

Труды МАИ. 2021. № 121
Trudy MAI, 2021, no. 121

Научная статья

УДК 519.63

DOI: [10.34759/trd-2021-121-24](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-24)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТОВ

Галина Юрьевна Денискина

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
МАИ,

Москва, Россия

dega17@yandex.ru

Аннотация. В предлагаемой методике сплайн-вейвлеты, построенные на основе неравномерной схемы подразделения и схемы подъема, применяются к задачам теории упругости. Выбор таких базисных функций обоснован тем, что, вейвлеты по сравнению с другими базисными функциями обладают рядом преимуществ. Во-первых, использование схемы подъема позволяет строить вейвлеты с заданными свойствами: гладкость, компактный носитель, симметрия, нужное число нулевых моментов, обращение в нуль на границе области функций, соответствующих не граничным вершинам сетки. Во-вторых, высокая скорость убывания вейвлет-коэффициентов. Это позволяет, ограничиваясь небольшим количеством слагаемых в разложении, получать достаточно точные приближения функции. В-третьих, наличие

быстрых каскадных алгоритмов нахождения коэффициентов разложения функции по вейвлетам.

Ключевые слова: вейвлет-анализ, сплайн-вейвлеты, теория упругости, схема подъема, фильтр, масштабирующая функция

Для цитирования: Денискина Г.Ю. Приближенное решение уравнений теории упругости с помощью сплайн-вейвлетов // Труды МАИ. 2021. № 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-24](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-24)

METHOD FOR FINDING APPROXIMATE SOLUTIONS OF ELASTICITY EQUATIONS USING SPLINE WAVELETS

Galina Yu. Deniskina

Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

dega17@yandex.ru

Abstract. In the technique being proposed the spline wavelets, built on the basis of an uneven subdivision scheme and a lifting scheme, are being employed for solving problems of the elasticity theory. The choice of such basic functions is justified by the fact that wavelets have a number of advantages compared to other basic functions. For example, the lifting scheme application allows composing wavelets with the given properties, such as smoothness, compactness of the carrier, symmetry, the required number of zero moments, vanishing at the boundary of the domain of functions corresponding to non-boundary mesh

vertices. Lately, the wavelet analysis is attracting a lot of attention from the researchers, scientists and specialists in various disciplines. There are several reasons why wavelets are being successfully applied in signal processing, information compression, methods for finding approximate solutions of differential and integral equations [1, 2], computer geometry [3-5]. Such reasons include the following. Firstly, the high rate of wavelet coefficients decay. This allows obtaining rather accurate function approximations employing only a small number of summands in the expansion. Secondly, availability of fast cascade algorithms for finding coefficients of the function wavelet expansion. Thirdly, many commonly used wavelets (such as spline wavelets and Daubechies wavelets) have a compact carrier. In the proposed technique, a wavelet-system, consisted of smooth functions with the compact carrier, was built using the lifting scheme and a mask.

Such wavelet systems may be employed for finding approximate solutions of partial differential equations and, as a consequence, they may be applied to solving problems of the elasticity theory. This application presupposes the use of the least squares method for finding approximate solutions of boundary value problems of mathematical physics [7].

Keywords: wavelet analysis, spline wavelets, elasticity, lifting scheme, filter, scaling function.

For citation: Deniskina G.Yu. Method for finding approximate solutions of elasticity equations using spline wavelets. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-24)

[24](#)

Введение

В последнее время вейвлет-анализ привлекает большое внимание

исследователей, ученых и специалистов в различных дисциплинах. Есть несколько причин, по которым вейвлеты успешно применяются в обработке сигналов, сжатии информации, приближенных методах решения дифференциальных и интегральных уравнений [1, 2], компьютерной геометрии [3 – 5]. К таким причинам можно отнести следующие [6]:

1. Большая скорость убывания вейвлет-коэффициентов. Это позволяет, ограничиваясь небольшим количеством слагаемых в разложении, получать достаточно точные приближения функции.

2. Наличие быстрых каскадных алгоритмов нахождения коэффициентов разложения функции по вейвлетам.

3. Многие часто применяемые вейвлеты, например, сплайн-вейвлеты и вейвлеты Добеши, имеют компактный носитель.

В предлагаемой методике с использованием схемы подъема и маски, приводящей к сплайн-вейвлетам, построена вейвлет-система, состоящая из гладких функций с компактным носителем. Такие вейвлет-системы могут быть использованы в приближенном решении уравнений в частных производных и, как следствие, их можно применить к решению задач теории упругости. Такое применение предполагает использование метода наименьших квадратов приближенного решения краевых задач математической физики [7].

Сплайн-вейвлеты

Пусть (T, g, X) – триангулируемое пространство с конечным множеством

симплексов [8]. $T = \bigcup_{i=1}^N$ — объединение замкнутых n -мерных кубов вида

$I_i^n = \prod_{i=1}^n [b_{i,l}; b_{i,l} + 1]$, где $b_{i,l} \in \mathbf{Z}$, I_0^n — n -мерный куб, $g: T \rightarrow X \subset \mathbf{R}^n$ — гомеоморфизм,

$g: \text{Int}(T) \rightarrow \text{Int}(X)$ — диффеоморфизм класса C^2 (Рис. 1). Множество $X = \bigcup_I$

получается из гомеоморфных образов замкнутых n -мерных кубов I_i^n посредством

склейки их краев. При этом, если ∂X — это граница множества X , то $\partial X = g(\partial T)$.

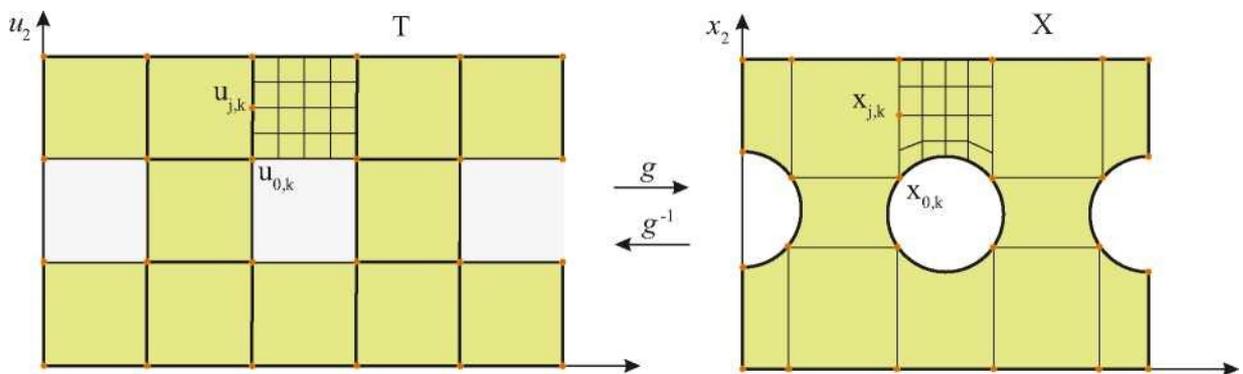


Рис. 1 – Триангулируемое пространство

Пусть $K_j^n = 2^{-j} \mathbf{Z}^n \cap T$, $\partial K_j^n = \{k \in K_j^n : k \in \partial T\}$ и $\text{Int } K_j^n = K_j^n \setminus \partial K_j^n$. Обозначим $l_\infty(\mathbf{Z}^n)$

линейное нормированное пространство ограниченных последовательностей

$\lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^n}$, в котором норма определяется равенством [9]

$$\|\lambda\|_\infty = \sup_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} |\lambda_\alpha|.$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots$ выберем последовательности, называемые масками,

$a_{s,\bullet}^i = \{a_{s,\alpha}^i\}_{\alpha \in \mathbf{Z}}$, $s \in \mathbf{Z}$, которые в схеме [9]

$$\lambda_{j+1,\alpha} = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}} a_{\alpha,\alpha-2\beta}^i \lambda_{j,\beta}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad \lambda_{j,\alpha} \in l_\infty(\mathbf{Z}) \quad (1)$$

приводят к гладким функциям f_i нужного класса гладкости. Как известно, значение такой функции определяется приближенным равенством [9]

$$f_i(2^{-\Lambda} s) \approx \lambda_{\Lambda, s}, \quad s \in \mathbf{Z}, \quad \Lambda \in \mathbf{N}.$$

Пусть $h_{j,s,k} = (a_{k_1, \bullet}^1 \otimes \dots \otimes a_{k_n, \bullet}^1)_{k_1=2s_1, \dots, k_n=2s_n}$, где $k = 2^{-j-1}(k_1 \dots k_n)$ и $s = 2^{-j}(s_1 \dots s_n)$. Тогда, если $v_{j_0, t_i}^i = \delta_{r_i, t_i}$, $r_i, t_i \in \mathbf{Z}$ и

$$v_{j_0, t}^1 = (v_{j_0, \bullet}^1 \otimes \dots \otimes v_{j_0, \bullet}^1)_{t_1, \dots, t_n}$$

где $t = 2^{-j_0}(t_1 \dots t_n) \in \mathbf{Z}$, то схема подразделения

$$v_{j+1, k} = \sum_{s \in K_j^n} h_{j,s,k} v_{j,s} = \sum_{s=2^{-j}(s_1 \dots s_n)} (a_{k_1, \bullet}^1 \otimes \dots \otimes a_{k_n, \bullet}^1)_{k_1=2s_1, \dots, k_n=2s_n} v_{j,s}, \quad (2)$$

приводит к функции $f(x_1, \dots, x_n)$, равной тензорному произведению функций $f_i(x_i)$, к которым приводят схемы [9]:

$$v_{j+1, k_i}^i = \sum_{s_i \in \mathbf{Z}} a_{k_i, k_i - 2s_i}^i v_{j, s_i}^i, \quad v_{j_0, k_i}^i = \delta_{r_i, k_i}, \quad k_i \in \mathbf{Z}.$$

Итак, выбрав фильтр $h_{j,s,k}$, построены масштабирующие функции $\varphi_{j,k}^T$, которые определяются схемой (2). Легко проверить, что функции $\varphi_{j,k}^T$ удовлетворяют равенству [10]

$$\varphi_{j,k}^T = \sum_s h_{j,k,s} \varphi_{j+1,s}^T.$$

Пусть $e_l \in \mathbf{Z}^n$ – ненулевые векторы, координаты которых равны 0 или 1, и

$M_j = \left\{ \frac{2k + e_l}{2^{j+1}}, k \in \mathbf{Z}^s \right\}$, $J = \{0\} \cup \mathbf{N}$. Вейвлеты определим равенствами [10]

$$\psi_{j,m}^T = \varphi_{j+1,m}^T - \sum_{k \in K_j} s_{j,k,m} \varphi_{j,k}^T, \quad m \in M_j.$$

Последовательность $s_{j,k,m}$ выберем из условия $\int_{\Gamma} \psi_{j,m}^T(u) du = 0$. При этом можно считать,

что $s_{j,k,m}$ отлично от нуля только для соседних с m вершин k .

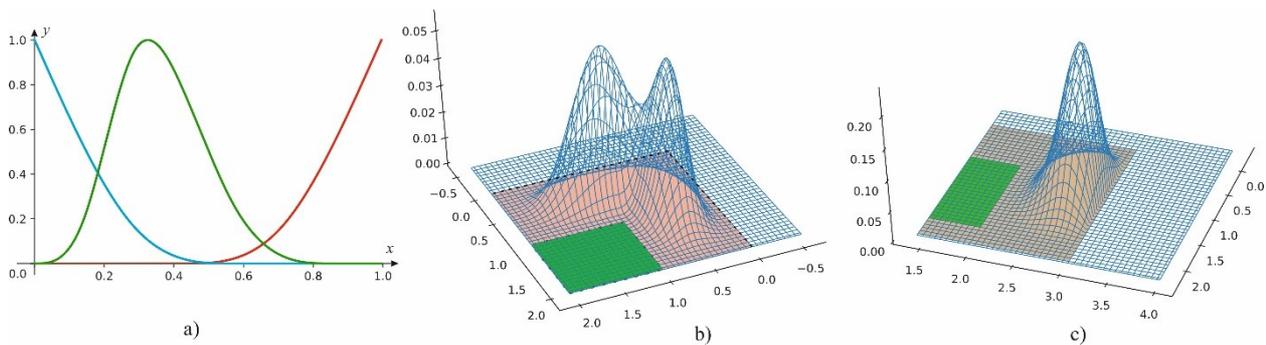


Рис. 2 – Графики функций

a – некоторые функции $\varphi_{0,k}$ на отрезке $[0;5]$; b – масштабирующая функция $\varphi_{1,(2^{-1},2^{-1})}$;

c – масштабирующая функция $\varphi_{1,(2^{-1},3*2^{-1})}$ на множестве $[0;3]^2 \setminus [1;2]^2$

Рассмотрим пример конкретного фильтра $h_{j,s,k}$. Маска $a = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$, как

известно, приводит к кубическим В-сплайнам [11]. Предположим, что строится вейвлет-система на отрезке $[\rho_1; \rho_2]$, где $\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{Z}$. Применение в схеме (1) на j -й итерации неравномерной маски $a_{i,\bullet}$

$$a_{\alpha,\bullet} = \begin{cases} (1), \text{ supp } a_{0,\bullet} = \{0\}, \text{ если } \alpha = a * 2^{j+1} \text{ или } \alpha = b * 2^{j+1}; \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \text{ supp } a_{k,\bullet} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \text{ если } \alpha \neq a * 2^{j+1} \text{ и } \alpha \neq b * 2^{j+1} \end{cases}$$

приводит к функциям $\varphi_{j,k}$ равным тождественно нулю на ∂T , если $k \notin \partial K_j^n$ (Рис. 2).

Определим функции:

$$\varphi_{j,k}^X(\mathbf{x}) = \varphi_{j,k}^T \circ \dots \circ \varphi_{j,k}^T \circ \dots$$

Тогда, если $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, то будет иметь место равенство [10]

$$f = \sum_{n \in K_{j_0}} v_{j_0, n} \varphi_{j_0, n}^X + \sum_{j \geq j_0} \sum_{n \in M_j} \gamma_{j, n}^X \psi_{j, n}^X = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \omega_i \quad (3)$$

в том смысле, что

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} \int_T \left[\left(f - \sum_{n \in K_{j_0}} v_{j_0, n} \varphi_{j_0, n}^X + \sum_{j=j_0}^J \sum_{n \in M_j} \gamma_{j, n}^X \psi_{j, n}^X \right) \circ \right]^2 u = 0.$$

В равенстве (3) для краткости выполнены переобозначение и перенумерация всех базисных функций. Функции обозначены ω_i , а коэффициенты — c_i .

Применение вейвлетов к приближенному решению уравнений теории упругости

Рассмотрим дифференциальное уравнение и краевые условия

$$Lw = f, \quad L_i w = f_i, \quad \text{на } \partial X, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

в гильбертовом пространстве $L_2(X)$, где L — линейный дифференциальный оператор.

Приближенные решения w_J уравнения (4) будем искать в виде $w_J = \sum_{k=1}^{M(J)} c_k^* \omega_k$, где $M(J)$

— количество элементов во множестве K_J^n . Коэффициенты c_k^* находим по методу наименьших квадратов из решения вариационной задачи; с учетом того, что при построении вейвлетов часть базисных функций на границе области (это функции, соответствующие не граничным вершинам подразделения) равна нулю, часть коэффициентов c_k^* , $k \in \partial K_J^n$ можно найти из граничных условий. В этом случае

$w_J = \sum_{k \in \text{Int} K_J^n} c_k \omega_k + \sum_{s \in \partial K_J^n} c_s^* \omega_s$, а остальные коэффициенты будем находить из задачи

минимизации

$$\int_T \left[\sum_{k \in \text{Int}X} c_k L \omega_k \circ \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \right] \tau^2 \quad c_k$$

Вторым, используемым нами приближенным способом решения задачи (4) является метод коллокаций, в котором требуется, чтобы уравнение и граничные условия удовлетворялись в узлах коллокации.

Пример 1. Рассмотрим пластину $X = \{(x_1, x_2) : a^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq b^2\}$ в условиях растяжения/сжатия. Пусть $E = 2,1$ МПа; $\mu = 0,3$; $a = 20$ м, $b = 60$ м. Интенсивность нормальной к границе пластины нагрузке имеет вид

$$F_n = 2 \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) \mathbf{n}, \quad F_n = 2 \left(1 + \frac{1}{b^2} \right) \mathbf{n}.$$

Используя биортогональные вейвлеты, найдем приближенное решение данной задачи и сравним его с точным

$$\sigma_1 = 2 + \frac{2}{r^2} \cos(2\theta), \quad \sigma_2 = 2 - \frac{2}{r^2} \cos(2\theta), \quad \tau_{1,2} = \frac{2}{r^2} \sin(2\theta).$$

Решение. В данной задаче T и X представлены на рис. 3a и 3b. Подразделения X показаны на рисунках 3c и 3d. Погрешности для метода коллокаций $\max_{x_i} |\sigma_1(x_i) - \sigma_1^j(x_i)|$, $\max_{x_i} |\sigma_2(x_i) - \sigma_2^j(x_i)|$ и $\max_{x_i} |\tau_{1,2}(x_i) - \tau_{1,2}^j(x_i)|$ не превышает, соответственно, 0,0009, 0,000955 и 0,00025 МПа. На рисунках 3e и 3f представлены графики точного решения σ_1 и его приближения $\sigma_{1,j}$.

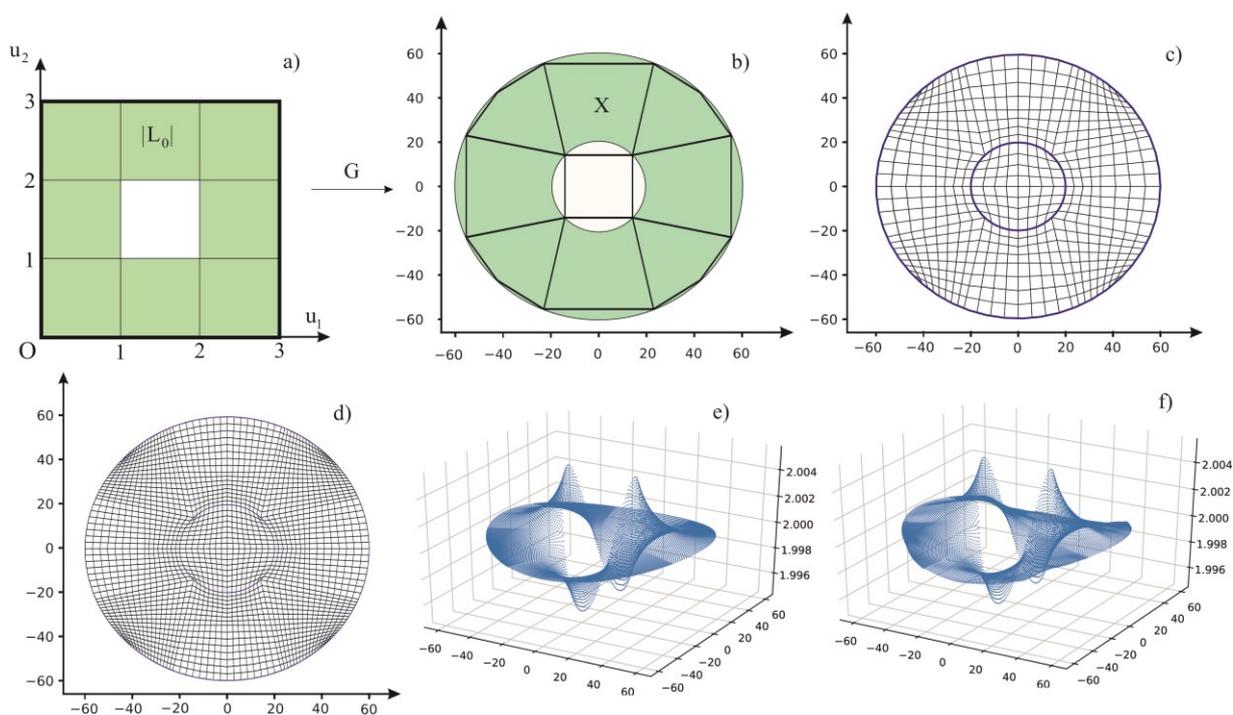


Рисунок 3.

a, b – триангулируемое пространство (T, g, X) ; c, d – подразделения триангулируемого пространства; e, f – графики точного решения σ_1 и его приближения

Заключение

В статье представлена методика применения сплайн-вейвлетов, построенных на основе схем подразделения и подъема, к приближенному решению задач теории упругости. Преимущество вейвлетов перед другими базисными функциями состоит в том, что вейвлет-коэффициенты убывают достаточно быстро, поэтому небольшого количества слагаемых в разложениях может оказаться достаточным для получения нужного приближения. Дополнительное преимущество вейвлетов, построенных на основе схем подъема и подразделения состоит в том, что можно управлять формой

базисных функций. Например, в данной работе эти функции обнулялись на границе области, что уменьшает количество слагаемых, которые нужно учесть в разложении искомой функции.

Список источников

1. Lepik U., Hein H. Haar wavelets with applications, Springer, 2014, 207 p.
2. Битюков Ю.И., Платонов Е.Н. Применение вейвлетов для расчета линейных систем управления с сосредоточенными параметрами // Информатика и ее применения. 2017. Т. 11. № 4. С. 94-103.
3. Bityukov Yu.I., Akmaeva V.N. The use of wavelets in the mathematical and computer modelling of manufacture of the complex-shaped shells made of composite materials // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 5–16. DOI:[10.14529/mmp160301](https://doi.org/10.14529/mmp160301)
4. Finkelstein A. Multiresolution curves // Proceedings ACM SIGGRAPH, 1994, pp. 261 – 268. DOI:[10.1145/192161.192223](https://doi.org/10.1145/192161.192223)
5. Lounsbery M., DeRose T.D., Warren J. Multiresolution Surfaces of Arbitrary Topological Type // ACM Transactions on Graphics, 1997, vol. 16, no. 1, pp. 34-73.
6. Frazier M.W. An introduction to wavelets through linear algebra, Springer. 1999, 503 p.
7. Марчук Г.И., Акилов Г.П. Методы вычислительной математики: учебное пособие. – М.: Наука, 1989. – 744 с.
8. Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии: пер. с англ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1958. – 403 с.

9. Cavaretta A.S., Dahmen W., Micchelli C.W. Stationary Subdivision Schemes, Memoirs of the American Mathematical Society, 1993, 186 p.
10. Schroder P., Sweldens W. Spherical wavelets: efficiently representing functions on the sphere // Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1995, pp. 161–172.
11. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. - 272 p.
12. Чигринец Е.Г., Родригес С.Б., Заболотный Д.И., Чотчаева С.К. Численное моделирование температурных полей в полимерном композите // Труды МАИ. 2020. № 116. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=121111>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-17](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-17)
13. Локтева Н.А., Иванов С.И. Шумопоглощающие свойства однородной пластины с произвольными граничными условиями под воздействием плоской гармонической волны в акустической среде // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=122234>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)
14. Маскайкин В.А. Численный метод исследования температурных режимов неоднородного, структурированного тела // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=119976>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-19](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-19)
15. Григорьева А.Л., Хромов А.И., Григорьев Я.Ю. Растяжение плоского образца в условиях плоского напряженного состояния при различных полях скоростей перемещений // Труды МАИ. 2020. № 111. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=115109>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-1)

16. Кривень Г.И., Маковский С.В. О демпфирующих свойствах вискеризованного слоя в модифицированных волокнистых композитах // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=118729>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-03)
17. Битюков Ю.И., Денискин Ю.И. Применение вейвлетов Хаара при разработке схемы армирования конструкций из композитов // Компетентность. 2016. № 9–10 (140-141). С. 73 – 79.
18. Битюков Ю.И., Калинин В.А. Применение вейвлетов в системах автоматизированного проектирования // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=63148>
19. Битюков Ю.И., Денискин Ю.И., Денискина Г.Ю. Применение сплайн-вейвлетов для анализа выходных процессов многомерных нестационарных линейных систем управления // Динамика систем, механизмов и машин. 2017. Т. 5, № 4. С. 117–127. DOI: [10.25206/2310-9793-2017-5-4-117-127](https://doi.org/10.25206/2310-9793-2017-5-4-117-127)
20. Yamanaka Y., Todoroki A., Ueda M., Hirano Y., Matsuzaki R. Fiber line optimization in single ply for 3D printed composites // Open Journal of Composite Materials, 2016, vol. 6, no. 4, pp. 121–131. DOI: [10.4236/ojcm.2016.64012](https://doi.org/10.4236/ojcm.2016.64012)

References

1. Lepik U., Hein H. *Haar wavelets with applications*, Springer, 2014, 207 p.
2. Bityukov Yu.I., Platonov E.N. *Informatika i ee primeneniya*, 2017, vol. 11, no. 4, pp. 94-103.
3. Bityukov Yu.I., Akmaeva V.N. The use of wavelets in the mathematical and computer

- modelling of manufacture of the complex-shaped shells made of composite materials, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 5–16. DOI:[10.14529/mmp160301](https://doi.org/10.14529/mmp160301)
4. Finkelstein A. Multiresolution curves, *Proceedings ACM SIGGRAPH*, 1994, pp. 261–268. DOI:[10.1145/192161.192223](https://doi.org/10.1145/192161.192223)
 5. Lounsbery M., DeRose T.D., Warren J. Multiresolution Surfaces of Arbitrary Topological Type, *ACM Transactions on Graphics*, 1997, vol. 16, no. 1, pp. 34-73.
 6. Frazier M.W. *An introduction to wavelets through linear algebra*, Springer. 1999, 503 p.
 7. Marchuk G.I., Akilov G.P. *Metody vychislitel'noi matematiki*, (Methods of Computational Mathematics), Moscow, Nauka, 1989, 744 p.
 8. Stinrod N., Eilenberg S. *Osnovaniya algebraicheskoi topologii topologii* (Algebraic Topology Foundations), Moscow, FIZMATLIT, 1958, 403 p.
 9. Cavaretta A.S., Dahmen W., Micchelli C.W. *Stationary Subdivision Schemes*, Memoirs of the American Mathematical Society, 1993, 186 p.
 10. Schroder P., Sweldens W. Spherical wavelets: efficiently representing functions on the sphere, *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 1995, pp. 161–172.
 11. Stolnits E., DeRouz T., Salezin D. *Veivlety v komp'yuternoii grafike* (Wavelets in Computer Graphics), Izhevsk, NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2002, 272 p.
 12. Chigrinets E.G., Rodrigues S.B., Zabolotnii D.I., Chotchaeva S.K. *Trudy MAI*, 2020, no. 116. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121111>. DOI: [10.34759/trd-2021-](https://doi.org/10.34759/trd-2021-)

[116-17](#)

13. Lokteva N.A., Ivanov S.I. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=122234>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)
14. Maskaikin V.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119976>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-19](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-19)
15. Grigor'eva A.L., Khromov A.I., Grigor'ev Ya.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 111. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115109>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-1)
16. Kriven' G.I., Makovskii S.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118729>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-03)
17. Bityukov Yu.I., Deniskin Yu.I. *Kompetentnost'*, 2016, no. 9–10 (140-141), С. 73 – 79.
18. Bityukov Yu.I., Kalinin V.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=63148>
19. Bityukov Yu.I., Deniskin Yu.I., Deniskina G.Yu. *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin*, 2017, vol. 5, no. 4, pp. 117–127. DOI: [10.25206/2310-9793-2017-5-4-117-127](https://doi.org/10.25206/2310-9793-2017-5-4-117-127)
20. Yamanaka Y., Todoroki A., Ueda M., Hirano Y., Matsuzaki R. Fiber line optimization in single ply for 3D printed composites, *Open Journal of Composite Materials*, 2016, vol. 6, no. 4, pp. 121–131. DOI: [10.4236/ojcm.2016.64012](https://doi.org/10.4236/ojcm.2016.64012)

Статья поступила в редакцию 06.11.2021; одобрена после рецензирования 18.11.2021; принята к публикации 21.12.2021.

The article was submitted on 06.11.2021; approved after reviewing on 18.11.2021; accepted for publication on 21.12.2021.