

На правах рукописи



РУССКИХ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

**ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА НА УПРУГИХ ОПОРАХ ПО
КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций» в Федеральном государственном бюджетном общеобразовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

Научный руководитель: Заслуженный конструктор РФ, кандидат технических наук

Гнездилов Владимир Алексеевич

Официальные оппоненты: **Паймушин Виталий Николаевич,**

доктор физико-математических наук, академик Академии Наук Республики Татарстан, профессор кафедры «Прочность конструкций» ФГБОУ «Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ», главный научный сотрудник.

Темнов Александр Николаевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана», доцент.

Ведущая организация: ФГБУН «Институт прикладной механики» Российской академии наук (ИПРИМ РАН)

Защита состоится «17» декабря 2014 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ), по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке «Московского авиационного института (национального исследовательского университета)» (МАИ) и на сайте:

http://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=51679

Автореферат разослан

«__» октября 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Г. В. Федотенков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Во многих областях техники и жизнедеятельности человека, таких как транспортные средства, перевозящие деформируемые (упругие, жидкие, сыпучие) материалы и людей, управляемые летательные и космические аппараты, движущиеся по заданной траектории, быстродействующие роботы-манипуляторы и пр., возникают задачи механики, связанные с движением (скольжением или качением) твердых и деформируемых тел по криволинейным поверхностям и направляющим. К этим задачам относятся: пуск беспилотных самолетов и реактивных снарядов по направляющей балке; движение автомобилей и мотоциклов по неровной дороге; движение железнодорожного транспорта по длиннопролетным мостам, совершающим колебания при сильных порывах ветра и землетрясениям; взлет самолета с палубы авианосца с трамплином; взлет и посадка самолета на тонком льду; сложное пространственное движение тележек с пассажирами по изогнутым и закрученным рельсовым направляющим, расположенными на эстакадах («катальные горы»), а также динамика некоторых спортивных дисциплин и цирковых аттракционов и пр.

Контактное взаимодействие между движущимся телом и поверхностью в общем случае осуществляется в нескольких точках через посредство податливых колесных шин или роликов с амортизацией и описывается нелинейными упруговязкими двухсторонними, односторонними или устранимыми связями. При решении таких задач ставятся различные требования, основными из которых являются функциональная безопасность, прочностная надежность и физиологическая восприимчивость перегрузок, вибрации и комфорт экипажа и пассажиров. Некоторые из этих задач могут быть сформулированы и решены в линейной постановке, а некоторые – в геометрически и/или физически нелинейной постановке. При этом тело, скользящее или катящееся по поверхности, для упрощения задачи, может рассматриваться в некоторых случаях как сосредоточенная масса или абсолютно твердое тело, а поверхность, по которой движется тела, недеформируемой.

Определенные задачи из отмеченных в настоящее время решены в той или иной постановке. Тем не менее, имеется много нерешенных задач и задач, требующих решений в уточненной нелинейной постановке – в частности при движении абсолютно твердых и упругих тел по сильно искривленным поверхностям (направляющим кривым) с большими углами поворота. Эти задачи являются актуальными и некоторым из них посвящена данная диссертация.

Цель работы

Разработка математических моделей, методов и алгоритмов численного решения задач движения деформируемых твердых тел на упругих опорах по криволинейным поверхностям, получение разрешающих уравнений, оценка

влияния параметров на характеристики движения, реакции опор и перегрузки.

Научная новизна

1. Разработана методика расчета кинематических и динамических характеристик движения абсолютно твердого реактивного снаряда на двух опорах по упругой направляющей балке. Подробно исследована конечная стадия движения аппарата по балке после схода передней опоры с определением и корректировкой начальных условий для свободного полета.

2. Решена плоская геометрически и физически нелинейная задача расчета параметров движения тела по кривой с учетом упругости шин и подвески. Исследовано влияние параметров на реакции опор и перегрузки тела.

3. Разработана новая общая математическая модель с обоснованиями для расчета движения тела на упруговязких роликах по произвольной двухрельсовой изогнутой и закрученной пространственной направляющей с учетом относительного движения упругих присоединенных масс.

Практическое значение работы

Методики и алгоритмы, разработанные в работе, могут быть использованы для расчета различных механических систем в проектной практике, в частности, при проектировании систем запуска беспилотных летательных аппаратов, экстремальных катальных гор и т.д.

Достоверность и обоснованность

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается: строгостью математических моделей и методов решения; соответствием полученных численных результатов с имеющимися в литературе для частных случаев; решением тестовых задач для проверки численных алгоритмов решения систем уравнений; исследованием сходимости результатов расчета.

Апробация работы и публикации

Результаты диссертационной работы докладывались на:

1. XVIII международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (13–17 февраля 2012 г., Ярополец, Московская Область, РФ);

2. Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике–2012» (17–20 апреля 2012 г., Москва, РФ);

3. 12-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика–2013» (12–15 ноября 2013 г., Москва, РФ);

4. XX международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (17–21 февраля 2014 г., Кременки, Калужская Область, РФ);

5. Международной научно-технической конференции имени Леонардо да Винчи, №2 (21–24 мая 2014 г., Мюльхаузен, Тюрингия, Германия);

6. XIX международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация» (29 июня–06 июля 2014 г., Анапа, Краснодарский Край, РФ);

7. Научном семинаре кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института (22 сентября 2014 г., Москва, РФ).

Основные результаты диссертации опубликованы в девяти печатных работах, в том числе трех статьях в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и содержит 132 страницы. Список используемой литературы включает 58 наименований (из них 4 на иностранном языке).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен краткий обзор литературы, относящейся к теме диссертации. Исследования по динамике переносного и относительного движений твердых и упругих тел при больших углах поворота представлены в классических работах Лурье А.И. и ряда других авторов. Динамика сосредоточенных масс и различных тел (автомобили, вагоны, планетоходы, самолеты), движущихся по произвольным абсолютно жестким и упругим направляющим рассматривались в работах Тимошенко С.П., Светлицокого В.А., Горшкова А.Г., Павленко В.Ф., Кемурджиана А.Л., Колчина Н.И., Громова В.В., Бромберга Е.М., Вериги М.Ф., Вершинского С.В., Блохина Е.П., Лазаряна В.А., Когана А.Х., Кулакова Н.А., Тарасика В.П., Селифонова В.В., Смирнова Г.А., Яценко Н.Н и др. В этих работах считается, что направляющая является прямолинейной или имеет малую кривизну, не учитываются относительные движения внутренних упругоприсоединенных масс.

В первой главе диссертации рассматриваются задачи, связанные с процессом движения абсолютно жесткого реактивного снаряда или летательного аппарата на двух скользящих опорах по упругой направляющей балке. Основной целью задачи является определение начальных условий для динамики полета аппарата (снаряда) после схода с балки с учетом «сваливания» (передняя опора сошла, задняя еще продолжает скольжение по балке).

Система уравнений движения аппарата по балке имеет вид (рис. 1):

$$\begin{cases} M \frac{dV}{dt} = T - Mg \sin(\theta); \\ M \frac{d^2 v_c}{dt^2} = T \varrho_c - Mg \cos(\theta) - R_1 - R_2; \\ J \frac{d^2 \varrho_c}{dt^2} = -R_1 r_1 + R_2 r_2, \end{cases}$$

где v_c , ϱ_c – поперечное перемещение в центре тяжести аппарата и его угол поворота относительно центра тяжести.

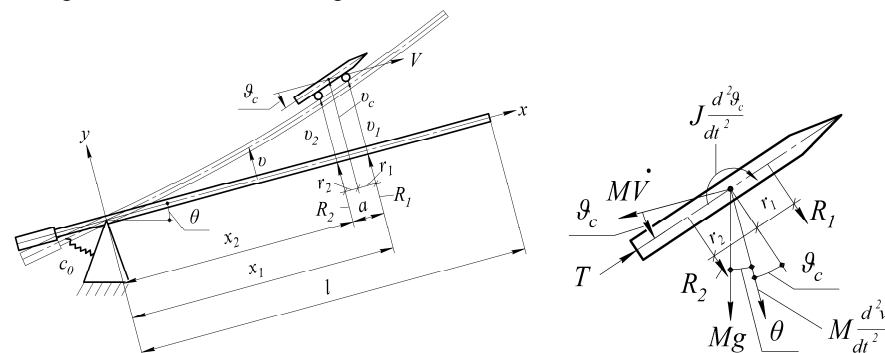


Рис. 1

Поперечное перемещение центра тяжести аппарата и его угол поворота вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \varrho_c &= \frac{1}{a}(v_1 - v_2) = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^2 (-1)^j v_j; \\ v_c &= \frac{1}{a}(v_1 r_2 + v_2 r_1) = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^2 v_j (a - r_j). \end{aligned}$$

Условие безотрывного скольжения опор летательного аппарата по колеблющейся балке имеет вид:

$$v_j = v(x_j(t), t), \quad j = 1, 2.$$

Прогиб балки $v(x, t)$ по методу Ритца записывается в виде:

$$v(x, t) = v_0(t) + \sum_{m=0}^s q_m(t) X_m(x),$$

где $v_0(t)$ – заданное начальное искривление балки с учетом её статического прогиба от действия сил тяжести при $t = 0$ и начального предварительного искривления.

Уравнения колебаний балки под действием реакций скользящих опор аппарата на основании принципа возможных перемещений при $a \leq x_1(t) \leq l$ записывается в виде:

$$\sum_{n=0}^s [(m_{mn} + g_{mn})\ddot{q}_n + d_{mn}\dot{q}_n + (k_{mn} + b_{mn})q_n] = Q_m^0(t), \quad m = 0, 1, \dots, s.$$

В процессе решения задачи о колебаниях балки рассматриваются 4 интервала времени:

1) $0 \leq t \leq t_1$ – на балке только опора №1; $0 \leq x_1(t) \leq a$ и $x_2(t) \leq 0$; в выражениях для вычисления коэффициентов $Q_m^0(t)$, $g_{mn}(t)$, $d_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$ следует положить $X_n(x_2) = 0$ при $n = 1, 2, \dots, s$;

2) $t_1 \leq t \leq t_2$ – на балке опора №1 и №2; $a \leq x_1(t) \leq l$ и $0 \leq x_2(t) \leq l - a$; коэффициенты $Q_m^0(t)$, $g_{mn}(t)$, $d_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$ вычисляются по соответствующим формулам;

3) $t_2 \leq t \leq t_3$ – на балке только опора №2; $l \leq x_1(t) \leq l + a$ и $l - a \leq x_2(t) \leq l$; то есть первая опора сошла с балки и её реакция будет равна нулю ($R_1 = 0$), и тогда в выражениях для вычисления коэффициентов $Q_m^0(t)$, $g_{mn}(t)$, $d_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$ будет необходимо учитывать только члены при $i = 2, j = 2$, а остальные будут равны нулю. В этом случае появляется дополнительная степень свободы за счет поворота летательного аппарата относительно второй опоры и поэтому к системе уравнений необходимо добавить уравнение. Оно получится из условия $R_1 = 0$:

$$\ddot{\theta}_c \left(\frac{J}{r_2} + Mr_2 \right) - T \mathcal{G}_c + M \sum_{m=0}^s q_m(t) X_m(x) = -Mg \cos(\theta).$$

В данном случае наряду с $q_1(t) \dots q_s(t)$ в качестве неизвестной функции рассматривается $\mathcal{G}_c(t)$;

4) $t_3 \leq t \leq t_4$ – свободные колебания балки. В уравнениях следует положить $g_{mn}(t) = d_{mn}(t) = b_{mn}(t) = 0$.

Для вычисления угла поворота аппарата относительно оси OX в момент его схода с балки используется соотношение:

$$\alpha(t_3) = \arctg \frac{V_y(t_3)}{V_x(t_3)},$$

где $V_x(t_3)$ – горизонтальная составляющая скорости.

Если не учитывать дополнительную степень свободы, то формулы для вычисления вертикальной скорости $V_y(t_3)$ и угловой скорости вращения $\omega(t_3)$ в момент схода аппарата с балки имеют вид:

$$V_y(t_3) = \frac{dv_c}{dt} \Big|_{t=t_3} = \frac{r_2}{a} [\dot{v}_1 + V_x(v_1' + v_{10}')] + \frac{r_1}{a} [\dot{v}_2 + V_x(v_2' + v_{20}')] \Big|_{t=t_3};$$

$$\omega(t_3) = -\frac{d\mathcal{G}_c}{dt} \Big|_{t=t_3} = \frac{1}{a} [\dot{v}_2' + V_x(v_2'' + v_{20}'')] - \frac{1}{a} [\dot{v}_1' + V_x(v_1'' + v_{10}'')] \Big|_{t=t_3},$$

а при учете дополнительной степени:

$$\omega(t_3) = -\dot{\mathcal{G}}_c(t_3); \quad V(t_3) = \frac{dv_c}{dt} \Big|_{t=t_3} = [\dot{v}_2 + V_x(v_2' + v_{20}')] \Big|_{t=t_3} + r_2 \dot{\mathcal{G}}_c(t_3).$$

В работе также были получены уравнения колебаний балки с движущимся по ней реактивным снарядом для случая, когда расстояние между опорами стремиться к нулю.

Пример расчета. Исходные данные: $\theta = 0^\circ$, $M = 300$ кг, $l = 10$ м, $g = 9.81$ м/с², $J = 15$ кг·м², $EI = 12 \cdot 10^6$ Н·м², $\bar{m} = 7$ кг/м, $J_0 = 2 \cdot 10^3$ кг·м², $c_0 = 5 \cdot 10^6$ Н·м, $a = 1$ м, $r_1 = 0.4$ м, $r_2 = 0.6$ м. Сила тяги считается постоянной на всем интервале движения аппарата по балке – $T = 5 \cdot 10^3$ Н. При решении задачи учитывались изгиб и поворот балки с аппаратом за счет собственного веса и предварительное искривление в форме трамплина:

$$v_0(x) = -\frac{\bar{m}g}{24EI} [6x^2l^2 - 4x^3l + x^4] + b_{tr}x^3 + c_{tr}x^4,$$

где коэффициенты, профилирующие форму трамплина, с учетом угла выхода $\theta_{tr} = 5^\circ$ и высоты подъема $h_{tr} = 0.5$ м, находятся из соотношений:

$$b_{tr} = \frac{4h_{tr} - l \cdot \text{tg} \theta_{tr}}{l^3}; \quad c_{tr} = \frac{l \cdot \text{tg} \theta_{tr} - 3h_{tr}}{l^4}.$$

При проведении расчетов учитывалось появление дополнительной степени свободы при сходе аппарата с балки. Полученные значения границ по времени интервалов движения: $t_1 = 0.346$ с, $t_2 = 1.095$ с, $t_3 = 1.149$ с, $t_4 = 2 \cdot t_3 = 2.298$ с. Число координатных функций $s = 4$; число шагов интегрирования на каждом интервале – 1000.

Кинематические параметры летательного аппарата в момент его схода с упругой направляющей балки при $t = t_3 = 1.149$ с: $V_x = 19.149$ м/с, $V_y = 1.316$ м/с, $\omega = 1.271$ рад/с, $\alpha = 3.953^\circ$.

На рис. 2 представлены начальный прогиб балки (сплошная линия) и форма балки в момент времени $t = t_3$ (пунктирная линия), то есть при сходе аппарата с балки. На рис. 3 показан прогиб балки при $x = l$ во время движения аппарата по балке и после его схода.



Рис. 2

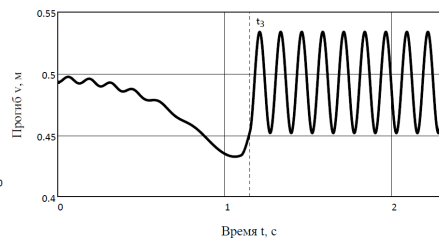


Рис. 3

На рис. 4 представлен график угла поворота φ_c относительно центра тяжести.

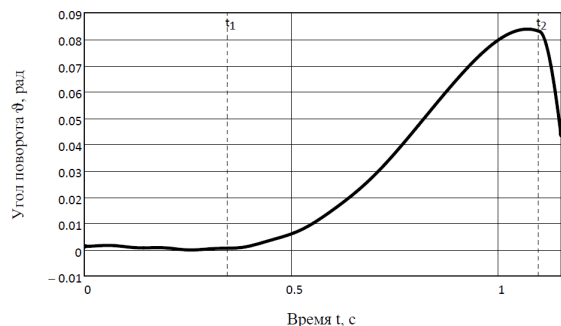


Рис. 4

Как следует из графика, при конечной стадии движения возникает эффект «сваливания» аппарата с балки, когда он начинает поворачиваться относительно второй опоры.

В работе проведено исследование необходимости учета дополнительной степени свободы при сходе аппарата с балки в зависимости от соотношения межосевого расстояния a и длины балки l . В табл. 1 приняты следующие обозначения: задача №1 – без учета расстояния между опорами, $a = 0$; задача №2 – без учета дополнительной степени свободы при сходе, $a = 1$ м, $r_1 = 0.4$ м, $r_2 = 0.6$ м; задача №3 – без учета дополнительной степени свободы при сходе, $a = 0.25$ м, $r_1 = 0.1$ м, $r_2 = 0.15$ м; задача №4 – с учетом дополнительной степени свободы при сходе, $a = 1$ м, $r_1 = 0.4$ м, $r_2 = 0.6$ м; задача №5 – с учетом дополнительной степени свободы при сходе, $a = 0.25$ м, $r_1 = 0.1$ м, $r_2 = 0.15$ м. Результаты вычисления основных кинематических параметров при сходе представлены в табл. 1.

Табл. 1. Исследование влияния межосевого расстояния a

	Задача №1	Задача №2	Задача №3	Задача №4	Задача №5
V_x , м/с	18.257	19.149	18.484	19.149	18.484
V_y , м/с	2.145	1.972	1.473	1.316	1.481
ω , рад/с	0.085	0.172	0.156	1.271	1.100
α°	6.701	5.580	4.556	3.931	4.581

Результаты расчета в задаче №1, в которой не учитывается межосевое расстояние, существенно отличается от результатов задач №3 и №5 ($a = 0.25$ м), поэтому даже если a мало по сравнению с l , межосевое расстояние следует учитывать. Исходя из результатов расчета, представленных в табл. 4, можно сделать вывод о том, что учет дополнительной степени свободы наиболее существенен при сравнимых величинах a и l (задачи №2 и №4).

При $a = 0.25$ м аппарат на конечной стадии движения не «сваливается», таким образом, при малых a можно не учитывать появление дополнительной степени свободы при сходе. Наибольшее «сваливание» происходит при больших значениях a , сравнимых с длиной балки. Наглядно это показано на рис. 5.

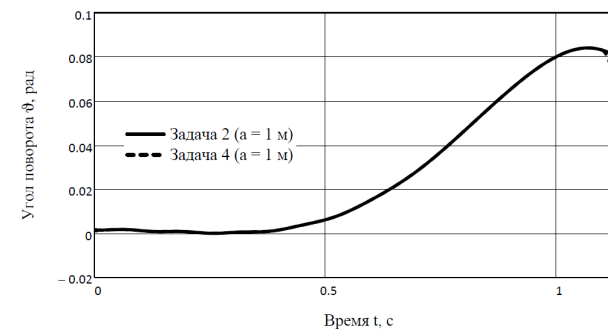


Рис. 5

При достаточно низких скоростях схода аппарата с балки (следовательно, при малых значениях силы тяги T) знаки $V_y(t_3)$ и $\alpha(t_3)$ могут стать отрицательными, что показано на рис. 6.

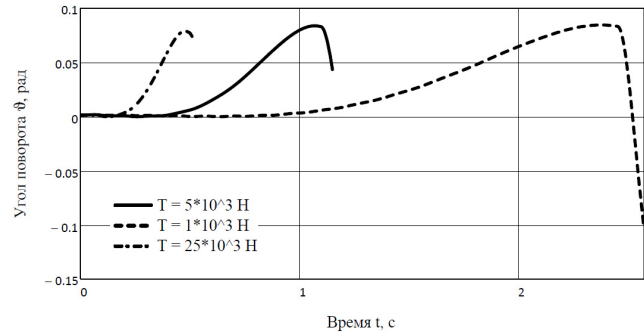


Рис. 6

Жесткость опорной пружины сильно влияет на вертикальную скорость схода и, особенно, на угловую скорость вращения аппарата. Графики зависимостей угла поворота относительно центра тяжести аппарата при различных жесткостях опорной пружины приведены на рис. 7.

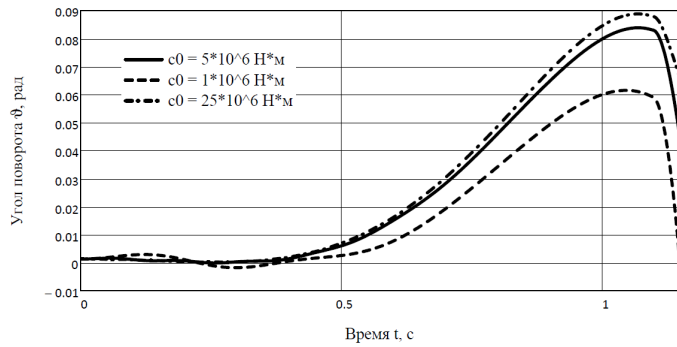


Рис. 7

Таким образом, в диссертационной работе было показано, что характер схода аппарата и его кинематические параметры зависят от многих параметров. При решении задач о динамике свободного полета аппарата после его схода необходимо учитывать данные результаты. Корректировка данных может быть осуществлена изменением начальной кривизны балки или изменением инерционных и жесткостных параметров упругой направляющей.

Во второй главе диссертации рассматривается нестационарное движение твердого тела на двух колесах (роликах) по плоской кривой. В строгой постановке получено решение нелинейной плоской задачи динамики твердого тела, катящегося на двух колесах по плоской кривой с учетом упругости шин и подвески.

Задача решается при следующих предположениях: 1) корпус тележки является абсолютно твердым телом; 2) колеса и подвеска имеют нелинейно упругие характеристики; 3) массой колес можно пренебречь (колеса

невесомые); 4) колеса катятся без проскальзывания и сила трения отсутствует; 5) заднее колесо является ведущим, а переднее – ведомым. В качестве неизвестных принимаются 4 обобщенные координаты $q_1 \dots q_4$ (рис. 8): q_1, q_2 – характеризуют упругость колес (поджатие шин), q_3, q_4 – характеризуют упругость амортизаторов колес (ход подвески). При решении задачи было принято допущение, что обобщенные координаты $q_1 \dots q_4$ являются малыми величинами по сравнению с линейными размерами тела и их значениями по сравнению с первыми и вторыми их производными можно пренебречь. Заданы коэффициенты жесткости колес (для ведущего колеса – c_1, c_2 , для ведомого колеса – c_3, c_4) и подвески (для подвески ведущего колеса – c_5, c_6 , для подвески ведомого колеса – c_7, c_8), а также коэффициенты демпфирования в подвеске $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ для ведущего и ведомого колеса соответственно. Скорость движения контактной точки заднего ведущего колеса вдоль кривой $V_A(t)$ считается известной, а тангенциальная реакция (движущая сила) $R_{A,\tau}(t)$ – неизвестной.

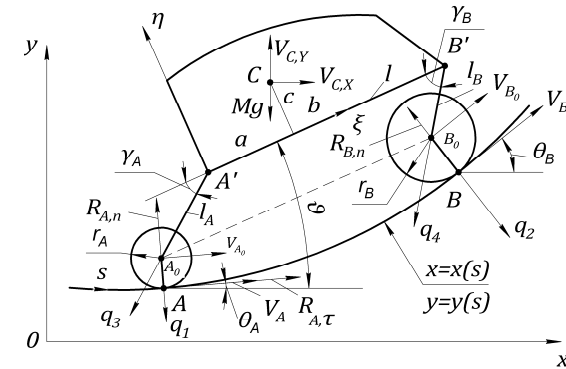


Рис. 8

Все кинематические и геометрические параметры точки A , при $s_A = s_0$ в момент времени $t = 0$, определяются по формулам:

$$\dot{V}_A = \frac{dV_A}{dt}; \quad s_A = s_0 + \int_0^t V_A(\tau) d\tau; \quad x_A = x(s_A); \quad y_A = y(s_A); \quad \omega_A = \frac{V_A}{r_A};$$

$$\theta_A = \arcsin\left(\frac{dy}{ds}\Big|_{s=s_A}\right); \quad \dot{\theta}_A = \frac{1}{\cos(\theta_A)} V_A \frac{d^2y}{ds^2}\Big|_{s=s_A};$$

При движении по горизонтальной или наклонной прямой, при $\theta_A = 0$ и $\theta_A = const$ соответственно, $\dot{\theta}_A = \ddot{\theta}_A = 0$.

Координаты и скорость центра ведущего колеса A_0 :

$$x_{A_0} = x_A - r_A \sin(\theta_A); \quad y_{A_0} = y_A + r_A \cos(\theta_A); \quad V_{A_0} = V_A - r_A \dot{\theta}_A.$$

Уравнение для нахождения координаты s_B в текущий момент времени (при условии $s_B - s_A \geq l$):

$$\begin{aligned} & (l - l_B \cos(\gamma_B) + l_A \cos(\gamma_A))^2 + (-l_B \sin(\gamma_B) + l_A \sin(\gamma_A))^2 = \\ & = \left(y(s_B) + r_B \frac{dx}{ds} \Big|_{s=s_B} - y_{A_0} \right)^2 + \left(x(s_B) - r_B \frac{dy}{ds} \Big|_{s=s_B} - x_{A_0} \right)^2. \end{aligned}$$

По найденному значению s_B вычисляются кинематические и геометрические параметры точек B и B_0 по аналогии для точек A и A_0 :

$$\begin{aligned} x_B &= x(s_B); \quad y_B = y(s_B); \quad \theta_B = \arcsin\left(\frac{dy}{ds} \Big|_{s=s_B}\right); \\ x_{B_0} &= x_B - r_B \sin(\theta_B); \quad y_{B_0} = y_B + r_B \cos(\theta_B). \end{aligned}$$

Угол поворота твердого тела относительно оси OX определяется из геометрических соотношений (рис. 8), а затем определяются координаты точек «базы» тела:

$$\begin{aligned} y_{B'} &= y_{B_0} + l_B \sin(\gamma_B + \vartheta); \quad y_{A'} = y_{A_0} + l_A \sin(\gamma_A + \vartheta); \\ x_{B'} &= x_{B_0} + l_B \cos(\gamma_B + \vartheta); \quad x_{A'} = x_{A_0} + l_A \cos(\gamma_A + \vartheta). \end{aligned}$$

Выражения для V_{B_0} и $\dot{\vartheta}$ в виду их громоздкости приводятся в краткой записи (здесь и далее коэффициенты A_i , γ_i , η_i , δ_i , ρ_i – величины, зависящие от времени и начальных условий задачи и не зависящие от обобщенных координат $q_1 \dots q_4$):

$$\dot{\vartheta} = A_1 + \gamma_1 \dot{q}_1 + \gamma_2 \dot{q}_2 + \gamma_3 \dot{q}_3 + \gamma_4 \dot{q}_4; \quad V_{B_0} = A_3 + \gamma_5 \dot{q}_1 + \gamma_6 \dot{q}_2 + \gamma_7 \dot{q}_3 + \gamma_8 \dot{q}_4.$$

Скорость V_B и значение $\dot{\theta}_B$ в краткой записи:

$$\begin{aligned} V_B &= A_5 + \gamma_9 \dot{q}_1 + \gamma_{10} \dot{q}_2 + \gamma_{11} \dot{q}_3 + \gamma_{12} \dot{q}_4; \\ \dot{\theta}_B &= A_7 + \gamma_{13} \dot{q}_1 + \gamma_{14} \dot{q}_2 + \gamma_{15} \dot{q}_3 + \gamma_{16} \dot{q}_4. \end{aligned}$$

При движении по горизонтальной или наклонной прямой, при $\theta_B = 0$ и $\theta_B = const$ соответственно $\dot{\theta}_B = 0$ и $V_{B_0} = V_B$.

Выражение для углового ускорения $\ddot{\vartheta}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} &= A_{11} + \eta_5 \ddot{q}_1 + \eta_6 \ddot{q}_2 + \eta_7 \ddot{q}_3 + \eta_8 \ddot{q}_4 + \delta_1 \dot{q}_1^2 + \delta_2 \dot{q}_2^2 + \delta_3 \dot{q}_3^2 + \delta_4 \dot{q}_4^2 + \\ &+ \delta_5 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \delta_6 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \delta_7 \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_8 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_9 \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{10} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \\ &+ \gamma_{25} \dot{q}_1 + \gamma_{26} \dot{q}_2 + \gamma_{27} \dot{q}_3 + \gamma_{28} \dot{q}_4. \end{aligned}$$

Неизвестные координаты центра тяжести тела x_C и y_C в неподвижной системе координат (рис. 8) вычисляются следующим образом:

$$x_C = x_{A'} + a \cos(\vartheta) - c \sin(\vartheta); \quad y_C = y_{A'} + a \sin(\vartheta) + c \cos(\vartheta).$$

Проекции скорости центра тяжести тела $V_{C,X}$ и $V_{C,Y}$ на оси OX и OY определяются по следующим формулам:

$$V_{C,X} = V_{A',X} - \dot{\vartheta}(y_C - y_{A'}); \quad V_{C,Y} = V_{A',Y} + \dot{\vartheta}(x_C - x_{A'})$$

После подстановки выражений для $V_{A',X} = \dot{x}_{A'}$ и $V_{A',Y} = \dot{y}_{A'}$ получаем:

$$\begin{aligned} V_{C,X} &= A_{17} + \gamma_{43} \dot{q}_1 + \gamma_{44} \dot{q}_2 + \gamma_{45} \dot{q}_3 + \gamma_{46} \dot{q}_4; \\ V_{C,Y} &= A_{19} + \gamma_{47} \dot{q}_1 + \gamma_{48} \dot{q}_2 + \gamma_{49} \dot{q}_3 + \gamma_{50} \dot{q}_4. \end{aligned}$$

Ускорения центра тяжести тела в проекциях на оси OX и OY :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{C,X} &= \dot{V}_{A',X} - \ddot{\vartheta}(y_C - y_{A'}) - \dot{\vartheta}(\dot{y}_C - \dot{y}_{A'}); \\ \dot{V}_{C,Y} &= \dot{V}_{A',Y} + \ddot{\vartheta}(x_C - x_{A'}) + \dot{\vartheta}(\dot{x}_C - \dot{x}_{A'}). \end{aligned}$$

После подстановки выражений для $\dot{V}_{A',X} = \ddot{x}_{A'}$ и $\dot{V}_{A',Y} = \ddot{y}_{A'}$ получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{C,X} &= A_{26} + \eta_{21} \ddot{q}_1 + \eta_{22} \ddot{q}_2 + \eta_{23} \ddot{q}_3 + \eta_{24} \ddot{q}_4 + \delta_{31} \dot{q}_1^2 + \delta_{32} \dot{q}_2^2 + \delta_{33} \dot{q}_3^2 + \delta_{34} \dot{q}_4^2 + \\ &+ \delta_{35} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \delta_{36} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \delta_{37} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_{38} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_{39} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{40} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \\ &+ \gamma_{67} \dot{q}_1 + \gamma_{68} \dot{q}_2 + \gamma_{69} \dot{q}_3 + \gamma_{70} \dot{q}_4; \\ \dot{V}_{C,Y} &= A_{29} + \eta_{25} \ddot{q}_1 + \eta_{26} \ddot{q}_2 + \eta_{27} \ddot{q}_3 + \eta_{28} \ddot{q}_4 + \delta_{41} \dot{q}_1^2 + \delta_{42} \dot{q}_2^2 + \delta_{43} \dot{q}_3^2 + \delta_{44} \dot{q}_4^2 + \\ &+ \delta_{45} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \delta_{46} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \delta_{47} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_{48} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_{49} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{50} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \\ &+ \gamma_{71} \dot{q}_1 + \gamma_{72} \dot{q}_2 + \gamma_{73} \dot{q}_3 + \gamma_{74} \dot{q}_4. \end{aligned}$$

Перегрузки по осям OX и OY находятся по формулам:

$$n_x = \frac{\dot{V}_{C,X}}{g}; \quad n_y = \frac{\dot{V}_{C,Y}}{g}.$$

Система уравнений движения с учетом силы тяжести имеет вид:

$$\begin{cases} m\dot{V}_{C,X} = R_{A,\tau} \cos(\theta_A) - R_{A,n} \sin(\theta_A) - R_{B,n} \sin(\theta_B); \\ m\dot{V}_{C,Y} = R_{A,\tau} \sin(\theta_A) + R_{A,n} \cos(\theta_A) + R_{B,n} \cos(\theta_B) + Mg; \\ J_C \ddot{\vartheta} = R_{A,\tau} d_{A,\tau} - R_{A,n} d_{A,n} + R_{B,n} d_{B,n}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} d_{A,\tau} &= r_A + l_A \sin(\gamma_A + \vartheta - \theta_A) + a \sin(\vartheta - \theta_A) + c \cos(\vartheta - \theta_A); \\ d_{A,n} &= l_A \cos(\gamma_A + \vartheta - \theta_A) + a \cos(\vartheta - \theta_A) - c \sin(\vartheta - \theta_A); \\ d_{B,n} &= -l_B \cos(\gamma_B + \vartheta - \theta_B) + b \cos(\vartheta - \theta_B) + c \sin(\vartheta - \theta_B). \end{aligned}$$

Нормальные реакции в точках A и B :

$$R_{A,n} = c_1 q_1 + c_2 q_1^3; \quad R_{B,n} = c_3 q_2 + c_4 q_2^3.$$

После подстановки ранее найденных выражений и преобразований система уравнений сводится к двум разрешающим уравнениям:

$$\begin{aligned} \eta_{33} \ddot{q}_1 + \eta_{34} \ddot{q}_2 + \eta_{35} \ddot{q}_3 + \eta_{36} \ddot{q}_4 + \delta_{61} \dot{q}_1^2 + \delta_{62} \dot{q}_2^2 + \delta_{63} \dot{q}_3^2 + \delta_{64} \dot{q}_4^2 + \delta_{65} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ + \delta_{66} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \delta_{67} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_{68} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_{69} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{70} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \gamma_{79} \dot{q}_1 + \gamma_{80} \dot{q}_2 + \gamma_{81} \dot{q}_3 + \\ + \gamma_{82} \dot{q}_4 + \rho_5 q_1 + \rho_6 q_1^3 + \rho_7 q_2 + \rho_8 q_2^3 = A_{32}; \\ \eta_{37} \ddot{q}_1 + \eta_{38} \ddot{q}_2 + \eta_{39} \ddot{q}_3 + \eta_{40} \ddot{q}_4 + \delta_{71} \dot{q}_1^2 + \delta_{72} \dot{q}_2^2 + \delta_{73} \dot{q}_3^2 + \delta_{74} \dot{q}_4^2 + \delta_{75} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ + \delta_{76} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \delta_{77} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_{78} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_{79} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{80} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \gamma_{83} \dot{q}_1 + \gamma_{84} \dot{q}_2 + \gamma_{85} \dot{q}_3 + \\ + \gamma_{86} \dot{q}_4 + \rho_9 q_1 + \rho_{10} q_1^3 + \rho_{11} q_2 + \rho_{12} q_2^3 = A_{33}. \end{aligned}$$

Они дополняются еще двумя уравнениями равновесия, получающимися из рассмотрения колес со стойками без связи с телом (рис. 9):

$$\begin{cases} R_{A,s} \cos(\varphi_A) + R_{A,n} = 0; \\ R_{B,s} \cos(\varphi_B) + R_{B,n} = 0, \end{cases}$$

выражения для реакций в стойках подвески имеют вид:

$$R_{A,s} = c_5 q_3 + c_6 q_3^3 + \varepsilon_1 \dot{q}_3; \quad R_{B,s} = c_7 q_4 + c_8 q_4^3 + \varepsilon_2 \dot{q}_4.$$

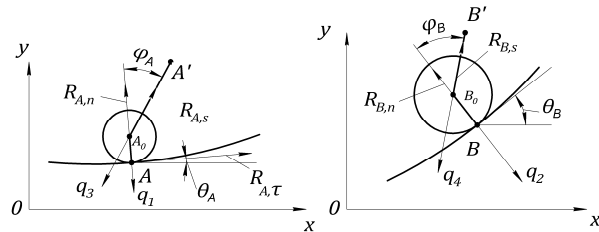


Рис. 9

После подстановки ранее найденных выражений и преобразований получаем 3-е и 4-е разрешающее уравнение:

$$\begin{aligned} \gamma_{87} \dot{q}_3 + \rho_{13} q_1 + \rho_{14} q_1^3 + \rho_{15} q_3 + \rho_{16} q_3^3 = 0; \\ \gamma_{88} \dot{q}_4 + \rho_{17} q_2 + \rho_{18} q_2^3 + \rho_{19} q_4 + \rho_{20} q_4^3 = 0. \end{aligned}$$

На основе полученных уравнений для неизвестных обобщенных координат и выражений для определений кинематических, геометрических, инерционных и динамических параметров движения твердого тела по заданной произвольной кривой была составлена расчетная программа для нахождения выше перечисленных величин.

Если не учитывать упругость шин и подвески, то задача является кинематической и она была отдельно рассмотрена в работе. Проведено исследование необходимости учета радиус колес при вычислении кинематических и геометрических параметров движения тела. Малыми радиусами колес (роликами) можно пренебрегать в пределах погрешностей 5 – 7 %, но при определении нагрузок на траекторию их размеры следует учитывать.

В качестве примера была рассмотрена задача о движении твердого тела по траектории с $R_2 = 70$ и $R_3 = 70$ (рис. 10). Учитывалось влияние гравитации. Исходные данные, принятые для расчета: $V_A = 4$ м/с, $l = 2$ м, $a = 1$ м, $b = 1$ м, $c = 1$ м, $r_A = 0.3$ м, $r_B = 0.3$ м, $\gamma_A = 90^\circ$, $\gamma_B = 90^\circ$, $l_A = 0.5$ м, $l_B = 0.5$ м, $m = 500$ кг, $J_C = 250$ кг·м², $c_1 = c_3 = 3000$ Н/м, $c_2 = c_4 = 200$ Н/м³, $c_5 = c_7 = 4000$ Н/м, $c_6 = c_8 = 300$ Н/м³, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 250$ Н/м·с. Время движения по траектории – $t_k = 44.489$ с.

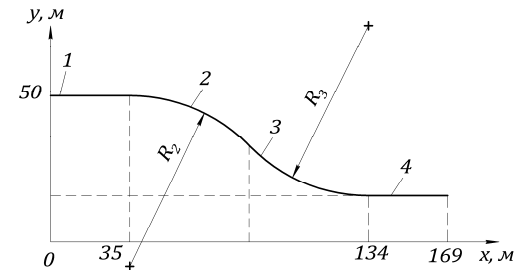


Рис. 10

На рис. 11 представлены графики изменения усилий в подвеске. На рис. 12 показаны тангенциальные и нормальные реакции в точках контакта колес с траекторией движения.

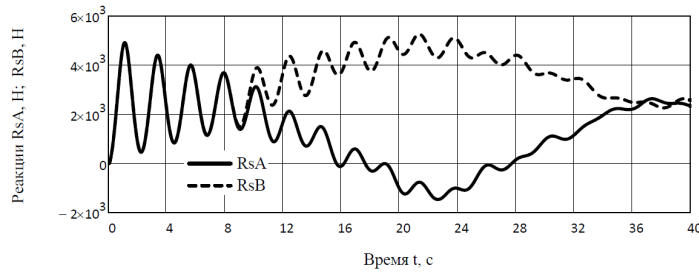


Рис. 11

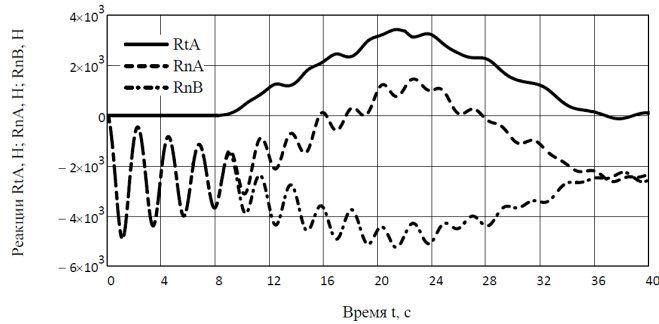


Рис. 12

В работе было исследовано влияние параметров подвески на движение тела, в частности на изменение перегрузки по оси Oy , что является важным параметром для биомеханического анализа. Варьировались жесткости $c_5 = c_7$ и $c_6 = c_8$. При одновременном увеличении или уменьшении жесткостей подвески для ведущего и ведомого колеса график изменения перегрузки качественно не изменяется – при увеличении параметров жесткости уменьшение перегрузки происходит медленнее и, наоборот, при уменьшении параметров жесткости уменьшение перегрузки происходит быстрее. Качественное изменение графика перегрузки происходит в случае варьирования параметрами подвески только одного колеса. Это позволяет, варьировав параметрами подвески и по аналогии параметрами жесткости колес не зависимо друг от друга, добиваться обеспечения нужного уровня перегрузок на рассматриваемом интервале движения, изменяя зависимости не только количественно, но и качественно.

Разработанные алгоритмы позволяют определять все необходимые параметры плоского движения тела (тележки на роликах) по произвольной криволинейной траектории с учетом упругости шин и подвески.

В третьей главе диссертации рассматривается движение тела по произвольной криволинейной поверхности в пространстве, которое совершает поступательное и вращательное движения, сопровождаемые колебаниями. Получены общие нелинейные уравнения движения с

точностью до квадратичных членов относительно обобщенных координат, представляющих упругие деформации.

Была рассмотрена пространственная изогнутая и закрученная полоса, представляющая полотно дороги с двумя направляющими линиями (рельсами), расстояние между которыми является постоянным. Геометрия этой полосы характеризуется изогнутой в двух плоскостях и закрученной нерастяжимой центральной линией $\mathbf{R}_0(s) = [X_{01}(s), X_{02}(s), X_{03}(s)]^T$, где s – длина дуги, отсчитываемая вдоль этой линии; $\mathbf{R} = [X_1, X_2, X_3]^T$ – вектор некоторой точки в неподвижной системе прямоугольных координат $O_*X_1X_2X_3$ (рис. 13). Подвижная система координат $Ox_1x_2x_3$, как сопровождающий трехгранник, скользит без отрыва со скоростью $\mathbf{V}_0(t)$ вдоль кривой $\mathbf{R}_0(s)$; оси x_1 , x_2 и x_3 направлены соответственно по касательной \mathbf{t} , нормали \mathbf{n} и бинормали \mathbf{b} к кривой $\mathbf{R}_0(s)$. Скорость $\mathbf{V}_0(t)$ считается заданной. Повороты системы $Ox_1x_2x_3$ будем характеризовать самолетными углами θ_1 , θ_2 и θ_3 , представляющими углы крена, рыскания и тангажа соответственно. Вектор углов поворота будем обозначать через $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$. Вектор координат $\mathbf{r} = [x_1; x_2; x_3]^T$ любой точки твердого тела, жестко связанного с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$, выражаются через вектор \mathbf{R} как $\mathbf{r} = \mathbf{A}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$, где $\mathbf{A} = [A_{ij}]_{3 \times 3}$ – матрица перехода от системы координат $O_*X_1X_2X_3$ к системе $Ox_1x_2x_3$.

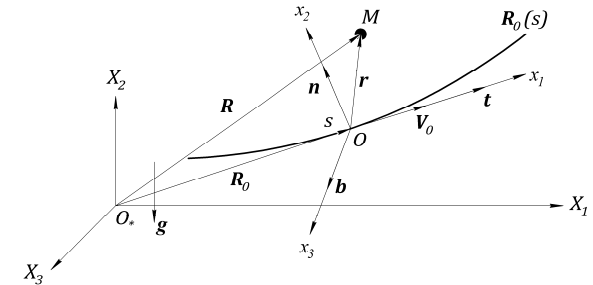


Рис. 13

Вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1; \omega_2; \omega_3]^T$ подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ в проекциях на ее оси связан с вектором углов поворота $\boldsymbol{\theta}$ дифференциальным соотношением $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\theta}}$, где \mathbf{A} – матрица, зависящая от углов θ_1 , θ_2 и θ_3 .

В общем случае, когда связанное с системой $Ox_1x_2x_3$ тело является упругим, то за счет упругости появляются неизвестные относительные

перемещения, которые будем описывать вектором $\mathbf{u} = [u_1; u_2; u_3]^T$, проекции которого зависят от координат и от времени – $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$, $k=1,2,3$. В этом случае радиус-вектор точки упругого тела обозначим $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$.

В геометрически нелинейных задачах на основании метода Ритца и метода конечных элементов перемещение упругого тела в общем случае может быть представлено в виде:

$$\mathbf{u} = \sum_i q_i \boldsymbol{\varphi}_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i q_j \boldsymbol{\Psi}_{ij},$$

где $q_i(t)$ – обобщенные координаты; $i, j = 1, 2, \dots, n$; $\boldsymbol{\varphi}_i(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{\Psi}_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ – заданные вектор-функции, которые выбираются в классе возможных перемещений тела согласно принятой расчетной модели (стержень, пластина и пр.) с учетом определенных допущений.

Скорость и ускорение точки упругого тела, связанного с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$, записываются в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}}; \quad \mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{V}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_0; \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

где \mathbf{a}_0 – ускорение точки O . Для удобства дальнейших вычислений векторное произведение заменяется матричным по правилу $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \overset{\vee}{\mathbf{a}} \mathbf{b}$, где верхним знаком \vee обозначается кососимметричная матрица, образованная из компонент соответствующего вектора.

Направляющее полотно дороги, его координаты $X_{01}(s)$, $X_{02}(s)$, $X_{03}(s)$ и углы $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$, $\theta_3(s)$ считаются заданными. Они связаны между собой дифференциальными соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{dX_{01}}{ds} &= c_1 c_3; \quad \frac{dX_{02}}{ds} = s_1 s_2 - c_1 c_2 s_3; \quad \frac{dX_{03}}{ds} = c_1 s_2 + s_1 c_2 s_3; \\ s_k &= \sin(\theta_k); \quad c_k = \cos(\theta_k); \quad k=1,2,3. \end{aligned}$$

Таким образом, если движущееся по направляющему полотну тело, связанное с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$, является абсолютно жестким, то задача определения скорости и ускорения (и, следовательно, перегрузки) в любой заданной точке тела $M(x_1, x_2, x_3)$ и в заданный момент времени t является задачей кинематики. После определения ускорения $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3, t)$ из уравнений динамического равновесия твердого тела с учетом силы тяжести, зависящих от углов θ_1 , θ_2 и θ_3 , определяются главный вектор \mathbf{P} и главный момент \mathbf{M} сил реакции и затем – сами

реакции.

Если учитывается относительное движение, обусловленное упругостью и демпфированием роликов и амортизации, а также упругим деформированием присоединенных масс, то задача существенно усложняется. При заданных векторных функциях $\mathbf{R}_0(s)$, $\boldsymbol{\theta}(s)$, скорости $\mathbf{V}_0(t)$ и найденной из кинематических условий векторной функции $\boldsymbol{\omega}(t)$ задача сводится к задаче динамики относительно параметров (обобщенных координат), характеризующих неизвестную векторную функцию $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$.

В задаче предполагается, что тело связано с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$, которая в свою очередь, при скольжении по криволинейной линии $\mathbf{R}_0(s)$ связана с последней по координатам и углам поворота только в одной точке s , совпадающей в данный момент времени с задней ведущей осью тележки. В действительности в случае двухосной тележки со свободно поворачивающейся относительно центра передней осью, движущейся при криволинейной пространственной направляющей, ролики задней и передней осей будут находиться в разных точках кривой $\mathbf{R}_0(s)$ с различными углами наклона касательной $\mathbf{t}(s)$. Локальная кривизна направляющей между осями тележки окажет некоторое влияние на ее угловое положение в данный момент времени и, в результате, на кинематику и динамику движения тележки. Это влияние будет пренебрежимо малым, если расстояние между осями значительно меньше радиуса кривизны направляющей.

Уравнения движения системы записываются в виде:

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_0 - \tilde{\mathbf{L}}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{\mathbf{L}}_j \ddot{q}_j - (\boldsymbol{\omega} \tilde{\mathbf{L}}_0 + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{L}}_j \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \mathbf{L}_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k &= \mathbf{P}; \\ -\tilde{\mathbf{L}}_0^T \mathbf{a}_0 + \tilde{\mathbf{I}}_{00} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{0j} \ddot{q}_j + (\boldsymbol{\omega} \tilde{\mathbf{I}}_{00} + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{I}}_{0j} \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \tilde{\mathbf{S}}_{0,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k &= \mathbf{M}; \\ \tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{a}_0 + \tilde{\mathbf{S}}_{0i}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{m}_{ij} \ddot{q}_j - (\boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{I}}_{0i}^T + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{ij}^T \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \tilde{m}_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} &= Q_i, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{P}_g + \mathbf{P}_R$; \mathbf{P}_R – вектор сил реакций; $\mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_R$; \mathbf{M}_R – вектор моментов от реакций; $Q_i = Q_{g,i}$. Векторы \mathbf{P}_g , \mathbf{M}_g и $Q_{g,i}$ вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{P}_g = \int_V \mathbf{g} dm; \quad \mathbf{M}_g = \int_V \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{g} dm; \quad Q_{g,i} = \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \mathbf{g} dm.$$

В уравнениях движения инерционные характеристики, отмеченные сверху волной, вычисляются для деформированного тела и зависят от обобщенных координат в силу того, что от них зависят функции $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i$. Потенциальная энергия деформации упругого тела записывается в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T) dV,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}; \varepsilon_{22}; \varepsilon_{33}; \gamma_{12}; \gamma_{23}; \gamma_{31}]^T$, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}; \sigma_{22}; \sigma_{33}; \tau_{12}; \tau_{23}; \tau_{31}]^T$ – векторы, составленные из компонент деформаций и напряжений; вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ представляет начальные нестесненные температурные или технологические деформации; \mathbf{C} – симметричная матрица коэффициентов упругости, входящих в уравнения закона Гука $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)$. Величина вектора массовых сил тяготения вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{g} = -g_0 \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} = \Lambda [0; 1; 0]^T,$$

где g_0 – среднее значение ускорения свободного падения у поверхности Земли; \mathbf{v} – единичный вектор, направленный вдоль оси X_2 инерциальной системы координат $O_* X_1 X_2 X_3$ и записанный в проекциях на оси подвижной системы. Гравитационные силы и моменты описываются следующими выражениями:

$$\mathbf{P}_g = -g_0 m \mathbf{v}; \quad \mathbf{M}_g = -g_0 \check{\check{\mathbf{L}}}_0 \mathbf{v}; \quad Q_{g,i} = -g_0 \check{\check{\mathbf{L}}}_i^T \mathbf{v}.$$

В результате получается замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений: шесть уравнений первого порядка для шести компонент векторов \mathbf{P}_R , \mathbf{M}_R и n уравнений для обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n .

Если движущееся по направляющему полотну тело, связанное с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$ является абсолютно жестким, то уравнения движения переписываются следующим образом:

$$m \mathbf{a}_0 - \check{\check{\mathbf{L}}}_0 \check{\check{\boldsymbol{\omega}}} - \check{\check{\boldsymbol{\omega}}} \check{\check{\mathbf{L}}}_0 \check{\check{\boldsymbol{\omega}}} = \mathbf{P}; \quad -\check{\check{\mathbf{L}}}_0^T \mathbf{a}_0 + \check{\check{\mathbf{I}}}_{00} \check{\check{\boldsymbol{\omega}}} + \check{\check{\boldsymbol{\omega}}} \check{\check{\mathbf{I}}}_{00} \check{\check{\boldsymbol{\omega}}} = \mathbf{M}.$$

При известных векторах \mathbf{V}_0 , $\boldsymbol{\omega}$, полученных при решении кинематической задачи, из выше приведенных уравнений определяются главный вектор \mathbf{P} и главный момент \mathbf{M} сил реакции и затем – сами реакции.

В работе проведено геометрическое моделирование параметров двухосной тележки для установления ее связи с осями подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$. Поскольку передняя ведомая ось может свободно поворачиваться относительно задней ведущей оси, то заменяем переднюю

ось тележки срединной точкой, которая движется по центральной линии $\mathbf{R}_0(s)$ (рис. 14).

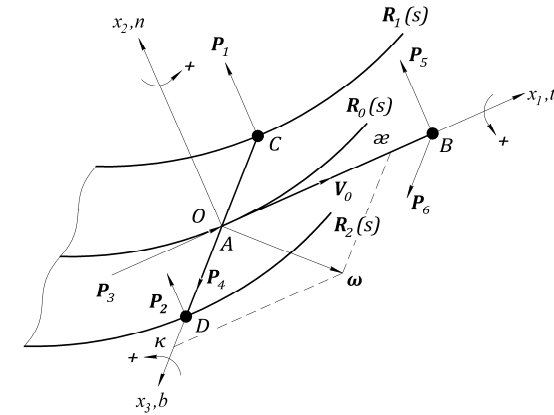


Рис. 14

Центр подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ связан с точкой A , являющейся серединой задней ведущей оси $CD = 2a$. Данная ось располагается вдоль оси x_3 , то есть по бинормали. Продольную связь $AB = l$, которая перпендикулярна оси CD , направлена по касательной. Точка B моделирует переднюю ведомую ось и ее ролики. Точки C и D моделируют ролики ведущей оси. Точка B движется по центральной линии $\mathbf{R}_0(s)$, точки C и D двигаются по эквидистантам к кривой $\mathbf{R}_0(s)$ и задаются соответственно векторами $\mathbf{R}_1(s)$ и $\mathbf{R}_2(s)$, так как полотно является жестким и расстояния AD и AC остаются постоянными.

На полотно со стороны тележки действуют силы реакции, которые входят в выражения для \mathbf{P} и \mathbf{M} (рис. 14). Со стороны задней ведущей оси – реакции \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 (приложены в точках C и D соответственно, направлены по нормали), реакция \mathbf{P}_3 (движущая сила, приложена в точке A , направлена по касательной) и реакция \mathbf{P}_4 (приложена в точке A , направлена по бинормали, является суммарной от роликов C и D). Со стороны передней ведомой оси – реакция \mathbf{P}_5 (приложена в точке B , направлена по нормали) и реакция \mathbf{P}_6 (приложена в точке B , направлена по бинормали).

Приведем метод оценки влияния локальной кривизны направляющей между осями тележки. Положение точек A и B характеризуется радиус-векторами \mathbf{R}_A и \mathbf{R}_B соответственно, выражения для которых имеют вид (рис. 15): $\mathbf{R}_A = [X_{A1}; X_{A2}; X_{A3}]^T$; $\mathbf{R}_B = [X_{B1}; X_{B2}; X_{B3}]^T$. Введем вектор $\Delta \bar{\mathbf{R}}$, который характеризует разность соответствующих координат точек A

и $B: \Delta \bar{\mathbf{R}} = [X_{B1} - X_{A1}; X_{B2} - X_{A2}; X_{B3} - X_{A3}]^T = [\Delta \bar{X}_1; \Delta \bar{X}_2; \Delta \bar{X}_3]^T$. Будем считать, что в пределах длины l , кривизна $\mathbf{R}_0(s)$ мала и, соответственно, малы углы между направлением \vec{l} и касательной к дуге AB , в силу чего $s_B - s_A \approx l$. При этом допущении угол между осями x_1 и \bar{x}_1 будет малым и $l = |\Delta \bar{\mathbf{R}}| = \sqrt{\Delta \bar{X}_1^2 + \Delta \bar{X}_2^2 + \Delta \bar{X}_3^2}$ считается равным расстоянию между задней (A) и передней (B) осями тележки.

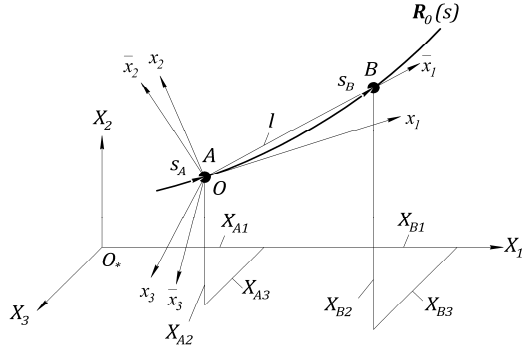


Рис. 15

В данном случае при учете кривизны направляющей поверхности (полотна) с телом (тележкой) будет связана система координат $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. Углы поворота этой системы будем обозначать как

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1; \bar{\theta}_2 = \theta_2 + \Delta\theta_2; \bar{\theta}_3 = \theta_3 + \Delta\theta_3.$$

Матрицу перехода от системы $O^*X_1X_2X_3$ к подвижной системе $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ будем обозначать через $\bar{\Lambda}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3)$. С точностью до линейных членов с $\Delta\theta_2$ и $\Delta\theta_3$ при $\Delta\theta_1 = 0$ получим:

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3.$$

Уравнение для вектора $\bar{\mathbf{r}}$ в точке B $\bar{\mathbf{r}}_B = \bar{\Lambda} \Delta \bar{\mathbf{R}}$ при $\bar{x}_{1B} = l$, $\bar{x}_{2B} = 0$, $\bar{x}_{3B} = 0$ с учетом запишем в виде:

$$\left[\Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3 \right] \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}_1 \\ \Delta \bar{X}_2 \\ \Delta \bar{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_{10} + l_{12} \Delta\theta_2 + l_{13} \Delta\theta_3 = l; \\ l_{20} + l_{22} \Delta\theta_2 + l_{23} \Delta\theta_3 = 0; \\ l_{30} + l_{32} \Delta\theta_2 + l_{33} \Delta\theta_3 = 0, \end{cases}$$

откуда определяются $\Delta\theta_2$ и $\Delta\theta_3$. В результате с учетом найденных значений $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$ определяется переходная матрица $\bar{\Lambda}$ для подвижной системы

координат $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, которая по сравнению с матрицей Λ учитывает влияние кривизны полотна дороги на участке $s_B - s_A \approx l$.

Разработана методика, учитывающая относительное движение упругоприсоединенных масс для движущейся тележки. За счет их учета можно в рассматриваемую модель тела ввести перемещения опорных устройств с закрепленными на них пассажирами.

При наличии упругоприсоединенных масс решение задачи строится в виде полной системы уравнений при учете относительного движения с перемещениями $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ для различных механических моделей. Примеры механических моделей подобных систем приведены на рис. 16. Данные модели могут быть прикреплены в любой точке тела и совершать относительные движения в любой плоскости. Характеристики упругости механических моделей могут быть нелинейными. Так же может быть учтено наличие демпфирования в подобных системах с учетом их возможных нелинейных характеристик. Для каждой механической модели выбирается система вектор-функций $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $\Psi_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ и решается система уравнений движения тела в общем виде.

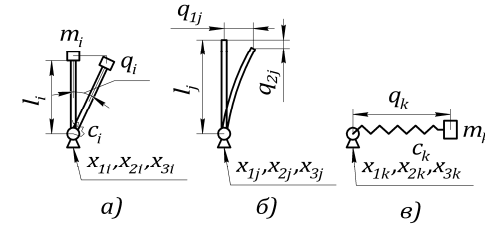


Рис. 16

За счет упругости и демпфирования роликов тележка будет совершать дополнительные движения как твердое тело с 5-ю степенями свободы относительно подвижной системы координат $Ax_1x_2x_3$ или $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. В качестве обобщенных координат, представляющих эти движения, будем рассматривать: перемещения $q_{0_2} = u_{0_2}$, $q_{0_3} = u_{0_3}$ полюса (точки A) вдоль координатных осей x_2 , x_3 (или \bar{x}_2 , \bar{x}_3) и углы поворота тележки $q_{0_4} = \Delta\tilde{\theta}_1$, $q_{0_5} = \Delta\tilde{\theta}_2$, $q_{0_6} = \Delta\tilde{\theta}_3$ в квадратичном приближении относительно осей x_1 , x_2 , x_3 (или относительно осей \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3) (рис. 17). В результате точки A , B , C и D , которые по-прежнему связаны с траекторией движения, смещаются в точки A' , B' , C' и D' , которые в данном случае характеризуют положение тележки после введения упругостей роликов, то есть $A'B' = l$ и $C'D' = 2a$ (смещения точек C и D по оси x_3 или \bar{x}_3

равны). В этом случае вектор дополнительных перемещений твердого тела, обусловленных упругими деформациями роликов, будет иметь вид:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=2}^6 q_{0i} \Phi_{0i} + \frac{1}{2} \sum_{i=4}^6 \sum_{j=4}^6 q_{0i} q_{0j} \Psi_{0ij}.$$

При использовании подвижной системы координат $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ вместо $Ax_1x_2x_3$ необходимо выполнить замену $x_i \rightarrow \bar{x}_i, i = 1, 2, 3$.

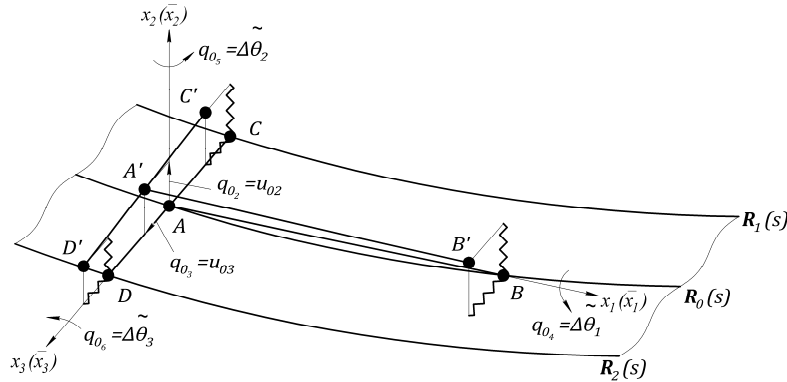


Рис. 17

В общем случае при физически нелинейных деформациях, включая возможные зазоры, потенциальная энергия роликов тележки записывается в обобщенных координатах как

$$\Pi^P = \Pi^P(q_{0_2}, q_{0_3}, q_{0_4}, q_{0_5}, q_{0_6}).$$

При малых упругих деформациях роликов (в пределах закона Гука) и малых углах поворота тела, обусловленных этими деформациями, будем иметь:

$$\Pi^P = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 k_{ij}^P q_{0i} q_{0j} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_0^T \mathbf{K}_0^P \mathbf{q}_0,$$

где $\mathbf{K}_0^P = [k_{ij}^P]$ при $i, j = 2 \dots 6$ – матрица коэффициентов жесткости,

$$\mathbf{q}_0 = [q_{0_2}, q_{0_3}, q_{0_4}, q_{0_5}, q_{0_6}]^T.$$

В общем случае при наличии сил демпфирования вариация их работы записывается в следующем виде:

$$\delta A_0^P = -\delta \mathbf{q}_0^T \mathbf{D}_0^P \dot{\mathbf{q}}_0,$$

где $\mathbf{D}_0^P = [d_{ij}^P]$ при $i, j = 2 \dots 6$ – матрица коэффициентов демпфирования.

Вектор перемещений тележки, обусловленный податливостью роликов, складывается с вектором относительных упругих перемещений присоединенных масс, характеризуемых обобщенными координатами $q_1, q_2 \dots q_n$, и суммарный вектор обозначается через \mathbf{u} . В результате, с учетом податливостей роликов вектор \mathbf{u} будет выражаться через обобщенные координаты $q_{0_2}, q_{0_3}, \dots, q_{0_6}, q_1, q_2 \dots q_n$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Разработана математическая модель и решена задача о колебаниях упругой направляющей балки с движущимся по ней летательным аппаратом или реактивным снарядом на двух опорах. Проведен анализ расчета кинематических параметров полета снаряда или аппарата после схода с упругой направляющей балки.
2. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений и решена плоская нелинейная задача о движении тела на двух колесах по произвольной кривой с учетом упругости шин и подвески.
3. Проведен анализ влияния жесткости подвески и податливости шин на характер изменения перегрузки по времени и анализ влияния радиусов колес и других параметров на реакции движущегося тела.
4. Разработана новая общая математическая модель для расчета движения тела на упруговязких роликах по произвольной двухрельсовой изогнутой и закрученной пространственной направляющей с учетом относительного движения упругих присоединенных масс.

С учетом разработанной методики расчета динамических нагрузок (реакций движущегося тела) в качестве дальнейшего исследования темы можно построить алгоритм, позволяющий проектировать и моделировать криволинейную направляющую поверхность, которая удовлетворяет определенному набору кинематических, прочностных и биомеханических критериев.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых научных изданиях и журналах:

1. Русских С.В. «Движение твердого тела на двух колесах по плоской кривой» // журнал «Известия ВУЗов. Машиностроение», №2 (647) / 2014 г., стр. 52-58.
2. Русских С.В. «Колебания упругой направляющей балки с движущимся по ней реактивным снарядом» // журнал «Известия ВУЗов. Авиационная техника», №1 / 2014 г., стр. 78-80.
- Russkikh S.V. «Vibrations of an elastic guide beam with a missile moving along it» // Russian Aeronautics (Iz VUZ), Vol. 57, Issue 1 / January 2014, pp. 107-110.

3. Русских С.В. «Определение начальных условий для задачи динамики полета летательного аппарата после его схода с упругой направляющей балки» // журнал «Вестник МАИ», том 21, №2 / 2014 г., стр. 129-138.

В других научных изданиях и журналах:

4. Русских С.В. «Динамика упругой направляющей балки с движущимся по ней реактивным снарядом». В сборнике материалов XVIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (13 – 17 февраля 2012 г., Ярополец, Московская Область, РФ), том 1, стр. 154.

5. Гнездилов В.А., Русских С.В. «Динамика снаряда, движущегося по упругой направляющей балке». В сборнике материалов Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике – 2012» (17 – 20 апреля 2012 г., Москва, РФ), стр. 210.

6. Русских С.В. «Динамика схода с упругой направляющей балки летательного аппарата на двух скользящих опорах». В сборнике материалов 12-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2013» (12 – 15 ноября 2013 г., Москва, РФ), стр. 244.

7. Русских С.В. «Исследование параметров движения твердого тела на двух упругих колесах по плоской кривой с учетом подвески». В сборнике материалов XX международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (17 – 21 февраля 2014 г., Кременки, Калужская Область, РФ), стр. 165.

8. Русских С.В. «Уравнения движения твердого тела по плоской кривой на двух колесах с упругой подвеской». В сборнике материалов Международной научно-технической конференции имени Леонардо да Винчи, №2 (21 – 24 мая 2014 г., Мюльхаузен, Тюрингия, Германия), стр. 70-83.

9. Гнездилов В.А., Русских С.В. «Исследование динамики движения и схода с направляющей балки реактивного снаряда на двух опорах». В сборнике материалов XIX международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация» (29 июня – 06 июля 2014 г., Анапа, Краснодарский Край, РФ), стр. 80-81.

Множительный центр МАИ (НИУ)

Заказ от 03.10.2014 г.

Тираж 100 экз.