УДК 539.3

Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости

А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин, С.Ю. Литвинчук

Аннотация

Представлены результаты расчетов динамического состояния вязкоупругих тел на основе метода граничных элементов (МГЭ) в сочетании с методами квадратур сверток и Дурбина. Решение вязкоупругих краевых задач в трехмерной постановке в явном времени, организовано без использования шаговых процедур. Рассматривается модель пористой среды с двухфазной внутренней структурой, предложенная Био. Представлены результаты расчетов динамического состояния конечных пороупругих тел на основе МГЭ. Представлены численные эксперименты.

Ключевые слова

граничные интегральные уравнения; граничный элемент; вязкоупругость; пороупругость.

Введение

Нестационарные динамические задачи теории вязкоупругости решаются методом граничных интегральных уравнений (ГИУ). Представлена методика численного решения систем граничных интегральных уравнений прямого подхода в сочетании с преобразованием Лапласа и методом Дурбина для расчета неизвестных волновых полей трехмерных вязкоупругих составных тел, и представлен подход метода граничных элементов с явным учетом переменной времени: использована гранично-элементная техника построения дискретного аналога в сочетании с методом квадратур сверток. Вязкоупругие свойства материалов описываются соотношениями классических регулярных моделей (Максвелла, Фойгта, стандартного вязкоупругого тела) или слабосингулярной степенной моделью.

Исследование волновых процессов в пороупругих телах представляет научный и практический интерес. Для широкого диапазона насыщенных материалов упругая и вязкоупругая теории являются грубым приближением при исследовании распространения волн. Для учета пористости использована теория М. Био [1, 2]. Вопросами распространения волн в пористых насыщенных средах в последние годы занимались Н.С. Городецкая (1998), Н. Дунин, Д. Михайлов, В. Николаевский (2002), R. Ababou и др. (2002), D.F. Aldridg и др. (2005), J. Jocker и D. Smenlders (2005), G. Chao и др. (2005), H.F. Wang (2000) и многие другие. Вопросы, связанные с построением интегральных представлений решений в полной строгой математической постановке, являются актуальными. Несмотря на то, что в литературе представлены варианты сингулярных граничных интегральных уравнений [3, 4], имеются лишь единичные гранично-элементные решения краевых динамических задач пороупругости. В работе используются модифицированные интегральные представления волновых полей в пороупругих средах, полученные ранее M. Schanz [3]. На основе новых ГИУ пороупругости получены численные гранично-элементные решения прямых трехмерных динамических задач.

1. Постановка задачи

Рассматривается кусочно-однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Границу тела обозначим через Γ, границы однородных частей Ω_k $(k=1,...,K)$ – через Γ_k. Предполагается, что Ω_k являются изотропными вязкоупругими телами [5, 6]. Введем следующие обозначения для параметров материала каждой однородной части (подконструкции) Ω_k : ρ^k – плотность материала, $\lambda^k(t)$ и $\mu^k(t)$ — функции Ламе материала. Динамическое состояние каждой части тела Ω_k описывается следующей системой дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\mu^k(t) * \Delta u^k(x,t) + (\lambda^k(t) + \mu^k(t)) * \operatorname{grad}\operatorname{div} u^k(x,t) = \rho^k\, \ddot{u}^k(x,t), \qquad (1)$$

где символ "*" означает свертку Стилтьеса по времени *t*. В уравнениях (1) $u^k(x,t)$ – вектор перемещений точки $x=(x_1x_2x_3)$ в момент времени *t*. Физические и геометрические соотношения имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda * \varepsilon_{kk} + 2\mu * \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial u_i} + \frac{\partial u_i}{\partial u_j}\right),$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}$ – тензоры напряжений и деформаций.

Пусть вектор перемещений и функции Ламе материала удовлетворяют условиям: $u^k(x,0) = \dot{u}^k(x,0) = 0,\ \mu(t-\tau) = 0,\ \lambda(t-\tau) = 0,$ где $t < \tau$, $\lim_{t\to 0}\dot{\mu}(t) = 0,\ \lim_{t\to 0}\dot{\lambda}(t) = 0.$

Конкретный вид функций $\mu(t)$ и $\lambda(t)$ определяется вязкоупругой моделью материала. Будем рассматривать случай пропорциональных функций памяти, тогда достаточно описать физические соотношения, к примеру, для случая $i \neq j$:

$$\sigma_{ij} = 2\mu * \varepsilon_{ij} = 2\int_0^t G(t-\tau)d\varepsilon_{ij}(t),\ \ \frac{dG(t)}{dt} = 1 - R(t),\ R(t) \equiv K(t) - \int_0^t K(t-\tau)K(\tau)d\tau + \ldots,$$

$$J(t) = 1 + K(t),$$

где $G(t)$ – функция памяти материала, $R(t), K(t)$ – ядра релаксации и ползучести материала. Кроме того, пусть отношение значения модуля на бесконечности к значению модуля в начальный момент (для регулярных моделей) определяется параметром $\mathrm{w} = G(\infty)/G(0)$.

Введем вектор напряжений $t_n(x,t)$ в точке x на элементарной площадке с единичной нормалью $n(x)$:

$$t_n(x,t) \equiv T_{n(x)}u(x,t) = n(x)\lambda(t) * \mathrm{div}\, u(x,t) + 2\mu(t) * \frac{\partial\, u(x,t)}{\partial\, n(x)} + \mu(t) * [n(x) \times \mathrm{rot}\, u(x,t)]. \quad (2)$$

Если $x \in \Gamma_k$, то под $n(x)$ будем понимать единичный вектор внешней (по отношению к Ω_k) нормали к границе Γ_k. Вектор напряжений $t_n(x,t) = (t_1, t_2, t_3)$ на границе Γ_k, соответствующий этой нормали, обозначим через $t^k(x,t)$.

Будем рассматривать следующие типы граничных условий для Ω_k:

$u_l^k(x,t) = f_l^k(x,t),\ \ x \in \Gamma^u \cap \Gamma_k$; $t_l^k(x,t) = g_l^k(x,t),\ \ x \in \Gamma^\sigma \cap \Gamma_k$;

$u_l^k(x,t) = u_l^s(x,t),\ \ t_l^k(x,t) = -t_l^s(x,t),\ \ x \in \Gamma'_{ks}$.

Здесь Γ^u и Γ^σ – части границы Γ тела Ω, по которым заданы соответственно перемещения и поверхностные силы; Γ'_{ks} – граница жесткого контакта частей Ω_k и Ω_s. Функции $f_l^k(x,t)$ и $g_l^k(x,t)$ являются заданными функциями координат и времени.

Математическая модель пороупругой среды

Система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа (параметр s) для смещения $\tilde{u}_i$ и порового давления $\tilde{p}$ имеет следующий вид [3]:

$$\mu\tilde{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}\mu\right)\tilde{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\tilde{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\tilde{u}_i = -\tilde{F}_i,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\widetilde{p}_{,ii}-\frac{\phi^2 s}{R}\widetilde{p}-(\alpha-\beta)s\widetilde{u}_{i,i}=-\widetilde{a}\,,\ \beta=\frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s+s^2 k(\rho_a+\phi\rho_f)}\,,$$

где μ, K – константы упругости, ϕ – пористость, k – проницаемость, α – эффективный коэффициент напряжений, ρ, ρ_a, ρ_f – плотности пористого скелета, присоединенной массы и жидкой среды, $\widetilde{F}_i$, $\widetilde{a}$ – плотности источников.

Фундаментальное решение для этой системы построено в [3], однако при построении матриц сингулярных решений допущены ошибки, что, в свою очередь, привело к ошибочному интегральному представлению и ГИУ для порового давления.

2. Интегральная формулировка

Применим к исходным уравнениям интегральное преобразование Лапласа:

$$f(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-ist}dt\,,$$

где s – параметр преобразования Лапласа.

В качестве метода решения будем использовать метод граничных интегральных уравнений [5], в основе которого лежит сведение краевой задачи для дифференциального уравнения движения к интегральному уравнению относительно граничных функций.

Вектор перемещений во внутренних точках области связан с граничными значениями перемещений и усилий следующим образом.

$$\bar{u}_l^k(x,s)=\int_{\Gamma_k}U_{lj}(x,y,s)\bar{t}_j^k(y,s)d_yS-\int_{\Gamma_k}T_{lj}(x,y,s)\bar{u}_j^k(y,s)d_yS\,,\quad l=1{,}2{,}3\,,\quad x\in\Omega_k\,. \qquad (3)$$

Здесь U_{lj} и T_{lj} – соответственно компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений уравнения (1). Тензор T выражается из (2) через тензор U с помощью оператора напряжений T_n

$T(x,y,s)=[T_{n(x)}U(x,y,s)]'$, где верхний значок «’» означает транспонирование.

Формула (3) дает следующее ГИУ:

$$c_{lj}(x)\bar{u}_j^k(x,s)+\int_{\Gamma_k}T_{lj}(x,y,s)\bar{u}_j^k(y,s)d_yS=\int_{\Gamma_k}U_{lj}(x-y,s)\bar{t}_j^k(y,s)d_yS\,,\quad l=1{,}2{,}3\,,\quad x\in\Gamma_k\,. \qquad (4)$$

Интеграл в левой части (4) является сингулярным, т.е. понимается в смысле главного значения по Коши, а $c_{lj}(x)$ – известный коэффициент при внеинтегральном члене. Если в точке x поверхность имеет единственную касательную плоскость, то $c_{lj}(x)=\delta_{lj}/2$. ГИУ (4) позволяет разработать эффективную численную методику для определения неизвестных амплитуд граничных перемещений и поверхностных сил. Решением исходной начально-краевой задачи будет вектор-функция $u(x,t)$, полученная путем применения к решению (3), (4) обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(s)e^{ist}ds \tag{5}$$

Для численного обращения (5) будем использовать алгоритм, предложенный Дурбиным [7].

Граничные интегральные уравнения пороупругости

Интегральное представление прямого подхода имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix}\tilde{u}_j\\ \tilde{p}\end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix}\tilde{U}_{ij}^s & -\tilde{P}_j^s\\ \tilde{U}_i^f & -\tilde{P}^f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{t}_i\\ \tilde{q}\end{bmatrix}d\Gamma - \int_\Gamma \begin{bmatrix}\tilde{T}_{ij}^s & -\tilde{Q}_j^s\\ \tilde{T}_i^f & -\tilde{Q}^f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{u}_i\\ \tilde{p}\end{bmatrix}d\Gamma,$$

Компоненты матриц – ядер интегрального представления – можно найти в [3, 8].

Ядра интегральных представлений допускают следующее выделение особенностей:

$$\hat{P}_i^s = O(r^0),\ \hat{U}_i^f = O(r^0),\ \hat{P}^f = \frac{\rho_f s}{4\pi\beta}\frac{1}{r} + O(r^0),\ \hat{U}_{ij}^s = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\left\{r_{,i}r_{,j} + \delta_{ij}(3-4\nu)\right\}\frac{1}{r} + O(r^0),$$

$$\hat{Q}_j^s = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\left\{\alpha(1-2\nu)(r_{,n}r_{,j} - n_j) - 2\beta(1-\nu)(r_{,n}r_{,j} + n_j)\right\}\frac{1}{r} + O(r^0),$$

$$\hat{T}_i^f = \frac{\rho_f s^2}{8\pi\beta}\left\{(\alpha-\beta)\frac{1-2\nu}{1-\nu}r_{,i}r_{,j} + n_i\frac{\alpha+\beta(1-2\nu)}{1-\nu}\right\}\frac{1}{r} + O(r^0),$$

$$\hat{T}_{ij}^s = \frac{-\left((1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}\right)r_{,n} + (1-2\nu)(r_{,j}n_i - r_{,i}n_j)}{8\pi(1-\nu)r^2} + O(r^0),\ \hat{Q}^f = -\frac{r_{,n}}{4\pi r^2} + O(r^0).$$

Итоговая система ГИУ примет вид:

$$\begin{bmatrix}c_{ij}(y) & 0\\ 0 & c(y)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i(t,x)\\ p(t,x)\end{bmatrix} + \int_0^t\int_\Gamma \begin{bmatrix}T_{ij}^s(t-\tau,y,x) & Q_j^s(t-\tau,y,x)\\ T_i^f(t-\tau,y,x) & Q^f(t-\tau,y,x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i(\tau,x)\\ p(\tau,x)\end{bmatrix}d\Gamma\tau =$$

$$\int_0^t\int_\Gamma \begin{bmatrix}U_{ij}^s(t-\tau,y,x) & -P_j^s(t-\tau,y,x)\\ U_i^f(t-\tau,y,x) & -P^f(t-\tau,y,x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_i(\tau,x)\\ q(\tau,x)\end{bmatrix}d\Gamma\tau.$$

На основе этой системы строится дискретный аналог, детальное описание которого можно найти в [5].

3. Численные эксперименты

Задача о торцевой ударной силе по призматическому телу с жестко закрепленным концом

Полагалось $p = 1\,Н/м^2$ (рис. 1), параметры материала: $\rho = 7850\,кг/м^3$, $\nu = 0$, $E = 2{,}11\cdot 10^{11}\,Па$. Задача имеет аналитическое решение, и известно ее МГЭ-решение в сочетании с методом квадратур сверток [3]. Использована равномерная сетка с 224 ГЭ. Форма нагрузки: $\bar{p}(t) = H(t), \quad t \geq 0$.

На рисунках кривыми с маркерами представлены кривые аналитических решений для соответствующих параметров вязкости. В [3] приведены результаты для упругого случая с использованием трех неравномерных гранично-элементных сеток из 324, 112 и 42 треугольных граничных элементов. Расчеты показали, что для достижения не меньшей точности, чем в [3], достаточно взять равномерную сетку с 224 граничными элементами.

Поведение перемещений для модели Кельвина–Фойгта продемонстрировано на рис. 2 (для кривой 1 $\beta = 500$; для кривой 2 $\beta = 100$; для кривой 3 $\beta = 3$; для кривой 4 $\beta = 0{,}5$). С уменьшением характерного времени ползучести τ_ε или ростом $\beta = 1/\tau_\varepsilon$ материал все более отчетливо начинает вести себя как упругий материал на длительных модулях. При $\beta \to \infty \left(\tau_\varepsilon \to 0\right)$ получаем чисто упругий случай.

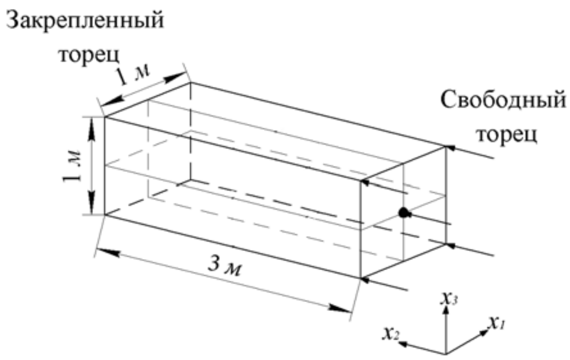


Рис. 1.

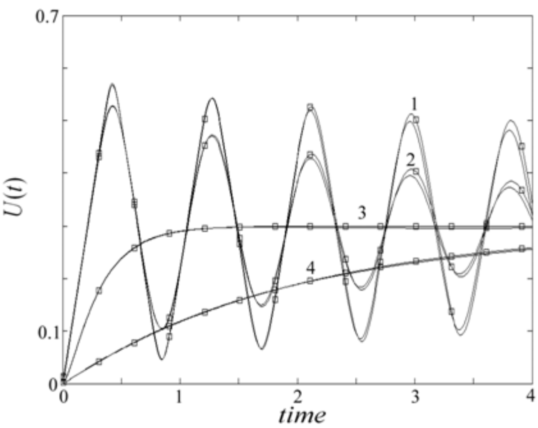


Рис. 2.

Поведение перемещений для модели стандартного вязкоупругого тела продемонстрировано на рис. 3 (для кривой 1 γ=0,01; для кривой 2 γ=0,3; для кривой 3 γ =10; для кривой 4 γ = 100). С уменьшением характерных времен релаксации τ_σ или ростом $\gamma = 1/\tau_\sigma$ материал все более отчетливо начинает вести себя как упругий на длительных модулях. На рис. 3 показано, как перестраивается картина отклика в перемещениях. Отклик перемещений на длительных модулях имеет и большую амплитуду, и больший период колебаний. Перемещения для степенной модели показаны на рис. 4 (при $k = 17$ для кривой 1 $\alpha = 0{,}95$; для кривой 2 $\alpha = 0{,}7$; для кривой 3 $\alpha = 0{,}3$). С приближением наследственного ядра к ядру Больцмана отклик и качественно и количественно описывает упругий отклик.

Соответствующий отклик напряжений в упругом случае, полученный для равномерной ГЭ-сетки с 224 элементами, представлен на рис. 5. Аналитическое решение (кривая 1) сравнивается с результатами ряда исследований, полученных в [3] на основе метода квадратур сверток и МГЭ, с адаптированной сеткой из 324 треугольных ГЭ (кривая 3) и с результатами, построенными здесь, на равномерной сетке из 224 четырехугольных ГЭ (кривая 2). Влияние вязкости на отклик напряжений, снятых с жестко закрепленного конца, представлено на рис. 6-8 соответственно для моделей Кельвина–Фойгта (для кривой 1 $\beta = 0{,}05$; для кривой 2 $\beta = 3$; для кривой 3 $\beta = 100$; для кривой 4 $\beta = 500$), стандартного вязкоупругого тела (для кривой 1 $\gamma = 0{,}01$; для кривой 2 $\gamma = 0{,}3$; для кривой 3 $\gamma = 10$; для кривой 4 $\gamma = 100$) и степенной модели (при $k = 17$ для кривой 1 $\alpha = 0{,}3$; для кривой 2 $\alpha = 0{,}7$; для кривой 3 $\alpha = 0{,}95$). Тенденция, выявленная на картинах полей перемещений, прослеживается и в картинах полей напряжений.

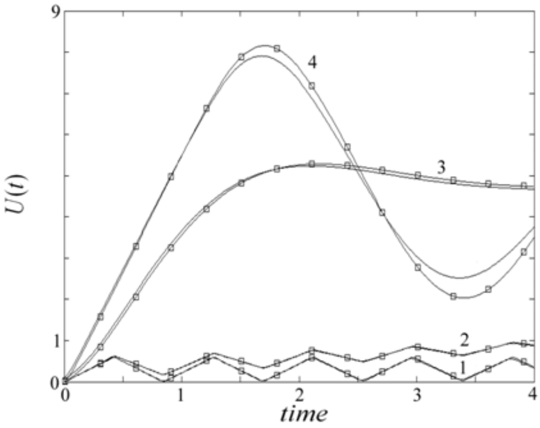


Рис. 3.

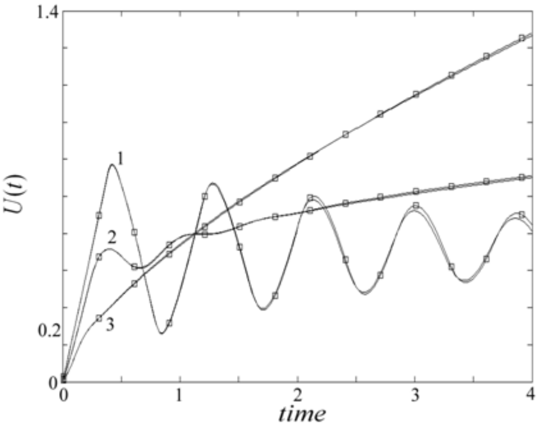


Рис. 4.

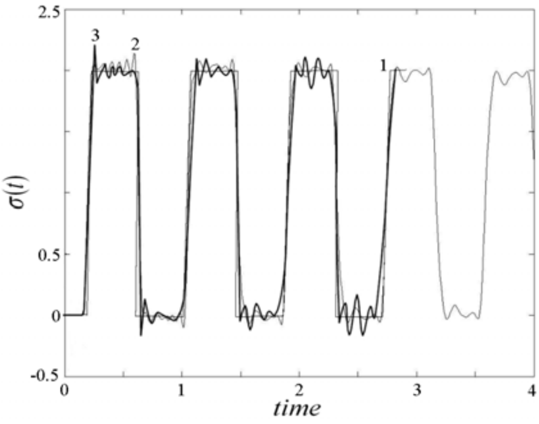


Рис. 5.

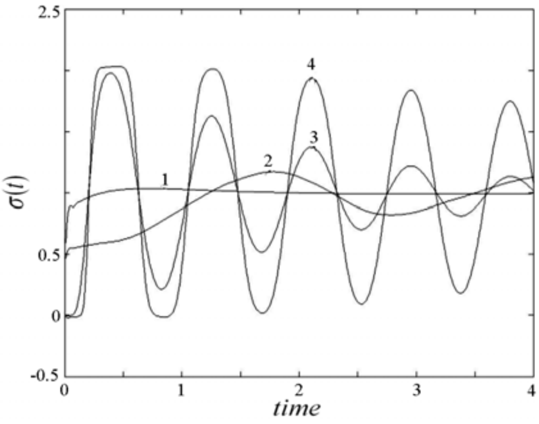


Рис. 6.

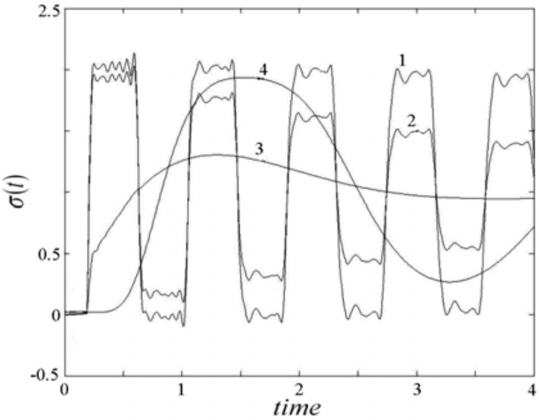


Рис. 7.

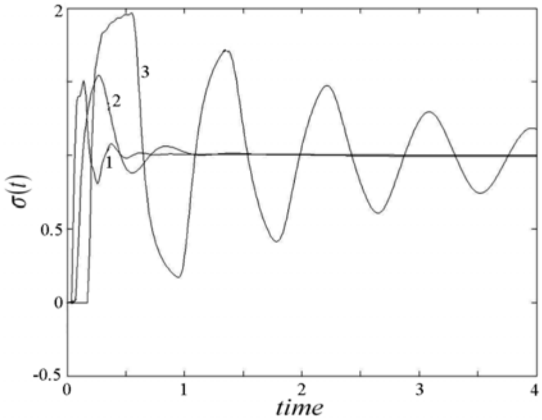


Рис. 8.

Решение пороупругой задачи

Рассмотрена задача, изображенная на рис. 13, со следующими параметрами материала: $K = 8 \cdot 10^9 H/м^2$; $G = 6 \cdot 10^9 H/м^2$; $R = 4{,}7 \cdot 10^8 H/м^2$; $k = 1{,}9 \cdot 10^{-10} м^4/Hc$; $\rho = 2458 кг/м^3$; $\rho_f = 1000 кг/м^3$; $\phi = 0{,}19$; $\alpha = 0{,}867$. Нагрузка, действующая на тело, $t_2 = 1 H/м^2$. Граничные условия в области Лапласа имеют вид: $\tilde{u}_2(y_2 = 0) = 0$, $\tilde{q}_2(y_2 = 0) = 0$, $\tilde{\sigma}_2(y_2 = l) = -1/s$, $\tilde{p}(y_2 = l) = 0$.

Гранично-элементная сетка, состоит из 504 элементов. Результаты расчетов перемещений и давлений приведены на рис. 9, 10 соответственно. Графики, изображенные сплошной линией, соответствуют точному решению, штриховой – решениям, полученным по новым ядрам, пунктирной – по ядрам из [3].

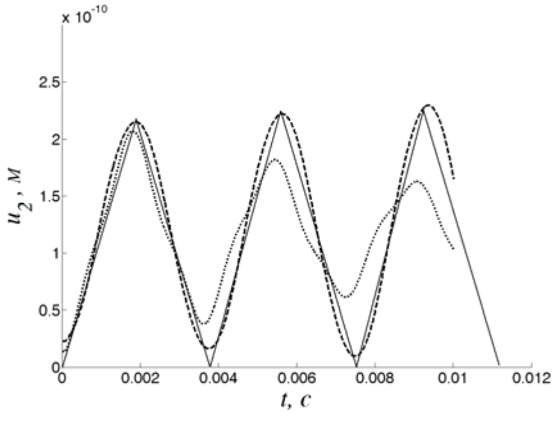


Рис. 9.

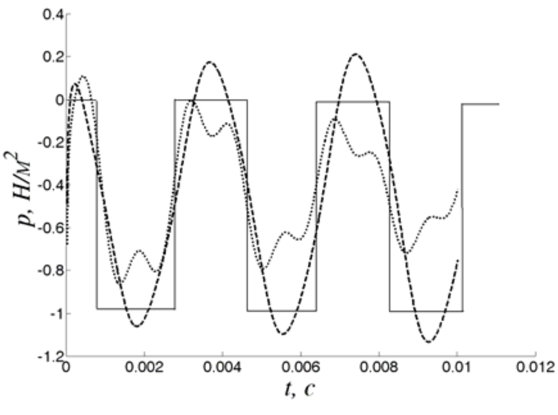


Рис. 10.

Задача о действии скачка давления на торец составного призматического тела

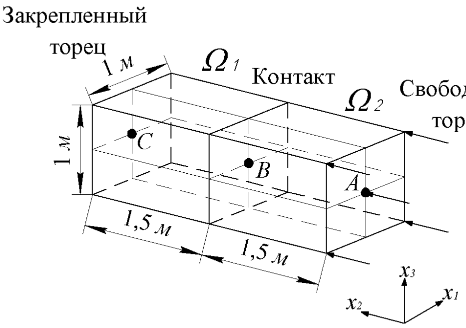
Рассмотрим задачу о торцевом ударе силой $P(t) = 1 H/м^2$ составного призматического тела с жестко закрепленным концом (рис. 11). Эта задача имеет аналитические решения как для упругой так и для вязкоупругих моделей. Для сравнения численных результатов с аналитическими рассмотрим подобласти с одинаковыми параметрами материала: $E = 2{,}11 \cdot 10^{11}\, Н/м^2$; $\nu = 0{,}0$; $\rho = 7850\, кг/м^3$.

Задача решается в безразмерных величинах:

$\bar{x} = x/a$, $\bar{u} = Eu/(p_0 a)$, $\bar{p} = p/p_0$, $\bar{t} = c_2 t/a$, $\bar{\sigma} = \sigma/p_0$, где a=10, p_0=1 $Н/м^2$.

Безразмерные параметры получились следующие: $\bar{E} = 1; \bar{\nu} = 0; \bar{\rho} = 0{,}5$.

Гранично-элементная сетка представлена на рис. 12. Каждая из подобластей содержит по 72 элемента и 88 точек на четверти сетки, таким образом, вся геометрическая модель содержит 576 элементов.



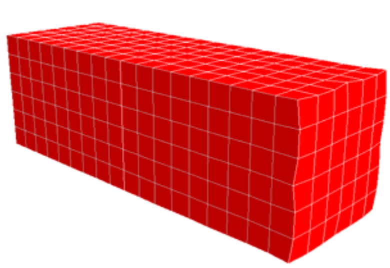
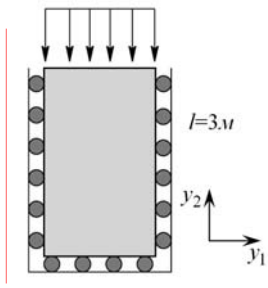
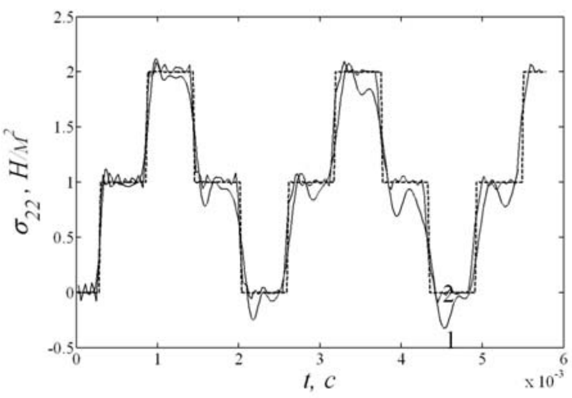



Рис. 11. Рис. 12. Рис. 13.

На рис. 14-15 приведено сравнение аналитического упругого решения (штриховая линия) с численными ГЭ-результатами, полученными на основе метода квадратур сверток (кривая 1) и на основе метода Дурбина (кривая 2). На рис. 14 приведены графики напряжений (в области контакта подобластей), а на рис. 15 графики перемещений (в области контакта подобластей).



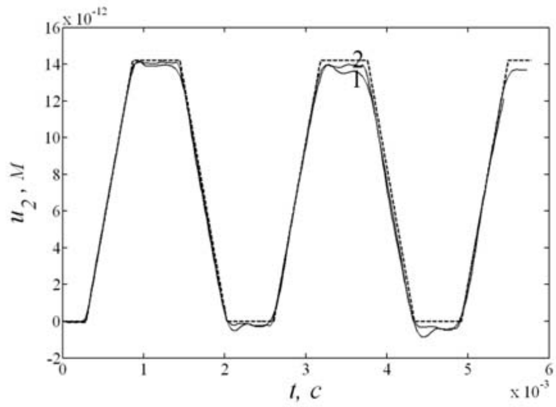


Рис. 14. Рис. 15.

На рис. 16 приведены графики напряжений для модели Кельвина-Фойгта при различных значениях параметра вязкости β в областях заделки, на рис. 17 приведены графики перемещений на свободном конце консоли. На рис. 18 приведены графики напряжений для модели стандартного вязкоупругого тела при различных значениях параметра вязкости γ в областях заделки, на рис. 19 приведены графики перемещений на свободном конце консоли. На рис. 20 приведены графики напряжений в области заделки, а на рис. 21 графики перемещений на свободном конце консоли для степенной модели при фиксированном значении параметра k=17 и при различных значениях параметра α. Аналогичным будет влияние параметра k при фиксированном значении параметра α. По итогам экспериментов, результаты которых приведены на рис. 18-19, можем заключить, что численно продемонстрирован эффект перестройки волновых полей граничных и внутренних перемещений и напряжений, когда свойства вязкоупругого материала изменялись с мгновенных модулей на длительные. В откликах перемещений изменялись (увеличивались) амплитуда и период искомой функции.

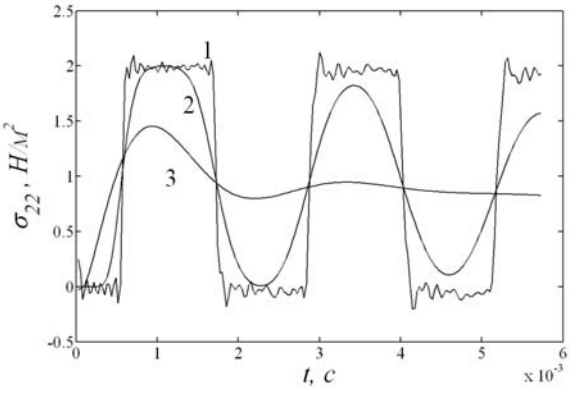


Рис. 16. 1 – упругое ГЭ-решение, ГЭ-решение для модели Кельвина-Фойгта $2-\ \beta=100$, $3-\ \beta=10$.

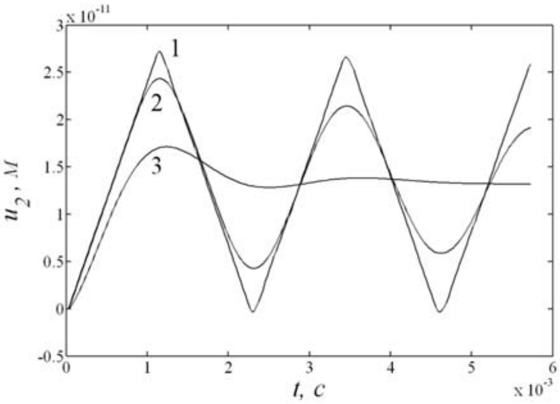


Рис. 17. 1 – упругое ГЭ-решение, ГЭ-решение для модели Кельвина-Фойгта $2-\ \beta=100$, $3-\ \beta=10$.

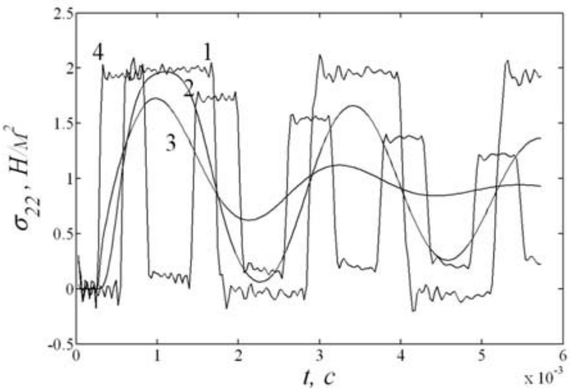


Рис. 18. 1 – упругое ГЭ-решение, ГЭ-решение для модели стандартного вязкоупругого тела $2-\ \gamma=200$, $3-\ \gamma=50$, $4-\ \gamma=1$.

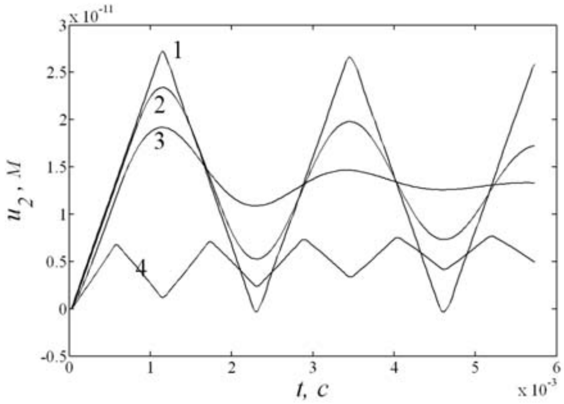


Рис. 19. 1 – упругое ГЭ-решение, ГЭ-решение для модели стандартного вязкоупругого тела $2-\ \gamma=200$, $3-\ \gamma=50$, $4-\ \gamma=1$.

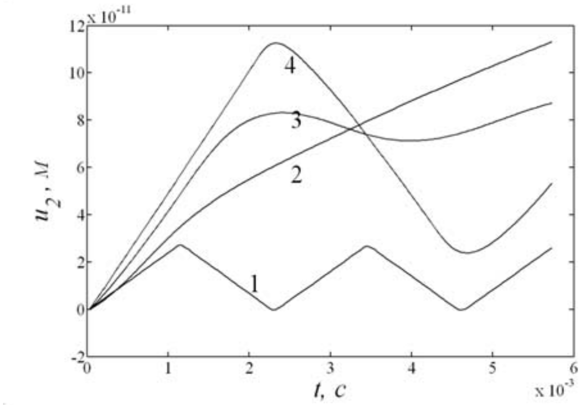


Рис. 20. 1(▬▬) – упругое ГЭ-решение, ГЭ-решение для степенной модели при постоянном $k=17$ 2(••••••) – $\alpha=0{,}3$; 3(-•-•-) – $\alpha=0{,}7$; 4(-----) – $\alpha=0{,}95$.

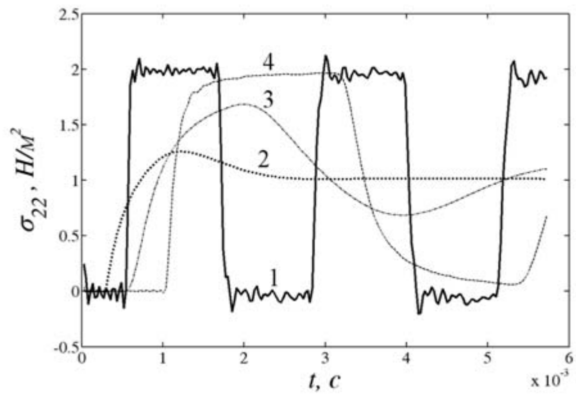


Рис. 21. 1(▬▬) – упругое ГЭ-решение, ГЭ-решение для степенной модели при постоянном $k=17$ 2(••••••) – $\alpha=0{,}3$; 3(-•-•-) – $\alpha=0{,}7$; 4(-----) – $\alpha=0{,}95$.

Задача о действии вертикальной силы на поверхность упругого полупространства

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $P(t)=P_0 f(t),\ P_0=1000 Н/м^2$ на поверхность полупространства (рис. 22).

Параметры материала: $E=2{,}5\cdot10^8 Н/м^2$; $\nu=0{,}298$; $\rho=1884 кг/м^3$ ($c_1=425 м/с$; $c_2=228 м/с$, $c_R=211 м/с$). Исследуется точка А полупространства на расстоянии 15*м* от источника силы.

Рассматриваются два варианта нагружения $f(t)=H(t)$ и $f(t)=H(t)-H(t-0{,}05)$. Гранично-элементная сетка строится с учетом двух плоскостей симметрии и содержит 864 элемента и 913 точек (на четверти сетки). Геометрическая модель исследуемой задачи показана на рис. 23.

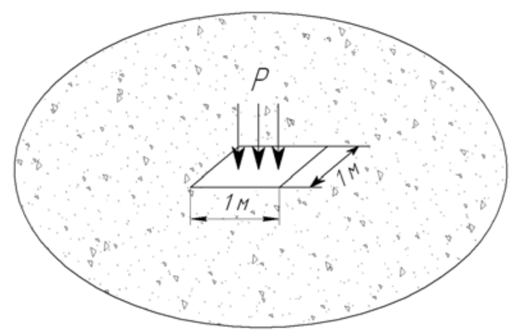


Рис. 22.

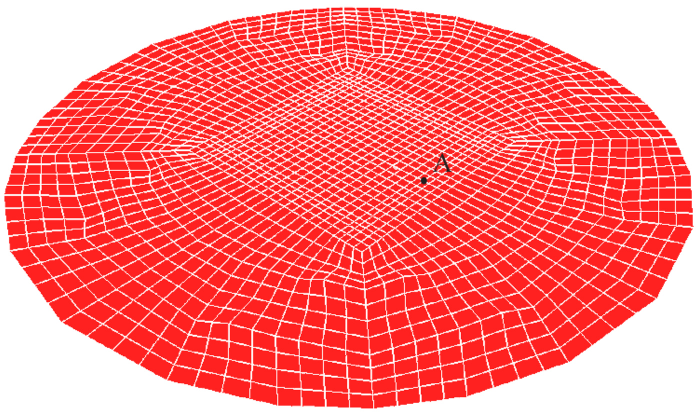


Рис. 23.

Для случая нагрузки $f(t)=H(t)$ на рис. 24 дано сравнение численных результатов, полученных методами квадратур сверток и Дурбина с численным решением из [3]. При решении в [3] использовалась изопараметрическая ГЭ-схема с раскрытием сингулярности на основе подхода из [9].

Для случая нагрузки $f(t) = H(t) - H(t-0{,}05)$ на рис. 25 дано сравнение численных результатов, полученных методами квадратур сверток и Дурбина.

Проведенное исследование показало, что созданные ГЭ-схемы на основе метода Дурбина и метода квадратур сверток дают близкие результаты. Сравнение с ГЭ-результатом из научной литературы позволяет остановиться на выборе ГЭ-схемы для подобных задач и утверждать, что ГЭ-решение из [3] дает заниженный результат по амплитуде волны Рэлея, а также завышенный нефизичный результат по падению амплитуды сразу за фронтом волны Рэлея.

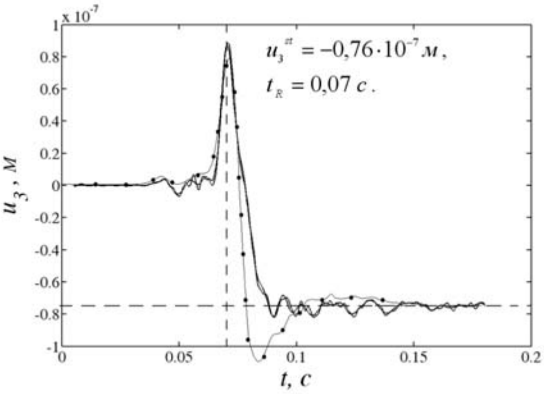


Рис. 24. Сравнение ГЭ-решения
—•—•— Schanz [3], ——— ГЭ-решение по методам Дурбина и квадратур сверток (полное совпадение).

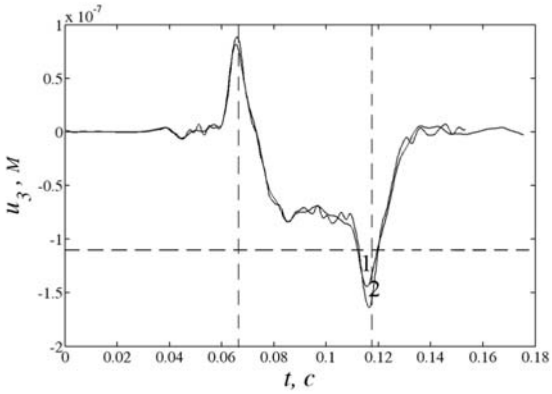


Рис. 25.
1 – метод Дурбина, 2 – метод квадратур сверток.

Задача о действии вертикальной силы на поверхность вязкоупругого полупространства

Рассмотрим решение задачи при действии нагрузки $P(t) = P_0(H(t) - H(t-0{,}0085))$, где $P_0 = 1\ Н/м^2$ и параметрами материала: $E = 1{,}38 \cdot 10^8\ Н/м^2$; $\nu = 0{,}35$; $\rho = 1966\ кг/м^3$ ($c_1 = 335{,}64\ м/с$; $c_2 = 161{,}24\ м/с$, $c_R = 150{,}5\ м/с$). В качестве точки наблюдения возьмем точку (2,3333; 2,3333; 0).

На рис. 26 приведены численные результаты для модели Кельвина-Фойгта ($\lambda(\infty) = \lambda, \mu(\infty) = \mu$) при разных значениях параметра вязкости β (кривая 1 соответствует упругому случаю, кривая 2 – $\beta = 100$; 3 – $\beta = 1$; 4 – $\beta = 0{,}1$; 5 – $\beta = 0{,}01$).

На рис. 27 приведены численные результаты для модели стандартного вязкоупругого тела при разных ($\mu(\infty) = \mu, \lambda(\infty) = \lambda, \lambda(\infty)/\lambda(0) = \mu(\infty)/\mu(0) = 0{,}0625$) значениях параметра вязкости γ (кривая 1 соответствует упругому случаю, кривая 2 – $\gamma = 100$; 3 – $\gamma = 1$; 4 – $\gamma = 0{,}1$; 5 – $\gamma = 0{,}01$).

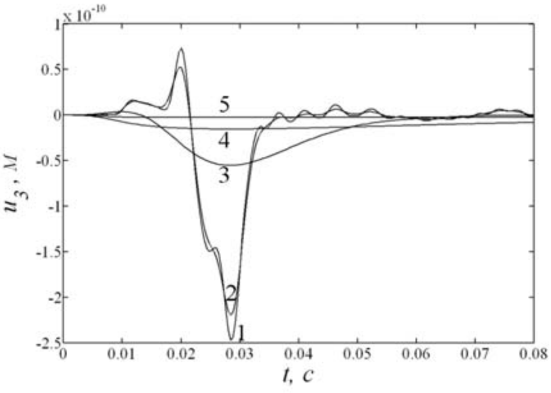


Рис. 26.

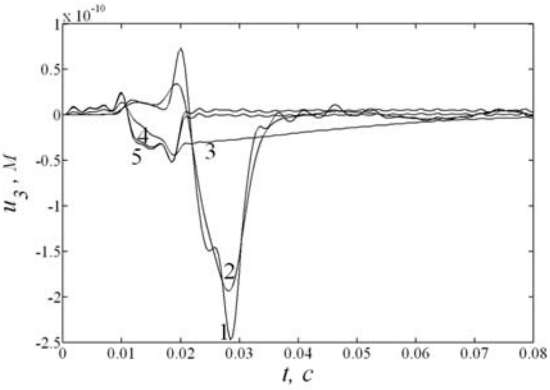


Рис. 27.

На рис. 28, 29 приведены численные результаты для степенной модели при разных значениях параметра вязкости k и α (на рис. 28 кривая 1 соответствует упругому случаю, кривая 2 – $k = 5$, $\alpha = 0{,}95$; 3 - $k = 10$, $\alpha = 0{,}95$; 4 - $k = 15$, $\alpha = 0{,}95$; на рис. 29 кривая 1 соответствует упругому случаю, кривая 2 – $k = 5$, $\alpha = 0{,}5$; 3 - $k = 5$, $\alpha = 0{,}7$; 4 - $k = 5$, $\alpha = 0{,}95$).

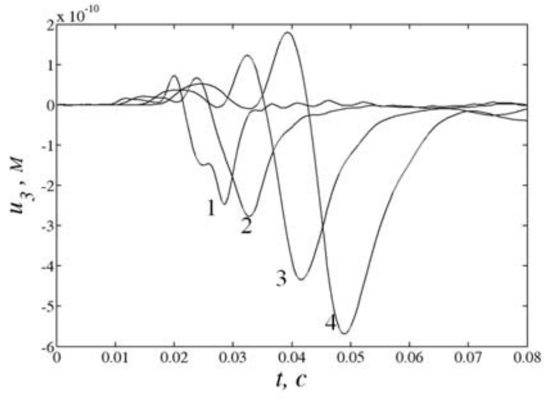


Рис. 28.

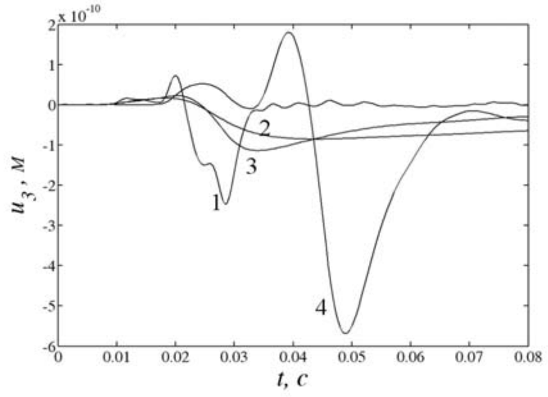


Рис. 29.

Численные ГЭ-эксперименты показали, что если для хевисайдовской нагрузки максимум в отклике перемещений приходится на волну Рэлея, соответствующую скачку подъема силы в начальный момент времени, то для нагрузки вида разности хевисайдовских сил максимум в отклике перемещений приходится на волну Рэлея, соответствующую скачку падения силы в момент $t = \alpha$. Разница величин амплитуд соответствует величине отклика на постоянную (статическую) часть отклика. Проведены исследования влияния длины импульса нагрузки и вязкости материала на характер поведения отклика перемещений. Использование модели Кельвина-Фойгта может существенно изменить отклик поверхностных волн, однако имеются диапазоны характерных времен ползучести и релаксации, когда изменения в отклике проявляется лишь в уменьшении амплитуды. Использование модели стандартного вязкоупругого тела и слабосингулярного ядра приводит к изменению скорости отклика перемещений и амплитуды.

Задача о действии вертикальной силы на поверхность полупространства с полостью

Рассматриваются два варианта полости – сферическая и кубическая. В качестве действующей силы рассматривается вертикальная сила $P(t) = P_0 f(t)$ на площади $S = 1 м^2$ дневной поверхности полупространства. Внутри полупространства на глубине $h = 7{,}5\,м$ (центр полости) расположена сферическая полость радиуса R=5*м* (рис. 30). Исследуются перемещения на поверхности полупространства на расстоянии 15*м* от границы действия силы.

Гранично-элементная сетка строится с учетом двух плоскостей симметрии. Четверть сетки содержит для полупространства – 864 элемента и 913 точек, для полости – 150 элементов и 171 точку рис. 30.

Рассматривается задача, когда на глубине $h = 7{,}5\,м$ (центр куба) расположена кубическая полость с длиной ребра 10 *м* (рис. 31).

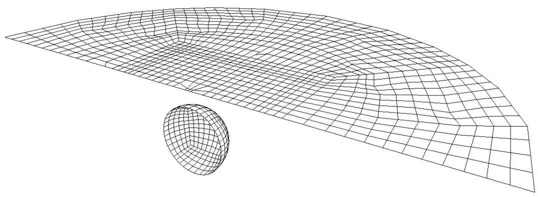


Рис. 30.

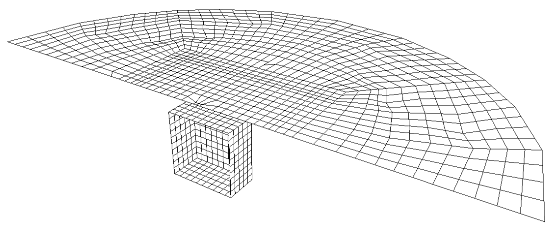
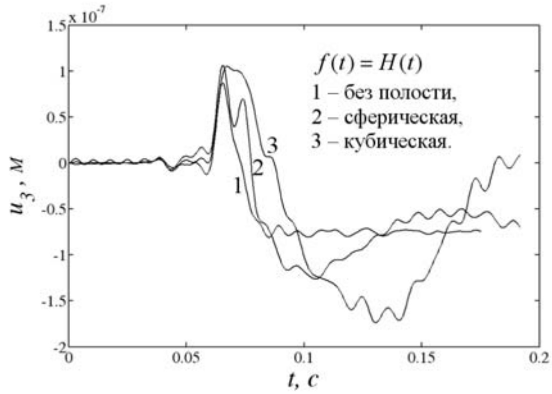


Рис. 31.

Параметры материала выбраны следующими: $E = 2{,}5 \cdot 10^8\, Н / м^2$; $\nu = 0{,}298$; $\rho = 1884 кг / м^2$ ($c_1 = 425 м / с$; $c_2 = 228 м / с$). Рассматриваются два варианта нагружения $P(t) = P_0 f(t)$, $f(t) = H(t)$ и $f(t) = H(t) - H(t - 0{,}05))$, при $P_0 = 1 H / м^2$.

На рис. 32, 33 приведены графики перемещений во времени, полученные на основе метода Дурбина при нагружении $f(t) = H(t)$ и $f(t) = H(t) - H(t - 0{,}05)$ соответственно, причем кривая 1 – решение задачи для полупространства без полости, кривая 2 – решение задачи со сферической полостью и кривая 3 – решение задачи с кубической полостью.

На рис. 34 приведено исследование перемещений для полупространства со сферической полостью, при удалении от источника нагрузки при нагружении $f(t) = H(t)$. Кривая 1 соответствует удалению 15*м*, кривая 2 – 19*м*, кривая 3 – 21,25*м*, кривая 4 – 23,5*м.*



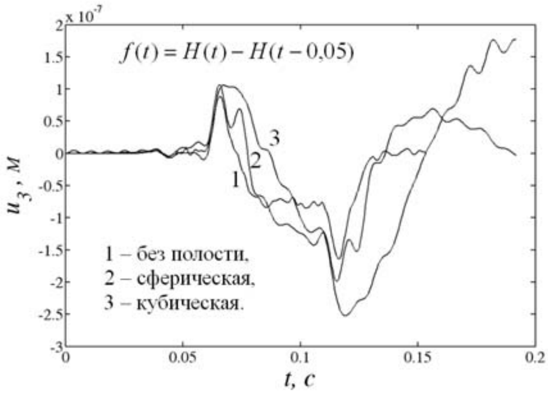
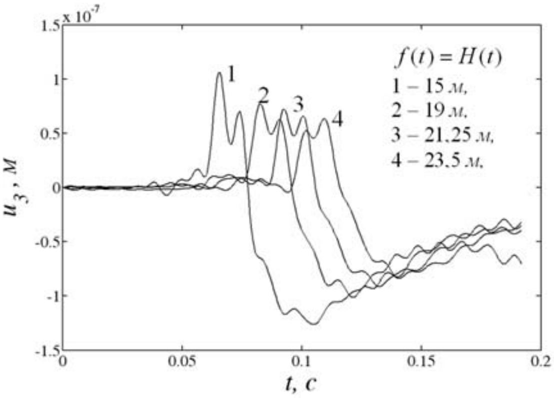


Рис. 32. Рис. 33.

На рис. 35 приведено исследование перемещений для полупространства с кубической полостью при удалении от источника нагрузки при нагружении $f(t)=H(t)$. Кривая 1 соответствует удалению 15*м*, кривая 2 – 19*м*, кривая 3 – 21,25*м*, кривая 4 – 23,5*м,* кривая 5 – 25,5*м*, кривая 6 – 27,5*м.*

Из графиков видно, что для сферической и кубической полостей форма отклика в сравнении с задачей для полупространства поменялась. Форма полости влияет на форму отклика: для задачи со сферической полостью проявилось два горба в момент прихода поверхностной волны, а для кубической полости проявился временной промежуток с постоянными перемещения.



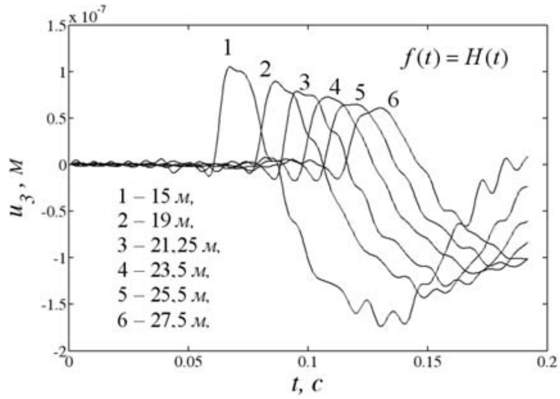


Рис. 34. Рис. 35.

Задача о штампе на полупространстве

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы на деформируемый штамп (параметры материала: $E=3\cdot10^8\,Н/м^2$, $\nu=0{,}2$, $\rho=2000кг/м^3$) в форме параллелепипеда ($2\times2\times1$ *м*), расположенный на деформируемом полупространстве (параметры материала: $E=1{,}38\cdot10^8\,Н/м^2$, $\nu=0{,}35$, $\rho=1966\,кг/м^3$). Расчеты проводились для нескольких ГЭ-сеток, сведения о которых приведены в таблице. Сетка №1 приведена на рис. 36, сетка №4 – на рис. 37.

Таблица

Номер сетки	Кол-во элементов	
	Штамп	Полупространство
1	54	90
2	216	360
3	96	864
4	384	3456

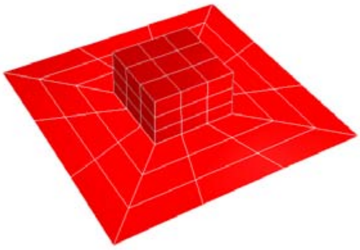


Рис. 36.

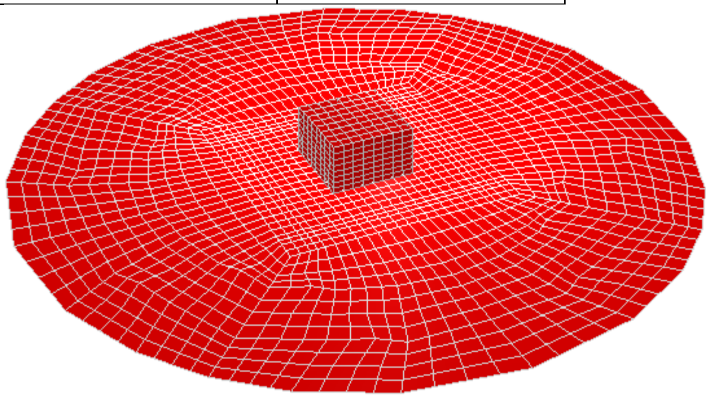


Рис. 37.

Параметры свойств материалов приведены в таблице 1. Рассмотрим случай нагружения $P(t) = P_0\left(H(t) - H(t-0{,}0085)\right)$; $P_0 = 1H/м^2$. Задача решается в безразмерных величинах.

В качестве координат исследуемой точки взяты (2,33; 2,33; 0). За начало координат выбран центр контактной грани штампа.

На рис. 38 приведены результаты расчетов для упругого случая, выполненные для сетки 1, причем кривая 1 соответствует расчетам по методу квадратур сверток, кривая 2 – по методу Дурбина, кривая 3 – ГЭ-решение из [10]. Исследовалась сходимость на выбранных сетках. Установлено, что известное из литературы ГЭ-решение дает завышение амплитуды отклика поверхностной волны.

Влияние вязкоупругих свойств на отклик продемонстрировано на рис. 39-41.

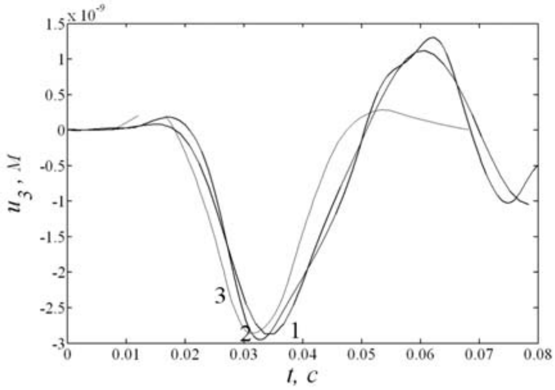


Рис. 38.

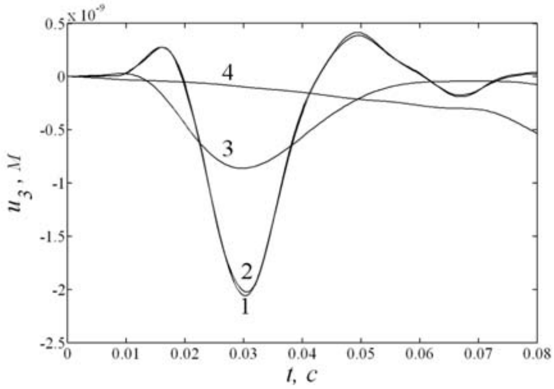


Рис. 39.
1 – упругое ГЭ-решение, модель Кельвина-Фойгта 2 – $\beta = 100$, 3 – $\beta = 1$, 4 – $\beta = 0{,}01$.

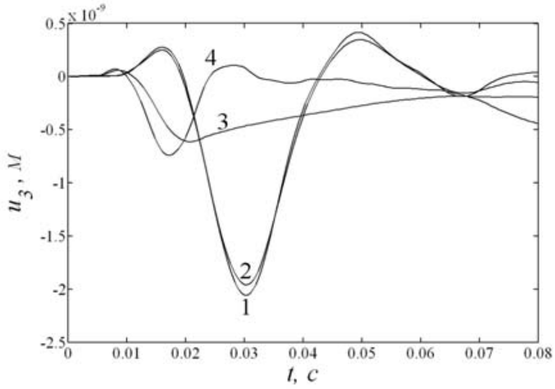


Рис. 40.
1 – упругое ГЭ-решение, модель стандартного вязкоупругого тела
2 – $\gamma = 100$, 3 – $\gamma = 1$, 4 – $\gamma = 0{,}01$.

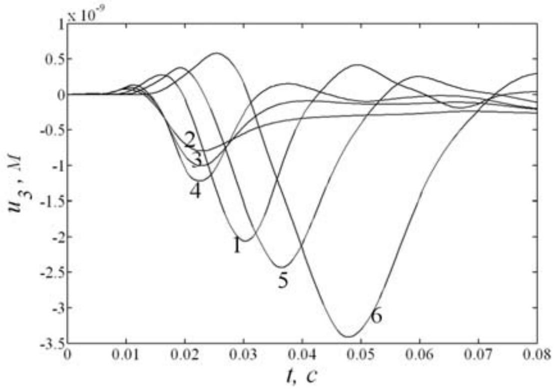


Рис. 41.
1 – упругое ГЭ-решение, степенная модель
2 – $k = 1; \alpha = 0{,}5$; 3 – $k = 1,\ \alpha = 0{,}75$;
4 – $k = 1; \alpha = 0{,}95$; 5 – $k = 5; \alpha = 0{,}95$;
6 – $k = 10; \alpha = 0{,}95$.

Использование модели Кельвина-Фойгта может существенно изменить отклик поверхностных волн, однако имеются диапазоны характерных времен ползучести, когда изменения в отклике проявляются лишь в уменьшении амплитуды. Использование модели стандартного вязкоупругого тела и слабосингулярного ядра приводит к изменению скорости отклика перемещений и амплитуды.

Задача о реакции защитного корпуса атомной станции теплоснабжения на действие ударной силы

Геометрическая модель корпуса атомной станции теплоснабжения и форма нагрузки представлены на рис. 42. Высота корпуса 34,5*м*, размеры в плане 15,6×15,6*м*, $h_1 = 30{,}5\,м$, $h_2 = 9{,}3\,м$, $h_3 = 4{,}215\,м$, $h_4 = 4{,}01\,м$, $h_5 = 8{,}445\,м$, $h_6 = 2\,м$, $h_7 = 2{,}2\,м$, $l_1 = 9{,}6\,м$,

$l_2 = 11{,}6\,м$, $r_1 = 3{,}6\,м$, $r_2 = 3{,}8\,м$, $r_3 = 4{,}29\,м$, $r_4 = 5{,}8\,м$. Параметры материала – $\rho = 2 \cdot 10^3\,кг/м^3$, $\nu = 0{,}2$, E=$3 \cdot 10^{10}\,Н/м^2$ ($c_1 = 4082{,}5\,м/с$, $c_2 = 2041{,}2\,м/с$).

Задача решается в безразмерных величинах: $\bar{x} = x/a$, $\bar{u} = Eu/(p_0 a)$, $\bar{p} = p/p_0$, $\bar{t} = c_2 t/a$, $\bar{\sigma} = \sigma/p_0$, где $a = 25$, $p_0 = 4 \cdot 10^6\,Н/м^2$.

Половина ГЭ-сетки АСТ содержит 226 элементов и 257 точек (рис. 43), половина ГЭ-сетки полупространства содержит 940 элементов и 982 точки (рис. 44).

Исследуются вертикальные перемещения в точке *B*. Численные результаты решаемой задачи (кривая 1, рис. 45) сравниваются с результатами, полученными на модели, у которой полупространство моделируется амортизаторами (кривая 2, рис. 43) [5, 11].

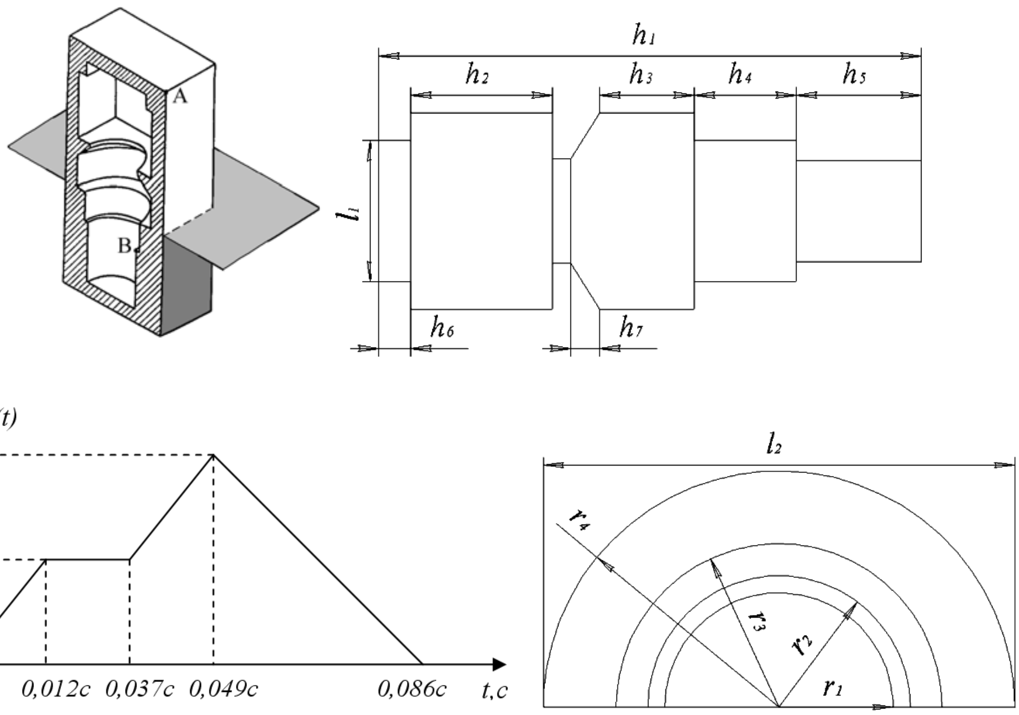


Рис. 42.

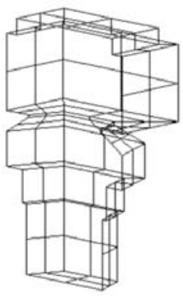


Рис. 43.

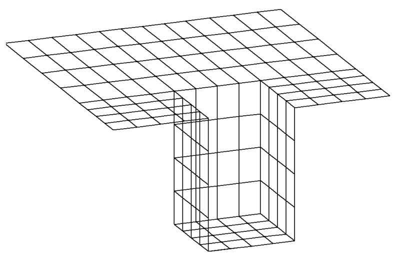


Рис. 44.

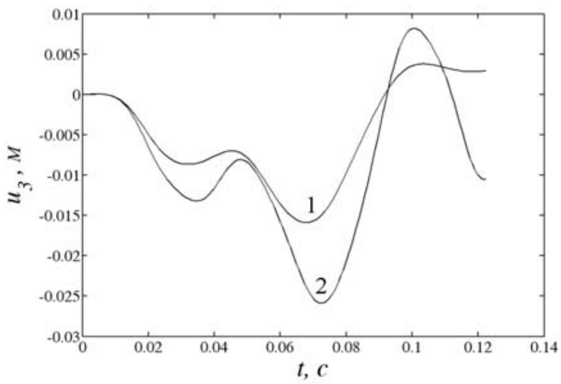


Рис. 45. 1 – с учетом деформаций полупространства, 2 – без учета

деформаций полупространства.

Расчеты продемонстрировали качественное совпадение и количественные отличия в искомых граничных полях.

Библиографический список

1. Biot M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. V. 28, № 2. – P. 168-178.
2. Biot M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. V. 28, № 2. – P. 179-191.
3. Schanz M. Wave Propogation in Viscoelastic and Poroelastic Continua / Berlin Springer, 2001. – 170 p.
4. Manolis G.D., Beskos D.E. Integral Formulation and Fundamental Solutions of Dynamic Poroelasticity and Thermoelasticity // Ada Mechanica. 1989. № 76. P. 89-104.
5. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. – 352 с.
6. Локшин А.А., Суворова Ю.В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью // Москва. – Изд-во МГУ. – 1982. – С. 152.
7. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // The Computer Journal. – 1974. – Vol.17, 4. – P. 371-376.
8. Аменицкий А.В., Васильев А.Н., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Н.Новгород: Изд-во ННГУ. Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. Сборник, 2009. – Вып. 71.,. – С. 164-171.
9. Birgisson B., Siebrits E., Peirce A.P. Elastodynamic direct boundary element methods with Enhanced numerical stability properties // International journal for numerical methods in engineering. – 1999. – Vol. 46. – P. 871-888.
10. Gaul L. [et al.] Boundary Element Methods for the Dynamic Analysis of Elastic, Viscoelastic, and Piezoelectric Solids // Encyclopedia of Computational Mechanics: Edited by E. Stein, R. de Borst and Thomas J. R. Hughes. Solids and Structures. – Jhon Wiley & Sons, Ltd., 2004. – Vol. 2. – P. 751-769.

11. Хуторянский Н.М. Метод гранично–временных элементов в пространственных задачах нестационарной динамики упругих и вязкоупругих тел: автореф. дисс…доктора техн. наук: 01.02.04 / Хуторянский Наум Маркович. – Рига, 1988. – 32с.

Рекомендовано к публикации программным комитетом XVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова.

Сведения об авторах

Александр Александрович Белов Александр, научный сотрудник НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, к.ф-м.н., тел. (831)465-76-55, e-mail: belov_a2@mech.unn.ru

Леонид Александрович Игумнов, директор НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, д.ф-.м.н., тел. (831)465-76-55, e-mail: igumnov @mech.unn.ru

Иван Сергеевич Карелин, младший научный сотрудник НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, тел. (831)465-76-55, e-mail: igumnov@mech.unn.ru

Светлана Юрьевна Литвинчук, ученый секретарь НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,к.ф.м.н., тел. (831)465-76-55, e-mail: litvinchuk @mech.unn.ru