

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



ДО НГОК ДАТ

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МОМЕНТНЫХ УПРУГИХ
ПЛАСТИНАХ**

Специальность: 1.1.8. - Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Тарлаковский Дмитрий Валентинович

Москва – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ	10
ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ МОМЕНТНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН	21
2.1. Начально-краевые задачи в произвольной системе координат	21
2.2 Начально-краевые задачи в прямоугольной декартовой системе координат	29
ГЛАВА 3. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ШАРНИРНО ОПЕРТЫХ ПЛАСТИН	38
3.1. Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины – модель 3.....	38
3.2. Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины – модель 2.....	56
3.3. Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины – модель 1.....	77
3.4. Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины – общая модель	99
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	124
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	125

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время как в стране, так и за рубежом наблюдается растущий интерес к неклассическим моментным средам, особенно к моделям, учитывающим независимый угол поворота. Среди них наибольшее распространение получила модель Коссера. При исследовании упругих пластин большинство современных работ сосредоточено на задачах статики.

Тем не менее, из-за сложности рассматриваемых проблем количество исследований, посвящённых нестационарным процессам, особенно в тонкостенных элементах конструкций, остаётся ограниченным. Для исследовательского содержания данной диссертации необходимо обратить внимание на значимые исследования некоторых зарубежных авторов, таких как: Cosserat E., Kirchhoff G., Timoshenko S., Koreneva E. B., Leonenko D. V., Nowacki, W., Green A.E., Naghdi P.M., Yokoo Y., Matsunaga H., Vekua I.N., Carrera E., Lamberti A., и т. Д [89-93, 97-101, 109-117]. На национальном уровне значительный вклад в эту область внесли такие исследователи, как: Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Земсков А.В., Рабинский Л.Н., Келлер И.Е., Михайлова Е.Ю., Саркисян, С. О., Старовойтов, Э. И., Товстик П.Е., Вахтерова Я.А., и т. д.

Особого внимания заслуживает работа [69, 102] Тарлаковского Д.В. и Май Куок Чиен, в которой были сформулированы начально-краевые задачи для упругих оболочек с произвольными моментами на основе функции Гамильтона. Уравнения движения для таких сферических оболочек представлены в [32] с использованием методов, аналогичных тем, что применяются для классических оболочек, описанных в [10-12].

В настоящем исследовании рассматривается прямоугольная упругая пластина с моментами, описанная в прямоугольной декартовой системе координат. Физические соотношения введены напрямую в уравнения движения - через

выражения внутренних силовых факторов в зависимости от кинематических параметров.

При решении задачи прогиб представлен в виде двойного тригонометрического ряда по собственным функциям оператора Лапласа, а углы поворота разложены в ряды по производным этих функций. При построении модели обоснованы граничные условия. Начальные задачи сведены к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложений. Интегрирование этих систем проводится численно. Суммирование рядов осуществляется с заданной точностью в норме непрерывности.

В качестве примера приведена задача с нормальной нагрузкой, изменяющейся во времени и заданной в виде функции Хевисайда. Расчёты выполнены для случая, когда нагрузка приложена в центре квадратной пластины, выполненной из композитного материала [8, 27].

Актуальность темы исследования. В настоящее время наиболее исследованными являются задачи о распространении нестационарных возмущений в классических упругих средах. При этом практически отсутствуют публикации по проблеме распространения нестационарных волн в упругих средах с учетом внутреннего момента количества движения (моментные среды). Наличие внутреннего момента количества движения связано с тем, что сплошная среда с микроскопической точки зрения состоит из частиц, обладающих согласованным моментом количества движения даже при нулевой макроскопической скорости. К таким средам относятся гранулированные среды, среды с гиромагнитными свойствами, магнитные жидкости, жидкие кристаллы и т.д. Исследования особенностей распространения нестационарных волн в тонкостенных пластинах с учетом моментных свойств среды в литературе практически отсутствуют. Известны только некоторые публикации по этим вопросам для стержней. Поэтому тематика диссертации актуальна.

Целью диссертационной работы является выявление качественных и количественных отличий напряженно-деформированного состояния моментных прямоугольных пластин по сравнению с классическими моделями.

Научная новизна диссертационной работы.

1. Впервые фактически исследование нестационарных процессов в тонкостенных моментных упругих элементах конструкций за исключением стержней проводится впервые.

2. Получены новые начально-краевые задачи в произвольной системе координат для однородной изотропной моментной упругой пластины.

3. Построены нестационарные модели пластин - простейшая модель.

4. Построены нестационарные модели пластин - усложненные модели.

5. Построены нестационарные модели пластин - общая модель.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в разработке и совершенствованию методов анализа нелинейных процессов в тонкостенных конструкциях с моментной упругостью, находящихся под воздействием внешних нагрузок, изменяющихся во времени. Одновременно рассматриваются применения этих методов для исследования влияния параметров материала на поведение конструкций с моментной упругостью.

Полученные результаты могут быть эффективно использованы в инженерных методах расчёта тонкостенных конструкций, особенно при проектировании элементов авиационно-космической техники и крупномасштабных сооружений, где требования к прочности и устойчивости являются критически важными.

Методы исследования. Вариационное уравнение Гамильтона используется для описания поведения моментной упругой пластины в трёхмерном пространстве. Путём линеаризации перпендикулярно центральной поверхности выводится уравнение Гамильтона для пластины. На основе этого уравнения строятся

уравнения движения пластины под действием общих сил, выражающие связь между этими силами и деформационными характеристиками кинематических компонентов. Соотношение между общими силами определяется на основе физических законов, характерных для анизотропных моментных сред.

Для решения задачи прогиб описывается двойственными тригонометрическими функциями, основанными на операторе Лапласа, а углы поворота разлагаются в ряды по производным этих функций. Задача формулируется так, чтобы граничные условия были полностью удовлетворены. Таким образом, системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами рядов формулируются как задачи Коши. Интегральное решение системы выполняется численно, а сумма рядов вычисляется с заданной точностью по критерию непрерывности.

Основные результаты работы, выносимые на защиту.

1. Установление вариационного уравнения Гамильтона для моментной упругой пластины в трёхмерном пространстве.
2. Разработка методов решения начально-краевых задач для моментных упругих пластин.
3. Постановка начально-краевых задач для моментных упругих пластин в криволинейной системе координат и в прямоугольной декартовой системе координат.
4. Результаты решения начально-краевых задач для прямоугольных шарнирно опертых моментных упругих пластин.

Достоверность и обоснованность результатов. Точность и достоверность результатов обеспечиваются применением методов моделирования в области механики деформируемого твердого тела и сплошных сред, получивших широкое признание в научно-исследовательской практике. Эффективность методов подтверждена также решением начально-краевых задач. Модель деформируемого

твёрдого тела тестируется также на примере конкретной задачи о моментной упругой пластине, включая процесс построения модели и решения соответствующей начально-краевых задач. Кроме того, для оценки адекватности предлагаемых в диссертации моделей и методов решения рассматриваются и другие ситуации, связанные с прямоугольных шарнирно опертых моментной упругой пластиной.

Апробация основных результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская обл., 2023, 2024, 2025 г.г.).

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2023, 2025 г.г.).

- Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов: материалы Международной научно-практической конференции, посвященная 70-летию Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта – Белорусский государственный университет транспорта XII, Республика Беларусь, г. Гомель – 2023.

- Проблемы безопасности на транспорте: материалы XIV Международной научно-практической конференции, посвященная пятилетке качества - Белорусский государственный университет транспорта XII, Республика Беларусь, г. Гомель – 2025.

- 51 международная школа-конференция «Актуальные проблемы механики», Великий Новгород, 2024г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3-х статьях в журналах, включенных в Перечень ВАК РФ, а также в 8-ти тезисах докладов.

Личный вклад.

Результаты, изложенные в публикациях [14-24] в соавторстве получены автором лично. А именно в них, введена классификация различных моделей нестационарных задач об изгибе различных моделей упругих моментных пластин по степени их сложности: основная модель (без дополнительных гипотез), модель 1 (без учета поперечного обжатия), модель 2 (использование гипотезы типа Кирхгофа), модель 3 (применяются оба последних предположения); на примере прямоугольных свободно опертых пластин приведены результаты расчеты задач о нестационарном изгибе для указанных моделей.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 117 наименований. Общий объем диссертации – 138 страницы, включая 132 рисунка.

Во введении указаны цель диссертационной работы и актуальность темы диссертации, методы исследования, раскрыты научная новизна и практическая значимость диссертации, перечислены основные результаты работы, а также представлены сведения об апробации и дано краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе представлен анализ научных публикаций, посвящённых проблематике, рассматриваемой в диссертации.

Во второй главе получены уравнения движения, физические соотношения для начально-краевых задач в произвольной системе координат и в прямоугольной декартовой системе координат.

В третьей главе представлены решения начально-краевых задач для прямоугольных шарнирно опертых пластин при различных моделях, которые исходя из уравнений, выведенных в второй главе.

В третьей главе результаты моделирования представлены в виде анализа и графики, которые наглядно иллюстрируют природу явления и дают основу как для качественной, так и для количественной оценки при воздействии внешних нагрузок на моментную упругую пластину.

В заключении приведены основные результаты, полученные в диссертации.

ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

В последние десятилетия механика пластин и оболочек достигла значительных успехов, отражая тенденцию развития тонкостенных конструкций в таких высокотехнологичных областях, как аэрокосмическая промышленность, судостроение, гражданское строительство, атомная энергетика и микроэлектроника [34, 51]. Эти структурные системы обладают выдающимися преимуществами с точки зрения соотношения прочности к массе, многонаправленной несущей способности и гибкости в оптимизации формы. Однако из-за малой толщины геометрических размеров задачи, связанные с вибрацией, устойчивостью и прочностью конструкций, становятся чрезвычайно сложными, что требует разработки нелинейных теоретических моделей и современных высокоточных методов расчёта.

В истории механики пластин и оболочек классические теории, прежде всего теория Кирхгофа–Лява [35, 36, 48, 76, 83, 94], сыграли фундаментальную роль. Эти теории основаны на геометрическом предположении, что нормальные сечения с нейтральными поверхностями до деформации остаются ортогональными после деформации, игнорируя при этом влияние деформации поперечного сечения. Такой подход значительно упрощает математическую модель и аналитический метод, но обнаруживает очевидные ограничения при применении к многослойным структурным системам, анизотропным материалам или объектам со сложной микроструктурой, где влияние сдвиговой деформации и неклассических эффектов становится пренебрежимо малым.

В рамках современной тенденции развития механики сплошных сред многими учёными был предложен ряд неклассических теорий, призванных преодолеть присущие традиционной механике сплошных сред ограничения. Среди них модель Коссера считается основополагающей, поскольку она позволяет учитывать независимые вращательные степени свободы материальных элементов в дополнение к поступательному смещению, тем самым более точно воспроизводя

механическое поведение материалов со сложной микроструктурой; эта модель в настоящее время широко применяется при анализе как статики, так и динамики тонких пластин и оболочек. Параллельно с этим, теория микрополяризации расширяет описательную основу механики сплошных сред, предполагая, что каждая материальная точка характеризуется не только вектором смещения, но и вектором вращения, что позволяет более полно представить микроскопические эффекты, наблюдаемые в композитах, гранулированных или пористых материалах. Работы Саркисяна С. О. [59-63] являются важными руководящими вкладами в этой области. Теория Коссера для оболочечно-балочных конструкций и формулы динамического анализа были предложены Rubin M.V. в литературе [106-108]. Что касается решения, Birsan M. [85, 86] рассмотрел решение Сен-Венана, примененное к задачам Коссера для оболочечных конструкций с начальными нагрузками. В отношении динамических эффектов исследования Саркисяна С.О. и Саркисяна А.А. [54-58] были сосредоточены на свободных колебаниях балок и упругоупругих пластин. Тарлаковский Д.В. и Май Куок Чиен [37-39, 53, 70-74] решили задачу изгиба балки под действием нестационарных нагрузок с использованием различных моделей. Кроме того, была разработана теория моментной асимметрии, позволяющая преодолеть излишнюю симметрию в классических моделях, тем самым более полно описывая механизм деформации и механическую реакцию пластин и оболочек при сложном воздействии внешних нагрузок.

В целом, несмотря на наличие множества глубоких исследований статических задач в рамках неклассических моделей, число исследований, связанных с нестационарными процессами в тонкостенных конструкциях, по-прежнему относительно невелико. Как уже подчеркивалось ранее: «Число публикаций, посвященных нестационарным процессам в тонкостенных элементах конструкций, в силу сложности их исследования ограничено». Основная причина кроется в сложности задачи, в которой сочетание геометрической хрупкости, микроструктурных эффектов и нелинейных динамических граничных условий

существенно увеличивает сложность построения математической модели и реализации метода решения [1, 7, 25, 26].

Это показывает, что всё ещё существуют значительные пробелы в исследованиях, которые необходимо заполнить, особенно в контексте интеграции неклассических теоретических моделей с современными численными методами. Важным направлением развития является сочетание классического анализа, включая вариационные методы, системы уравнений в частных производных, характеристические ряды (Бесселя, Фурье, Лежандра и др.) [7], с численными методами, такими как метод конечных элементов, и вычислительными инструментами, такими как Maple, Mathcad. Этот гибридный подход обеспечивает как строгость, так и точность аналитических решений в простых геометрических конфигурациях и использует мощные вычислительные возможности компьютеров для решения сложных задач с разнообразными граничными условиями, нагрузками и материалами [46, 47, 52].

Подводя итог, можно выделить три основных направления исследований. Первое – это разработка неклассических моделей (среда Коссера, микрополярная упругость, моментно-асимметричная теория) для преодоления ограничений, присущих классической теории механики пластин и оболочек. Второе – применение этих моделей для анализа сложнейших механических задач, включая вынужденные колебания, явления потери устойчивости, а также комбинированное воздействие тепловых полей, излучения и случайных нагрузок. Третье – гибридизация аналитических и численных методов, которая обеспечивает строгость и точность аналитических решений, а также позволяет использовать преимущества численных методов при решении нелинейных задач, сложных граничных условий и многоматериальных конструкций. Вышеперечисленные характеристики не только подтверждают актуальность, но и подчёркивают научную ценность и практическую значимость изучения механики пластин и тонких оболочек в рамках неклассических теорий [52, 75, 77-79].

В настоящее время существуют основные направления исследований статических и нестационарных задач для тонких пластин и оболочек, которые тщательно рассматриваются. В механике пластин и оболочек статические задачи, такие как изгиб, геометрическая устойчивость и распределение напряжений, по-прежнему занимают центральное место, особенно в приложениях к конструкциям в гражданском строительстве и аэрокосмической технике. Многие работы в рамках теории Коссера [65, 88] и неклассической моментной теории [3, 64, 69] показали существенные отклонения от традиционной модели Кирхгофа–Лява, которая игнорирует независимые вращательные степени свободы. Это подтверждает, что в центре внимания современных исследований по-прежнему находятся статические задачи, где модель Коссера используется для дополнения вращательных степеней свободы, тем самым более точно описывая механизм деформации слоистых материалов, а также материалов со сложной микроструктурой.

Напротив, нестационарные задачи механики пластин и тонких оболочек исследовались недостаточно глубоко, главным образом из-за сложности математической формы и граничных условий. Например, в [45] автор применил принцип Гамильтона для построения начально-краевой задачи для любой моментно-упругой тонкой оболочки, тем самым расширив рамки описания по сравнению с классическими теориями. Аналогично, в [80] было разработано уравнение колебаний моментно-упругой сферической оболочки на основе подхода, близкого к классической теории оболочек [5, 6, 33, 81, 82].

Другими словами, в области динамики и колебаний тонкостенных конструкций сохраняется значительный пробел в исследованиях, особенно в нелинейных, нестационарных и сложных задачах со сложными граничными условиями, что требует дальнейшего развития как теоретических моделей, так и аналитико-численных методов. Дальнейшее изучение этих вопросов имеет не только чисто научное значение, но и высокую прикладную ценность при проектировании и оценке надежности перспективных конструкций.

Одним из важных направлений исследований в области механики пластин и тонких оболочек является анализ вынужденных колебаний и определение резонансных частот. В работе [41] Мирзакабилов Н. Х. провел детальное исследование вынужденных колебаний трехслойных ортогональных пластин с вязкоупругими свойствами. Основная цель исследования – разработка метода определения резонансных частот и анализа вибрационных откликов с использованием численных методов расчета с поддержкой программного обеспечения Maple [9, 28, 30].

Полученные результаты свидетельствуют о том, что с увеличением модуля упругости увеличиваются как действительная, так и мнимая части собственной частоты. Это наблюдение важно для проектирования конструкций, поскольку демонстрирует прямую зависимость характеристик колебаний от свойств материала, что влияет на виброустойчивость и резонансную прочность конструкции.

Другим важным направлением исследований в области механики пластин и оболочек является анализ распространения упругих и поверхностных акустических волн в современных материалах. В работе [4] Белянкова Т.И. и ее коллеги исследуют распространение сдвиговых акустических волн (SH-ПАВ) в магнитоэластроупругих бислоях, тем самым установив дисперсионное уравнение и проанализировав зависимость фазовой скорости от параметров структуры материала, а также подчеркнув потенциал применения при проектировании микро- и наномасштабных устройств. Параллельно с этим, исследование [95] Koreneva, E. B. было сосредоточено на изучении асимметричных колебаний анизотропной пластины с дополнительной массой, в котором автор применила метод компенсационных нагрузок в сочетании с уравнением Нильсена для точного определения собственной частоты колебаний, тем самым прояснив влияние асимметрии и распределения дополнительной массы на динамику структурной системы. Полученные результаты демонстрируют ключевую роль механики пластин в высоких технологиях, особенно в разработке

микроэлектромеханических датчиков и интеллектуальных материалов, где сложное взаимодействие механики, электричества и магнетизма оказывает решающее влияние на характеристики и производительность устройства [84, 87].

В контексте применения в ядерной, авиационной и космической технике пластинчатые и тонкослойные конструкции часто подвергаются сложным многополевым воздействиям внешней среды, включая тепловые нагрузки, ядерное излучение и динамические нагрузки. В исследовании [50] Плескачевский, Ю. М. и его коллеги исследовали механическое поведение трехслойной круглой пластины под воздействием нейтронного излучения, тем самым построив аналитическое решение с использованием функции Бесселя для описания распределения поля напряжений-деформаций и оценки ухудшения механических свойств из-за излучения. Между тем, работа [67] Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко были сосредоточены на проблеме термоупругого изгиба трехслойной пластины, подверженной осесимметричным нагрузкам; авторы применили численные методы для количественного анализа влияния радиуса нагрузочного кольца и теплового градиента на смещение и напряженное состояние конструкции. Эти результаты имеют особое значение при проектировании и оптимизации конструкций, работающих в суровых условиях, таких как корпуса ядерных реакторов, корпуса космических аппаратов или искусственных спутников, где требуются механическая устойчивость и функциональная безопасность в экстремальных условиях эксплуатации.

Характерной чертой многих современных исследований является тенденция к комбинированию аналитических и численных методов для повышения точности и применимости к сложным практическим задачам. В частности, в [40] Г. В. Малинин предложил методику расчета ребристых армированных пластин с использованием программного обеспечения Maple и Mathcad для сравнения результатов с конечно-элементным моделированием в среде MSC Patran/Nastran; полученные результаты показали высокую степень согласованности, что подтверждает применимость гибридного метода. Аналогично, в исследовании [96]

D. V. Leonenko рассматривалась задача изгиба трехслойной круглой пластины переменной толщины на основе гипотезы Кирхгофа и метода зигзаг, а анализ сочетался с численными расчетами для определения радиальной деформации с высокой точностью. В другом подходе С. Л. Денисов и А. Л. Медведский [13] разработали гибридный численно-аналитический метод анализа динамического отклика пластин под воздействием широкополосных акустических волн, и результаты показали хорошее согласование с точным решением. В этих работах показано, что интеграция анализа и численных расчетов не только повышает надежность модели, но и расширяет область ее применения до весьма нелинейных и сложных задач механики конструкций.

Это считается одним из наиболее важных направлений исследований в неклассической механике пластин и оболочек. Серия работ Саркисина С.О. заложила основу для разработки математической модели микрополяризованной тонкой пластины, которая одновременно учитывает независимые сдвиговые деформации и вращательные перемещения – факторы, игнорируемые в классической теории. На этой основе автором была построена общая кинематическая теория, позволяющая анализировать как свободные, так и вынужденные колебания, и разработаны точные граничные решения, отражающие влияние граничных условий и свойств материала. В [60] Саркисин С.О. предложил микрополяризованную модель для упругих тонких пластин, используя асимптотические решения граничных задач для характеристики прочности и жесткости материала. Эти вклады не только обогащают теоретическую систему неклассической механики, но и открывают широкие перспективы применения при проектировании и анализе композитных материалов, гранулированных материалов, а также конструкций со сложной микроструктурой [103-105].

Помимо теоретических направлений исследований, многие работы были сосредоточены на решении конкретных прикладных задач. Ваченко А. В. [6] провел исследование массы топлива и радиационной защиты спутников при орбитальном переходе и подчеркнул ключевую роль оптимизации массы в

технологии производства микросхем эпитаксиальным методом. В другом подходе А. А. Афанасьев и С. Къи [2] проанализировали усталостную прочность перфорированных пластин и цилиндрических оболочек, подверженных случайным нагрузкам давлением, тем самым применив предположение о кумулятивном спектре повреждений для прогнозирования срока службы конструкций. Эти результаты демонстрируют тесную связь между теорией механики пластин и практическими требованиями в промышленной сфере.

В области механики пластин и тонких оболочек классические теории, такие как теории Кирхгофа–Лява и Миндлина–Рейсснера, по-прежнему играют основополагающую роль. Выдающимися преимуществами этих моделей являются их простота, наглядность и широкая применимость в инженерной практике. Однако из-за жёстких допущений (таких как игнорирование деформации поперечного сечения или предположение о неизменности формы перпендикулярного сечения после деформации) классические теории демонстрируют существенные ограничения при применении к слоистым конструкциям, анизотропным материалам или материалам со сложной микроструктурой.

Напротив, неклассические теории добавили новые степени свободы, допуская независимые вращательные смещения, сдвиговые деформации и микроскопические эффекты взаимодействия. В результате они способны более точно описывать механические явления в современных конструкциях.

Типичным примером является микрополярная теория, предложенная Саркисяном, в которой подчеркивается: «В модели учтены независимые поля перемещений и вращений, что позволяет учитывать поперечные сдвиговые деформации и обеспечивает высокие показатели прочности и жесткости».

По сравнению с теорией Кирхгофа–Лява, микрополярная модель демонстрирует явные преимущества при анализе колебаний и деформаций композитных пластин, а также сыпучих материалов. Важной особенностью

исследовательских работ является гармоничное сочетание аналитических и численных методов. Аналитические подходы, такие как принцип Гамильтона, функции Бесселя или уравнения Нильсена, по-прежнему играют решающую роль в построении общих решений, создавая тем самым научную основу для проверки и сравнения результатов. Однако для задач высокой сложности, таких как слоистые пластины, анизотропные материалы или конструкции, подверженные тепловым и радиационным нагрузкам, применение чисто аналитических методов становится нецелесообразным. В этом контексте численные инструменты расчета, такие как Maple, Mathcad или метод конечных элементов, демонстрируют свое превосходство. Характерным примером служит исследование Малинина Г. В. [40]: Результаты расчетов армированных ребристых пластин с использованием Maple и Mathcad демонстрируют высокую степень сходства с результатами МКЭ-анализа, выполненного в программном обеспечении MSC Patran/Nastran. Это подтверждает, что сочетание анализа и математики не только повышает надежность и точность результатов, но и существенно расширяет возможности их применения в инженерной практике.

Несмотря на значительный прогресс, существующая литература также указывает на пробелы в исследованиях, которые необходимо заполнить. Во-первых, число опубликованных работ по нестационарным процессам по-прежнему ограничено из-за сложности анализа. Во-вторых, в области многослойных пластин задачам со сложными граничными условиями не уделяется должного внимания; большинство работ сосредоточено на простых геометрических формах, таких как прямоугольные или круглые пластины, в то время как случаи смешанных граничных условий или нерегулярной геометрии упоминаются лишь sporadически. В-третьих, одновременное влияние нескольких факторов окружающей среды по-прежнему представляет собой значительный пробел: в современных исследованиях рассматриваются в основном отдельные эффекты, такие как тепло, нейтронное излучение или акустические волны, в то время как сочетание нескольких факторов (например, тепло + излучение + динамические

нагрузки) изучено недостаточно. Наконец, что касается вычислительных инструментов, текущие работы в основном основаны на Maple, Mathcad или методе конечных элементов, в то время как более современные подходы, такие как машинное обучение, многокритериальная оптимизация или мультифизическое моделирование, до сих пор не получили широкого распространения.

В обзоре можно утверждать, что развитие неклассических теорий в механике пластин и тонких оболочек значительно расширило возможности описания поведения сложных конструкций, особенно слоистых, анизотропных материалов и систем с микроструктурой. Исследования не ограничиваются только статическими задачами, но также охватывают вибрации, распространение волн, устойчивость и усталость при различных типах нагрузок, демонстрируя тесную связь теории с практическими потребностями. Сочетание аналитических методов и численных инструментов, особенно МКЭ, Maple и Mathcad, создало условия как для повышения точности, так и для расширения возможностей их применения.

Анализ нестационарных процессов, сложных геометрических задач, многополевых эффектов, а также применение современных вычислительных методов, таких как машинное обучение, многокритериальная оптимизация или многополевое моделирование, по-прежнему имеют множество ограничений и недостатков. Тем не менее, достигнутые результаты продемонстрировали большую практическую значимость, что подтверждается их применением в аэрокосмической технике, атомной энергетике, микроэлектромеханике и гражданском строительстве. Это свидетельствует о том, что развитие неклассической теории имеет не только академическое значение, но и важное прикладное значение в современной технике и промышленности.

Из представленных обзоров видно, что неклассическая теория становится одним из важных направлений исследований, играя ключевую роль в решении задач современной инженерии, особенно в условиях появления композитных

материалов и многослойных конструкций, а также все более жестких требований к точности и надежности в жестких условиях эксплуатации.

Из проведенного обзора следует, что нестационарные задачи для упругих моментных пластин изучены ещё недостаточно полно. Настоящая диссертация посвящена данному вопросу.

ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ МОМЕНТНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

2.1. Начально-краевые задачи в произвольной системе координат

Уравнения нестационарного изгиба однородной изотропной моментной упругой пластины толщины h в «перемещениях» (кинематических параметрах) получены из общих соотношений для оболочек [102] при равенстве нулю тензора кривизны и имеют следующий вид [69]:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\mu - \alpha) \operatorname{div} \psi + (\mu + \alpha) \Delta w + 2\alpha \operatorname{rot}_n \omega + q/h, \\
 \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \psi + (\mu + \alpha) \Delta \psi - \\
 &- r^{-2} \{ (\mu + \alpha) \psi + (\mu - \alpha) \operatorname{grad} w + 2\alpha [n, \omega] \} + m/I, \quad I = h^3/12, r^2 = I/h, \\
 J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega + (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \omega + \beta \operatorname{grad} \varphi_3 - \\
 &- 4\alpha \omega + 2\alpha [n, \psi - \operatorname{grad} w] + \tilde{m}_M/h, \\
 J \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \varphi_3 - r^{-2} [\beta \operatorname{div} \omega + (\beta + 2\gamma) \varphi_3] + 2\alpha (\operatorname{rot}_n \psi - 2\varphi_3) + \tilde{m}_{2M}/I.
 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Здесь w нормальное перемещение срединной плоскости Π ; $\psi = \psi_i \vartheta^i$ и $\omega = \omega_i \vartheta^i$ - векторы углов поворота нормального волокна и вращения за счет моментных свойств среды; φ_3 - угол отклонения вектора угла вращения от нормального волокна; t - время; ϑ^1, ϑ^2 - базис системы координат; n - единичный вектор нормали к Π ; ρ и J - плотность и массовая мера инерции при вращении материала пластины; λ, μ - упругие постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - дополнительные физические параметры среды при наличии моментных эффектов; q - нормальное давление; $m = m^i \vartheta_i, \tilde{m}_M = \tilde{m}_M^i \vartheta_i$ и \tilde{m}_{2M} - внешние поверхностные моменты; векторные произведения рассматриваются в трехмерном пространстве.

При этом дополнительные физические параметры удовлетворяют следующим соотношениям [8, 27]:

$$\alpha, \gamma + \varepsilon \geq 0, 3\beta + 2\gamma \geq 0; -(\gamma + \varepsilon) \leq \gamma - \varepsilon \leq \gamma + \varepsilon, \mu(2\gamma + \beta) = (\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon) \quad (2.1.2)$$

Для полного описания напряженно-деформированного состояния пластины к этим уравнениям добавляются физические соотношения в криволинейной системе координат (латинские индексы принимают значения 1,2):

$$\begin{aligned} M_{ij}/I &= (\mu + \alpha)\nabla_i \psi_j + (\mu - \alpha)\nabla_j \psi_i - 2\alpha\pi_{ij}\varphi_3 + \lambda g_{ij} \operatorname{div} \psi, \\ T_{i3}/h &= (\mu - \alpha)\psi_i + (\mu + \alpha)\nabla_i w - 2\alpha\pi_{ki}\omega^k, \\ T_{3i}/h &= (\mu + \alpha)\psi_i + (\mu - \alpha)\nabla_i w + 2\alpha\pi_{ki}\omega^k \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

$$\begin{aligned} R_{ij}/h &= (\gamma + \varepsilon)\nabla_i \omega_j + (\gamma - \varepsilon)\nabla_j \omega_i + \beta g_{ij} (\operatorname{div} \omega + \varphi_3), \\ S_{i3}/I &= (\gamma + \varepsilon)\nabla_i \varphi_3, N_\omega/h = \beta \operatorname{div} \omega + (\beta + 2\gamma)\varphi_3. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Здесь T_{i3}, T_{3i} и M_{ij} - внутренние силовые и моментные характеристики, инициированные тензором напряжений, а R_{ij}, N_ω и S_{i3} - аналогичные величины, соответствующие тензору моментных напряжений; ∇_i - оператор ковариантного дифференцирования; g_{ij} и π_{ij} - метрический и дискриминантный тензоры.

Естественные граничные условия имеют такой вид [3]:

$$w|_{\Gamma_u} = w_0, \psi_i|_{\Gamma_u} = \psi_{i0}, \omega_i|_{\Gamma_\omega} = \omega_{i0}, \varphi_3|_{\Gamma_\omega} = \varphi_{30}; \quad (2.1.5)$$

$$T^{j3}v_j|_{\Gamma_p} = T_{(0)}, M^{ji}v_j|_{\Gamma_p} = M_{(0)}^i, R^{ji}v_j|_{\Gamma_m} = R_{(0)}^i, S^{j3}v_j|_{\Gamma_m} = S_{(0)}. \quad (2.1.6)$$

Здесь $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i$ - единичный нормальный к боковой поверхности пластины вектор; $\Gamma = \partial\Pi = \Gamma_u \cup \Gamma_p = \Gamma_\omega \cup \Gamma_m$, причем пары кривых Γ_u, Γ_p и Γ_ω, Γ_m могут иметь общими только точки; $w_0, \psi_{i0}, \omega_{i0}, \varphi_{30}$ и $T_{(0)}, M_{(0)}^i, R_{(0)}^i, S_{(0)}$ - заданные функции.

Начальные условия далее везде полагаем нулевыми:

$$\begin{aligned}
w|_{t=0} = 0, \psi^i|_{t=0} = 0, \omega_i|_{t=0} = 0, \varphi_3|_{t=0} = 0, \\
\frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0, \frac{\partial \psi^i}{\partial t}|_{t=0} = 0, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}|_{t=0} = 0, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}|_{t=0} = 0.
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Эту модель будем называть *общей*.

Вариационное уравнение Гамильтона при этом записывается так:

$$\delta H_0(\psi, \omega, w, \varphi_3) = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_0 - \delta A_0) dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta E_0 dt = 0, \tag{2.1.8}$$

где

$$\begin{aligned}
\delta W_0 = \iint_{\Pi} \left\{ -\nabla_j T^{j3} \delta w + (T^{3i} - \nabla_j M^{ji}) \delta \psi_i + \right. \\
\left. + \left[\pi_{ik} (T^{3k} - T^{k3}) - g_{ik} \nabla_j R^{jk} \right] \delta \omega^i + (N_\omega - \pi_{ij} M^{ij} - \nabla_j S^{j3}) \delta \varphi_3 \right\} dS + \\
+ \int_{\Gamma} \mathbf{v}_j (T^{j3} \delta w + M^{ji} \delta \psi_i + R^{ji} \delta \omega_i + S^{j3} \delta \varphi_3) ds,
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

$$\begin{aligned}
\delta A_0 = \iint_{\Pi} (m^i \delta \psi_i + q \delta w + \tilde{m}_M^i \delta \omega_i + \tilde{m}_{2M} \delta \varphi_3) dS + \\
+ \int_{\Gamma} (M_{(0)}^i \delta \psi_i + T_{(0)} \delta w + R_{(0)}^i \delta \omega_i + S_{(0)} \delta \varphi_3) ds,
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_0 dt = -\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} \left(h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + I \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2} \delta \psi_i \right) dS - J \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} \left(h \frac{\partial^2 \omega^i}{\partial t^2} \delta \omega_i + I \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} \delta \varphi_3 \right) dS. \tag{2.1.11}$$

Из уравнения (2.1.8) вытекают все возможные граничные условия. Приведем только те, которые будут использованы далее:

- шарнирное опирание

$$w|_{\Gamma} = 0, M^{ji} \mathbf{v}_j|_{\Gamma} = 0, R^{ji} \mathbf{v}_j|_{\Gamma} = 0, S^{j3} \mathbf{v}_j|_{\Gamma} = 0; \tag{2.1.12}$$

- жесткое защемление (заделка)

$$w|_{\Gamma} = 0, \psi_i|_{\Gamma} = 0, \omega_i|_{\Gamma} = 0, \varphi_3|_{\Gamma} = 0; \tag{2.1.13}$$

- свободный край

$$\nu_j T^{j3}|_{\Gamma} = 0, \nu_j M^{ji}|_{\Gamma} = 0, \nu_j R^{ji}|_{\Gamma} = 0, \nu_j S^{j3}|_{\Gamma} = 0. \quad (2.1.14)$$

Замечание 2.1.1. Здесь и далее приведены только однородные условия. Если их правые части ненулевые, то используется известный алгоритм преноса их в правые части уравнений [77].

Замечание 2.1.2. Если граница срединной поверхности имеет вид $\Gamma = \partial\Pi = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k$, причем пары кривых Γ_k и Γ_l при $k \neq l$ имеют общими только точки, то условия (2.1.12) - (2.1.14) могут иметь место на любой составляющей Γ_k границы.

Для снижения размерности задачи часто используются дополнительные гипотезы. Прежде всего, аналогично классической теории оболочек остановимся на модели 1, не учитывающей обжатие нормального материального волокна, что соответствует равенству [42, 43]. Для моментных пластин естественно положить

$$\varphi_3 \equiv 0 \quad (2.1.15)$$

При этом уравнения (2.1.1) и физические соотношения (2.1.3), (2.1.4) принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\mu - \alpha) \operatorname{div} \psi + (\mu + \alpha) \Delta w + 2\alpha \operatorname{rot}_n \omega + q/h, \\ \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \psi + (\mu + \alpha) \Delta \psi - \\ &\quad - r^{-2} \{ (\mu + \alpha) \psi + (\mu - \alpha) \operatorname{grad} w + 2\alpha [n, \omega] \} + m/I, \\ J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega + (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \omega - 4\alpha \omega + \\ &\quad + 2\alpha [n, \psi - \operatorname{grad} w] + \tilde{m}_M/h. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

$$\begin{aligned}
M_{ij}/I &= (\mu + \alpha)\nabla_i \psi_j + (\mu - \alpha)\nabla_j \psi_i + \lambda g_{ij} \operatorname{div} \psi, \\
T_{i3}/h &= (\mu - \alpha)\psi_i + (\mu + \alpha)\nabla_i w - 2\alpha \pi_{ki} \omega^k, \\
T_{3i}/h &= (\mu + \alpha)\psi_i + (\mu - \alpha)\nabla_i w + 2\alpha \pi_{ki} \omega^k, \\
R_{ij}/h &= (\gamma + \varepsilon)\nabla_i \omega_j + (\gamma - \varepsilon)\nabla_j \omega_i + \beta g_{ij} \operatorname{div} \omega, N_{\omega}/h = \beta \operatorname{div} \omega.
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

При этом в вариационном уравнении (2.1.8) обнуляются слагаемые с вариацией $\delta\varphi_3$, и количество граничных условий (2.1.12) - (2.1.14) уменьшается:

$$w|_{\Gamma} = 0, M^{ji} \nu_j|_{\Gamma} = 0, R^{ji} \nu_j|_{\Gamma} = 0; \tag{2.1.18}$$

- жесткое защемление (заделка)

$$w|_{\Gamma} = 0, \psi_i|_{\Gamma} = 0, \omega_i|_{\Gamma} = 0; \tag{2.1.19}$$

- свободный край

$$\nu_j T^{j3}|_{\Gamma} = 0, \nu_j M^{ji}|_{\Gamma} = 0, \nu_j R^{ji}|_{\Gamma} = 0. \tag{2.1.20}$$

Второй вариант упрощения (*модель 2*) связан с принятием гипотезы Кирхгофа-Лява [42, 43]:

$$\psi = -\operatorname{grad} w, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \tag{2.1.21}$$

Так же, как и для упругих пластин [4], подстановка этих равенств в (2.1.1) приводит к противоречивым уравнениям. Связано это с изменением типа систем - одно из уравнений в них становится параболическим.

Поэтому аналогично [44] выполняем следующие преобразования. Первые два уравнения в (2.1.1) с учетом (2.1.21) записываем следующим образом:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu(\operatorname{div} \psi + \Delta w) + \alpha(\Delta w - \operatorname{div} \psi) + 2\alpha \operatorname{rot}_n \omega + q/h = \\
&= \mu(\operatorname{div} \psi + \Delta w) + 2\alpha(\Delta w + \operatorname{rot}_n \omega) + q/h, \\
0 &= (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \psi + \mu \Delta \psi - r^{-2} \mu(\psi + \operatorname{grad} w) + m/I - \\
&- \alpha \{ \operatorname{grad} \operatorname{div} \psi - \Delta \psi + r^{-2} (\psi - \operatorname{grad} w + 2[n, \omega]) \}.
\end{aligned}$$

К последнему уравнению применяем оператор div , что приводит к равенству

$$\begin{aligned} \mu(\psi + \text{grad}w) &= r^2(\lambda + 2\mu)\text{div}\Delta\psi + 2\alpha(\Delta w - \text{div}[n, \omega]) + \text{div}m/h \\ 0 &= (\lambda + \mu)\text{graddiv}\psi + \mu\Delta\psi - r^{-2}\mu(\psi + \text{grad}w) + m/I - \\ &\quad - \alpha\{\text{graddiv}\psi - \Delta\psi + r^{-2}(\psi - \text{grad}w + 2[n, \omega])\}. \end{aligned}$$

Подставляем его в первое уравнение и получаем следующее уравнение

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D\Delta\Delta w + 4\alpha h(\Delta w - \text{div}[n, \omega]) + p, D = I(\lambda + 2\mu), p = q + \text{div}m. \quad (2.1.22)$$

Здесь использованы равенства

$$\begin{aligned} \text{rot}u &= n\text{rot}_n u, \text{rot}_n u = \pi^{ik}\nabla_i u_k, \\ \text{div}[n, \text{grad}\omega] &= -\pi_{ik}g^{kl}g^{in}\nabla_n\nabla_l\omega = -\pi_{12}(g^{2l}g^{1n}\nabla_n\nabla_l\omega - g^{1l}g^{2n}\nabla_n\nabla_l\omega) = 0, \quad (2.1.23) \\ \text{div}[n, \omega] &= -\pi^{ik}\text{div}\omega_k \varepsilon_i = -\pi^{ik}\nabla_i\omega_k = -\text{rot}_n\omega, \end{aligned}$$

Таким образом, система (2.1.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -D\Delta\Delta w + 4\alpha h(\Delta w - \text{div}[n, \omega]) + p, \\ J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon)\Delta\omega + (\beta + \gamma - \varepsilon)\text{graddiv}\omega + \beta\text{grad}\varphi_3 - \\ &\quad - 4\alpha([n, \text{grad}w] + \omega) + \tilde{m}_M/h, \\ J \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon)\Delta\varphi_3 - r^{-2}[\beta\text{div}\omega + (\beta + 2\gamma)\varphi_3] - 4\alpha\varphi_3 + \tilde{m}_{2M}/I. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

А физические соотношения записываются так:

$$\begin{aligned} M_{ij}/I &= -(\lambda g_{ij}\Delta w + 2\mu\nabla_i\nabla_j w), \\ T_{i3}/h &= 2(\mu\nabla_i w - \alpha\pi_{ki}\omega^k), T_{3i}/h = 2(\mu\nabla_i w + \alpha\pi_{ki}\omega^k) \\ R_{ij}/h &= (\gamma + \varepsilon)\nabla_i\omega_j + (\gamma - \varepsilon)\nabla_j\omega_i + \beta g_{ij}(\text{div}\omega + \varphi_3), \\ S_{i3}/I &= (\gamma + \varepsilon)\nabla_i\varphi_3, N_\omega/h = \beta\text{div}\omega + (\beta + 2\gamma)\varphi_3. \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

В этом случае составляющие вариационного уравнения (1.2.8) нуждаются в преобразованиях с учетом связи (2.1.21). С учетом первого равенства в (2.1.21) и

теоремы Остроградского-Гаусса для поверхностей [42] получаем

$$\begin{aligned} \delta W_0 = & \iint_{\Pi} \left\{ \nabla_i (T^{3i} - T^{i3} - \nabla_j M^{ji}) \delta w + \right. \\ & \left. + \left[\pi_{ik} (T^{3k} - T^{k3}) - g_{ik} \nabla_j R^{jk} \right] \delta \omega^i + (N_{\omega} - \pi_{ij} M^{ij} - \nabla_j S^{j3}) \delta \varphi_3 \right\} dS + \\ & + \int_{\Gamma} v_j \left[(T^{j3} - T^{3j} + \nabla_k M^{kj}) \delta w - M^{jk} \delta \nabla_k w + R^{ji} \delta \omega_i + S^{j3} \delta \varphi_3 \right] ds, \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

$$\begin{aligned} \delta A_0 = & \iint_{\Pi} (p \delta w + \tilde{m}_M^i \delta \omega_i + \tilde{m}_{2M} \delta \varphi_3) dS + \\ & + \int_{\Gamma} \left[(T_{(0)} - v_i m^i) \delta w - M_{(0)}^i \delta \nabla_i w + R_{(0)}^i \delta \omega_i + S_{(0)} \delta \varphi_3 \right] ds, p = q + \nabla_i m^i. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_0 dt = -\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dS - J \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} \left(h \frac{\partial^2 \omega^i}{\partial t^2} \delta \omega_i + I \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} \delta \varphi_3 \right) dS. \quad (2.1.28)$$

Учитывая эти равенства, из (1.2.8), получаем следующую модификацию граничных условий (2.1.12)- (2.1.14):

$$w|_{\Gamma_u} = 0, \nabla_i w|_{\Gamma_u} = 0, \omega_i|_{\Gamma_{\omega}} = 0, \varphi_3|_{\Gamma_{\omega}} = 0 \quad (2.1.29)$$

$$(T^{j3} - T^{3j} + \nabla_k M^{kj}) v_j|_{\Gamma_p} = 0, M^{ji} v_j|_{\Gamma_p} = 0, R^{ji} v_j|_{\Gamma_m} = 0, S^{j3} v_j|_{\Gamma_m} = 0 \quad (2.1.30)$$

Таким образом можно получить и уравнения движения в усилиях, но смысла в этом нет, т.к. уже имеются уравнения движения в перемещениях.

При одновременном выполнении гипотез (2.1.15) и (2.1.21) - модель 3 - получаем следующую систему уравнений и физические соотношения:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D \Delta \Delta w / h + 4\alpha (\Delta w + \text{rot}_n \omega) + p / h, \quad (2.1.31)$$

$$J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega + (\beta + \gamma - \varepsilon) \text{grad div} \omega - 4\alpha ([n, \text{grad} w] + \omega) + \tilde{m}_M / h.$$

$$M_{ij} / I = -(\lambda g_{ij} \Delta w + 2\mu \nabla_i \nabla_j w),$$

$$T_{i3} / h = 2(\mu \nabla_i w - \alpha \pi_{ki} \omega^k), T_{3i} / h = 2(\mu \nabla_i w + \alpha \pi_{ki} \omega^k) \quad (2.1.32)$$

$$R_{ij} / h = (\gamma + \varepsilon) \nabla_i \omega_j + (\gamma - \varepsilon) \nabla_j \omega_i + \beta g_{ij} \text{div} \omega, N_{\omega} / h = \beta \text{div} \omega.$$

При этом в граничных условиях (2.1.29) и (2.1.30) следует отбросить последние равенства:

$$w|_{\Gamma} = 0, \nabla_i w|_{\Gamma} = 0, \omega_i|_{\Gamma} = 0 \quad (2.1.33)$$

$$\left(T^{j3} - T^{3j} + \nabla_k M^{kj} + m^j\right) \mathbf{v}_j|_{\Gamma_p} = 0, M^{ji} \mathbf{v}_j|_{\Gamma_p} = 0, R^{ji} \mathbf{v}_j|_{\Gamma_m} = 0 \quad (2.1.34)$$

2.2 Начально-краевые задачи в прямоугольной декартовой системе координат

Здесь используем прямоугольную декартову систему координат Ox_1x_2 с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 , т.е. полагаем.

$$\xi^1 = x_1, \xi^2 = x_2 \quad (2.2.1)$$

$$\varepsilon_j = e_j, n = e_3 \quad (2.2.2)$$

При этом компоненты векторов и тензоров совпадают с их физическими аналогами, которые обозначаем цифровыми нижними индексами.

Сначала рассматриваем общую модель. В этом варианте координатная форма уравнений движения (2.1.1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\mu + \alpha) \Delta w + (\mu - \alpha) \theta_\psi - 2\alpha \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + q/h, \\ \rho \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) \Delta \psi_1 + 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - \\ &\quad - r^{-2} \left[(\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) \psi_1 - 2\alpha \omega_2 \right] + m_1/I, \\ \rho \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_2} + (\mu + \alpha) \Delta \psi_2 - 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - \\ &\quad - r^{-2} \left[(\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_2} + (\mu + \alpha) \psi_2 + 2\alpha \omega_1 \right] + m_2/I, \\ J \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega_1 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha \omega_1 + 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right) + \beta \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \tilde{m}_{M1}/h, \\ J \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega_1 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha \omega_1 + 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right) + \beta \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \tilde{m}_{M1}/h, \\ J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega_2 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha \omega_2 + 2\alpha \left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \beta \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \tilde{m}_{M2}/h, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} = (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega_2 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha \omega_2 + 2\alpha \left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \beta \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \tilde{m}_{M2}/h,$$

$$J \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} = 2\alpha \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - 2\varphi_3 \right) + (\gamma + \varepsilon) \Delta \varphi_3 - r^{-2} [\beta \theta_\omega + (\beta + 2\gamma) \varphi_3] + \tilde{m}_{2M}/I.$$

Здесь

$$\theta_\psi = \operatorname{div} \psi, \theta_\omega = \operatorname{div} \omega, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (2.2.4)$$

Соответствующие физические соотношения вытекают из (2.1.3) и (2.1.4):

$$M_{11}/I = 2\mu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \lambda \theta_\psi, \quad M_{22}/I = 2\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \lambda \theta_\psi,$$

$$M_{12}/I = (\mu + \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + (\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - 2\alpha \varphi_3,$$

$$M_{21}/I = (\mu + \alpha) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + (\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + 2\alpha \varphi_3, \quad (2.2.5)$$

$$T_{13}/h = (\mu - \alpha) \psi_1 + (\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\alpha \omega_2,$$

$$T_{23}/h = (\mu - \alpha) \psi_2 + (\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_2} - 2\alpha \omega_1,$$

$$T_{31}/h = (\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha \omega_2,$$

$$T_{32}/h = (\mu + \alpha) \psi_2 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2\alpha \omega_1;$$

$$R_{11}/h = 2\gamma \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \beta(\theta_\omega + \varphi_3), \quad R_{22}/h = 2\gamma \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \beta(\theta_\omega + \varphi_3),$$

$$R_{12}/h = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \quad R_{21}/h = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \quad (2.2.6)$$

$$S_{13}/I = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \quad S_{23}/I = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, \quad N_\omega/h = \beta \theta_\omega + (\beta + 2\gamma) \varphi_3,$$

$$R_{31}/h = (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + (\gamma + \varepsilon) \varphi_1, \quad R_{32}/h = (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + (\gamma + \varepsilon) \varphi_2.$$

Граничные условия как для этой, так и для всех остальных приведенных ниже моделей, вытекают из соответствующих равенств предыдущего раздела.

Для упрощенных моделей уравнения и физические соотношения имеют вид:

- модель 1

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\mu + \alpha) \Delta w + (\mu - \alpha) \theta_{\psi} - 2\alpha \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + q/h, \\ \rho \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial \theta_{\psi}}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) \Delta \psi_1 - \\ &\quad - r^{-2} \left[(\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) \psi_1 - 2\alpha \omega_2 \right] + m_1/I, \\ \rho \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial \theta_{\psi}}{\partial x_2} + (\mu + \alpha) \Delta \psi_2 - \\ &\quad - r^{-2} \left[(\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_2} + (\mu + \alpha) \psi_2 + 2\alpha \omega_1 \right] + m_2/I, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned} J \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega_1 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \theta_{\omega}}{\partial x_1} - 4\alpha \omega_1 + 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right) + \tilde{m}_{M1}/h, \\ J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega_2 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \theta_{\omega}}{\partial x_2} - 4\alpha \omega_2 + 2\alpha \left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \tilde{m}_{M2}/h; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{11}/I &= 2\mu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \lambda \theta_{\psi}, \quad M_{22}/I = 2\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \lambda \theta_{\psi}, \\ M_{12}/I &= (\mu + \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + (\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, \quad M_{21}/I = (\mu + \alpha) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + (\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}, \\ T_{13}/h &= (\mu - \alpha) \psi_1 + (\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\alpha \omega_2, \\ T_{23}/h &= (\mu - \alpha) \psi_2 + (\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_2} - 2\alpha \omega_1, \\ T_{31}/h &= (\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha \omega_2, \\ T_{32}/h &= (\mu + \alpha) \psi_2 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2\alpha \omega_1; \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned}
R_{11}/h &= 2\gamma \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \beta \theta_\omega, \quad R_{22}/h = 2\gamma \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \beta \theta_\omega, \quad N_\omega/h = \beta \theta_\omega, \\
R_{12}/h &= (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \quad R_{21}/h = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \\
R_{31}/h &= (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + (\gamma + \varepsilon) \varphi_1, \quad R_{32}/h = (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + (\gamma + \varepsilon) \varphi_2;
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

- модель 2

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -D\Delta\Delta w/h + 4\alpha \left(\Delta w + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + p/h, \\
J \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega_1 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - 4\alpha \left(\omega_1 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \tilde{m}_{M1}/h, \\
J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega_2 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - 4\alpha \left(\omega_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \tilde{m}_{M2}/h. \\
J \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \varphi_3 - r^{-2} [\beta \theta_\omega + (\beta + 2\gamma) \varphi_3] - 4\alpha \varphi_3 + \tilde{m}_{2M}/I;
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

$$\begin{aligned}
M_{11}/I &= - \left(\lambda \Delta w + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), \quad M_{22}/I = - \left(\lambda \Delta w + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \\
M_{12}/I &= -2 \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \alpha \varphi_3 \right), \quad M_{21}/I = -2 \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \alpha \varphi_3 \right), \\
T_{13}/h &= -T_{31}/h = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \omega_2 \right), \quad T_{23}/h = -T_{32}/h = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \omega_1 \right),
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

$$\begin{aligned}
R_{11}/h &= 2\gamma \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \beta (\theta_\omega + \varphi_3), \quad R_{22}/h = 2\gamma \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \beta (\theta_\omega + \varphi_3), \\
R_{12}/h &= (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \quad R_{21}/h = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \\
S_{13}/I &= (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \quad S_{23}/I = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, \quad N_\omega/h = \beta \theta_\omega + (\beta + 2\gamma) \varphi_3.
\end{aligned}$$

- модель 3

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -D\Delta\Delta w/h + 4\alpha \left(\Delta w + \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} \right) + p/h, \\
J \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon)\Delta\omega_1 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial\theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha \left(\omega_1 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \tilde{m}_{M1}/h, \\
J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon)\Delta\omega_2 + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial\theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha \left(\omega_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \tilde{m}_{M2}/h.
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

$$\begin{aligned}
M_{11}/I &= - \left(\lambda\Delta w + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), M_{22}/I = - \left(\lambda\Delta w + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \\
M_{12}/I &= M_{21}/I = -2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2},
\end{aligned}$$

$$T_{13}/h = -T_{31}/h = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \omega_2 \right), T_{23}/h = -T_{32}/h = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \omega_1 \right), \tag{2.2.13}$$

$$R_{11}/h = 2\gamma \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} + \beta\theta_\omega, R_{22}/h = 2\gamma \frac{\partial\omega_2}{\partial x_2} + \beta\theta_\omega, N_\omega/h = \beta\theta_\omega,$$

$$R_{12}/h = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}, R_{21}/h = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}.$$

Далее везде будем использовать следующие безразмерные параметры (при одинаковом начертании величин они обозначены штрихом, который в последующем изложении опускается):

$$\begin{aligned}
x'_i &= \frac{x_i}{L}, \tau = \frac{c_1 t}{L}, w' = \frac{w}{L}, \phi'_3 = \phi_3 L, r' = \frac{r}{L}, q' = \frac{qL}{h(\lambda + 2\mu)}, \theta'_i = \frac{\theta_i}{L} \\
m'_i &= \frac{m_i L^2}{I(\lambda + 2\mu)}, \tilde{m}'_{Mi} = \frac{\tilde{m}_{Mi} L^2}{hJc_1^2}, \tilde{m}'_{2M} = \frac{\tilde{m}_{2M} \nu L}{I(\lambda + 2\mu)} \quad (i=1,2), \\
T'_{kl} &= \frac{T_{kl}}{h(\lambda + 2\mu)}, M'_{kl} = \frac{M_{kl} L}{I(\lambda + 2\mu)}, R'_{kl} = \frac{R_{kl} L}{h(\gamma + \varepsilon)}, S'_{kl} = \frac{S_{kl} L^2}{I(\gamma + \varepsilon)} \quad (k,l=1,2,3), \\
N'_\omega &= \frac{N_\omega L}{h(\gamma + \varepsilon)}, \gamma_0^2 = \frac{c_1^2}{c_4^2}, \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \gamma_3^2 = \frac{Jc_1^2}{\beta}, \\
c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}, c_4 = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{J}}, \alpha' = \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \\
\eta_1 &= \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon}, \eta_2 = \frac{\beta}{\gamma + \varepsilon}, \nu = \frac{\rho L^2}{J}, \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\gamma_1^2}.
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

При этом уравнения (2.2.3) и физические соотношения (2.2.5), (2.2.6) для общей модели принимают следующий вид (точками здесь и далее обозначены производные по безразмерному времени τ):

$$\begin{aligned}\ddot{w} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta w + \gamma_{\alpha-}^{-2} \theta_{\psi} - 2\alpha \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + q, \\ \ddot{\psi}_1 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_{\psi}}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_1 + 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - r^{-2} \left(\gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 - 2\alpha \omega_2 \right) + m_1, \\ \ddot{\psi}_2 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_{\psi}}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_2 - 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - r^{-2} \left(\gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + 2\alpha \omega_1 \right) + m_2, \quad (2.2.15)\end{aligned}$$

$$\ddot{\omega}_1 = 2\alpha \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_{\omega}}{\partial x_1} - 4\alpha \nu \omega_1 + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \tilde{m}_{M1},$$

$$\ddot{\omega}_2 = 2\alpha \nu \left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_{\omega}}{\partial x_2} - 4\alpha \nu \omega_2 + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \tilde{m}_{M2},$$

$$\ddot{\varphi}_3 = 2\alpha \nu \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - 2\varphi_3 \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \varphi_3 - r^{-2} \left(\gamma_3^{-2} \theta_{\omega} + \gamma_0^{-2} \varphi_3 \right) + \tilde{m}_{2M};$$

$$M_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \kappa \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, M_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \kappa \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1},$$

$$M_{12} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - 2\alpha \varphi_3, M_{21} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + 2\alpha \varphi_3, \quad (2.2.16)$$

$$T_{13} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\alpha \omega_2, T_{23} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - 2\alpha \omega_1,$$

$$T_{31} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha \omega_2, T_{32} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2\alpha \omega_1;$$

$$R_{11} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \varphi_3 \right), R_{22} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \varphi_3 \right),$$

$$R_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \quad (2.2.17)$$

$$S_{13} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, S_{23} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, N_{\omega} = \eta_2 \theta_{\omega} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_3.$$

Здесь и далее учтены вытекающие из (2.2.14) равенства

$$\kappa + 2\gamma_1^{-2} = 1, 2\eta_1 + \eta_2 = \gamma_0^{-2}\gamma_2^2 \quad (2.2.18)$$

и введены дополнительные обозначения:

$$\gamma_{\alpha\pm}^{-2} = \gamma_1^{-2} \pm \alpha, c_{02} = \gamma_0^{-2} - \gamma_2^{-2}, c_{\alpha+} = 1 - \gamma_{\alpha+}^{-2} \quad (2.2.19)$$

Для модели без учета обжатия соотношения (2.2.15) – (2.2.17) несколько упрощаются (модель 1):

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta w + \gamma_{\alpha-}^{-2} \theta_\psi - 2\alpha \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + q, \\ \ddot{\psi}_1 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_1 - r^{-2} \left(\gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 - 2\alpha \omega_2 \right) + m_1, \\ \ddot{\psi}_2 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_2 - r^{-2} \left(\gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + 2\alpha \omega_1 \right) + m_2, \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

$$\ddot{\omega}_1 = 2\alpha \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha \nu \omega_1 + \tilde{m}_{M1},$$

$$\ddot{\omega}_2 = 2\alpha \nu \left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha \nu \omega_2 + \tilde{m}_{M2};$$

$$M_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \kappa \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, M_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \kappa \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1},$$

$$M_{12} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, M_{21} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}, \quad (2.2.21)$$

$$T_{13} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\alpha \omega_2, T_{23} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - 2\alpha \omega_1,$$

$$T_{31} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha \omega_2, T_{32} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2\alpha \omega_1;$$

$$R_{11} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, R_{22} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, \quad (2.2.22)$$

$$R_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, N_\omega = \eta_2 \theta_\omega.$$

А для моделей (2.2.10) – (2.2.11) и (2.2.12) – (2.2.13) – модели 2 и 3 - уравнения и соответствующие физические соотношения принимают такой вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{w} &= -r^2 \Delta \Delta w + 4\alpha \left(\Delta w + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + p, \\
\ddot{\omega}_1 &= \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - 4\alpha \nu \left(\omega_1 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \tilde{m}_{M1}, \\
\ddot{\omega}_2 &= \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - 4\alpha \nu \left(\omega_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \tilde{m}_{M2}, \\
\ddot{\varphi}_3 &= \gamma_2^{-2} \Delta \varphi_3 - r^{-2} \left(\gamma_3^{-2} \theta_\omega + \gamma_0^{-2} \varphi_3 \right) - 4\alpha \nu \varphi_3 + \tilde{m}_{2M};
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), M_{22} = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), \\
M_{12} &= -2 \left(\gamma_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha \varphi_3 \right), M_{21} = -2 \left(\gamma_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha \varphi_3 \right), \\
T_{13} &= -T_{31} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \omega_2 \right), T_{23} = -T_{32} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \omega_1 \right), \\
R_{11} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \varphi_3 \right), R_{22} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \varphi_3 \right), \\
R_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \\
S_{13} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, S_{23} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, N_\omega = \eta_2 \theta_\omega + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_3;
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

и

$$\begin{aligned}
\ddot{w} &= -r^2 \Delta \Delta w + 4\alpha \left(\Delta w + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + p, \\
\ddot{\omega}_1 &= \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha \nu \left(\omega_1 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \tilde{m}_{M1}, \\
\ddot{\omega}_2 &= \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha \nu \left(\omega_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \tilde{m}_{M2}.
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), M_{22} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right), \\
M_{12} &= M_{21} = -2\gamma_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
T_{13} &= -T_{31} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \omega_2\right), T_{23} = -T_{32} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \omega_1\right), \\
R_{11} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, R_{22} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, \\
R_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, N_\omega = \eta_2 \theta_\omega.
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Здесь введены дополнительные безразмерные величины

$$\mu'_M = \frac{\nu \mu_M}{(\lambda + 2\mu)h}, p' = \frac{pL}{h(\lambda + 2\mu)}, \eta_3 = \frac{\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} = 1 - \eta_1 \tag{2.2.27}$$

ГЛАВА 3. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ШАРНИРНО ОПЕРТЫХ ПЛАСТИН

3.1. Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины – модель 3

Здесь и далее в этой главе полагаем, что срединная плоскость занимает прямоугольник

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b\} \quad (3.1.1)$$

На его границах принимаем условия шарнирного опирания:

$$w|_{x_1=0,a} = w|_{x_2=0,b} = 0, M_{11}|_{x_1=0,a} = 0, M_{22}|_{x_2=0,b} = 0, R_{12}|_{x_1=0,a} = 0, R_{21}|_{x_2=0,b} = 0 \quad (3.1.2)$$

которые соответствуют (2.1.8) с отброшенными последними равенствами.

Уравнениями движения этой модели, как указано в заголовке раздела, являются равенства (2.2.25), а физическими соотношениями – равенства (2.2.26). Начальные условия в соответствии (2.1.7) – нулевые.

Для решения этой начально-краевой задачи представляем искомые функции в виде двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, a_m = \frac{\pi m}{a}, b_n = \frac{\pi n}{b}, \\ \omega_1 &= \omega_{10} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \omega_{10} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{1m0}(\tau) \sin a_m x_1, \\ \omega_2 &= \omega_{20} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \omega_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{20n}(\tau) \sin b_n x_2. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Достаточно просто показывается, что система $\{\sin a_m x_1 \sin b_n x_2\}$ образована собственными функциями краевой задачи

$$\Delta w = \lambda w, w|_{x_1=0,a} = w|_{x_2=0,b} = 0. \quad (3.1.4)$$

Поэтому она является полной на прямоугольнике Ω . Остальные системы являются их производными. Поэтому они также полные.

Отметим, что выбор начала координат в центре пластины приводит к более громоздкой записи собственных функций.

Из (3.1.3) следует, что первые два равенства в (3.1.2) удовлетворяются тождественно. Для проверки остальных равенств необходимо найти соответствующие разложения в ряды функции θ_ω в (2.2.4) и внутренних силовых факторов в (2.2.26). Подставляя в них (3.1.3), получаем

$$\begin{aligned} M_{11} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{11mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, M_{22} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{22mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ M_{12} &= M_{21} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{12mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$T_{13} = -T_{31} = \sum_{n=1}^{\infty} T_{13n0}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{13mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2,$$

$$T_{23} = -T_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} T_{23m0}(\tau) \sin a_m x_1 T_{230} + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{23mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2;$$

$$\theta_\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{\omega m0}(\tau) \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{\omega 0n}(\tau) \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \theta_{\omega mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2,$$

$$R_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} R_{11m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_{110n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{11mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \quad (3.1.6)$$

$$R_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} R_{220n} \cos b_n x_2 + \sum_{m=1}^{\infty} R_{220m} \cos a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{22mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2,$$

$$N_\omega = \sum_{m=1}^{\infty} N_{\omega m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} N_{\omega 0n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} N_{\omega mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2.$$

При этом из (3.1.5), (3.1.6) с учетом полноты систем тригонометрических функций получаем равенства:

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned} M_{11mn} &= (a_m^2 + \kappa b_n^2) w_{mn}, M_{22mn} = (\kappa a_m^2 + b_n^2) w_{mn}, M_{12mn} = -2\gamma_1^{-2} a_m b_n w_{mn}, \\ T_{13mn} &= 2\alpha (a_m w_{mn} + \omega_{2mn}), T_{23mn} = 2\alpha (b_n w_{mn} - \omega_{1mn}); \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$$\begin{aligned}
\theta_{\omega mn} &= a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}, N_{\omega mn} = \eta_2 (a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}), \\
R_{11mn} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1mn} + \eta_2 b_n \omega_{2mn}, R_{22mn} = \eta_2 a_m \omega_{1mn} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{2mn}, \\
R_{12mn} &= -a_m \omega_{2mn} - \eta b_n \omega_{1mn}, R_{21mn} = -b_n \omega_{1mn} - \eta a_m \omega_{2mn};
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned}
T_{23m0} &= -2\alpha \omega_{1m0}, \\
\theta_{\omega m0} &= a_m \omega_{1m0}, R_{11m0} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1m0}, R_{22m0} = \eta_2 a_m \omega_{1m0}, N_{\omega m0} = \eta_2 \theta_{\omega m0}.
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
T_{13n0} &= 2\alpha \omega_{20n}, \\
\theta_{\omega 0n} &= b_n \omega_{20n}, R_{110n} = \eta_2 b_n \omega_{20n}, R_{220n} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{20n}, N_{\omega 0n} = \eta_2 \theta_{\omega 0n}.
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

В последних равенствах использованы обозначения (2.2.19) и соответствующие формулы из (2.2.14).

Из (3.1.5), (3.1.6) вытекает, что все остальные равенства в (3.1.2), начиная со второй пары, также удовлетворяются тождественно.

Для получения уравнений, связывающих коэффициенты рядов (3.1.3), выполняется подстановка этих рядов в выражение (2.2.26). Перед этим правые части исходных уравнений раскладываются в соответствующие ряды:

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
\tilde{m}_{M1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
\tilde{m}_{M2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M20n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2.
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

В результате получаем

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(3)} &= \mathbf{A}_{mn}^{(3)} \mathbf{X}_{mn}^{(3)} + \mathbf{B}_{mn}^{(3)}, \\
\mathbf{A}_{mn}^{(3)} &= (a_{mnij})_{3 \times 3}, \mathbf{X}_{mn}^{(3)} = (w_{mn}, \omega_{1mn}, \omega_{2mn})^T, \mathbf{B}_{mn}^{(3)} = (p_{mn}, \tilde{m}_{M1mn}, \tilde{m}_{M2mn})^T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{mn11} &= -(a_m^2 + b_n^2) \left[r^2 (a_m^2 + b_n^2) + 4\alpha \right], a_{mn12} = -4\alpha b_n, a_{mn13} = 4\alpha a_m, \\
a_{mn21} &= 4\alpha \nu b_n, a_{mn22} = -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + \gamma_2^{-2} b_n^2 + 4\alpha \nu + c_{02} a_m^2), \\
a_{mn23} &= a_{mn32} = -c_{02} a_m b_n, a_{mn31} = -4\alpha \nu a_m, \\
a_{mn33} &= -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + \gamma_2^{-2} b_n^2 + 4\alpha \nu + c_{02} b_n^2);
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\ddot{\omega}_{1m0} = a_{m022} \omega_{1m0} + \tilde{m}_{M1m0}, a_{m022} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha \nu) \tag{3.1.13}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\ddot{\omega}_{20n} = a_{0n33} \omega_{20n} + \tilde{m}_{M20n}, a_{0n33} = -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha \nu) \tag{3.1.14}$$

Эта уравнения совместно с вытекающими из (2.1.7) нулевыми начальными условиями

$$w_{mn}|_{\tau=0} = \dot{w}_{mn}|_{\tau=0} = \omega_{1mn}|_{\tau=0} = \dot{\omega}_{1mn}|_{\tau=0} = \omega_{2mn}|_{\tau=0} = \dot{\omega}_{2mn}|_{\tau=0} = 0 \tag{3.1.15}$$

образуют задачи Коши.

Решение задач, соответствующих (3.1.13) и (3.1.14) не представляет сложностей. К начальным задачам (3.1.12), (3.1.15) применяем преобразование преобразования Лапласа по времени [10, 31] (верхний индекс « L » указывает на изображение; s - параметр преобразования). В результате получаем

$$\mathbf{X}_{mn}^{(3)L}(s) = -(\mathbf{A}_{mn}^{(3)} - \mathbf{E}s^2)^{-1} \mathbf{B}_{mn}^{(3)} \tag{3.1.16}$$

Очевидно, элементы искомого столбца есть правильные дроби со знаменателем – бикубическим многочленом. Их оригиналы находим с помощью вычетов [31]:

$$\mathbf{X}_{mn}^{(3)}(\tau) = \sum_{k=1}^6 \operatorname{res}_{s=S_k} \mathbf{X}_{mn}^{(3)L} e^{s\tau} \tag{3.1.17}$$

где S_k - нули знаменателя

Для примера рассмотрим сосредоточенную в точке (x_{10}, x_{20}) , где $0 < x_{10} < a, 0 < x_{20} < b$, нагрузку следующего вида

$$p = \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})H(\tau), \tilde{m}_{M1} = \tilde{m}_{M2} = 0 \quad (3.1.18)$$

где $\delta(x_1, x_2)$ и $H(\tau)$ - дельта-функция Дирака и функция Хевисайда [10, 49].

Ей соответствуют следующие коэффициенты рядов (3.1.7) [29]:

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}) H(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2 dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{4}{ab} H(\tau) \sin a_m x_{10} \sin b_n x_{20}, \tilde{m}_{M1mn} = \tilde{m}_{M2mn} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

При этих условиях начальные задачи, соответствующие уравнениям (3.1.13) и (3.1.14), однородные. Поэтому их решения тривиальные

$$\omega_{1m0} \equiv 0 \quad (m \geq 1), \omega_{20n} \equiv 0 \quad (n \geq 1) \quad (3.1.20)$$

Далее везде в расчетах будем полагать, что материал - композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, со следующими физическими характеристиками [8, 27]:

$$\begin{aligned} \lambda &= 7,59 \text{ ГПа}; \mu = 1,89 \text{ ГПа}; \alpha = 7,45 \text{ МПа}; \gamma + \varepsilon = 2,64 \text{ кН}; \\ J &= 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}; c_1 = 2,28 \cdot 10^3 \text{ м/с}; c_2 = 9,29 \cdot 10^2 \text{ м/с}; \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Плотность материала, скорости c_3, c_4 и необходимые в этой главе безразмерные параметры находим с помощью (2.2.14) при учете (2.1.2) и в предположении $\beta/\gamma = \lambda/\mu$:

$$\begin{aligned} \rho &= \mu/c_2^2 = 2,19 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \beta + 2\gamma = 2,65 \text{ кН}, \gamma = 0,440 \text{ кН}; \beta = 1,77 \text{ кН}, \\ \varepsilon &= 2,20 \text{ кН}; \gamma - \varepsilon = -1,76 \text{ кН}; c_3 = 2,48 \cdot 10^3 \text{ м/с}; c_4 = 2,485 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \\ \gamma_1 &= 2,45; \gamma_2 = 0,919; \gamma_3 = 1,20; \gamma_0 = 0,917; \alpha' = 0,66 \cdot 10^{-3}; \\ \nu &= 5,1 \cdot 10^6; \kappa = 0,668; \eta = -0,667; \eta_1 = 0,167; \eta_2 = 0,670. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

При этом все соотношения в (2.1.2) выполняются.

В качестве характерного линейного размера принимаем $L = 1$ м. Считаем, что толщина пластины $h = 0,05$ м, откуда, используя (2.1.1), получаем

$$r^2 = \frac{h^2}{12L^2} = 0,208 \cdot 10^{-3} \quad (3.1.23)$$

В расчетах полагаем, что пластина квадратная: $a = b = 1$, а нагрузка приложена в ее центре: $x_{10} = x_{20} = 1/2$. При этом коэффициенты p_{mn} в (3.1.19) определяются так:

$$p_{mn} = 4H(\tau) \begin{cases} 0 & \text{при } m = 2k \text{ или } n = 2l, \\ (-1)^k (-1)^l & \text{при } m = 2k + 1 \text{ и } n = 2l + 1. \end{cases} \quad (3.1.24)$$

При расчетах ряды (3.1.3), (3.1.5) и (3.1.6) вида

$$f(x_1, x_2, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}(x_1, x_2, \tau)$$

заменяются частичными суммами $S_N(x_1, x_2, \tau) = \sum_{m,n=1}^N f_{mn}(x_1, x_2, \tau)$. Погрешность

приближенного равенства $f \approx S_N$ оценивается следующими величинами:

- при фиксированных x_1 и x_2

$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau}}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau}}, \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau} = \max_{\tau \in [0, T]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|; \quad (3.1.25)$$

- при фиксированных x_2 и τ

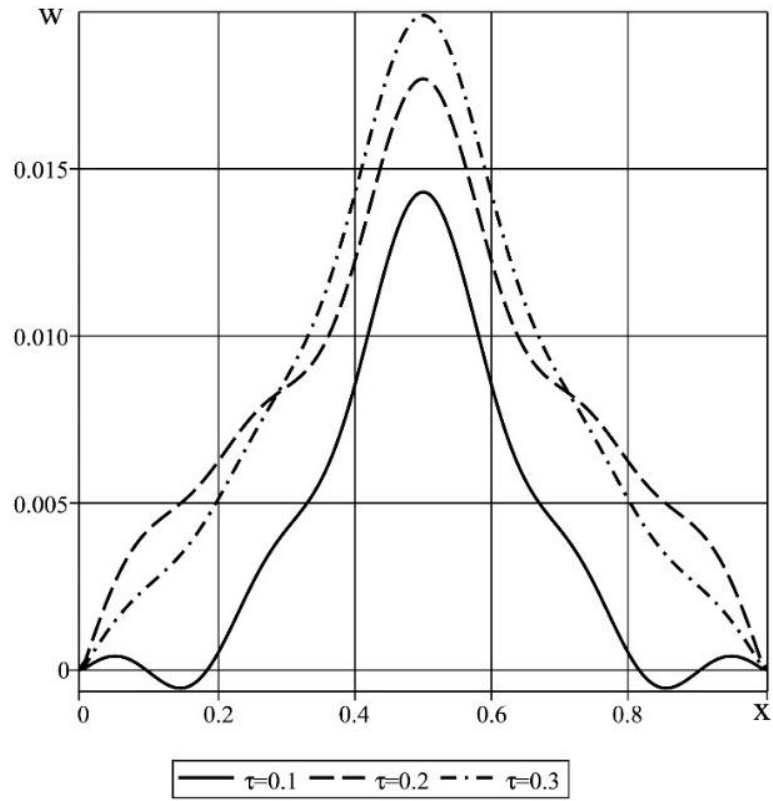
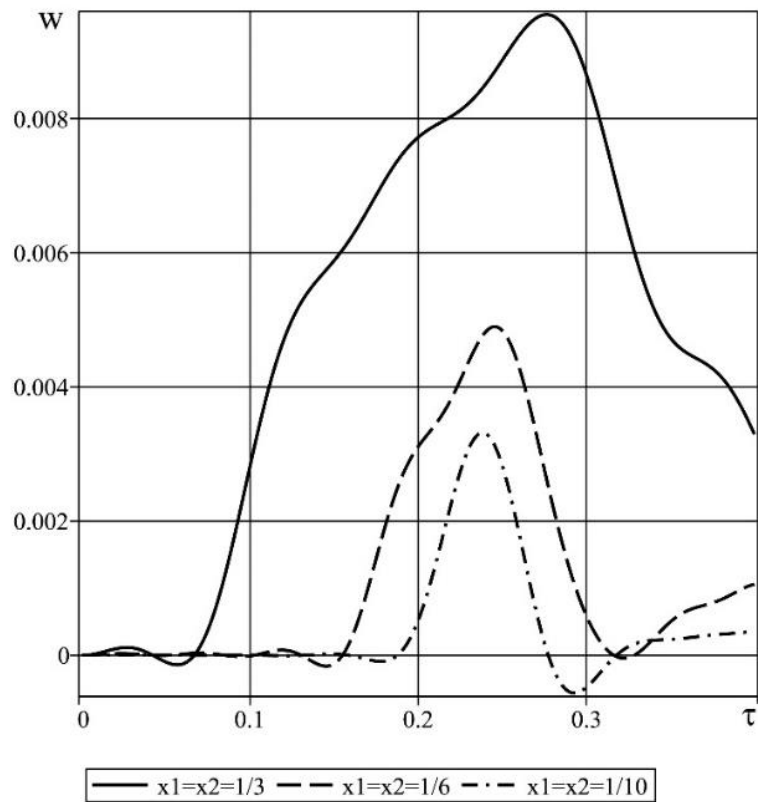
$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_1}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_1}, \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_1 = \max_{x_1 \in [0, 1]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|; \quad (3.1.26)$$

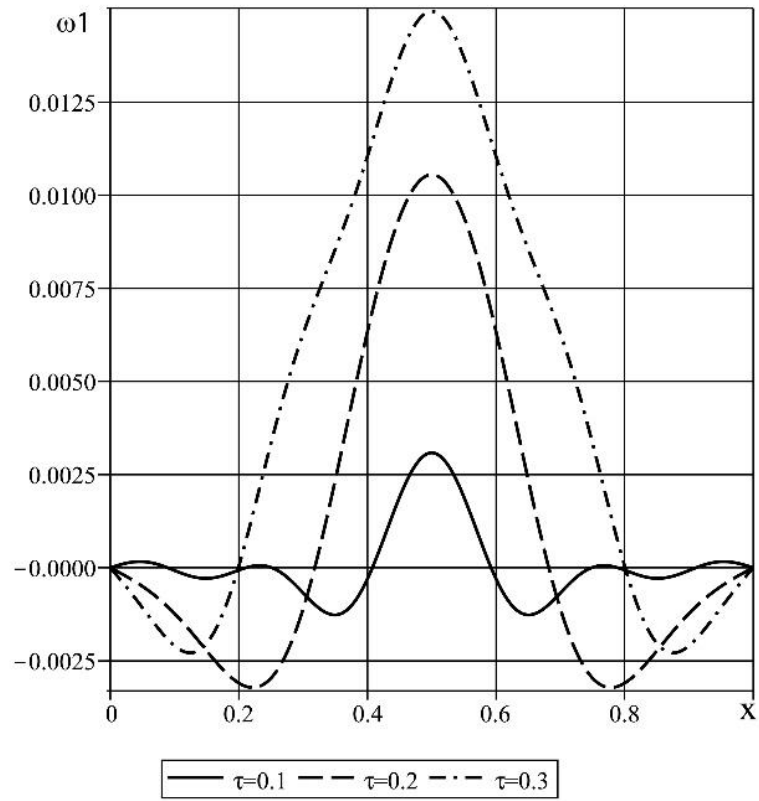
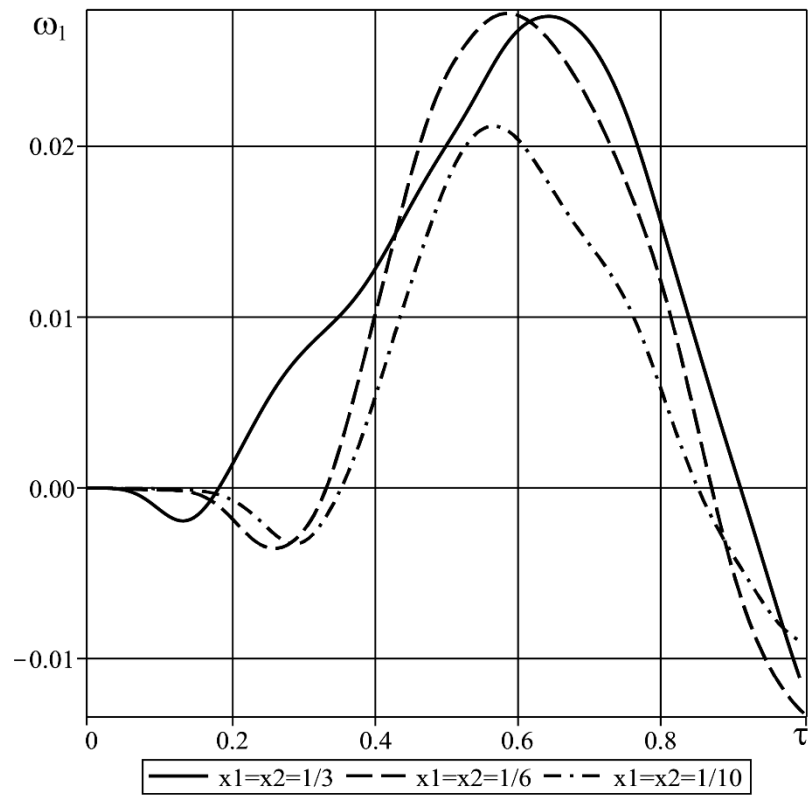
- при фиксированных x_1 и τ

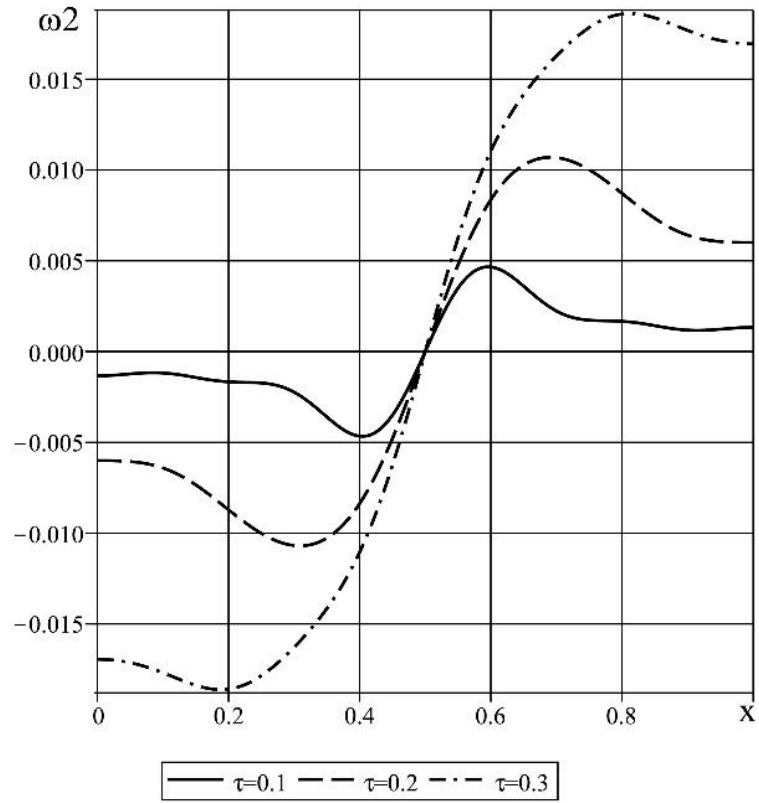
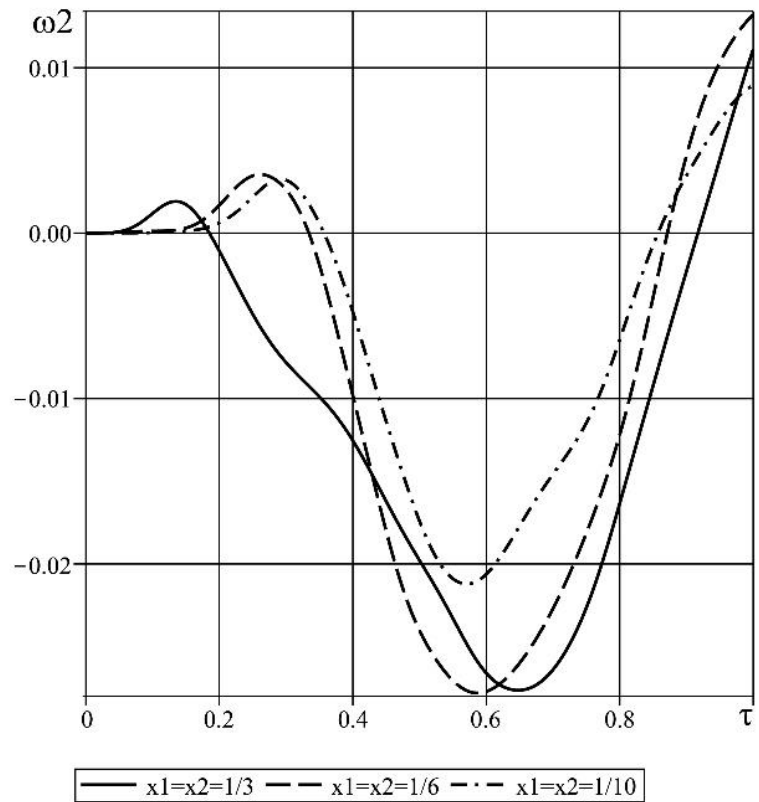
$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_2}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_2}, \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_2 = \max_{x_2 \in [0, 1]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|, \quad (3.1.27)$$

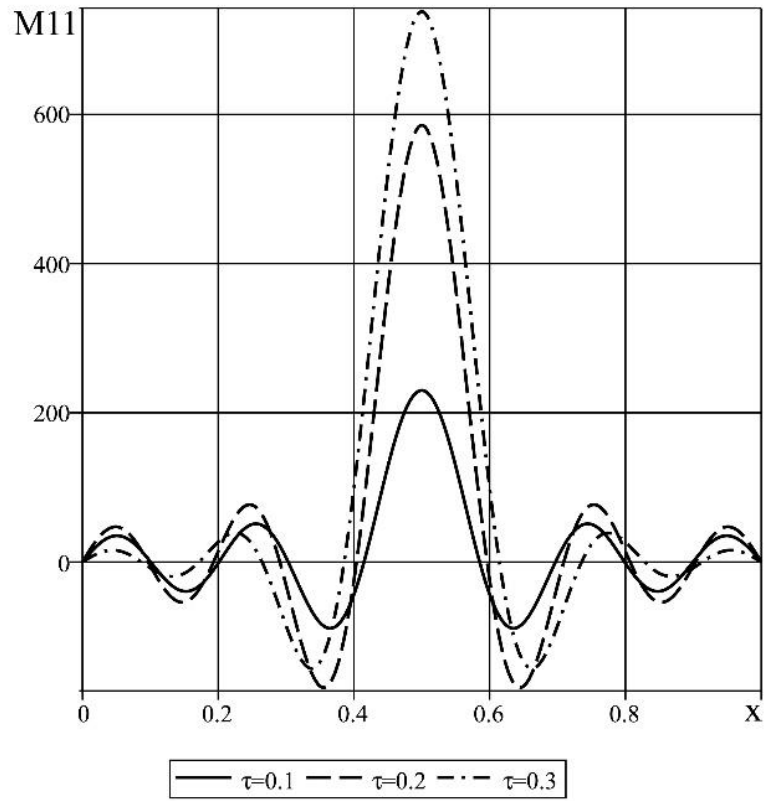
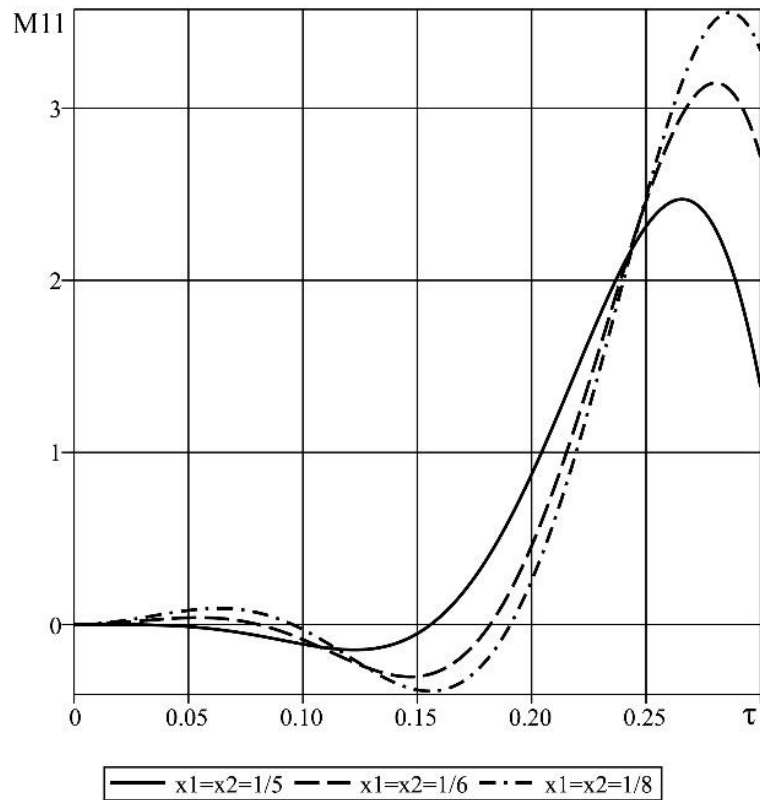
где величина T определяет рассматриваемый диапазон изменения времени.

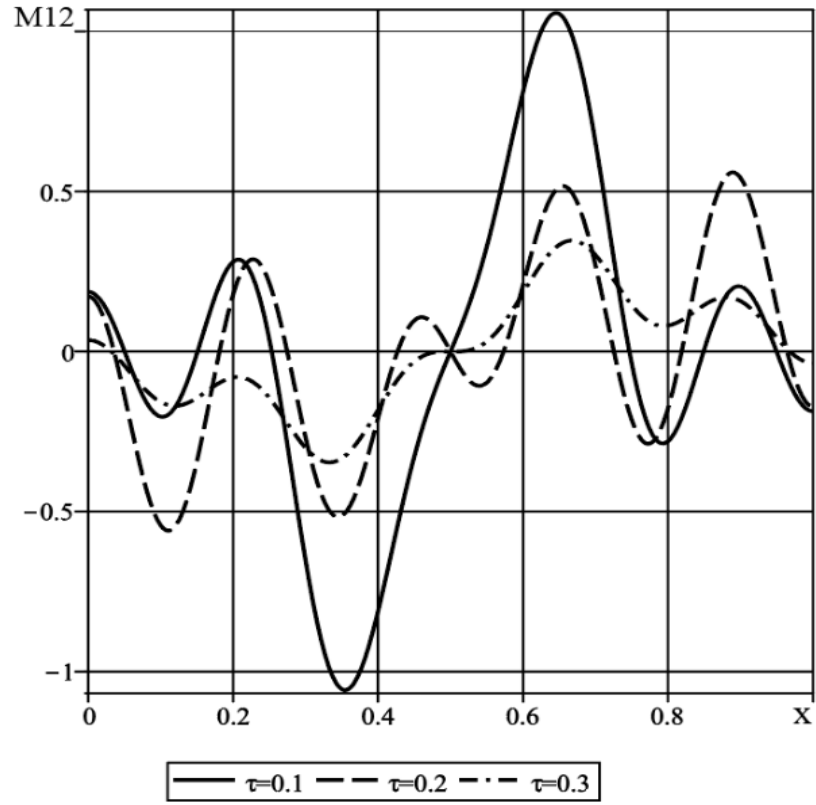
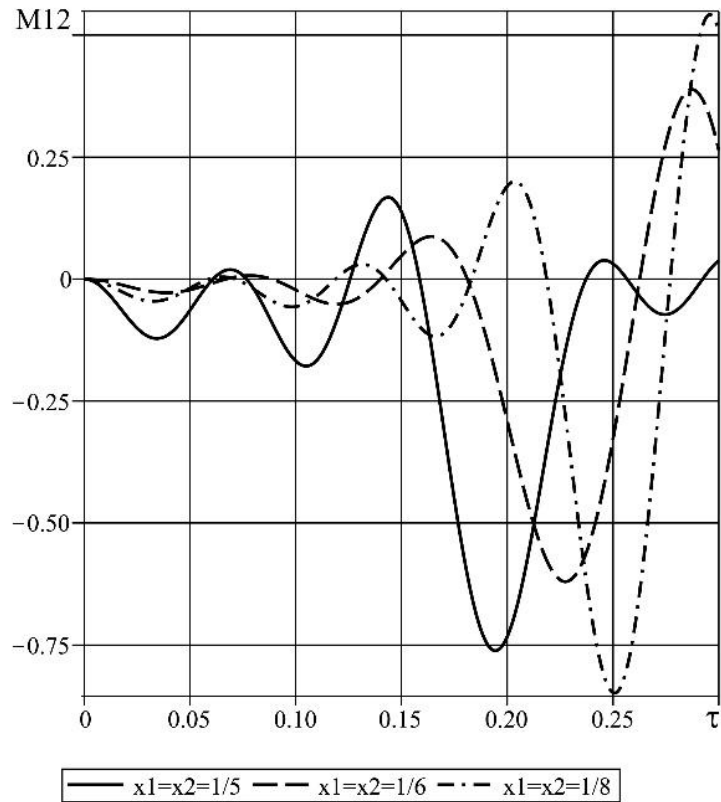
На рис. 3.1.1-3.1.24 приведены зависимости прогиба W и углов поворота ω_1, ω_2 , а также внутренних силовых факторов $M_{11} = M_{22}, M_{12}, T_{13} = -T_{31}, T_{23} = -T_{32}$ и $R_{11}, R_{22}, R_{12}, R_{21}, N_{\omega}$ от координат x_1, x_2 и времени соответственно при различных значениях τ и x_1, x_2 . Во всех вариантах погрешность ε составляла менее 5% при $N = 30$.

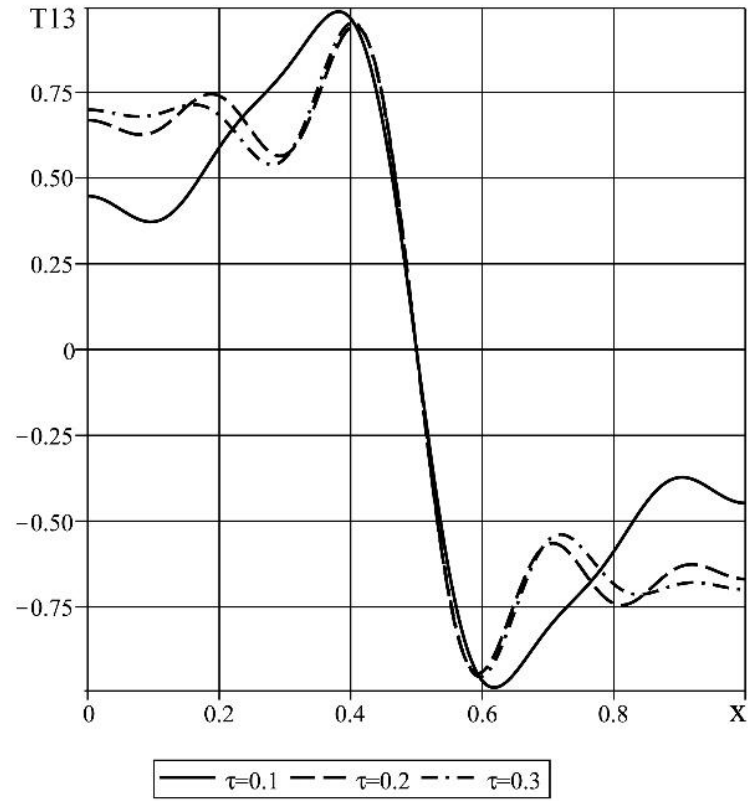
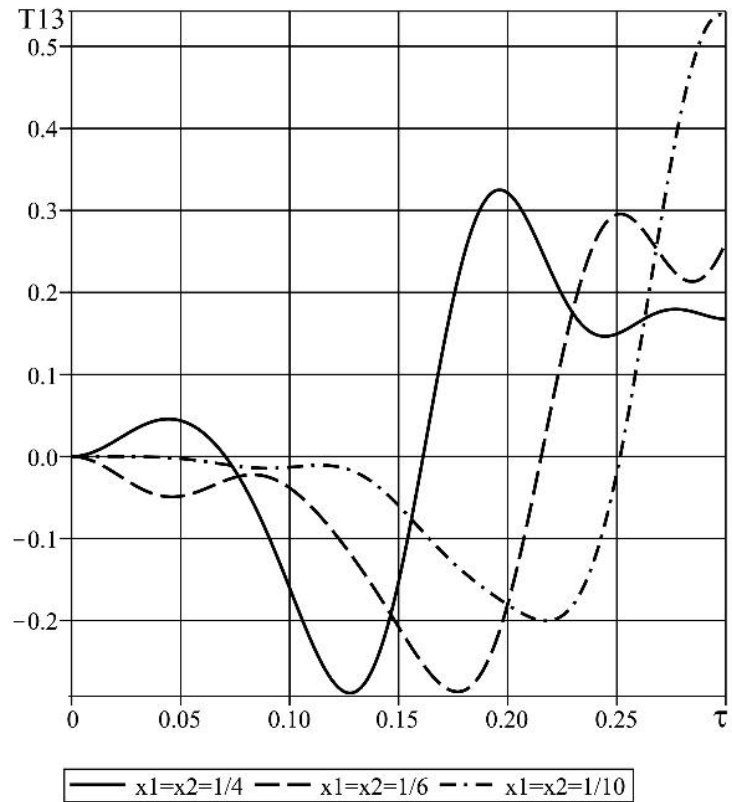
Рис 3.1: Зависимость W от времени τ Рис 3.2: Зависимость W от координат x_1, x_2

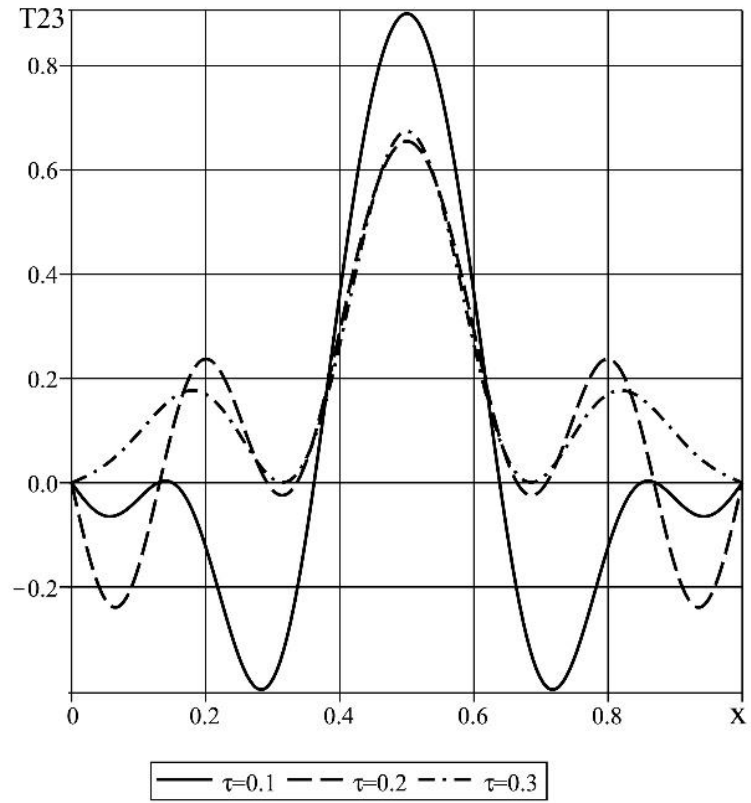
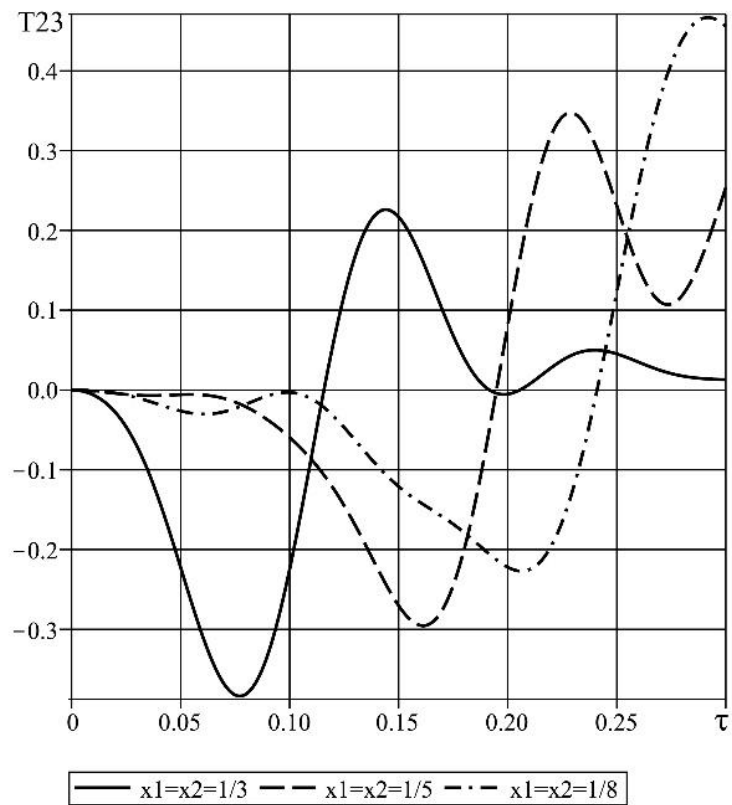
Рис 3.3: Зависимость ω_1 от времени τ Рис 3.4: Зависимость ω_1 от координат x_1, x_2

Рис 3.5: Зависимость ω_2 от времени τ Рис 3.6: Зависимость ω_2 от координат x_1, x_2

Рис 3.7: Зависимость M_{11} от времени τ Рис 3.8: Зависимость M_{11} от координат x_1, x_2

Рис 3.9: Зависимость M_{12} от времени τ Рис 3.10: Зависимость M_{12} от координат x_1, x_2

Рис 3.11: Зависимость T_{13} от времени τ Рис 3.12: Зависимость T_{13} от координат x_1, x_2

Рис 3.13: Зависимость T_{23} от времени τ Рис 3.14: Зависимость T_{23} от координат x_1, x_2

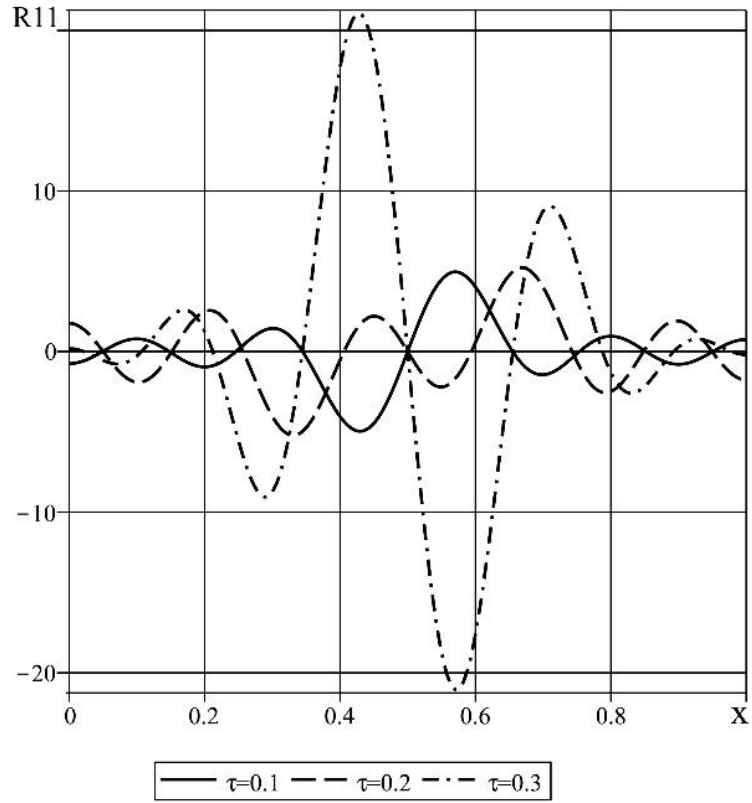


Рис 3.15: Зависимость R_{11} от времени τ

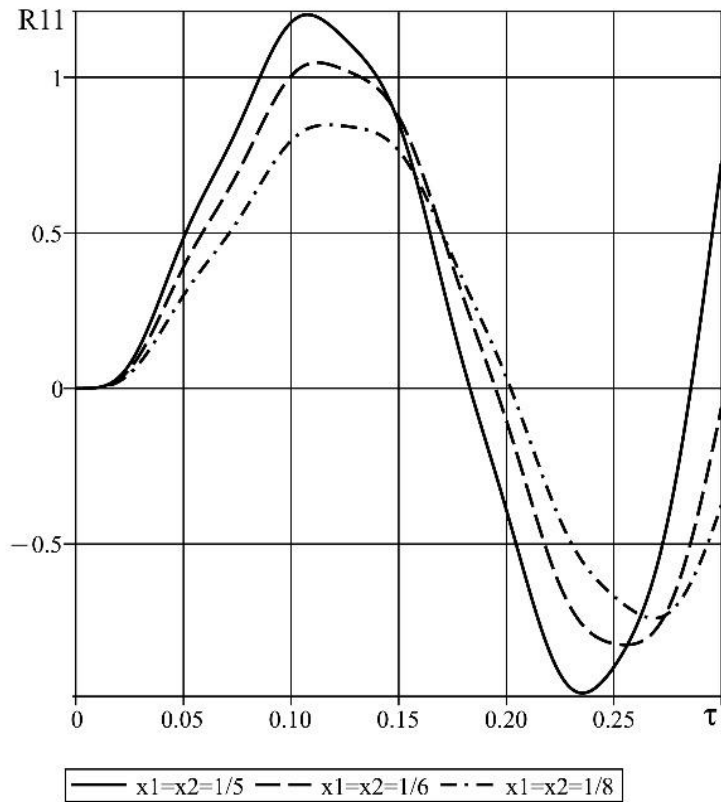


Рис 3.16: Зависимость R_{11} от координат x_1, x_2

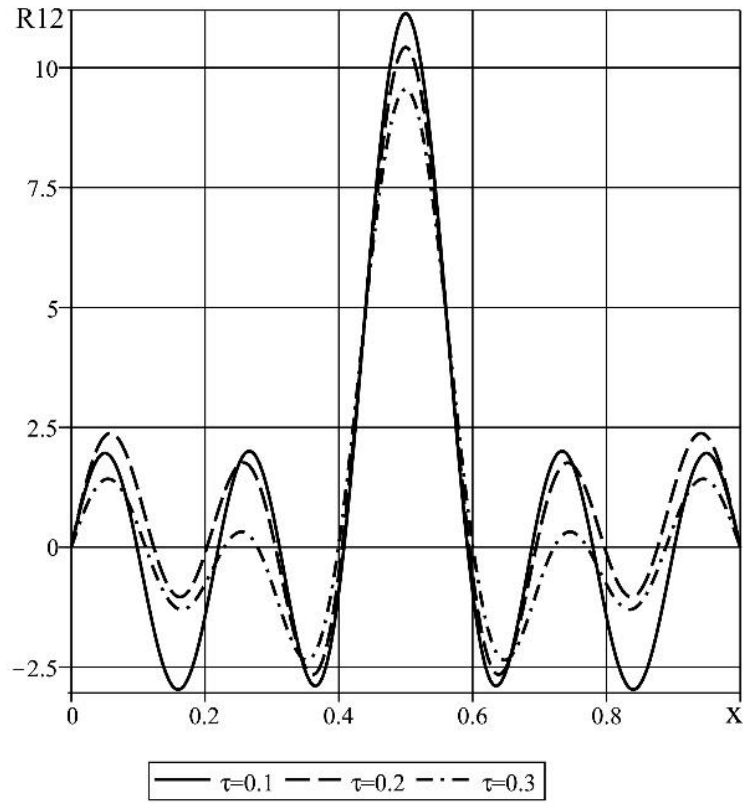


Рис 3.17: Зависимость R_{12} от времени τ

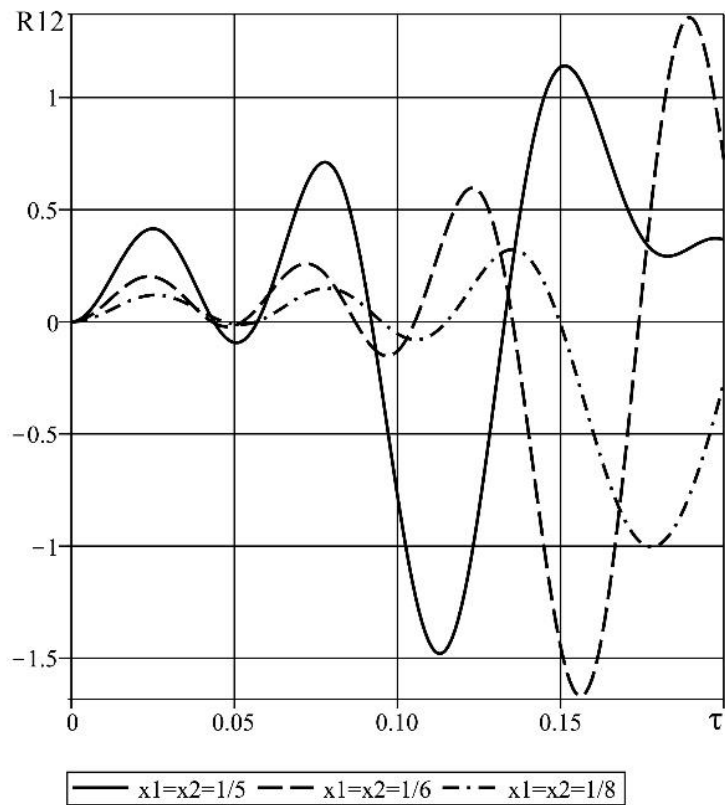
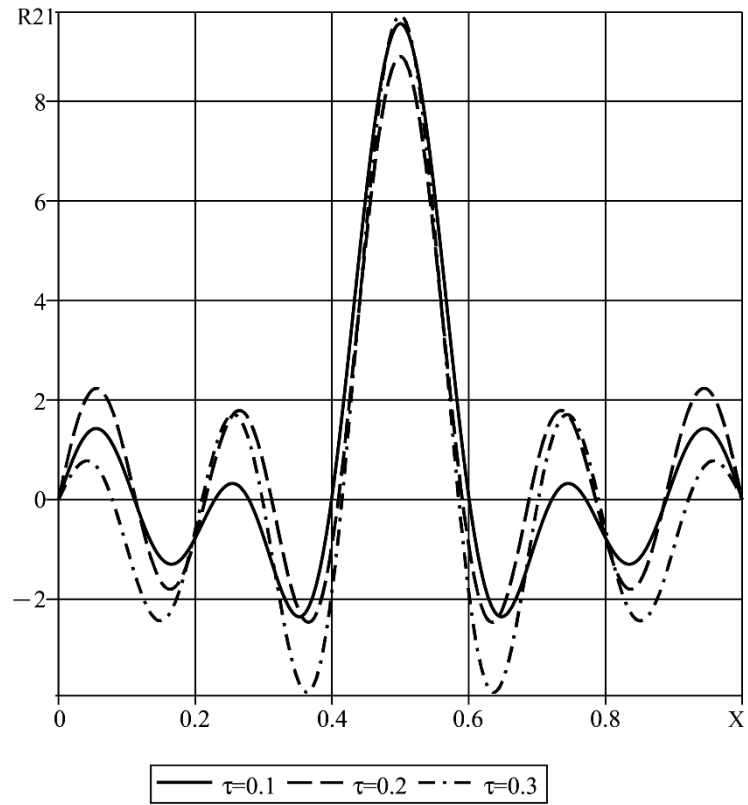
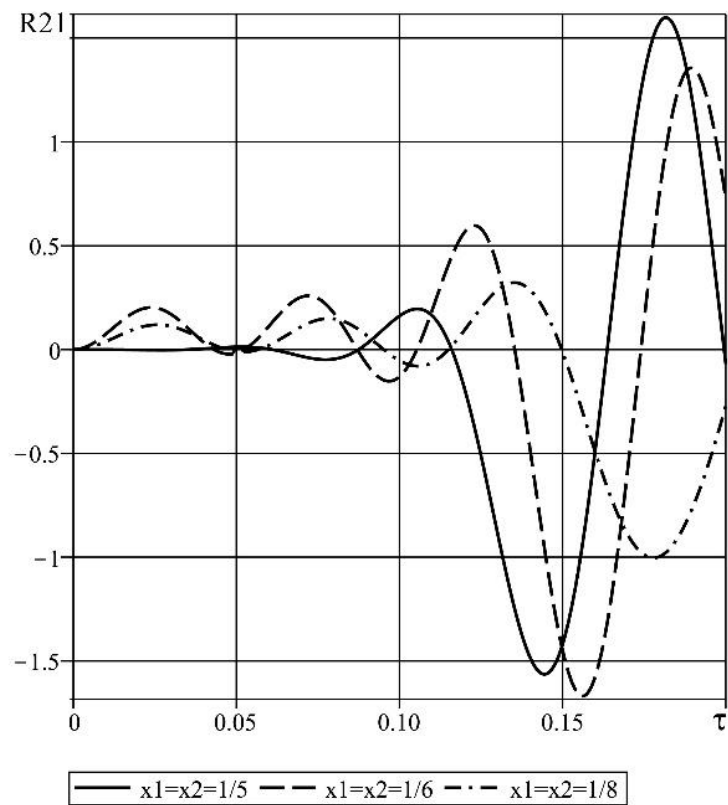
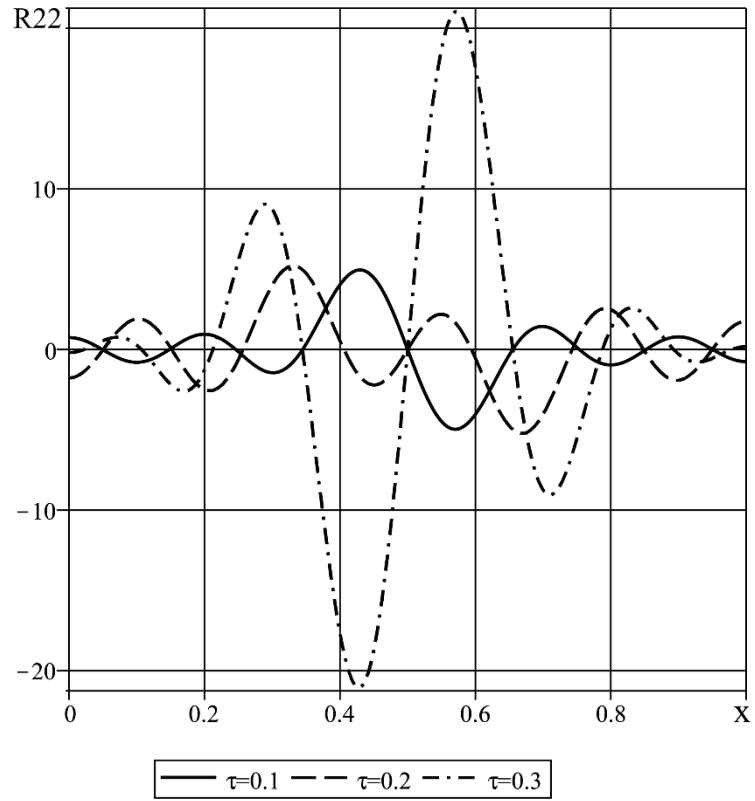
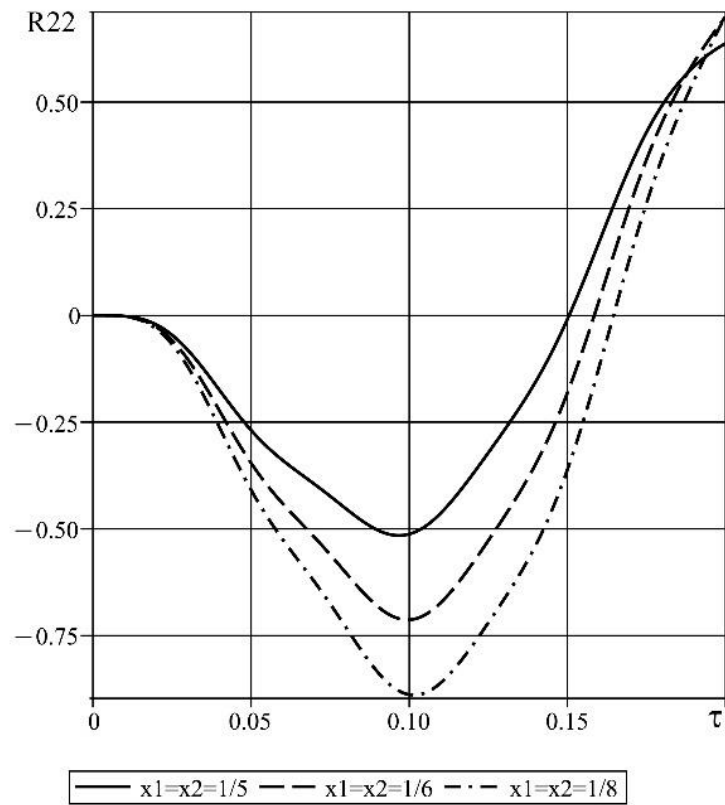
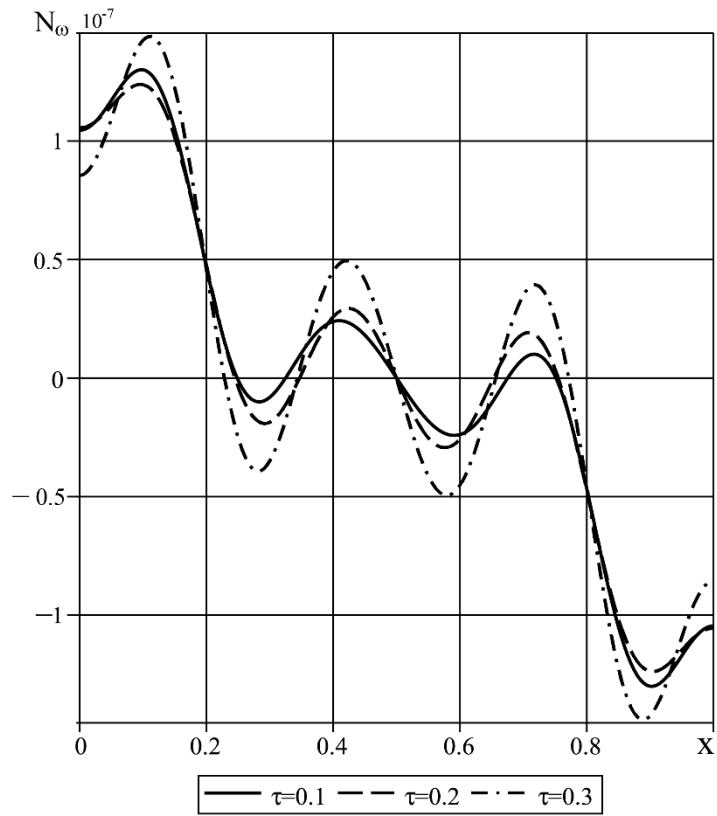
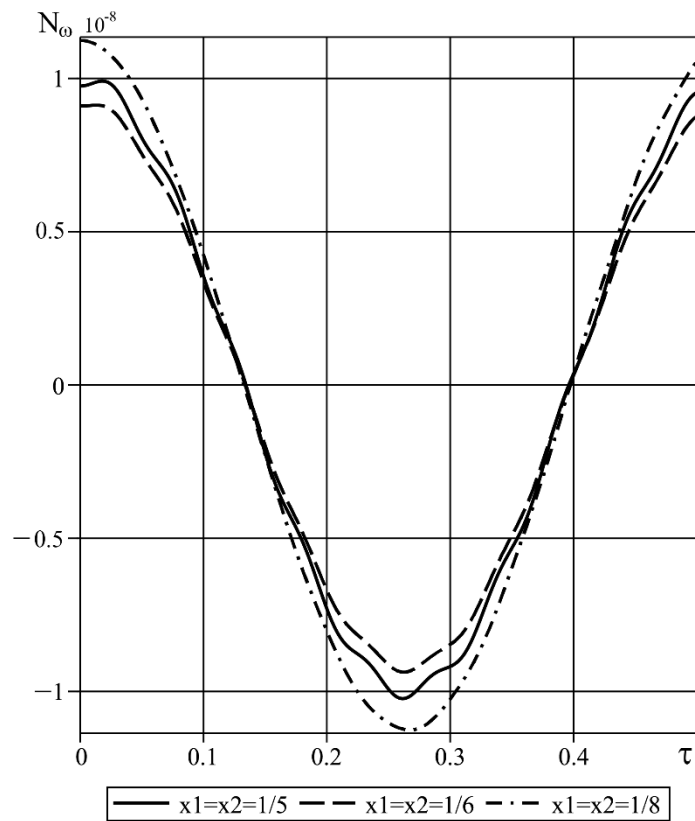


Рис 3.18: Зависимость R_{12} от координат x_1, x_2

Рис 3.19: Зависимость R_{21} от времени τ Рис 3.20: Зависимость R_{21} от координат x_1, x_2

Рис 3.21: Зависимость R_{22} от времени τ Рис 3.22: Зависимость R_{22} от координат x_1, x_2

Рис 3.23: Зависимость N_ω от времени τ Рис 3.24: Зависимость N_ω от координат x_1, x_2

3.2. Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины – модель 2

Здесь геометрия пластины такая же, как в (3.1.1), уравнениями движения являются равенства (2.2.23), физическими соотношениями – равенства (2.2.24), а начальные условия – нулевые.

К граничным условиям (3.1.2) согласно указанным в разделе 2.1 требованиям для этой модели добавляются равенства

$$S_{13}|_{x_1=0,a} = 0, S_{23}|_{x_2=0,b} = 0 \quad (3.2.1)$$

Для решения этой начально-краевой задачи также, как и ранее, представляем искомые функции в виде двойных тригонометрических рядов (3.1.3), добавляя к ним следующее разложение:

$$\varphi_3 = \varphi_{300} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{3m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{30n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2. \quad (3.2.2)$$

При этом разложения (3.1.5) сохраняются, а ряды (3.1.6) корректируются так:

$$\begin{aligned} M_{12} &= M_{1200} + \sum_{m=1}^{\infty} M_{12m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{120n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{12mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ M_{21} &= M_{2100} + \sum_{m=1}^{\infty} M_{21m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{210n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{21mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ R_{11} &= R_{1100} + \sum_{m=1}^{\infty} R_{11m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_{110n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{11mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ R_{22} &= R_{2200} + \sum_{n=1}^{\infty} R_{220n} \cos b_n x_2 + \sum_{m=1}^{\infty} R_{22m0} \cos a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{22mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ N_{\omega} &= N_{\omega 00} + \sum_{m=1}^{\infty} N_{\omega m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} N_{\omega 0n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} N_{\omega mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

К ним добавляются следующие ряды:

$$\begin{aligned}
S_{13} &= \sum_{m=1}^{\infty} S_{13m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} S_{13mn} \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
S_{23} &= \sum_{n=1}^{\infty} S_{230n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} S_{23mn} \cos a_m x_1 \sin b_n x_2.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

При этом, очевидно, условия (3.1.2) и (3.2.1) выполняются.

Для коэффициентов этих рядов имеют место равенства

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\theta_{\omega mn} &= a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn} \\
M_{11mn} &= (a_m^2 + \kappa b_n^2) w_{mn}, M_{22mn} = (\kappa a_m^2 + b_n^2) w_{mn}, \\
M_{12mn} &= -2\gamma_1^{-2} a_m b_n w_{mn} - 4\alpha \varphi_{3mn}, M_{21mn} = -2\gamma_1^{-2} a_m b_n w_{mn} + 4\alpha \varphi_{3mn}, \\
T_{13mn} &= 2\alpha (a_m w_{mn} + \omega_{2mn}), T_{23mn} = 2\alpha (b_n w_{mn} - \omega_{1mn}), \\
R_{11mn} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1mn} + \eta_2 b_n \omega_{2mn} + \eta_2 \varphi_{3mn}, \\
R_{22mn} &= \eta_2 a_m \omega_{1mn} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{2mn} + \eta_2 \varphi_{3mn}, \\
R_{12mn} &= -a_m \omega_{2mn} - \eta b_n \omega_{1mn}, R_{21mn} = -b_n \omega_{1mn} - \eta a_m \omega_{2mn}, \\
S_{13mn} &= -a_m \varphi_{3mn}, S_{23mn} = -b_n \varphi_{3mn}, N_{\omega mn} = \eta_2 (a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}) + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{3mn};
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned}
M_{210m} &= -M_{120m} = 4\alpha \varphi_{30m}, R_{11m0} = R_{22m0} = \eta_2 \varphi_{30m}, \\
T_{23m0} &= -2\alpha \omega_{1m0}, S_{13m0} = -a_m \varphi_{30m}, \\
\theta_{\omega m0} &= a_m \omega_{1m0}, R_{11m0} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1m0}, R_{22m0} = \eta_2 a_m \omega_{1m0}, \\
N_{\omega m0} &= \eta_2 \theta_{\omega m0} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{30m};
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
M_{210n} &= -M_{120n} = 4\alpha \varphi_{30n}, S_{230n} = -b_n \varphi_{30n}, \\
\theta_{\omega 0n} &= b_n \omega_{20n}, R_{110n} = R_{220n} = \eta_2 \varphi_{30n}, N_{\omega 0n} = \eta_2 \theta_{\omega 0n} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{30n};
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

- при $m = n = 0$

$$M_{2100} = -M_{1200} = 4\alpha \varphi_{300}, R_{1100} = R_{2200} = \eta_2 \varphi_{300}, N_{\omega 00} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{300} \tag{3.2.8}$$

Здесь, очевидно, так же как в п. 3.1, что все граничные условия (3.1.2) удовлетворяются тождественно.

Уравнения относительно коэффициентов рядов получаем подстановкой рядов (3.1.3) и (3.2.1) в (2.2.23), дополняя разложения правых частей (3.1.11) следующим равенством:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{2M} = & \tilde{m}_{2M00} + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{m}_{2Mm0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{2M0n} \cos b_n x_2 + \\ & + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{2Mmn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

В результате получаем

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(2)} = \mathbf{A}_{mn}^{(2)} \mathbf{X}_{mn}^{(2)} + \mathbf{B}_{mn}^{(2)}, \mathbf{A}_{mn}^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{mn}^{(3)} & \mathbf{b}_{mn}^{(2)} \\ \mathbf{a}_{mn}^{(2)} & a_{mn44} \end{array} \right)_{4 \times 4}, \\ \mathbf{X}_{mn}^{(2)} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{X}_{mn}^{(3)} \\ \Phi_{3mn} \end{array} \right)_{4 \times 1}, \mathbf{B}_{mn}^{(2)} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{B}_{mn}^{(3)} \\ \tilde{m}_{2Mmn} \end{array} \right)_{4 \times 1}, \\ \mathbf{b}_{mn}^{(2)} = (0, a_{mn24}, a_{mn34})^T, \mathbf{a}_{mn}^{(2)} = (0, a_{mn42}, a_{mn43}), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где матрицы с верхним индексом «(3)» определены в (3.1.12), а остальные нетривиальные элементы матрицы $\mathbf{A}_{mn}^{(2)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_{mn24} = \gamma_3^{-2} a_m, a_{mn34} = \gamma_3^{-2} b_n, \\ a_{mn42} = -\gamma_3^{-2} r^{-2} a_m, a_{mn43} = -\gamma_3^{-2} r^{-2} b_n, a_{mn44} = -\left[\gamma_2^{-2} (a_m^2 + b_n^2) + r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha\nu \right]; \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_{1m0} = a_{m022} \omega_{1m0} + a_{m024} \Phi_{3m0} + \tilde{m}_{M1m0}, a_{m022} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha\nu), a_{m024} = \gamma_3^{-2} a_m, \\ \ddot{\Phi}_{3m0} = a_{m042} \omega_{1m0} + a_{m044} \Phi_{3m0} + \tilde{m}_{2Mm0}, a_{m042} = -\gamma_3^{-2} r^{-2} a_m, \\ a_{m044} = -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha\nu); \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_{20n} = a_{0n33} \omega_{20n} + a_{0n34} \omega_{20n} + \tilde{m}_{M20n}, a_{0n33} = -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha\nu), a_{0n34} = \gamma_3^{-2} b_n, \\ \ddot{\Phi}_{30n} = a_{0n43} \omega_{20n} + a_{0n44} \Phi_{30n} + \tilde{m}_{2M0n}, a_{0n43} = -\gamma_3^{-2} r^{-2} b_n, \\ a_{0n44} = -(\gamma_2^{-2} b_n^2 + r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha\nu); \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

- при $m, n = 0$

$$\ddot{\Phi}_{300} = a_{0044}\Phi_{30n} + \tilde{m}_{2M0n}, a_{0044} = -(r^{-2}\gamma_0^{-2} + 4\alpha\nu) \quad (3.2.14)$$

Эти уравнения совместно с дополнением к (3.1.15) равенств

$$\Phi_{3mn}|_{\tau=0} = \dot{\Phi}_{3mn}|_{\tau=0} = 0 \quad (3.2.15)$$

образует задачи Коши.

Решение задач, соответствующих (3.2.12) - (3.2.14) не представляет сложностей. К начальным задачам (3.2.10), (3.1.12), (3.2.15) аналогичный использованному в п. 3.1 алгоритм. В результате получаем

$$\mathbf{X}_{mn}^{(2)L}(s) = -(\mathbf{A}_{mn}^{(2)} - \mathbf{E}s^2)^{-1} \mathbf{B}_{mn}^{(2)} \quad (3.2.16)$$

$$\mathbf{X}_{mn}^{(2)}(\tau) = \sum_{k=1}^8 \operatorname{res}_{s=s_k} \mathbf{X}_{mn}^{(2)L} e^{s\tau} \quad (3.2.17)$$

Для примера аналогично п. 3.1 рассматриваем сосредоточенную нагрузку (3.1.18), дополненную равенствами

$$\tilde{m}_{2M} = 0 \quad (3.2.18)$$

При этом к коэффициентам разложения в ряды (3.1.19) добавляются соотношения

$$\tilde{m}_{2Mmn} = 0 \quad (3.2.19)$$

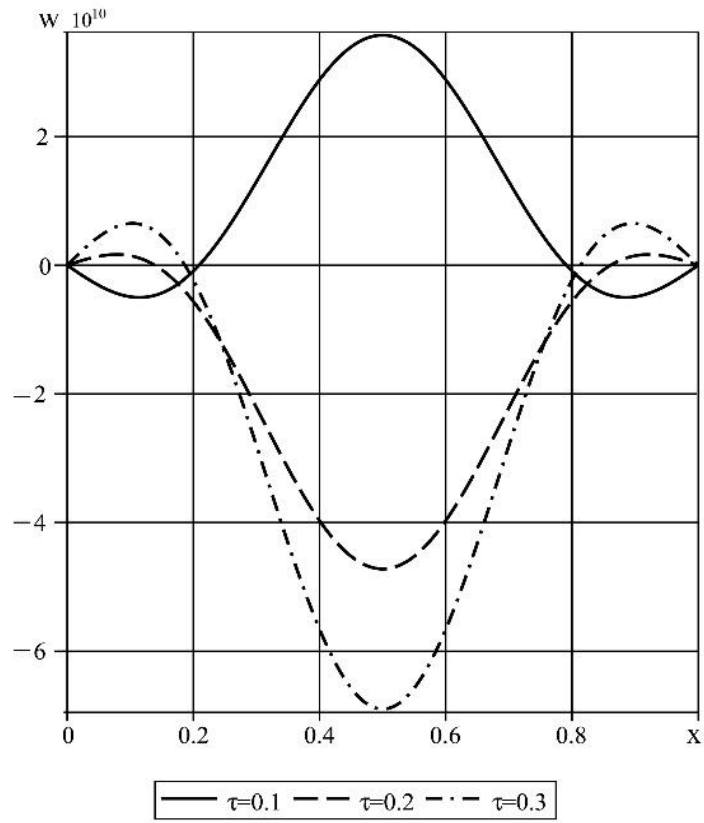
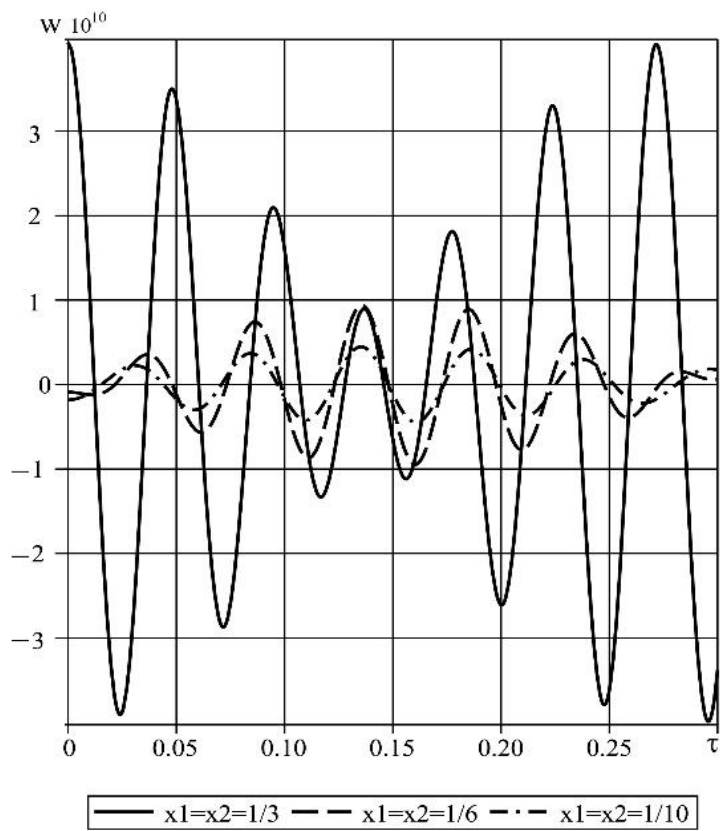
При этих условиях начальные задачи, соответствующие уравнениям (3.2.12) - (3.2.14), однородные. Поэтому их решения тривиальные

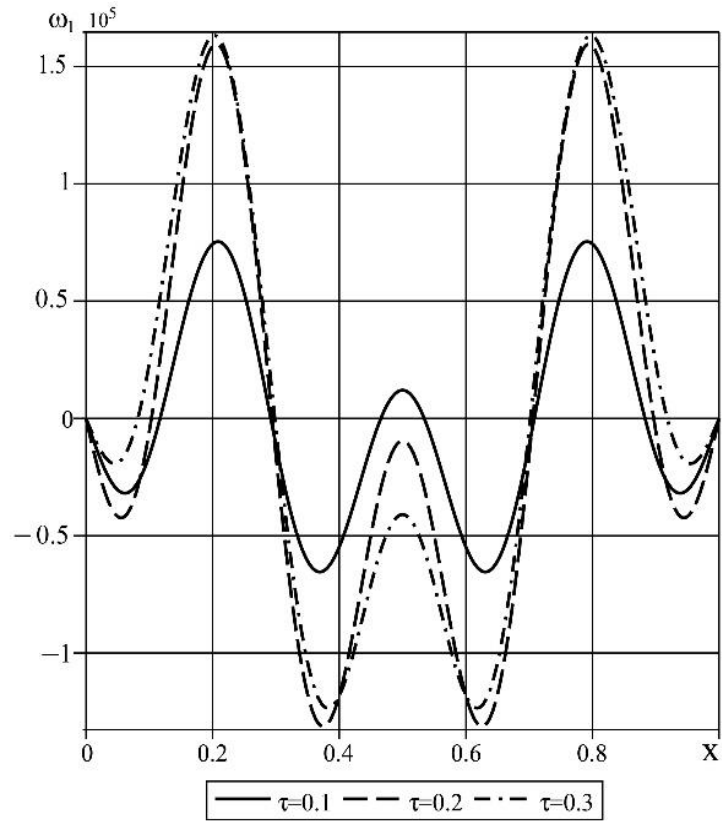
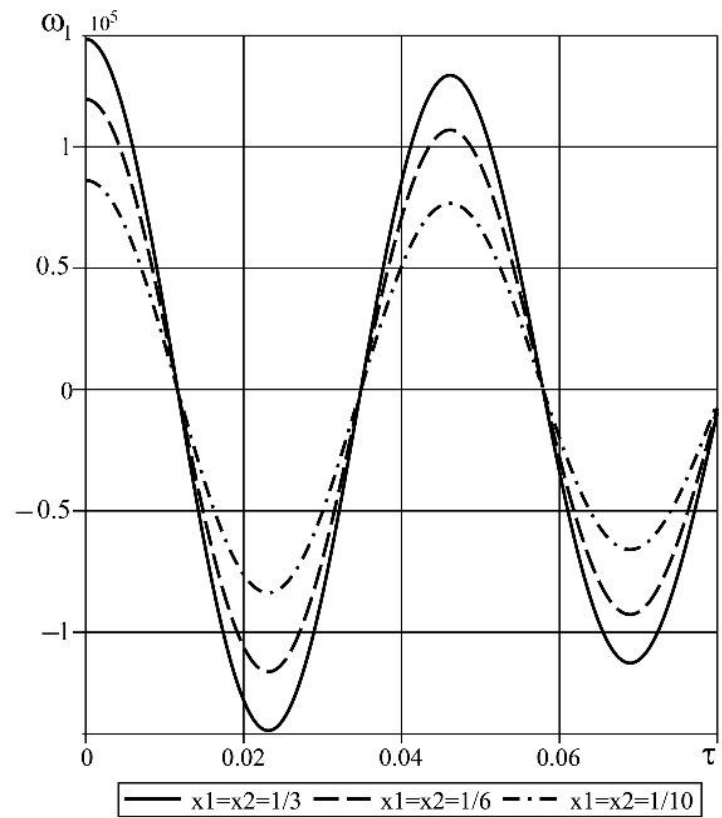
$$\omega_{1m0} = \varphi_{3m0} \equiv 0 \quad (m \geq 1), \omega_{20n} = \varphi_{30n} \equiv 0 \quad (n \geq 0) \quad (3.2.20)$$

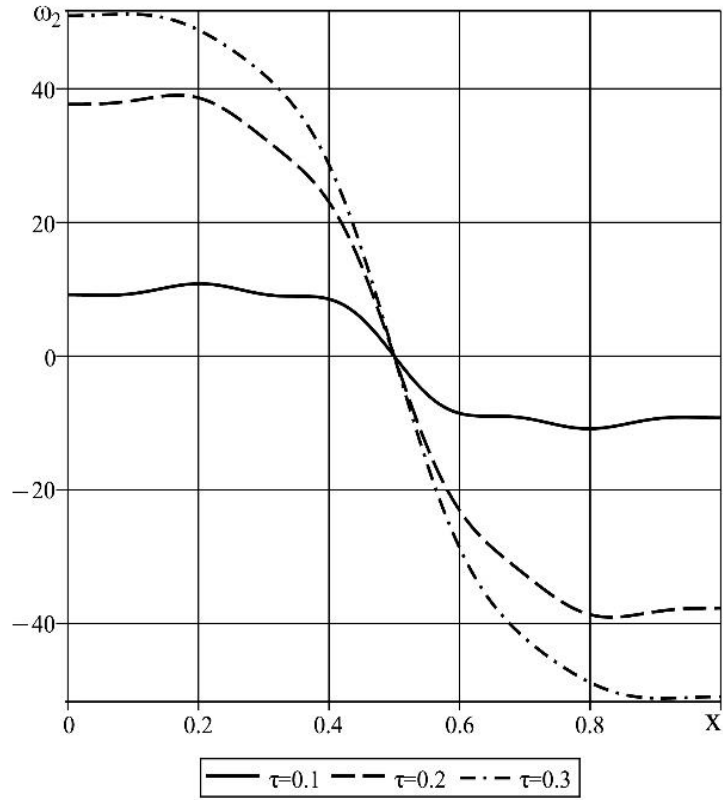
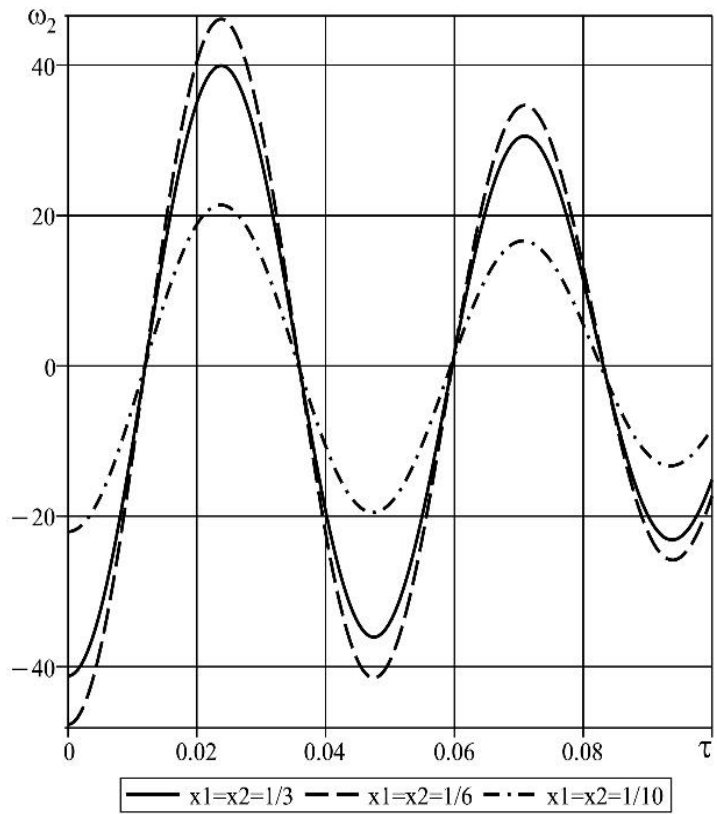
Физические и геометрические характеристики пластины и точку приложения сосредоточенной нагрузки принимаем такими же, как в п. 3.1.

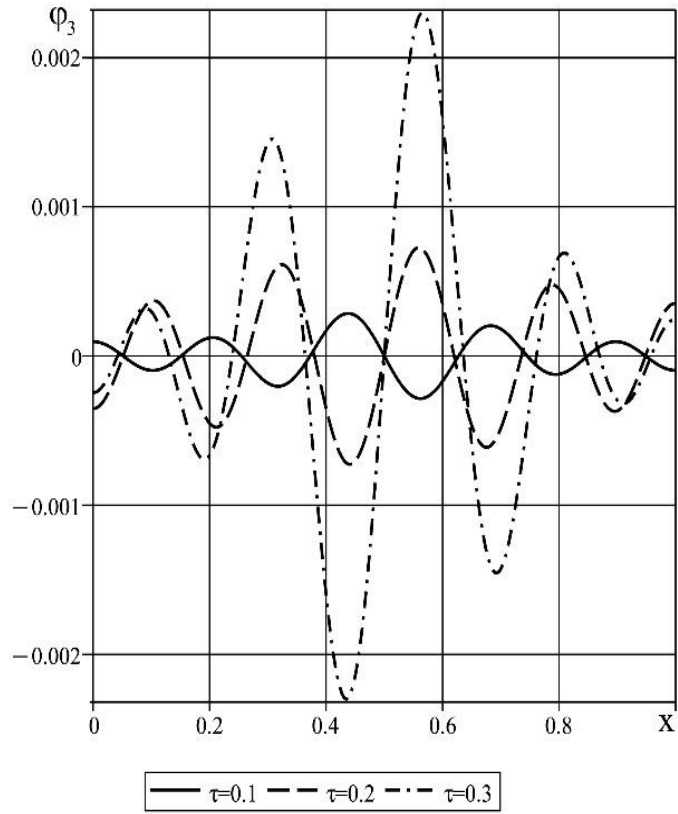
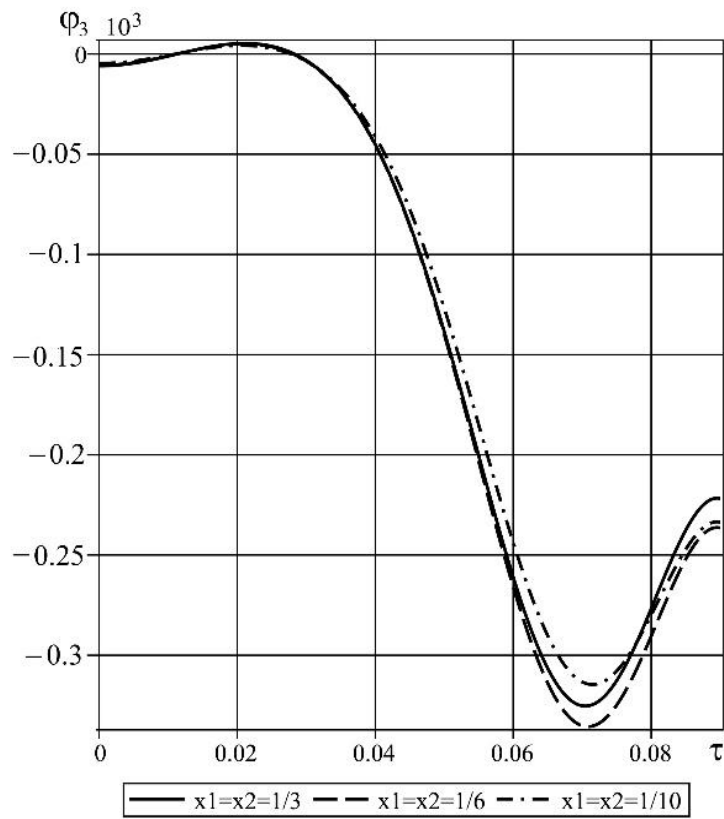
Соответствующие начальные задачи интегрируются численно. Ряды (3.2.3) суммируются с помощью критерия (3.1.25).

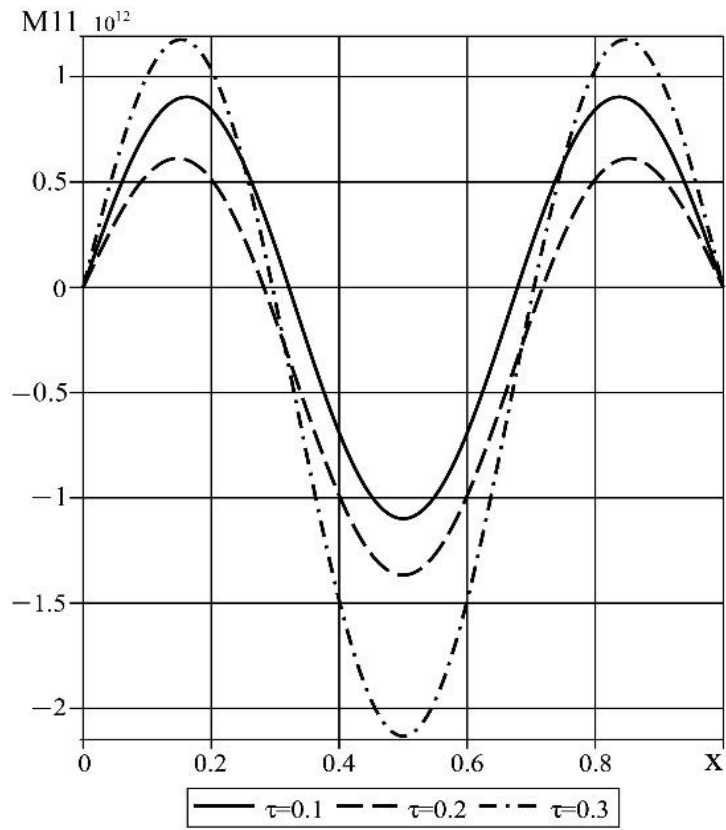
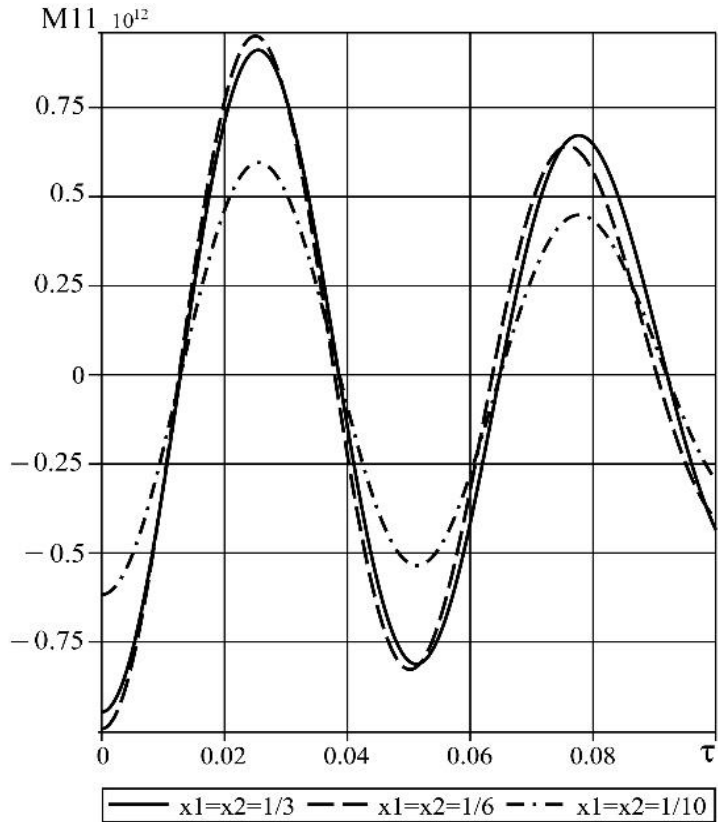
На рис. 3.2.1 - 3.2.34 приведены зависимости прогиба W , углов поворота ω_1, ω_2 и величины Φ_3 , а также внутренних силовых факторов $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}, T_{13} = -T_{31}, T_{23} = -T_{32}, S_{13}, S_{23}, R_{11}, R_{22}, R_{12}, R_{21}$, от координат x_1, x_2 и времени соответственно при различных значениях τ и x_1, x_2 .

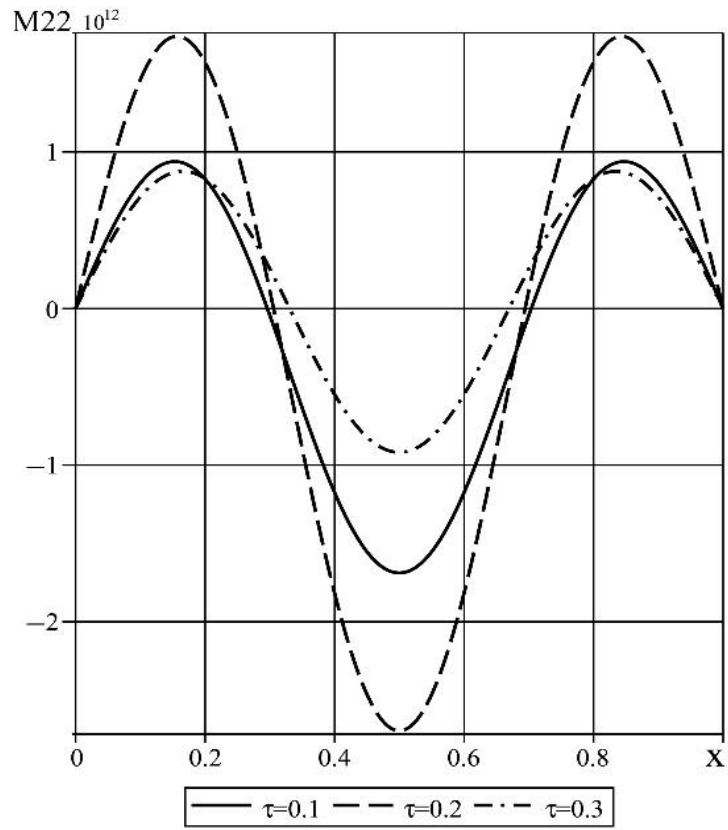
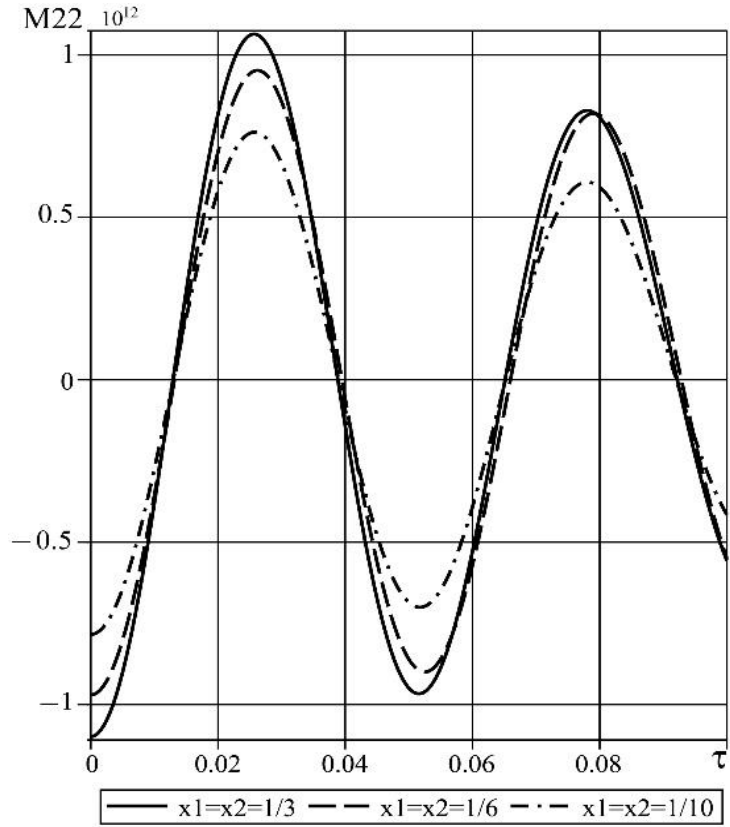
Рис 3.25: Зависимость W от времени τ Рис 3.26: Зависимость W от координат x_1, x_2

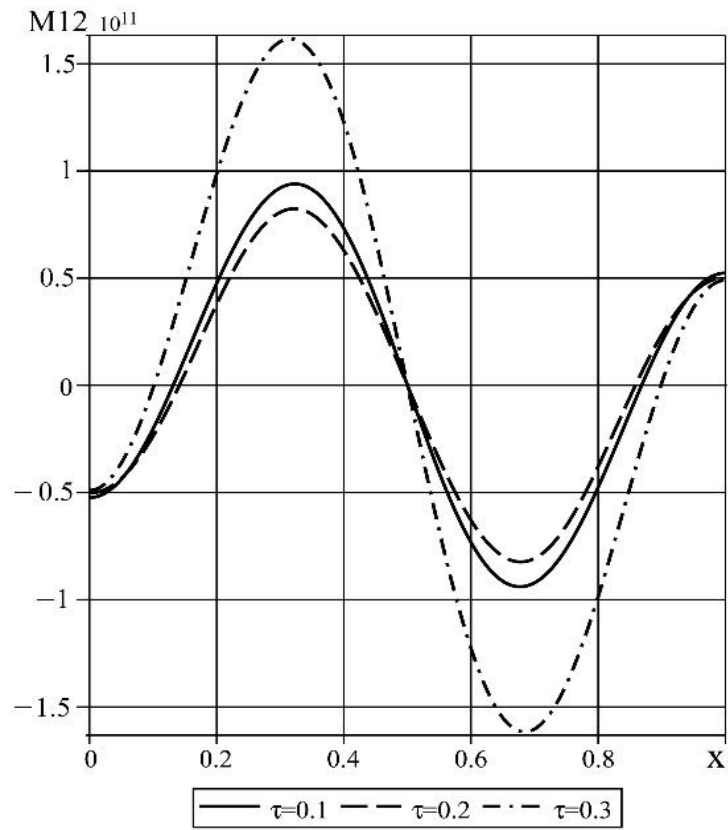
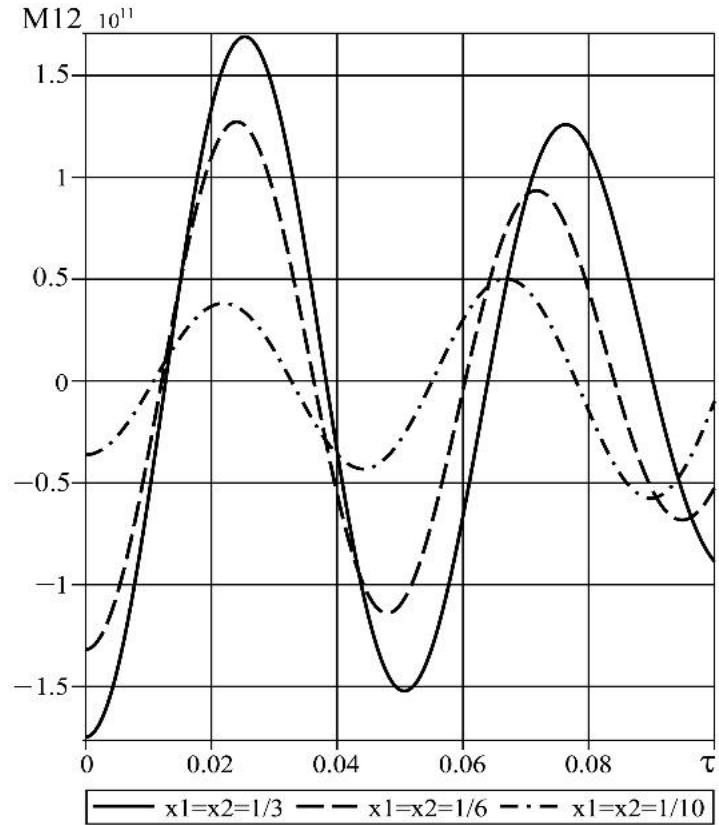
Рис 3.27: Зависимость ω_1 от времени τ Рис 3.28: Зависимость ω_1 от координат x_1, x_2

Рис 3.29: Зависимость ω_2 от времени τ Рис 3.30: Зависимость ω_2 от координат x_1, x_2

Рис 3.31: Зависимость φ_3 от времени τ Рис 3.32: Зависимость φ_3 от координат x_1, x_2

Рис 3.33: Зависимость M_{11} от времени τ Рис 3.34: Зависимость M_{11} от координат x_1, x_2

Рис 3.35: Зависимость M_{22} от времени τ Рис 3.36: Зависимость M_{22} от координат x_1, x_2

Рис 3.37: Зависимость M_{12} от времени τ Рис 3.38: Зависимость M_{12} от координат x_1, x_2

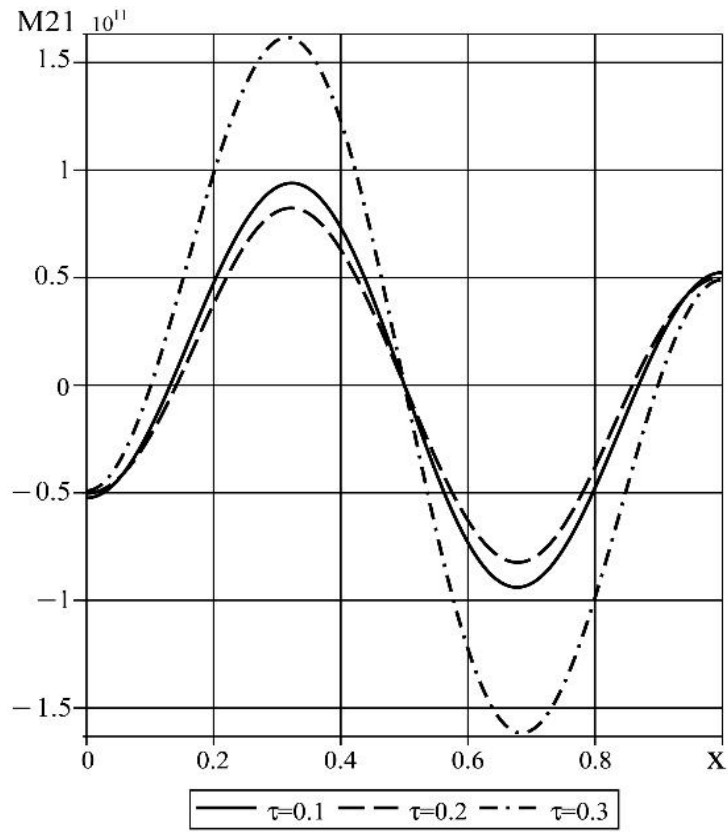


Рис 3.39: Зависимость M_{21} от времени τ

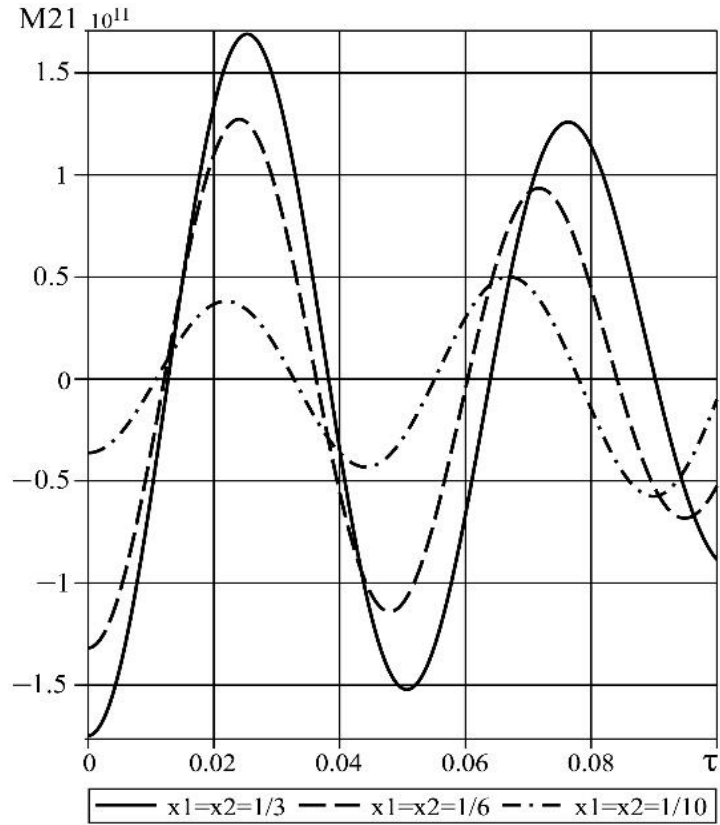
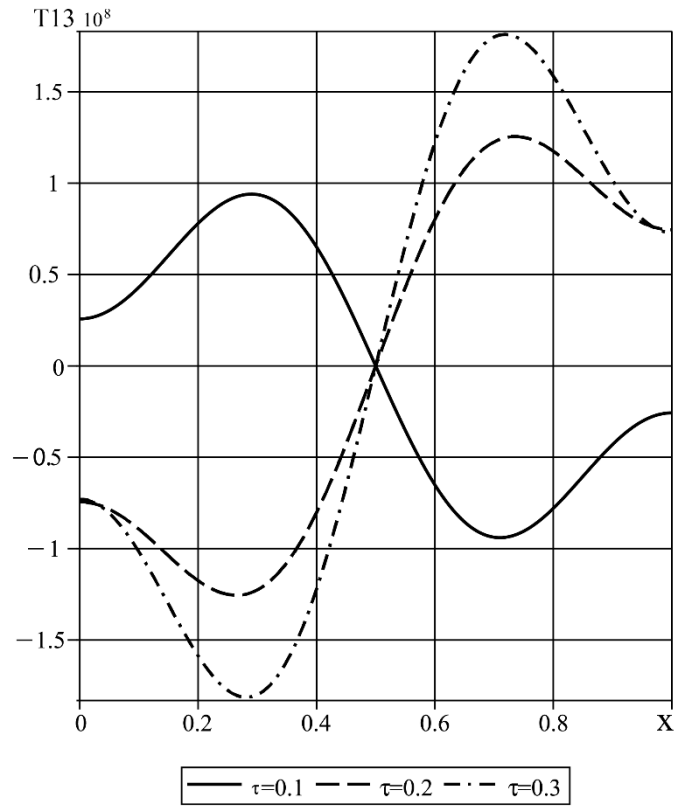
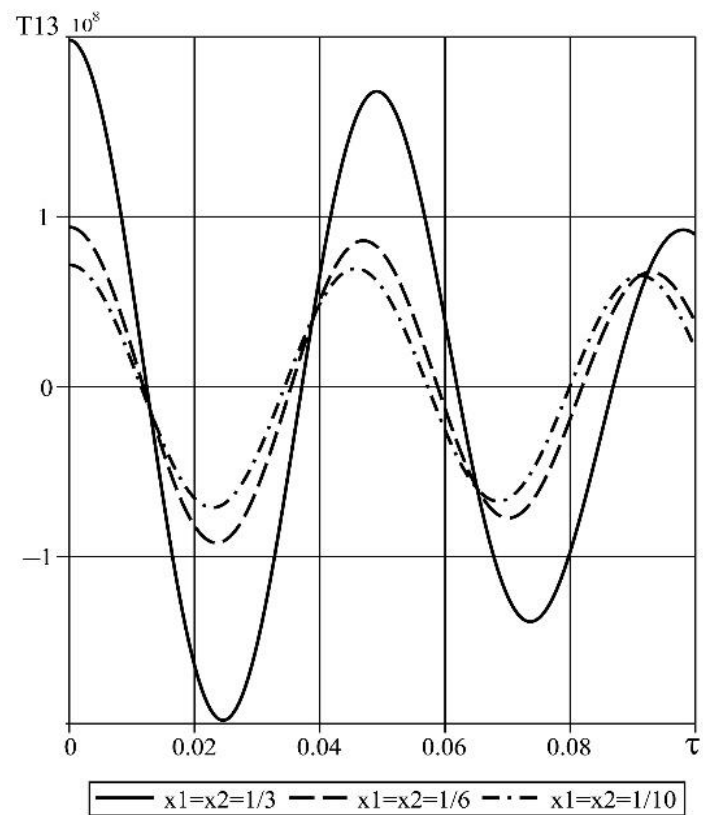
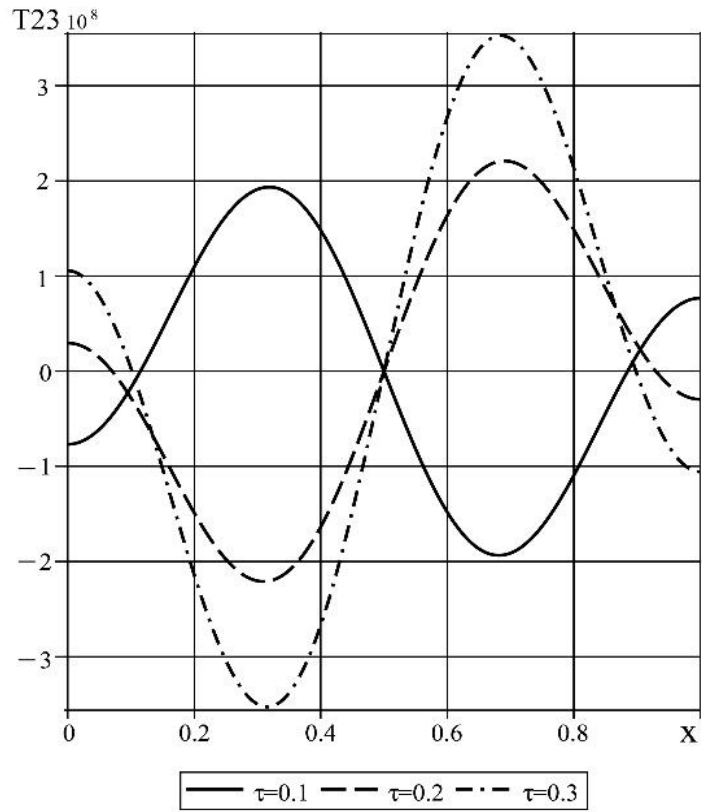
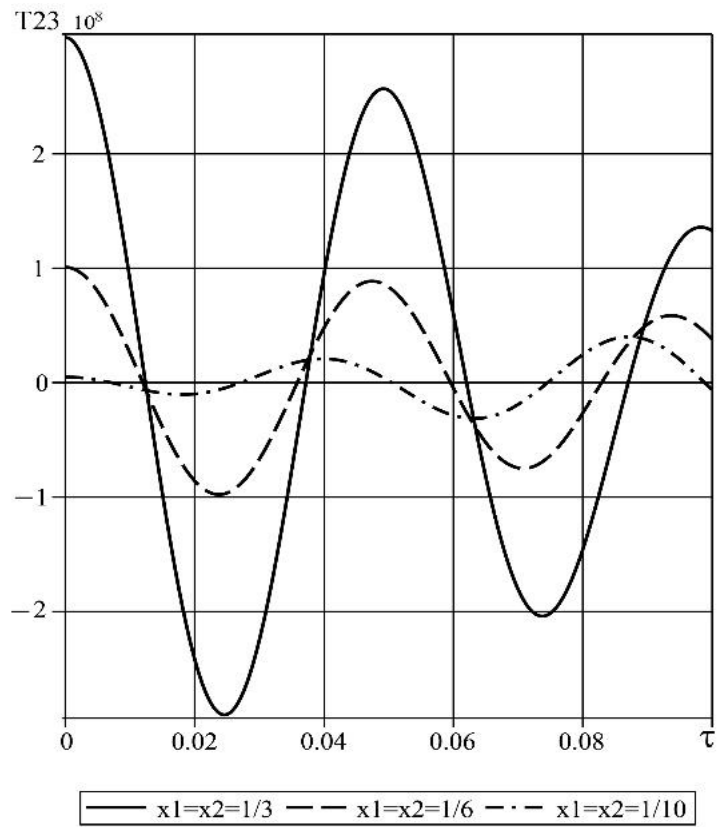
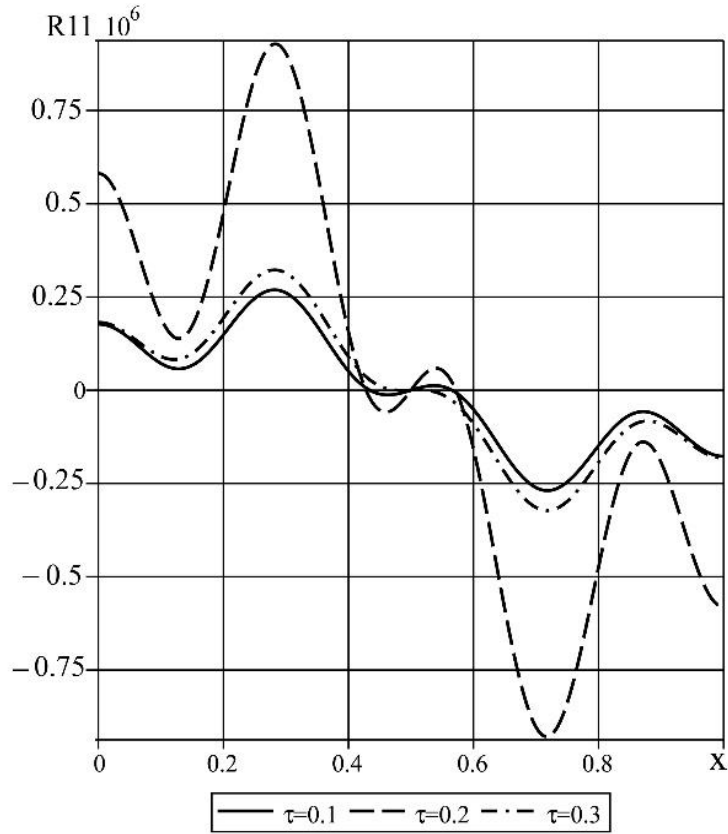
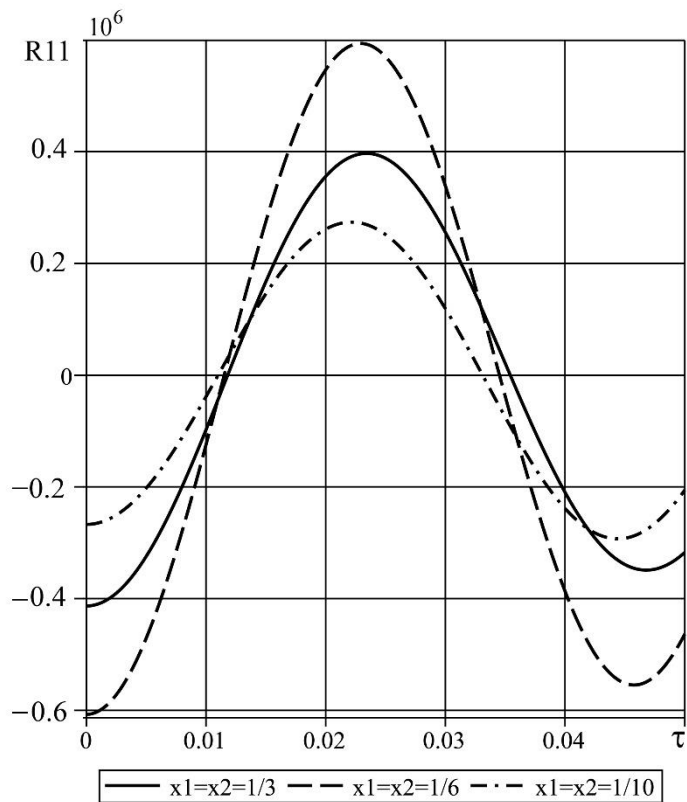
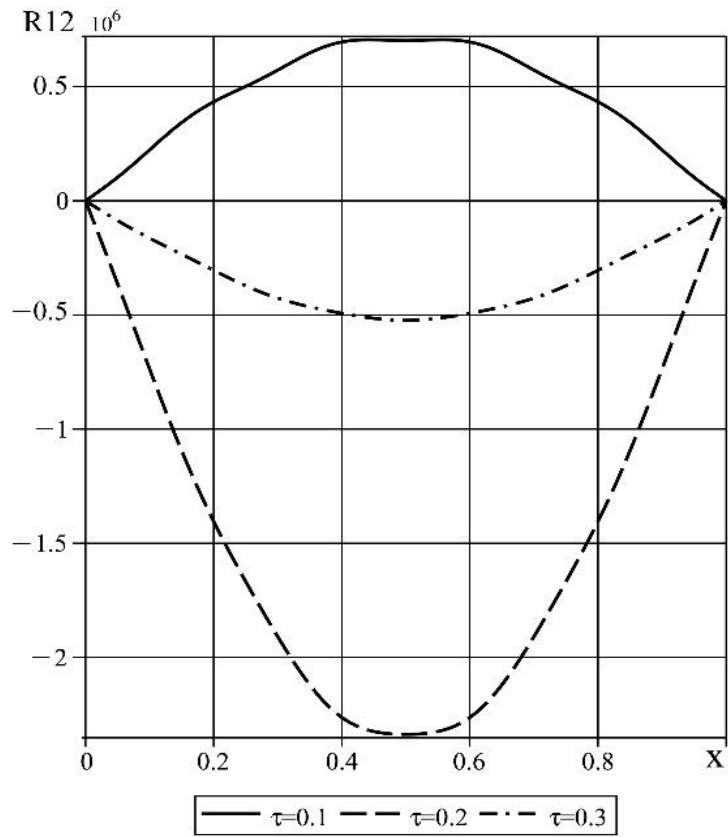
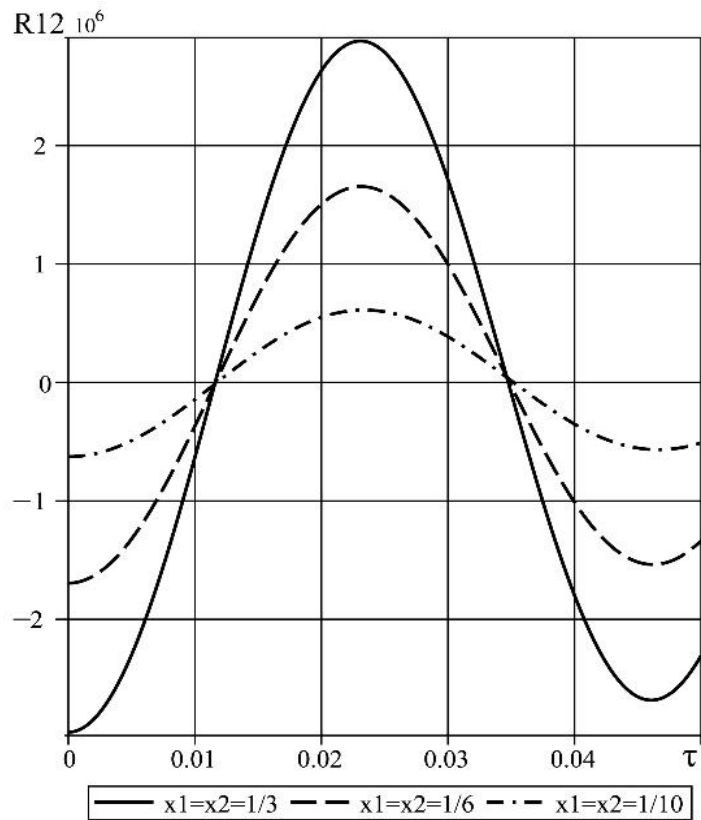


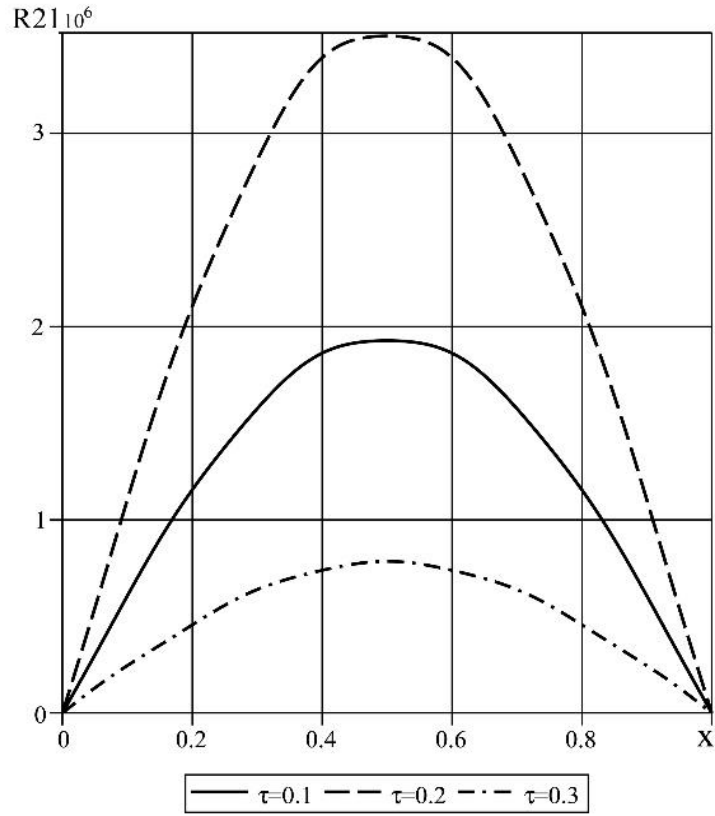
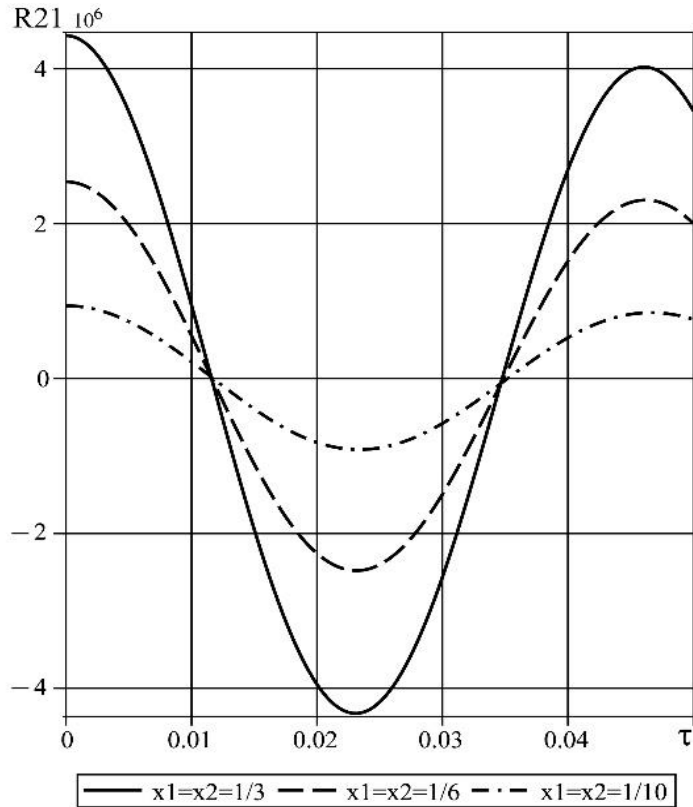
Рис 3.40: Зависимость M_{21} от координат x_1, x_2

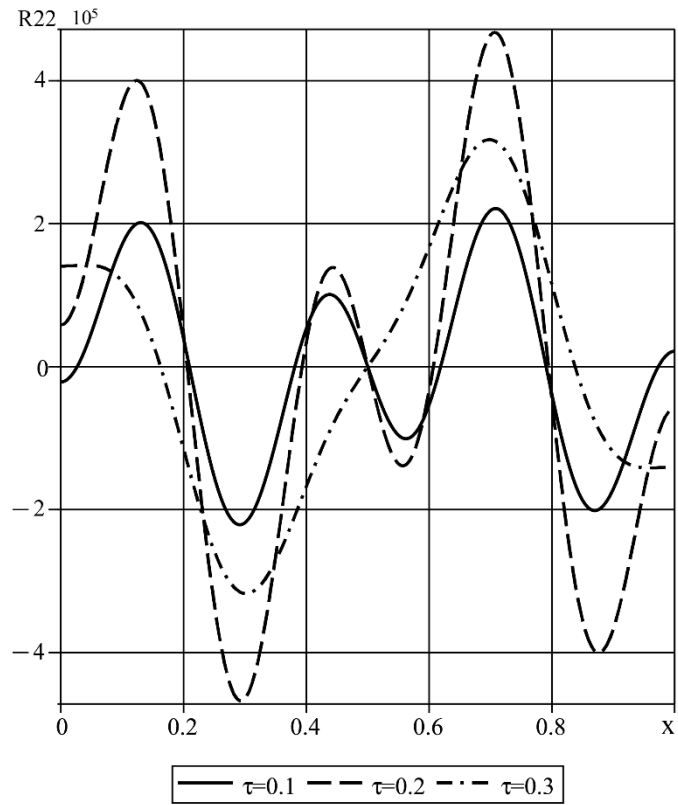
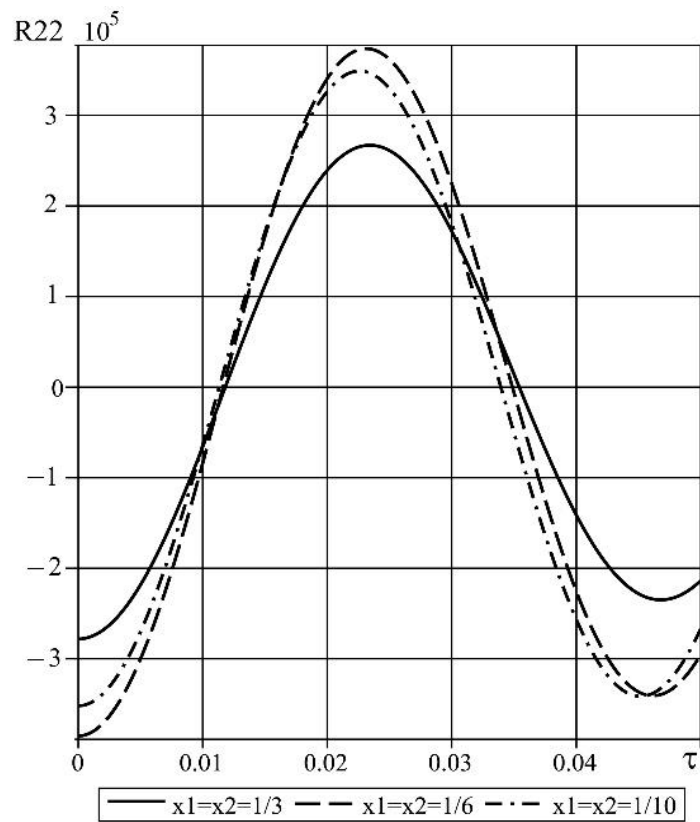
Рис 3.41: Зависимость T_{13} от времени τ Рис 3.42: Зависимость T_{13} от координат x_1, x_2

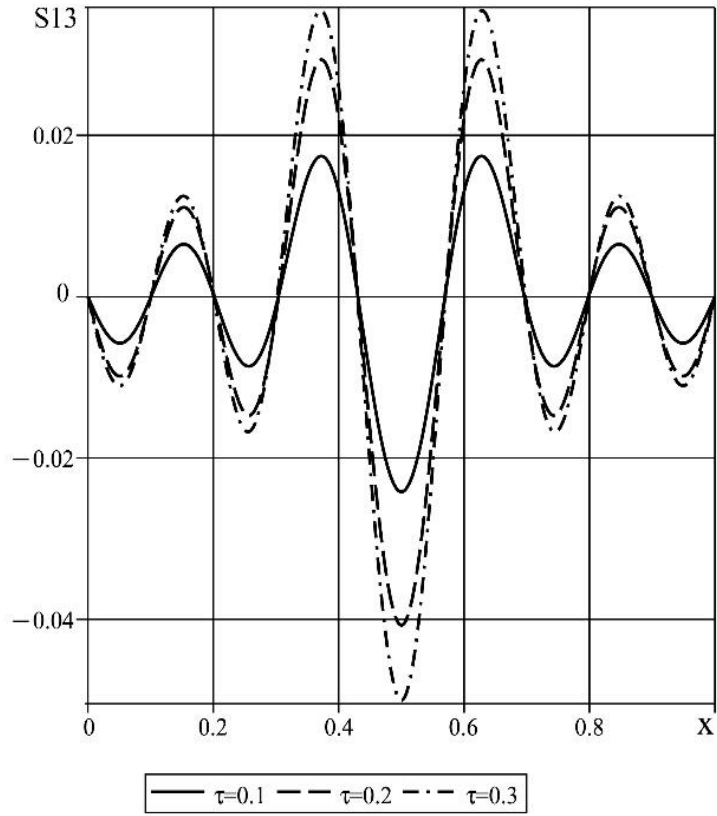
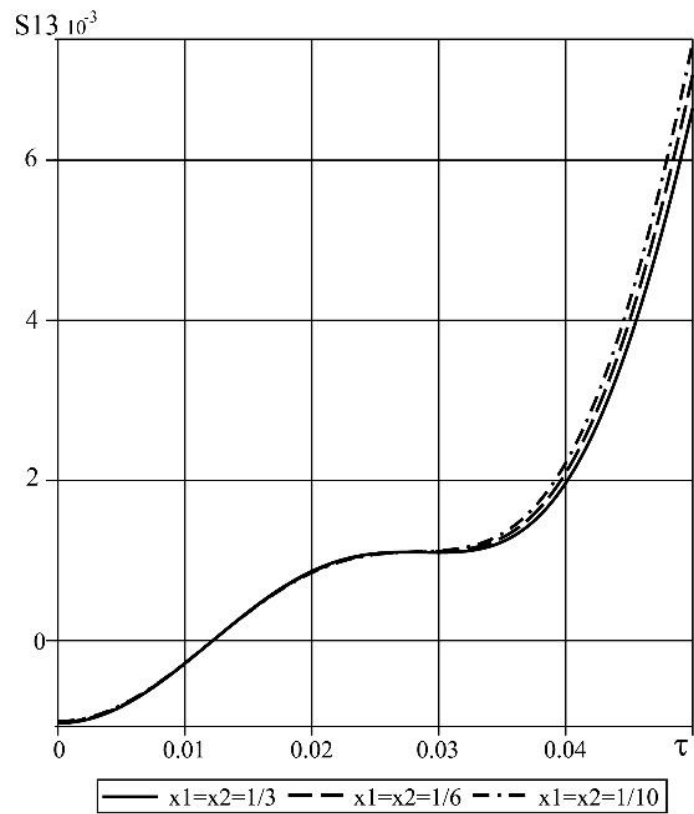
Рис 3.43: Зависимость T_{23} от времени τ Рис 3.44: Зависимость T_{23} от координат x_1, x_2

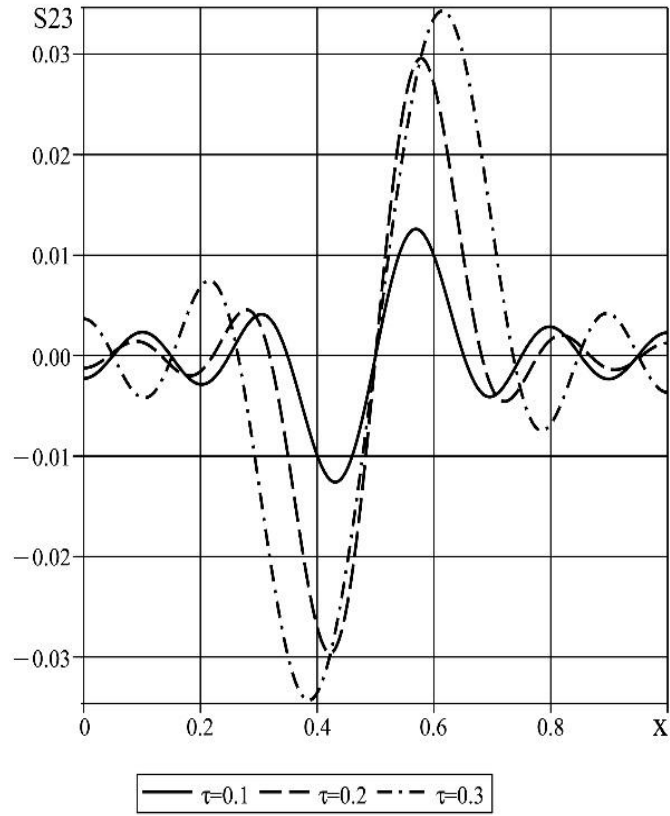
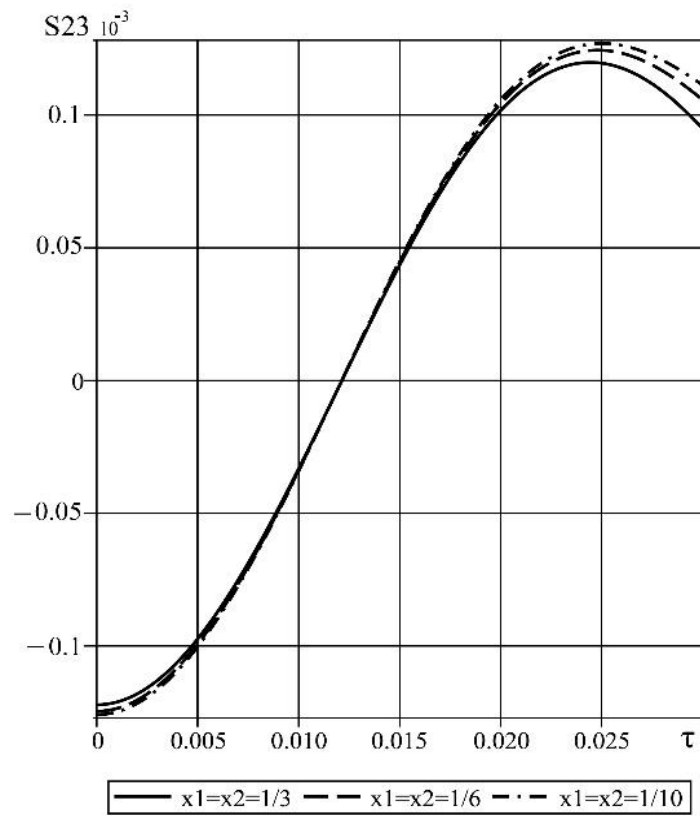
Рис 3.45: Зависимость R_{11} от времени τ Рис 3.46: Зависимость R_{11} от координат x_1, x_2

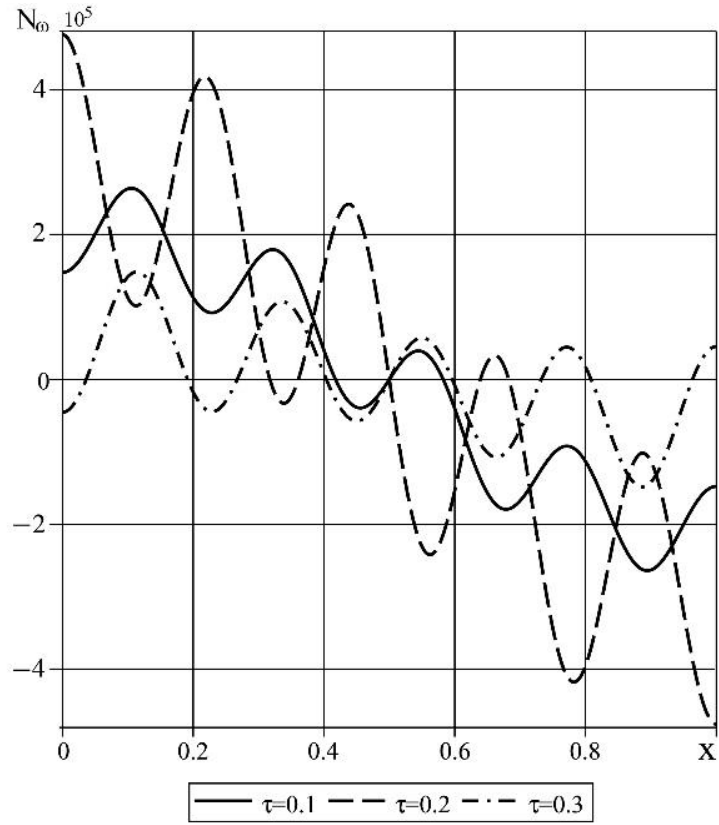
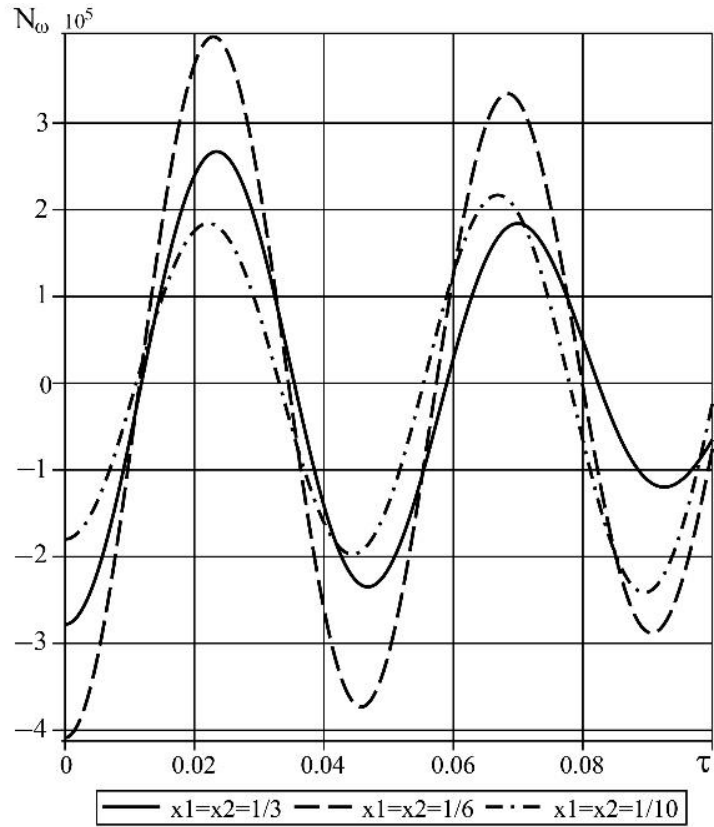
Рис 3.47: Зависимость R_{12} от времени τ Рис 3.48: Зависимость R_{12} от координат x_1, x_2

Рис 3.49: Зависимость R_{21} от времени τ Рис 3.50: Зависимость R_{21} от координат x_1, x_2

Рис 3.51: Зависимость R_{22} от времени τ Рис 3.52: Зависимость R_{22} от координат x_1, x_2

Рис 3.53: Зависимость S_{13} от времени τ Рис 3.54: Зависимость S_{13} от координат x_1, x_2

Рис 3.55: Зависимость S_{23} от времени τ Рис 3.56: Зависимость S_{23} от координат x_1, x_2

Рис 3.57: Зависимость N_ω от времени τ Рис 3.58: Зависимость N_ω от координат x_1, x_2

3.3. Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины – модель 1

Здесь геометрия пластины и граничные условия такие же, как в (3.1.1) и (3.1.2) соответственно, уравнениями движения являются равенства (2.2.20), физическими соотношениями – равенства (2.2.21) и (2.2.22), а начальные условия – нулевые.

Для решения этой начально-краевой задачи также, как и ранее, представляем искомые функции в виде двойных тригонометрических рядов (3.1.3), добавляя к ним следующие равенства:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{10n}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{1mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ \psi_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{2m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{2mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2.\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

При этом разложения для $R_{11}, R_{22}, R_{12}, R_{21}, N_{\omega}$ и функция θ_{ω} остаются такими же, как в (3.1.7)). Для коэффициентов этих рядов сохраняются соответствующие равенства в (3.1.8).

Остальные внутренние силовые факторы и функция θ_{ψ} представляются так:

$$\begin{aligned}\theta_{\psi} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \theta_{\psi mn} \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ M_{11} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{11mn} \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, M_{22} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{22mn} \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ M_{12} &= \sum_{m=1}^{\infty} M_{12m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{120n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{12mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ M_{21} &= \sum_{m=1}^{\infty} M_{21m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{210n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{21mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ T_{13} &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{130n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{13mn} \cos a_m x_1 \sin b_n x_2,\end{aligned}\quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned}
T_{23} &= \sum_{m=1}^{\infty} T_{23m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{23mn} \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
T_{31} &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{310n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{31mn} \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
T_{32} &= \sum_{m=1}^{\infty} T_{32m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{32mn} \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
R_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty} R_{11m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_{110n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{11mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
R_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} R_{220n} \cos b_n x_2 + \sum_{m=1}^{\infty} R_{220m} \cos a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{22mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2,
\end{aligned}$$

При этом граничные условия удовлетворяются тождественно.

Для коэффициентов этих рядов имеют место такие равенства:

- при $n = 0, m \geq 1$

$$\begin{aligned}
M_{12m0} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m \psi_{2m0}, M_{21m0} = \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m \psi_{2m0}, \\
T_{23m0} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{2m0} - 2\alpha \omega_{1m0}, T_{32m0} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{2m0} + 2\alpha \omega_{1m0};
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
M_{120n} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n \psi_{10n}, M_{210n} = \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n \psi_{10n}, \\
T_{130n} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{10n} + 2\alpha \omega_{20n}, T_{310n} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{10n} - 2\alpha \omega_{20n};
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\theta_{\psi mn} &= -(a_m \psi_{1mn} + b_n \psi_{2mn}), \\
M_{11mn} &= -a_m \psi_{1mn} - \kappa b_n \psi_{2mn}, M_{22mn} = -\kappa a_m \psi_{1mn} - b_n \psi_{2mn}, \\
M_{12mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n \psi_{1mn}, M_{21mn} = \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m \psi_{2mn}, \\
T_{13mn} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m \omega_{mn} + 2\alpha \omega_{2mn}, T_{23mn} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n \omega_{mn} - 2\alpha \omega_{1mn}, \\
T_{31mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m \omega_{mn} - 2\alpha \omega_{2mn}, T_{32mn} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n \omega_{mn} + 2\alpha \omega_{1mn}, \\
R_{11mn} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1mn} + \eta_2 b_n \omega_{2mn}, R_{22mn} = \eta_2 a_m \omega_{1mn} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{2mn}, \\
R_{12mn} &= -a_m \omega_{2mn} - \eta b_n \omega_{1mn}, R_{21mn} = -b_n \omega_{1mn} - \eta a_m \omega_{2mn}
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Уравнения относительно коэффициентов рядов получаем подстановкой этих рядов в (2.2.20), дополняя разложения правых частей (3.1.11) следующим равенством:

$$\begin{aligned} m_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} m_{10n}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} m_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ m_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} m_{2m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} m_{2mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

В результате получаем системы линейных обыкновенных следующие дифференциальных уравнений:

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(1)} &= \mathbf{A}_{mn}^{(1)} \mathbf{X}_{mn}^{(1)} + \mathbf{B}_{mn}^{(1)}, \mathbf{X}_{mn}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{mn}^{(3)} \\ \Psi_{1mn} \\ \Psi_{2mn} \end{pmatrix}_{5 \times 1}, \mathbf{A}_{mn}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{mn}^{(3)} & \mathbf{b}_{mn\psi} \\ \mathbf{a}_{mn\psi} & \mathbf{c}_{mn\psi} \end{array} \right)_{5 \times 5}, \mathbf{B}_{mn}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{mn}^{(3)} \\ m_{1mn} \\ m_{2mn} \end{pmatrix}_{5 \times 1}, \\ \mathbf{b}_{mn\psi} &= \begin{pmatrix} a_{mn14} & a_{mn15} \\ 0 & a_{mn25} \\ a_{mn34} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{mn\psi} = \begin{pmatrix} a_{mn41} & 0 & a_{mn43} \\ a_{mn51} & a_{mn52} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_{mn\psi} = \begin{pmatrix} a_{mn44} & a_{mn45} \\ a_{mn54} & a_{mn55} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

где элементы матриц с верхним индексом «(3)» определены в (3.1.12), а остальные нетривиальные элементы матрицы $\mathbf{A}_{mn}^{(1)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_{mn14} &= -\gamma_{\alpha-}^{-2} a_m, a_{mn15} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} b_n, a_{mn34} = -a_{mn25} = 2\alpha\nu, a_{mn41} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} r^{-2} a_m, \\ a_{mn43} &= -a_{mn52} = 2\alpha r^{-2}, a_{mn44} = -\left[a_m^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (b_n^2 + r^{-2}) \right], a_{mn45} = a_{mn54} = -c_{\alpha+} a_m b_n, \\ a_{mn51} &= -r^{-2} \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n, a_{mn55} = -\left[b_n^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + r^{-2}) \right]; \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_{1m0} &= a_{m022} \omega_{1m0} + a_{m025} \Psi_{2m0} + \tilde{m}_{M1m0}, a_{m022} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha\nu), a_{m025} = -2\alpha\nu, \\ \ddot{\Psi}_{2m0} &= a_{m052} \omega_{1m0} + a_{m055} \Psi_{2m0} + m_{2m0}, a_{m052} = -2\alpha r^{-2}, a_{m055} = -(c_{\alpha+} b_n^2 + r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2}); \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_{20n} &= a_{m033}\omega_{20n} + a_{m034}\psi_{10n} + \tilde{m}_{M20n}, a_{m033} = -(\gamma_0^{-2}b_n^2 + 4\alpha\nu), a_{m034} = 2\alpha\nu, \\ \ddot{\psi}_{10n} &= a_{m044}\psi_{10n} + a_{m043}\omega_{20n} + m_{10n}, a_{m043} = 2\alpha r^{-2}, a_{m044} = -(c_{\alpha+}a_m^2 + r^{-2}\gamma_{\alpha+}^{-2}).\end{aligned}\quad (3.3.10)$$

Эти системы совместно с дополнением к (3.1.15) равенств

$$\psi_{1mn}|_{\tau=0} = \dot{\psi}_{1mn}|_{\tau=0} = \psi_{2mn}|_{\tau=0} = \dot{\psi}_{2mn}|_{\tau=0} = 0 \quad (3.3.11)$$

образует задачи Коши.

Для примера аналогично п. 3.1 рассматриваем сосредоточенную нагрузку (3.1.18), дополненную равенствами

$$m_1 = m_2 = 0 \quad (3.3.12)$$

При этом к коэффициентам разложения в ряды (3.1.19) добавляются соотношения

$$m_{1mn} = m_{2mn} = 0 \quad (3.3.13)$$

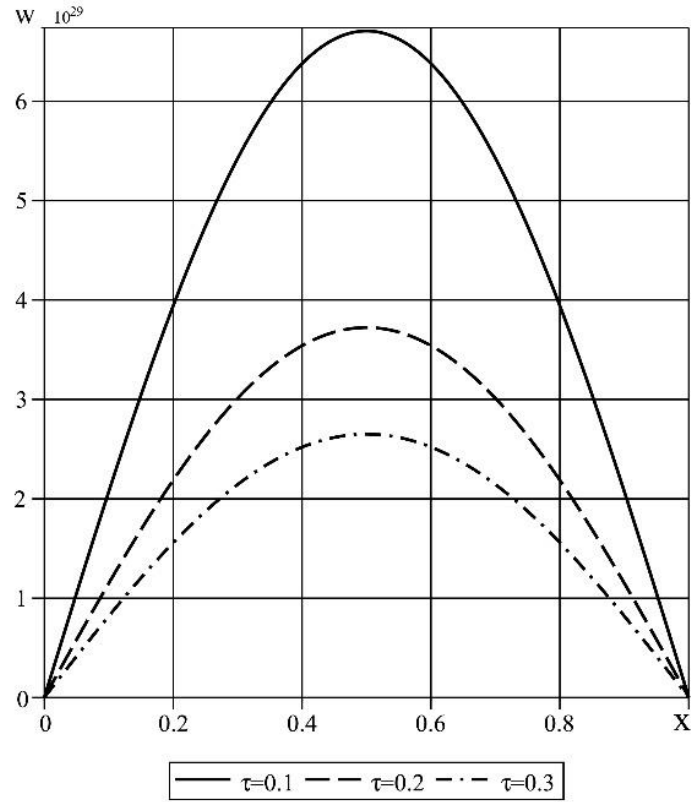
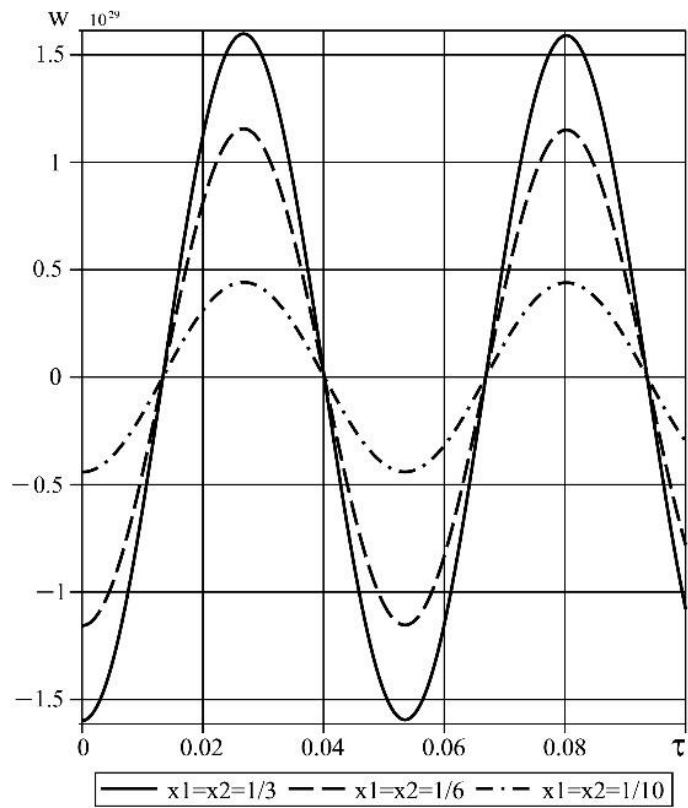
При этих условиях начальные задачи, соответствующие уравнениям (3.3.9) и (3.3.10), однородные. Поэтому их решения тривиальные

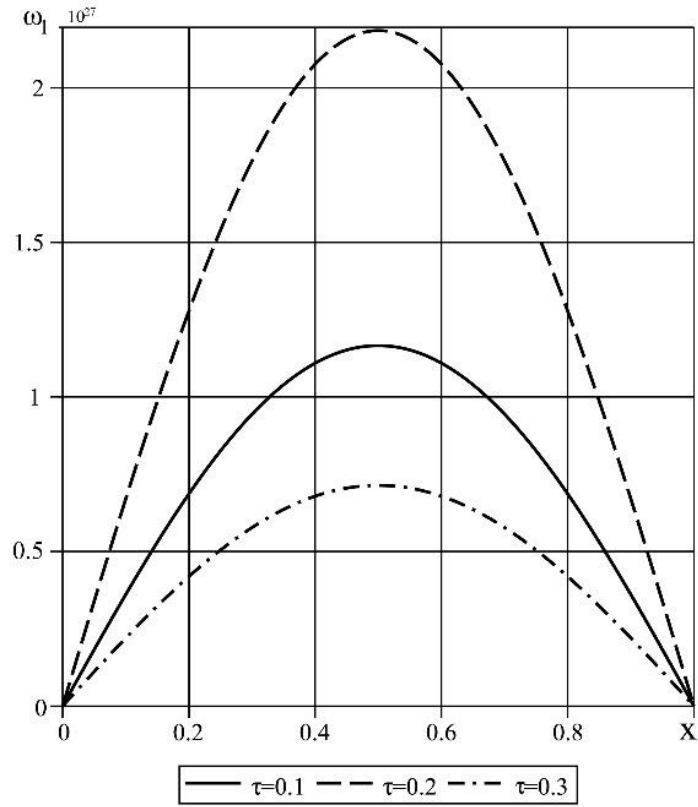
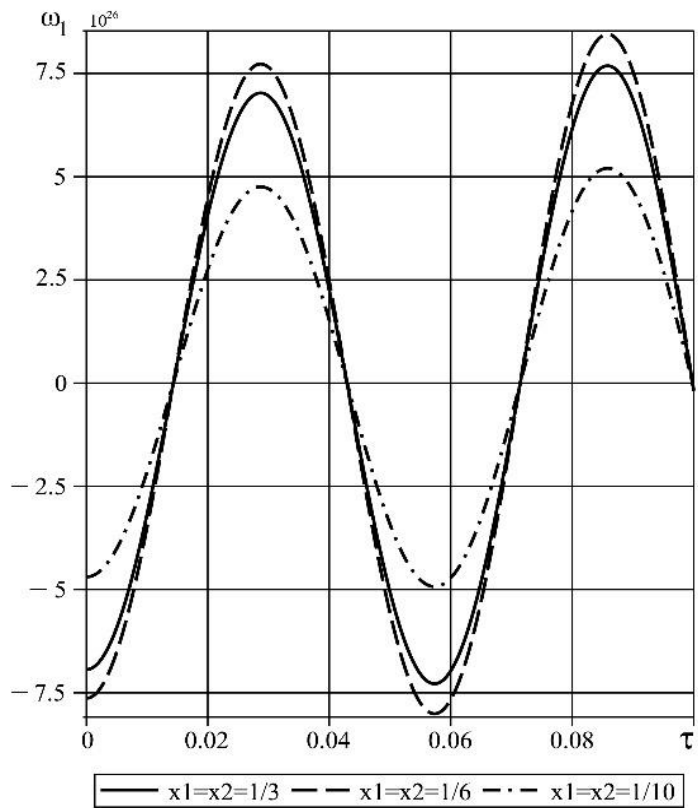
$$\omega_{1m0} = \psi_{2m0} \equiv 0 \quad (m \geq 1), \omega_{20n} = \psi_{10n} \equiv 0 \quad (n \geq 1) \quad (3.3.14)$$

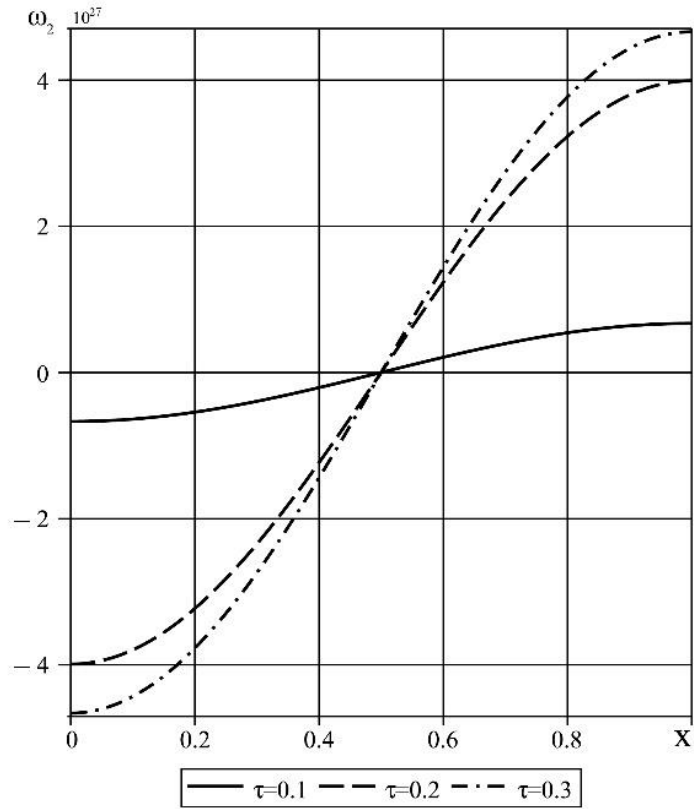
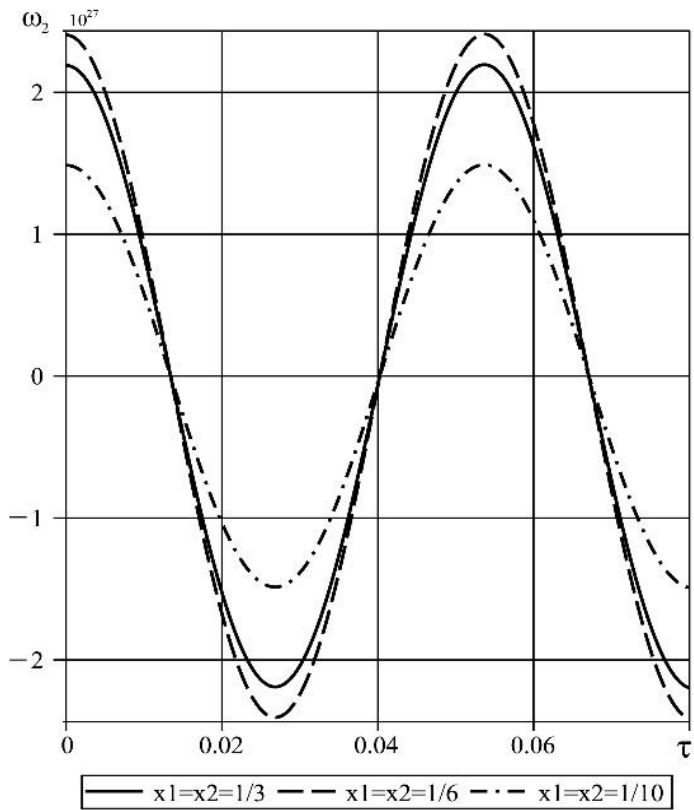
Физические и геометрические характеристики пластины и точка приложения сосредоточенной нагрузки принимаем такими же, как в п. 3.1.

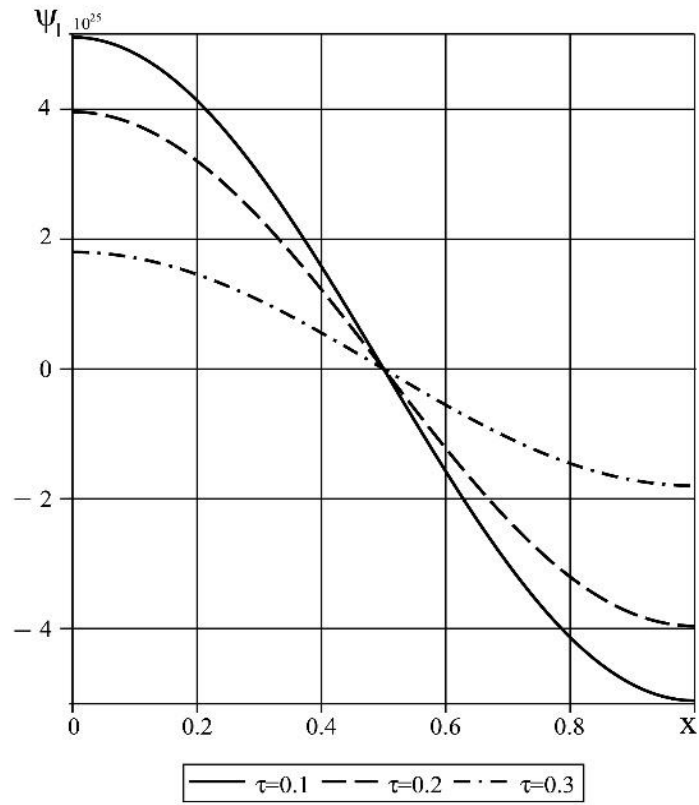
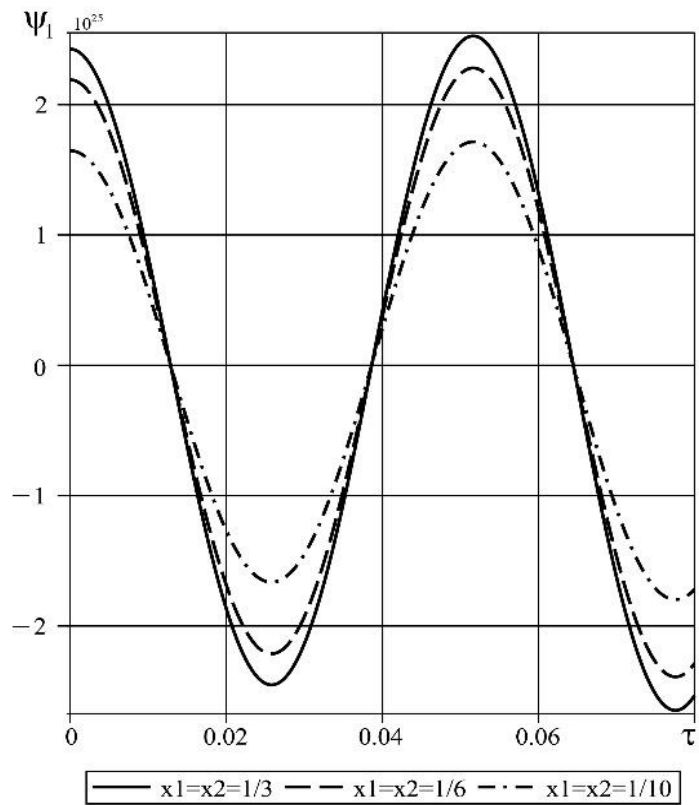
Соответствующие начальные задачи интегрируются численно. Ряды суммируются с помощью критерия (3.1.25).

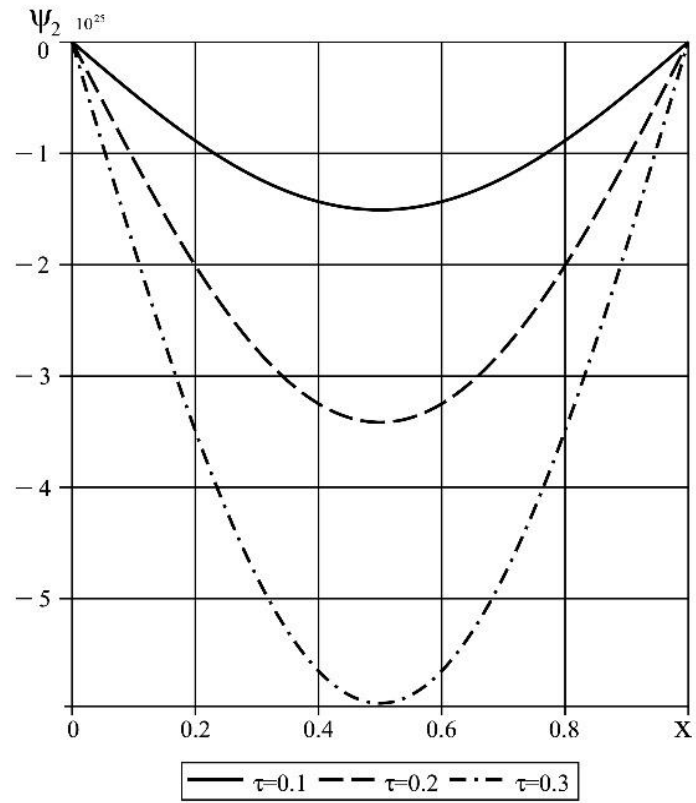
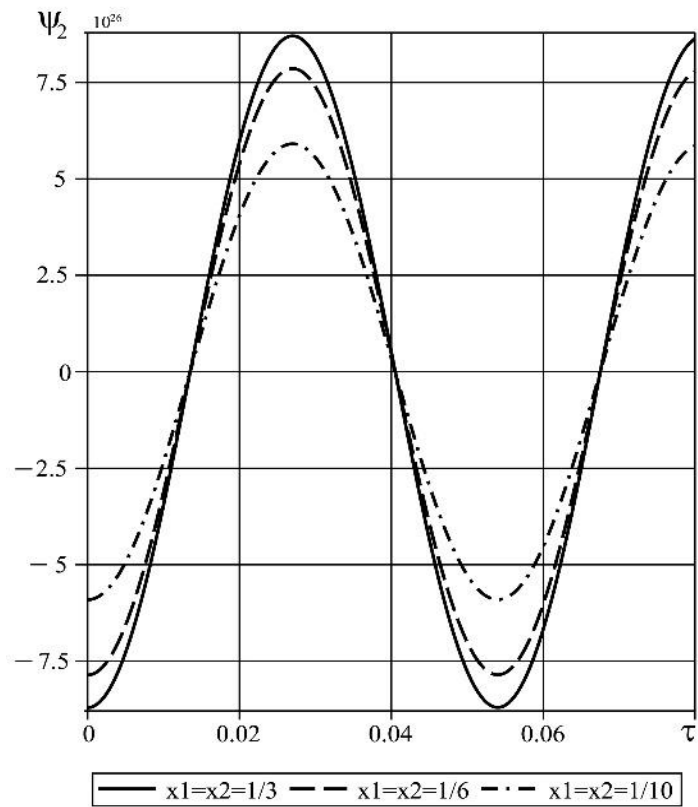
На рис. 3.3.1 - 3.3.36 приведены зависимости прогиба W , углов поворота ω_1, ω_2 и ψ_1, ψ_2 , а также внутренних силовых факторов $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}, T_{13}, T_{31}, T_{23}, T_{32}$ и $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ от координат x_1, x_2 и времени соответственно при различных значениях τ и x_1, x_2 .

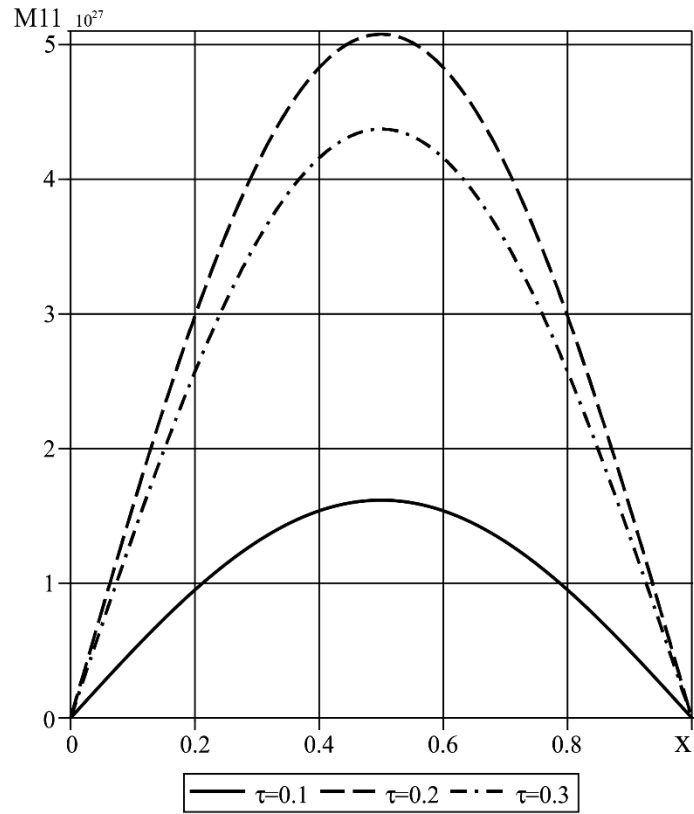
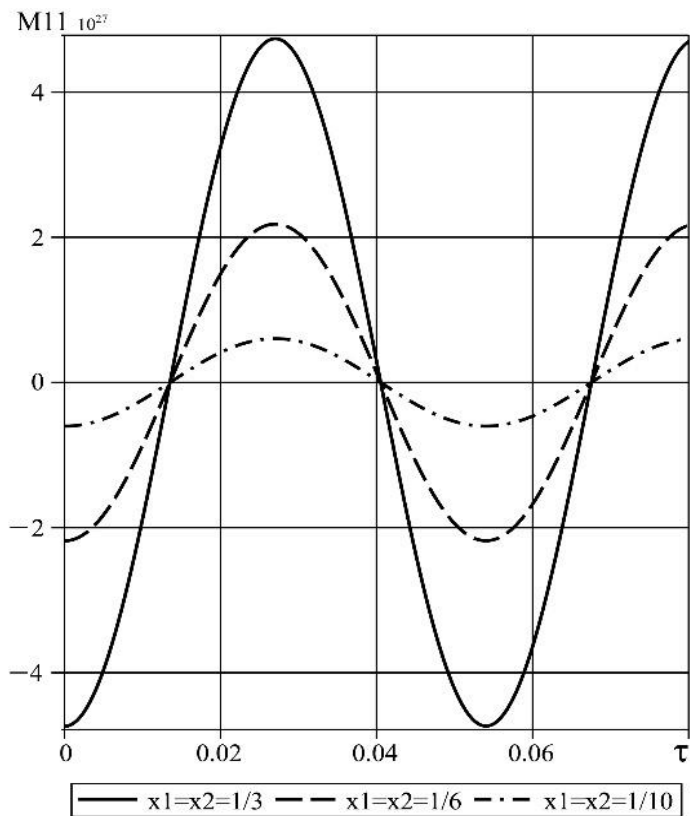
Рис 3.59: Зависимость W от времени τ Рис 3.60: Зависимость W от координат x_1, x_2

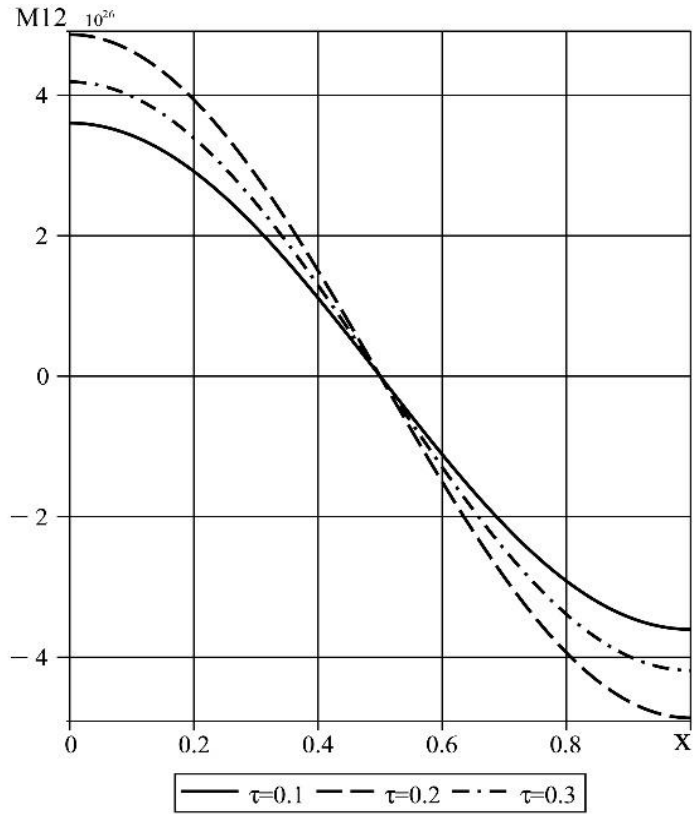
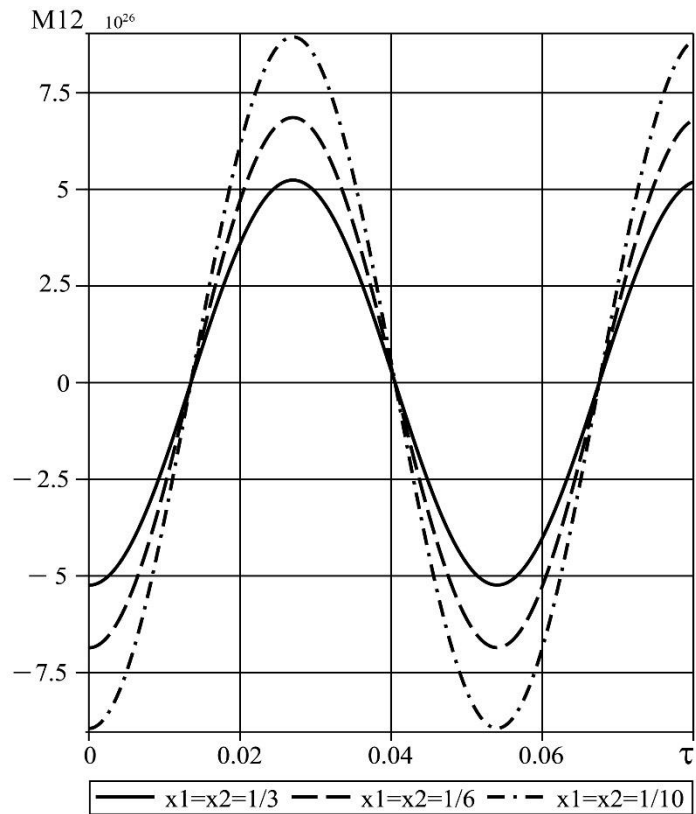
Рис 3.61: Зависимость ω_1 от времени τ Рис 3.62: Зависимость ω_1 от координат x_1, x_2

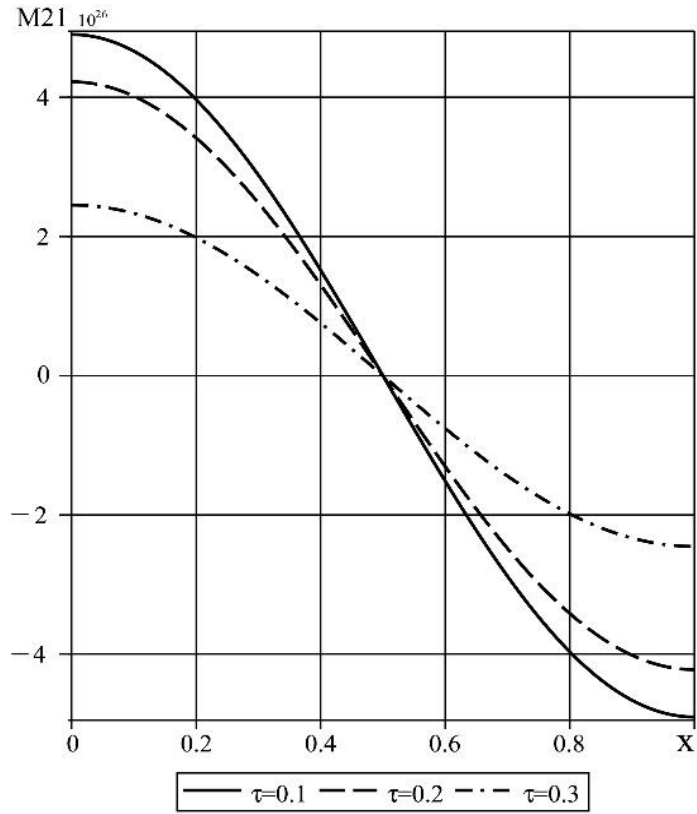
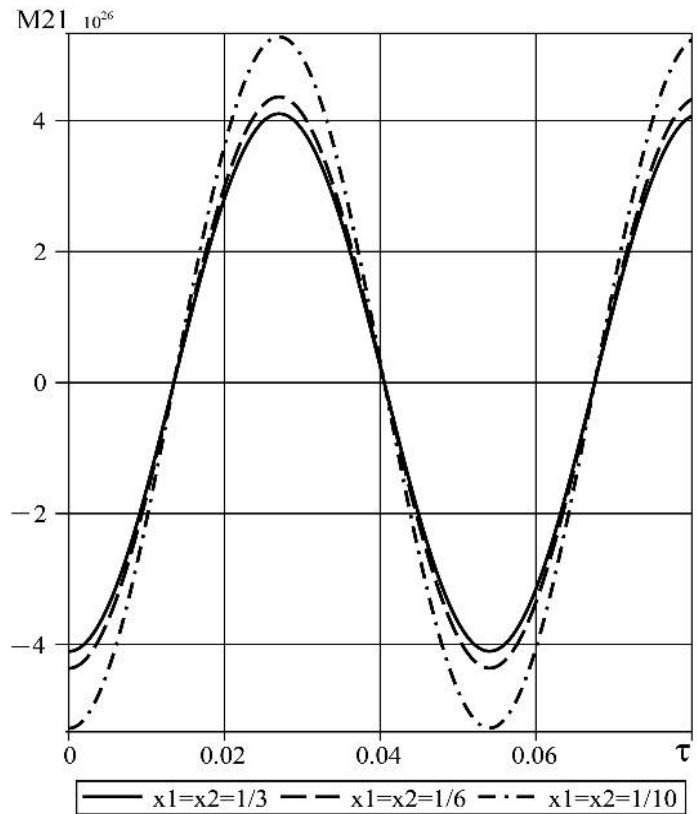
Рис 3.63: Зависимость ω_2 от времени τ Рис 3.64: Зависимость ω_2 от координат x_1, x_2

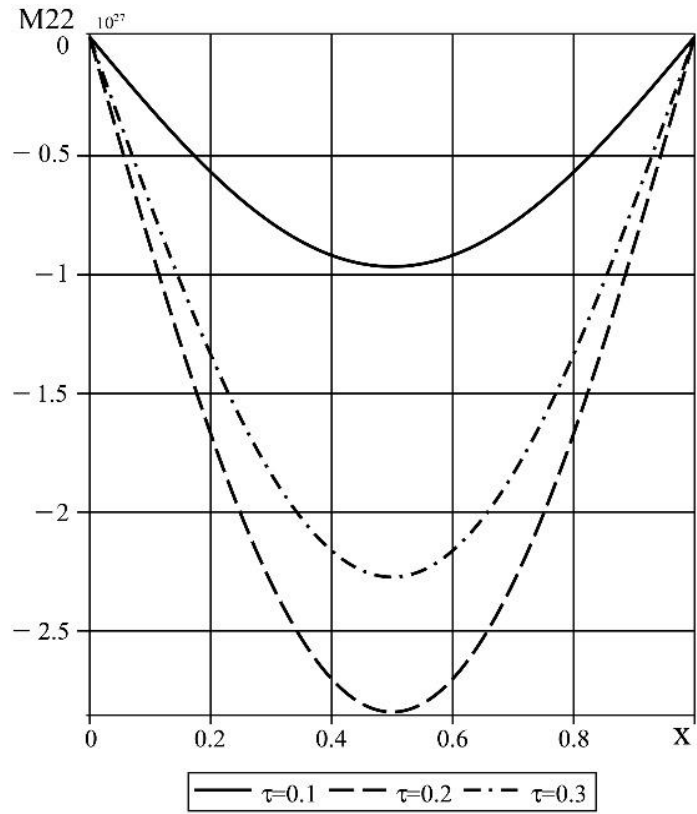
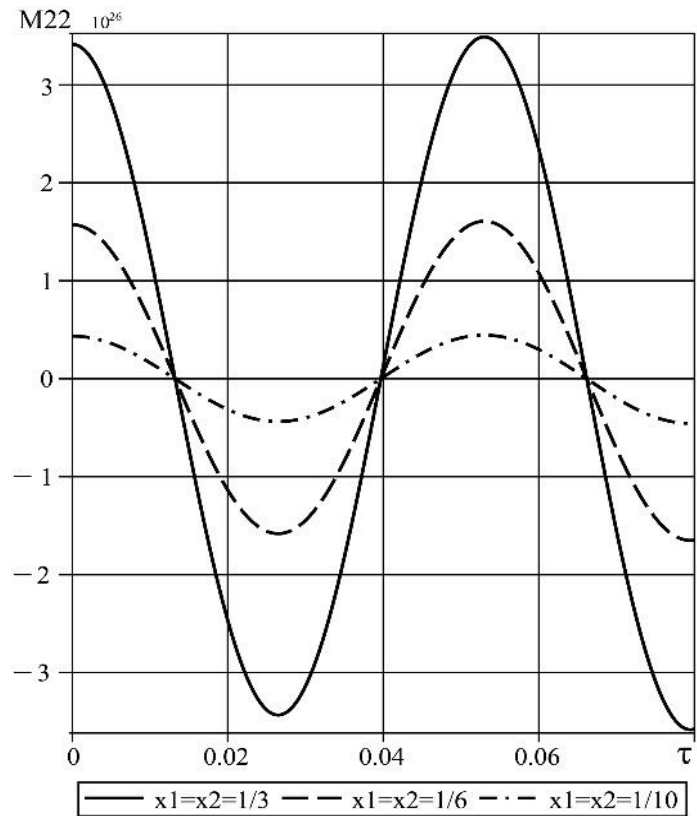
Рис 3.65: Зависимость ψ_1 от времени τ Рис 3.66: Зависимость ψ_1 от координат x_1, x_2

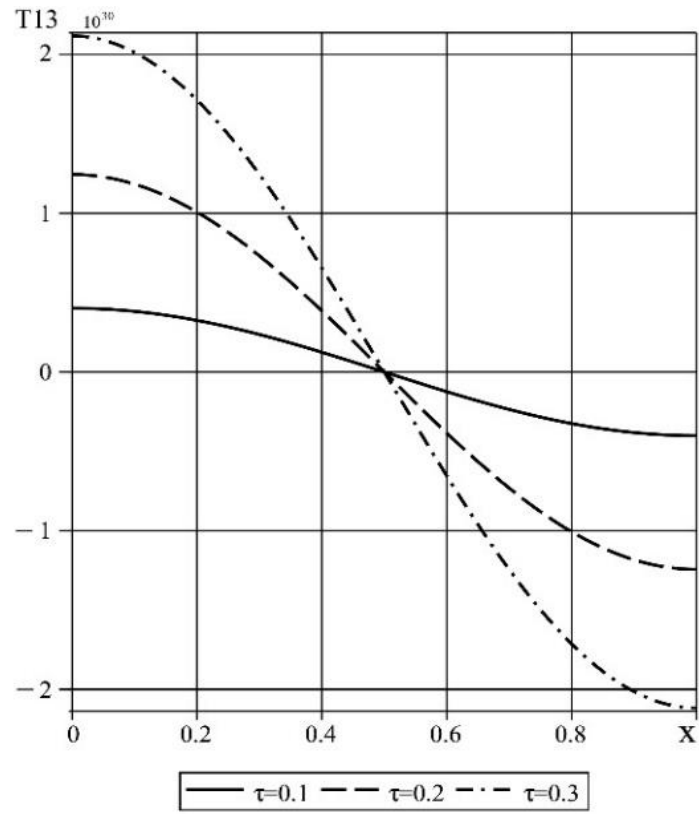
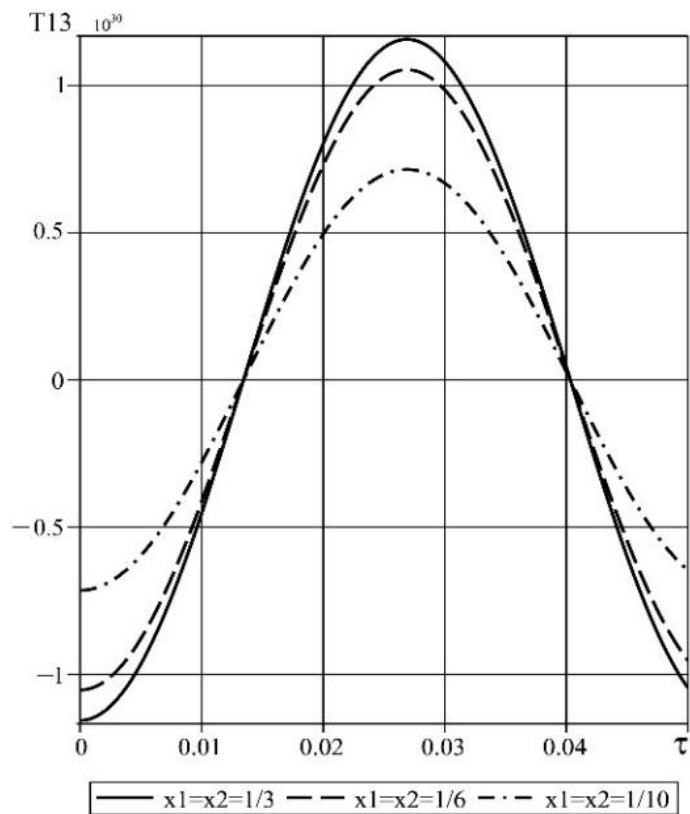
Рис 3.67: Зависимость ψ_2 от времени τ Рис 3.68: Зависимость ψ_2 от координат x_1, x_2

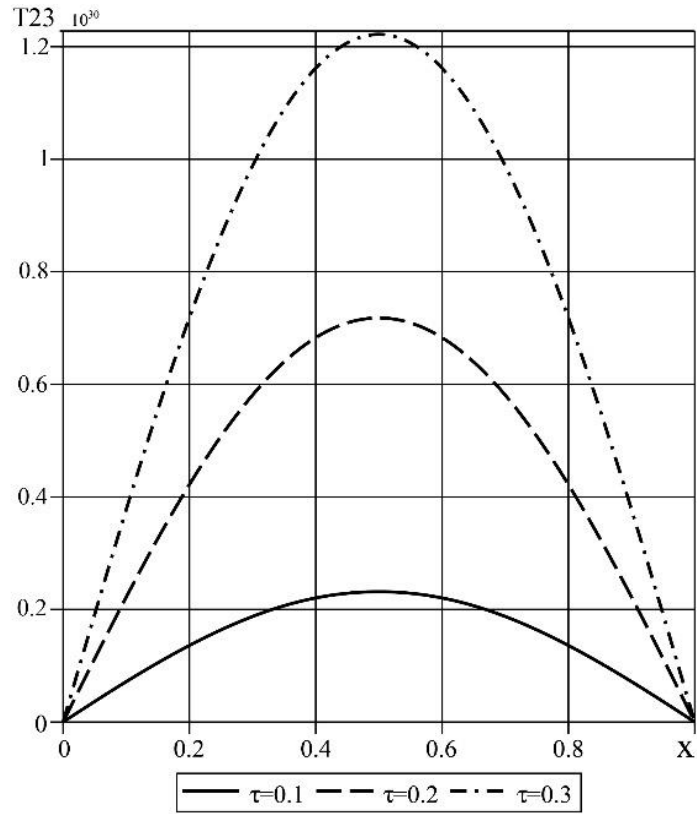
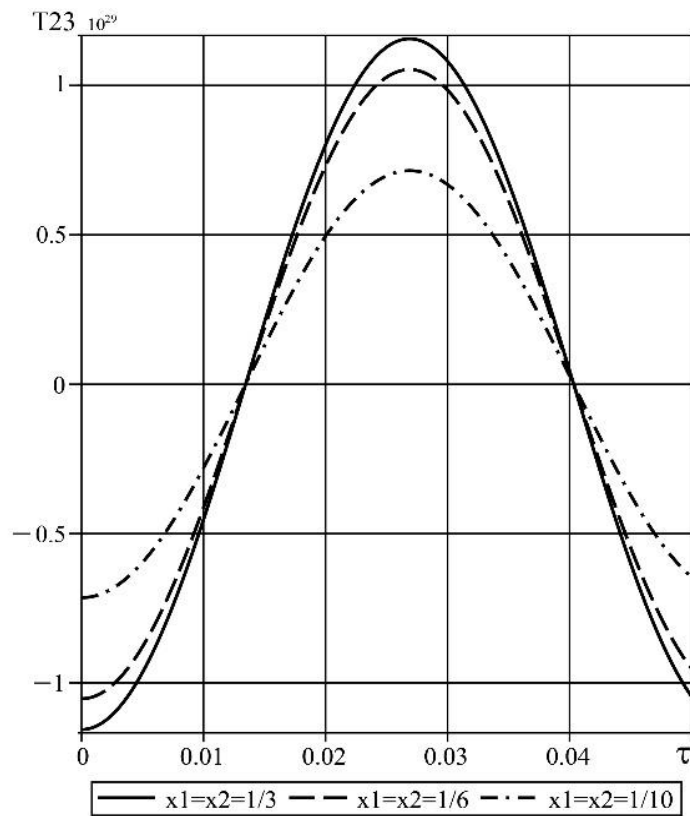
Рис 3.69: Зависимость M_{11} от времени τ Рис 3.70: Зависимость M_{11} от координат x_1, x_2

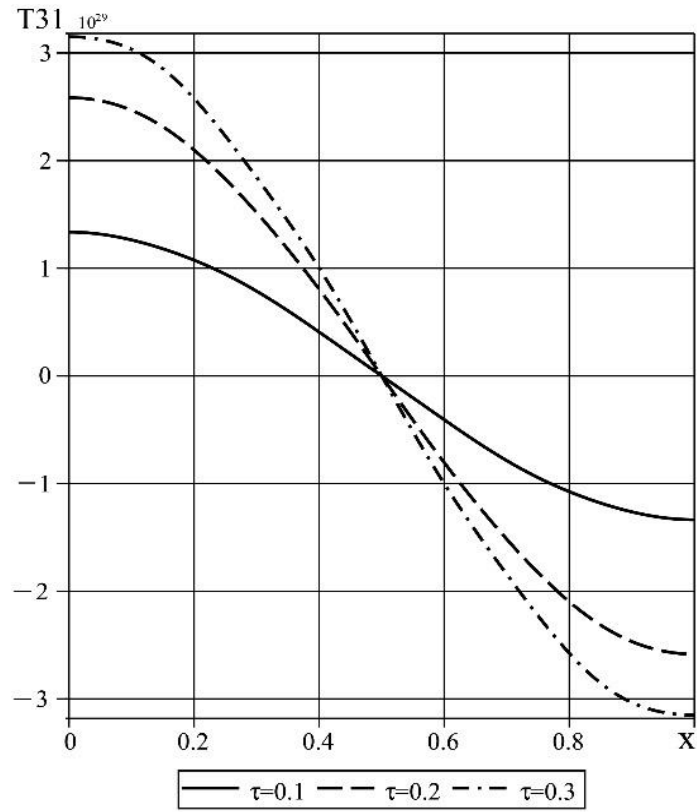
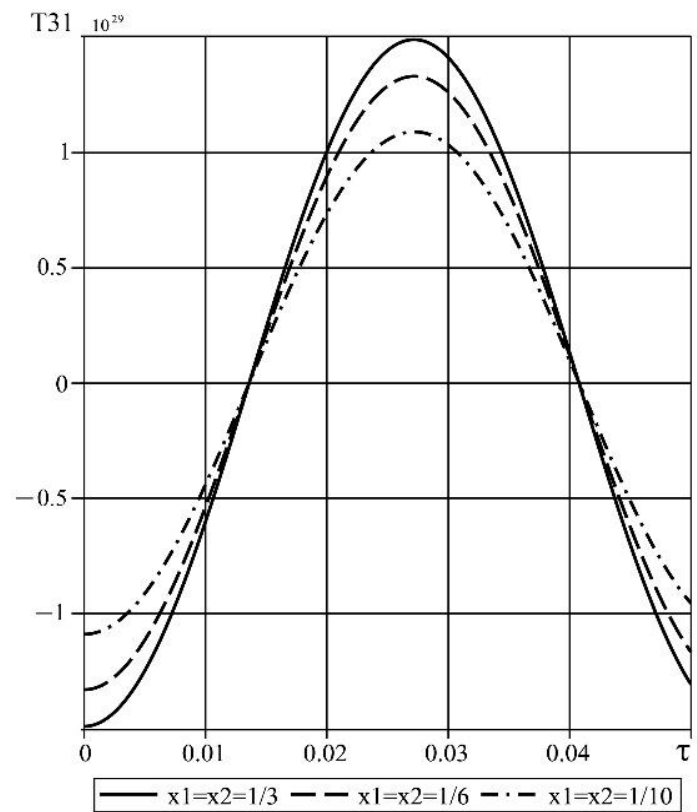
Рис 3.71: Зависимость M_{12} от времени τ Рис 3.72: Зависимость M_{12} от координат x_1, x_2

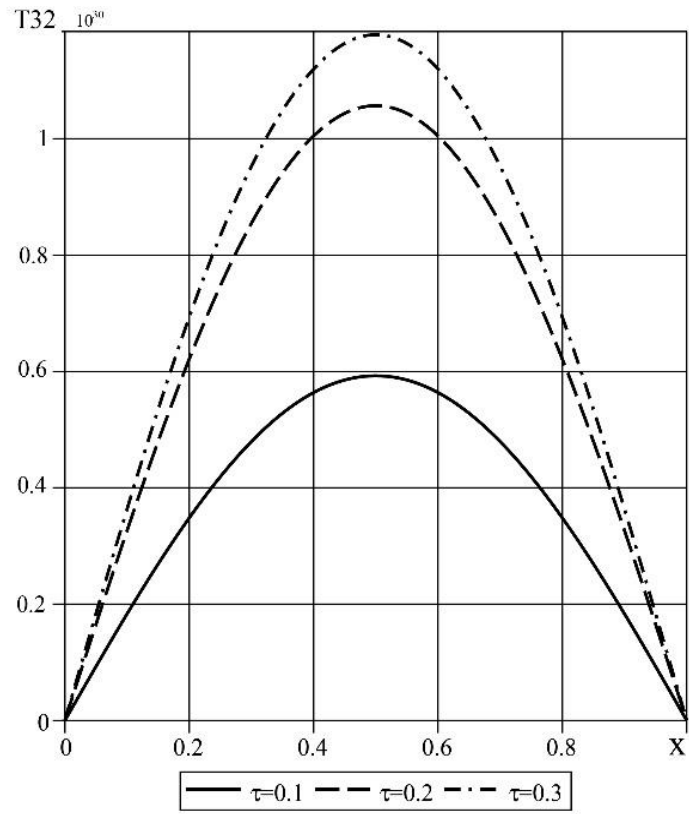
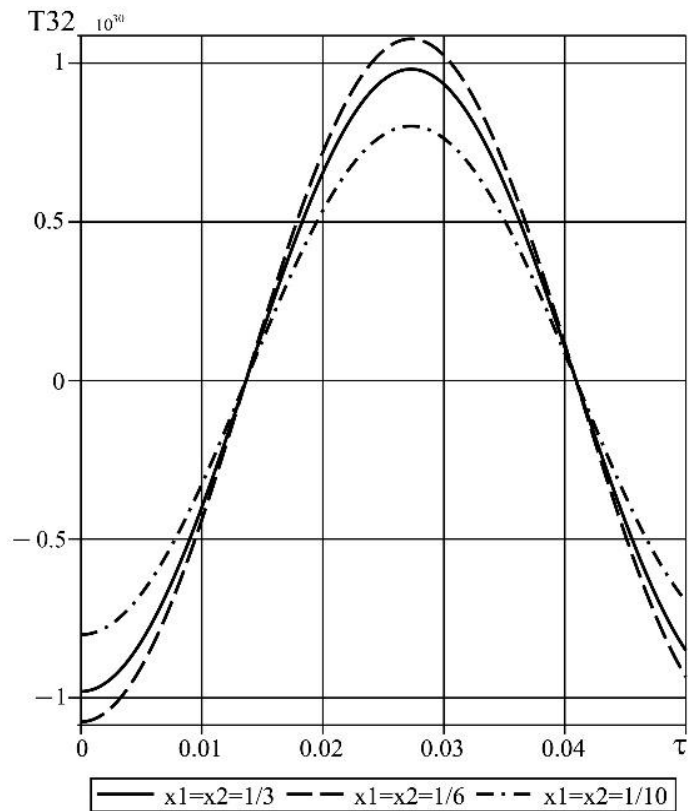
Рис 3.73: Зависимость M_{21} от времени τ Рис 3.74: Зависимость M_{21} от координат x_1, x_2

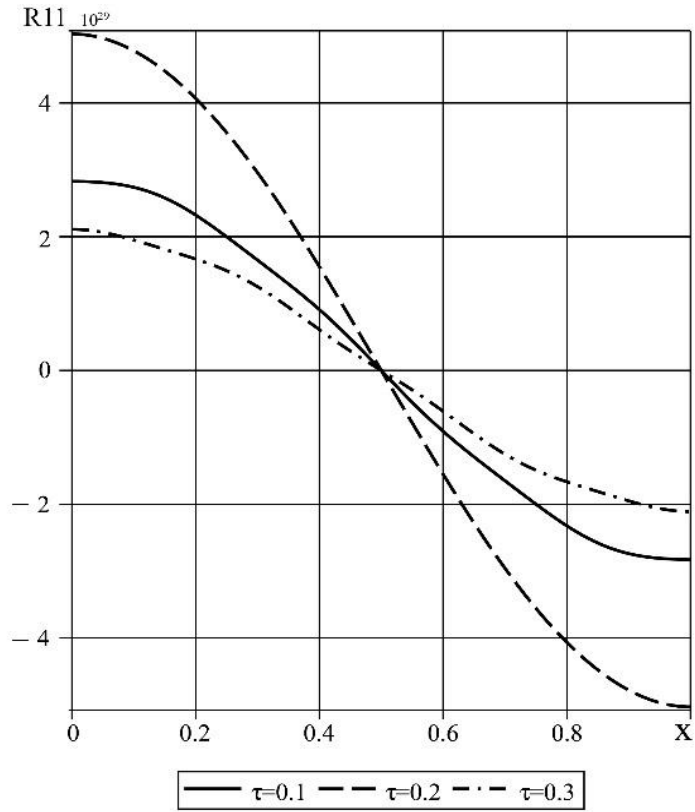
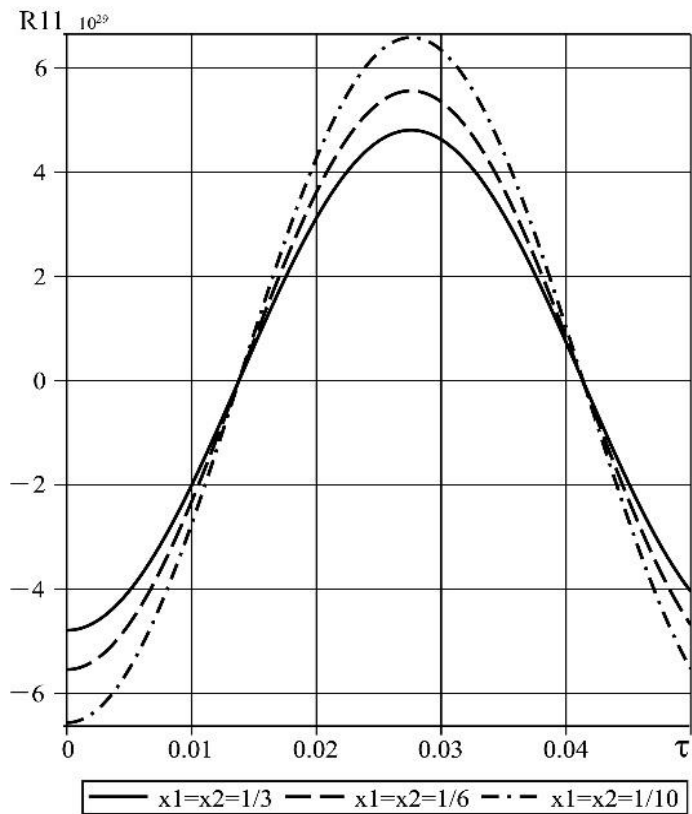
Рис 3.75: Зависимость M_{22} от времени τ Рис 3.76: Зависимость M_{22} от координат x_1, x_2

Рис 3.77: Зависимость T_{13} от времени τ Рис 3.78: Зависимость T_{13} от координат x_1, x_2

Рис 3.79: Зависимость T_{23} от времени τ Рис 3.80: Зависимость T_{23} от координат x_1, x_2

Рис 3.81: Зависимость T_{31} от времени τ Рис 3.82: Зависимость T_{31} от координат x_1, x_2

Рис 3.83: Зависимость T_{32} от времени τ Рис 3.84: Зависимость T_{32} от координат x_1, x_2

Рис 3.85: Зависимость R_{11} от времени τ Рис 3.86: Зависимость R_{11} от координат x_1, x_2

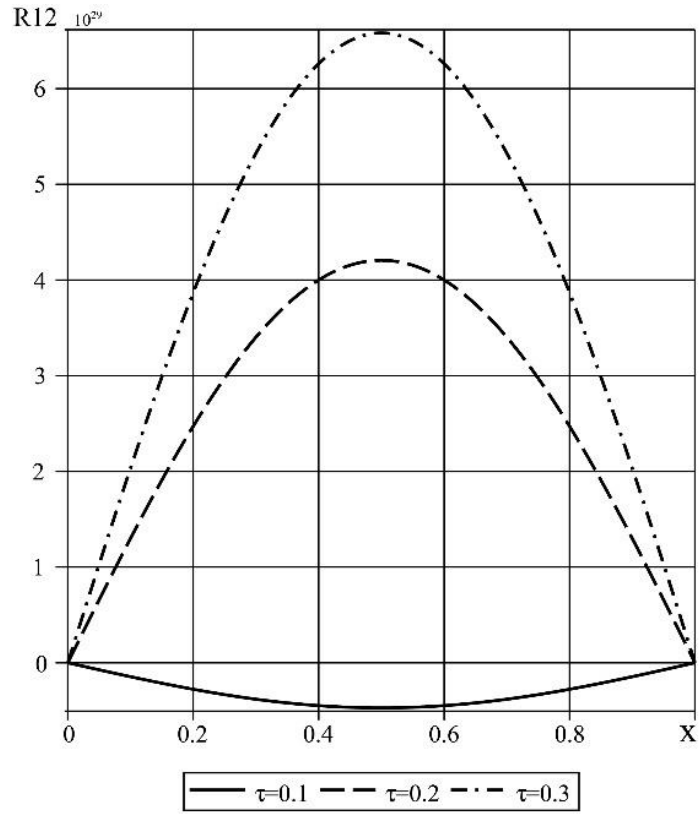


Рис 3.87: Зависимость R_{12} от времени τ

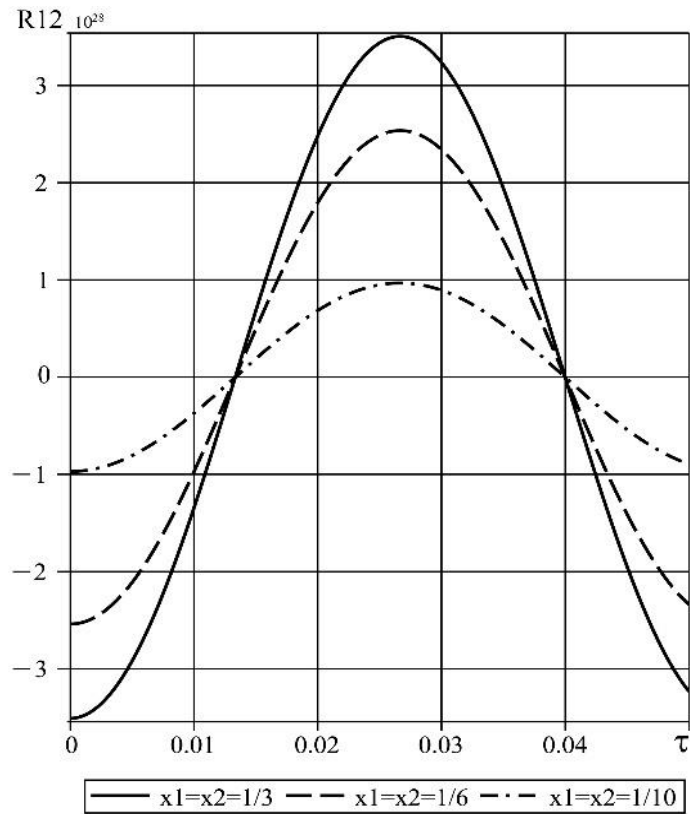


Рис 3.88: Зависимость R_{12} от координат x_1, x_2

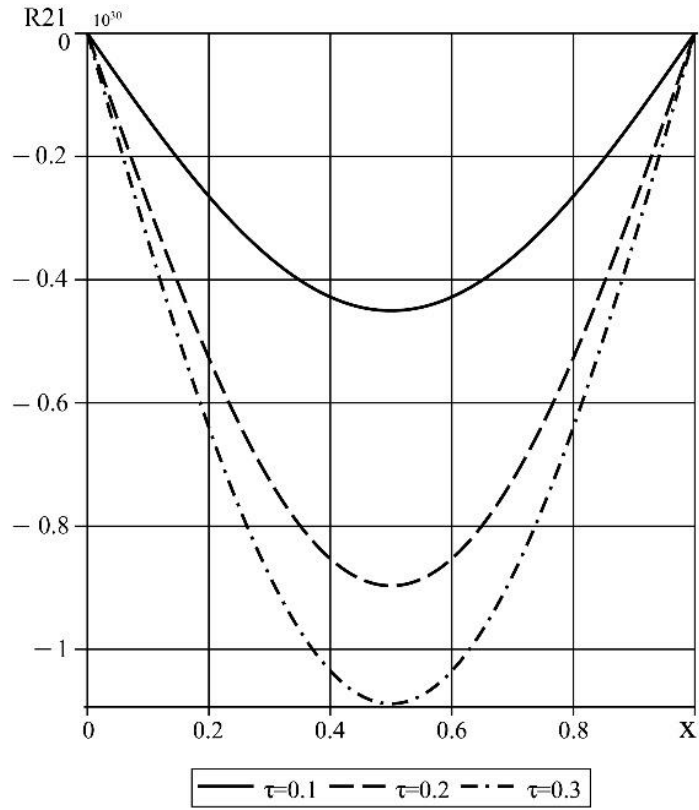


Рис 3.89: Зависимость R_{21} от времени τ

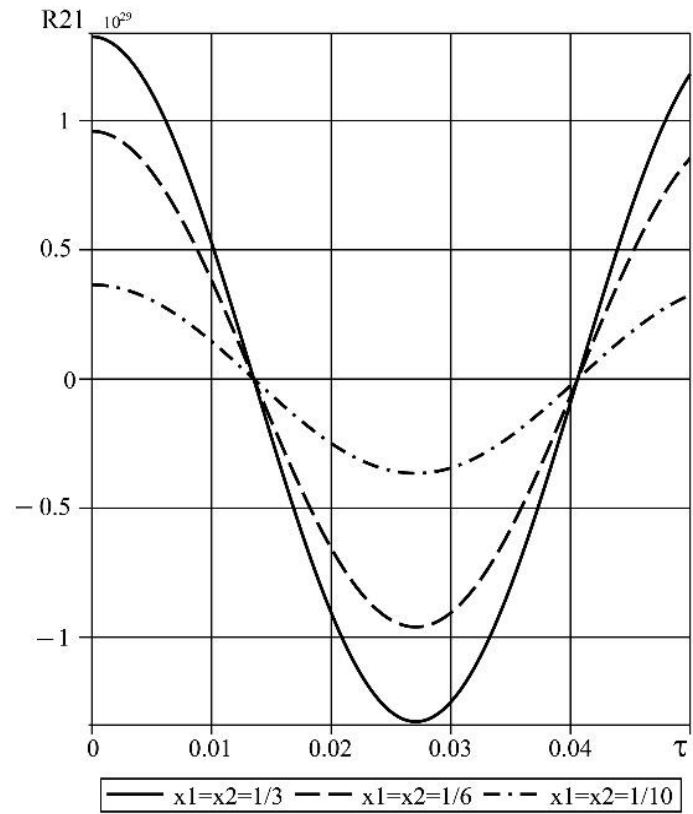
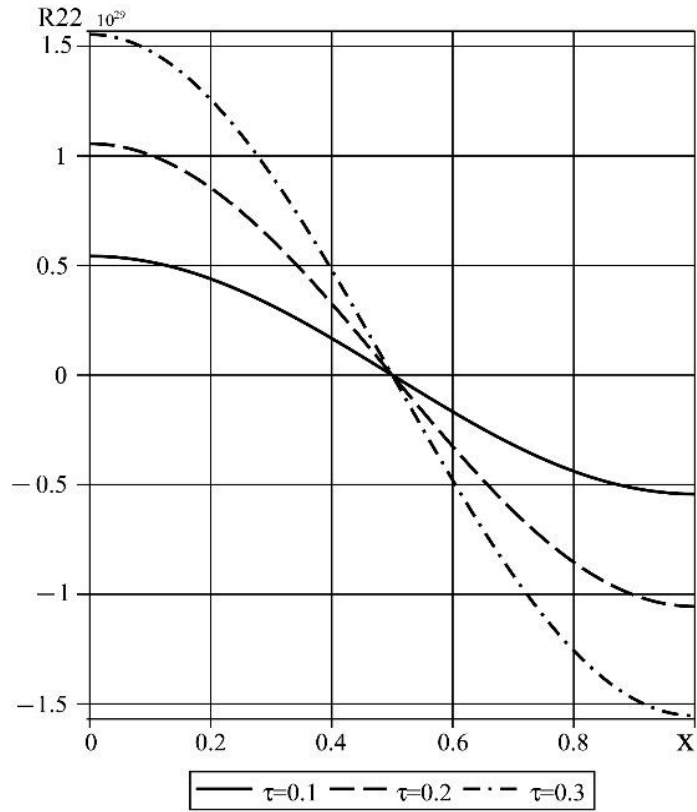
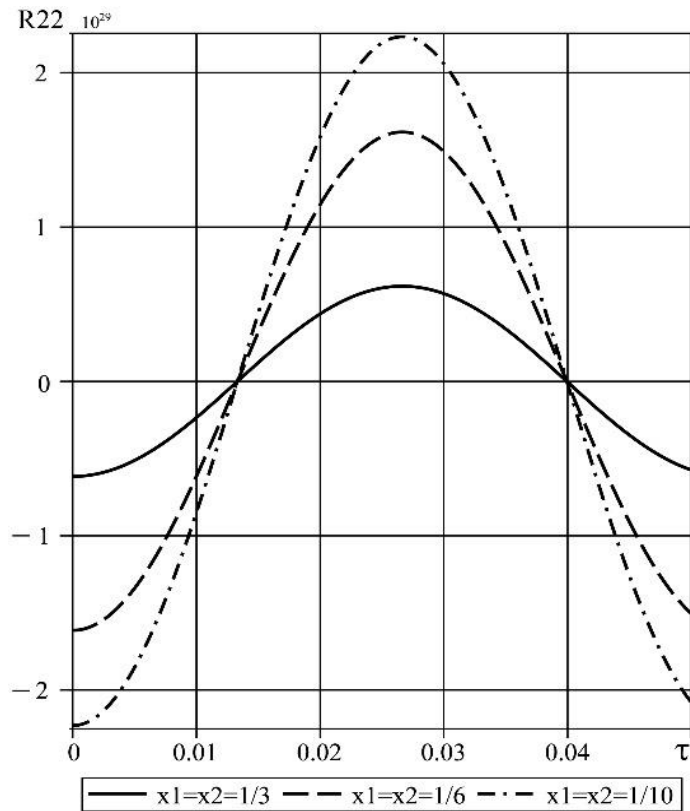
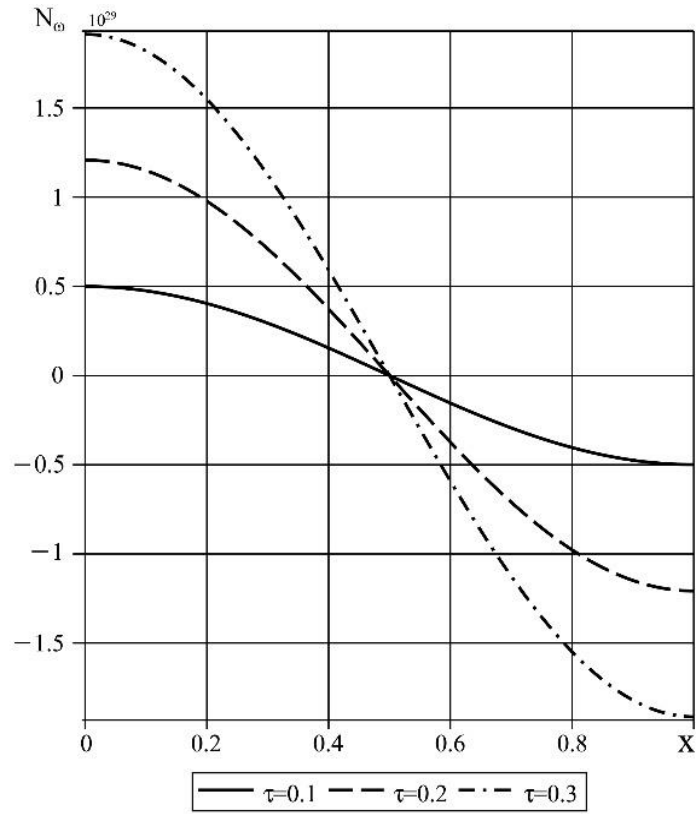
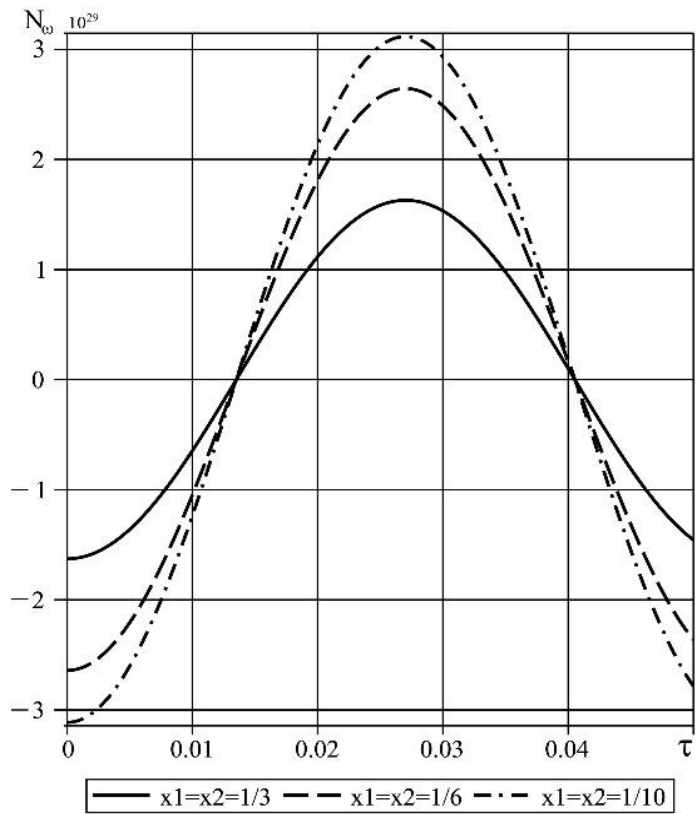


Рис 3.90: Зависимость R_{21} от координат x_1, x_2

Рис 3.91: Зависимость R_{22} от времени τ Рис 3.92: Зависимость R_{22} от координат x_1, x_2

Рис 3.93: Зависимость N_ω от времени τ Рис 3.94: Зависимость N_ω от координат x_1, x_2

3.4. Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины – общая модель

Перейдем теперь к общей модели, по-прежнему рассматривая прямоугольную пластину вида (3.1.1). Ее движение описывается уравнениями (2.2.15), а физические соотношения – равенствами (2.2.16 и 2.2.17). Начальные условия нулевые. Граничные условия – шарнирное опирание, задаваемое равенствами (3.1.2) и (3.2.1).

Решение представляем в виде рядов (3.1.3), к которым добавляем разложения (3.2.2) и (3.3.1):

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, a_m = \frac{\pi m}{a}, b_n = \frac{\pi n}{b}, \\
 \omega_1 &= \omega_{10} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \omega_{10} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{1m0}(\tau) \sin a_m x_1, \\
 \omega_2 &= \omega_{20} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \omega_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{20n}(\tau) \sin b_n x_2, \\
 \varphi_3 &= \varphi_{300} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{3m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{30n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 \psi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{10n}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{1mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
 \psi_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{2m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{2mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2.
 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

С их помощью из (2.2.16) и (2.2.17) аналогично (3.2.3), (3.2.4) получаем ряды для нетривиальных при изгибе внутренних силовых факторов (при этом используем равенства (3.2.5) и (3.3.3)):

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \theta_{\omega mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2,$$

$$M_{11} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{11mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, M_{22} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{22mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \quad (3.4.2)$$

$$M_{12} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{12mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, M_{21} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{21mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2,$$

$$T_{13} = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{13mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, T_{31} = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{31mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2,$$

$$T_{23} = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{23mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, T_{32} = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{32mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2.$$

$$R_{11} = R_{1100} + \sum_{m=1}^{\infty} R_{11m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_{110n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{11mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2,$$

$$R_{22} = R_{2200} + \sum_{n=1}^{\infty} R_{220n} \cos b_n x_2 + \sum_{m=1}^{\infty} R_{220m} \cos a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{22mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2,$$

$$S_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} S_{13m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} S_{13mn} \sin a_m x_1 \cos b_n x_2,$$

$$S_{23} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{230n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} S_{23mn} \cos a_m x_1 \sin b_n x_2.$$

В данном случае граничные условия удовлетворяется тождественно.

Для коэффициентов этих рядов имеют место следующие равенства:

- при $m, n \geq 1$

$$\theta_{\omega mn} = a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}$$

$$M_{11mn} = -a_m \psi_{1mn} - \kappa b_n \psi_{2mn}, M_{22mn} = -\kappa a_m \psi_{1mn} - b_n \psi_{2mn},$$

$$M_{12mn} = \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n \psi_{1mn} - 2\alpha \varphi_{3mn},$$

$$M_{21mn} = \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m \psi_{2mn} + 2\alpha \varphi_{3mn},$$

$$T_{13mn} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m w_{mn} + 2\alpha \omega_{2mn}, \quad (3.4.3)$$

$$T_{23mn} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n w_{mn} - 2\alpha \omega_{1mn},$$

$$T_{31mn} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m w_{mn} - 2\alpha \omega_{2mn},$$

$$T_{32mn} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n w_{mn} + 2\alpha \omega_{1mn},$$

$$R_{11mn} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1mn} + \eta_2 b_n \omega_{2mn} + \eta_2 \varphi_{3mn},$$

$$\begin{aligned}
R_{22mn} &= \eta_2 a_m \omega_{1mn} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{2mn} + \eta_2 \varphi_{3mn}, \\
R_{12mn} &= -a_m \omega_{2mn} - \eta b_n \omega_{1mn}, R_{21mn} = -b_n \omega_{1mn} - \eta a_m \omega_{2mn}, \\
S_{13mn} &= -a_m \varphi_{3mn}, S_{23mn} = -b_n \varphi_{3mn} \\
N_{\omega mn} &= \eta_2 (a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}) + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{3mn}.
\end{aligned}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\theta_{\omega 0n} &= b_n \omega_{20n}, M_{110n} = -\kappa b_n \psi_{20n}, M_{220n} = -b_n \psi_{20n}, \\
M_{120n} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n \psi_{10n} - 2\alpha \varphi_{30n}, M_{210n} = \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n \psi_{1mn} + 2\alpha \varphi_{30n}, \\
T_{130n} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{10n} + 2\alpha \omega_{20n}, T_{230n} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{20n} + \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n \omega_{0n} - 2\alpha \omega_{10n}, \\
T_{31mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{10n} - 2\alpha \omega_{20n}, T_{320n} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{20n} + \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n \omega_{0n} + 2\alpha \omega_{10n}, \\
R_{110n} &= \eta_2 b_n \omega_{20n} + \eta_2 \varphi_{30n}, R_{220n} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{20n} + \eta_2 \varphi_{30n}, \\
R_{120n} &= -\eta b_n \omega_{10n}, R_{210n} = -b_n \omega_{1mn}, S_{23mn} = -b_n \varphi_{30n} \\
N_{\omega 0n} &= \eta_2 b_n \omega_{20n} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{30n}.
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

- при $n = 0, m \geq 1$

$$\begin{aligned}
\theta_{\omega m0} &= a_m \omega_{1m0}, M_{11m0} = -a_m \psi_{1m0}, M_{22m0} = -\kappa a_m \psi_{1m0}, \\
M_{12m0} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m \psi_{2m0} - 2\alpha \varphi_{3m0}, M_{21m0} = \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m \psi_{2m0} + 2\alpha \varphi_{3m0}, \\
T_{13m0} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{1m0} + \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m \omega_{m0} + 2\alpha \omega_{2m0}, T_{23m0} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{2m0} - 2\alpha \omega_{1m0}, \\
T_{31m0} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{1m0} + \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m \omega_{m0} - 2\alpha \omega_{2m0}, T_{32m0} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{2m0} + 2\alpha \omega_{1m0}, \\
R_{11m0} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1m0} + \eta_2 \varphi_{3m0}, R_{22m0} = \eta_2 a_m \omega_{1m0} + \eta_2 \varphi_{3m0}, \\
R_{12m0} &= -a_m \omega_{2m0}, R_{21m0} = -\eta a_m \omega_{2m0}, S_{13mn} = -a_m \varphi_{3mn}, \\
N_{\omega m0} &= \eta_2 a_m \omega_{1m0} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{3m0}.
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

- при $n = 0, m = 0$

$$\begin{aligned}
M_{1200} &= -M_{2100} = -2\alpha \varphi_{300}, T_{1300} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{100} 2\alpha \omega_{200}, \\
T_{2300} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{200} - 2\alpha \omega_{100}, T_{3100} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{100} - 2\alpha \omega_{200}, \\
T_{3200} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{200} + 2\alpha \omega_{100}, R_{1100} = \eta_2 \varphi_{300}, \\
R_{2200} &= \eta_2 \varphi_{300}, N_{\omega 00} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{300}.
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Уравнения относительно коэффициентов рядов выводятся путем подстановки рядов (2.2.15), предварительно раскладывая правые части этих уравнений в соответствующие ряды:

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
\tilde{m}_{M1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
\tilde{m}_{M2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M20n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
\tilde{m}_{2M} &= \tilde{m}_{2M00} + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{m}_{2Mm0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{2M0n} \cos b_n x_2 + \\
&\quad + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{2Mmn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
m_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} m_{10n}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} m_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
m_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} m_{2m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} m_{2mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2.
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

В результате получаем

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(6)} &= \mathbf{A}_{mn}^{(6)} \mathbf{X}_{mn}^{(6)} + \mathbf{B}_{mn}^{(6)}, \\
\mathbf{A}_{mn}^{(6)} &= (a_{mnij})_{6 \times 6}, \mathbf{X}_{mn}^{(6)} = (w_{mn}, \omega_{1mn}, \omega_{2mn}, \varphi_{3mn}, \psi_{1mn}, \psi_{2mn})^T, \\
\mathbf{B}_{mn}^{(6)} &= (p_{mn}, \tilde{m}_{M1mn}, \tilde{m}_{M2mn}, \tilde{m}_{2M}, m_1, m_2)^T, \\
a_{mn11} &= -\gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + b_n^2), a_{mn12} = -2\alpha b_n, a_{mn13} = 2\alpha a_m, \\
a_{mn14} &= 0, a_{mn15} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} a_m, a_{mn16} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} b_n; \\
a_{mn21} &= 2\alpha \nu b_m, a_{mn22} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + \gamma_2^{-2} b_n^2 + 4\alpha \nu), \\
a_{mn23} &= a_{mn32} = -c_{02} a_m b_n, a_{mn24} = -\gamma_3^{-2} a_m, a_{mn25} = 0, a_{mn26} = -2\alpha \nu; \\
a_{mn31} &= -2\alpha \nu a_m, a_{mn33} = -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + \gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha \nu),
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

$$\begin{aligned}
a_{mn34} &= -\gamma_3^{-2} b_n, a_{mn35} = 2\alpha\nu, a_{mn36} = 0; a_{mn41} = 0, a_{mn42} = -r^{-2}\gamma_3^{-2} a_m, a_{mn43} = -r^{-2}\gamma_3^{-2} b_n, \\
a_{mn44} &= -\left[4\alpha\nu + \gamma_2^{-2} (a_m^2 + b_n^2) + r^{-2}\gamma_0^{-2}\right], a_{mn45} = -2\alpha\nu b_n, a_{mn46} = 2\alpha\nu a_m; \\
a_{mn51} &= -r^{-2}\gamma_{\alpha-}^{-2} a_m, a_{mn52} = 0, a_{mn53} = -r^{-2} 2\alpha, a_{mn54} = -2\alpha b_n, \\
a_{mn55} &= -\left[a_m^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (b_n^2 + r^{-2})\right], a_{mn56} = -c_{\alpha+} a_m b_n; \\
a_{mn61} &= -r^{-2}\gamma_{\alpha-}^{-2} b_n, a_{mn62} = -r^{-2} 2\alpha, a_{mn63} = 0, a_{mn64} = 2\alpha a_m, \\
a_{mn65} &= -c_{\alpha+} a_m, a_{mn66} = -\left[b_n^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + r^{-2})\right].
\end{aligned}$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned}
\ddot{\omega}_{1m0} &= a_{m022}\omega_{1m0} + a_{m024}\phi_{3m0} + a_{m026}\psi_{2m0} + \tilde{m}_{M1}; \\
a_{m022} &= -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha\nu), a_{m024} = -\gamma_3^{-2} a_m, a_{m026} = -2\alpha\nu; \\
\ddot{\phi}_{3m0} &= a_{m042}\omega_{1m0} + a_{m044}\phi_{3m0} + a_{m046}\psi_{2m0} + \tilde{m}_{M2m0}; \\
a_{m042} &= -r^{-2}\gamma_3^{-2} a_m, a_{m044} = -\left[4\alpha\nu + \gamma_2^{-2} a_m^2 + r^{-2}\gamma_0^{-2}\right], a_{m046} = 2\alpha\nu a_m; \\
\ddot{\psi}_{2m0} &= a_{m062}\omega_{1m0} + a_{m064}\phi_{3m0} + a_{m066}\psi_{2m0} + m_1; \\
a_{m062} &= -r^{-2} 2\alpha, a_{m064} = 2\alpha a_m, a_{m066} = -\left[\gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + r^{-2})\right].
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\ddot{\omega}_{20n} &= a_{0n33}\omega_{20n} + a_{0n34}\phi_{30n} + a_{0n35}\psi_{10n} + \tilde{m}_{M2}; \\
a_{0n33} &= -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha\nu), a_{0n34} = -\gamma_3^{-2} b_n, a_{0n35} = 2\alpha\nu; \\
\ddot{\phi}_{30n} &= a_{0n43}\omega_{20n} + a_{0n44}\phi_{30n} + a_{0n45}\psi_{10n} + \tilde{m}_{M2mn}; \\
a_{0n43} &= -r^{-2}\gamma_3^{-2} b_n, a_{0n44} = -\left[4\alpha\nu + \gamma_2^{-2} b_n^2 + r^{-2}\gamma_0^{-2}\right], a_{0n45} = -2\alpha\nu b_n; \\
\ddot{\psi}_{10n} &= a_{0n53}\omega_{20n} + a_{0n54}\phi_{30n} + a_{0n55}\psi_{10n} + m_1; \\
a_{0n53} &= -r^{-2} 2\alpha, a_{0n54} = -2\alpha b_n, a_{0n55} = -\left[\gamma_{\alpha+}^{-2} (b_n^2 + r^{-2})\right].
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

- при $m, n = 0$

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi}_{300} &= a_{0066}\phi_{300} + \tilde{m}_{2M}, a_{0066} = -(r^{-2}\gamma_0^{-2} + 4\alpha\nu), \\
\ddot{\psi}_{100} &= a_{0043}\omega_{200} + a_{0044}\psi_{100} + m_1, a_{0043} = r^{-2} 2\alpha, a_{0044} = -r^{-2}\gamma_{\alpha+}^{-2}, \\
\ddot{\psi}_{200} &= a_{0052}\omega_{100} + a_{0055}\psi_{200} + m_2, a_{0052} = -r^{-2} 2\alpha, a_{0055} = -r^{-2}\gamma_{\alpha+}^{-2}.
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Эти системы совместно с дополнением к (3.1.15) равенств

$$\Phi_{3mn}|_{\tau=0} = \dot{\Phi}_{3mn}|_{\tau=0} = \Psi_{1mn}|_{\tau=0} = \dot{\Psi}_{1mn}|_{\tau=0} = \Psi_{2mn}|_{\tau=0} = \dot{\Psi}_{2mn}|_{\tau=0} = 0 \quad (3.4.12)$$

образует задачи Коши.

Решение задач, соответствующих (3.4.9)-(3.4.11) не представляет сложностей. К начальным задачам (2.4.8) аналогичный использованному в п. 3.1 алгоритм. В результате получаем

$$\mathbf{X}_{mn}^{(6)L}(s) = -(\mathbf{A}_{mn}^{(6)} - \mathbf{E}s^2)^{-1} \mathbf{B}_{mn}^{(6)} \quad (3.4.13)$$

$$\mathbf{X}_{mn}^{(6)}(\tau) = \sum_{k=1}^8 \text{res}_{s=s_k} \mathbf{X}_{mn}^{(6)L} e^{s\tau} \quad (3.4.14)$$

Для примера аналогично п. 3.1 рассматриваем сосредоточенную нагрузку (3.1.18), дополненную равенствами

$$\tilde{m}_{2M} = m_1 = m_2 = 0 \quad (3.4.15)$$

При этом для коэффициентов разложения в ряды (3.1.19) вводятся дополнительные соотношения.

$$\tilde{m}_{2Mmn} = m_{1mn} = m_{2mn} = 0 \quad (3.4.16)$$

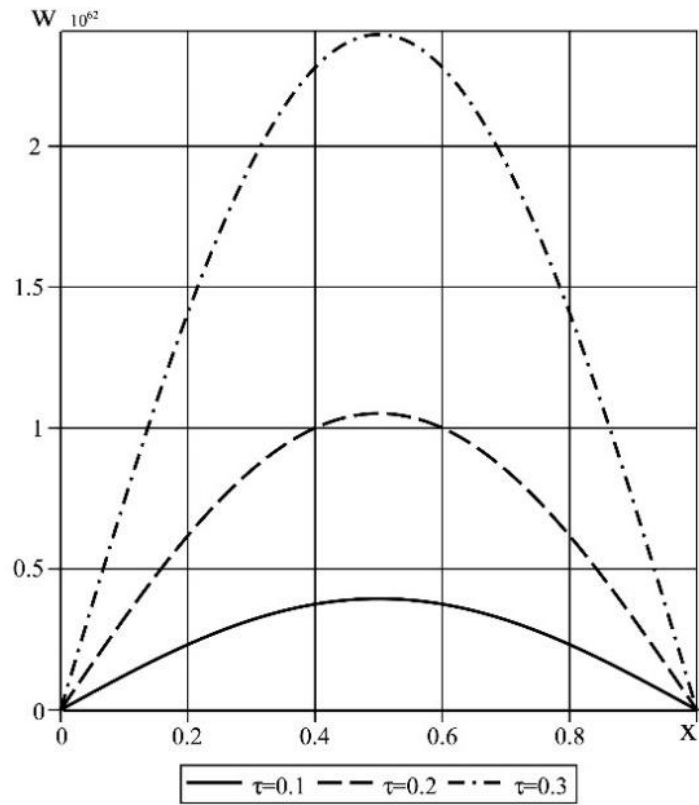
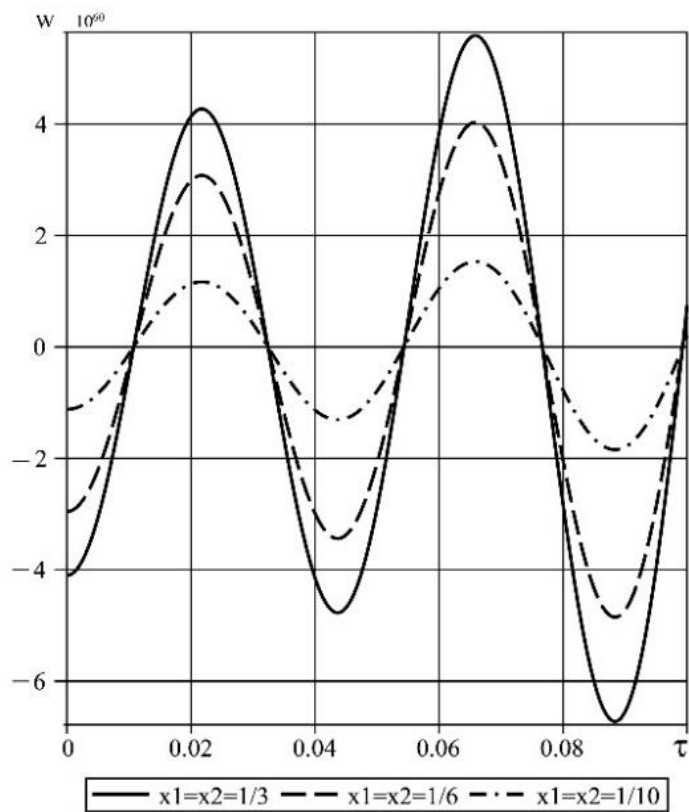
При этих условиях начальные задачи, соответствующие уравнениям (3.4.9) - (3.4.11), однородные. Поэтому их решения тривиальные

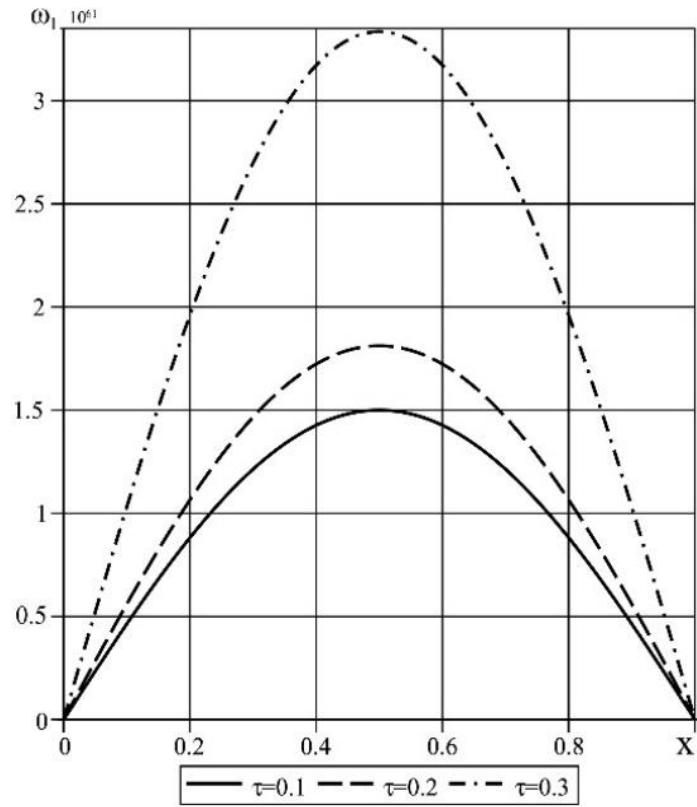
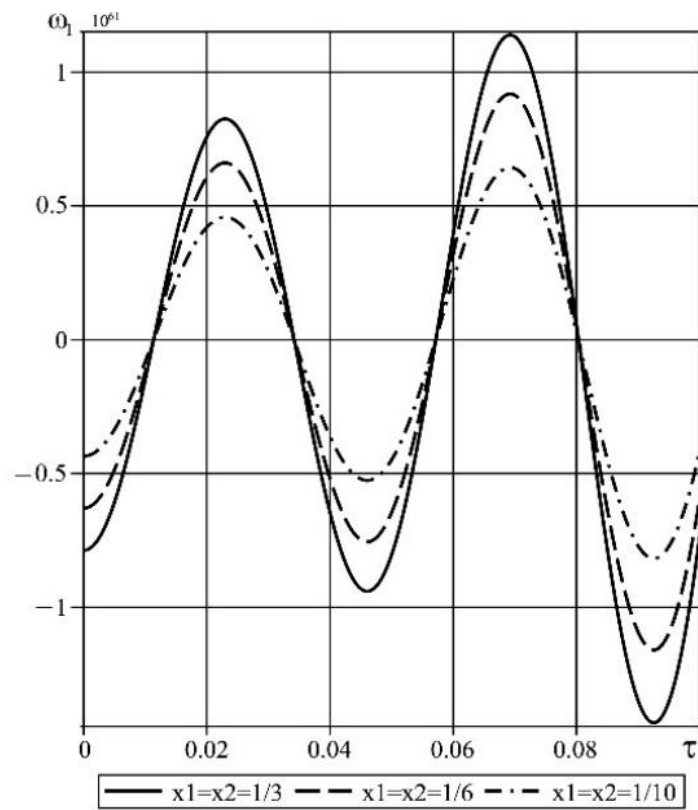
$$\omega_{1m0} = \Phi_{3m0} = \Psi_{2m0} \equiv 0 \quad (m \geq 1), \omega_{20n} = \Phi_{30n} = \Psi_{10n} \equiv 0 \quad (n \geq 1) \quad (3.4.17)$$

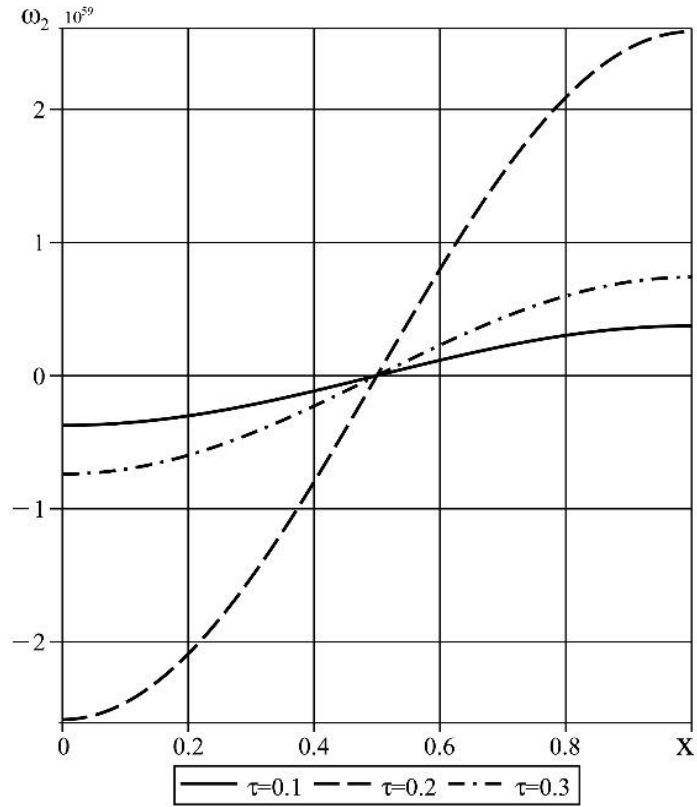
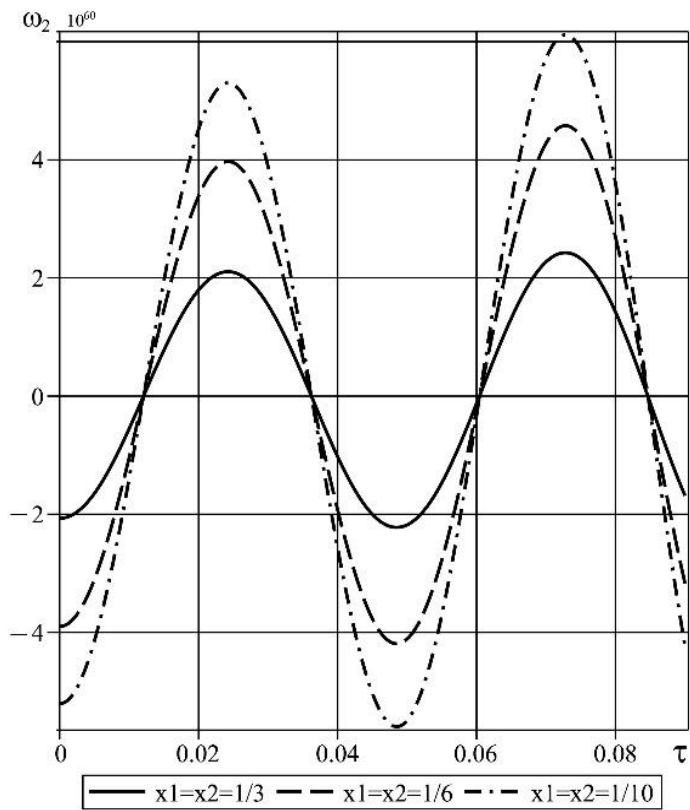
Физические и геометрические параметры пластины, а также точку приложения сосредоточенной нагрузки считаем аналогичными тем, что указаны в разделе 3.1.

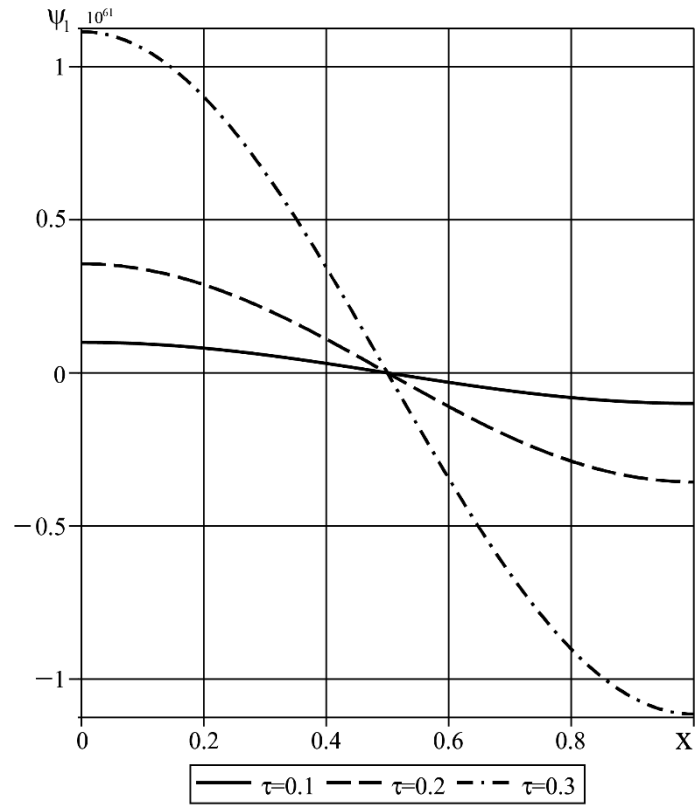
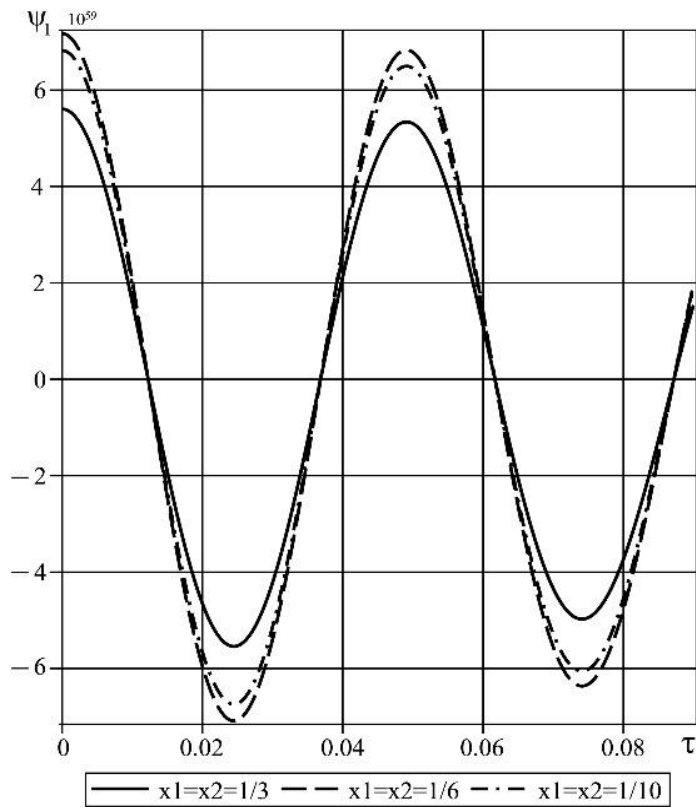
Соответствующие начальные задачи решаются численными методами. Суммирование рядов выполняется с использованием критерия (3.1.25).

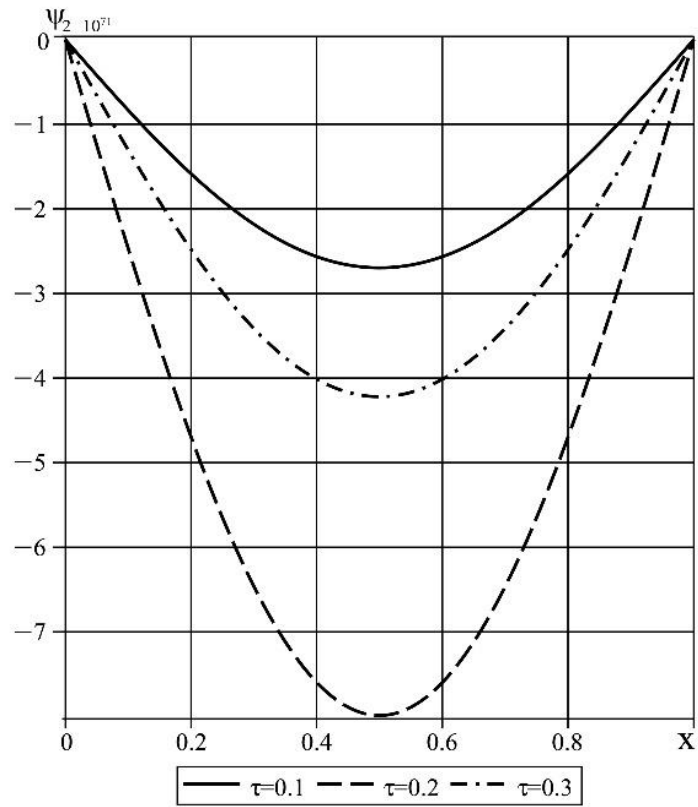
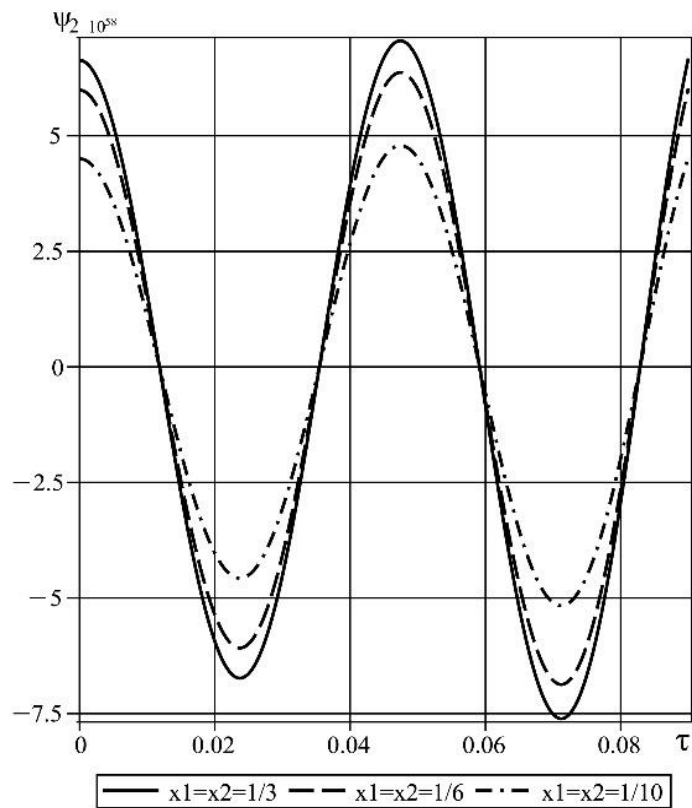
На рис. 3.4.1 - 3.4.38 приведены зависимости прогиба W , углов поворота $\omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2$ и величины Φ_3 , а также внутренних силовых факторов $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}, T_{13} = -T_{31}, T_{23} = -T_{32}, S_{13}, S_{23}, R_{11}, R_{22}, R_{12}, R_{21}$, от координат x_1, x_2 и времени соответственно при различных значениях τ и x_1, x_2 .

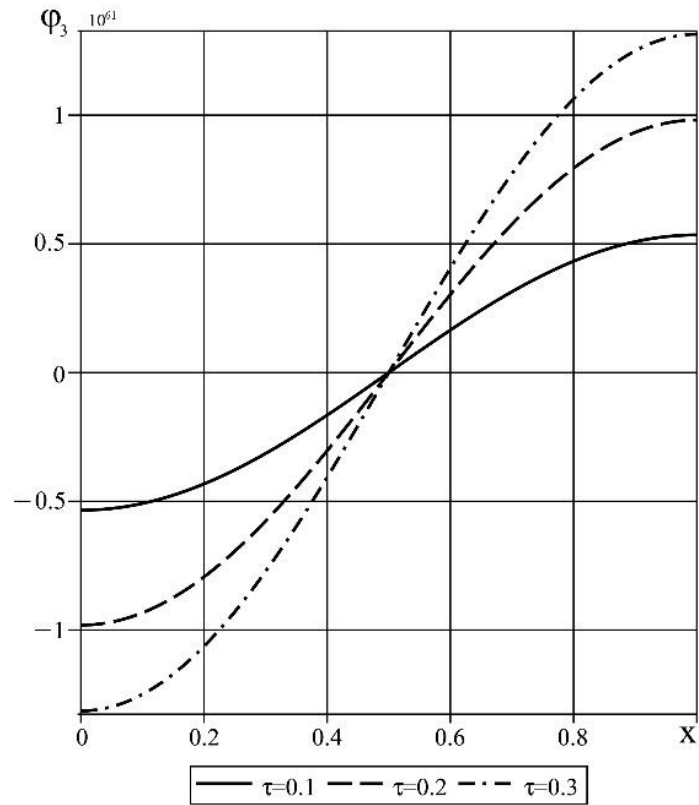
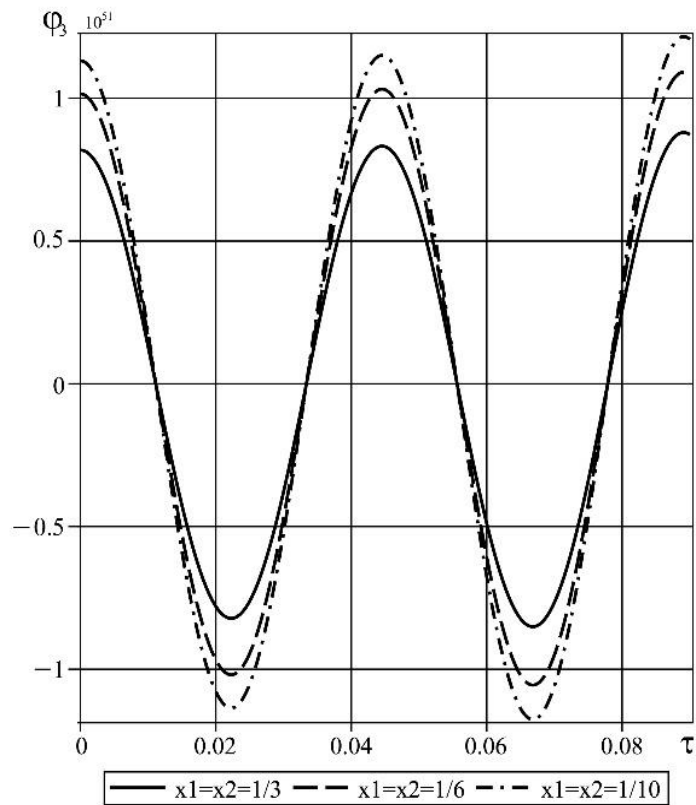
Рис 3.95: Зависимость W от времени τ Рис 3.96: Зависимость W от координат x_1, x_2

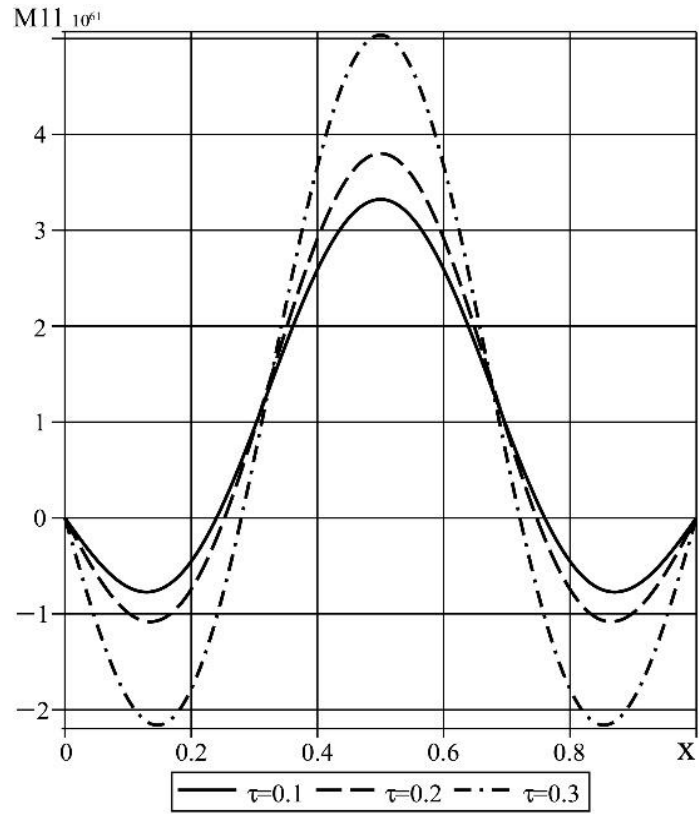
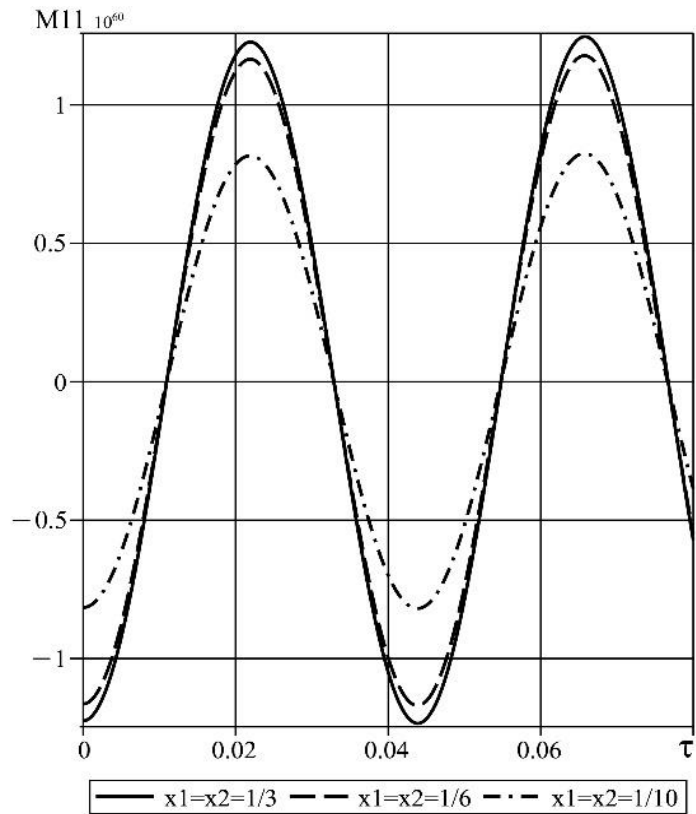
Рис 3.97: Зависимость ω_1 от времени τ Рис 3.98: Зависимость ω_1 от координат x_1, x_2

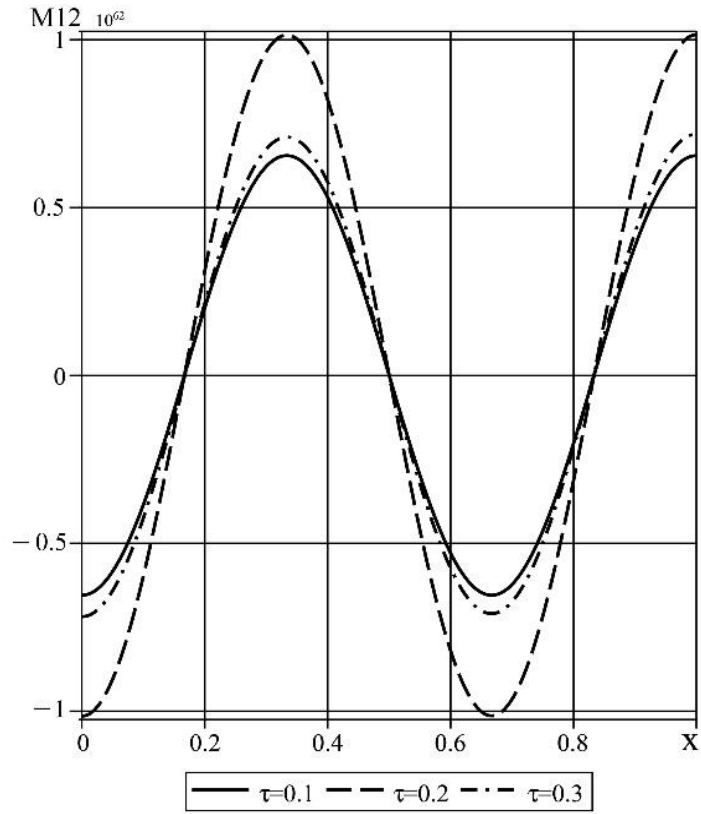
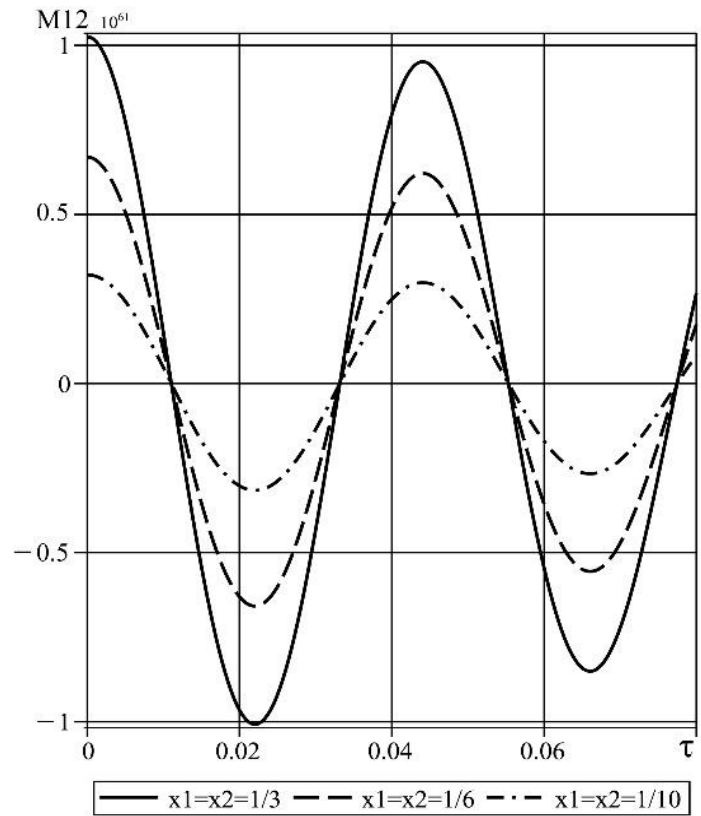
Рис 3.99: Зависимость ω_2 от времени τ Рис 3.100: Зависимость ω_2 от координат x_1, x_2

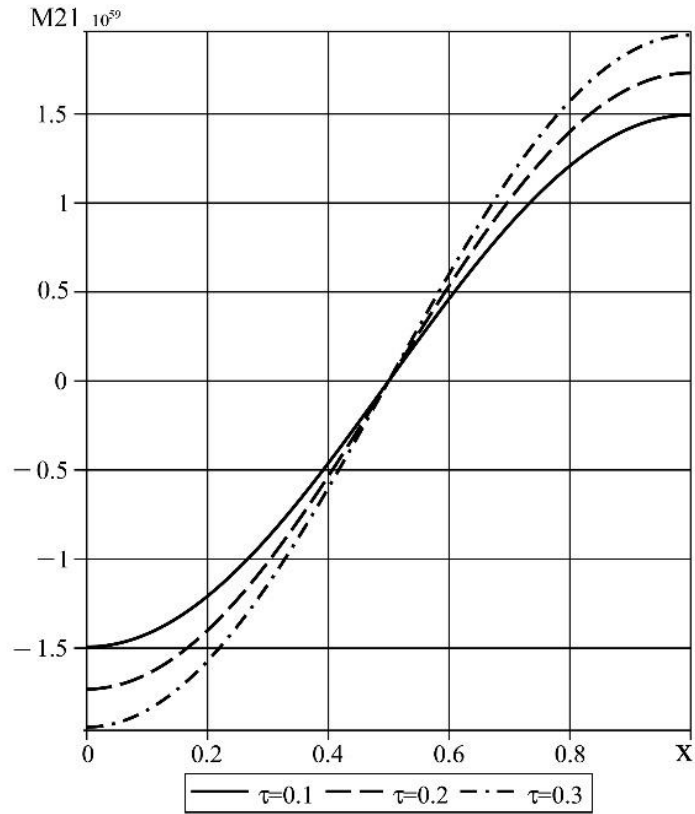
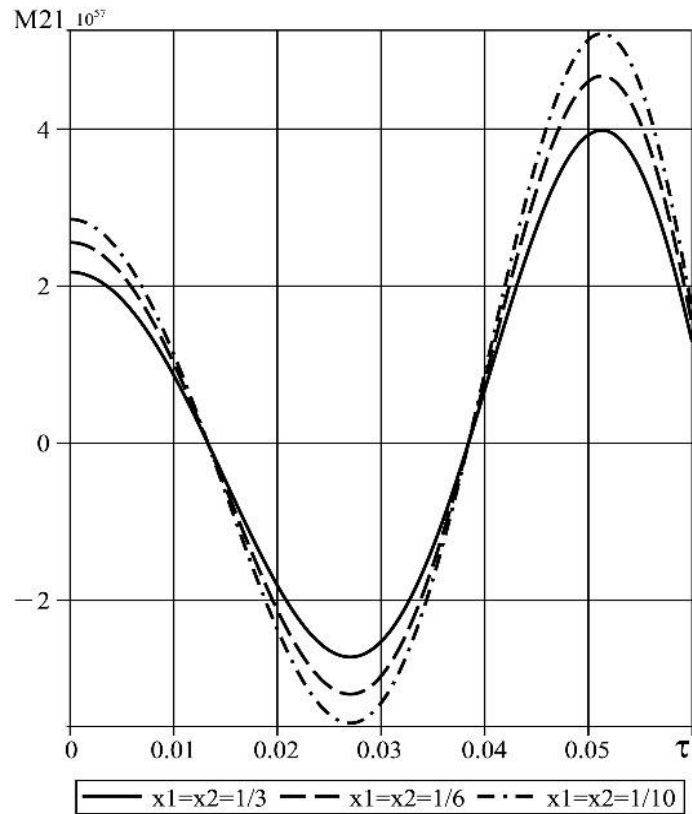
Рис 3.101: Зависимость ψ_1 от времени τ Рис 3.102: Зависимость ψ_1 от координат x_1, x_2

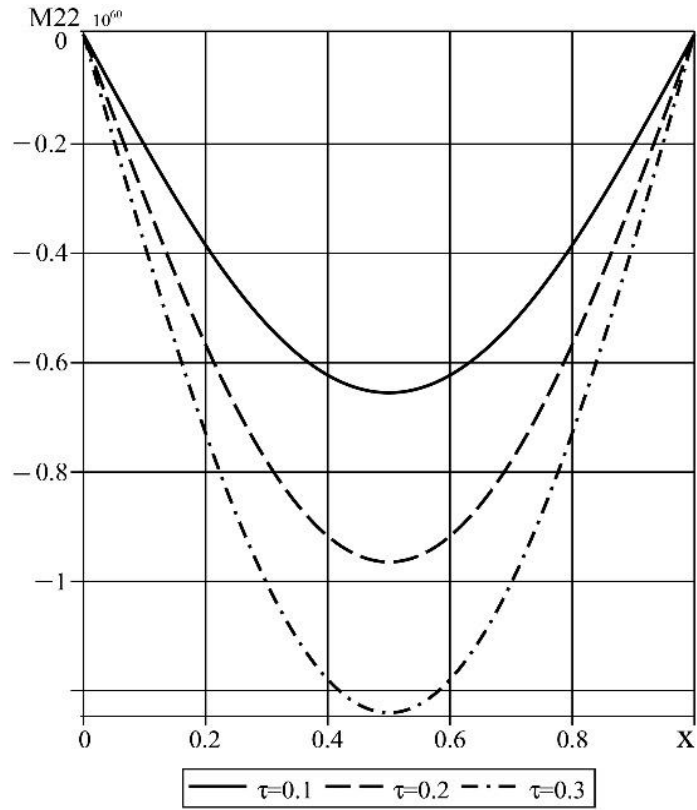
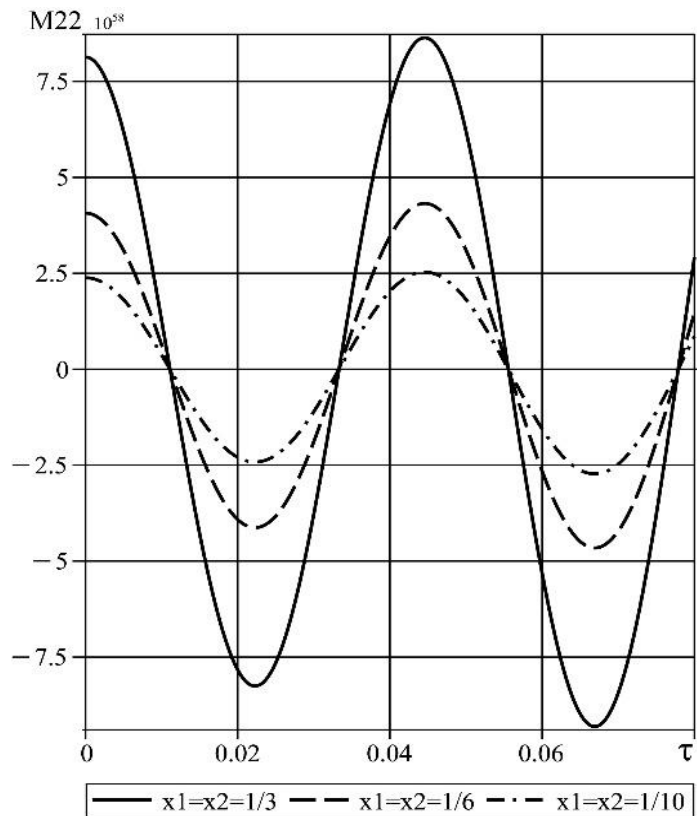
Рис 3.103: Зависимость ψ_2 от времени τ Рис 3.104: Зависимость ψ_2 от координат x_1, x_2

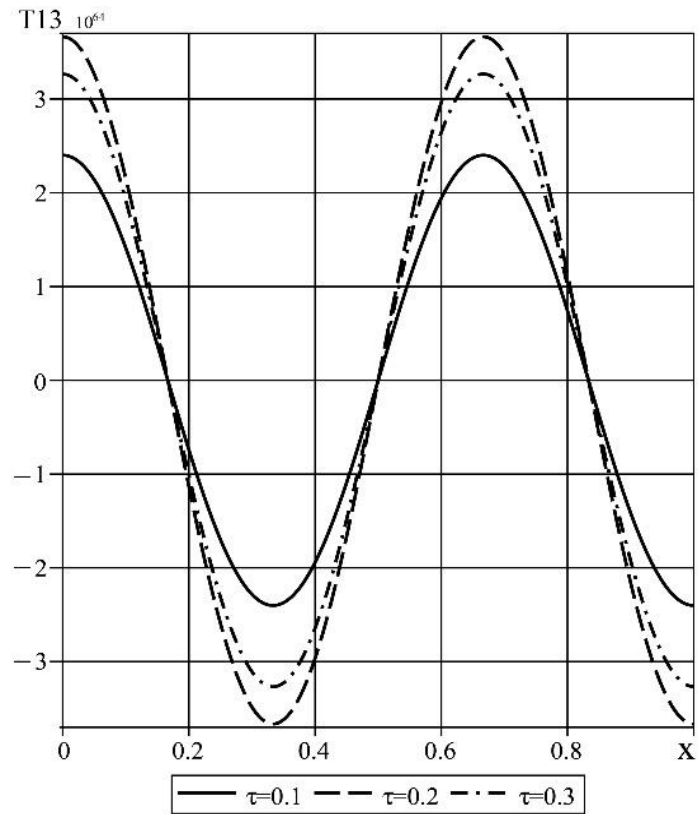
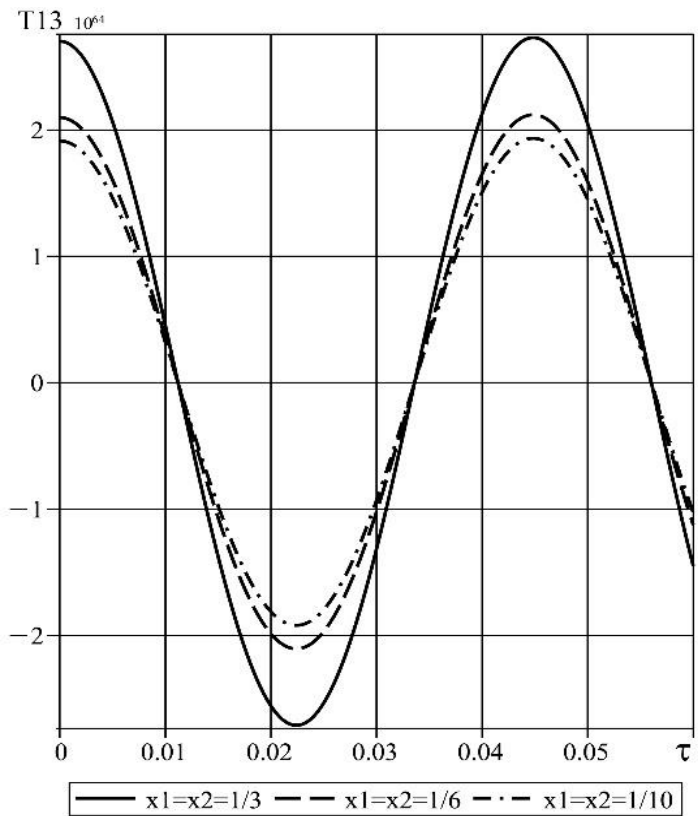
Рис 3.105: Зависимость φ_3 от времени τ Рис 3.106: Зависимость φ_3 от координат x_1, x_2

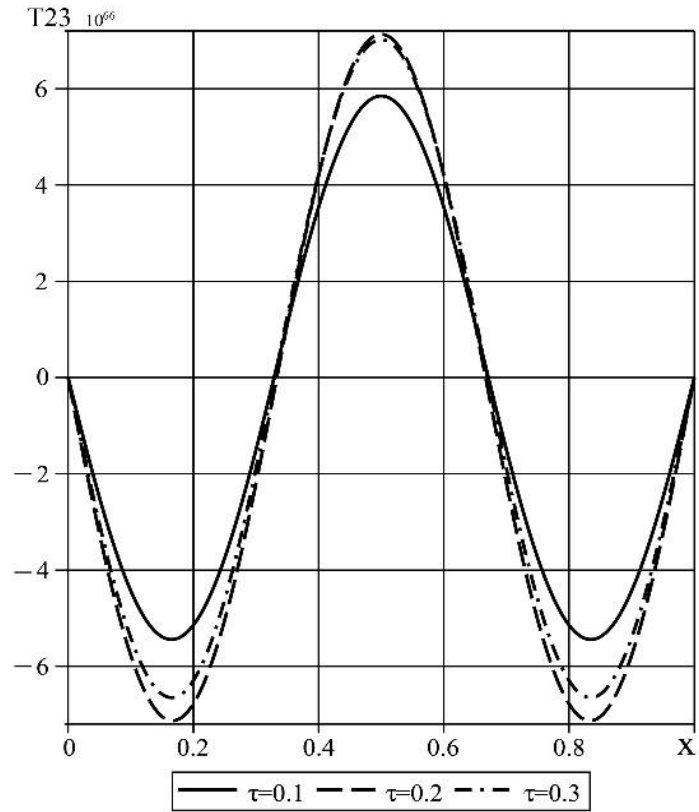
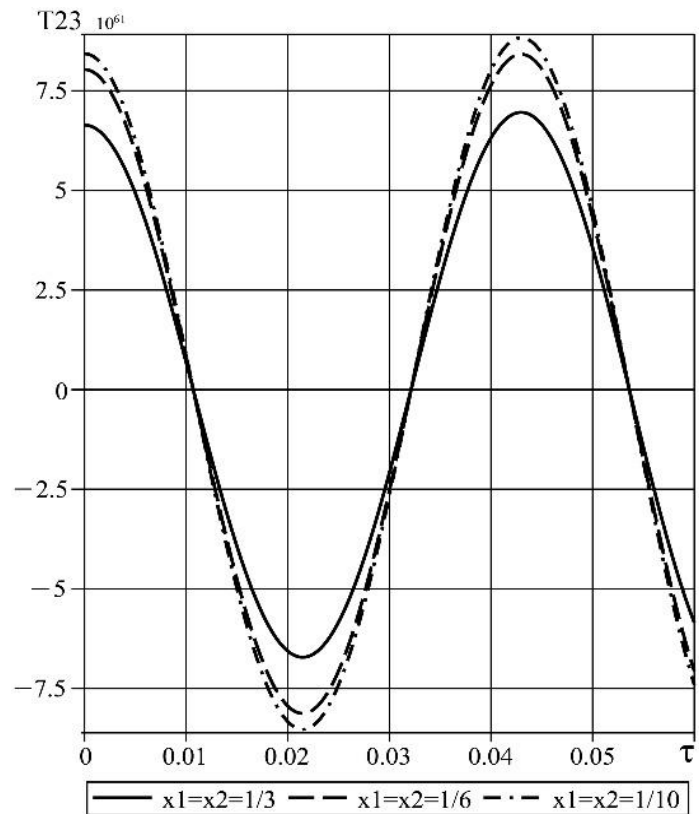
Рис 3.107: Зависимость M_{11} от времени τ Рис 3.108: Зависимость M_{11} от координат x_1, x_2

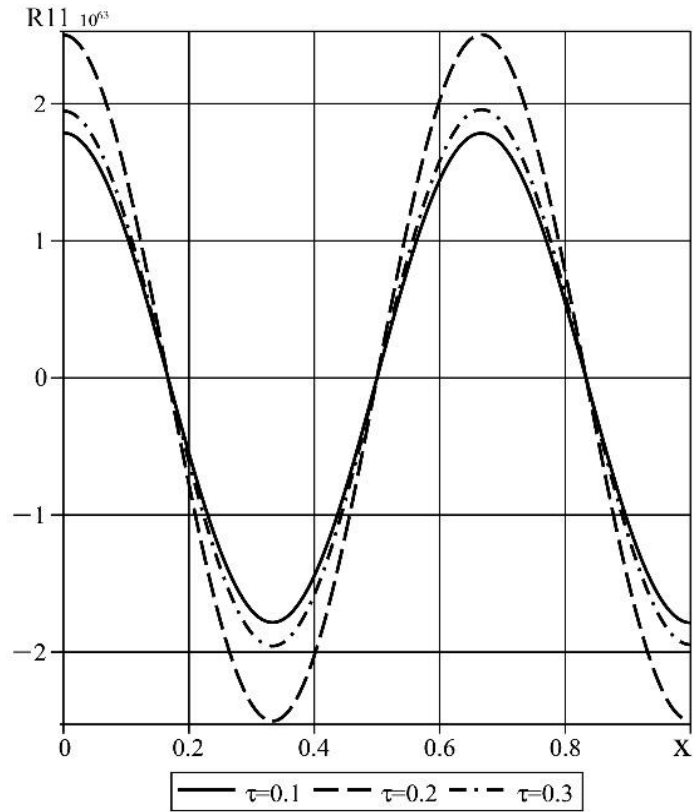
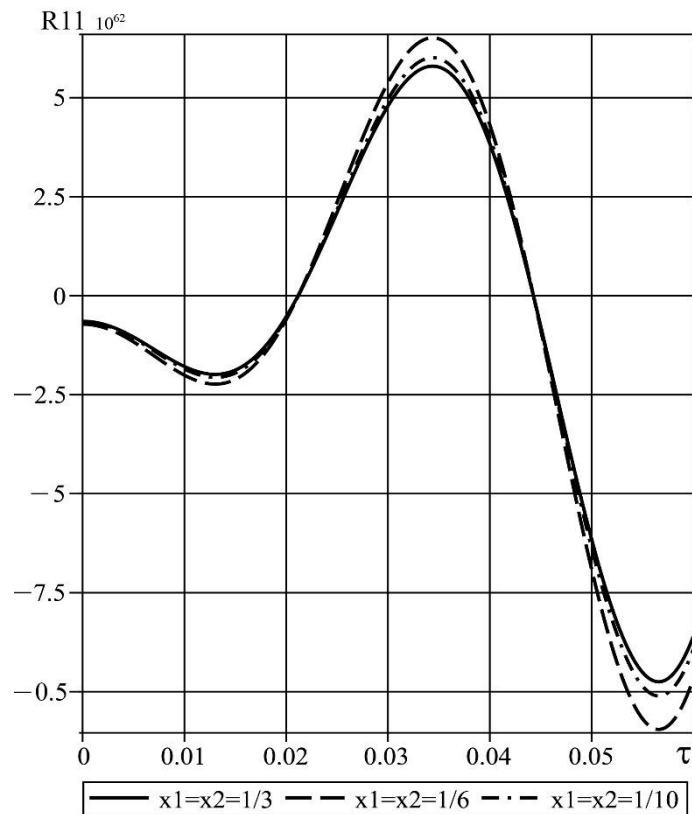
Рис 3.109: Зависимость M_{12} от времени τ Рис 3.110: Зависимость M_{12} от координат x_1, x_2

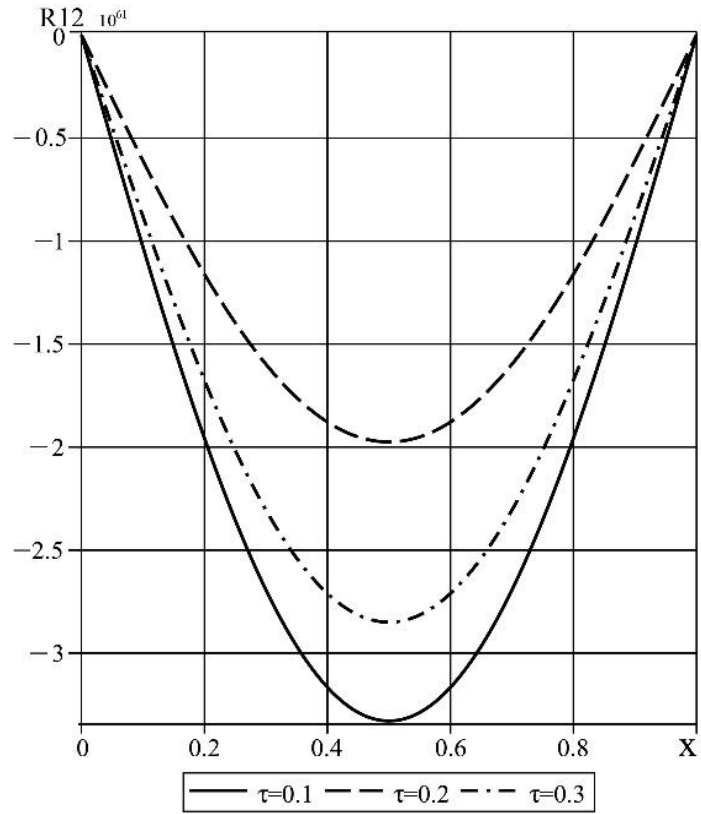
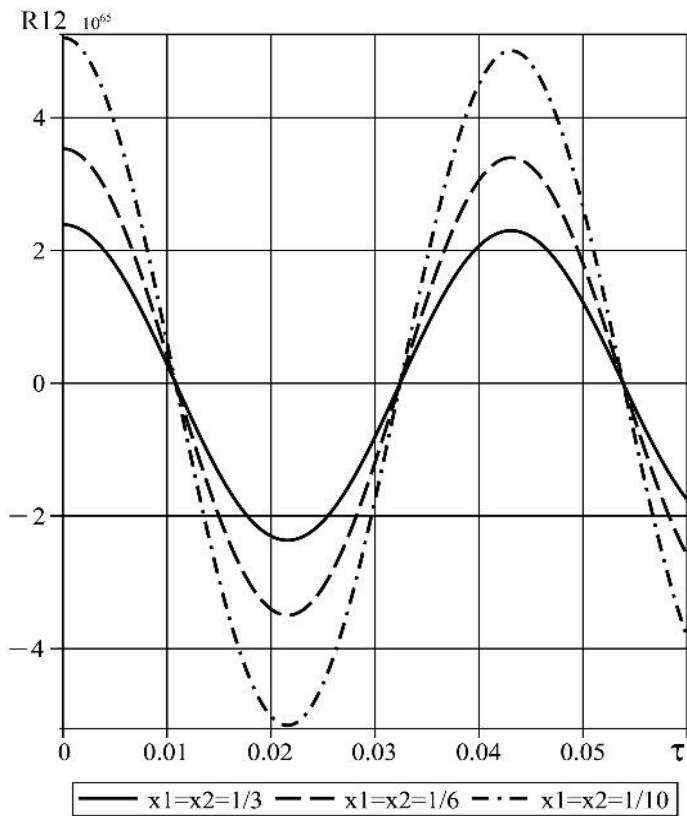
Рис 3.111: Зависимость M_{21} от времени τ Рис 3.112: Зависимость M_{21} от координат x_1, x_2

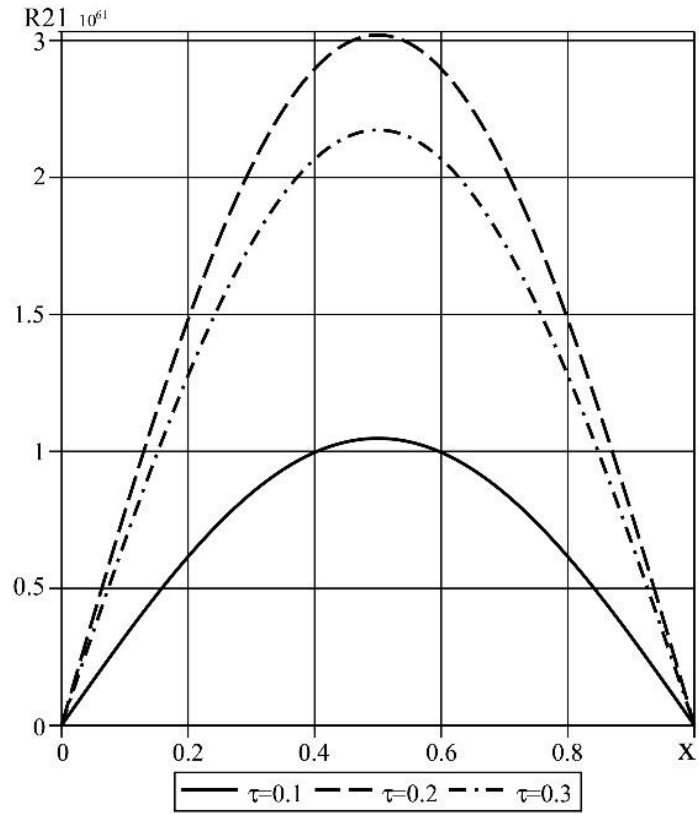
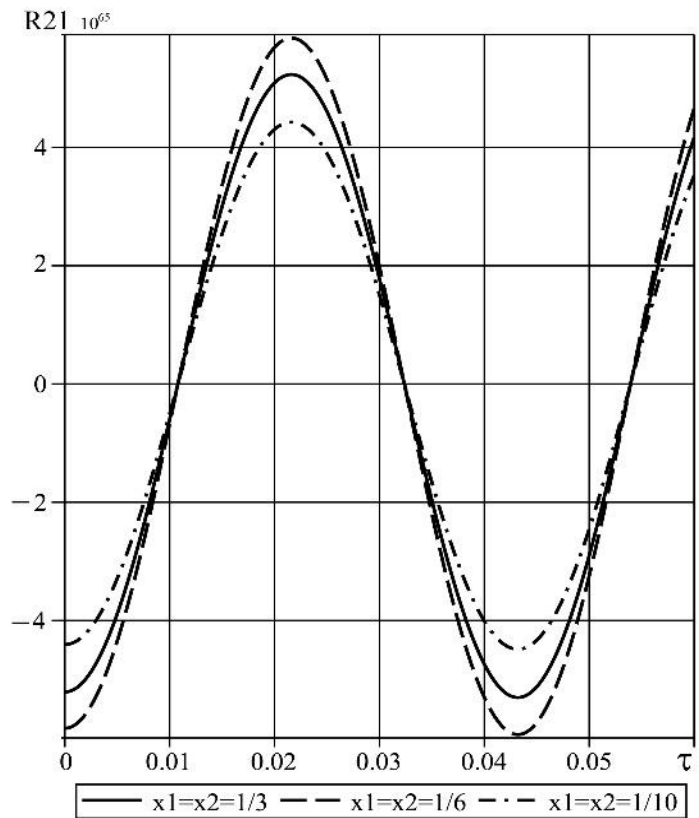
Рис 3.113: Зависимость M_{22} от времени τ Рис 3.114: Зависимость M_{22} от координат x_1, x_2

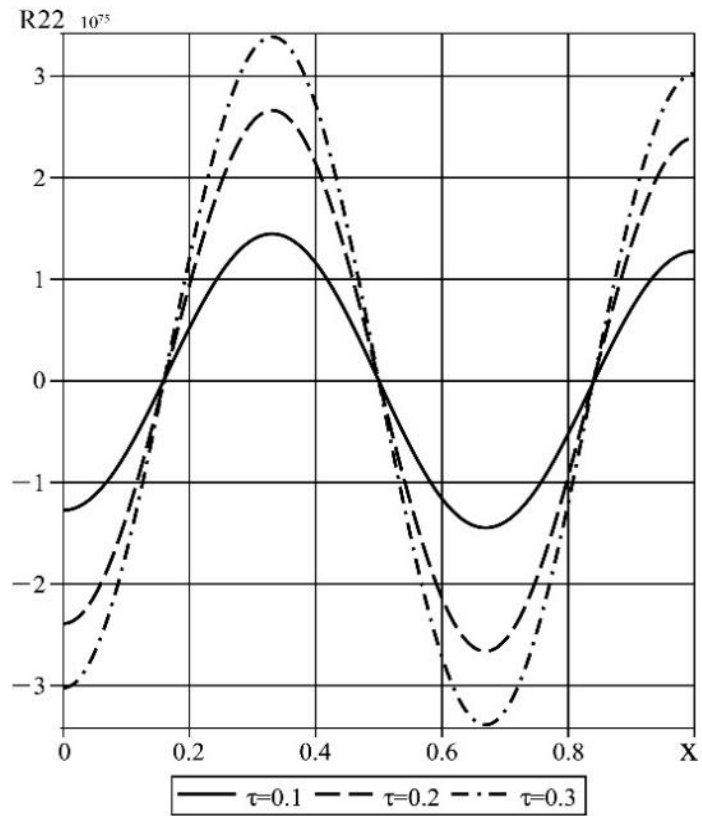
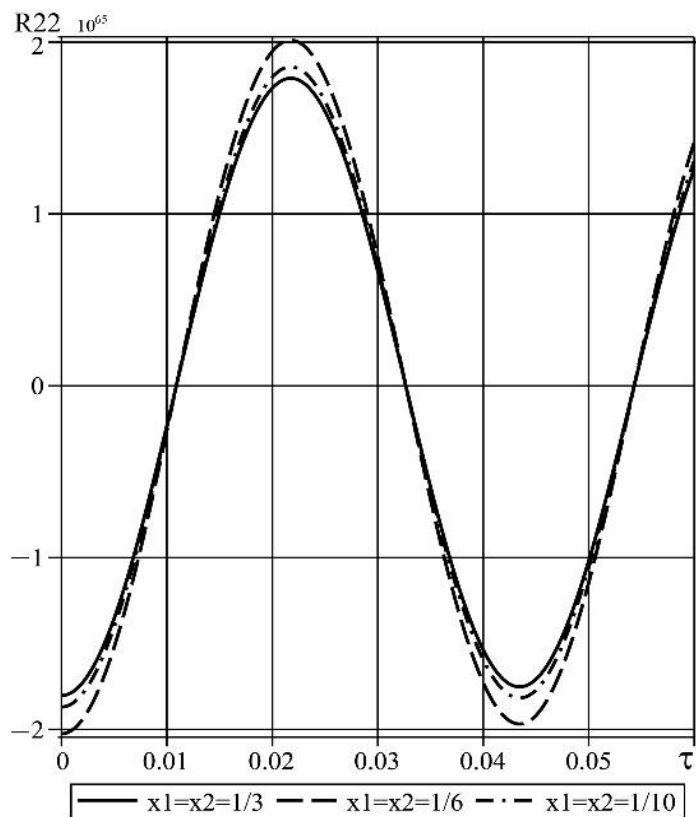
Рис 3.115: Зависимость T_{13} от времени τ Рис 3.116: Зависимость T_{13} от координат x_1, x_2

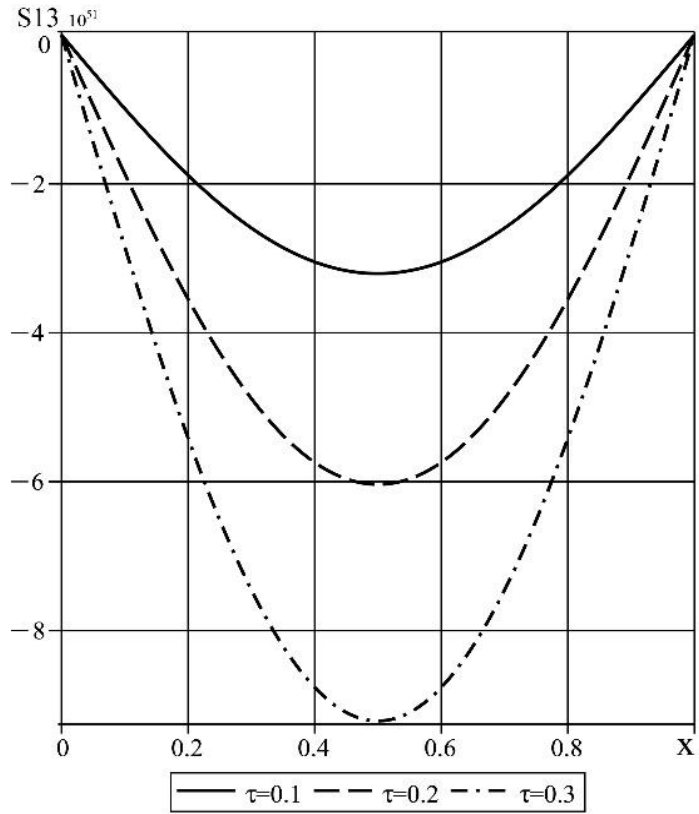
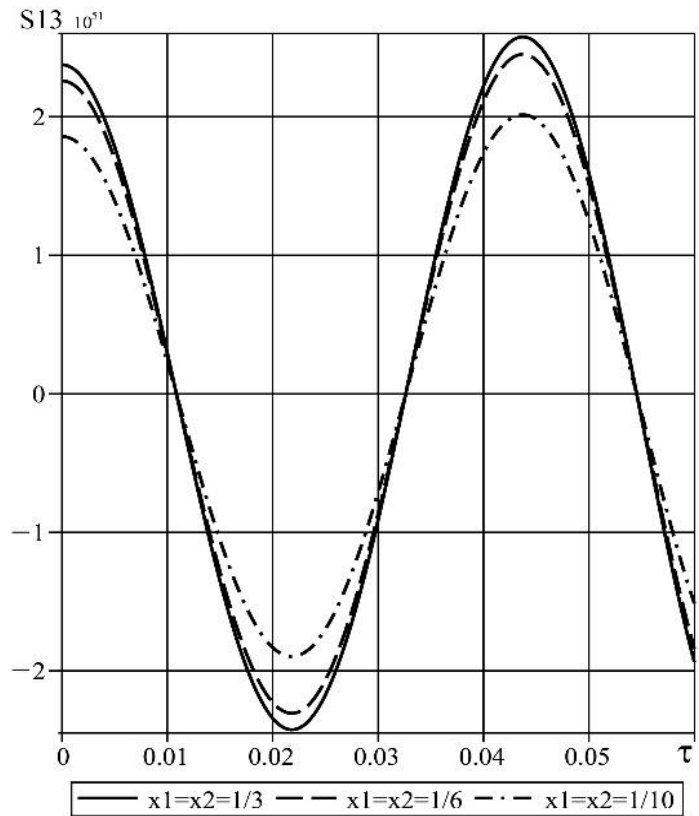
Рис 3.117: Зависимость T_{23} от времени τ Рис 3.118: Зависимость T_{23} от координат x_1, x_2

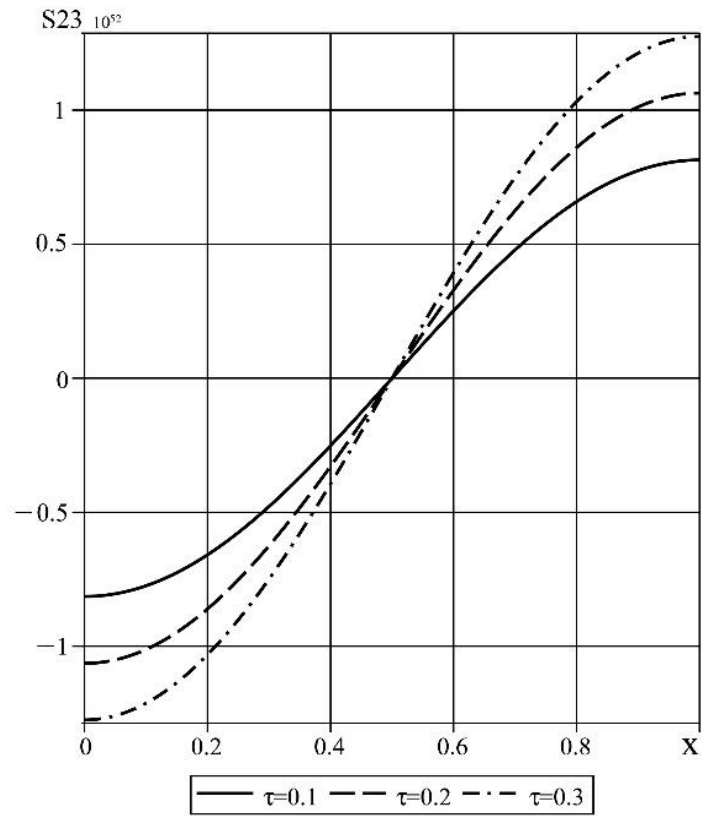
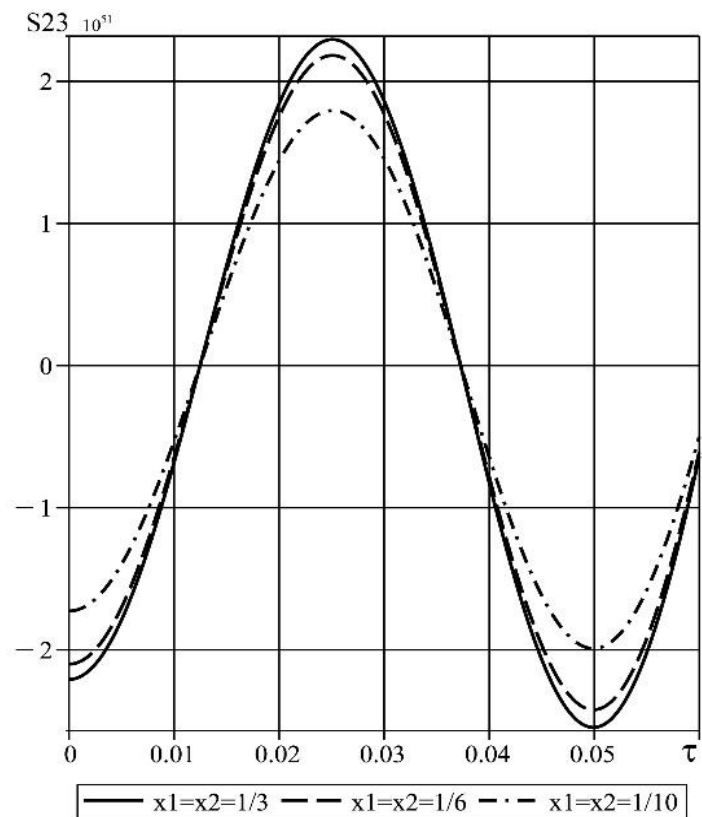
Рис 3.119: Зависимость R_{11} от времени τ Рис 3.120: Зависимость R_{11} от координат x_1, x_2

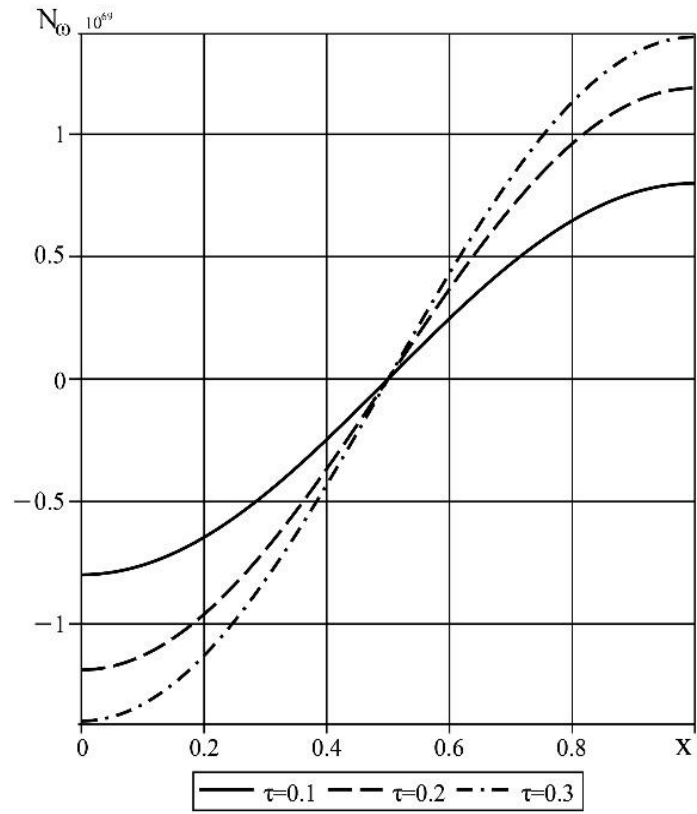
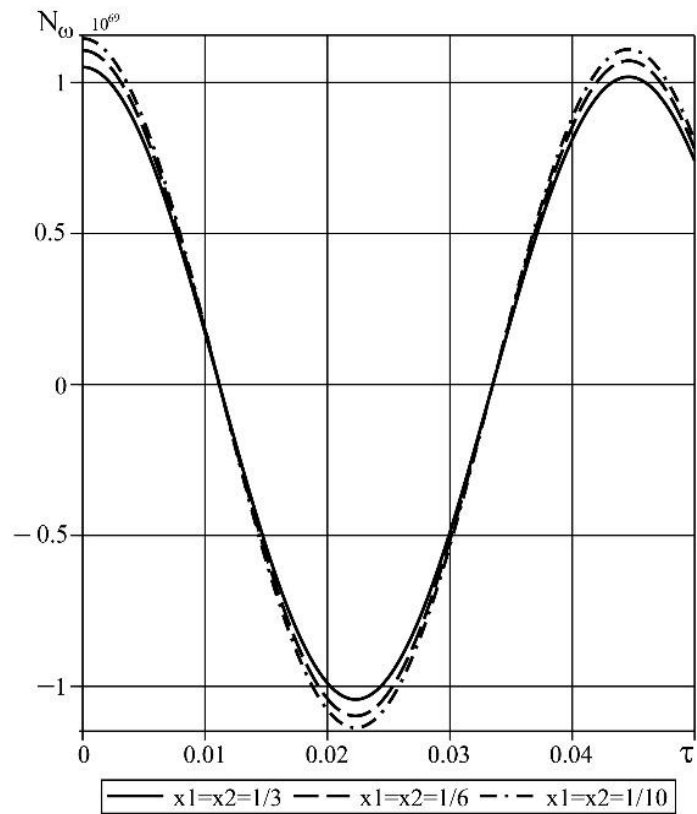
Рис 3.121: Зависимость R_{12} от времени τ Рис 3.122: Зависимость R_{12} от координат x_1, x_2

Рис 3.123: Зависимость R_{21} от времени τ Рис 3.124: Зависимость R_{21} от координат x_1, x_2

Рис 3.125: Зависимость R_{22} от времени τ Рис 3.126: Зависимость R_{22} от координат x_1, x_2

Рис 3.127: Зависимость S_{13} от времени τ Рис 3.128: Зависимость S_{13} от координат x_1, x_2

Рис 3.129: Зависимость S_{23} от времени τ Рис 3.130: Зависимость S_{23} от координат x_1, x_2

Рис 3.131: Зависимость N_ω от времени τ Рис 3.132: Зависимость N_ω от координат x_1, x_2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы следующие.

1. Построение вариационного уравнения Гамильтона для моментной упругой пластины.
2. Постановка начально-краевых задач для моментных упругих пластин в криволинейной и в прямоугольной декартовой системах координат.
3. Разработка методов решения начально-краевых задач для прямоугольных моментных упругих пластин.
4. Исследование нестационарных задач для моментных упругих пластин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Амбарцумян, С. А.** Теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М. : Физматгиз, 1961.
2. **Афанасьев, А. А.** Исследование усталостной долговечности перфорированных пластин и цилиндрических панелей / А. А. Афанасьев, С. Кьи // Труды МАИ. – 2005. – № 19. – С. 4. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34159>.
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Дженалидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1990. – Т. 1. – 672 с.
4. **Белянкова, Т. И.** SH-волны на поверхности биморфной магнито-электроупругой пластины / Т. И. Белянкова, Е. И. Ворович, А. С. Турчин // Наука Юга России. – 2024. – Т. 20, № 2. – С. 3–15. – DOI 10.7868/S25000640240201.
5. **Варданян, С. В.** Упрощенный метод решения задачи поперечного изгиба упругих микрополярных пластин / С. В. Варданян // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 1. – С. 126–133. – DOI 10.1134/S0032823519010132.
6. **Ващенко, А. В.** Определение зависимости массы топлива, необходимого для межорбитальных переходов, и массы молекулярного защитного экрана от высоты рабочей орбиты спутника, предназначенного для получения полупроводниковых пластин методом молекулярно-лучевой эпитаксии / А. В. Ващенко // Труды МАИ. – 2007. – № 26. – С. 6. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34031>.
7. **Господариков А. П.** Высшая математика. Том 6. Специальные функции. Основные задачи математической физики. Основы линейного программирования : учебник / А. П. Господариков, И. Б. Ерунова, Г. А. Колтон [и др.] ; под ред. А. П. Господарикова. – Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. – ISBN 978-5-94211-720-7.
8. **Герасимов, С. И.** Волновые процессы в сплошных средах / С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев, И. Н. Солдатов. – Саров : Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. – 260 с.
9. **Голоскоков, Д. П.** Практический курс математической физики в системе Maple : учебн. пособие для вузов / Д. П. Голоскоков. – СПб. : ООО «ПаркКом», 2010. – 643 с.

10. **Горшков, А. Г.** Волны в сплошных средах / А. Г. Горшков, А. Л. Медведский, Л. Н. Рабинский, Д. В. Тарлаковский. – М. : Физматлит, 2004. – 472 с.
11. **Горшков, А. Г.** Основы тензорного анализа и механика сплошных сред : учебник для вузов / А. Г. Горшков, Л. Н. Рабинский, Д. В. Тарлаковский. – М. : Наука, 2000. – 214 с.
12. **Григорьев, Ю. М.** Аналитическое решение задачи о равновесии прямоугольника в моментной теории упругости / Ю. М. Григорьев // Вестник Якутского государственного университета. – 2007. – Т. 4, № 4. – С. 19–26.
13. **Денисов, С. Л.** Разработка и верификация численно-аналитического метода расчёта отклика пластин на широкополосное акустическое воздействие / С. Л. Денисов, А. Л. Медведский // Труды МАИ. – 2016. – № 91. – С. 1. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=75542>.
14. **До Нгок Дат.** Изгиб прямоугольной упругой пластины с шарнирным опиранием по моментам при учете полной размерности задачи под воздействием нестационарной нагрузки / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIV Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. пятилетке качества (Гомель, 20–21 ноября 2025 г.) : в 2 ч. / под общ. ред. Н. Н. Казакова. – Гомель : БелГУТ, 2025. – Ч. 2. – С. 160–163.
15. **До Нгок Дат.** Изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины при использовании двух упрощающих гипотез под действием нестационарной нагрузки / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов : матер. Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 70-летию БелИИЖТа. – Гомель : БелГУТ, 2023. – Ч. 2. – С. 156–158. – URL: <http://elib.bsut.by/handle/123456789/9163?show=full>.
16. **До Нгок Дат.** Модели нестационарного изгиба моментной упругой пластины / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 4–14 апреля 2023 года : тезисы докладов. – М. : Изд-во МГУ, 2023. – С. 63.

17. **До Нгок Дат.** Нестационарный изгиб жестко заземленной моментной упругой прямоугольной пластины / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 31 марта – 4 апреля 2025 года : тезисы докладов. – М. : Изд-во МГУ, 2025. – С. 131.
18. **До Нгок Дат.** Нестационарный изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины – простейшая модель / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Матер. XXIX Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – М. : ООО «ТРП», 2023. – Т. 1. – С. 102. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?edn=stxktm>.
19. **До Нгок Дат.** Нестационарный изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины Кирхофа-Лява / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Матер. XXX Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – М. : ООО «ТРП», 2024. – Т. 1. – С. 210–211.
20. **До Нгок Дат.** Нестационарный изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // 51 школа-конференция «Актуальные проблемы механики» памяти Д. А. Индейцева, 19–21 июня 2024 г. : сборник аннотаций. – 2024. – С. 73–74.
21. **До Нгок Дат.** Действие поперечной нестационарной силы на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (простейшая модель) / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Труды МАИ. – 2024. – № 139. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183451>.
22. **До Нгок Дат.** Действие поперечной нестационарной силы на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (общая модель) / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 2. – С. 45–58. – DOI: <https://doi.org/10.31429/vestnik-22-2-45-58>.

23. **До Нгок Дат.** Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины (усложненные модели) / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 29–49. – DOI: 10.31429/vestnik-22-1-29-49.
24. **До Нгок Дат.** Обобщённая математическая модель нестационарного изгиба шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины/ До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Матер. XXX Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. – М.: ООО "ТРИП", 2025. – С. 102 - 103.
25. **Егорычев, О. А.** Нестационарные колебания слоистых упругих и вязкоупругих пластин и пологих сферических и цилиндрических оболочек : монография / О. А. Егорычев, О. О. Егорычев. – М. : МГСУ, 2012. – 240 с.
26. **Ерков, А. П.** К вопросу об устойчивости пластин переменной жесткости / А. П. Ерков, А. А. Дудченко // Труды МАИ. – 2018. – № 103. – С. 9. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=100622>.
27. **Ерофеев, В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой / В. И. Ерофеев. – М. : Изд-во МГУ, 1999. – 328 с.
28. **Игнатъев, Ю. Г.** Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию / Ю. Г. Игнатъев. – Казань : Казанский университет, 2014. – 298 с.
29. **Кудрявцев, Л. Д.** Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1981. – Т. II. – 584 с.
30. **Колоскоков Д. П.** Курс математической физики с использованием пакета Maple: учебное пособие. // Д. П. Колоскоков – 2-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2015. – 576 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – ISBN 978-5-8114-1854-1.
31. **Лаврентьев, М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1951. – 610 с.

32. **Лай Тхань Туан.** Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера / Лай Тхань Туан, Д. В. Тарлаковский // Труды МАИ. – 2012. – № 53. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>.
33. **Левицкий, Д. Ю.** Нестационарное деформированное состояние пластины Тимошенко / Д. Ю. Левицкий, Г. В. Федотенков // Труды МАИ. – 2022. – № 125. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168157>.
34. **Казакова, И. С.** Легкие стальные тонкостенные конструкции: проектирование и расчет : учебное пособие / И. С. Казакова ; М-во образования и науки РФ, Вологод. гос. ун-т. – Вологда : ВоГУ, 2019. – 117 с.
35. **Лукашевич А. А.** Теория расчета пластин и оболочек учебное пособие / А. А. Лукашевич; Министерство образования и науки Российской Федерации, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2017. — 129, [1] с. ил., цв. ил., табл.; 20. — ISBN 978-5-9227-0779-4.
36. **Ляв, А.** Математическая теория упругости / А. Ляв. – М. ; Л. : ОГИЗ, 1935.
37. **Май Куок Чиен.** Нестационарные задачи для моментного упругого стержня / Май Куок Чиен, А. М. Разоренова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Матер. XXIX Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – М. : ООО «ТРП», 2023. – Т. 2. – С. 27–29.
38. **Май Куок Чиен.** Действие нестационарной продольной нагрузки на бесконечный моментный упругий стержень / Май Куок Чиен, М. Ю. Рязанцева, Д. В. Тарлаковский // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике, 21–25 августа 2023 г., Санкт-Петербург : сборник тезисов докладов : в 4 т. – СПб., 2023. – Т. 4 : Материалы симпозиумов и Исторической сессии. – С. 688–690.

39. **Май Куок Чиен.** Нестационарные продольные колебания бесконечного моментного упругого стержня / Май Куок Чиен, Д. В. Тарлаковский // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 16–22 апреля 2022 года : тезисы докладов. – М. : Изд-во МГУ, 2022. – С. 119.
40. **Малинин, Г. В.** Методики расчета ребристых пластин на прочность и устойчивость / Г. В. Малинин // Труды МАИ. – 2021. – № 121. – DOI 10.34759/trd-2021-121-08.
41. **Мирзакабилов, Н. Х.** Методы расчета колебаний вязкоупругой многослойной (трехслойной) пластины / Н. Х. Мирзакабилов // Universum: технические науки. – 2024. – № 7-2 (124). – С. 39–43.
42. **Михайлова, Е. Ю.** Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек / Е. Ю. Михайлова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 561–577. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=YZSUDR>.
43. **Михайлова, Е. Ю.** Общая теория упругих оболочек : учебное пособие / Е. Ю. Михайлова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков. – М. : Изд-во МАИ, 2018. – 112 с.
44. **Михайлова, Е. Ю.** Упругие пластины и пологие оболочки : учебное пособие / Е. Ю. Михайлова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков. – М. : Изд-во МАИ, 2018. – 92 с.
45. **Нгуен Нгок Хоа.** Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости / Нгуен Нгок Хоа, Д. В. Тарлаковский // Труды МАИ. – 2012. – № 53. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29269>.
46. **Нгуен Тхань Тунг.** Антиплоское нестационарное движение электромагнитоупругого полупространства с учетом пьезоэлектрических эффектов / Нгуен Тхань Тунг, Д. В. Тарлаковский // Труды МАИ. – 2019. – № 105. – URL: <https://mai.ru/publications/index.php?ID=104123>.
47. **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
48. **Горбачёв, В. И.** О постановке задач в общей теории Кирхгофа–Лява неоднородных анизотропных пластин / В. И. Горбачёв, Л. А. Кабанова // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2018. – № 3. – С. 43–50.

49. **Горшков, А. С.** Обобщенные функции в механике деформируемого твердого тела. Интегральные преобразования и дифференциальные уравнения : учебное пособие / А. С. Горшков, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков. – М. : Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2019. – 100 с.
50. **Плескачевский, Ю. М.** Изгиб трехслойной круговой пластины кольцевой нагрузкой в нейтронном потоке / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Актуальные вопросы машиноведения. – 2023. – Т. 12. – С. 47–51. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=58800520>.
51. **Погорелов, В. И.** Строительная механика тонкостенных конструкций : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 160800 «Ракетостроение и космонавтика» / В. И. Погорелов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2007. – 518 с. – ISBN 5-94157-688-9.
52. **Протуро, И. И.** Цилиндрический изгиб трехслойной ортотропной пластины с жесткой накладкой / И. И. Протуро // Материалы, технологии, инструменты. – 2011. – Т. 16, № 3. – С. 5–9. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41141753>.
53. **Рязанцева, М. Ю.** Обращение интегральных преобразований в задаче о нестационарных продольных колебаниях бесконечного моментного упругого стержня / М. Ю. Рязанцева, Май Куок Чиен, Д. В. Тарлаковский // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 4–14 апреля 2023 года : тезисы докладов. – М. : Изд-во МГУ, 2023. – С. 144.
54. **Саркисян, А. А.** Свободные колебания микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек / А. А. Саркисян // Сборник трудов Международной школы-конференции молодых ученых, 28 сентября – 1 октября 2009 г., Агавнадзор, Армения. – 2009. – С. 304–309.
55. **Саркисян, С. О.** Общая теория тонких пластин на основе несимметричной теории упругости / С. О. Саркисян // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2012. – № 1. – С. 150–168.

56. Саркисян, С. О. Динамические задачи для тонких стержней и пластин по несимметричной теории упругости / С. О. Саркисян, А. А. Саркисян // Межвузовский сборник научных трудов, посвящённый 80-летию С. Н. Мергеляна. – Ванадзор : Государственный педагогический институт им. О. Туманяна, 2008. – Т. 2. – С. 4–17.
57. Саркисян, С. О. Динамические эффекты колебаний микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек / С. О. Саркисян, А. А. Саркисян // Первая Всероссийская конференция. Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой: Наномех-2009, Нижний Новгород, 21–23 сентября 2009 г. : тезисы докладов. – 2009. – С. 58.
58. Саркисян, С. О. Свободные колебания микрополярных пластин / С. О. Саркисян, А. А. Саркисян // Труды VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». – Нижний Новгород : Диалог Культур, 2008. – С. 415–423.
59. Саркисян, С. О. Краевые задачи несимметричной теории упругости для тонких пластин / С. О. Саркисян // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 1. – С. 129–147. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=10332975>.
60. Саркисян, С. О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик / С. О. Саркисян // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53, № 2 (312). – С. 148–156. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17651511>.
61. Саркисян, С. О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний / С. О. Саркисян, А. А. Саркисян // Акустический журнал. – 2011. – Т. 57, № 4. – С. 461–469. – URL: http://www.akzh.ru/pdf/2011_4_461-469.pdf.
62. Саркисян, С. О. Общие модели микрополярных упругих тонких пластин / С. О. Саркисян // Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов. – 2008. – № 16. – С. 111–120. – URL: <https://sciup.org/146211829>.

63. **Саркисян, С. О.** Особенности напряженно-деформированного состояния тонких пластин в рамках теории микрополярной упругости / С. О. Саркисян // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 81–95. – DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2009.2.1.6>.
64. **Сблонский А. А.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для техн. вузов / А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон [и др.]. – М. : Высш. шк., 1985. – 367 с.
65. **Смолин, И. Ю.** Использование микрополярных моделей для описания пластического деформирования на мезоуровне / И. Ю. Смолин // Математическое моделирование систем и процессов. – 2006. – № 14. – С. 189–205.
66. **Старовойтов, Э. И.** Изгиб трехслойной пластины в температурном поле моментной нагрузкой / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, А. Абдусаттаров // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – № 16. – С. 189–195. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2022.28.03.339_358.03
67. **Старовойтов, Э. И.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием параболических нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Труды МАИ. – 2014. – № 78. – С. 9. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=53490>.
68. **Шевченко, А. П.** Статика. Кинематика / А. П. Шевченко, В. Н. Коровкин, В. Н. Филимонов [и др.] ; под ред. В. Н. Коровкина, В. Н. Филимонова ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2000. – 152 с. – ISBN 5-89368-197-5.
69. **Тарлаковский, Д. В.** Начально-краевые задачи для моментных упругих пластин / Д. В. Тарлаковский, Май Куок Чиен // Проблемы безопасности на транспорте : матер. XII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж. д., Гомель, 24–25 ноября 2022 г. : в 2 ч. / под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2023. – Ч. 3. – С. 262–263. – URL: <http://elib.bsut.by/handle/123456789/7692>.
70. **Тарлаковский, Д. В.** Продольные нестационарные колебания конечного моментного упругого стержня / Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков, Май Куок Чиен // Проблемы прочности и пластичности. – 2023. – Т. 85, № 3. – С. 390–403.

71. **Тарлаковский, Д. В.** Изгиб конечного моментного упругого стержня под действием нестационарных нагрузок / Д. В. Тарлаковский, Май Куок Чиен // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2024. – Т. 21, № 3. – С. 45–60.
72. **Тарлаковский, Д. В.** Изгиб моментного упругого стержня под действием нестационарных нагрузок / Д. В. Тарлаковский, Май Куок Чиен // 51 школа-конференция «Актуальные проблемы механики» памяти Д. А. Индейцева, 19–21 июня 2024 г. : сборник аннотаций. – 2024. – С. 241.
73. **Тарлаковский, Д. В.** Изгиб моментного упругого стержня Кирхгофа / Д. В. Тарлаковский, Май Куок Чиен // Матер. XXX Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – М. : ООО «ТРП», 2024. – Т. 1. – С. 209.
74. **Тарлаковский, Д. В.** Нестационарный изгиб конечного моментного упругого стержня / Д. В. Тарлаковский, Май Куок Чиен // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 03 апреля 2024 года : тезисы докладов. – М. : Изд-во МГУ, 2024.
75. **Тарлаковский, Д. В.** Уравнения движения изотропной сферической моментной упругой оболочки / Д. В. Тарлаковский, А. Ж. Фарманян, У. С. Гафуров // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т. 86, № 2. – С. 168–181.
76. **Тимошенко, С. П.** Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.
77. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
78. **Товстик, П. Е.** Двухмерная модель анизотропной пластины второго порядка точности / П. Е. Товстик // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6, № 1. – С. 157–169. – DOI 10.21638/11701/spbu01.2019.112.

79. **Фирсанов, В. В.** Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории / В. В. Фирсанов, К. Х. Зоан // Труды МАИ. – 2018. – № 103. – С. 4. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=100589>.
80. **Чан Ле Тхай.** Моментно упругая полуплоскость под действием поверхностных нестационарных нормальных перемещений / Чан Ле Тхай, Д. В. Тарлаковский // Труды МАИ. – 2018. – № 102. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99731>.
81. **Чкадуа, О. О.** Исследование основных задач моментной теории упругости для анизотропных сред / О. О. Чкадуа, Ф. Хамза // Сообщения АН ГССР. – 1987. – Т. 128, № 3. – С. 469–472.
82. **Яровая, Э. И.** Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин / Э. И. Старовойтов, Н. А. Локтева, Н. А. Старовойтова // Труды МАИ. – 2014. – № 77. – С. 3. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=53018>.
83. **Love, A. E. H.** On the small free vibrations and deformations of elastic shells / A. E. H. Love // Philosophical Transactions of the Royal Society (London). – 1888. – Vol. A, No. 17. – P. 491–549.
84. **Altenbach, H.** On the linear theory of micropolar plates / H. Altenbach, V. Eremeyev // Z. Angew. Math. und Mech. (ZAMM). – 2009. – Vol. 89, No. 4. – P. 242–256.
85. **Bîrsan, M.** The solution of Saint-Venant's problem in the theory of Cosserat shells / M. Bîrsan // Journal of Elasticity. – 2004. – Vol. 74. – P. 85–214.
86. **Bîrsan, M.** On the theory of loaded general cylindrical Cosserat elastic shells / M. Bîrsan // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – P. 7399–7419.
87. **Carrera, E.** On the effectiveness of higher-order terms in layer-wise shell models / E. Carrera, A. Lamberti, M. Petrolo // Shell Structures: Theory and Applications / ed. by W. Pietraszkiewicz, J. Górski. – London : Taylor & Francis Group, 2013. – Vol. 3. – P. 69–72.
88. **Cosserat, E.** Theorie des corps deformables / E. Cosserat, F. Cosserat. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – 226 p.

89. **Gevorkyan, G. A.** Equations of plate bending in the moment theory of elasticity / G. A. Gevorkyan // *Applied Mechanics*. – 1966. – Vol. 2. – P. 74–79.
90. **Gorshkov, A. G.** *Waves in Continuum Media* / A. G. Gorshkov, A. L. Medvedskii, L. N. Rabinskiy, D. V. Tarlakovskii. – Moscow : Fizmatlit, 2004.
91. **Gorshkov, A. G.** *Basics of Tensor Analysis and Continuum Mechanics* / A. G. Gorshkov, L. N. Rabinskiy, D. V. Tarlakovskii. – Moscow : Nauka, 2000.
92. **Green, A. E.** The linear elastic Cosserat surface and shell theory / A. E. Green, P. M. Naghdi // *International Journal of Solids and Structures*. – 1968. – Vol. 4, No. 6. – P. 585–592.
93. **Hoffman, O.** On the bending of thin elastic plates in the presence of moment stresses / O. Hoffman // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1964. – Vol. 31, No. 4. – P. 706–707.
94. **Kirchhoff, G.** *Vorlesungen über mathematische Physik. Bd 1. Mechanik* / G. Kirchhoff. – Leipzig : B. G. Teubner, 1876.
95. **Koreneva, E. B.** *Unsymmetric Oscillations of Anisotropic Plate Having an Additional Mass* / E. B. Koreneva // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2021. – Vol. 17, No. 1. – P. 48–54. – DOI 10.22337/2587-9618-2021-17-1-48-54.
96. **Leonenko, D. V.** Elastic bending of a three-layer circular plate with step-variable thickness / D. V. Leonenko // *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. – 2021. – No. 1 (54). – P. 25–29. – DOI 10.46864/1995-0470-2020-1-54-25-29.
97. **Liu, Jun.** Solution of stress concentration problem considering influence of couple stress / Jun Liu, Ming Huang, Xiu-run Ge // *Journal of Shanghai Jiaotong University*. – 2001. – Vol. 35, No. 10. – P. 1481–1485.
98. **Mindlin, R. D.** Influence of couple stresses on stress concentrations / R. D. Mindlin // *Experimental Mechanics*. – 1963. – Vol. 3, No. 1. – P. 1–7.
99. **Mindlin, R. D.** Effects of couple-stresses in linear elasticity / R. D. Mindlin, H. F. Tiersten // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1962. – Vol. 11. – P. 415–448. – DOI: <https://doi.org/10.1007/bf00253946>.

100. **Nowacki, W.** Theory of Asymmetric Elasticity / W. Nowacki. – Oxford : Pergamon, 1986.
101. **Pietraszkiewicz, W.** The resultant linear six-field theory of elastic shells: What it brings to the classical linear shell models? / W. Pietraszkiewicz // ZAMM. – 2016. – Vol. 96, No. 8. – P. 899–915.
102. **Quoc Chien Mai.** Generalized Linear Model of Dynamics of Elastic Moment Shells / Quoc Chien Mai, M. Yu. Ryazantseva, D. V. Tarlakovskii // Advanced Structured Materials. – Vol. 186 : Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading. – Springer Nature Switzerland AG, 2020. – P. 273–293. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_11.
103. **Reddy, J. N.** Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams / J. N. Reddy // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2011. – Vol. 59. – P. 2382–2399.
104. **Rogacheva, N. N.** Theory of thin plate in asymmetric elasticity / N. N. Rogacheva // Shell Structures: Theory and Applications. – CRC Press, 2018. – Vol. 4. – P. 149–153.
105. **Rogacheva, N. N.** Problem of Plate Bending in the Moment Asymmetric Theory of Elasticity / N. N. Rogacheva, Yu. G. Zhiglova // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2023. – Vol. 19, No. 2. – P. 71–80. – DOI 10.22337/2587-9618-2023-19-2-71-80.
106. **Rubin, M. B.** Cosserat theories: shells, rods and points / M. B. Rubin. – Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Academic Publishers, 2000. – 480 p. – (Solid Mechanics and its applications ; Vol. 79).
107. **Rubin, M. B.** Numerical solution procedures for nonlinear elastic rods using the theory of a Cosserat point / M. B. Rubin // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38. – P. 4395–4437.
108. **Rubin, M. B.** Restrictions on linear constitutive equations for a rigid heat conducting Cosserat shell / M. B. Rubin // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 7009–7033.

109. **Sabirov, R. A.** Compound bending of an orthotropic plate / R. A. Sabirov // *Siberian Journal of Science and Technology*. – 2020. – Vol. 21, No. 4. – P. 499–513. – DOI 10.31772/2587-6066-2020-21-4-499-513.
110. **Tarlakovskii, D. V.** On the compatibility equations in shell theories considering transverse shear and normal strains / D. V. Tarlakovskii, S. I. Zhavoronok // *Shell Structures: Theory and Applications*. – CRC Press / Balkema, Taylor & Francis Gr., Leiden, 2018. – Vol. 4. – P. 189–192.
111. **Toupin, R. A.** Elastic materials with couple stresses / R. A. Toupin // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1962. – Vol. 11. – P. 385–414.
112. **Tovstik, P. E.** Two-dimensional linear model of anisotropic shells / P. E. Tovstik, T. P. Tovstik // *Shell Structures: Theory and Applications* / ed. by W. Pietraszkiewicz, J. Górski. – London : Taylor & Francis Group, 2013. – Vol. 3. – P. 153–156.
113. **Tsiatas, G. C.** A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory / G. C. Tsiatas // *International Journal of Solids and Structures*. – 2009. – Vol. 46, No. 13. – P. 2757–2764. – DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.03.004.
114. **Vekua, I. N.** *Shell Theories: General Methods of Construction* / I. N. Vekua. – Boston : Pitman Adv. Publ. Progr., 1985.
115. **Yang, F.** Couple stress based strain gradient theory for elasticity / F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong // *International Journal of Solids and Structures*. – 2002. – Vol. 39. – P. 2731–2743. – DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00152-X.
116. **Yokoo, Y.** A general nonlinear theory of elastic shells / Y. Yokoo, H. Matsunaga // *International Journal of Solids and Structures*. – 1974. – Vol. 10. – P. 261–274.
117. **Zavyalova, K. N.** The Response of a Poroelastic Ice Plate to an External Pressure / K. N. Zavyalova, K. A. Shishmarev, A. A. Korobkin // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. – 2021. – Vol. 14, No. 1. – P. 87–97. – DOI 10.17516/1997-1397-2021-14-1-87-97.