На правах рукописи

МАЙ КУОК ЧИЕН

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТОНКОСТЕННЫХ МОМЕНТНЫХ УПРУГИХ ТЕЛАХ

Специальность: 1.1.8.
«Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Москва - 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:	д.ф.-м.н., профессор **Тарлаковский Дмитрий Валентинович**
Официальные оппоненты:	**Ерофеев Владимир Иванович**, д.ф.-м.н., профессор, директор Института проблем машиностроения РАН – филиала ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук»;
	Паймушин Виталий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры «Прочность конструкций» ФГБОУ ВО Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева–КАИ
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Защита диссертации состоится «25» июня 2025 г. в 13^{00} на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

http://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=184541#

Автореферат разослан «___»____________ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Сердюк Д.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Тема диссертации актуальна, т.к. использование изделий из композиционные материалов, как и изучение их свойств в рамках теории несимметричной упругости способствует повышению долговечности, твердости и несущей способности деталей.

Одним из вариантов несимметричной упругости является упругая моментные среда. Она является расширением классической теории упругости, позволяющим описывать сложные явления, которые не могут разрешить традиционные теории.

Цель работы. Разработка теоретических основ динамики тонкостенных моментных упругих тел с учетом нестационарных процессов.

Научная новизна. Впервые в рамках упругой моментной среды построены функционалы Гамильтона для трехмерных тел и оболочек.

Получены новые начально-краевые задачи для произвольных гладких оболочек, а также пластин и стержней.

Построены упрощенные нестационарные модели стержней (пренебрежение поперечным обжатием и/или применение гипотезы прямой нормали).

Получены и исследованы решения начально-краевых задач для различных моделей стержней.

Практическая ценность. Заключается в разработке методов исследования нестационарных процессов в тонкостенных упругих моментных телах, работающих в условиях нестационарных внешних воздействий а также в реализации этих методов и анализе влияния моментных свойств материала.

Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в инженерных методах расчета тонких конструкций, таких как детали самолетов, космических кораблей и крупных конструкций, где важными факторами являются долговечность и устойчивость.

Методы исследования. Используется вариационное уравнение Гамильтона для трехмерного упругого моментного тела. Из него с помощью линеаризации по нормальной к срединной поверхности координате выводится уравнение Гамидьтона для тонкостенной оболочки. Его следствием являются уравнения движения оболочки в обобщенных усилиях, которые связаны с деформационными характеристиками кинематических факторов. Связи обобщенных усилий находятся с помощью физических законов для анизотропных моментных сред.

Для решения конкретных задач для стержней используются разложения искомых функций и внешнего нагружения в тригонометрические ряды Фурье, а также. преобразование Лапласа по времени. Оригиналы решения находятся аналитически с помощью вычетов.

Основные результаты работы, выносимые на защиту. Вариационное уравнение Гамильтона для трехмерных упругих моментных тел.

Вариационные уравнения Гамильтона для упругих моментных гладких оболочек.

Начально-краевые задачи для упругих моментных пластин и стержней, включая упрощенные с помощью дополнительны гипотез модели динамики стержней.

Решение и исследование разливных нестационарных задач о продольных и поперечных колебаниях упругих моментных стержней.

Обоснованность и достоверность результатов исследований.

Достоверность полученных результатов научных положений и полученных результатов подтверждаются использованием проверенной модели сплошной среды, применением строгих математических методов решения начально-краевых задач и сравнения решений по теории Коссера и классической упругой среды.

Апробация работы.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская обл., 2021, 2022, 2023, 2024 г.г,).

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2022, 2023, 2024 г.г.).

- XII Международная научно-практическая конференция, посвященная 160-летию Белорусской железной дороги, Белорусский государственный университет транспорта, Республика Беларусь, г. Гомель – 2022.

- XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике, Санкт-Петербург, 2023 г.

- 51 международная школа-конференция «Актуальные проблемы механики», Великий Новгород, 2024г.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 3-х статьях, одна из которых в коллективной монографии издательства Springer, две - в журналах, включенных в Перечень ВАК РФ, (одна их них входит в международные системы цитирования Web of Science и Scopus), а также в 11-ти тезисах докладов.

Структура и объем работы.

Диссертация включает введение, три главы, заключение и список литературы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сформулированы цель работы, актуальность темы, указаны методы исследования, пояснены достоверность и обоснованность результатов, раскрыта научная новизна и практическая значимость диссертационной работы, перечислены выносимые на защиту основные результаты и положения а также приведены сведения об апробация основных результатов и публикациям.

В первой главе изложено современное состояние исследований в области механики упругих моментных тел, для трехмерных тел приведены уравнения движения, физические соотношения и доказана теорема о кинетической энергии, а также выписана замкнутая система уравнений, а также построены Гамильтониан и вариационное уравнение.

1.1. Линеаризованные уравнения динамики моментных упругих сред имеют вид

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{F};\, J\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}=\operatorname{div}\boldsymbol{\mu}+\rho\mathbf{M}+\left(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\sigma}\right); \tag{1.1.1}$$

Теорема о кинетической энергии для классической упругой среды записываем уравнение (1.1.1) так:

$$J\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}=\operatorname{div}\boldsymbol{\mu}+\rho\mathbf{M}+\left(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\sigma}\right),\ \boldsymbol{\Omega}=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}, \tag{1.1.2}$$

$$J\left(\boldsymbol{\Omega},d\boldsymbol{\Omega}\right)=\left(\boldsymbol{\Omega}dt,\operatorname{div}\boldsymbol{\mu}\right)+\left(\boldsymbol{\Omega}dt,\rho\mathbf{M}\right)+\left(\boldsymbol{\Omega}dt,\left(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\sigma}\right)\right). \tag{1.1.3}$$

1.2. Физические соотношения и замкнутая система уравнений для трехмерных тел

Записываем уравнения (1.1.1) в скалярной форме получаем такой результат:

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial^2u^j}{\partial t^2}=\nabla_i\left[C^{ijkl}\left(\nabla_k u_l-\varepsilon_{mkl}\omega^m\right)+D^{ijkl}\nabla_k\omega_l\right]+\rho F^j,\\ J\frac{\partial^2\omega^j}{\partial t^2}=\nabla_i\left(D^{ijkl}\nabla_k u_l\right)+g_{qn}g_{rp}\varepsilon^{jnp}C^{qrkl}\left(\nabla_k u_l-\varepsilon_{mkl}\omega^m\right)+\nabla_i\left(B^{ijkl}\nabla_k\omega_l\right)+\\ +g_{qn}g_{rp}\varepsilon^{jnp}D^{qrkl}\nabla_k\omega_l-\varepsilon_{mkl}\nabla_i\left(D^{ijkl}\omega^m\right)+\rho M^j,\end{gathered} \tag{1.2.1}$$

В случае для однородной среды:

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial^2u^j}{\partial t^2}=C^{ijkl}\nabla_i\left(\nabla_k u_l-\varepsilon_{mkl}\omega^m\right)+D^{ijkl}\nabla_i\nabla_k\omega_l+\rho F^j,\\ J\frac{\partial^2\omega^j}{\partial t^2}=D^{ijkl}\nabla_i\nabla_k u_l+g_{qn}g_{rp}\varepsilon^{jnp}C^{qrkl}\left(\nabla_k u_l-\varepsilon_{mkl}\omega^m\right)+B^{ijkl}\nabla_i\nabla_k\omega_l+\\ +g_{qn}g_{rp}\varepsilon^{jnp}D^{qrkl}\nabla_k\omega_l-\varepsilon_{mkl}D^{ijkl}\nabla_i\omega^m+\rho M^j.\end{gathered} \tag{1.2.2}$$

Для изотропной среды Коссера имеются так:

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2}=\left(\lambda+\mu-\alpha\right)g^{ij}\nabla_i \mathrm{div}\mathbf{u}+\left(\mu+\alpha\right)g^{ik}\nabla_i\nabla_k u^j+2\alpha\varepsilon^{inj}\nabla_i\omega_n+\rho F^j,\\
&J\frac{\partial^2\omega^j}{\partial t^2}=\\
&=\left(\beta+\gamma-\varepsilon\right)g^{ij}\nabla_i \mathrm{div}\boldsymbol{\omega}+\left(\gamma+\varepsilon\right)g^{ik}\nabla_i\nabla_k\omega^j+2\alpha\varepsilon^{jnp}\nabla_n u_p-4\alpha\omega^j+\rho M^j.
\end{aligned}
\tag{1.2.3}
$$

Векторная форма уравнений (1.2.3) такая:

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=\left(\lambda+2\mu\right)\mathrm{grad\ div}\mathbf{u}-\left(\mu+\alpha\right)\mathrm{rot\ rot}\mathbf{u}+2\alpha\mathrm{rot}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{F},\\
&J\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}=\left(\beta+2\gamma\right)\mathrm{grad\ div}\boldsymbol{\omega}-\left(\gamma+\varepsilon\right)\mathrm{rot\ rot}\boldsymbol{\omega}+2\alpha\mathrm{rot}\mathbf{u}-4\alpha\boldsymbol{\omega}+\mathbf{M}.
\end{aligned}
\tag{1.2.4}
$$

1.3. Гамильтониан и вариационное уравнение для трехмерных тел

Функционал Гамильтона для моментной упругой среды записываем стандартным образом:

$$
H\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\omega}\right)=\int_{t_1}^{t_2}\left(I-E\right)dt,\ I\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\omega}\right)=W-A^{(e)}\ \left(t_2>t_1\right),
\tag{1.3.1}
$$

Покажем, что из соответствующего (1.3.1) вариационного уравнения

$$
\delta H=\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta I-\delta E\right)dt=0,\ \delta\mathbf{u}\big|_{t=t_1,t_2}=\mathbf{0},\ \delta\boldsymbol{\omega}\big|_{t=t_1,t_2}=\mathbf{0}
\tag{1.3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta H=&\int_{t_1}^{t_2}dt\int_G\left(\rho\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}-\nabla_j\sigma^{ji}-\rho F^i\right)\delta u_i d\mathbf{y}+\\
+&\int_{t_1}^{t_2}dt\int_G\left(J\frac{\partial^2\omega^i}{\partial t^2}-\nabla_j\mu^{ji}-\varepsilon^{ijk}\sigma_{jk}-\rho M^i\right)\delta\omega_i d\mathbf{y}-\\
-&\int_{t_1}^{t_2}dt\iint_{\partial G}\left[\left(P^i-\nu_j\sigma^{ji}\right)\delta u_i+\left(K^i-\nu_j\mu^{ji}\right)\delta\omega_i\right]dS=0.
\end{aligned}
\tag{1.3.3}
$$

В главе 2 для упругих моментных оболочек постоянной толщины с использованием гипотезы прямой нормали выписаны геометрические соотношения и компоненты деформированного состояния, построен гамильтониан, получны физический закон и начально-краевые задачи для призвольной оболочки.

2.1. Геометрические соотношения и деформированное состояние

Рассматривается однородная анизотропная моментная упругая оболочка постоянной толщины h, материал которой обладает симметрией относительно ее срединной гладкой ориентированной поверхности Π с единичным нормальным вектором к внешней стороне $\mathbf{n}$.

Геометрическая область $G\subset R^3$, занимая оболочкой ограниченна поверхностью $\partial\mathrm{G}=\Pi_-\bigcup\Pi_+\bigcup\Pi_b$, $\dfrac{h}{\lambda}=\delta<<1$ (2.1.1)

В занимаемой оболочкой геометрической области G вводятся связанные криволинейные координаты ξ^1, ξ^2, z:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0\left(\xi^1, \xi^2\right) + z\mathbf{n}\left(\xi^1, \xi^2\right),\ \left(\xi^1, \xi^2\right) \in D, -\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}, \tag{2.1.2}$$

Компоненты тензоров деформаций имеют следующий вид:

$$\hat{\chi}_{ij} = \eta_{ij} + \lambda_{ij} z,\ \hat{\chi}_{i3} = \eta_{i3} + \lambda_{i3} z,\ \hat{\chi}_{3i} = \varphi_i,\ \hat{\chi}_{33} = \varphi_3; \tag{2.1.3}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = \xi_{ij} + \zeta_{ij} z,\ \hat{\gamma}_{i3} = \xi_{i3} + \zeta_{i3} z,\ \hat{\gamma}_{3i} = \xi_{3i} + \zeta_{3i} z,\ \hat{\gamma}_{33} = \psi_3, \tag{2.1.4}$$

2.2. Гамильтониан моментной оболочки

$$\iiint\limits_G f(\xi^1, \xi^2, z)d\mathbf{y} = \iint\limits_\Pi \left[\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(\xi^1, \xi^2, z)dz\right]dS. \tag{2.2.1}$$

Потенциальная энергия:

$$\begin{aligned} &W\left(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}, w, \psi_3, \omega, \varphi_3\right) = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_G \left(\hat{\sigma}^{ij}\hat{\gamma}_{ij} + \hat{\sigma}^{i3}\hat{\gamma}_{i3} + \hat{\sigma}^{3i}\hat{\gamma}_{3i} + \hat{\sigma}^{33}\hat{\gamma}_{33} + \hat{\mu}^{ij}\hat{\chi}_{ij} + \hat{\mu}^{i3}\hat{\chi}_{i3} + \hat{\mu}^{3i}\hat{\chi}_{3i} + \hat{\mu}^{33}\hat{\chi}_{33}\right)d\mathbf{y} = \\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_\Pi \Big(\hat{T}^{ij}\xi_{ij} + \hat{T}^{i3}\xi_{i3} + \hat{T}^{3i}\xi_{3i} + \hat{T}^{33}\psi_3 + M^{ij}\zeta_{ij} + M^{i3}\zeta_{i3} + M^{3i}\zeta_{3i} + \\ &\quad + \hat{R}^{ij}\eta_{ij} + \hat{R}^{i3}\eta_{i3} + \hat{R}^{3i}\varphi_i + \hat{R}^{33}\varphi_3 + S^{ij}\lambda_{ij} + S^{i3}\lambda_{i3}\Big)dS, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Формула для кинетической энергии моментной оболочки:

$$\begin{aligned} &E\left(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}, w, \psi_3, \omega, \varphi_3\right) = E_u + E_\omega, \\ &E_u = \frac{\rho}{2}\int\limits_G \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t}\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t}\right)d\mathbf{y} = \\ &= \frac{\rho}{2}\iint\limits_\Pi \left\{h\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] + I\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\frac{\partial \psi^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial t}\right)^2\right]\right\}dS,\ I = h^3/12, \\ &E_\omega = \frac{J}{2}\iint\limits_\Pi \left\{h\left[\frac{\partial \omega_i}{\partial t}\frac{\partial \omega^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2\right] + I\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\frac{\partial \varphi^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}\right)^2\right]\right\}dS. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Для работы внешних сил:

$$\begin{aligned} &\int\limits_G \rho\left[\left(\mathbf{F}, \mathbf{u}\right) + \left(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}\right)\right]d\mathbf{y} = \rho\int\limits_G \left[\hat{F}^i\hat{u}_i + F^3 u_3 + \hat{M}^i\hat{\omega}_i + M^3\omega_3\right]d\mathbf{y} = \\ &\iint\limits_\Pi \left\{q_F^i u_i + q_F w + m_F^i \psi_i + m_F \psi_3\right\}dS + \iint\limits_\Pi \left\{m_M^i \omega_i + m_M \omega + m_{2M}^i \varphi_i + m_{2M}\varphi_3\right\}dS, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Pi_\pm} \left[\left(\mathbf{P}, \mathbf{u}\right) + \left(\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega}\right)\right]dS = \iint\limits_\Pi \left[\hat{P}^i\hat{u}_i + \hat{P}^3 u_3 + \hat{K}^i\hat{\omega}_i + \hat{K}^3\omega_3\right]\Big|_{z=\pm h/2} dS = \\ &= \iint\limits_\Pi \left(q_\pm^i u_i + m_\pm^i \psi_i + q_\pm w + m_\pm \psi_3 + m_{M\pm}^i \omega_i + m_{M\pm}\omega + m_{2M\pm}^i \varphi_i + m_{2M\pm}\varphi_3\right)dS, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$$\iint\limits_{\Pi_b}\left[(\mathbf{P},\mathbf{u})+(\mathbf{K},\boldsymbol{\omega})\right]dS = \\ = \int\limits_{\Gamma}\left[T^i_{(0)}u_i + M^i_{(0)}\psi_i + T_{(0)}w + M_{(0)}\psi_3 + R^i_{(0)}\omega_i + S^i_{(0)}\varphi_i + R_{(0)}\omega + S_{(0)}\varphi_3\right]ds, \tag{2.2.6}$$

Окончательная формула для работы внешних сил имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} A^{(e)}\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\varphi},w,\psi_3,\omega,\varphi_3\right) = A_u + A_\omega, \\ A_u = \iint\limits_{\Pi}\left[(\mathbf{q},\mathbf{u})+(\mathbf{m},\boldsymbol{\psi})+qw+m\psi_3\right]dS + \\ + \int\limits_{\Gamma}\left[\left(\mathbf{T}_{(0)},\mathbf{u}\right)+\left(\mathbf{M}_{(0)},\boldsymbol{\psi}\right)+T_{(0)}w+M_{(0)}\psi_3\right]ds, \\ A_\omega = \iint\limits_{\Pi}\left[\left(\mathbf{m}_M,\boldsymbol{\omega}\right)+\left(\mathbf{m}_{2M},\boldsymbol{\varphi}\right)+\tilde{m}_M\omega+\tilde{m}_{2M}\varphi_3\right]dS + \\ + \int\limits_{\Gamma}\left[\left(\mathbf{R}_{(0)},\boldsymbol{\omega}\right)+\left(\mathbf{S}_{(0)},\boldsymbol{\varphi}\right)+R_{(0)}\omega+S_{(0)}\varphi_3\right]ds, \end{gathered} \tag{2.2.7}$$

Следовательно, гамильтониан для моментной упругой оболочки имеет следующий вид:

$$H\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\varphi},w,\psi_3,\omega,\varphi_3\right) = \int\limits_{t_1}^{t_2}(I-E)\,dt,\ I = W - A^{(e)}\ \left(t_2 > t_1\right), \tag{2.2.8}$$

<u>2.3. Физический закон для моментной оболочки</u>

Далее будем полагать, что:

$$\begin{gathered} C^{ijk3} = C^{ij3k} = C^{i333} = C^{3i33} = 0,\ B^{ijk3} = B^{ij3k} = B^{i333} = B^{3i33} = 0, \\ D^{ijk3} = D^{ij3k} = D^{i333} = D^{3i33} = 0. \end{gathered} \tag{2.3.1}$$

Физические соотношения с учетом свойств тензора Леви-Чивита принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^{3j} &= D^{3j3l}\left(\hat{\nabla}_3\hat{u}_l - \hat{\varepsilon}_{m3l}\hat{\omega}^m\right) + D^{3jk3}\left(\hat{\nabla}_k\hat{u}_3 - \hat{\varepsilon}_{mk3}\hat{\omega}^m\right) + B^{3j3l}\hat{\nabla}_3\hat{\omega}_l + B^{3jk3}\nabla_k\hat{\omega}_3, \\ \hat{\mu}^{33} &= D^{33kl}\left(\hat{\nabla}_k\hat{u}_l - \hat{\varepsilon}_{3kl}\hat{\omega}^3\right) + D^{3333}\hat{\nabla}_3\hat{u}_3 + B^{33kl}\hat{\nabla}_k\hat{\omega}_l + B^{3333}\hat{\nabla}_3\hat{\omega}_3. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{ij} &= C^{ijkl}\left(\hat{\nabla}_k\hat{u}_l - \hat{\varepsilon}_{3kl}\hat{\omega}^3\right) + C^{ij33}\hat{\nabla}_3\hat{u}_3 + D^{ijkl}\hat{\nabla}_k\hat{\omega}_l + D^{ij33}\hat{\nabla}_3\hat{\omega}_3, \\ \hat{\sigma}^{i3} &= C^{i33l}\left(\hat{\nabla}_3\hat{u}_l - \hat{\varepsilon}_{m3l}\hat{\omega}^m\right) + C^{i3k3}\left(\hat{\nabla}_k\hat{u}_3 - \hat{\varepsilon}_{mk3}\hat{\omega}^m\right) + D^{i33l}\hat{\nabla}_3\hat{\omega}_l + D^{i3k3}\hat{\nabla}_k\hat{\omega}_3, \\ \hat{\sigma}^{3j} &= C^{3j3l}\left(\hat{\nabla}_3\hat{u}_l - \hat{\varepsilon}_{m3l}\hat{\omega}^m\right) + C^{3jk3}\left(\hat{\nabla}_k\hat{u}_3 - \hat{\varepsilon}_{mk3}\hat{\omega}^m\right) + D^{3j3l}\hat{\nabla}_3\hat{\omega}_l + D^{3jk3}\nabla_k\hat{\omega}_3, \\ \hat{\sigma}^{33} &= C^{33kl}\left(\hat{\nabla}_k\hat{u}_l - \hat{\varepsilon}_{3kl}\hat{\omega}^3\right) + C^{3333}\hat{\nabla}_3\hat{u}_3 + D^{33kl}\hat{\nabla}_k\hat{\omega}_l + D^{3333}\hat{\nabla}_3\hat{\omega}_3; \\ \hat{\mu}^{ij} &= D^{ijkl}\left(\hat{\nabla}_k\hat{u}_l - \hat{\varepsilon}_{3kl}\hat{\omega}^3\right) + D^{ij33}\hat{\nabla}_3\hat{u}_3 + B^{ijkl}\hat{\nabla}_k\hat{\omega}_l + B^{ij33}\hat{\nabla}_3\hat{\omega}_3, \\ \hat{\mu}^{i3} &= D^{i33l}\left(\hat{\nabla}_3\hat{u}_l - \hat{\varepsilon}_{m3l}\hat{\omega}^m\right) + D^{i3k3}\left(\hat{\nabla}_k\hat{u}_3 - \hat{\varepsilon}_{mk3}\hat{\omega}^m\right) + B^{i33l}\hat{\nabla}_3\hat{\omega}_l + B^{i3k3}\hat{\nabla}_k\hat{\omega}_3, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Законы изменения напряжений по толщине оболочки:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\sigma}^{ij} = C^{ijkl}\left(\xi_{kl} + z\zeta_{kl}\right) + C^{ij33}\psi_3 + D^{ijkl}\left(\eta_{kl} + \lambda_{kl}z\right) + D^{ij33}\varphi_3,\\
&\hat{\sigma}^{i3} = C^{i33l}\left(\xi_{3l} + z\zeta_{3l}\right) + C^{i3k3}\left(\xi_{k3} + z\zeta_{k3}\right) + D^{i3k3}\left(\eta_{k3} + \lambda_{k3}z\right) + D^{i33k}\varphi_k,\\
&\hat{\sigma}^{3i} = C^{3i3l}\left(\xi_{3l} + z\zeta_{3l}\right) + C^{3ik3}\left(\xi_{k3} + z\zeta_{k3}\right) + D^{3ik3}\left(\eta_{k3} + \lambda_{k3}z\right) + D^{3i3k}\varphi_k,\\
&\hat{\sigma}^{33} = C^{33kl}\left(\xi_{kl} + z\zeta_{kl}\right) + C^{3333}\psi_3 + D^{33kl}\left(\eta_{kl} + \lambda_{kl}z\right) + D^{3333}\varphi_3;
\end{aligned}
\tag{2.3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mu}^{ij} = D^{ijkl}\left(\xi_{kl} + z\zeta_{kl}\right) + D^{ij33}\psi_3 + B^{ijkl}\left(\eta_{kl} + \lambda_{kl}z\right) + B^{ij33}\varphi_3,\\
&\hat{\mu}^{i3} = D^{i33l}\left(\xi_{3l} + z\zeta_{3l}\right) + D^{i3k3}\left(\xi_{k3} + z\zeta_{k3}\right) + B^{i33l}\varphi_l + B^{i3k3}\left(\eta_{k3} + \lambda_{k3}z\right),\\
&\hat{\mu}^{3j} = D^{3j3l}\left(\xi_{3l} + z\zeta_{3l}\right) + D^{3jk3}\left(\xi_{k3} + z\zeta_{k3}\right) + B^{3j3l}\varphi_l + B^{3jk3}\left(\eta_{k3} + \lambda_{k3}z\right),\\
&\hat{\mu}^{33} = D^{33kl}\left(\xi_{kl} + z\zeta_{kl}\right) + D^{3333}\psi_3 + B^{33kl}\left(\eta_{kl} + \lambda_{kl}z\right) + B^{3333}\varphi_3.
\end{aligned}
\tag{2.3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{T}^{ij} = h\left(C^{ijkl}\xi_{kl} + C^{ij33}\psi_3 + D^{ijkl}\eta_{kl} + D^{ij33}\varphi_3\right), M^{ij} = I\left(C^{ijkl}\zeta_{kl} + D^{ijkl}\lambda_{kl}\right),\\
&M^{i3} = I\left(C^{i33l}\zeta_{3l} + C^{i3k3}\zeta_{k3} + D^{i3k3}\lambda_{k3}\right),\\
&\hat{T}^{i3} = h\left(C^{i33l}\xi_{3l} + C^{i3k3}\xi_{k3} + D^{i33k}\varphi_k + D^{i3k3}\eta_{k3}\right),\\
&\hat{T}^{3i} = h\left(C^{3i3l}\xi_{3l} + C^{3ik3}\xi_{k3} + D^{3i3k}\varphi_k + D^{3ik3}\eta_{k3}\right),\\
&M^{3i} = I\left(C^{3i3l}\zeta_{3l} + C^{3ik3}\zeta_{k3} + D^{3ik3}\lambda_{k3}\right),\\
&\hat{T}^{33} = h\left(C^{33kl}\xi_{kl} + C^{3333}\psi_3 + D^{33kl}\eta_{kl} + D^{3333}\varphi_3\right);
\end{aligned}
\tag{2.3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{R}^{ij} = h\left(D^{ijkl}\xi_{kl} + D^{ij33}\psi_3 + B^{ijkl}\eta_{kl} + B^{ij33}\varphi_3\right), S^{ij} = I\left(D^{ijkl}\zeta_{kl} + B^{ijkl}\lambda_{kl}\right),\\
&\hat{R}^{i3} = h\left(D^{i33l}\xi_{3l} + D^{i3k3}\xi_{k3} + B^{i33k}\varphi_k + B^{i3k3}\eta_{k3}\right),\\
&S^{i3} = I\left(D^{i33l}\zeta_{3l} + D^{i3k3}\zeta_{k3} + B^{i3k3}\lambda_{k3}\right),\\
&\hat{R}^{3i} = h\left(D^{3i3l}\xi_{3l} + D^{3ik3}\xi_{k3} + B^{3i3l}\varphi_l + B^{3ik3}\eta_{kl}\right)\\
&\hat{R}^{33} = h\left(D^{33kl}\xi_{kl} + D^{3333}\psi_3 + B^{33kl}\eta_{kl} + B^{3333}\varphi_3\right).
\end{aligned}
\tag{2.3.7}
$$

В частном случае изотропного материала оболочки физические соотношения принимают следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\hat{T}^{ij} = h\left[\left(\mu + \alpha\right)\xi^{ij} + \left(\mu - \alpha\right)\xi^{ji} + \lambda g^{ij}\left(\varepsilon_s + \psi_3\right)\right],\\
M^{ij} = I\left[\left(\mu + \alpha\right)\zeta^{ij} + \left(\mu - \alpha\right)\zeta^{ji} + \lambda g^{ij}\kappa_s\right],\\
\hat{T}^{i3} = hg^{ik}\left[\left(\mu - \alpha\right)\xi_{3k} + \left(\mu + \alpha\right)\xi_{k3}\right], M^{i3} = Ig^{ik}\left[\left(\mu - \alpha\right)\zeta_{3k} + \left(\mu + \alpha\right)\zeta_{k3}\right],\\
\hat{T}^{3i} = hg^{ik}\left[\left(\mu + \alpha\right)\xi_{3k} + \left(\mu - \alpha\right)\xi_{k3}\right], M^{3i} = Ig^{ik}\left[\left(\mu + \alpha\right)\zeta_{3k} + \left(\mu - \alpha\right)\zeta_{k3}\right]\\
\hat{T}^{33} = h\left[\lambda\varepsilon_s + \left(\lambda + 2\mu\right)\psi_3\right];
\end{gathered}
\tag{2.3.8}
$$

$$
\begin{gathered}
\hat{R}^{ij} = h\left[\left(\gamma + \varepsilon\right)\eta^{ij} + \left(\gamma - \varepsilon\right)\eta^{ji} + \beta g^{ij}\left(\eta_s + \varphi_3\right)\right],\\
S^{ij} = I\left[\left(\gamma + \varepsilon\right)\lambda^{ij} + \left(\gamma - \varepsilon\right)\lambda^{ji} + \beta g^{ij}\lambda_s\right],\\
\hat{R}^{i3} = hg^{ik}\left[\left(\gamma + \varepsilon\right)\eta_{k3} + \left(\gamma - \varepsilon\right)\varphi_k\right], S^{i3} = I\left(\gamma + \varepsilon\right)g^{ik}\lambda_{k3},\\
\hat{R}^{3i} = hg^{ik}\left[\left(\gamma + \varepsilon\right)\varphi_k + \left(\gamma - \varepsilon\right)\eta_{k3}\right], \hat{R}^{33} = h\left[\beta\eta_s + \left(\beta + 2\gamma\right)\varphi_3\right].
\end{gathered}
\tag{2.3.9}
$$

2.4. Начально-краевые задачи для упругой моментной оболочки

Уравнения движения и естественные граничные условия:

$$
\begin{gathered}
\rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_j T^{ji} - b^i_k T^{k3} + q^i,\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t} = \nabla_j T^{j3} + b_{ij} T^{ij} + q, \\
\rho I \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2} = \nabla_j M^{ji} - T^{3i} + m^i,\ \rho I \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} = \nabla_j M^{j3} - N + m, \\
hJ \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} = g_{ik} \nabla_j R^{jk} - \pi_{ik} \left(T^{3k} - T^{k3} \right) - b_{ik} R^{k3} + \tilde{m}_{Mi}, \\
hJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t} = \nabla_j R^{j3} + \pi_{ik} \hat{T}^{ik} + b_{ij} R^{ij} + \tilde{m}_M, \\
IJ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = g_{ik} \left(\nabla_j S^{jk} - R^{3k} \right) - \pi_{ik} \left(M^{3k} - M^{k3} \right) + \tilde{m}_{2Mi}, \\
IJ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} = \nabla_j S^{j3} - N_\omega + \pi_{ij} M^{ij} + \tilde{m}_{2M};
\end{gathered} \tag{2.4.1}
$$

$$
\begin{gathered}
u_i \big|_{\Gamma_u} = u_{i0},\ w \big|_{\Gamma_u} = w_0,\ \psi_i \big|_{\Gamma_u} = \psi_{i0},\ \psi_3 \big|_{\Gamma_u} = \psi_{30}, \\
\omega_i \big|_{\Gamma_\omega} = \omega_{i0},\ \omega \big|_{\Gamma_\omega} = \omega_0,\ \varphi_i \big|_{\Gamma_\omega} = \varphi_{i0},\ \varphi_3 \big|_{\Gamma_\omega} = \varphi_{30};
\end{gathered} \tag{2.4.2}
$$

$$
\begin{gathered}
T^{ji} \nu_j \big|_{\Gamma_p} = T^i_{(0)}, T^{j3} \nu_j \big|_{\Gamma_p} = T_{(0)}, M^{ji} \nu_j \big|_{\Gamma_p} = M^i_{(0)}, M^{j3} \nu_j \big|_{\Gamma_p} = M_{(0)}, \\
R^{ji} \nu_j \big|_{\Gamma_m} = R^i_{(0)}, R^{j3} \nu_j \big|_{\Gamma_m} = R_{(0)}, S^{ji} \nu_j \big|_{\Gamma_m} = S^i_{(0)}, S^{j3} \nu_j \big|_{\Gamma_m} = S_{(0)}.
\end{gathered} \tag{2.4.3}
$$

Начальные условия:

$$
\begin{gathered}
u^i \big|_{t=0} = w \big|_{t=0} = 0,\ \psi^i \big|_{t=0} = \psi_3 \big|_{t=0} = 0,\ \omega_i \big|_{t=0} = \omega \big|_{t=0} = 0,\ \varphi_i \big|_{t=0} = \varphi_3 \big|_{t=0} = 0, \\
\frac{\partial u^i}{\partial t} \bigg|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t} \bigg|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial \psi^i}{\partial t} \bigg|_{t=0} = \frac{\partial \psi_3}{\partial t} \bigg|_{t=0} = 0, \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \bigg|_{t=0} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \bigg|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \bigg|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}_{t=0} = 0.
\end{gathered} \tag{2.4.4}
$$

Глава 3 посвящена начально-краевым задачам для моментных упругих пластин и стержней.

3.1. Начально-краевые задачи для пластин в криволинейной системе координат

Тензор кривизны срединной поверхности полагаем равный нулю: $b_{ij} = 0$

При этом уравнения движения принимают следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_j T^{ji} + q^i,\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t} = \nabla_j T^{j3} + q, \\
\rho I \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2} = \nabla_j M^{ji} - T^{3i} + m^i,\ \rho I \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} = \nabla_j M^{j3} - N + m, \\
hJ \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} = g_{ik} \nabla_j R^{jk} - \pi_{ik} \left(T^{3k} - T^{k3} \right) + \tilde{m}_{Mi}, hJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t} = \nabla_j R^{j3} + \pi_{ik} T^{ik} + \tilde{m}_M, \\
IJ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} = \nabla_j S^{j3} - N_\omega + \pi_{ij} M^{ij} + \tilde{m}_{2M}, \\
IJ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = g_{ik} \left(\nabla_j S^{jk} - R^{3k} \right) - \pi_{ik} \left(M^{3k} - M^{k3} \right) + \tilde{m}_{2Mi}.
\end{gathered} \tag{3.1.1}
$$

Векторная форма уравнений относительно кинематических факторов пластины:

$$\begin{gathered}
\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu-\alpha)\operatorname{graddiv}\mathbf{u}+(\mu+\alpha)\Delta\mathbf{u}+\lambda\operatorname{grad}\psi_3-2\alpha[\mathbf{n},\operatorname{grad}\omega]+\mathbf{q}/h,\\
\rho\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2}=(\mu+\alpha)\Delta\psi_3+2\alpha\operatorname{rot}_n\boldsymbol{\varphi}-r^{-2}\left[\lambda\operatorname{div}\mathbf{u}+(\lambda+2\mu)\psi_3\right]+m/I,\\
J\frac{\partial^2\omega}{\partial t}=(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega+(\gamma-\varepsilon)\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}+2\alpha(\operatorname{rot}_n\mathbf{u}-2\omega)+\tilde{m}_M/h,\ r^2=I/h,\\
J\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}=(\gamma+\varepsilon)\Delta\boldsymbol{\varphi}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\operatorname{graddiv}\boldsymbol{\varphi}-\\
-2\alpha[\mathbf{n},\operatorname{grad}\psi_3]-r^{-2}(\gamma-\varepsilon)\operatorname{grad}\omega-\left[r^{-2}(\gamma+\varepsilon)+4\alpha\right]\boldsymbol{\varphi}+\tilde{\mathbf{m}}_{2M}/I;
\end{gathered}\tag{3.1.2}$$

$$\begin{gathered}
\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(\mu-\alpha)\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}+(\mu+\alpha)\Delta w+2\alpha\operatorname{rot}_n\boldsymbol{\omega}+q/h,\\
\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu-\alpha)\operatorname{graddiv}\boldsymbol{\psi}+(\mu+\alpha)\Delta\boldsymbol{\psi}-2\alpha[\mathbf{n},\operatorname{grad}\varphi_3]-\\
-r^{-2}\{(\mu+\alpha)\boldsymbol{\psi}+(\mu-\alpha)\operatorname{grad}w+2\alpha[\mathbf{n},\boldsymbol{\omega}]\}+\mathbf{m}/I,\\
J\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}=(\gamma+\varepsilon)\Delta\boldsymbol{\omega}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\operatorname{graddiv}\boldsymbol{\omega}+\beta\operatorname{grad}\varphi_3+\\
+2\alpha[\mathbf{n},\boldsymbol{\psi}-\operatorname{grad}w]-4\alpha\boldsymbol{\omega}+\tilde{\mathbf{m}}_M/h,\\
J\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2}=(\gamma+\varepsilon)\Delta\varphi_3-r^{-2}\left[\beta\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}+(\beta+2\gamma)\varphi_3\right]+2\alpha(\operatorname{rot}_n\boldsymbol{\psi}-2\varphi_3)+\tilde{m}_{2M}/I.
\end{gathered}\tag{3.1.3}$$

Соответствующие системам (3.1.2) и (3.1.3) естественные краевые и начальные условия:

- для системы (3.1.2):

$$u_i\big|_{\Gamma_u}=u_{i0},\psi_3\big|_{\Gamma_u}=\psi_{30},\omega\big|_{\Gamma_\omega}=\omega_0,\ \varphi_i\big|_{\Gamma_\omega}=\varphi_{i0},\tag{3.1.4}$$

$$T^{ji}\nu_j\big|_{\Gamma_p}=T^i_{(0)},M^{j3}\nu_j\big|_{\Gamma_p}=M_{(0)},R^{j3}\nu_j\big|_{\Gamma_m}=R_{(0)},S^{ji}\nu_j\big|_{\Gamma_m}=S^i_{(0)}\tag{3.1.5}$$

$$\begin{gathered}
u^i\big|_{t=0}=0,\psi_3\big|_{t=0}=0,\omega\big|_{t=0}=0,\varphi_i\big|_{t=0}=0,\\
\frac{\partial u^i}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\frac{\partial\psi_3}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\frac{\partial\omega}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0;
\end{gathered}\tag{3.1.6}$$

- для системы (3.1.3):

$$w\big|_{\Gamma_u}=w_0,\psi_i\big|_{\Gamma_u}=\psi_{i0},\omega_i\big|_{\Gamma_\omega}=\omega_{i0},\varphi_3\big|_{\Gamma_\omega}=\varphi_{30}\tag{3.1.7}$$

$$T^{j3}\nu_j\big|_{\Gamma_p}=T_{(0)},M^{ji}\nu_j\big|_{\Gamma_p}=M^i_{(0)},R^{ji}\nu_j\big|_{\Gamma_m}=R^i_{(0)},S^{j3}\nu_j\big|_{\Gamma_m}=S_{(0)}\tag{3.1.8}$$

$$\begin{gathered}
w\big|_{t=0}=0,\psi^i\big|_{t=0}=0,\omega_i\big|_{t=0}=0,\varphi_3\big|_{t=0}=0,\\
\frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\frac{\partial\psi^i}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\frac{\partial\omega_i}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}_{t=0}=0.
\end{gathered}\tag{3.1.9}$$

3.2. Уравнения движения изотропных пластин в прямоугольной декартовой системе координат

$$\rho\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial\theta_u}{\partial x_{1,2}}+(\mu+\alpha)\Delta u_{1,2}+\lambda\frac{\partial\psi_3}{\partial x_{1,2}}+2\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x_{2,1}}+q_{1,2}/h,$$

$$\rho\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2}=(\mu+\alpha)\Delta\psi_3-r^{-2}\left[\lambda\theta_u+(\lambda+2\mu)\psi_3\right]-2\alpha\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right)+m/I,$$

$$J\frac{\partial^2\omega}{\partial t}=2\alpha\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-2\omega\right)+(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega+(\gamma-\varepsilon)\theta_\varphi+\tilde{m}_M/h,$$

$$J\frac{\partial^2\varphi_{1,2}}{\partial t^2}=(\gamma+\varepsilon)\Delta\varphi_{1,2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\theta_\varphi}{\partial x_{1,2}}+2\alpha\frac{\partial\psi_3}{\partial x_{2,1}}-r^{-2}(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega}{\partial x_{1,2}}-$$
$$-\left[r^{-2}(\gamma+\varepsilon)+4\alpha\right]\varphi_{1,2}+\tilde{m}_{2M1,2}/I,$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(\mu+\alpha)\Delta w+(\mu-\alpha)\theta_\psi-2\alpha\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}-\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\right)+q/h,$$

$$\rho\frac{\partial^2\psi_{1,2}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial\theta_\psi}{\partial x_{1,2}}+(\mu+\alpha)\Delta\psi_{1,2}+2\alpha\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_{2,1}}-$$
$$-r^{-2}\left[(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_{1,2}}+(\mu+\alpha)\psi_{1,2}-2\alpha\omega_{2,1}\right]+m_{1,2}/I, \qquad (3.2.1)$$

$$J\frac{\partial^2\omega_{1,2}}{\partial t^2}=(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega_{1,2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\theta_\omega}{\partial x_{1,2}}-4\alpha\omega_{1,2}+2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_{2,1}}-\psi_{2,1}\right)+\beta\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_{1,2}}+\frac{\tilde{m}_{M1,2}}{h};$$
$$J\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2}=2\alpha\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}-2\varphi_3\right)+(\gamma+\varepsilon)\Delta\varphi_3-r^{-2}\left[\beta\theta_\omega+(\beta+2\gamma)\varphi_3\right]+\tilde{m}_{2M}/I. \qquad (3.2.2)$$

3.3. Уравнения движения прямолинейных изотропных стержней

- Уравнения, описывающие продольные движения:

$$\ddot{u}=u''+\kappa\psi_3'+q_1,\ddot{\psi}_3=\gamma_{\alpha+}^{-2}\psi_3''-r^{-2}\left(\kappa u'+\psi_3\right)+2\alpha\varphi'+m,$$
$$\ddot{\varphi}=\gamma_2^{-2}\varphi''-\left(\gamma_2^{-2}r^{-2}+4\alpha\upsilon\right)\varphi-2\alpha\upsilon\psi_3'+\tilde{m}_{2M2}; \qquad (3.3.1)$$

- Уравнения, описывающие изгиб:

$$\ddot{w}=\gamma_{\alpha+}^{-2}w''+\gamma_{\alpha-}^{-2}\psi'+2\alpha\omega_2'+q,\ddot{\psi}=\psi''-r^{-2}\left(\gamma_{\alpha-}^{-2}w'+\gamma_{\alpha+}^{-2}\psi-2\alpha\omega_2\right)+m_1,$$
$$\ddot{\omega}_2=2\alpha\upsilon(\psi-w')+\gamma_2^{-2}\omega_2''-4\alpha\upsilon\omega_2+\tilde{m}_{M2}; \qquad (3.3.2)$$

$$\nu_1=\pm1,\nu_2=0 \qquad (3.3.3)$$

- Уравнения (3.3.2) не изменяются, а в (3.3.1) необходимо отбросить второе уравнение. В результате получаем систему из двух независимых уравнений:

$$\ddot{u}=u''+q_1,\ddot{\varphi}=\gamma_2^{-2}\varphi''-\left(\gamma_2^{-2}r^{-2}+4\alpha\upsilon\right)\varphi+\tilde{m}_{2M2}; \qquad (3.3.4)$$

<u>3.4. Нестационарные продольные колебания бесконечного стержня</u> **(упрощенные модели)**

Используем не учитывающую обжатие модель (3.3.4)

Его решение представляем в виде:

$$\varphi(x,\tau) = G_{\varphi\tilde{m}_{2M2}}(x,\tau) ** \tilde{m}_{2M2}(x,\tau), \tag{3.4.1}$$

где $G_{\varphi\tilde{m}_{2M2}}$ - функция Грина, изображение которой определяется так:

$$G^{FL}_{\varphi\tilde{m}_{2M2}} = \frac{1}{k_2^2 + b^2}, b^2 = \gamma_2^{-2} r^{-2} + 4\alpha\upsilon. \tag{3.4.2}$$

Соответствующий оригинал находим с помощью таблиц [25,29]:

$$\begin{gathered} G^{L}_{\varphi\tilde{m}_{2M2}}(x,s) = \frac{\gamma_2}{2\sqrt{s^2+b^2}} e^{-\gamma_2|x|\sqrt{s^2+b^2}}, \\ G_{\varphi\tilde{m}_{2M2}}(x,\tau) = \frac{\gamma_2}{2} J_0\left(b\sqrt{\tau^2 - \gamma_2^2 x^2}\right) H\left(\tau - \gamma_2|x|\right), \end{gathered} \tag{3.4.3}$$

Далее везде в примерах расчетов будем полагать, что материал - композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, со следующими физическими характеристиками [22,33]:

$$\begin{gathered} \lambda = 7{,}59 \text{ ГПа}; \ \mu = 1{,}89 \text{ ГПа}; \ \alpha = 7{,}45 \text{МПа}; \gamma + \varepsilon = 2{,}64 \text{ кН}; \\ J = 0{,}429 \cdot 10^{-3} \text{кг/м}; \ c_1 = 2{,}28 \cdot 10^3 \text{м/с}; \ c_2 = 9{,}29 \cdot 10^2 \text{м/с}; \ c_3 = 2{,}48 \cdot 10^3 \text{м/с}. \end{gathered} \tag{3.4.4}$$

В качестве характерного линейного размера принимаем $L = 1$ м.

$$\begin{gathered} \rho = \mu / c_2^2 = 2{,}19 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \\ \gamma_1 = 2{,}45; \ \gamma_2 = 0{,}919; \ \alpha = 0{,}66 \cdot 10^{-3}; \ \upsilon = 5{,}1 \cdot 10^6; \ \kappa = 0{,}668. \end{gathered} \tag{3.4.5}$$

Считаем, что стержень имеет квадратное поперечное сечение со стороной $h = 0{,}05$ м.

$$\varphi(x,\tau) = G_{\varphi\tilde{m}_{2M2}}(x,\tau) * H(\tau) = \frac{\gamma_2}{2} H\left(\tau - \gamma_2|x|\right) \int_{\gamma_2|x|}^{\tau} J_0\left(b\sqrt{t^2 - \gamma_2^2 x^2}\right) dt. \tag{3.4.6}$$

$$S_{12} = \frac{\gamma_2^2}{2} H\left(\tau - \gamma_2|x|\right) \left[\gamma_2 b|x| \int_{\gamma_2|x|}^{\tau} \frac{J_1\left(b\sqrt{t^2 - \gamma_2^2 x^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \gamma_2^2 x^2}} dt - 1 \right] \operatorname{sign} x. \tag{3.4.7}$$

На рис. 3.4.1 и 3.4.2 приведены полученные с помощью (3.4.3) зависимости функции $G_{\varphi\tilde{m}_{2M2}}(x,\tau)$ от координаты и времени соответственно при различных значениях τ и x.

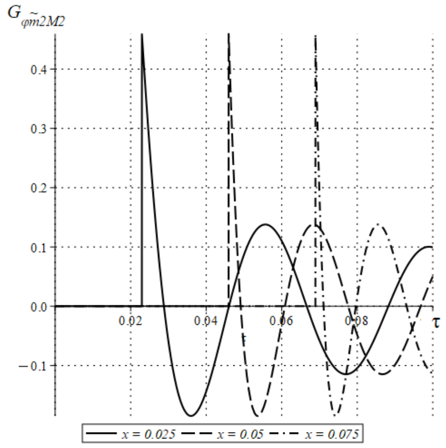


Рис. 3.4.1. Зависимости $G_{\varphi\tilde{m}_{2M2}}(x,\tau)$
при $\tau = 0 .. 0.1$

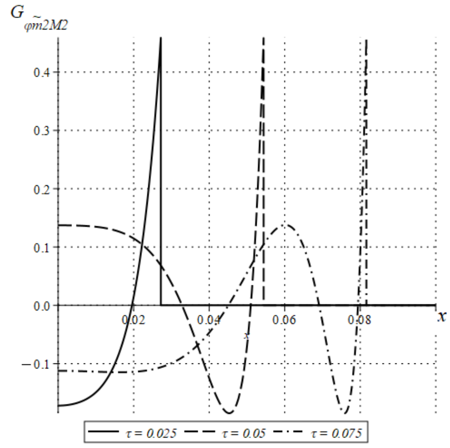


Рис. 3.4.2. Зависимости $G_{\varphi\tilde{m}_{2M2}}(x,\tau)$
при $x = 0 .. 0.1$

На рис. 3.4.3 и 3.4.4 приведены полученные с помощью (3.4.6) зависимости функции $\varphi(x,\tau)$ от координаты и времени соответственно при различных значениях τ и x.

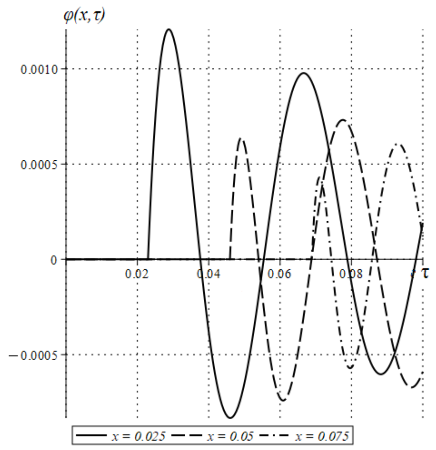


Рис. 3.4.3. Зависимости $\varphi(x,\tau)$
при $\tau = 0 .. 0.1$

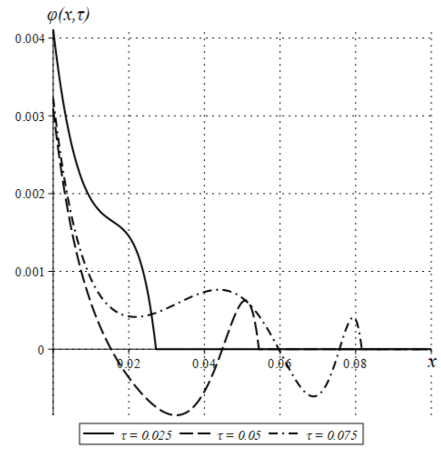


Рис. 3.4.4. Зависимости $\varphi(x,\tau)$
при $x = 0 .. 0.1$

На рис. 3.4.5 и 3.4.6 изображены построенные с помощью (3.4.7) зависимости функции $S_{12}(x,\tau)$ от координаты и времени соответственно при различных значениях τ и x.

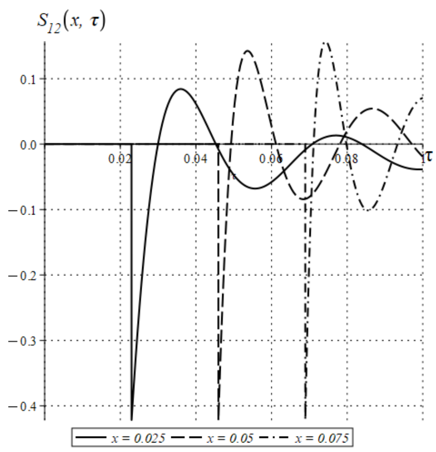


Рис. 3.4.5. Зависимости $S_{12}(x,\tau)$
при $\tau = 0 .. 0.1$

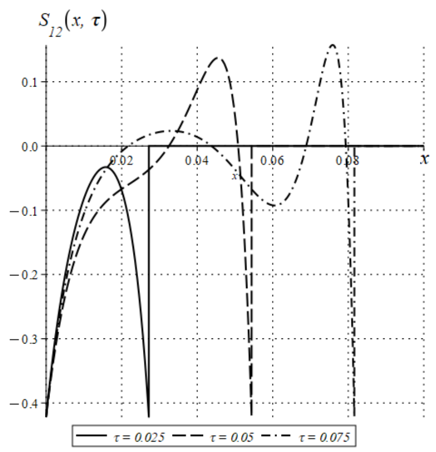


Рис. 3.4.6. Зависимости $S_{12}(x,\tau)$
при $x = 0 .. 0.1$

***3.5. Продольные колебания шарнирно опертого конечного моментного упругого стержня* (общая модель)**

Рассмотрим стержень единичной длины, имеющий в сечениях с координатами $x=0$ и $x=1$ закрепление в виде обобщенного шарнирного опирания для общей модели:

$$u\big|_{x=0,1}=0,\varphi\big|_{x=0,1}=0,\psi_3'\big|_{x=0,1}=0. \tag{3.5.1}$$

Движение стержня описывается уравнениями:

$$\begin{gathered}\ddot{u}=u''+\kappa\psi_3'+q_1,\ddot{\psi}_3=\gamma_{\alpha+}^{-2}\psi_3''-r^{-2}\left(\kappa u'+\psi_3\right)+2\alpha\varphi'+m,\\ \ddot{\varphi}=\gamma_2^{-2}\varphi''-\left(\gamma_2^{-2}r^{-2}+4\alpha\upsilon\right)\varphi-2\alpha\upsilon\psi_3'+\tilde{m}_{2M2};\end{gathered} \tag{3.5.2}$$

$$\begin{gathered}u\left(x,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(\tau\right)\sin\lambda_n x,\varphi\left(x,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left(\tau\right)\sin\lambda_n x,\lambda_n=\pi n,\\ q_1\left(x,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}q_{1n}\left(\tau\right)\sin\lambda_n x,\tilde{m}_{2M2}\left(x,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{m}_{2M2n}\left(\tau\right)\sin\lambda_n x;\end{gathered} \tag{3.5.3}$$

$$\psi_3\left(x,\tau\right)=\psi_{30}\left(\tau\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{3n}\left(\tau\right)\cos\lambda_n x,m\left(x,\tau\right)=m_0\left(\tau\right)+\sum_{n=0}^{\infty}m_n\left(\tau\right)\cos\lambda_n x. \tag{3.5.4}$$

Решение системы алгебраических уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}u_n^L=G_{uq_1n}^L q_{1n}^L+G_{u\tilde{m}_{2M2}n}^L\tilde{m}_{2M2n}^L+G_{umn}^L m_n^L,\varphi_n^L=G_{\varphi q_1n}^L q_{1n}^L+G_{\varphi\tilde{m}_{2M2}n}^L\tilde{m}_{2M2n}^L+G_{\varphi mn}^L m_n^L,\\ \psi_{3n}^L=G_{\psi_3q_1n}^L q_{1n}^L+G_{\psi_3\tilde{m}_{2M2}n}^L\tilde{m}_{2M2n}^L+G_{\psi_3mn}^L m_n^L.\end{gathered} \tag{3.5.5}$$

Оригиналы равенств (3.5.5) имеют вид:

$$\begin{gathered}u_n\left(\tau\right)=G_{uq_1n}\left(\tau\right)*q_{1n}\left(\tau\right)+G_{u\tilde{m}_{2M2}n}\left(\tau\right)*\tilde{m}_{2M2n}\left(\tau\right)+G_{umn}\left(\tau\right)*m_n\left(\tau\right),\\ \varphi_n\left(\tau\right)=G_{\varphi q_1n}\left(\tau\right)*q_{1n}\left(\tau\right)+G_{\varphi\tilde{m}_{2M2}n}\left(\tau\right)*\tilde{m}_{2M2n}\left(\tau\right)+G_{\varphi mn}\left(\tau\right)*m_n\left(\tau\right),\\ \psi_{3n}\left(\tau\right)=G_{\psi_3q_1n}\left(\tau\right)*q_{1n}\left(\tau\right)+G_{\psi_3\tilde{m}_{2M2}n}\left(\tau\right)*\tilde{m}_{2M2n}\left(\tau\right)+G_{\psi_3mn}\left(\tau\right)*m_n\left(\tau\right).\end{gathered} \tag{3.5.6}$$

В качестве примера действия нагрузки рассмотрим вариант сосредоточенной продольной нагрузки:

$$q_1\left(x,\tau\right)=f\left(\tau\right)\delta\left(x-x_0\right),m=\tilde{m}_{2M2}=0\left(0<x_0<1\right). \tag{3.5.7}$$

$$q_{1n}\left(\tau\right)=2f\left(\tau\right)\int_0^1\delta\left(x-x_0\right)\sin\lambda_n x dx=2f\left(\tau\right)\sin\lambda_n x_0. \tag{3.5.8}$$

$$\begin{gathered}u_n\left(\tau\right)=\Lambda_{uq_1n}\left(\tau\right),\varphi_n\left(\tau\right)=\Lambda_{\varphi q_1n}\left(\tau\right),\psi_{3n}\left(\tau\right)=\Lambda_{\psi_3q_1n}\left(\tau\right),\\ \Lambda_{\zeta n}\left(\tau\right)=\sin\lambda_n x_0\sum_{j=1}^{6}g_{\zeta nj}e^{s_{nj}\tau}*f\left(\tau\right),\zeta=\left(uq_1,\varphi q_1,\psi_3q_1\right).\end{gathered} \tag{3.5.9}$$

$$\Lambda_{\zeta n}\left(\tau\right)=H\left(\tau\right)\sin\lambda_n x_0\sum_{j=1}^{6}g_{\zeta nj}\int_0^{\tau}e^{s_{nj}t}dt=H\left(\tau\right)\sin\lambda_n x_0\sum_{j=1}^{6}g_{\zeta nj}\left(e^{s_{nj}\tau}-1\right). \tag{3.5.10}$$

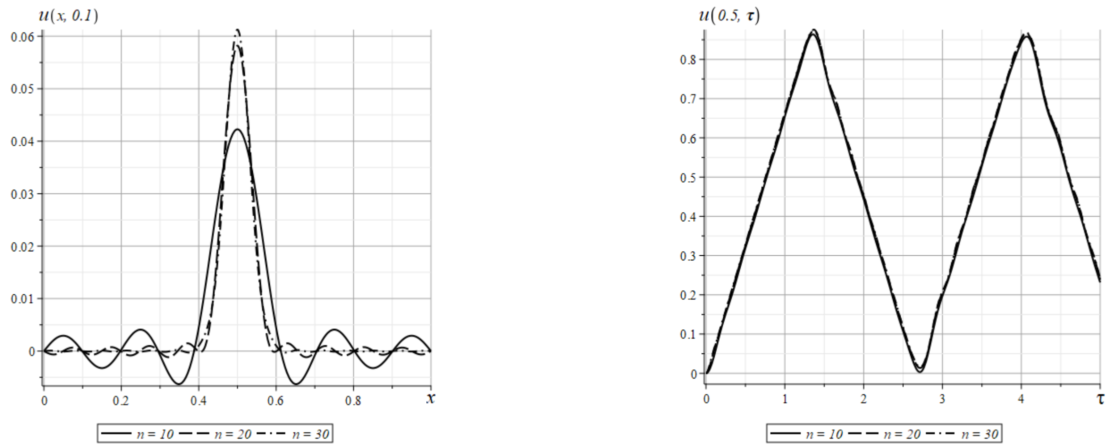


Рис. 3.5.1. Распределение $u(x,\tau)$ по координате x при $\tau = 0.1$ и во времени при $x = 0.5$

3.6. Продольные колебания конечного моментного упругого стержня (модель без обжатия)

В этом случае движение стержня описывается уравнением:

$$\ddot{\varphi} = \gamma_2^{-2}\varphi'' - \left(\gamma_2^{-2}r^{-2} + 4\alpha\upsilon\right)\varphi + \tilde{m}_{2M2}. \tag{3.6.1}$$

$$\varphi\big|_{x=0,1} = 0. \tag{3.6.2}$$

$$\varphi(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\tau)\sin\lambda_n x,, \tilde{m}_{2M2}(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{m}_{2M2n}(\tau)\sin\lambda_n x. \tag{3.6.3}$$

$$\ddot{\varphi}_n + b_n^2\varphi_n = \tilde{m}_{2M2n}, b_n = \sqrt{\gamma_2^{-2}\lambda_n^2 + \gamma_2^{-2}r^{-2} + 4\alpha\upsilon}. \tag{3.6.4}$$

$$\varphi_n^L = \tilde{G}^L_{\varphi\tilde{m}_{2M2}n}\tilde{m}^L_{2M2n}, \tilde{G}^L_{\varphi\tilde{m}_{2M2}n} = \frac{1}{s^2 + b_n^2}. \tag{3.6.5}$$

В пространстве оригиналов эти равенства имеют аналогичный (3.5.15) вид:

$$\varphi_n(\tau) = \tilde{G}_{\varphi\tilde{m}_{2M2}n}(\tau) * \tilde{m}_{2M2n}(\tau). \tag{3.6.6}$$

В качестве примера рассматриваем такую нагрузку

$$\tilde{m}_{2M2} = f(\tau)\delta(x - x_0)\,(0 < x_0 < 1), \tilde{m}_{2M2} = 2f(\tau)\sin\lambda_n x., \tag{3.6.7}$$

$$\varphi_n(\tau) = \frac{2\sin\lambda_n x_0}{b_n} f(\tau) * \sin b_n\tau. \tag{3.6.8}$$

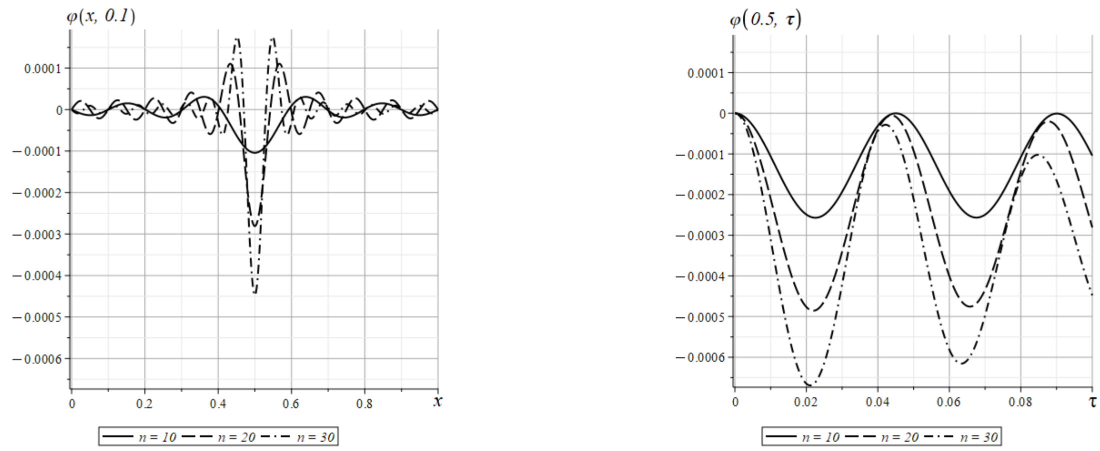


Рис. 3.6.1. Распределение $\varphi(x,\tau)$ по координате x при $\tau = 0.1$ и во времени при $x = 0.5$.

3.7. Продольные колебания шарнирно опертого конечного моментного упругого стержня (вторая упрощенная модель)

$$\tilde{q}_1(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{q}_{1n}(\tau)\sin\lambda_n x,\ \psi_3(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{3n}(\tau)\cos\lambda_n x, \psi_{3n}=-\lambda_n u_n. \quad (3.7.1)$$

$$\begin{gathered}T_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}T_{11n}\cos\lambda_n x, T_{11n}=2\gamma_1^{-2}\lambda_n u_n, M_{13}=\sum_{n=1}^{\infty}M_{13n}\sin\lambda_n x, M_{13n}=2\alpha\varphi_n+\gamma_{\alpha+}^{-2}\lambda_n^2 u_n,\\ M_{31}=\sum_{n=1}^{\infty}M_{31n}\sin\lambda_n x, M_{31n}=\gamma_{\alpha+}^{-2}\lambda_n^2 u_n-2\alpha\varphi_n, S_{12}=\sum_{n=1}^{\infty}S_{12n}\cos\lambda_n x, S_{12n}=\lambda_n\varphi_n.\end{gathered} \quad (3.7.2)$$

$$\begin{gathered}\ddot{u}_n=-\left[\gamma_{\alpha+}^{-2}r^2\lambda_n^4 u_n+2\gamma_1^{-2}\lambda_n^2\left(r^2+1\right)\right]u_n-2\alpha r^2\lambda_n^2\varphi_n+\tilde{q}_{1n}, n>1\\ \ddot{\varphi}_n=-\left[\gamma_2^{-2}\left(\lambda_n^2+r^{-2}\right)+4\alpha\upsilon\right]\varphi_n-2\alpha\upsilon\lambda_n^2 u_n+\tilde{m}_{2M2n}.\end{gathered} \quad (3.7.3)$$

Их решения в пространстве преобразований Лапласа:

$$u_n^L=\tilde{G}_{uq_1n}^L\tilde{q}_{1n}^L+\tilde{G}_{u\tilde{m}_{2M2}n}m_{2M2n}^L, \varphi_n^L=\tilde{G}_{\varphi q_1n}^L\tilde{q}_{1n}^L+\tilde{G}_{\varphi\tilde{m}_{2M2}n}^L\tilde{m}_{2M2n}^L. \quad (3.7.4)$$

Оригиналы последних функций:

$$\tilde{G}_{\zeta n}(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\tilde{g}_{\zeta nj}e^{s_{nj}\tau}, \tilde{g}_{\zeta nj}=\frac{\tilde{Q}_{\zeta n}\left(s_{nj}^2\right)}{2s_{nj}\left(2s_{nj}^2+\tilde{q}_{2n}\right)}, \zeta=\left(uq_1, u\tilde{m}_{2M2}, \varphi q_1, \varphi\tilde{m}_{2M2}\right), \quad (3.7.5)$$

где s_{nj} $\left(j=\overline{1,4}\right)$ - корни уравнения $\tilde{Q}_n\left(s^2\right)=0$.

Оригиналы равенств (3.7.5) имеют вид:

$$\begin{gathered}u_n(\tau)=\tilde{G}_{uq_1n}(\tau)*q_{1n}(\tau)+\tilde{G}_{u\tilde{m}_{2M2}n}(\tau)*\tilde{m}_{2M2n}(\tau),\\ \varphi_n(\tau)=\tilde{G}_{\varphi q_1n}(\tau)*q_{1n}(\tau)+\tilde{G}_{\varphi\tilde{m}_{2M2}n}(\tau)*\tilde{m}_{2M2n}(\tau).\end{gathered} \quad (3.7.6)$$

$$u_n(\tau)=\tilde{\Lambda}_{uq_1n}(\tau), \varphi_n(\tau)=\tilde{\Lambda}_{\varphi q_1n}(\tau), \quad (3.7.7)$$

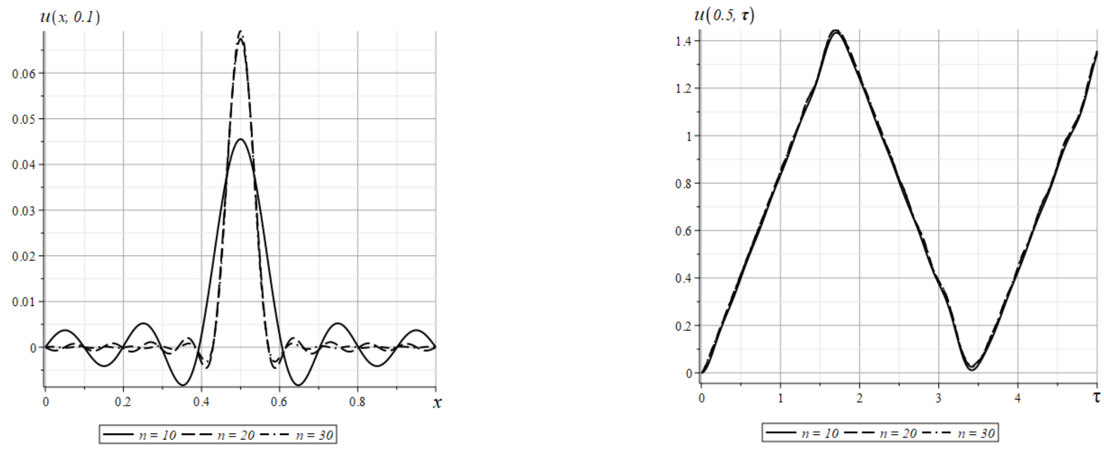


Рис. 3.7.1. Распределение $u(x,\tau)$ по координате x при $\tau = 0.1$ и во времени при $x = 0.5$.

3.8. Изгиб конечного моментного упругого стержня **(общая модель)**

Рассмотрим поперечные нестационарные движения стержня единичной длины, имеющего в сечениях с координатами $x=0$ и $x=1$ закрепление в виде обобщенного шарнирного опирания, Г.У:

$$w\big|_{x=0,1} = 0, \psi'\big|_{x=0,1} = 0, \omega_2'\big|_{x=0,1} = 0. \tag{3.8.1}$$

Решение этой задачи и внешние нагрузки представляем в виде тригонометрических рядов Фурье:

$$w(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\tau)\sin\lambda_n x, q(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau)\sin\lambda_n x, \lambda_n = \pi n; \tag{3.8.2}$$

$$\begin{gathered}\psi(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\tau)\cos\lambda_n x, m_1(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} m_{1n}(\tau)\cos\lambda_n x,\\ \omega_2(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{2n}(\tau)\cos\lambda_n x, \tilde{m}_{M2}(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{m}_{M2n}(\tau)\cos\lambda_n x.\end{gathered} \tag{3.8.3}$$

$$\begin{gathered}w_n^L = G_{wqn}^L q_n^L + G_{wm_1n}^L m_{1n}^L + G_{wM2n}^L \tilde{m}_{M2n}^L, \psi_n^L = G_{\psi qn}^L q_n^L + G_{\psi m_1n}^L m_{1n}^L + G_{\psi M2n}^L \tilde{m}_{M2n}^L,\\ \omega_{2n}^L = G_{\omega_2 qn}^L q_n^L + G_{\omega_2 m_1n}^L m_{1n}^L + G_{\omega_2 M2n}^L \tilde{m}_{M2n}^L.\end{gathered} \tag{3.8.4}$$

Здесь

$$\begin{gathered}G_{wqn}^L = \frac{P_{wqn}}{P_n}, G_{wm_1n}^L = -\frac{\lambda_n P_{wm_1n}}{P_n}, G_{wM2n}^L = -\frac{2\alpha\lambda_n P_{wM2n}}{P_n},\\ G_{\psi qn}^L = -\frac{r^{-2}\lambda_n P_{\psi qn}}{P_n}, G_{\psi m_1n}^L = \frac{P_{\psi m_1n}}{P_n}, G_{\psi M2n}^L = \frac{2\alpha r^{-2} P_{\psi M2n}}{P_n},\\ G_{\omega_2 qn}^L = \frac{2\alpha\upsilon\lambda_n P_{\omega_2 qn}}{P_n}, G_{\omega_2 m_1n}^L = \frac{2\alpha\upsilon P_{\omega_2 m_1n}}{P_n}, G_{\omega_2 M2n}^L = \frac{P_{\omega_2 M2n}}{P_n},\end{gathered} \tag{3.8.5}$$

$$\begin{aligned}&P_n = s^6 + p_{2n}s^4 + p_{1n}s^2 + p_{n0}, p_{2n} = q_{62}\lambda_n^2 + 4\left(4\alpha\upsilon + r^{-2}\gamma_{\alpha+}^{-2}\right),\\ &p_{1n} = q_{61}\lambda_n^4 + \left\{32\alpha\upsilon + r^{-2}\left[4\gamma_{\alpha+}^{-2}\left(\gamma_2^{-2}+1\right) + \gamma_1^{-2}\left(3\alpha - \gamma_1^{-2}\right)\right]\right\}\lambda_n^2 + 4\alpha\upsilon r^{-2}\gamma_1^{-2},\\ &p_{0n} = \lambda_n^4\left\{q_{60}\lambda_n^2 + \gamma_1^{-2}\left[16\alpha\upsilon + r^{-2}\gamma_2^{-2}\left(3\gamma_1^{-2} + 7\alpha\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{3.8.6}$$

Оригиналы функций в (3.8.5) находятся аналогично разд. 3.5:

$$G_{\zeta n}(\tau)=\sum_{j=1}^{6}\underset{s=s_{nj}}{\operatorname{res}} G_{\zeta n}^{L}e^{s\tau}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}g_{\zeta nj}e^{s_{nj}\tau}, g_{\zeta nj}=\frac{P_{\zeta n}\left(s_{nj}^{2}\right)}{2s_{nj}\left(3s_{nj}^{4}+2p_{2n}s_{nj}^{2}+p_{1n}\right)},$$
$$\zeta=\left(wq,wm_1,wM2,\psi q,\psi m_1,\psi M2,\omega_2 q,\omega_2 m_1,\omega_2 M2n\right). \tag{3.8.7}$$

Оригиналы равенств (3.8.4) имеют вид:

$$\begin{aligned}
w_n(\tau)&=G_{wqn}(\tau)*q_n(\tau)+G_{wm_1n}(\tau)*m_{1n}(\tau)+G_{wM2n}(\tau)*\tilde{m}_{M2n}(\tau),\\
\psi_n(\tau)&=G_{\psi qn}(\tau)*q_n(\tau)+G_{\psi m_1n}(\tau)*m_{1n}(\tau)+G_{\psi M2n}(\tau)*\tilde{m}_{M2n}(\tau),\\
\omega_{2n}(\tau)&=G_{\omega_2 qn}(\tau)*q_n(\tau)+G_{\omega_2 m_1n}(\tau)*m_{1n}(\tau)+G_{\omega_2 M2n}(\tau)*\tilde{m}_{M2n}(\tau).
\end{aligned} \tag{3.8.8}$$

Рассмотрим вариант сосредоточенной поперечной нагрузки:

$$q(x,\tau)=f(\tau)\delta(x-x_0),m_1=\tilde{m}_{M2}=0\ (0<x_0<1), \tag{3.8.9}$$

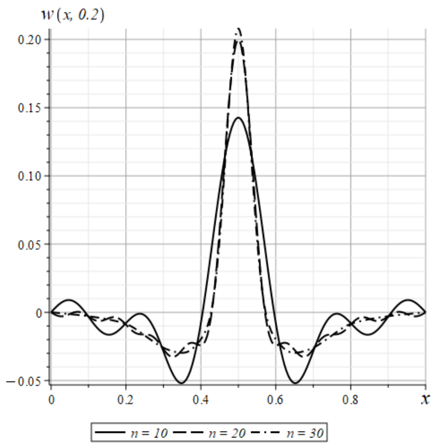
Отсюда получаем

$$q_n(\tau)=2f(\tau)\int_0^1\delta(x-x_0)\sin\lambda_n x dx=2f(\tau)\sin\lambda_n x_0. \tag{3.8.10}$$

При этом равенства (3.8.8) переходят в следующие соотношения:

$$w_n(\tau)=\Lambda_{uq_1n}(\tau),\psi_n(\tau)=\Lambda_{\varphi q_1 n}(\tau),\omega_{2n}(\tau)=\Lambda_{\psi_3 q_1 n}(\tau),$$
$$\Lambda_{\zeta n}(\tau)=\sin\lambda_n x_0\sum_{j=1}^{6}g_{\zeta nj}e^{s_{nj}\tau}*f(\tau),\zeta=\left(wq,\psi q,\omega_2 q\right). \tag{3.8.11}$$

$$\Lambda_{\zeta n}(\tau)=H(\tau)\sum_{j=1}^{6}g_{\zeta nj}\left(e^{s_{nj}\tau}-1\right)\begin{cases}0,n=2k,\\(-1)^k,n=2k-1.\end{cases} \tag{3.8.12}$$



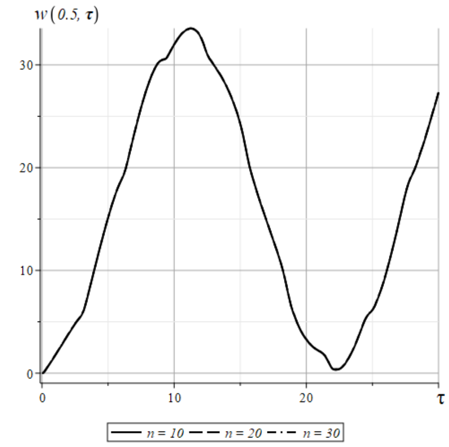


Рис. 3.8.1. Распределение $w(x,\tau)$ по координате x при $\tau = 0.2$ и во времени при $x = 0.5$.

3.9. Изгиб конечного моментного упругого стержня Кирхгофа

В этом случае граничные условия обобщенного шарнирного опирания принимают следующий вид:

$$w\big|_{x=0,1}=0,w''\big|_{x=0,1}=0,\omega_2'\big|_{x=0,1}=0. \tag{3.9.1}$$

$$w(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(\tau)\sin\lambda_n x,\; p(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n(\tau)\sin\lambda_n x, \lambda_n=\pi n; \tag{3.9.2}$$

$$\omega_2(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{2n}(\tau)\cos\lambda_n x, \tilde{m}_{M2}(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{m}_{M2n}(\tau)\cos\lambda_n x \tag{3.9.3}$$

Решение этой системы линейных алгебраических уравнений имеет подобный (3.8.4) вид:

$$w_n^L=\tilde{G}_{wpn}^L p_n^L+\tilde{G}_{wM2n}^L\tilde{m}_{M2n}^L, \omega_{2n}^L=\tilde{G}_{\omega_2 pn}^L p_n^L+\tilde{G}_{\omega_2 M2n}^L\tilde{m}_{M2n}^L, \tag{3.9.4}$$

$$\tilde{G}_{\zeta n}(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6} g_{\zeta nj}e^{s_{nj}\tau}, g_{\zeta nj}=\frac{\tilde{P}_{\zeta n}\left(s_{nj}^2\right)}{2s_{nj}\left(2s_{nj}^2+p_{1n}\right)}, \zeta=\left(wp, wM2, \omega_2 p, \omega_2 M2\right) \tag{3.9.5}$$

Оригиналы равенств (3.9.4) имеют вид:

$$\begin{aligned} w_n(\tau)&=\tilde{G}_{wqn}(\tau)*p_n(\tau)+\tilde{G}_{wM2n}(\tau)*\tilde{m}_{M2n}(\tau),\\ \omega_{2n}(\tau)&=\tilde{G}_{\omega_2 qn}(\tau)*p_n(\tau)+\tilde{G}_{\omega_2 M2n}(\tau)*\tilde{m}_{M2n}(\tau). \end{aligned} \tag{3.9.6}$$

Рассмотрим вариант сосредоточенной поперечной нагрузки:

$$p(x,\tau)=f(\tau)\delta(x-x_0), \tilde{m}_{M2}=0\;(0<x_0<1), \tag{3.9.7}$$

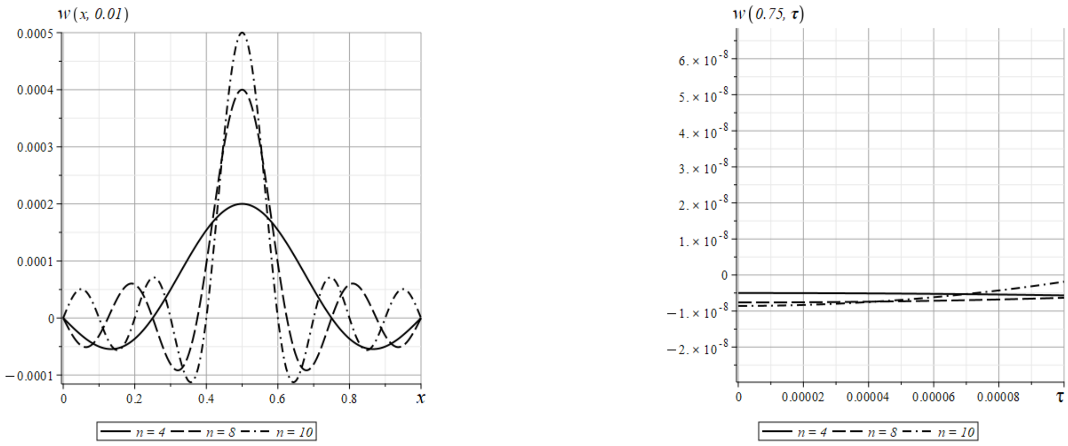


Рис. 3.9.1. Распределение $w(x,\tau)$ по координате x при τ = 0.1 и во времени при $x = 0.5$.

В заключении приведены основные результаты, полученные в диссертации.

1. Вариационное уравнение Гамильтона для описываемых моделью Коссера трехмерных тел.

2. Вариационное уравнение Гамильтона для моментных упругих тонкостенных оболочек на основании гипотезы прямой нормали.

3. Формулировка начально-краевых задач для моментных упругих тонкостенных оболочек.

4. Формулировка начально-краевых задач для моментных упругих пластин и стержней.

5. Решение и исследование нестационарных задач для моментных упругих стержней.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в Перечень Высшей аттестационной комиссии Российской Федерации

1. Тарлаковский Д.В., Май Куок Чиен. Изгиб конечного моментного упругого стержня под действием нестационарных нагрузок // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2024. – Т21. – № 3. – С. 45-60. https://doi.org/10.31429/vestnik-21-3-45-60.

2. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Май Куок Чиен. Продольные нестационарные колебания конечного моментного упругого стержня // Проблемы прочности и пластичности. – 2023. – Т85. – № 3. – С. 390-403. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2023-85-3-390-403.

Научные статьи в ведущих научных журналах и изданиях, включенных в международные системы цитирования

3. Quoc Chien Mai, Marina Yu. Ryazantseva, and Dmitry V. Tarlakovskii. Generalized Linear Model of Dynamics of Elastic Moment Shells // Advanced Structured Materials. Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading. Springer Nature Switzerland AG, 2023, Volome 186. pp. 273-292. https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_11.

Публикации в других изданиях и журналах

4. Май Куок Чиен, Тарлаковский Д.В. Начально-краевые задачи для моментных упругих оболочек // Сборник тезисов докладов XXVII Международной конференции «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова., 17-21 мая 2021 г., Кремёнки, Россия. – М.: ООО "ТРП", 2021. – Т. 1. – С. 150-151.

5. Май Куок Чиен, Тарлаковский Д.В. Нестационарные продольные колебания бесконечного моментного упругого стержня // Сборник тезисов докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Секция механики, 16-22 апреля 2022 г., Москва. – М.: Изд-во МГУ, 2022. – С. 119.

6. Май Куок Чиен, Тарлаковский Д.В. Действие нестационарной поперечной нагрузки на бесконечный моментный упругий стержень // Сборник тезисов докладов XXVIII Международной конференции «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова., 16-20 мая 2022 г., Кремёнки, Россия. – М.: ООО "ТРП", 2022. – Т. 2. – С. 75.

7. Тарлаковский ДВ., Май Куок Чиен. Начально-краевые задачи для моментных упругих пластин // Сборник тезисов докладов XII международной научно-практической конференции, посвященной 160-летию белорусской железной дороги «Проблемы безопасности на транспорте», 24-25 ноябр 2022 г., Гомель, Беларусь. – М.: ун-т трансп, Гомель, Белорус, 2022. – Ч. 2. – С. 262-263.

8. Рязанцева М.Ю., Май Куок Чиен, Тарлаковский Д.В. Обращение интегральных преобразований в задаче о нестационарных продольных колебаниях бесконечного моментного упругого стержня // Сборник тезисов докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Секция механики, 4-14 апреля 2023 г., Москва. – М.: Изд-во МГУ, 2023. – С. 144.

9. Май Куок Чиен, Тарлаковский Д.В. Продольные колебания конечного шарнирно опертого моментного упругого стержня // Сборник тезисов докладов XXIX Международной конференции «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова., 15-19 мая 2023 г., Кремёнки, Россия. – М.: ООО "ТРП", 2023. – Т. 2. – С. 140.

10. Май Куок Чиен, Разоренова А.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарные задачи для моментного упругого стержня // Сборник тезисов докладов XXIX Международной конференции «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова., 15-19 мая 2023 г., Кремёнки, Россия. – М.: ООО "ТРП", 2023. – Т. 2. – С. 27-29.

11. Май Куок Чиен, Рязанцева М.Ю., Тарлаковский Д.В. Действие нестационарой продольной нагрузки на бесконечный моментный упругий стержень // сборник тезисов докладов XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике, 21-25 августа 2023 г., Санкт-Петербург. – М.: Издательство Санкт-Петербург, 2023. – Т. 4. – С. 688-690.

12. Тарлаковский Д.В., Май Куок Чиен. Нестационарный изгиб конечного моментного упругого стержня // Сборник тезисов докладов научной конференции «Ломоносовские чтения», Секция механики, 03 апреля 2024 г.

13. Тарлаковский Д.В., Май Куок Чиен. Изгиб моментного упругого стержня кирхгофа // Сборник тезисов докладов XXX Международной конференции «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова., 20-24 мая 2024 г., Кремёнки, Россия. – М.: ООО "ТРП", 2024. – Т. 1. – С. 209.

14. Тарлаковский Д.В., Май Куок Чиен. Изгиб моментного упругого стержня под действием нестационарных нагрузок // Сборник тезисов докладов 51-й школьной конференции «Актуальные проблемы механики» памяти Д.А. Индейцева., 19-21 июня 2024 г., Великий Новгород, 2024. – С. 241.