

На правах рукописи

Михайлова Елена Юрьевна



Удар сферической оболочки по упругому полупространству

Специальность: 01.02.04

Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Федотенков Григорий Валерьевич.

Официальные оппоненты: **Торская Елена Владимировна,**
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН);

Хроматов Василий Ефимович,
кандидат технических наук, профессор, профессор кафедры «Динамика и прочность машин» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН).

Защита состоится «11» мая 2016 года в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте http://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=65082.

Автореферат разослан « » 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Федотенков Г.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Задачи механики контактных взаимодействий являются одними из основных проблем, подлежащих решению на этапах проектирования и создания самых различных объектов современной техники. Эти проблемы являются особенно актуальными и важными для авиационной и космической отраслей промышленности. В аэрокосмической отрасли остро стоят проблемы обеспечения минимума массы конструкции при достаточном запасе прочности. Это приводит к необходимости широкого использования оболочечных элементов. Поэтому исследование нестационарного контактного взаимодействия оболочек актуально и практически значимо. Например, подобные проблемы возникают в задачах о расчете нестационарного напряженно-деформированного состояния спускаемых космических аппаратов или самолетов в условиях жесткой или аварийной посадки на твердую поверхность, также в задачах о возможных контактных взаимодействиях конструкций ЛА при их транспортировке, космической стыковки орбитальных аппаратов и др.

Этой проблемой занимались А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский, В.Д. Кубенко, В.Р. Богданов, Г.В. Федотенков, В.В. Гавриленко, М.И. Мартиросов, А.И. Садырин, С.В. Крылов, А.Б. Батарин, С.А. Пирогов; С.В. Кобенко, А.В. Радченко; Е.В. Игоничева, А.И. Кибец, Ю.И. Кибец, А.А. Локтев, Д.А. Локтев.

Целью работы является постановка нестационарной осесимметричной задачи об ударе сферической оболочки по упругому полупространству, разработка и реализация методов ее решения, а также анализ результатов.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

- построено решение новой осесимметричной нестационарной задачи об ударе сферической оболочки по упругому полупространству,
- впервые получена поверхностная функция влияния для оболочки,
- разработан и реализован алгоритм решения поставленных задач,
- проведен параметрический анализ результатов.

Практическая значимость работы. Полученные результаты могут быть использованы в авиационной, аэрокосмической областях, а также в других от-

раслях промышленности, где широко применяются тонкостенные оболочечные элементы конструкций, которые работают в условиях нестационарных контактных взаимодействий.

Достоверность и обоснованность научных положений и полученных результатов подтверждается использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела и теории оболочек, применением для решения начально-краевых задач строгих аналитических и численных методов, сравнением результатов, полученных различными методами и сопоставлением с известными решениями других авторов.

Методы исследования. Методы решения основаны на принципе суперпозиции решений, который позволил свести задачу к решению системы интегро-дифференциальных уравнений в случае сверхзвукового этапа расширения области контакта и системы интегральных уравнений на произвольном этапе. Область контакта определяется приближенно из условия пересечения недеформированных границ полупространства и оболочки.

Основные положения, выносимые на защиту.

Постановка осесимметричной нестационарной контактной задачи с задачи для тонкой сферической оболочки и упругого полупространства.

Метод и алгоритм решения задачи на сверхзвуковом этапе расширения области контакта.

Постановка задачи и построение функции влияния для тонкой сферической оболочки.

Метод и алгоритм решения задачи на дозвуковом этапе расширения области контакта.

Результаты расчетов и параметрический анализ процесса нестационарного контактного взаимодействия.

Апробация результатов работы.

Материалы диссертационной работы докладывались на следующих научных конференциях.

XIII-XVIII, XX, XXII Международные симпозиумы «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Россия, Москва, 2007 – 2012 гг., 2014 г., 2016 г.).

Международная научная конференция «Современные проблемы механики и математики» (Украина, Львов, 2008 г.).

Международная научная конференция «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (Украина, Николаев, 2009 г.).

Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций» (Крым, Ялта, 2009, 2010 гг.).

Международная научная конференция «Математические проблемы механики неоднородных структур» (Украина, Львов, 2010 г.).

XV International Conference «Dynamical system modeling and stability investigation» (Ukraine, Kiev, 2011).

Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций» (Украина, Запорожье, 2012 г.).

Международная научная конференция «Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро – до наноразмерных структур» (Белоруссия, Минск, 2013 г.).

Научная конференция "Ломоносовские чтения" (Россия, Москва, 2014 г.).

Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Россия, Москва, 2014 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 19 работ, в том числе 2 в журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ, и 2 свидетельства на программы для электронных вычислительных машин.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, состоящего из 154 наименований. Общий объем – 125 страниц, включая 35 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выбора темы диссертационной работы, сформулированы цель, научная новизна, защищаемые положения и практическая значимость работы. Кратко изложена структура диссертации.

В главе 1 описано современное состояние исследований по тематике диссертации, представлен обзор литературы.

Приведены уравнения движения упругого полупространства, записанные в цилиндрической системе координат и уравнения движения сферической оболочки типа Тимошенко в ортогональной системе координат, связанной с ее линиями главных кривизн.

Дана общая постановка задачи, в которой рассматривается процесс вертикального удара сферической оболочки (ударника) по упругому полупространству (основанию).

В начальный момент ударник, двигаясь с начальной скоростью V_0 , входит в контакт с упругим основанием. Вектор начальной скорости направлен нормально к невозмущенной поверхности полупространства. Первоначально оболочка и полупространство находятся в недеформированном состоянии (рис. 1.).

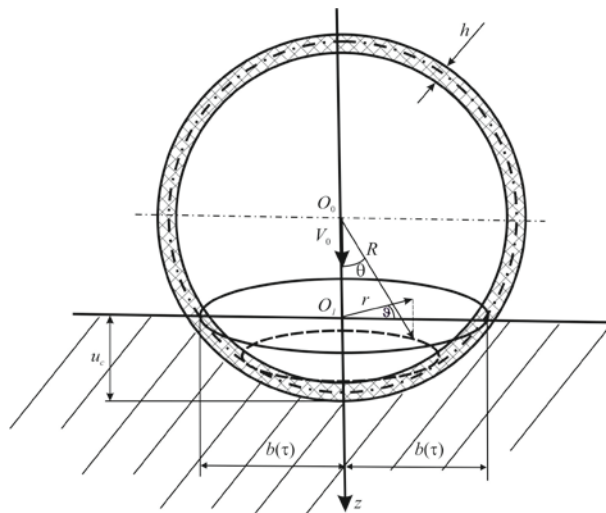


Рис. 1

Математическая модель процесса включает в себя следующие соотношения.

Уравнения движения полупространства (здесь и далее все переменные и параметры приведены к безразмерному виду):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} = \eta_2^2 \ddot{\psi}, \quad (1)$$

где φ, ψ – скалярный и векторный потенциалы упругих смещений; точками обозначена производная по безразмерному времени τ ; $O_1 r \vartheta z$ – цилиндрическая система координат (r – радиус, ϑ – угол, $O_1 z$ – ее ось).

Связь тангенциальных u_r и нормальных u_z перемещений с потенциалами

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\psi + r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Связь компонентов тензора напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$ с перемещениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \beta_1 \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \sigma_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \alpha_1 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \alpha_1 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right), \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_r}{r} + \alpha_1 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения движения оболочки:

$$\begin{aligned} \gamma^2 \ddot{u} &= \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (T_{\theta\theta} - T_{\vartheta\vartheta}) \operatorname{ctg} \theta + Q, \quad \gamma^2 \ddot{w}_0 = -T_{\theta\theta} - T_{\vartheta\vartheta} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} + Q \operatorname{ctg} \theta + p, \\ \gamma^2 \ddot{\chi} &= \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta (M_{\vartheta\vartheta} - M_{\theta\theta}) - Q \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь u, w, χ – тангенциальные, нормальные перемещения и угол отклонения ортогонального к срединной поверхности до деформации материального волокна за счёт сдвиговых деформаций; $T_{\theta\theta}, T_{\vartheta\vartheta}$ – компоненты тензора тангенциальных усилий; $M_{\theta\theta}, M_{\vartheta\vartheta}$ – компоненты тензора изгибающих моментов; Q – перерезывающая сила, p – нормальное давление на оболочку, θ и ϑ – меридиональная и окружная криволинейные координаты ортогональной системы координат, связанной с линиями главных кривизн.

Геометрические и физические соотношения для оболочки:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + w, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = u \operatorname{ctg} \theta + w, \quad \beta = \chi - \xi, \quad -\xi = \frac{\partial w}{\partial \theta} - u, \quad (5)$$

$$\kappa_{\theta\theta} = \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} - w, \quad \kappa_{\vartheta\vartheta} = \operatorname{ctg} \theta (\chi - u) - w;$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} &= \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \alpha_0 \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \tilde{T}_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta} + \alpha_0 \varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \quad T_{\theta\theta} = \tilde{T}_{\theta\theta} - M_{\theta\theta}, \quad T_{\vartheta\vartheta} = \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} - M_{\vartheta\vartheta}, \\ M_{\theta\theta} &= a(\kappa_{\theta\theta} + \alpha_0 \kappa_{\vartheta\vartheta}), \quad M_{\vartheta\vartheta} = a(\kappa_{\vartheta\vartheta} + \alpha_0 \kappa_{\theta\theta}), \quad Q = \beta_0 k^2 \beta, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$ – компоненты тензора деформаций; $\kappa_{\theta\theta}$, $\kappa_{\vartheta\vartheta}$ – компоненты тензора изменения кривизны.

Связь радиуса области контакта $b(\tau)$ с глубиной проникания $u_c(\tau)$ ударника:

$$b = \sqrt{u_c(2 - u_c)}. \quad (7)$$

Уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела:

$$m_0 \ddot{u}_c = R_a, \quad R_a(\tau) = 2\pi \tilde{\gamma} \int_0^{b(\tau)} p(r, \tau) r dr, \quad (8)$$

где m_0 – безразмерная масса оболочки.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} u_c|_{\tau=0} &= 0, \quad \dot{u}_c|_{\tau=0} = V_0, \quad u|_{\tau=0} = 0, \quad w|_{\tau=0} = 0, \quad \chi|_{\tau=0} = 0, \quad \varphi|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{\varphi}|_{\tau=0} = 0, \\ \psi|_{\tau=0} &= 0, \quad \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{\chi}|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}|_{\tau=0} = -V_0 \sin \theta, \quad \dot{w}|_{\tau=0} = V_0 \cos \theta; \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия (контакт происходит в условиях свободного проскальзывания):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0} &= \tilde{\gamma} p \left[|r| \leq b(\tau) \right], \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0 \left[|r| > b(\tau) \right], \\ \sigma_{z\vartheta}|_{z=0} &= 0 \left[r \in (-\infty, \infty) \right], \quad u_z = w \cos \theta \approx w \left[|r| \leq b(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

К ним добавляются условия ограниченности решения.

В формулах, приведенных выше, α_1 , β_1 , a , γ^2 , η_2^2 , α_0 , β_0 , $\tilde{\gamma}$ – безразмерные параметры.

В первой главе также приведены известные осесимметричные функции влияния для полупространства, которые представляют собой нормальные напряжения и нормальные перемещения поверхности полупространства

$$\Gamma(r, \tau) = \sigma_{zz}|_{z=0}, \quad G(r, \tau) = u_z|_{z=0}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где x , y – координаты прямоугольной декартовой системы координат.

Они являются решениями осесимметричных задач (1) – (3) в цилиндрической системе координат при нулевых начальных условиях. На границе $z = 0$ в этих задачах имеют место следующие граничные условия:

– для $\Gamma(r, \tau)$:

$$\sigma_{rz}|_{z=0} = 0, \quad u_z|_{z=0} = \delta(\tau)\delta(x, y); \quad (11)$$

– для $G(r, \tau)$:

$$\sigma_{rz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(\tau)\delta(x, y). \quad (12)$$

С их помощью и на основании принципа суперпозиции выражения для перемещений u_z и напряжения σ_{zz} на границе полупространства $z = 0$ принимают вид:

$$u_z|_{z=0} = u_z(r, \tau) = G(r, \tau) ** \sigma_{zz}(r, \tau), \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \sigma_{zz}(r, \tau) = \ddot{\Gamma}_a(r, \tau) ** u_z(r, \tau). \quad (13)$$

Здесь производная понимается в обобщенном смысле, значком «**» обозначена операция свертки по двум переменным r и τ .

В главе 2 исследуется сверхзвуковой этап ударного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства. Он характеризуется тем, что скорость границы области контакта превышает скорость волн растяжения – сжатия в упругой среде.

Для этого случая построена система разрешающих уравнений, включающая в себя соотношения (4), содержащие в правой части интегральное представление для контактного давления, вытекающее из второй формулы в (13) и граничных условий ($v(r, \rho, \tau - t)$ представлена в работе [1])

$$p(r, \tau) = \frac{1}{\tilde{\gamma}} [p_1(r, \tau) + p_2(r, \tau) + p_3(r, \tau)], \quad p_1(r, \tau) = -\dot{w}H(\tau)H[b(\tau) - r], \quad (14)$$

$$p_2(r, \tau) = \int_0^\tau \dot{w}[b(t), t] v[r, b(t), \tau - t] dt, \quad p_3(r, \tau) = -\int_0^\tau dt \int_0^{b(\tau)} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} v(r, \rho, \tau - t) d\rho,$$

уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела (8), соотношение, связывающее радиус границы области контакта с глубиной погружения ударника (7), и начальные условия (9). Граничными условиями при этом являются условия ограниченности перемещений оболочки в полюсах.

Для построения решения системы уравнений все функции представляются в виде разложений в ряды по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$ и их производным:

$$\begin{aligned} \|w(\theta, \tau), p(\theta, \tau)\|^T &= \sum_{n=0}^{\infty} \|w_n(\tau), p_n(\tau)\|^T P_n(\cos \theta), \\ \|u(\theta, \tau), \chi(\theta, \tau)\|^T &= \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n(\tau), \chi_n(\tau)\|^T \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}. \end{aligned} \quad (15)$$

В результате задача сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов рядов, зависящих от времени:

$$\gamma^2 \ddot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{L}_n \mathbf{U}_n + \mathbf{P}_n,$$

$$\mathbf{L}_n = \|L_{ijn}\|_{3 \times 3}, \mathbf{U}_n = \|u_n(\tau), w_n(\tau), \chi_n(\tau)\|^T, \mathbf{P}_n = \frac{1}{h\tilde{\gamma}} \left\| 0, \sum_{i=1}^3 p_{in}(\tau), 0 \right\|^T; \quad (16)$$

$$m_0 \ddot{u}_c = \pi \sum_{i=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} p_{in}(\tau) I_n(b(\tau)), \quad (17)$$

$$I_n(x) = 2^{-n+1} \sum_{m_1=0}^{[n/2]} (-1)^{m_1} \frac{(2n-2m_1)!}{m_1!(n-m_1)!(n-2m_1)!} \left[(1-(1-x^2)^{(n-2m_1+2)/2}) \right],$$

где

$$\begin{aligned} L_{11n} &= (1+a)[(1-\alpha_0)-n(n+1)] - \beta_0 k^2, \quad L_{12} = (1+\alpha_0)(1+a) + \beta_0 k^2, \\ L_{13n} &= a[\alpha_0 - 1 + n(n+1)] + \beta_0 k^2, \quad L_{21n} = n(n+1)[(1+a)(1+\alpha_0) + \beta_0 k^2], \\ L_{22n} &= -[2(1+\alpha_0)(1+a) + \beta_0 k^2 n(n+1)], \quad L_{23n} = -n(n+1)[(\alpha_0+1)a + \beta_0 k^2], \\ L_{31n} &= n(n+1) - 1 + \alpha_0 + \frac{\beta_0 k^2}{a}, \quad L_{32} = -\left(2 + \frac{\beta_0 k^2}{a}\right), \quad L_{33n} = -\left[\alpha_0 + n(n+1) + \frac{\beta_0 k^2}{a} - 1\right]; \end{aligned} \quad (18)$$

$$p_{1n}(\tau) = -\frac{2n+1}{2} H(\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \dot{w}_k(\tau) I_{nk}[b(\tau)],$$

$$p_{2n}(\tau) = \frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \dot{w}_k(t) P_k[\cos b(t)] dt \int_0^{\pi} \nu[\theta, b(t), \tau-t] P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (19)$$

$$p_{3n}(\tau) = -\frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \dot{w}_k(t) dt \int_0^{\arcsin[b(\tau)]} \frac{dP_k(\cos \theta_*)}{d\theta_*} d\theta_* \int_0^{\pi} \nu(\theta, \theta_*, \tau-t) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

$$\begin{aligned} I_{nk}(x) &= 2^{-n-k} \sum_{m_3=0}^{[k/2]} \sum_{m_2=0}^{[n/2]} (-1)^{m_2+m_3} \frac{(2k-2m_3)!(2n-2m_2)!}{m_3!(k-m_3)!(k-2m_3)!m_2!(n-m_2)!} \times \\ &\times \frac{1-(1-x^2)^{(k+n-2(m_2+m_3)+1)/2}}{(n-2m_2)!(k+n-2(m_2+m_3)+1)}. \end{aligned}$$

Замыкают разрешающую систему уравнений в коэффициентах рядов геометрическое соотношение (7) и начальные условия:

$$\begin{aligned} b|_{\tau=0} = u_c|_{\tau=0} = u_n|_{\tau=0} = w_n|_{\tau=0} = \chi_n|_{\tau=0} = \dot{\chi}_n|_{\tau=0} = 0, \\ \dot{u}_n|_{\tau=0} = \dot{w}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \neq 1), \quad \dot{u}_c|_{\tau=0} = \dot{u}_1|_{\tau=0} = \dot{w}_1|_{\tau=0} = V_0, \end{aligned} \quad (20)$$

В основе алгоритма решения разрешающей системы уравнений (16), (17), (7) лежит модифицированный метод Рунге-Кутты четвертого порядка и метод редукции. Для решения поставленной задачи создан и зарегистрирован программный комплекс [16].

На рис. 2 и 3 представлены зависимости положения границы области контакта и скорости ее расширения в зависимости от времени, полученные в результате решения задачи на сверхзвуковом этапе взаимодействия при $R = 1$, $h = 0.05$, $\gamma = 1$, $V = 0.1$.

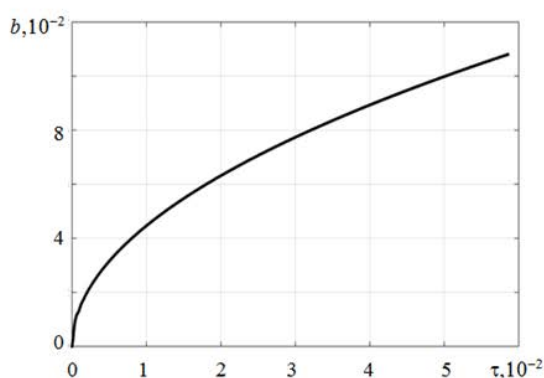


Рис. 2.

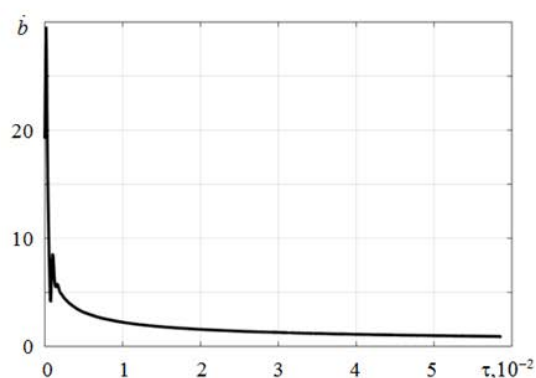


Рис. 3.

Зависимости контактного давления и нормальных перемещений оболочки от времени в разных точках области контакта представлены на рис. 4 и 5 соответственно. Сплошная кривая соответствует лобовой точке оболочки, штриховая – точке с координатой $\theta = 0.04$, штриховая пунктирная – $\theta = 0.08$.

На рис. 6, 7 представлены соответственно зависимости контактного давления, нормальных перемещений от времени в лобовой точке оболочки. Здесь и далее сплошные кривые соответствуют случаю ($\gamma = 1$ - оболочка и полупространство - сталь), штриховые – случаю ($\gamma = 0.95$ - оболочка - алюминий, полу-

пространство - сталь), штриховые пунктирные – случаю ($\gamma = 0.77$ - оболочка – сталь, полупространство - медь).

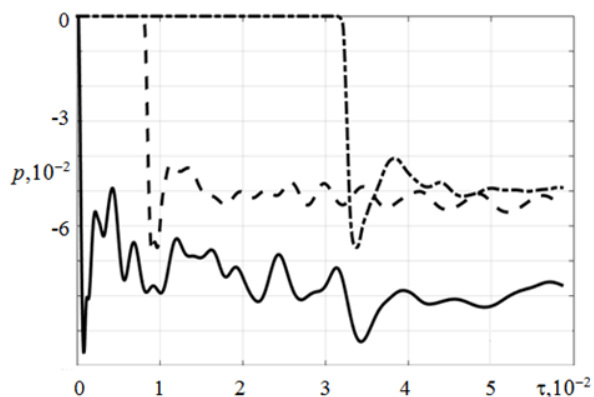


Рис. 4.

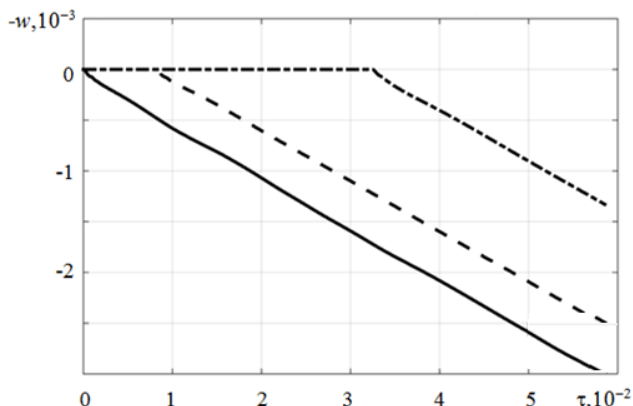


Рис. 5.

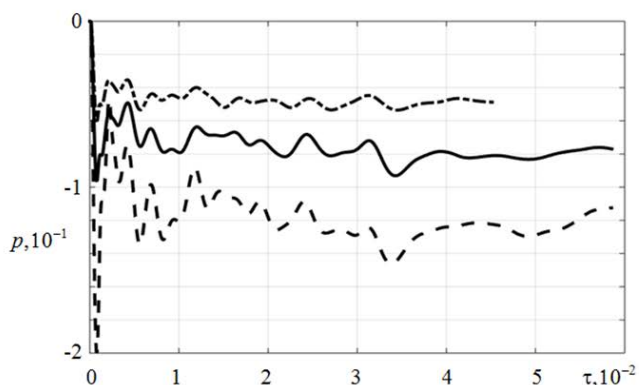


Рис. 6.

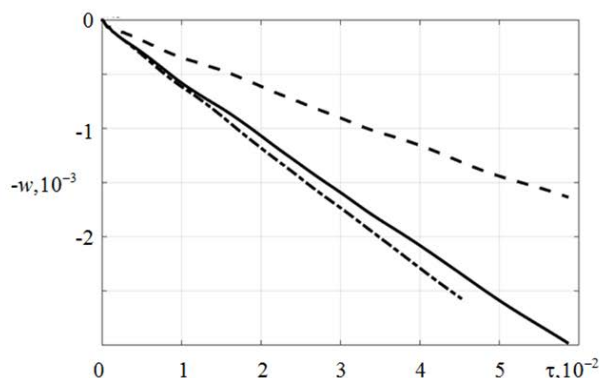


Рис. 7.

Относительная погрешность представленных выше результатов в процентном отношении по норме составляет 2.7%.

В расчетах удерживалось четыре члена рядов в разложениях по полиномам Лежандра и их производным, так как учет большего числа членов дает незначительное уточнение результатов.

В главе 3 рассматривается произвольный этап контактного взаимодействия оболочки и полупространства. Разработанный в предыдущей главе алгоритм решения нестационарной контактной задачи для сферической оболочки и упругого полупространства не применим в случае дозвукового этапа контактного взаимодействия. Это объясняется тем, что носитель нормальных переме-

щений оболочки на дозвуковом этапе не совпадает с областью контакта. Поэтому для данного этапа взаимодействия построена новая система разрешающих уравнений, основное уравнений которой

$$u_z = (\tilde{w} + V_0 \tau \cos \theta) \cos \theta, \quad |r| \leq b(\tau). \quad (21)$$

вытекает из последнего граничного условия в (10) и интегральных представлений нормальных перемещений оболочки и полупространства (13), базирующихся на принципе суперпозиции. В (21) учитывается редукция постановки задачи к нулевым начальным условиям (см. (26)). При этом

$$\begin{aligned} \tilde{w} = J_0(\theta, \tau), \quad u_z = J_1(\theta, \tau), \quad J_0(\theta, \tau) &= \int_0^\tau dt \int_0^{b(t)} G_{02}(\theta, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi, \\ J_1(\theta, \tau) &= \tilde{\gamma} \int_0^\tau dt \int_0^{b(t)} \Lambda(\theta, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь функция $\Lambda(\theta, \xi, \tau)$ представлена в работе [2], G_{02} – функция влияния для оболочки, c_R – скорость волны Рэлея, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \eta$, c_{11} и c_{i1} – скорости распространения волн растяжения-сжатия в полупространстве и сдвига в основании ($i=1$) и ударнике ($i=0$), $\Lambda_{kr}(\theta, \xi, \tau)$ – регулярные составляющие, являющиеся непрерывными функциями; $\Lambda_{ks}(\theta, \xi, \tau)$ – сингулярные составляющие ядра Λ , $H(x)$ – функция Хевисайда.

Уравнение (21) вместе с кинематическим соотношением (7) и уравнением оболочки как абсолютно твердого тела, записанным в интегральной форме:

$$u_c = V_0 \tau + \frac{1}{m_0} J_c(\tau), \quad J_c(\tau) = \pi \int_0^\tau \int_0^{b(t)} p(\xi, \tau) (\tau - t) \sin(2\xi) d\xi dt, \quad (23)$$

а также начальным условием

$$b(0) = 0 \quad (24)$$

образуют замкнутую систему разрешающих уравнений.

Для нахождения нормальных перемещений оболочки используется функция влияния G_0 , которая является решением системы уравнений (3) – (5) при нулевых начальных условиях и поверхностном давлении вида:

$$p = \delta(\tau)\delta(\theta - \xi). \quad (25)$$

Сведение начальных условий (9) к однородным

$$u = \tilde{u} - V_0\tau \sin \theta, \quad w = \tilde{w} + V_0\tau \cos \theta \quad (26)$$

и подстановка (26) в (3) – (5), привели к системе уравнений относительно неизвестных \tilde{u} , \tilde{w} , $\tilde{\chi}$, являющихся функциями влияния для оболочки, для которых введены специальные обозначения:

$$G_{01}(\theta, \xi, \tau) = \tilde{u}, \quad G_{02}(\theta, \xi, \tau) = \tilde{w}, \quad G_{03}(\theta, \xi, \tau) = \tilde{\chi}. \quad (27)$$

После разложения G_{01} , G_{02} , G_{03} в ряды по полиномам Лежандра и их производным

$$\begin{aligned} \|G_{01}(\theta, \xi, \tau) \quad G_{03}(\theta, \xi, \tau)\|^T &= \sum_{n=1}^{\infty} \|G_{01n}(\tau, \xi) \quad G_{03n}(\tau, \xi)\|^T \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \\ \|G_{02}(\theta, \xi, \tau) \quad \delta(\theta - \xi)\|^T &= \sum_{n=0}^{\infty} \|G_{02n}(\tau, \xi) \quad \delta_n(\xi)\|^T P_n(\cos \theta), \\ \delta_n(\xi) &= \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \xi) \sin \xi, \end{aligned} \quad (28)$$

и подстановки в (3) – (5) получена система относительно неизвестных коэффициентов разложений (28), зависящих от времени τ и угловой координаты ξ :

$$\begin{aligned} \gamma^2 \ddot{G}_{01n}(\xi, \tau) &= L_{11n} G_{01n}(\xi, \tau) + L_{12n} G_{02n}(\xi, \tau) + L_{13n} G_{03n}(\xi, \tau), \\ \gamma^2 \ddot{G}_{02n}(\xi, \tau) &= L_{21n} G_{01n}(\xi, \tau) + L_{22n} G_{02n}(\xi, \tau) + L_{23n} G_{03n}(\xi, \tau) + \frac{\delta(\tau)\delta_n(\xi)}{h}, \\ \gamma^2 \ddot{G}_{03n}(\xi, \tau) &= L_{31n} G_{01n}(\xi, \tau) + L_{32n} G_{02n}(\xi, \tau) + L_{33n} G_{03n}(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (29)$$

Решение системы (29) найдено с помощью преобразования Лапласа и имеет вид:

$$G_{02}(\xi, \tau) = \sum_k \operatorname{res}_{s_{nk}} G_{02n}^L(\xi, s) e^{s\tau}, \quad R(z_{nk}, n) = 0, \quad z_{nk} = s_{nk}^2. \quad (30)$$

Для решения системы (7), (21) и (23) с начальными условиями (24) используется численно-аналитический алгоритм, основанный на методе квадратур. С учетом гиперболического типа уравнений движения оболочки и полу-пространства применяется явная схема интегрирования.

На пространственно-временную область $R_{t\xi}^2$ наносится сетка с постоянным шагом δ_t по времени t и δ_ξ по координате ξ :

$$\begin{aligned} t_i &= i\delta_t, \quad \tau = t_m = m\delta_t, \quad \xi_j = j\delta_\xi, \quad \theta = \xi_n = n\delta_\xi, \quad \delta_t < \delta_\xi, \\ R_{t\xi}^2 &= \bigcup_i \bigcup_j K_{ij}, \quad K_{ij} = \left\{ (t, \xi) \mid t \in [t_{i-1}, t_i], \xi \in [\xi_j, \xi_{j+1}] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

где K_{ij} - элементарные прямоугольники.

Искомым функциям $b(t)$, $u_c(t)$, $p(t, \xi)$ ставятся в соответствие сеточные функции b_i , u_{ci} , p_{ij}

$$b_i = b(t_i), \quad u_{ci} = u_c(t_i), \quad p_{ij} = p(t_i, \xi_j) \quad (32)$$

Дискретный аналог разрешающей системы (7), (21) и (23) с начальными условиями (24) состоит из следующих уравнений:

$$u_{cm} = \frac{\pi}{m_0} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k_i-1} p_{ij} b_{ij} + V_0 m \delta_t, \quad (33)$$

$$b_{ij} = \iint_{K_{ij}} (t_m - t) \sin(2\xi) d\xi dt = \frac{1}{2} \sin((2j+1)\delta_\xi) \sin(\delta_\xi) (2(m-i)+1) \delta_t^2,$$

$$b_m = \sqrt{u_{cm}(2 - u_{cm})}, \quad (34)$$

$$\left[\tilde{\gamma} I_{1m-1,n} - \cos(n\delta) I_{0m-1,n} \right] - p_{mn} \left[\tilde{\gamma} \delta_t + \cos(n\delta_\xi) a_{mn} \right] = V_0 m \delta_t \cos^2(n\delta_\xi). \quad (35)$$

Начальные условия для данной системы имеют вид:

$$u_{c0} = 0, \quad b_0 = 0. \quad (36)$$

На каждом временном шаге с номером m из формулы (33) определяется значение глубины проникания оболочки в полупространство u_{cm} . Подставляя u_{cm} в (34), находим радиус области контакта b_m .

После этого определяется решение p_{mn} уравнения (35)

$$p_{mn} = \frac{\left(\tilde{\gamma} I_{1m-1,n} - \cos(n\delta_\xi) I_{0m-1,n} \right) - V_0 m \delta_t \cos^2(n\delta_\xi)}{\tilde{\gamma} \delta_t + \cos(n\delta_\xi) a_{mn}}, \quad (37)$$

где $I_{0m-1,n}$, $I_{1m-1,n}$ - численные аналоги интегралов $J_0(\theta, \tau)$ и $J_1(\theta, \tau)$ в (22).

Предложенный алгоритм расчета реализован в среде Си++ [17].

На рис. 8 и 9 показаны зависимости от времени положения границы области контакта и скорости ее расширения соответственно, как решения задачи на произвольном этапе взаимодействия при $R = 1$, $h = 0.05$, $\gamma = 1$, $V = 0.1$.

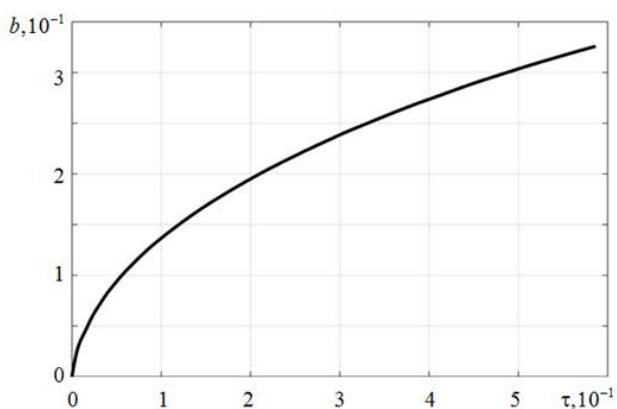


Рис. 8.

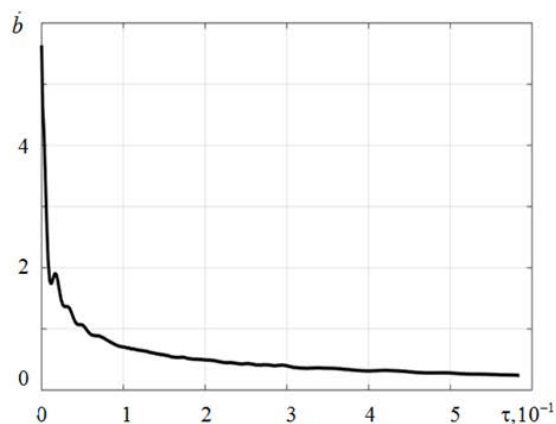


Рис. 9.

Зависимости от времени контактного давления и нормальных перемещений в разных точках границы полупространства представлены на рис. 10 и 11. Сплошная кривая соответствует лобовой точке, штриховая – точкам с координатой $r = 0.1$, штриховая пунктирная – точкам с координатой $r = 0.2$.

Также приведено сравнение результатов, полученных с помощью методов и алгоритмов второй и третьей глав.

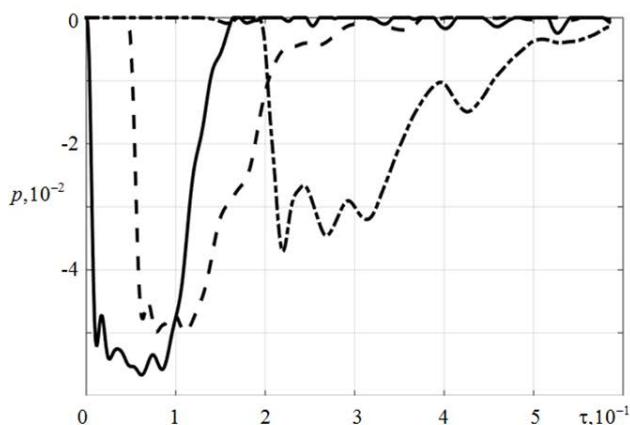


Рис. 10.

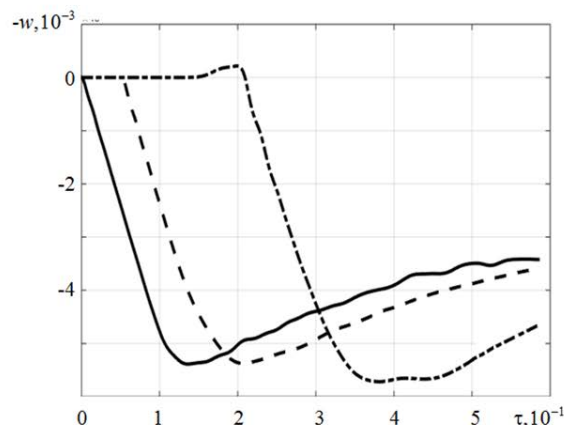


Рис. 11.

Распределение контактного давления, нормальных перемещений в различные моменты времени представлено на рис. 12, 13 соответственно. Сплошная кривая соответствует значению $\tau = 0.1$, штриховая – $\tau = 0.3$, штриховая пунктирная – $\tau = 0.6$. Как видно из приведенных результатов, с течением вре-

мени в лобовой области давление понижается, и, наоборот, в области близкой к границе наблюдается значительный рост контактного давления. Это объясняется податливостью оболочки – в лобовой области с течением времени начинает возникать частичное отслоение граничных поверхностей, в то время как вся «контактная нагрузка» начинает перераспределяться в область, близкую к границе области контакта. На рис. 13 хорошо заметен, особенно на кривых соответствующих $\tau = 0.3$ и $\tau = 0.6$, выход перемещений за границу области контакта.

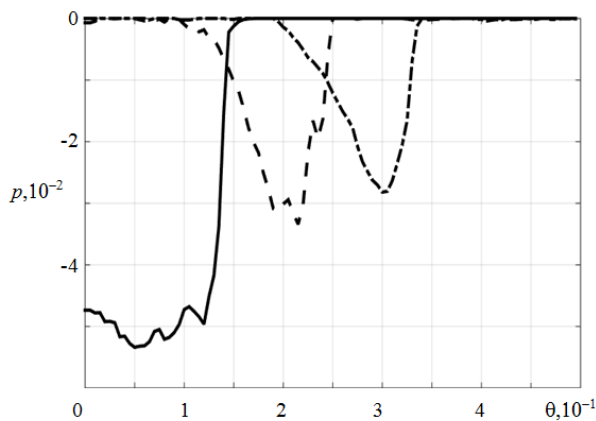


Рис. 12.

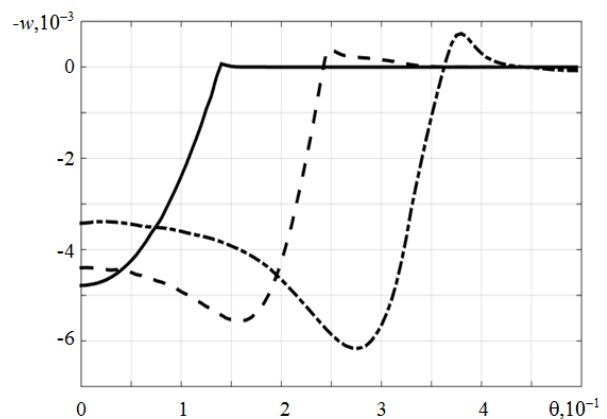


Рис. 13.

Рисунки 14, 15 иллюстрируют сравнение результатов, полученных при расчетах по методам второй и третьей главы. Сплошные кривые соответствуют результатам, полученным для произвольного этапа взаимодействия (глава 3), а штриховые – для сверхзвукового этапа. Здесь представлены зависимости нормальных перемещений от времени в лобовой точке (рис. 14) и точки с координатой $r = \theta = 0.05$ (рис. 15). При этом обрыв штриховых линий на графиках соответствует моменту времени окончания сверхзвукового этапа взаимодействия.

На рис. 16 представлено сравнение результатов, полученных в диссертации, с известными результатами для оболочки Кирхгофа-Лява. Здесь изображены зависимости нормальных перемещений в лобовой точке оболочки от времени. Материал оболочки – сталь, а полупространства – алюминий. Кривые с номером 1 соответствуют варианту $V_0 = 0.001$, $h = 0.01$, а с номером 2 –

$V_0 = 0.005$, $h = 0.02$. Сплошные кривые соответствуют решению, полученному по методу главы 3, а штриховые – известным результатам.

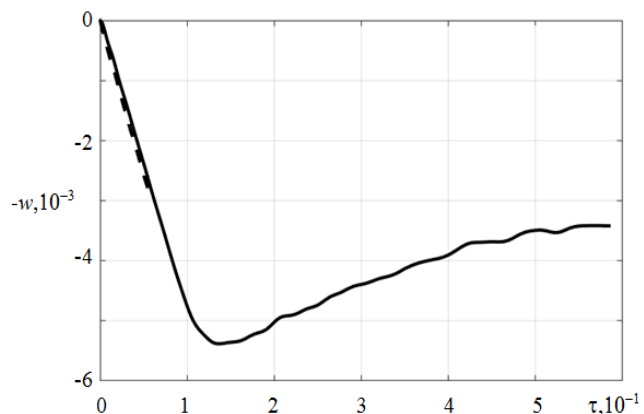


Рис. 14.

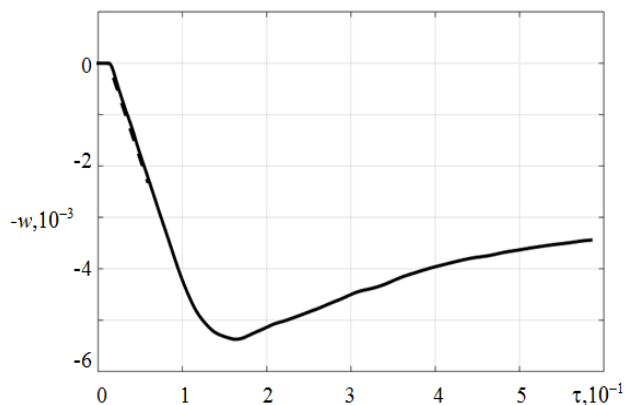


Рис. 15.

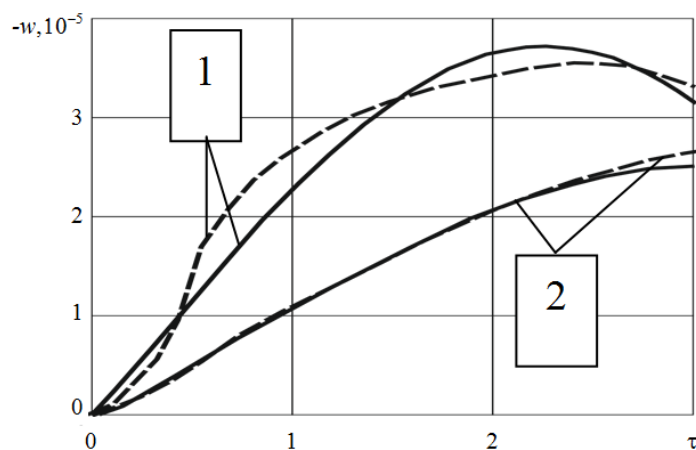


Рис. 16.

Основные результаты и выводы

1. Дана постановка и получено решение новой осесимметричной нестационарной контактной задачи с подвижными границами о вертикальном ударе тонкой сферической оболочки по упругому полупространству.

2. Для начального сверхзвукового этапа взаимодействия предложен и реализован алгоритм решения, основанный на принципе суперпозиции. В результате задача сведена к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения компонентов напряженно-деформированного состояния в ряды Фурье по полиномам Лежандра и

их производным. Эта система интегрируется численно с использованием метода редукции. Проведено численное исследование сходимости.

3. Построена и исследована функция влияния для сферической оболочки с использованием аппарата разложений в ряды Фурье по системе собственных функций и интегрального преобразования Лапласа по времени.

4. Разработана численно-аналитическая методика решения задачи на произвольном временном интервале, основанная на двумерном интегральном уравнении типа Вольтерра с ядрами в виде функций влияния для взаимодействующих тел. Построен и реализован пошаговый по времени численный алгоритм решения системы, основанный на методе квадратур. Для вычисления интегралов с сингулярными особенностями разработаны оригинальные квадратурные формулы, основанные на методе весовых коэффициентов и канонической регуляризации. Дано численное исследование сходимости алгоритма.

5. Проведено параметрическое исследование задачи, сравнение результатов, полученных с помощью двух предложенных методов, а также сравнение с известными результатами других авторов.

6. Созданы и зарегистрированы программные комплексы, на основе которых проведены параметрические исследования результатов решения поставленных задач.

Результаты диссертационного исследования использованы при выполнении работ по проекту ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» в рамках реализации мероприятия № 2.2, соглашение № 14.586.21.0019

Основные публикации по теме диссертации

1. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия) // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 98-108. [Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the

Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) // *Mechanics of Solids*. – 2011. – Vol. 46, No. 2. P. 239 – 247.]

2. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В., Тарлаковский Д.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // *Труды МАИ: электронный журнал*. – 2014. – Вып. 78 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53499> (дата обращения: 16. 12. 2015).

3. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В. Сверхзвуковой этап контактного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства // *Современные проблемы механики и математики: Тезисы докл. междунар. науч. конф.* – Львов, 2008. – Т. 1 – С. 91 – 93.

4. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В. Решение нестационарной контактной задачи для тонкой сферической оболочки и упругого полупространства на сверхзвуковом этапе взаимодействия // *Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XV междунар. симп. им. А.Г. Горшкова*. – М., 2009. – Т. 2. – С. 31 – 32.

5. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Сверхзвуковой этап взаимодействия оболочки и упругого полупространства // *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць / Дніпропетр. націон. ун-т*. – Дніпропетровськ, 2009. – Вип. 13. – С. 156 – 162.

6. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Удар сферической оболочки по упругому полупространству // *Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. междунар. научн. конф.* – Николаев, 2009. – С. 88 – 90.

7. Нестационарное контактное взаимодействие тонкой сферической оболочки и упругого полупространства / Михайлова Е.Ю., Кубенко В.Д., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. // *Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XVI междунар. симп. им. А.Г. Горшкова*. – М., 2009. – Т. 2. – С. 64 – 65.

8. Произвольный этап взаимодействия сферической и упругого полупространства / Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ, 2010. – Вип. 11. – С. 24 – 31.

9. Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарное контактное взаимодействие сферической оболочки и упругого полупространства // Сб. науч. тр. Межд. науч. конф. «Математические проблемы механики неоднородных структур» / Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины. – Львов, 2010. – С. 348 – 349.

10. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарная осесимметричная задача удара оболочки по упругому полупространству // XV Int. conf. «Dynamical system modeling and stability investigation»: Abstracts of conference reports. – Kiev, 2011 – P. 307.

11. Кубенко В.Д., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Решение осесимметричной нестационарной контактной задачи для тонкой сферической оболочки и упругого полупространства // Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XVIII междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2012. – Т. 2. – С. 130 – 136.

12. Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Произвольный этап нестационарного контактного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ, 2012. – Вип. 20. – С. 19 – 26.

13. Кубенко В.Д., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Удар сферической оболочки по упругому полупространству на произвольном этапе взаимодействия // Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур: Материалы междунар. науч. конф. – Минск, 2013. – С. 78 – 80.

14. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Ударное взаимодействие тонкой упругой сферической оболочки и упругого полупространства

ства с различными механическими характеристиками материалов // Научная конференция "Ломоносовские чтения", секция механики: Тезисы докладов. – М., 2014. – С. 131 – 132.

15. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Ударное взаимодействие сферической оболочки с упругим полупространством // Тезисы докладов междунар. науч. семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» / МАИ. – М., 2014. – С. 50 – 51.

Свидетельства на программы для электронных вычислительных машин.

16. Свид. 2012661354 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Расчет сверхзвукового этапа контактного взаимодействия обтекателя летательного аппарата сферической формы при ударе о скальный грунт. / Е.Ю. Михайлова, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (RU). – № 2012619071; заявл. 25.10.12; опубл. 13.12.12.

17. Свид. . 2014611055 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Расчет нестационарного напряженно-деформированного состояния сферического обтекателя спускаемого космического аппарата при ударе о грунт. / Е.Ю. Михайлова, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (RU). – № 2013619305; заявл. 16.10.13; опубл. 23.01.14.