого относительно центра масс.

При решении задачи ориентации КА по результатам измерений радиосигналов, поступающих с систем GPS/ГЛОНАСС, при использовании аппаратуры спутниковой навигации (АСН), работа навигационных спутников (НС) складывается как из передатчиков радиоимпульсов времени, так и данных, позволяющих определить их положение в гринвичской геоцентрической системе координат на момент излучения (координатно-временное и навигационное обеспечение). Имеют место ситуации, когда угловое положение КА относительно системы координат может быть неблагоприятным с точки зрения радиовидимости НС антеннами АСН. На практике возникают длительные интервалы времени, когда общие НС для всех пар антенн отсутствуют. В таких случаях для формирования необходимых данных предполагается в дополнение к навигационному процессору АСН использовать текущую поправку времени $dUT1$ ($dUT1$ - рассогласование шкал времени UTC и UT1) и ее производную, которые являются фундаментальной составляющей параметров вращения Земли (ПВЗ). Повышение точности требует знания ПВЗ [7, 65]. Это позволит строить надежные алгоритмы формирования оценок ориентации как в штатном режиме, так и в экстремальных случаях.

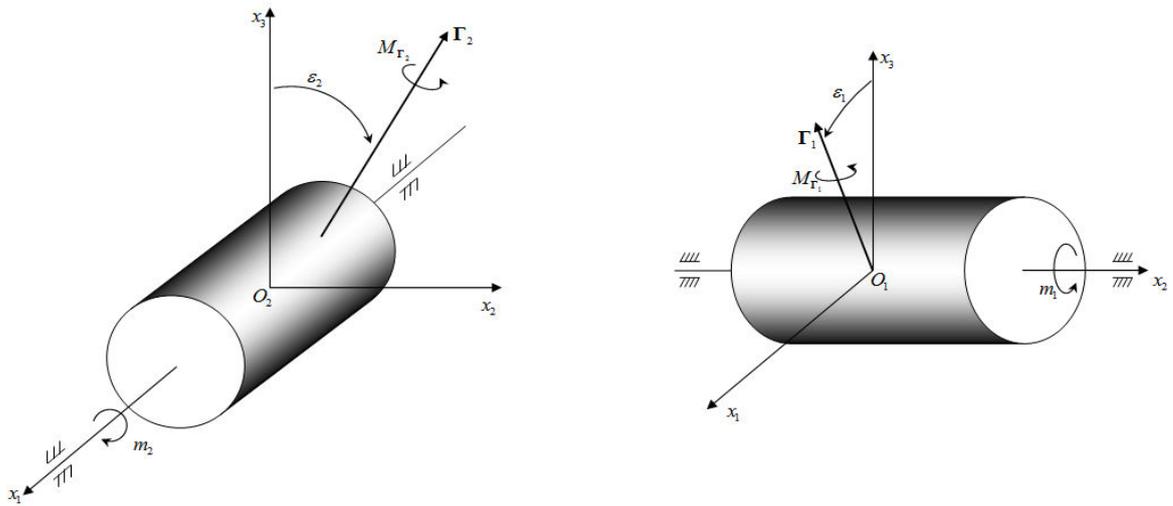


Рис.1. Система из двух двухстепенных гиросtabilизаторов и углы отклонения ε_1 и ε_2 кинетических моментов $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ от вектора кинетического момента \mathbf{G} спутника

2.1. Уравнения движения деформируемого КА относительно центра масс при наличии гиросtabilизаторов

Для описания движения деформируемой системы Ω как целого относительно центра масс с учетом органов управления, исполненных в виде двух двухстепенных гиросtabilизаторов (рис. 1), воспользуемся динамическими уравнениями Эйлера [51]. Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (A + J_{11})\dot{\omega}_1 + J_{12}\dot{\omega}_2 + \dot{J}_{11}\omega_1 + \dot{J}_{12}\omega_2 + J_{23}\omega_2^2 + J_{13}\omega_1\omega_2 &= M - I\ddot{\varepsilon}_2 - \\ &- \dot{\Gamma}_1\varepsilon_1 - \Gamma_1\dot{\varepsilon}_1 - \omega_2(\Gamma_1 + \Gamma_2) - \left(\frac{d\mathbf{G}_u}{dt}, \mathbf{e}_1\right), \\ (A + J_{22})\dot{\omega}_2 + J_{12}\dot{\omega}_1 + \dot{J}_{22}\omega_2 - \dot{J}_{13}\omega_1^2 - J_{23}\omega_1\omega_2 + J_{12}\dot{\omega}_1 &= -I\ddot{\varepsilon}_1 + \\ &+ \dot{\Gamma}_2\varepsilon_2 + \Gamma_2\dot{\varepsilon}_2 + \omega_1(\Gamma_1 + \Gamma_2) - \left(\frac{d\mathbf{G}_u}{dt}, \mathbf{e}_2\right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} I\ddot{\varepsilon}_1 &= -I\dot{\omega}_2 + \Gamma_1\omega_1 - (Ix_2 - Ix_3)\varepsilon_1\omega_1^2 + m_1, \\ I\ddot{\varepsilon}_2 &= -I\dot{\omega}_1 - \Gamma_2\omega_2 - (Ix_2 - Ix_3)\varepsilon_2\omega_2^2 + m_2, \end{aligned}$$

$$m_i = -h\dot{\varepsilon}_i - k\varepsilon_i (i=1,2), \quad \mathbf{G}_u = \int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}})\rho dx, \quad M = m_0 \cos \psi t,$$

где m_0, ψ – положительные постоянные величины.

В уравнениях (2.1) предполагается, что реактивные органы управления поддерживают проекцию угловой скорости КА на ось симметрии вблизи нуля, т.е. выполняется сервосвязь $\omega_3 \approx 0$. Далее, $J_{ij}[\mathbf{u}]$ – компоненты тензора инерции деформированного спутника в системе координат $Sx_1x_2x_3$ с началом в его центре масс и осями, параллельными главным центральным осям инерции недеформированной системы; \mathbf{G}_u – поправка к кинетическому моменту,

возникающая вследствие деформируемости системы; \mathbf{u} – вектор упругого смещения при деформациях; $\mathbf{\Gamma}_j$ – вектор собственного кинетического момента j -того гиросtabilизатора, $\Gamma_j = |\mathbf{\Gamma}_j|$ – соответствующий ему модуль; $\omega_i (i=1,2,3)$ – проекции угловой скорости КА на оси Cx_i ; \mathbf{e}_i – орт оси Cx_i ; $\varepsilon_j (j=1,2)$ – малый угол поворота вектора $\mathbf{\Gamma}_j$; A – экваториальный момент инерции недеформированной системы; I, I_{x_2}, I_{x_3} – моменты инерции гирузлов стабилизаторов относительно осей подвеса; m_1 и m_2 – моменты регулирования относительно осей подвеса гиродинов, отсчитываемые в направлении увеличения углов ε_1 и ε_2 и пропорциональные угловым скоростям $h\dot{\varepsilon}_{1,2}$ и угловым перемещениям $k\varepsilon_{1,2}$, где $h > 0$, $k > 0$ – постоянные, m_0, ψ – амплитуда и частота внешнего осциллирующего момента \mathbf{M} , приложенного вдоль оси Cx_i ; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ – область, занимаемая твердой Ω_1 и упругой Ω_2 частями спутника.

2.2. Уравнения для нормальный координат

Уравнения движения системы (2.1) должны быть дополнены уравнениями деформаций для определения вектора \mathbf{u} . Динамика собственных форм колебаний упругой части при наличии вращательных и центробежных сил инерции описывается счетномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальных координатах (модальный подход) [52, 66, 70]. В случае осесимметричной упругой части с осесимметричными граничными условиями вектор \mathbf{u} представляется в виде ряда.

Ограничивая число рассматриваемых форм, предположим, что каждому k соответствует одна из главных форм колебаний (одно значение m).

Подставляя разложение (1.2) в уравнения, соответствующие принципу Даламбера-Лагранжа, для рассматриваемой системы после некоторых вычислений получаем уравнения для нормальных координат [51]:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_k + \chi b v_k^2 \dot{q}_k + v_k^2 q_k + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \times \mathbf{V}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \times \mathbf{V}_k + \\ + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{u} \times \mathbf{V}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \times \mathbf{V}_k + \\ + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \times \mathbf{V}_k - \int_{\Omega_2} (\ddot{\mathbf{u}}_c + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{u}_c + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_c \times \delta \mathbf{u}) dx = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\delta q_l = \begin{cases} 0, l \neq k, \\ 1, l = k, \end{cases} \quad \delta p_l = 0.$$

Уравнение для p_k получается из (2.3) заменой \mathbf{V}_k на \mathbf{W}_k . Заметим, что при деформациях центр масс S системы смещается в точку S' на вектор \mathbf{u}_c , который вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{u}_c = m^{-1} \int_{\Omega_2} \rho_2 \mathbf{u} dx, \quad m = \int_{\Omega_2} \tilde{\rho} u dx, \quad \tilde{\rho} = \begin{cases} \rho_1, \mathbf{r} \in \Omega_1 \\ \rho_2, \mathbf{r} \in \Omega_2 \end{cases}.$$

Как отмечалось, Ω_1 и Ω_2 – области, занимаемые твердой и упругой частями спутника соответственно. Коэффициенты разложения инерционных вращательных и центробежных сил по ортонормированным собственным формам представляются следующим образом, к примеру [67]:

$$(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}), \mathbf{V}_k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{n}_{ij} (q_l A_{lkij} + p_l B_{lkij}),$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}), \mathbf{W}_k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{n}_{ij} (q_l C_{lkij} + p_l D_{lkij}),$$

где введены обозначения для коэффициентов

$$n_1 = -(\omega_2^2 - \omega_3^2), \quad n_{12} = n_{21} = \omega_1 \omega_2, \quad n_{13} = n_{31} = \omega_1 \omega_3,$$

$$n_2 = -(\omega_1^2 - \omega_3^2), \quad n_{23} = n_{32} = \omega_2 \omega_3, \quad n_{33} = n_{31} = -(\omega_1^2 - \omega_2^2),$$

$$A_{lkij} = \int_{\Omega_2} V_{li} V_{kj} dx, \quad B_{lkij} = \int_{\Omega_2} W_{li} W_{kj} dx,$$

$$C_{lkij} = \int_{\Omega_2} V_{li} W_{kj} dx, \quad D_{lkij} = \int_{\Omega_2} W_{li} W_{kj} dx.$$

Далее, уравнения для нормальных координат, записанные в безразмерном виде, с отбрасыванием в левой части квадратичных по компонентам угловой скорости слагаемых будут иметь вид:

$$q_0'' + \varkappa \sigma_0^2 q_0' + \sigma_0^2 q_0 + 2A_{1031}(\alpha' p_1' + \beta' q_1') + A_{1031}(\alpha'' p_1 + \beta'' q_1) = 0,$$

$$(1 + a_3)p_0'' + \varkappa \sigma_0^2 p_0' + \sigma_0^2 p_0 - 2a_5(\beta' p_1' - \alpha' q_1') -$$

$$- a_5(\beta'' p_1 - \alpha'' q_1) = a_4(\alpha'^2 + \beta'^2),$$

$$(1 + a_1)q_1'' + \varkappa \sigma_1^2 q_1' + \sigma_1^2 q_1 - 2A_{1031}\beta' q_0' - 2a_5\alpha' p_0' +$$

$$+ 2A^-(\alpha' p_2 + \beta' q_2') - A_{1031}\beta'' q_0 - a_5\alpha'' p_0 + A_2^-(\alpha'' p_2 + \beta'' q_2) = a\alpha'',$$

$$(1 + a_1)p_1'' + \varkappa \sigma_1^2 p_1' + \sigma_1^2 p_1 - 2A_{1031}\alpha' q_0' - 2a_5\beta' p_0' +$$

$$+ 2A^-(\beta' p_2 + \alpha' q_2') - A_{1031}\alpha'' q_0 + a_5\beta'' p_0 + A_2^-(\beta'' p_2 - \alpha'' q_2) = -a\beta'',$$

$$q_k'' + \varkappa \sigma_k^2 q_k' + \sigma_k^2 q_k + 2A_{k+1}^-(\alpha'' p_{k+1} + \beta'' q_{k+1}) +$$

$$+ A_k^-(\alpha'' p_{k-1} - \beta'' q_{k-1}) + 2A_{k+1}^-(\alpha' p_{k+1}' + \beta' q_{k+1}') +$$

$$+ 2A_k^-(\alpha' p_{k-1}' - \beta' q_{k-1}') = f_{q_k},$$

$$\begin{aligned}
& p_k'' + 2\sigma_k^2 p_k' + \sigma_k^2 p_k + A_{k-1}^- (\beta'' p_{k+1} - \alpha'' q_{k+1}) + \\
& + A_k^- (\alpha'' q_{k-1} + \beta'' p_{k-1}) + 2A_{k+1}^- (\beta' p_{k+1}' - \alpha' q_{k+1}') - \\
& - 2A_k^- (\alpha' q_{k-1}' + \beta' p_{k-1}') = f_{p_k}, (k \geq 2),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$f_{q_2} = -2\alpha\beta'b_{212}, \quad f_{p_2} = (\beta'^2 - \alpha'^2)b_{212}, \quad f_{q_k} = f_{p_k} = 0 \Leftrightarrow k \geq 3.$$

Коэффициенты $a_3, a_4, a_5, b_{212}, A_k^-, A_{1031}$ определяются областями Ω_1 и Ω_2 ; конкретные выражения приведены в [51].

Преобразуем уравнения (1.25) следующим образом. При малых угловых движениях КА относительно инерциального пространства ориентация его оси симметрии Sx_3 создается двумя малыми углами поворота α вокруг Sx_1 и β вокруг Sx_2 , причем $\omega_1 = \dot{\alpha}, \omega_2 = \dot{\beta}$. Введем безразмерное время $\tau = vt$, v – наименьшая собственная частота свободных упругих колебаний. Далее, пусть $\varepsilon = m_0 A^{-1} v^{-2}$ – величина, характеризующая амплитуду угловых колебаний твердого КА при вибрациях. Тогда система уравнений (2.1) переписется так:

$$\begin{aligned}
& \alpha'' + (J_{12}\beta'' + J_{11}'\alpha' + J_{12}'\beta' + J_{23}\beta'^2 + J_{13}\alpha\beta')A^{-1} = \\
& = \left\{ \varepsilon \cos\psi\tilde{\tau} - \tilde{I}\varepsilon_2'' - \tilde{\Gamma}_1\varepsilon_1' - \tilde{\Gamma}_1\varepsilon_1' - \beta'(\tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2) + aA^{-1}\rho q_1'' \right\} (1 - J_{11}A^{-1}), \\
& \beta'' + (J_{12}\alpha'' + J_{12}'\alpha' + J_{22}'\beta' - J_{23}\alpha\beta')A^{-1} = \\
& = \left\{ -\tilde{I}\varepsilon_1'' + \tilde{\Gamma}_2'\varepsilon_2 - \tilde{\Gamma}_2\varepsilon_2' + \alpha'(\tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2) - aA^{-1}\rho p_1'' \right\} (1 - J_{22}A^{-1}),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1'' &= -\beta'' + \hat{\Gamma}_1\alpha' - (\hat{I}_{x_2} - \hat{I}_{x_3})\varepsilon_1\alpha'^2 + I^{-1}(-hv^{-1}\varepsilon_1' - k\varepsilon_1 v^{-2}), \\
\varepsilon_2'' &= -\alpha'' - \hat{\Gamma}_2\beta' - (\hat{I}_{x_2} - \hat{I}_{x_3})\varepsilon_2\beta'^2 + I^{-1}(-hv^{-1}\varepsilon_2' - k\varepsilon_2 v^{-2}).
\end{aligned}$$

В (2.4) приняты обозначения

$$\hat{I} = \frac{I}{A}, \quad \tilde{\Gamma}_i = \frac{\Gamma_i}{Av}, \quad \hat{\Gamma}_i = \frac{\Gamma_i}{Iv}, \quad \hat{I}_{x_j} = \frac{I_{x_j}}{I} \sim 1, \quad \tilde{\Psi} = \frac{\Psi}{v} \sim 1.$$

В дальнейшем ограничимся случаем сильного демпфирования на осях подвеса гиروزлов, т.е. будем считать что коэффициент h достаточно велик и сравним по порядку величины с собственным кинетическим моментом гиродинов. Тогда инерционными членами, содержащими ε'' , можно пренебречь по сравнению с членами, содержащими ε' . Модули $\tilde{\Gamma}_i = |\tilde{\Gamma}_i|$ будем считать постоянными и равными $\tilde{\Gamma}_1 = \tilde{\Gamma}_2 = \tilde{\Gamma}, \hat{\Gamma}_i = \Gamma$. Пусть также величина $\tilde{\Gamma}$ порядка ε^2 , а $\hat{I} \sim \varepsilon^3$.

2.3. Исследование устойчивости режима ориентации КА

Анализ системы (2.3) показывает, что в данной задаче все обобщенные координаты, кроме q_1 , имеют порядок малости $\varepsilon^2 \sim p_2 \sim p_0$ и выше, и их можно не рассматривать при дальнейшем анализе системы.

С точностью до порядка ε^2 систему уравнений (2.4) восьмого порядка заменим на следующую:

$$\alpha'' = \varepsilon \cos \tilde{\Psi} \tau + \tilde{a}_0 q'' - \tilde{\Gamma} \varepsilon_1' + 2\tilde{\Gamma} \beta', \quad \beta'' + \tilde{a}_7 q_1 \alpha' \beta' = \tilde{\Gamma} \varepsilon_2' + 2\tilde{\Gamma} \alpha',$$

$$\varepsilon_1' = h^{-1}(\Gamma \alpha' - kv^{-1} \varepsilon_1), \quad \varepsilon_2' = -h^{-1}(\Gamma \beta' + kv^{-1} \varepsilon_2), \quad (2.5)$$

$$(1 + a_1) q_1'' + 2\sigma_1^2 q_1' + \sigma_1^2 q_1 = a \alpha''.$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{a}_0 = \rho a A^{-1}, \quad \tilde{a}_7 = \rho a_7 A^{-1}, \quad a = b_{123} - b_{132}, \quad x = \chi b v,$$

$$\sigma_1 = \frac{v_1}{v}, \quad a_1 = -\rho m^{-1} d_{12}^2, \quad a_7 = b_{123} + b_{132},$$

где m – масса КА, а коэффициенты b_{12}, b_{123}, b_{132} находятся аналогично вышеуказанному; конкретные выражения приведены в [6].

Из анализа системы (2.5) следует, что в первом приближении функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\alpha'' = \varepsilon \cos \tilde{\psi} \tau + \tilde{a}_0 q_1'', \quad (1 + a_1) q_1'' + \varkappa \sigma_1^2 q_1' + \sigma_1^2 q_1 = a \alpha'',$$

будут иметь вид:

$$\alpha = \varepsilon \tilde{\psi}^{-1} (E_1 \sin \tilde{\psi} \tau - E_2 \cos \tilde{\psi} \tau), \quad q_1 = \varepsilon (F_1 \cos \tilde{\psi} \tau + F_2 \sin \tilde{\psi} \tau).$$

Здесь введены обозначения

$$F_1 = a m_0^{-1} [\sigma_1^2 - (1 + \tilde{a}_1) \tilde{\psi}^2], \quad F_2 = a m_0^{-1} \varkappa \sigma_1^2 \tilde{\psi},$$

$$m_0 = \varkappa^2 \sigma_1^4 \tilde{\psi}^2 + [\sigma_1^2 - (1 + \tilde{a}_1) \tilde{\psi}^2]^2 > 0, \quad (2.6)$$

$$E_1 = \tilde{a}_0 \tilde{\psi} F_2, \quad E_2 = (1 - \tilde{a}_0 \tilde{\psi}^2 F_1) \tilde{\psi}^{-1}, \quad \tilde{a}_1 = a_1 - a \tilde{a}_0.$$

Выражения для функций $\varepsilon_{1,2}$ в первом приближении в дальнейшем не понадобятся, поэтому не приведены. Перейдем к исследованию устойчивости тривиального решения системы (2.5), в которой периодические по переменной

$y = \tilde{\psi}\tau$ выражения усреднены. Поясним это, рассмотрев следующее упрощенное уравнение для β :

$$\beta'' + \tilde{a}_7 q_1 \alpha' \beta' = 0, \quad q_1 \alpha' = \frac{1}{2} \varepsilon^2 [G_0 + G_1 \cos 2y - G_2 \sin 2y],$$

$$G_0 = F_1 E_1 + F_2 E_2, \quad G_1 = F_1 E_1 - F_2 E_2, \quad G_2 = F_1 E_2 + F_2 E_1.$$

Его решение имеет вид

$$\beta' \tau = C \exp\left[-\frac{1}{2} \varepsilon^2 \tilde{a}_7 \left(G_0 \tau + \frac{G_1}{2\tilde{\psi}} \sin 2y - \frac{G_2}{2\tilde{\psi}} \cos 2y\right)\right],$$

$$C = \beta'(0) \exp\left[-\frac{1}{4\tilde{\psi}} \varepsilon^2 \tilde{a}_7 G_2\right] = \text{const.}$$

Отсюда видно, что для устойчивости переменной β' необходимо и достаточно, чтобы выражение $G_0 \tilde{a}_7$ было положительно. Периодические члены можно не учитывать, так как $G_0 \tau$ на порядок превышает величину периодических членов.

Далее рассматриваются уравнения

$$p' = -\xi_1 \xi_3 p - 2\xi_1 q + \xi_1 \xi_5 \varepsilon_1,$$

$$q' = 2\xi_1 p - (\xi_1 \xi_3 + \xi_7) q - \xi_1 \xi_5 \varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_1' = \xi_3 p - \xi_1 \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2' = -\xi_3 q - \xi_5 \varepsilon_2, \quad (2.7)$$

$$p = \alpha', \quad q = \beta', \quad \xi_1 = \tilde{\Gamma}, \quad \xi_3 = \Gamma/h, \quad \xi_5 = k/hv,$$

$$\xi_7 = \frac{1}{2} \tilde{a}_7 \varepsilon^2 G_0,$$

причем $\xi_1 \sim \xi_7 \sim \varepsilon^2$, $\xi_3 \sim \xi_5 \sim 1$.

Используя (2.6), выражение ξ_7 можно преобразовать к виду

$$\xi_7 = \varepsilon^2 H, \quad H = \frac{1}{2} \rho A^{-1} \omega^1 (b_{123}^1 - b_{132}^1) / m.$$

Характеристическое уравнение для системы (2.7) таково:

$$\begin{aligned} b_0 \lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 &= 0, \\ b_0 = 1, \quad b_1 = 2\xi_1 \xi_3 + 2\xi_5 + \xi_7, \quad b_4 = 4\xi_1^2 \xi_5^2, \\ b_2 = 4\xi_1^2 + (\xi_1 \xi_3 + \xi_5)^2 + \xi_7 (\xi_1 \xi_3 + 2\xi_5), \\ b_3 = 8\xi_1^2 \xi_5 + \xi_5 \xi_7 (\xi_1 \xi_3 + \xi_5). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Проведем анализ корней характеристического уравнения (2.8) с использованием метода малого параметра. В качестве малого параметра возьмем ε . В нулевом приближении имеем следующие выражения:

$$\lambda_{1,2} = -\xi_5 + O(\varepsilon), \quad \lambda_{3,4} = 0 + O(\varepsilon).$$

Таким образом, имеет место двукратный отрицательный при $\xi_5 > 0$ и двукратный нулевой корни, что свидетельствует о наличии критического случая и необходимости произвести исследование по более высоким степеням ε .

В первом приближении выражения для $\lambda_{1,2,3,4}$ останутся неизменными. Рассмотрим (1.33) во втором приближении. С учетом дополнительного слагаемого порядка ε^2 корни характеристического уравнения принимают вид:

$$\lambda_{1,2} = -\xi_5 - \xi_1 \xi_3 - \frac{1}{2} \xi_7 \pm (\xi_1 \xi_3 \xi_5 - \frac{1}{2} \xi_5 \xi_7) + O(\varepsilon^3),$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2}\xi_7 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\xi_7^2 - 16\xi_1^2} + O(\varepsilon^3),$$

Здесь $\lambda_{1,2}$ имеем порядок 1, а $\lambda_{3,4} \sim \varepsilon^2$. Для асимптотической устойчивости системы достаточно выполнение условий

$$\xi_5 > 0, \quad \xi_7 > 0. \quad (2.9)$$

При выполнении условий (2.9) вещественная часть $\lambda_{3,4}$ всегда отрицательна.

Отметим предельный случай, соответствующий такому значению кинетических моментов гиринов Γ , при котором гироскопические члены существенно превосходят перекрестные связи, вызванные деформациями КА при вибрациях. Тогда можно принять в системе уравнений (2.7) $\xi_1 \sim 1$ и условия асимптотической устойчивости принимают такой же вид, как найденные в [51] для твердого КА, т.е. $h > 0, k > 0$. Запас устойчивости при этом изменится на величину порядка ε^2 .

После установки факта асимптотической устойчивости оси динамической симметрии относительно кинетической оси естественно определить время, которое требуется для совмещения этих осей, т.е. скорость затухания свободных колебаний стабилизированной оси спутника относительно вектора G кинетического момента спутника. Для этих целей определим величину действительных частей корней характеристического уравнения (2.8):

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = -\xi_5 - \xi_1\xi_3 - \frac{1}{2}\xi_7 \pm (\xi_1\xi_3\xi_5 - \frac{1}{2}\xi_5\xi_7) + O(\varepsilon^3); \quad (2.10)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_{3,4}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\xi_7 + O(\varepsilon^3), \xi_7^2 - 16\xi_1^2 \leq 0; \\ -\frac{1}{2}\xi_7 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\xi_7^2 - 16\xi_1^2} + O(\varepsilon^3), \xi_7^2 - 16\xi_1^2 > 0. \end{cases}$$

При анализе выражений (2.10) для $\lambda_{3,4}$ явно выделяются три случая при различных значениях подкоренного выражения $\xi_7^2 - 16\xi_1^2$. При его положительных значениях изменение медленных переменных, соответствующих $\lambda_{3,4}$, носит аperiодический характер. При равенстве его нулю имеют место два кратных корня, и, как следствие, аperiодическое изменение с вековым членом. При отрицательных значениях подкоренного выражения корни $\lambda_{3,4}$ комплексно-сопряженные и изменение соответствующих переменных носит колебательный характер.

Степень устойчивости системы (2.7) равна минимальной по модулю действительной части корней λ_i и зависит от члена ξ_7 , характеризующего упругие свойства спутника, и величин ξ_1, ξ_3, ξ_5 , характеризующих параметры системы управления (гиродинов и демпферов). Поскольку величина $\xi_5 \sim 1$, а $\xi_1, \xi_7 \sim \varepsilon^2$, то степень устойчивости оси динамической симметрии определяется членами ξ_1 и ξ_7 .

Выделяются три случая при различных значениях выражения (2.9). При отрицательном значении сходимость носит колебательный характер (рис. 2). В случае, когда выражение (2.9) становится положительным или же обращается в ноль, то сходимость соответственно аperiодическая (рис. 3) или аperiодическая с вековым членом (рис. 4).

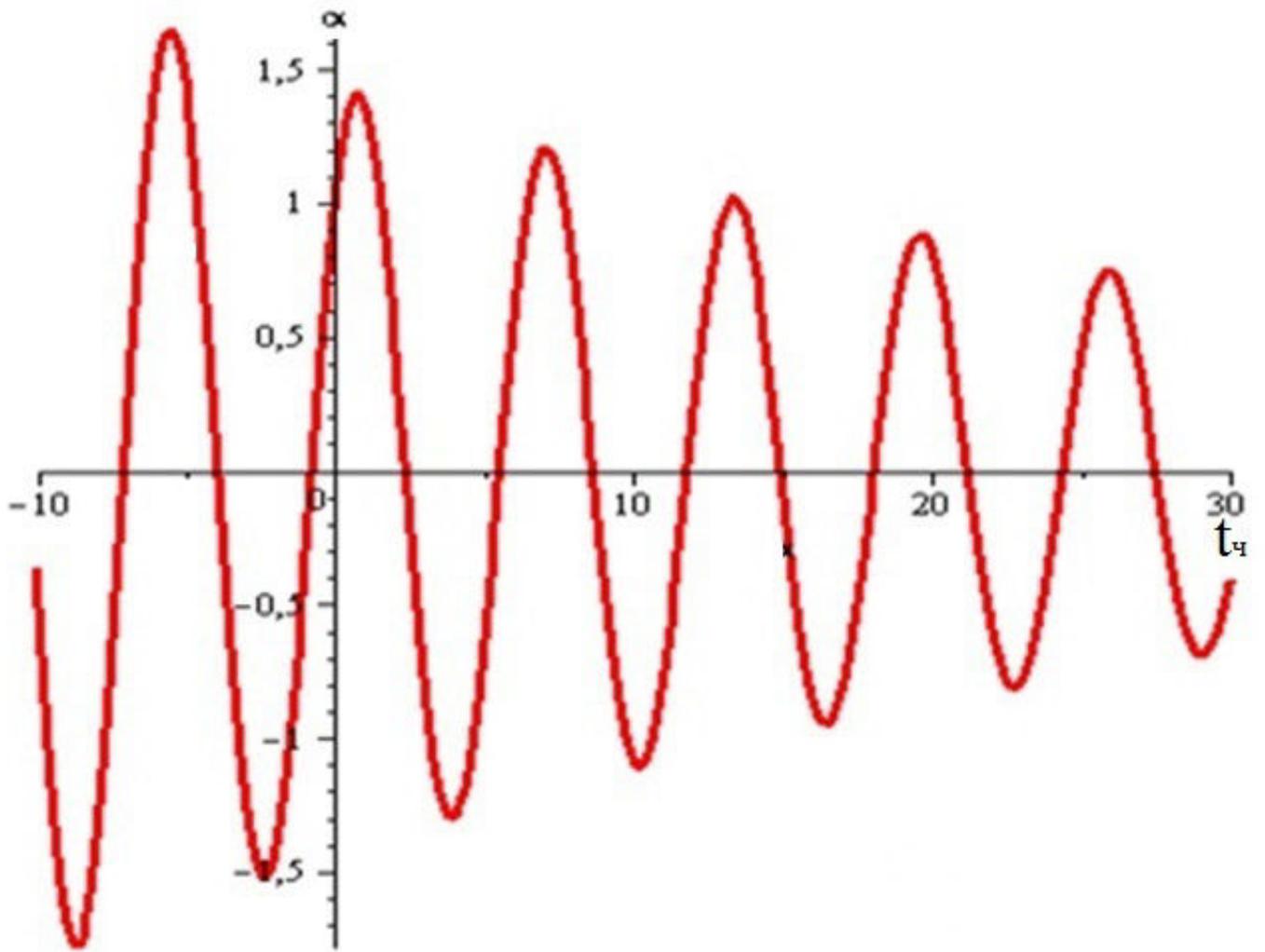


Рис.2. График зависимости угла α от времени в случае, когда $\xi_7^2 - 16\xi_1^2 < 0$.

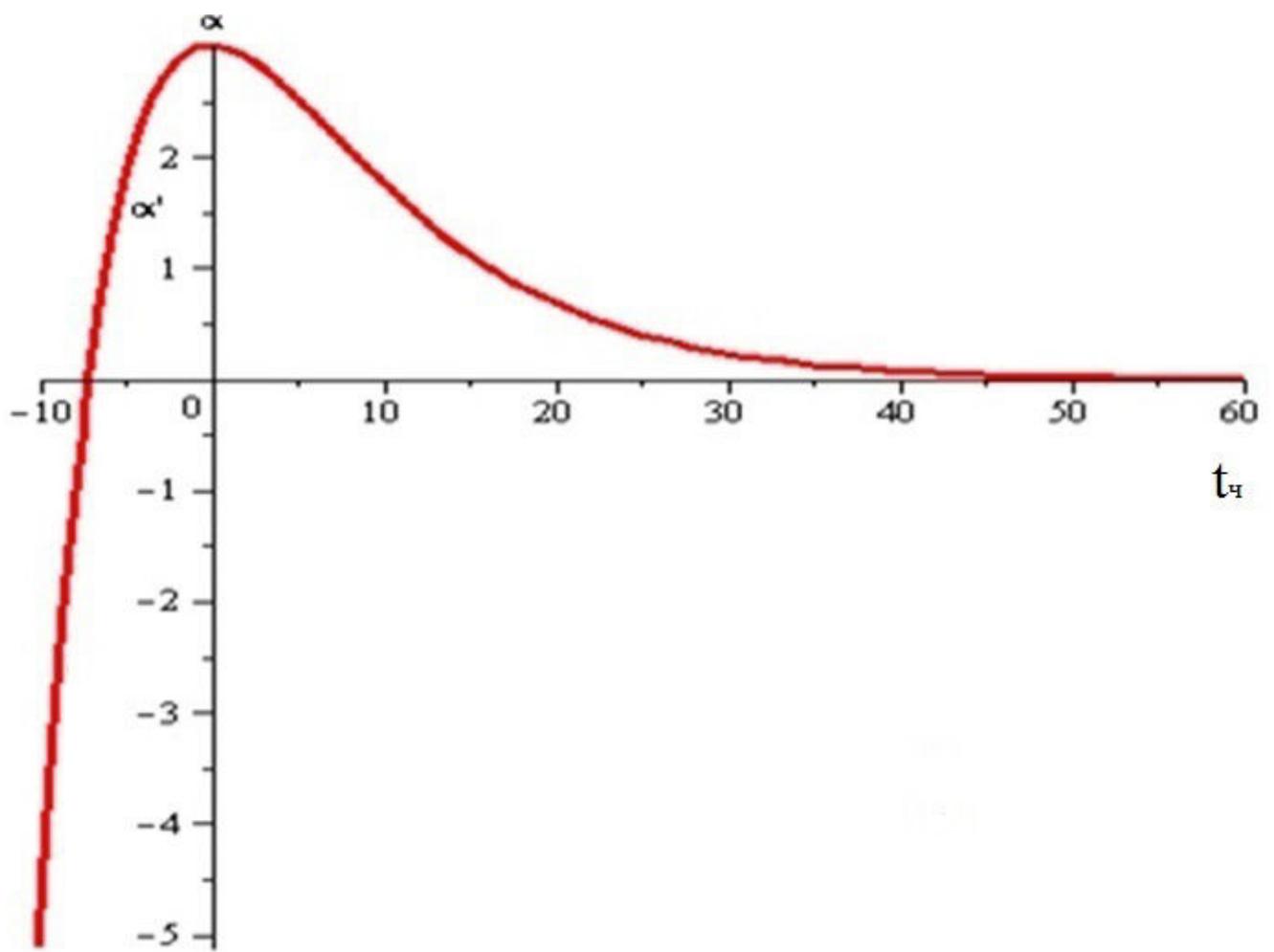


Рис. 3. График зависимости угла α от времени в случае, когда $\xi_7^2 - 16\xi_1^2 > 0$.

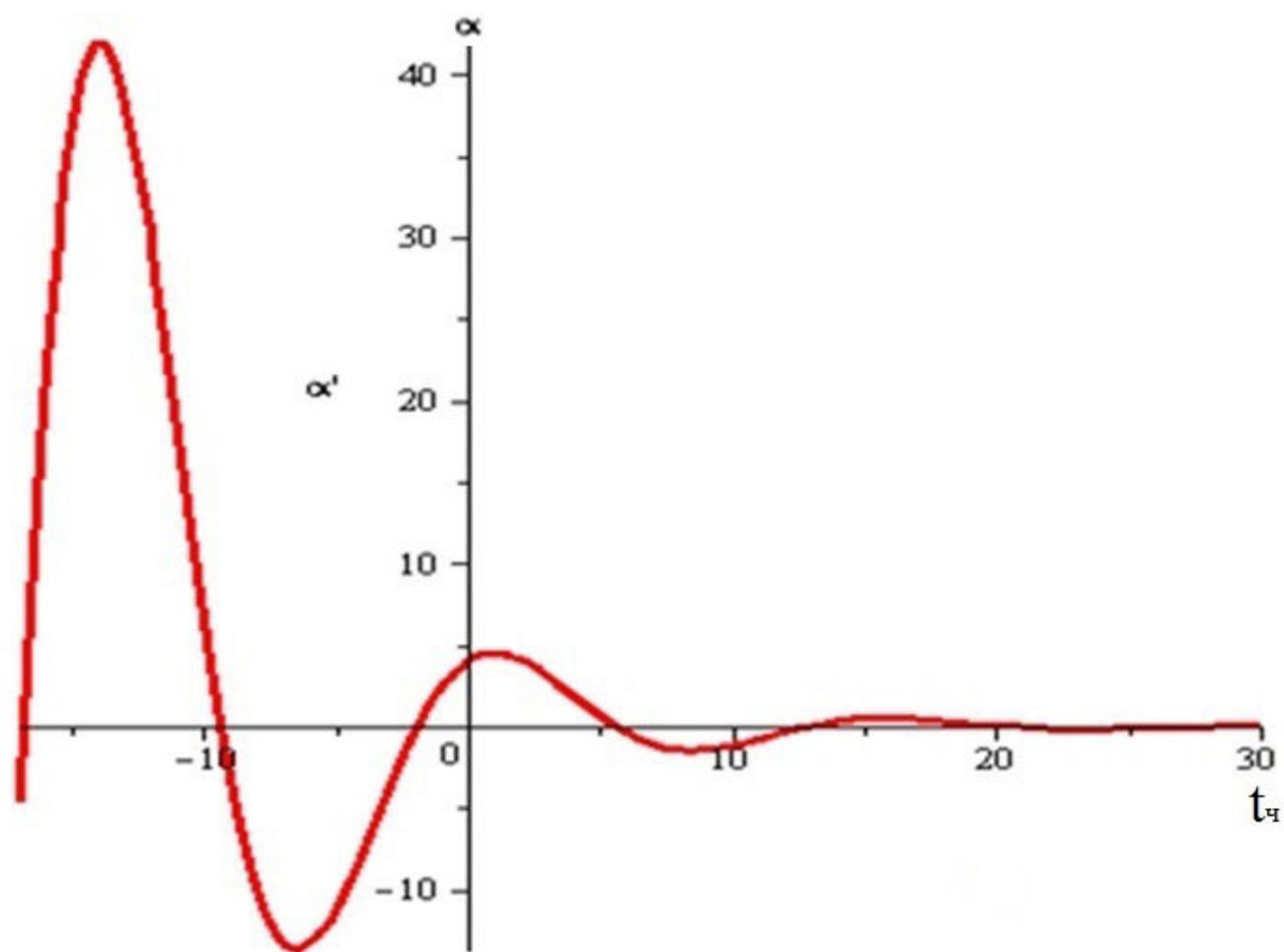


Рис.4. График зависимости угла α от времени в случае, когда $\xi_7^2 - 16\xi_1^2 = 0$.

2.4. Задача переориентации КА при наличии осциллирующего момента от гироскопов

Рассмотрим задачу переориентации КА, моделируемого системой, содержащей Ω_1 твердую и Ω_2 упругую части, при наличии осциллирующего момента от гироскопов. Предполагается, что деформациями, вызванными силами гравитационного притяжения, можно пренебречь.

При осуществлении оптимального по быстродействию разворота вокруг оси Sx_1 под действием внешнего управляющего момента M и осциллирующих моментов от гироскопов M_{Γ_1} и M_{Γ_2} уравнения движения системы относительно центра масс (вращение как целого и упругие колебания) запишутся в виде

$$A\dot{\omega}_1 + J_{23}\omega_2^2 + J_{13}\omega_1\omega_2 = -\Gamma\dot{\varepsilon}_1 - 2\Gamma\omega_2 + M_{\Gamma_1} + M + a\rho\ddot{q}_1,$$

$$A\dot{\omega}_2 + J_{13}\omega_1^2 + J_{23}\omega_1\omega_2 = -\Gamma\dot{\varepsilon}_2 - 2\Gamma\omega_1 + M_{\Gamma_2} - a\rho\ddot{p}_1,$$

$$(1+a_1)\ddot{q}_1 + \chi b v_1^2 \dot{q}_1 + v_1^2 q_1 = a\dot{\omega}_1,$$

$$(1+a_1)\ddot{p}_1 + \chi b v_1^2 \dot{p}_1 + v_1^2 p_1 = -a\dot{\omega}_2,$$

$$v^{-1}\dot{\varepsilon}_1 = \Gamma h^{-1}\omega_1 - \xi_5\varepsilon_1, \quad v^{-1}\dot{\varepsilon}_2 = \Gamma h^{-1}\omega_2 - \xi_5\varepsilon_2, \quad (2.11)$$

$$M_{\Gamma_1} = M\varepsilon_1 \cos\psi\tilde{\tau}, \quad M_{\Gamma_2} = M\varepsilon_2 \cos\psi\tilde{\tau}.$$

Заметим, что рассматриваются деформации, соответствующие $k=1$, которые при вибрациях на порядок больше, чем деформации с $k \neq 1$. Перейдем к безразмерному времени $\tau = vt$, вводя обозначения

$$\varepsilon_* = \frac{\omega_*}{\nu}, \quad \omega_* = A^{-1}Mt_*, \quad \omega_i = \tilde{\omega}_i \omega_* (i=1,2,3),$$

$$\tau_* = \nu t_*, \quad \xi_3 = \Gamma h^{-1}, \quad \varkappa = \chi b \nu, \quad \sigma_1^2 = \frac{\nu_1^2}{\nu^2},$$

где t_* - время разворота, перепишем уравнения (1.37) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}'_1 - \varepsilon_* \tilde{a}_7 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 p_1 - \varepsilon_* \tilde{a}_7 \omega_2^2 q_1 &= -\tilde{\Gamma} \varepsilon_*^{-1} \varepsilon'_1 - 2\tilde{\Gamma} \tilde{\omega}_2 + \tau_*^{-1} (1 + e \cos \psi \tau) + \tilde{a}_0 \varepsilon_*^{-1} q_1'', \\ \tilde{\omega}'_2 - \varepsilon_* \tilde{a}_7 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 q_1 - \varepsilon_* \tilde{a}_7 \omega_1^2 p_1 &= \tilde{\Gamma} \varepsilon_*^{-1} \varepsilon'_2 + 2\tilde{\Gamma} \tilde{\omega}_1 + \tau_*^{-1} e \cos \psi \tau - \tilde{a}_0 \varepsilon_*^{-1} p_1'', \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$(1 + a_1) q_1'' + \varkappa \sigma_1^2 q_1' + \sigma_1^2 q_1 = \varepsilon_* a \tilde{\omega}'_1, \quad \varepsilon'_1 = \varepsilon_* \xi_3 \tilde{\omega}_1 - \xi_5 \varepsilon_1,$$

$$(1 + a_1) p_1'' + \varkappa \sigma_1^2 p_1' + \sigma_1^2 p_1 = -\varepsilon_* a \tilde{\omega}'_2, \quad \varepsilon'_2 = -\varepsilon_* \xi_3 \tilde{\omega}_2 - \xi_5 \varepsilon_2,$$

где $0 < e < 1$. Заметим, что если частоты движения как целого и собственные частоты движения по внутренним степеням свободы сильно разнесены, то для нахождения вынужденных упругих колебаний целесообразно рассматривать квазистатические деформации. В других случаях, например для изучения движения в окрестности резонанса, или при возмущении начальных условий по q_i, p_i , следует пользоваться уравнениями, описывающими динамику упругих колебаний.

Рассмотрим динамику системы с учетом следующих предположений: величина $\varkappa \gtrsim \varepsilon \sim e$, безразмерное время процесса $\tau_* \sim \varepsilon_*^{-1}$, где малый параметр ε_* либо порядка ε^2 (этому случаю соответствует физическое допущение - время разворота существенно больше времени затухания свободных колебаний),

либо порядка ε (времена одного порядка), $\tilde{\Gamma} = \varepsilon^2 \tilde{\tilde{\Gamma}}$. Примем, что в начальный момент $\tau = 0$, величины $q_1 = p_1 = q'_1 = p'_1 = \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Для решения системы (2.12) применим метод малого параметра Ляпунова-Пуанкаре.

В первом случае с точностью до ε^2 включительно получим равенства

$$\begin{aligned} q_1 &= O(\varepsilon^3), \varepsilon_1 = O(\varepsilon^3), \tilde{\omega}_1 = \tau_*^{-1} \tau + O(\varepsilon^3), \\ p_1 &= O(\varepsilon^3), \varepsilon_2 = O(\varepsilon^3), \tilde{\omega}_2 = O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из (1.38) следует, что будет происходить плоский разворот спутника, причем в рамках приведенных предположений упругие колебания не оказывают влияния на характер разворота системы как целого. Во втором случае, когда $\varepsilon_* \sim \varepsilon$, получим следующий результат:

$$\begin{aligned} q_1 &= \varepsilon_* \tau_*^{-1} \sigma_1^{-1} a (1 - \cos \nu \tau) + O(\varepsilon^3), \quad p_1 = O(\varepsilon^3), \\ \tilde{\omega}_1 &= \tau_*^{-1} \tau + \varepsilon^{-2} \varepsilon_*^2 \tau_*^{-1} a \tilde{a}_0 \sigma_1^{-2} \nu' \sin \nu \tau + \varepsilon \tau_*^{-1} \tilde{\psi}^{-1} \sin \tilde{\psi} \tau + \\ &+ \varepsilon \varepsilon_* \tilde{a}_0 [D'_1(\tilde{\psi} \cos \psi \tau - \nu' \cos \nu \tau) + E'_2 \nu \tau \sin \nu \tau] + O(\varepsilon^3), \\ \tilde{\omega}_2 &= \varepsilon \tau_*^{-1} \tilde{\psi}^{-1} \sin \tilde{\psi} \tau + \varepsilon \varepsilon_* \tilde{a}_0 (C_1 \tilde{\psi} \sin \tilde{\psi} \tau - C'_1 \nu' \sin \nu \tau) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^2 \{ A' + B \tau - (A' - C') e^{-\xi_5 \tau} + C' \cos \nu \tau + D \sin \nu \tau \} + O(\varepsilon^3),$$

$$\varepsilon_2 = O(\varepsilon^3),$$

где постоянные коэффициенты имеют вид

$$a'_1 = a_1 - \varepsilon^{-2} \varepsilon_*^2 a \tilde{a}_0, \quad \nu' = \sigma_1 (1 + a'_1)^{-\nu_2}, \quad A' = -B / \xi_5,$$

$$B = \varepsilon^{-2} \varepsilon_* \tau_*^{-1} \xi_3, \quad \lambda = \varepsilon^{-4} \varepsilon_*^3 \tau_*^{-1} a \tilde{a}_0 v' \sigma_1^{-2},$$

$$C' = -\lambda v' / (v'^2 + \xi_5^2), \quad C'_1 = \varepsilon^{-3} e \varepsilon_* \tau_*^{-1} a / [\sigma_1^2 - \tilde{\psi}^2 (1 + a')],$$

$$D = \lambda \xi_5 / (v'^2 + \xi_5^2), \quad D'_1 = \varepsilon^{-2} \varepsilon_* \tau_*^{-1} a / [\sigma_1^2 - \tilde{\psi}^2 (1 + a')],$$

$$E'_1 = \varepsilon^{-2} \varepsilon_* \tau_*^{-1} \chi a / [2(1 + a')].$$

Случай (2.14) отличается от предыдущего (2.13) тем, что здесь уже нет плоского разворота, угловая скорость $\tilde{\omega}_2 \sim \varepsilon^2$ отлична от нуля и представляет собой сумму гармонических колебаний, а угловая скорость $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}$ получают дополнительные члены.

Представляется целесообразным рассмотреть видоизменение второго случая, когда величина кинетического момента гиродинов существенно увеличена, т.е. $\tilde{\Gamma} = \varepsilon \tilde{\Gamma} \sim \varepsilon$. Решая полученную систему уравнений, выпишем окончательные формулы:

$$q_1 = \varepsilon_* \tau_*^{-1} \sigma_1^{-2} a (1 - \cos v\tau) + O(\varepsilon^3), \quad p_1 = O(\varepsilon^3),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 = & \tau_*^{-1} \tau + \varepsilon^{-2} \varepsilon_*^2 \tau_*^{-1} a \tilde{a}_0 \sigma_1^{-2} v' \sin v\tau - \varepsilon_*^{-1} \varepsilon^3 \tilde{\Gamma} [A' + B\tau - \\ & -(A' + C')e^{-\xi_5 \tau} + C' \cos v\tau + D \sin v\tau] + \varepsilon \tau_*^{-1} \tilde{\psi}^{-1} \sin \tilde{\psi} \tau + \\ & + \varepsilon \varepsilon_* \tilde{a}_0 [-C_1 \xi_5 e^{-\xi_5 \tau} - D'_1 \tilde{\psi} \sin \tilde{\psi} \tau + G'_1 \sin v\tau + G'_2 \cos v\tau + \\ & + \tau (v' G'_1 \cos v\tau - v' G'_2 \sin v\tau) - H_1 v' \sin v\tau + H_2 v' \cos v\tau] + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_2 = & (\varepsilon \tilde{\Gamma} \tau_*^{-1} \tau^2 - \varepsilon^{-1} \varepsilon_*^2 \tau_*^{-1} a \tilde{a}_0 \cos \nu \tau) \sigma_1^{-2} + \varepsilon \tau_*^{-1} \tilde{\psi}^{-1} \cos \tilde{\psi} \tau - \\ & - \varepsilon \varepsilon_* \tilde{a}_0 (-2 \varepsilon^2 \varepsilon_* \tau_*^{-1} \sigma_1^{-2} a \tilde{\Gamma} + K_2' \tilde{\psi} \sin \tilde{\psi} \tau + K_3' \cos \nu \tau - \\ & - K_3' \nu \tau \sin \nu \tau - L_1 \nu' \sin \nu \tau + L_2 \nu' \cos \nu \tau) + O(\varepsilon^3),\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^2 [A' + B\tau - (A' + C')e^{-\xi_5 \tau} + C' \cos \nu \tau + D \sin \nu \tau] + O(\varepsilon^3),$$

$$\varepsilon_2 = O(\varepsilon^3),$$

Здесь введены дополнительно коэффициенты

$$\begin{aligned}C_1 &= -\tilde{\Gamma} a \xi_5 (A' + C') / [\sigma_1^2 + \xi_5^2 (1 + a_1')], \\ D_2' &= \varepsilon^{-2} \varepsilon_* \tau_*^{-1} a / [\sigma_1^2 - \tilde{\psi}^2 (1 + a_1')], \\ G_1' &= -\tilde{\Gamma} a D / [2(1 + a_1')], \quad H_1 = \tilde{\Gamma} B \sigma^{-2} - C_1 - D_2',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_2' &= a (\varepsilon^{-3} \varepsilon_* \tau_*^{-1} \sigma_1^{-2} - \tilde{\Gamma} C'), \quad H_2 = (\xi_5 C_1 - G_2') / \nu', \\ K_2' &= \varepsilon^{-2} \varepsilon_* \tau_*^{-1} a / [\sigma_1^2 - \tilde{\psi}^2 (1 + a_1')], \\ K_3' &= 2 \varepsilon^{-4} \varepsilon_*^3 \tau_*^{-1} \tilde{\Gamma} a^2 \tilde{a}_0 \nu' / \nu' - K_3' / \nu', \quad L_1 = K_2'.$$

В этом случае дополнительно возникает линейная ошибка к угловой скорости $\tilde{\omega}_1$, равная

$$-\varepsilon^3 \varepsilon_*^{-1} \tilde{\Gamma} (A' + B\tau) \sim O(\varepsilon^2),$$

а к угловой скорости $\tilde{\omega}$ добавляется член

$$(\tilde{\Gamma} \varepsilon \tau_*^{-1} \tau^2 + 2 \varepsilon^{-1} \varepsilon_*^2 \tau_*^{-1} \tilde{a}_0 \tilde{\Gamma}) \sigma_1^{-2} \sim \varepsilon^2.$$

Глава 3. ОРБИТАЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕЖЁСТКОГО КА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СИЛ

3.1. Постановка Задачи

В настоящее время научный и практический интерес представляет исследование модельных задач, позволяющих понять характерные закономерности движения сложных многокомпонентных тел и конструкций, т.е. систем, состоящих из твёрдых тел, материальных точек и звеньев с распределёнными параметрами, для которых процессы деформирования обратимы и существует потенциальная энергия упругой деформации. Трудями ряда исследователей была создана теория движения сложных механических систем, например [20, 21, 31].

Решение целого комплекса задач навигации космического аппарата – это формирование текущего вектора состояния КА с помощью аппаратуры спутниковой навигации, определение его ориентации, задач сближения космических аппаратов и т.д. – связано, прежде всего, с проблемой достижения высоких точностей координатно-временного обеспечения, которые зависят от многих факторов, например, сложная форма Международной космической станции, наличие крупногабаритных элементов конструкции приводят к существенному увеличению ошибок измерения псевдодальностей [7]. Такой тонкий эффект, как учёт фундаментальных составляющих ПВЗ в орбитально-вращательном движении КА может сыграть основополагающую роль для улучшения точностных характеристик КА.

В крупногабаритных конструкциях имеет место деформируемость их элементов. Повышенные требования к точности ориентации спутников обуславливают учёт влияния упругих колебаний на движение всей конструкции как целого относительно центра масс.

В данной главе диссертационной работы получены приближённые дифференциальные уравнения, описывающие поступательно-вращательное движение КА с учётом его деформируемости в центральном гравитационном поле сил, и показано, что взаимосвязь между поступательным и вращательным движением КА происходит посредством деформируемости.

Пусть спутник представляет собой систему, состоящую из упругой Ω_1 (однородной и изотропной) и твёрдой Ω_2 частей (рис. 5). Ось динамической симметрии твёрдой части является также осью симметрии упругой части в недеформированном состоянии, граничные условия осесимметричны, перемещения частиц упругой среды на границе с твёрдой частью равны нулю, другая часть границы - свободна. Деформированное состояние описывается линейной теорией вязкоупругости.

Предполагается, что центр масс спутника обращается по заданной орбите а сам спутник вращается относительно центра масс. Движение КА будем описывать с помощью переменных $\mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}$. Здесь \mathbf{R} - радиус-вектор, проведённый из притягивающего центра в центр масс системы, $\boldsymbol{\omega}$ - её абсолютная угловая скорость, $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ - перемещение точки упругой среды, определяемой радиус-вектором \mathbf{r} частицы тела, проведённым из центра масс системы в недеформированном состоянии.

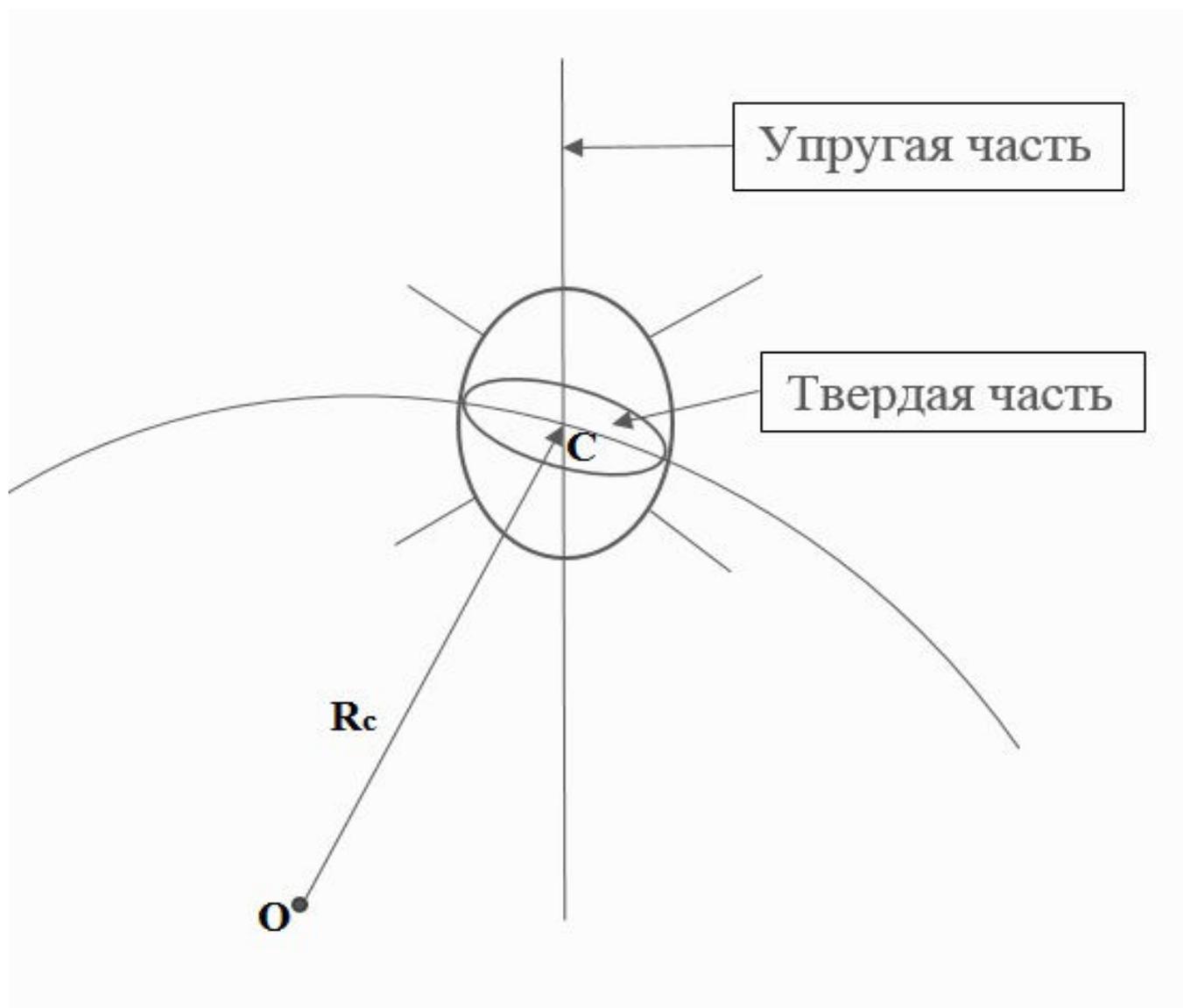


Рис. 5. Спутник, несущий продольные штанги для пассивной гравитационной стабилизации.

3.2. Уравнения поступательно-вращательного движения спутника, при наличии упругих и диссипативных элементов

Уравнения движения получим из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа в форме [12,66,54]:

$$M\ddot{\mathbf{R}} + \int_{\Omega} [\ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}] \rho dx + \nabla U = 0; \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} [\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}] \rho \delta \mathbf{u} dx + (\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla U, \delta \mathbf{u}) = 0; \quad (3.2)$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times [\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}] \rho dx + ((\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \nabla U(\mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u})) = 0; \quad (3.3)$$

где гравитационный потенциал U имеет вид

$$U[\mathbf{R}^*] = - \int_{\Omega} \frac{\mu \rho dx}{R^*} = - \int_{\Omega} \frac{\mu \rho dx}{[(\mathbf{R}^*)^2]^{1/2}} = \int_{\Omega} \frac{\mu \rho dx}{[(\mathbf{R}^2 + r^2 + u^2 + 2\mathbf{Rr} + 2\mathbf{Ru} + 2\mathbf{ru})^2]^{1/2}},$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u}.$$

Уравнения (3.1) соответствуют классической теореме о движении центра масс механической системы, а уравнения (3.3) – теореме об изменении кинетического момента относительно центра масс. Из уравнения (3.2) определяются упругие перемещения. Здесь обозначены: M – масса спутника, $E[\mathbf{u}]$ – функционал энергии упругих деформаций, $D[\dot{\mathbf{u}}]$ – диссипативный функционал; ρ – плотность, причём $\rho = \rho_1 = \text{const}$ для твердой части и $\rho = \rho_2 = \text{const}$ для упругой части; Ω – область, занимаемая телом, $\Omega = \Omega_2 \cup \Omega_1$,

Ω_2 – область, занимаемая твёрдой частью, Ω_1 – упругой частью. Деформированное состояние упругой части опишем линейной теорией вязкоупругости малых деформаций, причем в основе лежит модальный подход. Согласно этому методу вектор \mathbf{u} представляется в виде ряда по ортонормированным собственным формам \mathbf{V}_{km} и \mathbf{W}_{km} задачи о свободных упругих колебаниях.

В нашем случае будем считать, что тело испытывает только продольные деформации, т.е. вектор перемещений может быть представлен в виде:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) \mathbf{W}_i, \quad \mathbf{W}_i = (0, 0, w_i),$$

причем функция w_i зависит только от одной координаты x_3 . Материал тела подчиняется модели Кельвина-Фойгта [39, 63], т.е. $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi b E [\dot{\mathbf{u}}]$.

Для дальнейшего преобразования системы воспользуемся наличием в ней малых параметров $k = \chi b \nu$ и $\varepsilon = \omega / \nu$, где χ – коэффициент вязкого трения в материале, $b > 0$ – постоянная, ν – наименьшая собственная частота упругих колебаний тела, отражающих факты медленной диссипации энергии в системе и малости угловой скорости по сравнению с наименьшей частотой свободных упругих колебаний в системе. Это позволяет считать свободные упругие колебания в системе затухшими и учитывать только вынужденные деформации, то есть перейти к квазистатике в уравнении деформаций (3.2). При этом мы отбрасываем инерционные члены с $\ddot{\mathbf{R}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$, и считаем $\varepsilon \approx 0$. Тогда уравнение (3.2) приобретет упрощенный вид:

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}] \rho \delta \mathbf{u} dx + (\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla U, \delta \mathbf{u}) = 0. \quad (3.4)$$

Поскольку справедливы оценки

$$|\mathbf{u}| \ll r; \quad r \ll R,$$

то мы предполагаем, что можно ввести малый параметр ε , такой что

$$\frac{|\mathbf{u}|}{r} \sim \varepsilon, \quad \frac{r}{R} \sim \varepsilon, \quad \frac{|\mathbf{u}|}{R} \sim \varepsilon^2, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Тогда запишем градиент гравитационного потенциала в виде ряда

$$\begin{aligned} \nabla U[\mathbf{R}^*] &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}^*} = \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u}) \mu \rho dx}{[(\mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{1/2}} = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\mu[\mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u}]}{R^3} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} + \frac{u^2}{R^2} + \frac{2\mathbf{Rr}}{R^2} + \frac{2\mathbf{Ru}}{R^2} + \frac{2\mathbf{ru}}{R^2}\right)^{-3/2} \rho dx = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\mu[\mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u}]}{R^3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{u^2}{R^2} + \frac{2\mathbf{Rr}}{R^2} + \frac{2\mathbf{Ru}}{R^2} + \frac{2\mathbf{ru}}{R^2}\right) + \dots\right) \rho dx, \end{aligned}$$

Оставим в этом ряде только члены не выше первого порядка по ε , то есть

$$\nabla U[\mathbf{R}^*] \approx \frac{\mu m \mathbf{R}^0}{R^2} + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \mu \rho dx}{R^3} - 3 \int_{\Omega} \frac{\mathbf{R}^0 (\mathbf{R}^0 \mathbf{r}) \mu \rho dx}{R^3}.$$

Подставим теперь это выражение в уравнение (3.4), приняв $\delta \mathbf{u} = \mathbf{w}_i$. Получим

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \sum p_m \mathbf{W}_m) + 2\boldsymbol{\omega} \times \sum \dot{p}_m \mathbf{W}_m] \mathbf{W}_i \rho dx + \quad (3.5)$$

$$+(\nabla E[\mathbf{u}], \mathbf{W}_i) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \mathbf{W}_i) + (\nabla U, \mathbf{W}_i) = 0.$$

Преобразуем уравнение (3.5), используя соотношения ортонормированности собственных форм

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}_i \mathbf{W}_j dx = \int_{\Omega} w_i w_j dx = 0, \quad \int_{\Omega} \mathbf{W}_i^2 dx = \int_{\Omega} w_i^2 dx = 1,$$

а также равенства

$$\frac{1}{\rho} (\nabla E, \mathbf{W}_i) = v_i^2 p_i, \quad \frac{1}{\rho} (\nabla D, \mathbf{W}_i) = \chi b v_i^2 \dot{p}_i,$$

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{e} W_i,$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z),$$

где v_i – частота собственных колебаний, соответствующая форме \mathbf{W}_i .

Первое слагаемое в (3.5) запишется в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \mathbf{e} W_i dx &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}) - \mathbf{r} \omega^2) \mathbf{e} W_i dx = \\ &= \int_{\Omega} ((\boldsymbol{\omega} \mathbf{e})(\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}) - (\mathbf{r} \mathbf{e}) \omega^2) W_i dx = \\ &= (\boldsymbol{\omega} \mathbf{e}) \int_{\Omega} (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) W_i dx - \omega^2 \int_{\Omega} z W_i dx = \\ &= (\boldsymbol{\omega} \mathbf{e})^2 \int_{\Omega} z W_i dx - \omega^2 \int_{\Omega} z W_i dx = b_i ((\boldsymbol{\omega} \mathbf{e})^2 - \omega^2), \end{aligned}$$

$$b_i = \int_{\Omega} z W_i dx.$$

Второе вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\sum p_m \mathbf{W}_m)) \mathbf{W}_i dx &= \int_{\Omega} [\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{e}\boldsymbol{\omega}^2] p_i \mathbf{e} W_i^2 dx = \\ &= [(\boldsymbol{\omega}\mathbf{e})^2 - \boldsymbol{\omega}^2] p_i. \end{aligned}$$

Преобразуем третье слагаемое

$$\int_{\Omega} 2\boldsymbol{\omega} \times \sum \dot{p}_m \mathbf{W}_m \mathbf{W}_i \rho dx = \int_{\Omega} (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \mathbf{e} \dot{p}_m W_i^2 \rho dx = 0.$$

Наконец, рассмотрим последнее слагаемое

$$(\nabla U, \mathbf{W}_i) = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \mathbf{W}_i \mu \rho dx}{R^3} - 3 \int_{\Omega} \frac{\mathbf{R}^0 \mathbf{W}_i (\mathbf{R}^0 \mathbf{r}) \mu \rho dx}{R^3}.$$

Имеем

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \mathbf{W}_i \mu \rho dx}{R^3} = \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega} (\mathbf{r}\mathbf{e}) W_i \rho dx = \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega} W_i z \rho dx = \frac{\mu}{R^3} b_i,$$

или

$$\begin{aligned} -3 \int_{\Omega} \frac{\mathbf{R}^0 \mathbf{W}_i (\mathbf{R}^0 \mathbf{r}) \mu \rho dx}{R^3} &= -\frac{3\mu}{R^3} (\mathbf{R}^0 \mathbf{e}) \int_{\Omega} (R_x^0 x + R_y^0 y + R_z^0 z) W_i \rho dx = \\ &= -\frac{3\mu}{R^3} (\mathbf{R}^0 \mathbf{e}) R_z^0 \int_{\Omega} z W_i \rho dx = -\frac{3\mu}{R^3} (\mathbf{R}^0 \mathbf{e}) R_z^0 \int_{\Omega} z W_i \rho dx, \\ \mathbf{R}^0 &= (R_x^0, R_y^0, R_z^0). \end{aligned}$$

Поскольку

$$R_z^0 = (\mathbf{R}^0, \mathbf{k}) = (\mathbf{R}^0, \mathbf{e}),$$

то

$$-3 \int_{\Omega} \frac{\mathbf{R}^0 \mathbf{W}_i(\mathbf{R}^0 \mathbf{r}) \mu \rho dx}{R^3} = -\frac{3\mu}{R^3} (\mathbf{R}^0 \mathbf{e})^2 b_i.$$

В итоге, уравнение (3.5) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \left[v_i^2 + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})^2 - \boldsymbol{\omega}^2 \right] p_i + \chi b v_i^2 \dot{p}_i + b_i ((\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})^2 - \boldsymbol{\omega}^2) + \\ + \frac{\mu}{R^3} b_i (1 - 3(\mathbf{R}^0 \mathbf{e})^2) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left[v_i^2 + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})^2 - \boldsymbol{\omega}^2 \right] p_i + \chi b v_i^2 \dot{p}_i = b_i (\boldsymbol{\omega}^2 - (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})^2) - \\ - b_i \frac{\mu}{R^3} (1 - 3(\mathbf{R}^0, \mathbf{e})^2) \equiv F_i. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь для краткости введено обозначение правой части уравнения (3.6) как F_i :

$$F_i = b_i (\boldsymbol{\omega}^2 - (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})^2) - \mu R^{-3} (1 - 3(\mathbf{R}^0, \mathbf{e})^2) \equiv b_i F.$$

Обозначая

$$\left[v_i^2 + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})^2 - \boldsymbol{\omega}^2 \right] = \tilde{v}_i^2,$$

Запишем (3.6) кратко в виде

$$\tilde{v}_i^2 p_i + \chi b v_i^2 \dot{p}_i = F_i, \quad (3.7)$$

Решение уравнения (3.6) можно представить в виде [18]:

$$p_i = \sum_{n=0}^{\infty} (-\chi b)^n \frac{\partial^n p_{i0}}{\partial t^n}, \quad (3.8)$$

где p_{i0} — является решением уравнения (3.7) при $\chi = 0$:

$$p_{i0} = \tilde{v}_i^{-2} F_i.$$

Оставляя в ряде (3.8) только первые два слагаемых, найдем

$$p_i \approx \tilde{v}_i^{-2} b_i (F - \chi b \dot{F}). \quad (3.9)$$

Приближенное решение уравнения, определяющего деформации, позволяет получить уравнения, описывающие эволюцию поступательно-вращательного движения спутника.

Подставим решение уравнения деформаций в уравнение (3.1), представляющее собой теорему о движении центра масс системы, а в разложении градиента гравитационного потенциала учтем вектор перемещений. Для этого получим разложение градиента гравитационного потенциала более высокого порядка, чем ранее, а именно, с точностью до ε^6 , что позволит сохранить в разложении члены, содержащие вектор перемещений в первой степени. Будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla U[\mathbf{R}^*] = & \int_{\Omega} \frac{\mu[\mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u}]}{R^3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{u^2}{R^2} + \frac{2\mathbf{R}\mathbf{r}}{R^2} + \frac{2\mathbf{R}\mathbf{u}}{R^2} + \frac{2\mathbf{r}\mathbf{u}}{R^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2!} \left(-\frac{5}{2} \right) \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{u^2}{R^2} + \frac{2\mathbf{R}\mathbf{r}}{R^2} + \frac{2\mathbf{R}\mathbf{u}}{R^2} + \frac{2\mathbf{r}\mathbf{u}}{R^2} \right)^2 + \dots \right) \rho dx \approx \\ & \approx \mu m R^{-2} \mathbf{R}^0 - \frac{3}{2} \mu R^{-4} \int_{\Omega} \left(\mathbf{R}^0 r^2 + 2\mathbf{R}^0(\mathbf{r}\mathbf{u}) \right) \rho dx + \\ & + \frac{15}{2} \mu R^{-5} \int_{\Omega} \left(\mathbf{R}^0(\mathbf{R}^0 \mathbf{r})^2 + 2\mathbf{R}^0(\mathbf{R}^0 \mathbf{r})(\mathbf{R}^0 \mathbf{u}) \right) \rho dx - \\ & - 3\mu R^{-4} \int_{\Omega} \left(\mathbf{r}(\mathbf{R}^0 \mathbf{r}) + \mathbf{r}(\mathbf{R}^0 \mathbf{u}) + \mathbf{u}(\mathbf{R}^0 \mathbf{r}) \right) \rho dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вычислим слагаемые в (3.3):

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2}\mu R^{-4} \int_{\Omega} \mathbf{R}^0 r^2 \rho dx = -\frac{3}{4}\mu R^0 R^{-4} (A+B+C), \\
& -3\mu R^{-4} \int_{\Omega} \mathbf{R}^0 (\mathbf{r}\mathbf{u}) \rho dx = -3\mu \mathbf{R}^0 R^{-4} \sum b_i p_i, \\
& \frac{15}{2}\mu R^{-4} \int_{\Omega} \mathbf{R}^0 (\mathbf{R}^0 \mathbf{r})^2 \rho dx = \frac{15}{2}\mu R^{-4} \mathbf{R}^0 \left[\frac{A+B+C}{2} - (\mathbf{e}_x \mathbf{R}^0)^2 A - \right. \\
& \quad \left. - (\mathbf{e}_y \mathbf{R}^0)^2 B - (\mathbf{e} \mathbf{R}^0)^2 C, \right. \\
& 15\mu R^{-4} \mathbf{R}^0 \int_{\Omega} (\mathbf{R}^0 \mathbf{r})(\mathbf{R}^0 \mathbf{u}) \rho dx = 15\mu R^{-4} \mathbf{R}^0 (\mathbf{R}^0 \mathbf{e})^2 \sum b_i p_i,
\end{aligned}$$

(3.11)

$$\begin{aligned}
& -3\mu R^{-4} \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{R}^0 \mathbf{r}) \rho dx = -\frac{3}{2}\mu R^{-4} \left[(\mathbf{R}^0 \mathbf{e}_x)(B+C-A)\mathbf{e}_x + \right. \\
& \quad \left. + (\mathbf{R}^0 \mathbf{e}_y)(A+C-B) + (\mathbf{R}^0 \mathbf{e})(A+B-C)\mathbf{e} \right], \\
& -3\mu R^{-4} \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{R}^0 \mathbf{u}) \rho dx = -3\mu R^{-4} \sum b_i p_i (\mathbf{R}^0 \mathbf{e}) \mathbf{e}, \\
& -3\mu R^{-4} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{R}^0 \mathbf{r}) \rho dx = -3\mu R^{-4} \mathbf{e} (\mathbf{R}^0 \mathbf{e}) \sum b_i p_i,
\end{aligned}$$

где A, B, C – осевые моменты инерции недеформированного спутника, причем предполагается, что $A > B > C$, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}$ – единичные орты осей.

С учетом (3.11) уравнение (3.10) движения центра масс преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
M\ddot{\mathbf{R}} + \mu MR^{-2}\mathbf{R}^0 - 3\mu R^{-4}[b_0(F - \chi b\dot{F})\{\mathbf{R}^0[1 - 5(\mathbf{R}^0, \mathbf{e})^2] + \\
+ 2(\mathbf{R}^0, \mathbf{e})\mathbf{e}\} - \mathbf{R}^0(A + B + C) + \frac{1}{2}(B + C - A)(\mathbf{R}^0, \mathbf{e}_x)\mathbf{e}_x + \\
+ \frac{1}{2}(A + C - B)(\mathbf{R}^0, \mathbf{e}_y)\mathbf{e}_y + \frac{1}{2}(A + B - C)(\mathbf{R}^0, \mathbf{e})\mathbf{e} + \\
+ \frac{5}{2}\mathbf{R}^0[A(\mathbf{R}^0, \mathbf{e}_x)^2 + B(\mathbf{R}^0, \mathbf{e}_y)^2 + C(\mathbf{R}^0, \mathbf{e}_x)^2]] = 0,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

В уравнении (3.12) введено обозначение

$$b_0 = \sum_i \tilde{v}_i^{-2} b_i^2 > 0.$$

Преобразуем уравнение (3.3) способом, аналогичным проведенному выше для уравнения (3.1).

В начале найдем, что

$$\begin{aligned}
((\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \nabla U) \approx -3 \frac{\mu}{R^3} \int_{\Omega} \left[[\mathbf{r} \times \mathbf{R}^0](\mathbf{R}^0, \mathbf{r} + \mathbf{u}) + [\mathbf{u} \times \mathbf{R}^0](\mathbf{R}^0, \mathbf{r}) + \right. \\
+ R^{-1}[(\mathbf{r} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 5(\mathbf{r} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(\mathbf{R}^0, \mathbf{u}) + \\
\left. + \frac{1}{2}[(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{R}^0](\mathbf{r}^2 - 5(\mathbf{R}^0, \mathbf{r})) \right] \rho dx.
\end{aligned}$$

Отбрасывая инерционные члены и члены выше первого порядка относительно \mathbf{u} получим из (3.3)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{L}} + \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})] \rho dx + \\
+ \int_{\Omega} [\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \rho dx - \\
- 3\mu \int \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0, \mathbf{r})}{R^3} \rho dx + \frac{\mu}{R^3} \int (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \rho dx - \\
- \frac{3\mu}{R^3} \int (\mathbf{u} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \rho dx = 0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

В формуле (3.13) через \mathbf{L} обозначен кинетический момент относительно центра масс спутника. Вычислим интеграл

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \rho dx &= \int_{\Omega} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ R_x^0 & R_y^0 & R_z^0 \end{vmatrix} (R_x^0 x + R_y^0 y + R_z^0 z) \rho dx = \\
&= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} yR_z^0 - zR_y^0 \\ zR_x^0 - xR_z^0 \\ xR_y^0 - yR_x^0 \end{pmatrix} (R_x^0 x + R_y^0 y + R_z^0 z) \rho dx = \\
&= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} y \times R_z^0 R_x^0 - zR_y^0 R_x^0 + R_z^0 R_y^0 y^2 - (R_y^0)^2 zy + yz(R_z^0)^2 - z^2 R_y^0 R_z^0 \\ z \times (R_x^0)^2 - x^2 R_z^0 R_x^0 + zyR_x^0 R_y^0 - xyR_z^0 R_y^0 + z^2 R_x^0 R_z^0 - xz(R_z^0)^2 \\ x^2 R_x^0 R_y^0 - xy(R_x^0)^2 + xy(R_y^0)^2 - y^2 R_x^0 R_y^0 + xzR_y^0 R_z^0 - yzR_x^0 R_y^0 \end{pmatrix} \rho dx = \\
&= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} R_z^0 R_y^0 (y^2 - z^2) \\ R_z^0 R_x^0 (z^2 - x^2) \\ R_x^0 R_y^0 (x^2 - y^2) \end{pmatrix} \rho dx. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Поскольку справедливы формулы

$$\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ R_x^0 & R_y^0 & R_z^0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -R_y^0 \\ R_x^0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho dx,$$

$$B = \int_{\Omega} (z^2 + x^2) \rho dx,$$

$$C = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dx,$$

то можно получить соотношение

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (z^2 - x^2) \rho dx &= A - C, \\ \int_{\Omega} (x^2 - y^2) \rho dx &= B - A, \\ \int_{\Omega} (y^2 - z^2) \rho dx &= C - B,\end{aligned}$$

из которых следует, что формулу (3.14) можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \rho dx = (\mathbf{e}, \mathbf{R}^0)(\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0)(A - C) - (B - A)(\mathbf{e}_y \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{e}_y, \mathbf{R}^0),$$

или в более симметричной форме

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \rho dx &= -C(\mathbf{e}, \mathbf{R}^0)(\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0) - B(\mathbf{e}_y \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{e}_y, \mathbf{R}^0) - \\ &\quad - A(\mathbf{e}_x \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{e}_x, \mathbf{R}^0).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}-3\mu \int \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0, \mathbf{r})}{R^3} \rho dx &= -3\mu R^{-3} \left[-C(\mathbf{e}, \mathbf{R}^0)(\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0) - \right. \\ &\quad \left. - B(\mathbf{e}_y \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{e}_y, \mathbf{R}^0) - A(\mathbf{e}_x \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{e}_x, \mathbf{R}^0) \right].\end{aligned}\tag{3.15}$$

Далее

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \rho dx &= \int_{\Omega} (R_x^0 x + R_y^0 y + R_z^0 z) \left(\sum p_i \mathbf{W}_i \times \mathbf{R}^0 \right) \rho dx = \\ &= \int_{\Omega} (R_x^0 x + R_y^0 y + R_z^0 z) \sum p_i \mathbf{W}_i (\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0) \rho dx = \\ &= \sum (\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0 \mathbf{e}) p_i \int_{\Omega} z \mathbf{W}_i \rho dx = \sum b_i p_i (\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0 \mathbf{e}),\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} -\frac{3\mu}{R^3} \int (\mathbf{u} \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \rho dx &= -3\mu R^{-3} \int_{\Omega} (\mathbf{R}^0 \times \mathbf{u})(\mathbf{R}^0, \mathbf{r}) \rho dx = \\ &= -3\mu R^{-3} (\mathbf{R}^0, \mathbf{e})(\mathbf{R}^0 \times \mathbf{e}) \sum b_i p_i. \end{aligned}$$

Распишем следующее выражение

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \rho dx &= \int_{\Omega} \sum b_i p_i (\mathbf{e}, \mathbf{r}) \rho dx = \sum p_i \int_{\Omega} \mathbf{W}_i \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ R_x^0 & R_y^0 & R_z^0 \end{vmatrix} \rho dx = \\ &= \sum p_i \int_{\Omega} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_i \rho dx = 0, \end{aligned}$$

следовательно

$$\frac{\mu}{R^3} \int (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \rho dx = 0.$$

Вычислим еще одно слагаемое

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})) \rho dx &= \int_{\Omega} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\boldsymbol{\omega}^2)) \rho dx = \int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}) \rho dx = \\ &= \int_{\Omega} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) \sum p_i \mathbf{W}_i \rho dx = \sum (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) p_i \int_{\Omega} \begin{pmatrix} y\omega_z - z\omega_y \\ z\omega_x - x\omega_y \\ x\omega_y - y\omega_x \end{pmatrix} \cdot \mathbf{W}_i \rho dx = \\ &= \sum (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) p_i \int_{\Omega} \begin{pmatrix} -z\omega_y \\ z\omega_x \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_i \rho dx = \sum (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) p_i \int_{\Omega} \begin{pmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_i z \rho dx = \end{aligned}$$

$$= \sum (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) p_i \begin{pmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \\ 0 \end{pmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{W}_i z \rho dx = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}) \sum b_i p_i.$$

Используя вышеприведенные формулы, получим развернутое выражение для кинетического момента:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} - 6\mu R^{-3} b_0 (F - \chi b \dot{F}) (\mathbf{e}, \mathbf{R}^0) [\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0] + 3\mu R^{-3} [A(\mathbf{e}, \mathbf{R}^0) [\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0] + \\ + B(\mathbf{e}_y, \mathbf{R}^0) [\mathbf{e}_y \times \mathbf{R}^0] + C(\mathbf{e}, \mathbf{R}^0) [\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0]] - \\ - \frac{9}{2} \mu R^{-4} [\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0] \lambda_0 (F - \chi b \dot{F}) \{1 - 5(\mathbf{R}^0, \mathbf{e}^0)\} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \lambda_0 = \sum_i \lambda_i \tilde{v}_i^{-2} b_i, \lambda_i = a_{i33} - a_{i11}, a_{i33} = \int_{\Omega} z^2 w_i \rho dx, \\ a_{i11} = a_{i22} = \int_{\Omega} y^2 w_i \rho dx = \int_{\Omega} x^2 w_i \rho dx. \end{aligned}$$

Далее, найдем

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \left(\boldsymbol{\omega}^2 - (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})^2 - \frac{\mu}{R^3} (1 - 3(\mathbf{R}^0, \mathbf{e})^2) \right) \dot{} = \\ &= 2\boldsymbol{\omega} \dot{\boldsymbol{\omega}} - 2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) [(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{e}) + (\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{e}})] + \frac{3\mu}{R^4} \dot{R} (1 - 3(\mathbf{R}^0, \mathbf{e})^2) + \\ &\quad + \frac{\mu}{R^3} 6(\mathbf{R}^0, \mathbf{e}) [\dot{\mathbf{R}}^0 \mathbf{e} + \mathbf{R}^0 \dot{\mathbf{e}}]. \end{aligned}$$

Заметим, что в линейном приближении для кинетического момента \mathbf{L} справедливо

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathcal{J}[\mathbf{u}]\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathcal{J}}[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{J}[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega},$$

где тензор инерции представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[\mathbf{u}] &\approx J_0 + J_1[\mathbf{u}] = \text{diag}(A + J_{11}, B + J_{22}, C), \\ J_1[\mathbf{u}] &= J = \left\| J_{ij} \right\|, \quad J_{ij} = 0, i \neq j, \quad J_{33} = 0. \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int_{\Omega} (y + (z + u_z))^2 \rho dx - A \approx \int_{\Omega} (2zu_z + u_z^2) \rho dx \approx \\ &\approx 2 \int_{\Omega} z \sum_i w_i p_i \rho dx = b_0 (F - \chi b \dot{F}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} J_{22} &= \int_{\Omega} (x + (z + u_z))^2 \rho dx - B \approx \int_{\Omega} (2zu_z + u_z^2) \rho dx \approx \\ &\approx 2 \int_{\Omega} z \sum_i w_i p_i \rho dx = b_0 (F - \chi b \dot{F}) = J_{11}. \end{aligned}$$

Если будет $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, то есть деформации отсутствуют, то невозмущённое уравнение для кинетического момента примет вид:

$$\dot{\mathbf{L}} - 3\mu R^{-3} \left[-C(\mathbf{e}, \mathbf{R}^0)(\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0) - B(\mathbf{e}_y \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{e}_y, \mathbf{R}^0) - A(\mathbf{e}_x \times \mathbf{R}^0)(\mathbf{e}_x, \mathbf{R}^0) \right] = \mathbf{0},$$

при этом

$$\mathbf{L} = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho dx,$$

откуда следует, что

$$\dot{\mathbf{L}} = J_0 \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Тогда для $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ получим

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = J_0^{-1} 3\mu R^{-3} \left[A(\mathbf{e}_x, \mathbf{R}^0)(\mathbf{e}_x \times \mathbf{R}^0) + B(\mathbf{e}_y, \mathbf{R}^0)(\mathbf{e}_y \times \mathbf{R}^0) + C(\mathbf{e}, \mathbf{R}^0)(\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0) \right].$$

Используя соотношение

$$\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$$

найдем

$$\begin{aligned} \dot{F}_i = & b_i (6\mu R^{-3} (1 - A^{-1}C)) \boldsymbol{\omega} (\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0) (\mathbf{e}, \mathbf{R}^0) + \\ & + 3\mu R^{-4} \dot{R} (1 - 3(\mathbf{R}^0, \mathbf{e})^2) + 6\mu R^{-3} (\mathbf{R}^0, \mathbf{e}) [(\dot{\mathbf{R}}^0, \mathbf{e}) + (\mathbf{R}^0, \dot{\mathbf{e}})]. \end{aligned}$$

Уравнение для \dot{F} будет

$$\begin{aligned} \dot{F} = \frac{\dot{F}_i}{b_i} = & 6\mu R^{-3} (1 - A^{-1}C) \boldsymbol{\omega} (\mathbf{R}^0, \mathbf{e}) (\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0) + 3\mu R^{-4} \dot{R} (1 - 3(\mathbf{R}^0, \mathbf{e})^2) + \\ & + 6\mu R^{-3} (\mathbf{R}^0, \mathbf{e}) [(\dot{\mathbf{R}}^0, \mathbf{e}) (\mathbf{R}^0, \dot{\mathbf{e}})]. \end{aligned}$$

3.3. Устойчивость стационарных движений деформируемого спутника

Заметим, что система допускает стационарные движения, когда $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$.

Первое положение равновесия соответствует случаю, когда $\mathbf{e} = \mathbf{R}^0$, $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{R}}^0$. Тогда

$\dot{\mathbf{R}}^0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}^0$, а поэтому $(\mathbf{R}^0, \dot{\mathbf{R}}^0) = 0$, что означает, что $\dot{\mathbf{R}}^0 \perp \mathbf{R}^0$ во все время

движения. При этом центр масс движется по круговой орбите радиуса \mathbf{R} с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \text{const}$. Из соотношения

$$\dot{\mathbf{R}} = (\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{e}) = (\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{e}) + (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{e}}) = 0,$$

следует, что

$$\dot{F} = 0, F = \omega^2 + 2\mu R^{-3},$$

то есть деформированная центробежными и гравитационными силами система равномерно вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии (рис.6).

Второй случай, когда $(\mathbf{e}, \mathbf{R}^0) = 0$. В этом случае $\mathbf{e} \perp \mathbf{R}^0$, $\dot{\mathbf{e}} \perp \mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{e}$ и \mathbf{R}^0 лежит в плоскости, образованной $\dot{\mathbf{e}}$ и $\boldsymbol{\omega}$ и параллельно $\dot{\mathbf{e}}$. Не ограничивая общности, положим, $\mathbf{R}^0 = k\dot{\mathbf{e}}$. Отсюда, при условии $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, следует

$$\dot{\mathbf{R}}^0 = k\ddot{\mathbf{e}} = k[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}] = -k[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{e}}] = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}^0],$$

и, следовательно, орбита центра масс – круговая, а $\dot{F} = 0$ (рис. 7).

Таким образом, существует такое стационарное движение, при котором $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \text{const}$, а ось симметрии принадлежит плоскости орбиты и перпендикулярна \mathbf{R} . В этом случае $F = \omega^2 - \mu R^{-3} = 0$ и деформации отсутствуют, т.к. центробежная и гравитационная силы уравновешивают друг друга.

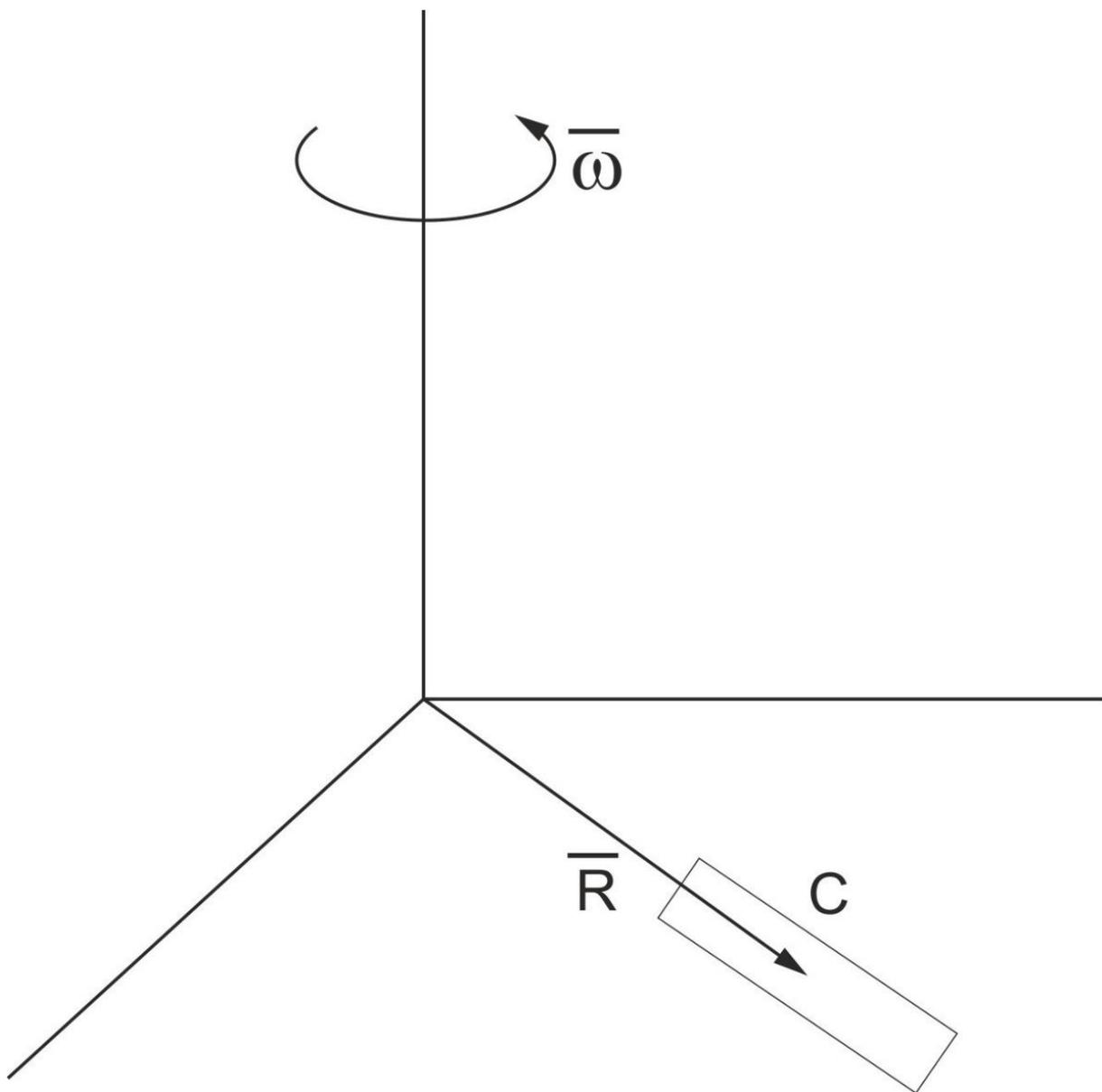


Рис.6. Первое положение равновесия.

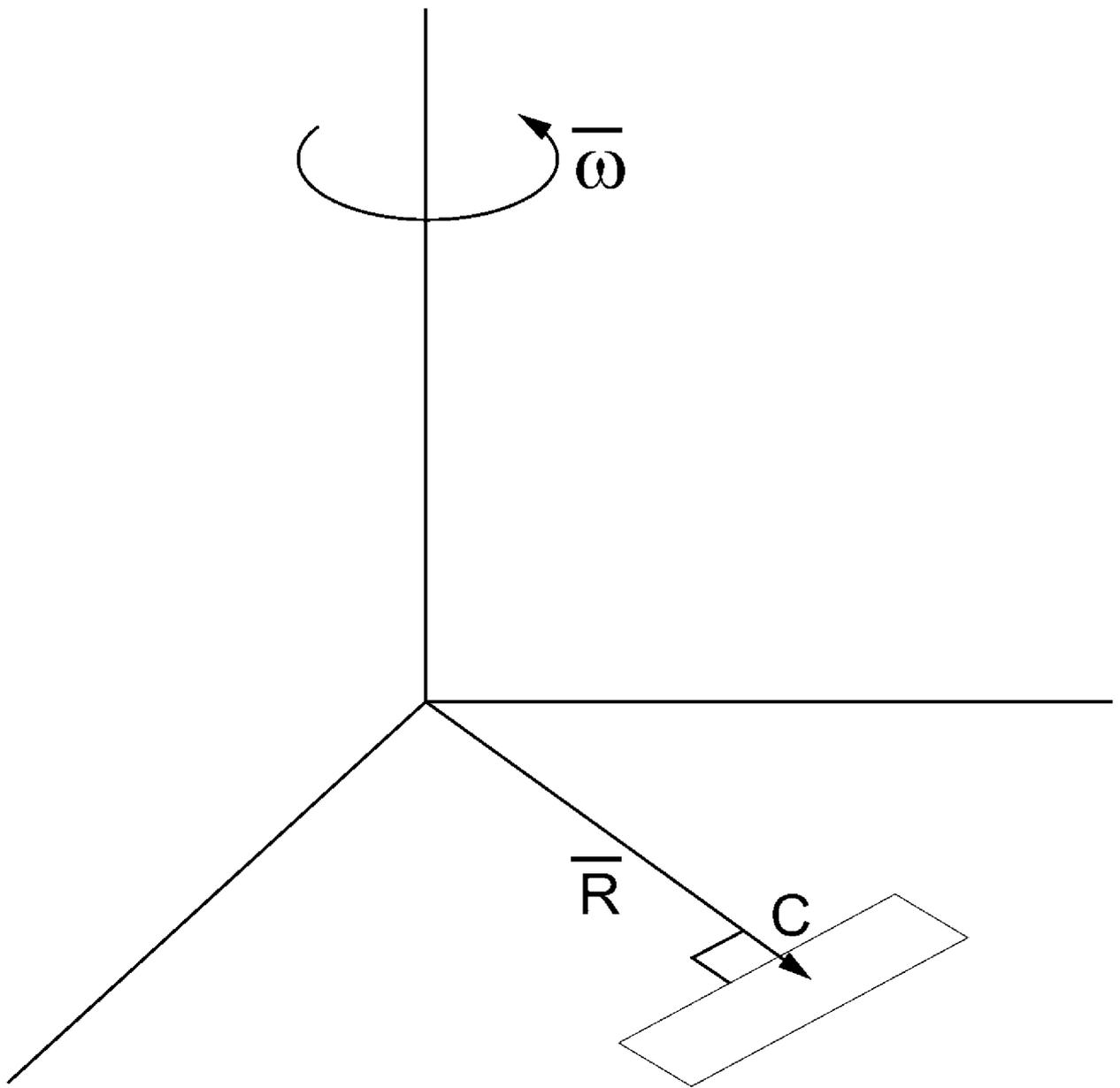


Рис. 7. Второе положение равновесия.

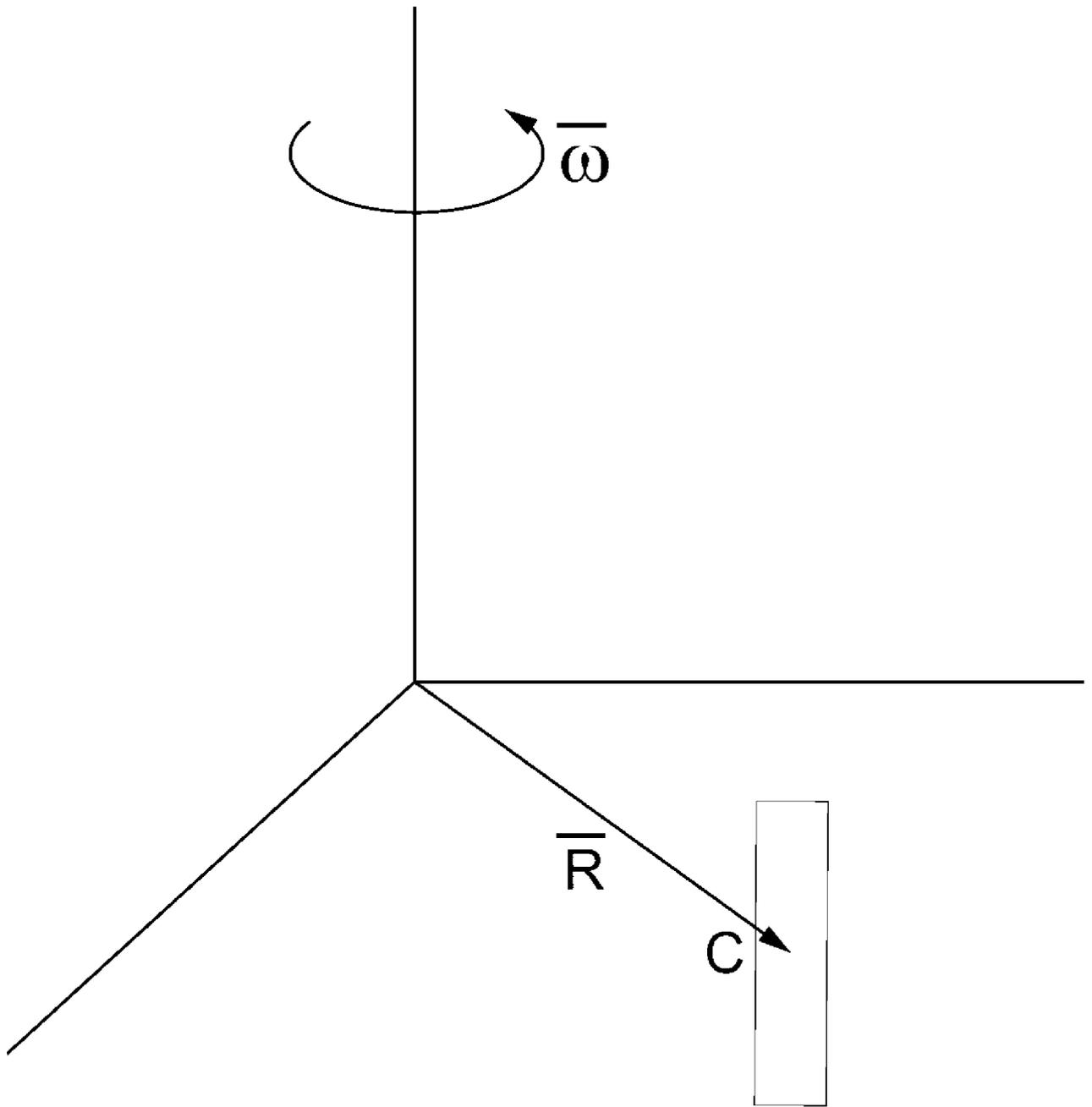


Рис. 8. Третье положение равновесия.

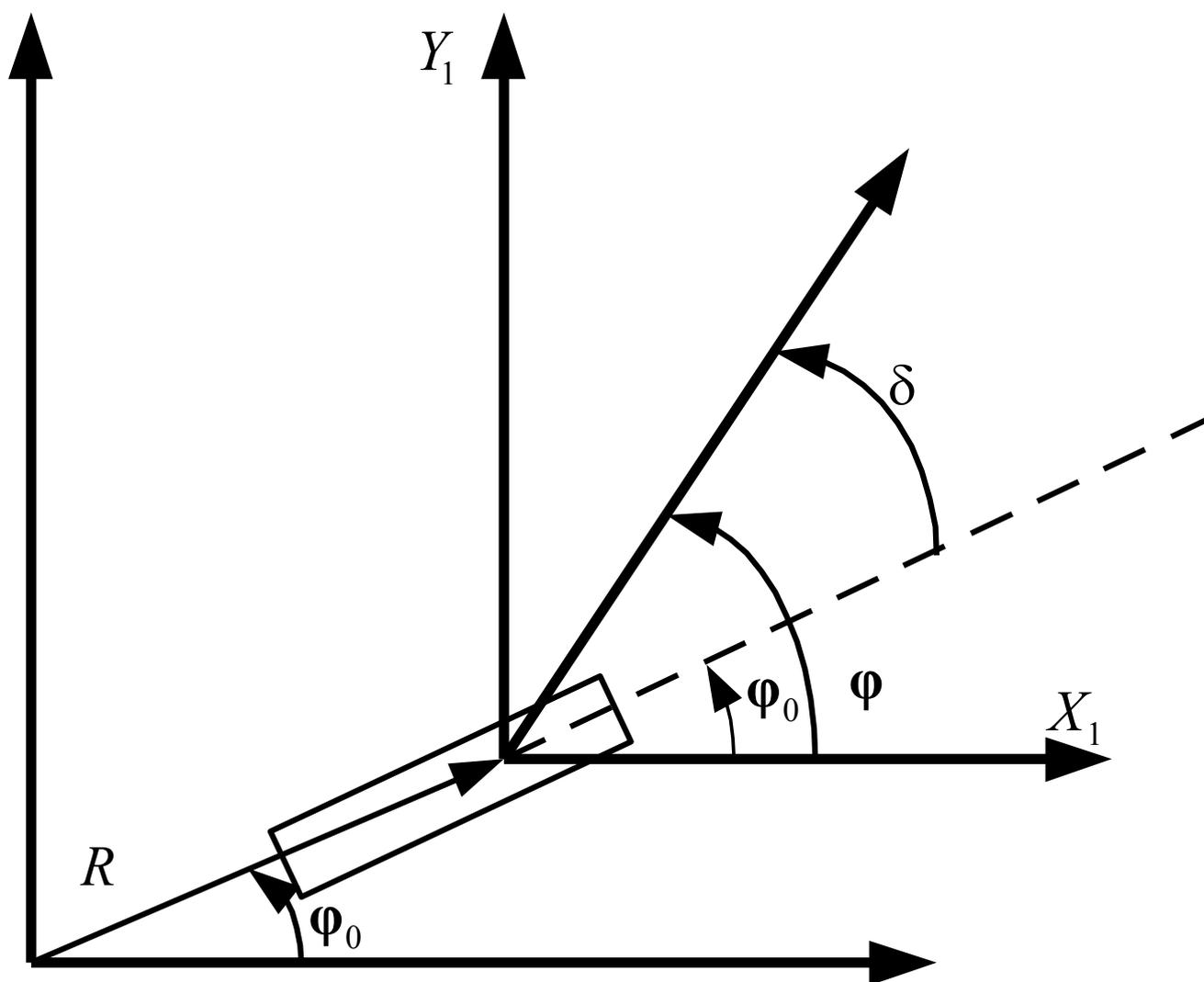


Рис.9. Углы в первом положении равновесия.

Существует и третье положение равновесия, когда $\mathbf{e} \perp \boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{e} \perp \mathbf{R}^0$. В этом случае деформации также стационарны и $\dot{F} = 0$, они определяются гравитацией. Но в этом случае $(\mathbf{L}, \mathbf{e}) = H \neq 0$ и орбитальная угловая скорость не обязательно равна угловой скорости собственного вращения (рис. 8).

Второе и третье положения равновесия – неустойчивы. Действительно, если сделать малое отклонение от равновесия в плоскости орбиты во втором случае, то, очевидно, возникает гравитационный момент, стремящийся еще дальше увести систему из равновесия, это – неустойчивость. То же рассуждение справедливо и для третьего случая.

Первое положение равновесия – устойчиво. Введем инерциальную систему координат $Sx_1y_1z_1$ (рис. 9). Тогда $\varphi = \varphi_0 + \delta$, где δ – малое отклонение от равновесия.

Имеем

$$L_{z_1} = (A + J_{11})\omega = (A + J_{11})\dot{\varphi}$$

или

$$L_{z_1} = (B + J_{11})\omega = (B + J_{11})\dot{\varphi}.$$

Мы рассмотрим первый случай, второй полностью аналогичен. Справедливо

$$(\mathbf{e}, \mathbf{R}^0) = \cos\delta, (\mathbf{e} \times \mathbf{R}^0) = -\mathbf{k}_1 \sin\delta.$$

Уравнение в вариациях, следующее из (3.16), примет вид:

$$((A+J_{11})(\omega_0+\dot{\delta})) + 6\mu R^{-3}\{b_0(F-\chi b\dot{F}) + \frac{1}{2}(B-C)\}\delta + \\ + 18\mu R^{-4}\lambda_0(F-\chi b\dot{F})\delta = 0. \quad (3.17)$$

Учитывая, что орбита круговая, медленно эволюционирующая, то есть $\dot{R} \approx 0$, $F = \omega_0^2 + 2\mu R^{-3}$ из (3.17) выведем

$$\dot{J}_{11}(\omega_0+\dot{\delta}) + (A+J_{11})\ddot{\delta} + \tilde{k}\delta = 0$$

где
$$\tilde{k} = \frac{1}{2}(B-C) + 18\mu^2 R^{-6}b_0 + 54R^{-7}\lambda_0.$$

Далее, определим

$$J_{11} = 2b_0(F - \chi b\dot{F}),$$

$$\dot{J}_{11} = 12\chi b\mu R^{-3}(B-C)A^{-1}b_0\omega_0\dot{\delta},$$

Тогда, после некоторых преобразований, (3.17) примет вид

$$\tilde{A}\ddot{\delta} + \chi b\tilde{D}\dot{\delta} + \tilde{k}\delta = 0, \quad (3.18)$$

где

$$\tilde{A} = A + J_{11} > 0, \quad \tilde{D} = 12\mu R^{-3}(B-C)A^{-1}b_0\omega_0^2 > 0.$$

Заметим, что если деформации достаточно малы, и $\tilde{k} > 0$, то (3.17) – уравнение затухающих колебаний, следовательно, равновесие – устойчиво. В согласии с [32] в работе подтверждается «обобщенное правило большой оси», в соответствии с которым при наличии деформируемых элементов (стержневых

антенн, панелей солнечных батарей), удовлетворяющих определенным условиям на свойства деформируемости конструкций, вращение вокруг оси с наибольшим моментом инерции остается устойчивым, как у твердого спутника.

Глава 4. ДОЛГОСРОЧНАЯ МОДЕЛЬ ПАРАМЕТРОВ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ ПВЗ В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ

Международной службы вращения Земли (МСВЗ) и надёжный прогноз координат земного полюса весьма важны для решения задач навигации и при исследовании ряда астрометрических, геодинамических и геофизических проблем [1-4, 7, 11, 55, 59, 78, 79].

Параметры вращения Земли (ПВЗ) – координаты полюса $x_p(t)$, $y_p(t)$, разность всемирного и координированного времени $UT1(t) - UTC$ и вариация продолжительности суток $l.o.d.$ – входят в матрицу преобразования от геоцентрической экваториальной системы отчёта в земную. Такие преобразования являются составной частью алгоритмов фильтрации траекторной информации и определения навигационных параметров, а также параметров движения искусственных спутников Земли (ИСЗ) [76].

Представим модель вычисления параметров вращения Земли на длительных интервалах времени, использованную в обработке высокоточных измерений топоцентрических дальностей до ИСЗ «Эталон-1» и «Эталон-2».

Рассматриваемые космические аппараты выведены на орбиту в 1989 г. Большие полуоси, эксцентриситеты и углы наклона орбит обоих объектов приблизительно равны соответствующим параметрам спутников группировки ГЛОНАСС. Процедура фильтрации высокоточных наблюдений спутника «Эталон» позволяет отлаживать алгоритмы обработки получаемой на основе

спутниковой навигационной системы траекторной информации и контролировать её точность.

4.1. Динамические модели колебаний земного полюса и неравномерности осевого вращения Земли

С помощью методов небесной механики интегрированием кинематических уравнений Эйлера и динамических уравнений Эйлера-Лиувилля удастся построить приближенную малопараметрическую модель вращательно-колебательных движений Земли, обусловленных воздействием гравитационно-приливных сил от Солнца и Луны [1-5, 53]. Она содержит небольшое число неизвестных параметров, подверженных малым вариациям вследствие влияния возмущающих факторов. Оптимальные значения этих параметров находятся методом наименьших квадратов (МНК) [1-3,29] на основе статистической обработки астрометрических результатов высокоточных измерений угловых параметров движения Земли [78]. Учет и детализация влияния факторов геофизического типа (атмосферных, океанических, сейсмических, тектонических, сезонных и ряда других) на данном этапе исследований не представляется целесообразным и оправданным вследствие недостаточной полноты геофизических измерений и трудности их интерпретации. Рассматриваемая модель с удовлетворительной точностью описывает колебания координат земного полюса и вращательное движение Земли [1-5].

Выражения модели координат полюса Земли принимаются согласно [5] в виде:

$$\begin{aligned}x_p(\tau) &= c_x^0 + c_x^1 \tau - a_x^c \cos 2\pi N\tau + a_x^s \sin 2\pi N\tau - Nd_x^c \cos 2\pi\tau - d_x^s \sin 2\pi\tau, \\y_p(\tau) &= c_y^0 + c_y^1 \tau + a_y^c \cos 2\pi N\tau + a_y^s \sin 2\pi N\tau - Nd_y^c \cos 2\pi\tau + d_y^s \sin 2\pi\tau,\end{aligned}\quad (4.1)$$

где, $c_{x,y}^{0,1}$, $a_{x,y}^{c,s}$, $d_{x,y}^{c,s}$ – величины, подлежащие вычислению [5] с помощью МНК [29] по результатам измерений МСВЗ [78]. При определении этих коэффициентов следует иметь в виду равенства $a_x^{c,s} \approx a_y^{s,c}$, $d_x^{c,s} \approx d_y^{s,c}$, отражающие структурным свойством модели. Процессы x_p , y_p оказываются связанными, что следует учитывать при статистической обработке измерений.

Для записи выражений параметров вращательного движения Земли (вариаций длительности суток *l.o.d.* и поправки *UT1-UTC*) рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d[(C^* + \delta C)l.o.d.(t)]}{dt} &= -\frac{D_0}{r_0}(M_r^S + M_r^L); \\ \frac{d(UT1+TAI)(t)}{dt} &= -D_0^{-1}l.o.d.(t),\end{aligned}\quad (4.2)$$

$$D_0 = 86400c; \quad r_0 = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ рад} / c,$$

где $M_r^{S,L}$ – компоненты гравитационно-приливных возмущающих моментов сил, вызванных воздействием Солнца и Луны, соответственно [1-5].

Проинтегрировав выражение (4.2), придём к окончательному виду модели вариаций вращения Земли.

$$l.o.d(\tau) = \sum_{i=1}^N [a_i \cos 2\pi \nu_i \tau + b_i \sin 2\pi \nu_i \tau] + c; \quad (4.3)$$

$$[UT1 - TAI](\tau) = \sum_{i=1}^N [A_i \cos 2\pi \nu_i \tau + B_i \sin 2\pi \nu_i \tau] + C_0 \tau + C_1,$$

где величины $a_i, b_i, A_i, B_i, C_{0,1}, c$ – неизвестные амплитуды соответствующих колебаний, подлежащие определению на основе данных наблюдений; ν_i – частоты лунно-солнечного возмущения ($\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 13.25$, $\nu_4 = 26.68$ и т.д.); τ – время, измеряемое сутками.

При прогнозировании на короткие интервалы времени (от одних до десяти суток) коэффициенты модели считаются медленными функциями времени и рассматриваются как квазипостоянные, для которых требуется регулярная корректировка на интервале интерполяции. Применяемая настройка модели позволяет обойтись без учета дополнительных долгопериодических возмущающих факторов.

Численные расчёты проводились на основе использования базового набора опорных функций модели (4.3) с основными частотами лунно-солнечных возмущений ($N=4$), наблюдаемых МСВЗ [1-5,78]. Следует отметить, что наличие дополнительных слагаемых модели может привести к уменьшению точности краткосрочного прогноза вследствие возросшего числа неизвестных коэффициентов и наличия опорных функций с близкими частотами, ввиду чего потребуется увеличение длины интервала интерполяции.

На рис. 10 представлена четырехлетняя интерполяция (на интервале с 2011 по 2016 год) и прогноз на год колебаний координат полюса Земли x_p, y_p в

сравнении с данными реализовавшейся ее траектории на период 01.01.2016 – 31.12.2016.

На рис. 11 в сравнении с данными измерений МСВЗ представлена теоретическая кривые интерполяции (01.01.2013 – 31.12.2015) и прогноза (01.01.2016 – 30.04.2016) вариаций длительности суток $l.o.d.(t)$. Красная и зелёная сплошные линии – теоретическая модель на интервале интерполяции и прогноза соответственно, а точки – данные наблюдений МСВЗ.

Из теории фильтрации случайных временных последовательностей [29] известно, что оптимальная оценка измеряемых случайных процессов есть результат компромисса между динамической (точность модели) и стохастической (точность измерений) ошибками. Длительность интервала интерполяции, т.е. число обрабатываемых измерений, выбирается исходя из условия минимума суммарной ошибки при заданном наборе небольшого числа опорных функций.

При моделировании вращения Земли во внутригодовых интервалах времени согласно выражениям (4.3) (учитываются основные гармоники лунно-солнечного гравитационно-приливного возмущения) можно воспользоваться одной из двух упрощённых процедур оценивания неизвестных коэффициентов: установление параметров модели $l.o.d.$ на основе данных наблюдений МСВЗ с помощью МНК [29] и дальнейшее вычисление теоретической поправки $UT1-UTC$ или независимое применение МНК к выражениям (4.1), (4.3) для оценивания неизвестных коэффициентов исходя из данных наблюдений и измерений МСВЗ.

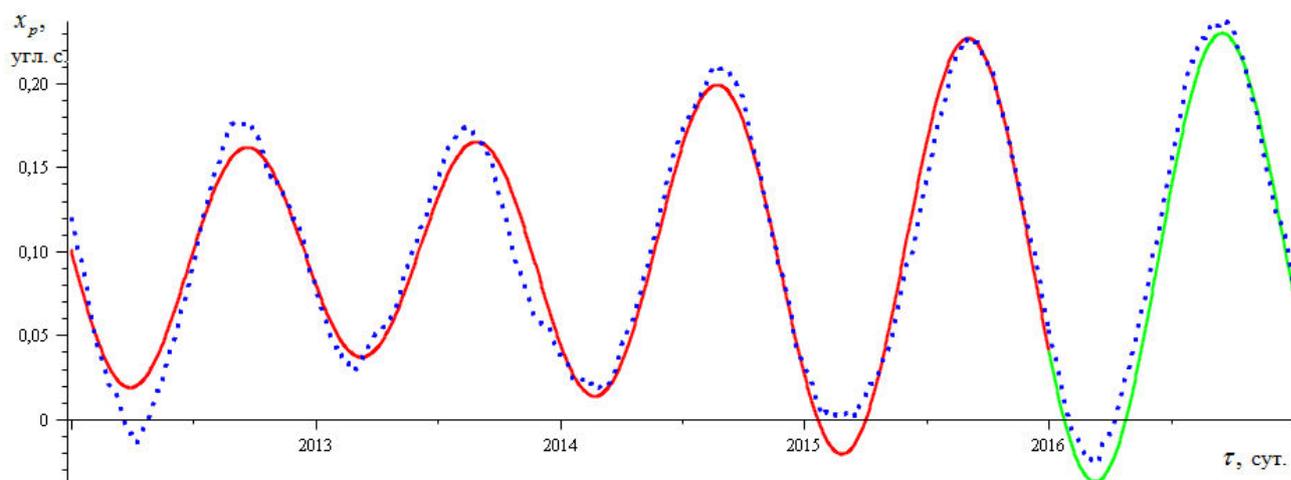


Рис. 10. Результаты моделирования колебаний координаты x_p полюса Земли. Сплошная линия – четырехлетняя интерполяция (01.01.2012-31.12.2015) и прогноз на 2016 год колебаний координаты полюса Земли x_p ; точки – данные наблюдений и измерений МСВЗ.

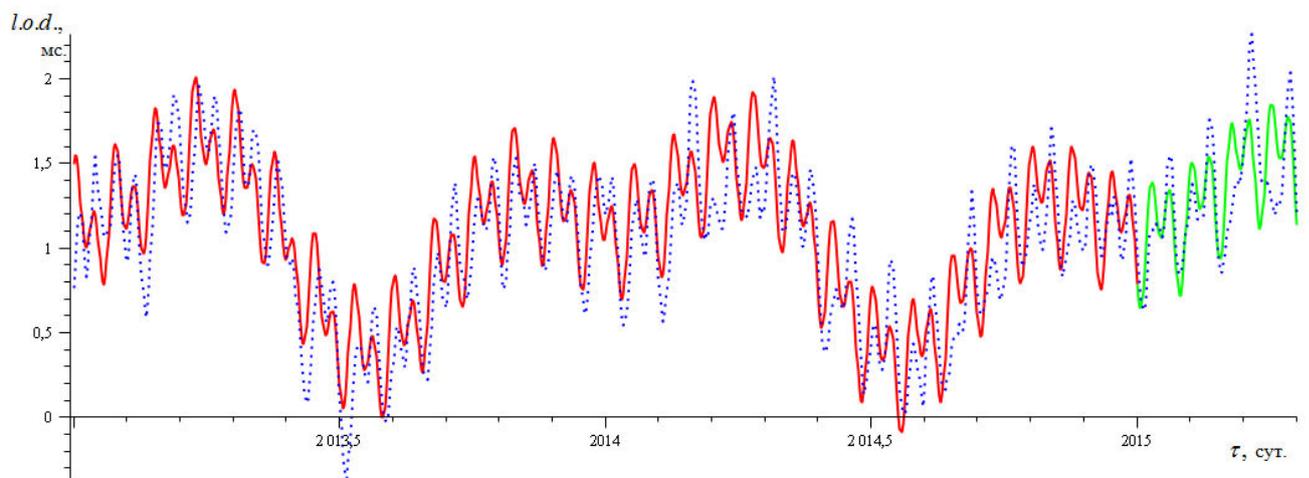


Рис. 11. Интерполяция изменения длительности суток $l.o.d.(t)$ в сравнении с данными наблюдений (01.01.2013 – 31.12.2015) и прогноз до 30.04.2016. Точки – данные наблюдений и измерений МСВЗ, красная и зелёная сплошные линии – теоретическая кривая на участке интерполяции и прогноза соответственно.

В случае определения ПВЗ на длительных интервалах времени выражения для *l.o.d.* и *UT1–UTC* должны рассматриваться совместно, то есть необходимо учитывать структурное свойство модели (4.1), (4.3) при оценивании неизвестных параметров. Для реальной ситуации, отвечающей современным данным МСВЗ, повышение точности прогноза достигается в рамках малопараметрической модели (4.1), (4.3) за счёт учёта структурных свойств. Это обусловлено уменьшением динамической ошибки аппроксимации процесса и сравнительно высокой точностью измерений.

Анализ численного моделирования колебаний земного полюса (4.1) и неравномерности осевого вращения Земли (4.3) свидетельствуют о соответствии моделей результатам данных наблюдений и измерений МСВЗ. Теоретические модели по точности аппроксимации процесса обеспечивают хорошее совпадение с данными МСВЗ на различных интервалах времени.

4.2. Применение долгосрочной модели ПВЗ в спутниковой навигации

В таблице представлены результаты обработки лазерных наблюдений спутников «Эталон-1» и «Эталон-2». Наблюдения были выполнены с помощью сети международных обсерваторий с января 2013 года [79]. Первое число в каждой колонке таблицы относится к объекту «Эталон-1», а второе – к объекту «Эталон-2». Вторая колонка содержит количество топоцентрических дальностей. В третьей и четвёртой колонках даны минимальные разности между измеренными и вычисленными значениями дальностей в метрах. Пятая колонка содержит оценки средней квадратической погрешности одного измерения в метрах.

Таблица 1

Месяц	N	$\Delta\rho_{\min}, м$	$\Delta\rho_{\max}, м$	$\sigma, м$
Январь	527	-2,02	1,73	0,495
	354	-5,31	5,46	1,687
Февраль	588	-2,73	2,47	0,744
	514	-2,76	2,50	1,040
Март	766	-3,11	2,37	0,539
	624	-4,12	2,21	0,884
Апрель	601	-3,09	3,05	0,740
	615	-5,09	2,87	0,980
Май	648	-4,42	5,63	1,182
	611	-5,93	3,93	1,253
Июнь	637	-4,40	4,28	1,263
	659	-4,68	5,22	1,328
Июль	844	-6,00	6,67	1,671
	699	-6,05	6,35	1,697
Август	879	-6,70	6,06	1,792
	838	-6,47	6,74	1,787

Обработка измерений топоцентрических дальностей выполнена с помощью теории движения искусственных спутников Земли и пакета вычислительных модулей, представленных в статье [7].

На рис. 12 и рис. 13 приводятся графики разностей между измеренными и вычисленными значениями топоцентрических дальностей в метрах до объектов Эталон-1 и Эталон-2 соответственно.

В наблюдениях участвовало около 30 обсерваторий. Один сеанс измерений дальности на различных пунктах составлял от 10 минут до 2.5 часа. Для оптимизации объёма данных, исключения ошибочных наблюдений и увеличения точности выполняется первичная обработка. Несколько сотен единичных измерений интервалов прохождения светового луча от телескопа до спутника и обратно, полученных на интервалах времени до трёх минут, на пунктах первичной обработки информации методом осреднения преобразуются в одну «нормальную» точку. Именно массив «нормальных» точек был использован в предлагаемом исследовании. Минимальная средняя квадратическая погрешность одного измерения оказалась равной 0.7 метра. Максимальная средняя квадратическая погрешность одного измерения составила 2.1 метра.

В таблице представлены результаты обработки лазерных наблюдений спутников Эталон-1 и Эталон-2. Наблюдения были выполнены сетью международных обсерваторий с января по август 2013 года [7]. Первое число в каждой колонке таблицы относится к объекту Эталон-1, а второе значение, соответственно, к объекту Эталон-2. Вторая колонка содержит количество топоцентрических дальностей. В третьей и четвёртой колонках даны минимальные и максимальные разности между измеренными и вычисленными значениями дальностей в метрах. Пятая колонка содержит оценки средней квадратической погрешности одного измерения в метрах.

Использованная в расчётах долгосрочная модель параметров вращения Земли включает в себя оценки средних квадратических погрешностей каждого из параметров модели. В процессе фильтрации наблюдений измеряемыми

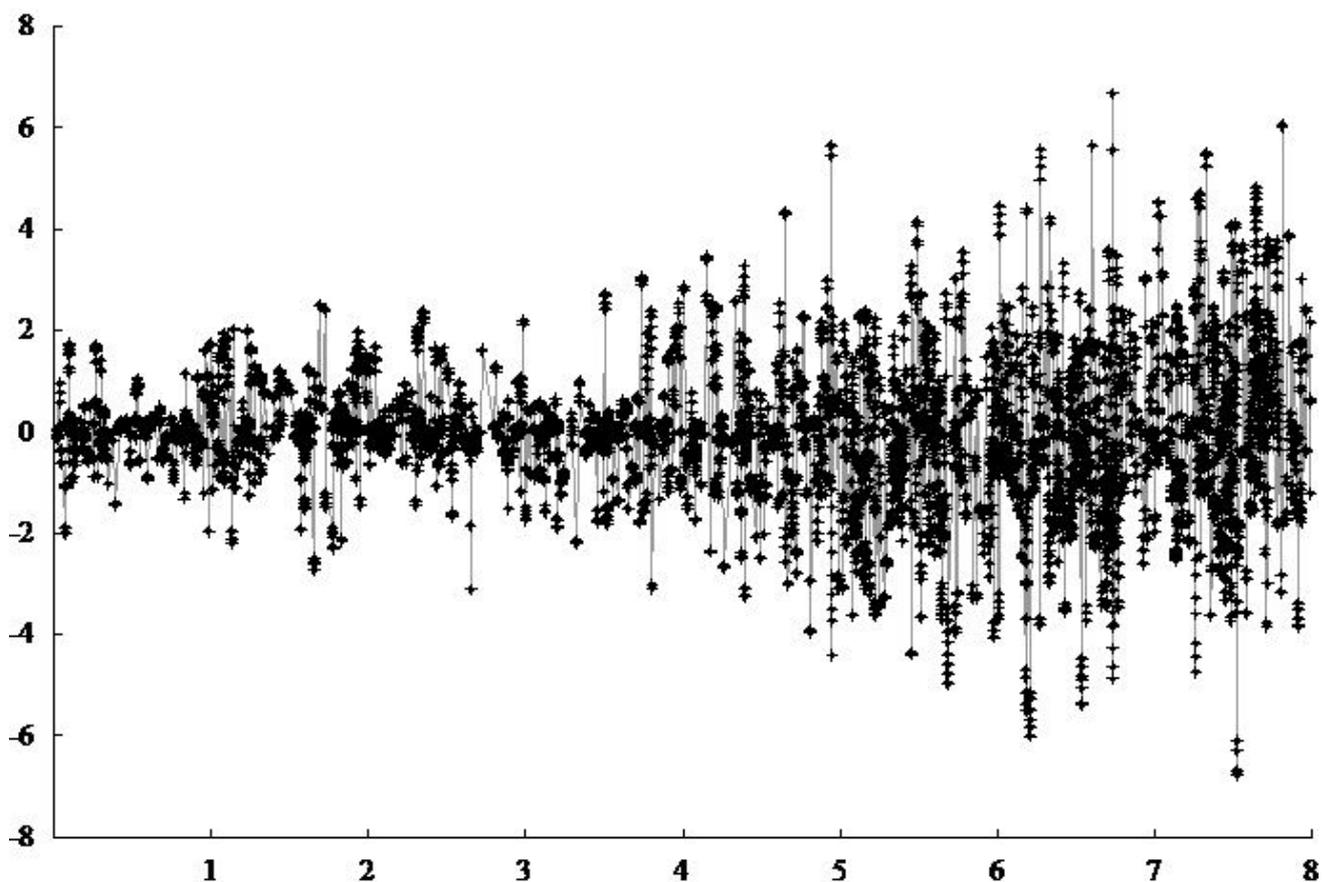


Рис. 12. «Эталон-1», остаточные отклонения топоцентрических дальностей (январь-август 2013 г., 5460 точек, невязки в метрах)

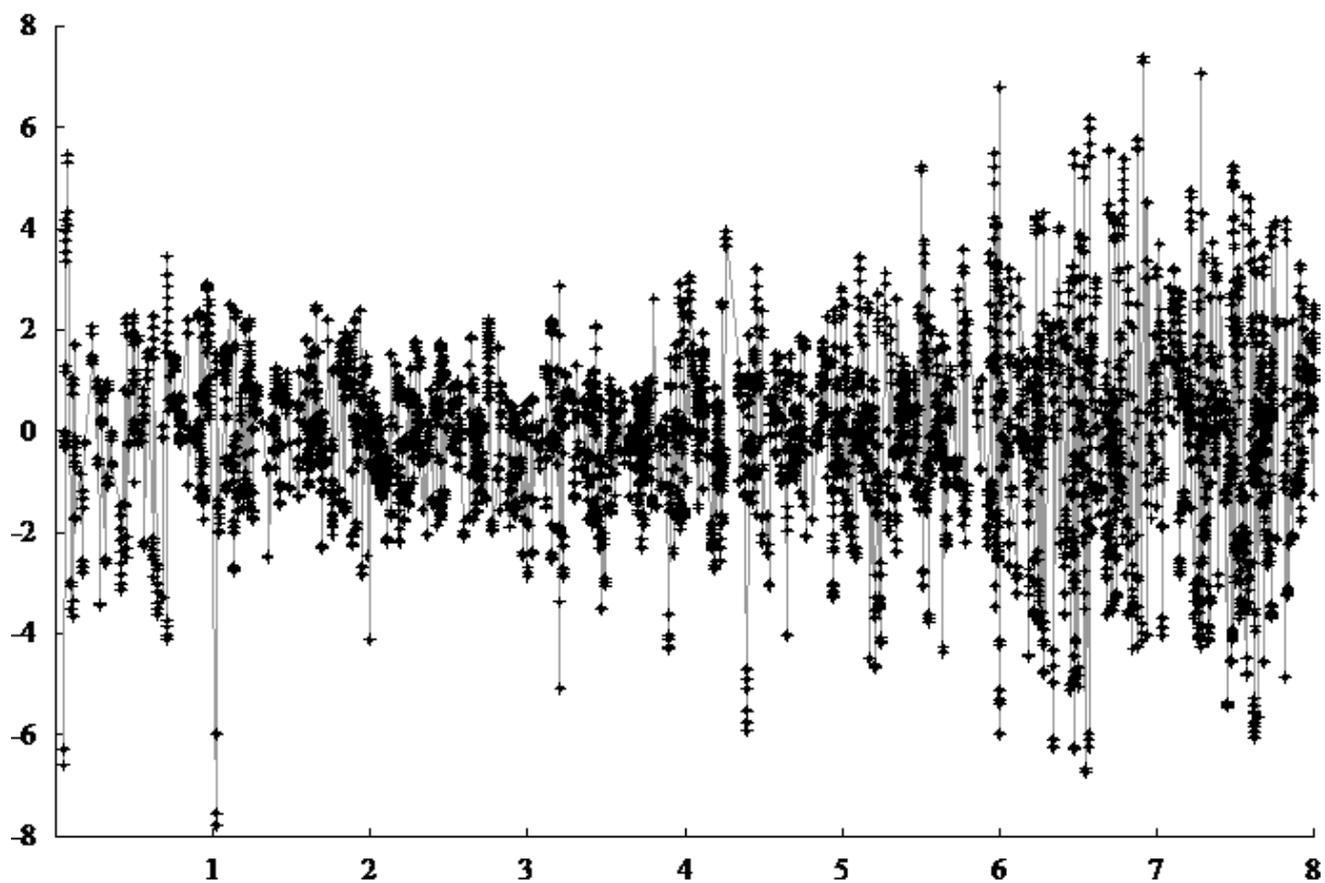


Рис. 13. «Эталон-2», остаточные отклонения топоцентрических дальностей (январь-август 2013 г., 5460 точек, невязки в метрах)

параметрами являются топоцентрические дальности. В линейном приближении первые производные от вычисленных дальностей по параметрам вращения Земли позволяют вычислить ковариационную матрицу и оценить априорную величину средней квадратической погрешности остаточных отклонений, обусловленных погрешностями параметров вращения Земли, вычисляемых на основе модели. Оценка априорной величины для наблюдений спутника Эталон составила приблизительно 1.8 метра [59]. Результаты обработки показывают, что апостериорные оценки находятся на одном уровне с априорной оценкой.

Заключение

Перечислим основные результаты диссертационной работы:

1. Рассмотрена задача переориентации КА при наличии возмущений от гиродиннов. Показано, при каких предположениях упругие колебания системы не оказывают влияния на плоский разворот спутника и когда он невозможен.
2. На основе модельной задачи показано, что демпфированием можно управлять с помощью упругой податливости конструкции, хотя интервал времени может быть достаточно большим.
3. Найдены равновесные положения деформируемого КА в поступательно-вращательном движении и изучена их устойчивость.
4. Промоделированы колебательные процессы системы с упругими и диссипативными элементами и построены соответствующие графики.
5. Изучено влияние фундаментальных ПВЗ (колебания земного полюса и неравномерность осевого вращения) на эфемериды пробных спутников «Эталон-1» и «Эталон-2». Учет ПВЗ в долгосрочной модели существенно повышает точностные характеристики координатно-временного обеспечения объектов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В., Рыхлова Л. В.* Внутригодовые неравномерности вращения Земли. // *Астрономический журнал*, 2008, т. 85, № 7, с. 657-664.
2. *Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В.* Неравномерности вращения Земли. // *Докл. РАН*, 2007, т. 417, № 4, с. 483-488.
3. *Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В.* Небесномеханическая модель неравномерности вращения Земли // *Космические исследования*. 2009. Т. 5(47). С. 452-459.
4. *Акуленко Л. Д., Киселёв М. Л., Марков Ю. Г.* Уточненная модель неравномерности вращения Земли. // *Космонавтика и ракетостроение*, 2011, вып. 4(65), с. 13-19.
5. *Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В.* Колебательно-вращательные процессы в движении Земли относительно центра масс: интерполяция и прогноз // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*, 2012, №6, с. 6-29.
6. *Акуленко Л. Д., Крылов С. С., Марков Ю. Г., Тун Тун Вин, Филиппова А.С.* Динамика космического аппарата с упругими и диссипативными элементами в режиме ориентации // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2014. №5, С. 106-115.
7. *Бахтигараев Н. С., Чазов В. В.* Информационное обеспечение космических экспериментов на основе численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли // *Космические исследования*, 2005, т. 43, № 5, С. 386-389.

8. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - М.: Изд-во МГУ, 1975.
9. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - М.: Изд. МГУ, 1975. с 308.
10. *Белецкий В. В.* Приливная эволюция наклонений и вращений небесных тел. Препринт № 43. - М.: Институт прикл. Математики АН СССР, 1978, с. 20.
11. *Баркин М. Ю., Перепелкин В. В., Скоробогатых И. В.* Небесномеханическая модель вращательного движения Земли и прогноз глобальной составляющей момента импульса атмосферы // *Космические исследования*, 2012, том 50, №3, с. 271–280.
12. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики. - М.: Наука, 1983. с. 448.
13. *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. - М.: Мир, 1965. 199 с.
14. *Болотина Н. Е., Вильке В. Г.* О поступательно-вращательном движении упругого стержня в центральном ньютоновском поле сил. // *МТТ*, 1982, №4, с. 64-69.
15. *Болотина Н. Е., Вильке В. Г.* Движение симметричного спутника вокруг центра масс на круговой орбите при наличии гибких вязкоупругих стержней. // *Космические исследования*, 1984, т.22, вып. 1. с. 13-19.
16. *Болотина Н. Е., Вильке В. Г. Марков Ю. Г.* О вращательном движении твердого тела, несущем вязкоупругий диск, в центральном поле сил. // *ПММ*, 1986, т.50, вып. 2, с. 187-193.
17. *Версицкий А. И., Крысов С. В., Уткин Г. А.* Постановка краевых задач динамики упругих систем исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского - Горький: ГГУ, 1983, 65 с.

18. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы в динамике систем с бесконечным числом степеней свободы. - М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1982. с. 122.
19. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. - М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1986. с. 192.
20. *Вильке В. Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Часть I. - М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1997. с. 215.
21. *Вильке В. Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Часть II. - М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1997. с. 160.
22. *Вильке В. Г.* О движении упругой планеты в центральном поле сил. // Космические исследования, 1979, № 3, с. 364-370.
23. *Вильке В. Г.* Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил. // ПММ, 1980, 44, вып. 3, с. 395-402.
24. *Вильке В. Г.* Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы. // Вестник МГУ, Сер.1. Математика, механика, 1983, № 5. С. 54.
25. *Вильке В. Г., Марков Ю. Г.* Эволюция поступательно-вращательного движения вязкоупругой планеты. // Астрономический журнал. 1988, т. 65, вып. 4, с. 861-867.
26. *Вильке В. Г., Демин В. Г., Марков Ю. Г.* Эволюция вращений симметричного спутника с вязкоупругими стержнями вокруг центра масс на круговой орбите. // Космические исследования, 1985, т.24, вып. 6.

27. *Вильке В. Г., Шатина А. В.* Эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на круговой орбите. // *Космические исследования*, 1994, т.32, вып. 4-5, с. 51-61.
28. *Голдрайх П., Пил С.* Динамика вращения планет. – Приливы и резонансы в Солнечной системе. Под ред. Жаркова В.Н. - М.: Мир, 1975.
29. *Губанов В. С.* Обобщённый метод наименьших квадратов. // Теория и применение в астрометрии. СПб: Наука, 1997, с. 18.
30. *Дарвин Дж. Г.* Приливы и родственные им явления в Солнечной системе. -М.: Наука, 1969.
31. *Докучаев Л. В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. - М.: Машиностроение, 1987. с. 600.
32. *Докучаев Л. В.* Тезисы докладов XI Международной конференции: Устойчивость, управление и динамика твердого тела. Донецк: Институт прикладной математики и механики НАН Украины, 2011, с. 43.
33. *Демин А. В., Марков Ю. Г., Миняев И. С.* О приливной эволюции наклонений и вращений небесных тел. // *Космические исследования*, 1992, т. 30 вып. 3, с. 157-164.
34. *До Чунг Бо, Марков Ю. Г., Скоробогатых И. В.* Долгопериодическая эволюция поступательно-вращательного движения деформируемого спутника. // *Космонавтика и ракетостроение*, 2016, вып. 1 (86), с. 5–11.
35. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. - М.: Наука, 1986, с. 760.
36. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. - М.: Наука, 1988. с. 328.
37. *Зленко А.А.* Движение двух вязкоупругих шаров в поле притягивающего центра // *Космические исследования*, 2011, Т. 49, №6, С. 569-572.

38. *Зленко А.А.* Стационарные решения и исследование их устойчивости в задаче об эволюции движения двух вязкоупругих шаров в поле притягивающего центра // *Космические исследования*, 2012, Т. 50, №6, С. 490-492.
39. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск.ун-та, 1990. с. 310.
40. *Кильчевский Н. А.* Механика континуальных систем. – Киев: Наукова думка, 1984. с. 428.
41. *Климов Д. М., Маркеев А. П.* Нелинейные задачи динамики крупногабаритных космической конструкции // препринт Ин-та проблем механики АН СССР, 1990, № 449, с. 35.
42. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория упругости. - М.: Наука, 1987. с. 246.
43. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. - М.: Мир, 1965. с. 408.
44. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. - М., Л.: ГИТТЛ, 1947. с. 465.
45. *Лурье А. И.* Теория упругости. - М.: Наука, 1970. 939 с.
46. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. - М.: Физматгиз, 1961, с. 824.
47. *Ляв А.* Математическая теория упругости. - М., Л.: ОНТИ, 1935. с. 672.
48. *Манк У., Макдональд В.* Вращение Земли. - М.: Мир, 1964.
49. *Маркеев А. П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле // *Космические исследования*, 1989, т 27, вып.2, с. 163-175.
50. *Марков Ю. Г., Миняев И. С.* Об эволюции движений системы «планета – спутник» в поле притягивающего центра. // *Астрономический журнал*, 1992, т. 69, вып. 2, с. 416-427.
51. *Марков Ю. Г., Миняев И.С.* К динамике космического аппарата с упругими колеблющимися массами // *Космические исследования*, 1991. Т. 29. Вып. 5.

52. *Марков Ю. Г., Миняев И. С.* Пространственный вариант задачи «деформируемая планета - спутник» в поле притягивающего центра. // *Космические исследования*, 1994, т. 32, вып. 6, с. 89-98.
53. *Марков Ю. Г., Рыхлова Л. В., Скоробогатых И. В.* Поступательно-вращательное движение как новый подход к решению астрометрических проблем в теории вращения Земли. // *ДАН. Астрофизика, космология*, 2000, т. 370, № 5.
54. *Марков Ю. Г., До Чунг Бо, Скоробогатых И. В.* О влиянии упругих деформаций на поступательно-вращательное движение тела в центральном гравитационном поле сил. // *Космонавтика и ракетостроение*, 2015, вып. 1 (80), с. 106–113.
55. *Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В., Крылов С.С.* Численно-аналитический подход к изучению колебательных процессов полюса Земли // *Доклады Академии наук*, 2015, Т. 463, №6, с. 664-668.
56. *Марков Ю. Г., Михайлов М. В., Ларьков И. И., Рожков С. Н., Крылов С. С., Перепёлкин В. В., Почукаев В. Н.* Фундаментальные составляющие параметров вращения Земли в формировании высокоточной спутниковой навигации // *Космические исследования*, 2015, Т. 53, №2, С. 152-164.
57. *Миняев И. С., Скоробогатых И. В.* О влиянии деформаций на плоские движения деформируемого тела в гравитационном поле. // *Космические исследования*, 1994, вып. 1, т.32, с. 49-57.
58. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука, 1969. с. 379.
59. *Перепелкин В. В., Тун Тун Вин, Чазов В. В.* Долгосрочная модель прогнозирования параметров вращения Земли при решении задач

- спутниковой навигации // Космонавтика и ракетостроение, 1(74), 2014, с. 128-133.
60. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. - М.: Наука, 1974, с. 600.
61. Румянцев В. В. О некоторых вариационных принципах в механике сплошных сред. // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, вып 6, с. 963-973.
62. Садов Ю.А. Формы равновесия гибкого троса в плоскости круговой орбиты. 0- и 1- параметрические семейства // Препринт ИПМ № 68, Москва, 2001.
63. Седов Л. И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1983. Т.1, 2, 528 с. 560.
64. Сидоренко В. В. Эволюция быстрых вращений упругого кольца в гравитационном поле. // Препринт № 93, ИПМ АН СССР, 1987.
65. Скоробогатых И. В., Тимошин Д. С., Филиппова А. С. Многочастотный процесс возмущённых движений Земли в рамках задачи трёх тел. // Космонавтика и ракетостроение, 2012, вып. 4(69), с.121-127.
66. Скоробогатых И. В., Тун Тун Вин. Орбитально-вращательное движение спутника, содержащего деформируемые элементы, в гравитационном поле сил // Космонавтика и ракетостроение, 4(69), 2012, с. 108-113.
67. Скоробогатых И. В., Тун Тун Вин. Моделирование вращательно-колебательных движений деформируемой Земли (интерполяция и прогноз) // XXXXII Всероссийский симпозиум “Механика и процессы управления”. Миасс. 2012. Том 3. с. 3-8.

68. *Скоробогатых И. В., До Чунг Бо.* О частотах лунно-солнечных приливов деформируемой Земли. // *Космонавтика и ракетостроение*, 2014, вып. 1(74), с. 113–117.
69. *Филиппова А. С., Тун Тун Вин.* Анализ возмущённых движений космического аппарата с гиросtabilизаторами в критических случаях. // *Суздаль. 5-9 июля 2013* с. 231.
70. *Филиппова А. С., Тун Тун Вин.* Динамика деформируемого космического аппарата в задаче переориентации. // *Тезисы докладов Международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль. 3-7 июля 2015* с. 134 - 135.
71. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. - М.: Наука, 1980. с. 383.
72. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // *ПММ*. 1978. Т. 42. вып. 1.
73. *Черноусько Ф. Л.* Прикладная математика и механика, 1987, т.42, вып. 1, с. 34-42.
74. *Черноусько Ф. Л.* О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс. // *Известия АН СССР Механика твердого тела*. 1990, № 1, с. 22.
75. *Черноусько Ф. Л., Шамаев А. С.* Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамика твердого тела с упругими и диссипативными элементами. // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1983, № 3, с. 33.
76. *Яшкин С.Н.* Преобразование систем отсчёта, связанных со спутником и его орбитой // *Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка*. 2006. №3. с. 44-49.

77. *Яшкин С.Н.* Небесная механика. – М.: Издательство МИИГАиК, 2014, 270 с.
78. IERS Annual Reports. 1990 July bis 1999 July 2000. Central Bureau of IERS. Observatoire de Paris. 2000 July bis 2002 July 2003. Verlag BKG Frankfurt am Mein.
79. *Pearlman M. R., Degnan J. J., Bosworth J. M.* The International Laser Ranging Service. // *Advances in Space Research*, 2002, v. 30, № 2, pp. 135-143.