

Научная статья
УДК 532.135
DOI: [10.34759/trd-2022-125-09](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-09)

ТЕЧЕНИЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

Владимир Николаевич Колодежнов¹,

Александр Сергеевич Веретенников²✉

^{1,2}Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-Воздушная Академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,
Воронеж, Россия

¹kvn117@mail.ru

²vas3141@gmail.com✉

Аннотация. Предложена реологическая модель комбинированного типа для вязкопластических рабочих сред, которые демонстрируют немонотонную зависимость вязкости от скорости сдвига. Такая модель предполагает три характерных варианта механического поведения на трех смежных диапазонах изменения скорости сдвига. На первом диапазоне зависимость касательного напряжения от скорости сдвига описывается линейной функцией и характеризуется постоянным значением вязкости. На втором и третьем диапазонах скорости сдвига эта зависимость аппроксимируется нелинейными функциями, описывающими,

соответственно, дилатантное и псевдопластическое поведение. На основе такой модели получено решение задачи об установившемся течении жидкой рабочей среды такого рода в цилиндрическом канале. Показано, что в зависимости от уровня перепада давления на длине канала могут быть реализованы три различные схемы течения. При этом, для каждой из этих схем внутри канала в соответствии с предложенной реологической моделью должны быть выделены характерные зоны течения. В случае наиболее сложной третьей схемы течения внутри канала должны быть выделены четыре зоны с различным механическим поведением жидкости. В такой ситуации зона пластического течения традиционно формируется в центральной части канала в окрестности его продольной оси симметрии. Следующая зона характеризуется сдвиговым течением с постоянным значением вязкости. И, наконец, еще две зоны нелинейно-вязкого течения, в которых жидкость демонстрирует дилатантное и псевдопластическое поведение, формируются в окрестности стенки канала. В ходе решения задачи для каждой из трех возможных схем течения были учтены условия сопряжения для полей скорости и касательного напряжения на границах раздела отдельных зон течения. Получены выражения для определения границ раздела основных зон течения, а также расчета профиля скорости жидкости и зависимости объемного расхода от перепада давления. Проведен анализ влияния основных параметров рассматриваемой системы на эти характеристики течения.

Ключевые слова: реологическая модель, вязкопластическая жидкость, скорость сдвига, касательное напряжение, вязкость

Для цитирования: Колодежнов В.Н., Веретенников А.С. Течение в цилиндрическом канале нелинейной вязкопластической жидкости // Труды МАИ. 2022. №125. DOI: 10.34759/trd-2022-125-09

Original article

FLOW IN A CYLINDRICAL CHANNEL OF A NONLINEAR VISCOPLASTIC FLUID

Vladimir N. Kolodezhnov¹, Alexander S. Veretennikov²✉

^{1,2}MESC Air Force «Air Force Academy named after professor N.E. Zhukovskii and Yu.A. Gagarin»,

Voronezh, Russia

¹kvn117@mail.ru

²vas3141@gmail.com✉

Abstract. A combined rheological model has been proposed for viscoplastic working media that exhibit a non-monotonic dependence of viscosity on shear rate. This model assumes three typical behaviors in three adjacent ranges of shear rate variation. In the first range, the dependence of the shear stress on the shear rate is described by a linear function and characterized by a constant viscosity value. In the second and third shear rate ranges, this dependence is approximated by nonlinear functions describing dilatant and pseudoplastic behavior. On the basis of such a model, the solution to the steady flow of fluid in a cylindrical channel has been obtained. It is shown that three different flow patterns can be implemented depending on the level of pressure drop along the channel

length. For each of the schemes inside the channel, characteristic zones of flow should be identified. In the case of the most complex third flow pattern inside the channel, four zones with different mechanical behavior of the fluid should be distinguished. In such a situation, the zone of plastic flow is formed in the central part of the channel in the vicinity of its fore-and-aft axis of symmetry. The next zone is characterized by shear flow with a constant viscosity value. Two more zones of nonlinear-viscous flow, in which the fluid exhibits dilatant and pseudoplastic behavior, are formed in the vicinity of the channel wall. Expressions for determining the boundaries of flow zones, and expressions for calculating the liquid velocity profile and the dependence of the volume flow on the pressure drop were obtained. The influence of the main parameters of the system under consideration on the velocity distribution characteristics and the dependence of the volumetric flow rate on the pressure drop over the channel length has been analyzed.

Keywords: rheological model, viscoplastic fluid, shear rate, shear stress, viscosity

For citation: Kolodezhnov V.N., Veretennikov A.S. Flow in a cylindrical channel of a nonlinear viscoplastic fluid. *Trudy MAI*, 122, no. 125. DOI: 10.34759/trd-2022-125-09

Введение

При моделировании гидродинамических процессов, реализуемых в самых различных технических системах, постоянно используется реологическая модель ньютоновской жидкости [1, 2]. Вместе с тем, наряду с традиционными жидкими средами, вязкость которых является постоянной величиной, хорошо известны

неньютоновские жидкости [3], характеризующиеся, как правило, монотонным изменением вязкости в зависимости от скорости сдвига. Для случая так называемых псевдопластических жидкостей вязкость монотонно снижается по мере увеличения скорости сдвига. Для дилатантных жидкостей, наоборот, наблюдается ее монотонное возрастание [4]. Описание механического поведения жидкостей такого рода проводится на основе степенных законов зависимости вязкости от скорости сдвига или второго инварианта тензора скоростей деформаций [5 – 7].

Вместе с тем известны жидкости, которые демонстрируют еще более сложное механическое поведение, которое проявляется, прежде всего, в немонотонном характере зависимости вязкости от скорости сдвига. Как правило, такие жидкости демонстрируют последовательное чередование участков возрастания и убывания вязкости на различных диапазонах изменения скорости сдвига. В качестве примера рабочих жидкостей с такими свойствами можно привести концентрированные суспензии мелкодисперсных частиц твердой фазы с размерами порядка $10^2 \div 10^3$ нм [8 – 13].

С точки зрения технических приложений определенный интерес представляет еще одна особенность поведения концентрированных суспензий мелкодисперсных частиц, которая заключается в следующем. При определенных сочетаниях концентрации и размеров частиц твердой фазы приближение скорости сдвига к некоторому критическому значению приводит к тому, что крутизна кривой течения, характеризующая вязкость, начинает резко возрастать. Для некоторых видов суспензий такое возрастание вязкости может оказаться настолько существенным (зачастую, на один – два порядка), что такую ситуацию интерпретируют, как

проявление эффекта “упрочнения” или “отвердевания”. В научно-технической литературе такие рабочие среды часто отмечают аббревиатурой STF (Shear Thickening Fluids) [8].

Проявление эффекта “отвердевания” в полимерных композициях позволило сформулировать ряд технических предложений по использованию подобных материалов при изготовлении защитных покрытий, предохраняющих соответствующие изделия от ударных воздействий [14 – 19].

Различные результаты, связанные с математическим моделированием механического поведения нелинейно-вязких жидкостей, в том числе, на основе реологических моделей комбинированного типа представлены в работах [20 – 27].

Пример реологической модели комбинированного типа для жидкости, вязкость которой на двух из трех диапазонов изменения скорости сдвига принимает различные, но постоянные значения приводится в [24]. В промежутке между этими диапазонами зависимость вязкости от скорости сдвига описывается линейной функцией. В этой же работе рассмотрена задача о течении жидкости с такой моделью вязкого поведения в плоском канале.

В данной работе рассмотрена реологическая модель комбинированного типа для жидкости, которая демонстрирует различные закономерности вязкого поведения на трех отдельных диапазонах изменения скорости сдвига. Кроме того, такая модель наряду с учетом пластических свойств жидкости, позволяет описывать и проявление эффекта “отвердевания”. Используя такую модель, получено решение задачи об установившемся течении в цилиндрическом канале.

1. Реологическая модель

Зависимость касательного напряжения от скорости сдвига, график которой представляет собой кривую течения, для некоторых видов суспензий [8] мелкодисперсных частиц демонстрирует наличие трех характерных диапазонов изменения скорости сдвига. На каждом из этих диапазонов реализуется свой, вполне конкретный, вариант механического поведения.

В дополнение к сказанному будем полагать, что жидкая основа суспензии обладает пластическими свойствами. Тогда это обстоятельство также должно быть принято во внимание в реологической модели среды посредством учета напряжения сдвига (предела текучести) τ_p , ниже уровня которого скорость сдвига тождественно равняется нулю и сдвиговое течение отсутствует.

Особенностью первого диапазона, охватывающего область сравнительно небольших значений модуля скорости сдвига $|\dot{\gamma}|$, является то, что кривая течения имеет практически линейный вид. Такая ситуация, естественно, соответствует постоянному значению вязкости μ_0 . Для этого диапазона изменения скорости сдвига также предполагается, что касательное напряжение превышает предел текучести.

Превышение модулем скорости сдвига некоторого порогового уровня $\dot{\gamma}_0$, представляющего собой верхнюю границу для первого диапазона, приводит к изменению механического поведения жидкости и график (кривая течения) зависимости модуля касательного напряжения $|\tau|$ от $|\dot{\gamma}|$ принимает уже нелинейный

вид. Как демонстрируют известные экспериментальные данные [8], вязкость на этом (втором) диапазоне изменения скорости сдвига начинает возрастать. Подобный эффект имеет место для дилатантных жидкостей [4]. Описанный режим возрастания вязкости реализуется до еще одного порогового значения скорости сдвига $\dot{\gamma}_{\max} > \dot{\gamma}_0$, при котором вязкость достигает своего максимального значения μ_{\max} .

На третьем диапазоне изменения скорости сдвига, уже при превышении его модулем второго порогового уровня $\dot{\gamma}_{\max}$ начинается реализация еще одного варианта механического поведения суспензии. В такой ситуации функция вида $|\tau(|\dot{\gamma}|)|$, по-прежнему, демонстрирует монотонное возрастание по некоторому нелинейному закону. Вместе с тем, вязкость на этом диапазоне изменения скорости сдвига монотонно снижается. Такое поведение является характерным для псевдопластических жидкостей. Смена дилатантного поведения на псевдопластическое на границе раздела второго и третьего диапазонов предполагает, что итоговый график зависимости касательного напряжения от скорости сдвига при $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{\max}$ должен иметь точку перегиба.

Учитывая наличие трех характерных участков различного механического поведения жидкости на трех различных диапазонах изменения скорости сдвига, результирующую зависимость касательного напряжения от скорости сдвига в области одномерного вязкого течения предлагается описывать функцией вида

$$|\tau(|\dot{\gamma}|)| = \begin{cases} \tau_p + \mu_0 \cdot |\dot{\gamma}|; & 0 \leq |\dot{\gamma}| \leq \dot{\gamma}_0; \\ \tau_1 - k_1 \cdot (\dot{\gamma}_1 - |\dot{\gamma}|)^{n_1}; & \dot{\gamma}_0 \leq |\dot{\gamma}| \leq \dot{\gamma}_{\max}; \\ \tau_2 + k_2 \cdot (|\dot{\gamma}| - \dot{\gamma}_2)^{n_2}; & |\dot{\gamma}| \geq \dot{\gamma}_{\max}; \end{cases} \quad (1)$$

где $\tau_1, \tau_2, k_1, k_2, \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, n_1, n_2$, – заданные параметры реологической модели, на которые накладываются следующие ограничения

$$\tau_1 > \tau_p; \quad \dot{\gamma}_2 < \dot{\gamma}_{\max} < \dot{\gamma}_1; \quad 0 < n_1 < 1; \quad 0 < n_2 < 1. \quad (2)$$

Зависимость вязкости жидкости от скорости сдвига будем определять посредством соотношения

$$\mu(|\dot{\gamma}|) = \frac{d|\tau|}{d|\dot{\gamma}|}. \quad (3)$$

Выдвигая требование непрерывной дифференцируемости для функции (1), приходим из условий сопряжения значений касательного напряжения и вязкости на границах раздела отдельных диапазонов изменения скорости сдвига к необходимости выполнения следующих условий

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \frac{\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_0 \cdot \lambda}{1 - \lambda}; \quad k_1 = \frac{\mu_0 (1 - \lambda)^{n_1 - 1}}{n_1 (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_0)^{n_1 - 1}}; \quad k_2 = \frac{\mu_0 \lambda^{n_2 - 1}}{n_2 (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_2)^{n_2 - 1}}; \\ \tau_1 &= \tau_p + \mu_0 \cdot \dot{\gamma}_0 + \frac{\mu_0 \cdot (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_0)}{n_1 \cdot (1 - \lambda)}; \quad \tau_2 = \tau_{\max} - \frac{\mu_0 \cdot \lambda^{n_2 - 1}}{n_2} \cdot (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_2); \\ \lambda &= \left(\frac{\mu_{\max}}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{n_1 - 1}} < 1; \quad \tau_{\max} = \tau_p + \mu_0 \cdot \dot{\gamma}_0 + \frac{\mu_0 \cdot (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_0) \cdot (1 - \lambda^{n_1})}{n_1 \cdot (1 - \lambda)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где τ_{\max} – касательное напряжение в жидкости, достигаемое при $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{\max}$.

Таким образом, с учетом последних соотношений, реологическая модель (1) должна определяться следующим набором восьми независимых параметров: $\tau_p, \mu_0, \mu_{\max}, \dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_{\max}, \dot{\gamma}_2, n_1, n_2$.

Вместе с тем специально отметим следующее обстоятельство. Не смотря на достигнутую с учетом (4) непрерывную дифференцируемость функции (1), для зависимости вязкости от скорости сдвига выполняется лишь условие непрерывности. Это означает, что график зависимости вязкости от скорости сдвига, оставаясь непрерывным, будет допускать “изломы” на границах раздела смежных диапазонов изменения скорости сдвига.

Заметим, что реологическая модель (1) допускает учет проявления эффекта “отвердевания”. Формально, принимая во внимание (3) в этом случае должно выполняться условие

$$\lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow \dot{\gamma}_{\max}} \left\{ \frac{d|\tau(|\dot{\gamma}|)|}{d|\dot{\gamma}|} \right\} = \infty. \quad (5)$$

Учитывая ограничения (2) для n_1 и n_2 , можно видеть, что для выполнения (5) необходимо, в свою очередь, потребовать выполнения следующего условия

$$\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = \dot{\gamma}_{\max}. \quad (6)$$

Тогда, обеспечивая с учетом (6) непрерывную дифференцируемость для функции (1), приходим к соотношениям

$$k_1 = \frac{\mu_0}{n_1 (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_0)^{n_1-1}}; \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_p + \mu_0 \cdot \dot{\gamma}_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n_1} \right) + \frac{\mu_0 \cdot \dot{\gamma}_{\max}}{n_1}. \quad (7)$$

В итоге, для случая, когда возникает необходимость моделирования эффекта “отвердевания”, с учетом (6), (7) получаем, что реологическая модель (1) должна определяться следующим набором из семи независимых параметров: τ_p , μ_0 , $\dot{\gamma}_0$, $\dot{\gamma}_{\max}$, k_2 , n_1 , n_2 при выполнении ограничений (2).

В последнем случае, когда в точке $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{\max}$ полагаем $\mu_{\max} \rightarrow \infty$, зависимость вязкости от скорости сдвига на модельном уровне имеет здесь разрыв второго рода.

2. Постановка задачи

Рассмотрим одномерное, установившееся, ламинарное течение жидкости в цилиндрическом канале радиуса R за счет перепада давления ΔP на его длине L . Будем считать, что механическое поведение жидкости соответствует реологической модели (1).

Введём цилиндрическую систему координат традиционным образом, сориентировав продольную ось Oz вдоль оси симметрии канала. Тогда распределения скорости u жидкости и давления P в канале должны удовлетворять уравнениям динамики и условию неразрывности потока, представленным в безразмерной форме записи

$$G \cdot \frac{\partial P'}{\partial z'} = \frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial}{\partial r'} (\tau'_{rz} \cdot r'); \quad \frac{\partial P'}{\partial r'} = 0; \quad \frac{\partial u'}{\partial z'} = 0; \quad (8)$$

$$\tau'_{rz} = \begin{cases} \tau'^{(0)}(\dot{\gamma}'^{(0)}) & \begin{cases} -\tau'_p + k'_0 \cdot \dot{\gamma}'^{(0)}; & -\dot{\gamma}'^{(0)} \leq \dot{\gamma}'_0; \\ \tau'^{(1)}(\dot{\gamma}'^{(1)}) & \begin{cases} -\tau'_1 + k'_1 \cdot (\dot{\gamma}'_1 + \dot{\gamma}'^{(1)})^{n_1}; & \dot{\gamma}'_0 \leq -\dot{\gamma}'^{(1)} \leq 1; \\ \tau'^{(2)}(\dot{\gamma}'^{(2)}) & \begin{cases} -\tau'_2 - k'_2 \cdot (-\dot{\gamma}'^{(2)} - \dot{\gamma}'_2)^{n_2}; & -\dot{\gamma}'^{(2)} \geq 1; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

$$\dot{\gamma}'^{(p)} = 0; \quad \dot{\gamma}'^{(i)} = \frac{du'^{(i)}}{dr'} < 0; \quad \tau'_{rz}{}^{(i)} < 0; \quad i = 0, 1, 2. \quad (10)$$

В последних выражениях и далее безразмерные координаты, параметры и функции отмечены верхним штрихом и определены посредством соотношений

$$r' = \frac{r}{R}; \quad \tau'_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{\tau_0}; \quad \dot{\gamma}' = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{\max}}; \quad P' = \frac{P}{\tau_0}; \quad z' = \frac{z}{L}; \quad u' = \frac{u}{v_s};$$

$$\dot{\gamma}'_0 = \frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_{\max}}; \quad \dot{\gamma}'_1 = \frac{\dot{\gamma}_1}{\dot{\gamma}_{\max}}; \quad \dot{\gamma}'_2 = \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_{\max}}; \quad \tau'_p = \frac{\tau_p}{\tau_0}; \quad \tau'_1 = \frac{\tau_1}{\tau_0}; \quad \tau'_2 = \frac{\tau_2}{\tau_0};$$

$$k'_0 = \frac{\mu_0 \cdot \dot{\gamma}_{\max}}{\tau_0}; \quad k'_1 = \frac{k_1 \cdot \dot{\gamma}_{\max}^{n_1}}{\tau_0}; \quad k'_2 = \frac{k_2 \cdot \dot{\gamma}_{\max}^{n_2}}{\tau_0}; \quad G = \frac{R}{L};$$

$$\tau_0 = \tau_p + \mu_0 \cdot \dot{\gamma}_0; \quad v_s = R \cdot \dot{\gamma}_{\max};$$

где G – безразмерный геометрический параметр канала; τ_0 – касательное напряжение в жидкости, достигаемое при $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_0$; v_s – значение скорости, принимаемое в качестве масштабного.

Для определенности соответствующие характеристики течения отмечены в (8) – (10) верхними индексами в круглых скобках (p), (0), (1), (2), которые указывают на их принадлежность к соответствующему диапазону изменения скорости сдвига и касательного напряжения.

Поскольку каждому диапазону изменения скорости сдвига соответствует свой конкретный вид функциональной зависимости для касательного напряжения, можно предположить, что в соответствии с этим обстоятельством вся область течения внутри канала должна быть разделена на отдельные зоны.

Согласно отдельным вариантам механического поведения, заложенного в реологической модели (1), в наиболее сложном случае в канале могут быть выделены четыре зоны течения: зона пластического течения, зона сдвигового течения с постоянным значением вязкости μ_0 , а также две зоны нелинейно-вязкого течения, в которых жидкость демонстрирует дилатантное и псевдопластическое поведение.

Более конкретно, количество зон, реализуемых в канале, должно определяться наибольшим значением модуля скорости сдвига, которое достигается на стенке канала и, в свою очередь, существенным образом зависит от перепада давления на длине канала.

Принимая во внимание осевую симметрию задачи, можно предположить, что границы между отдельными зонами течения представляют собой цилиндрические поверхности, радиусы которых не известны заранее.

Естественно, что в ходе решения задачи о течении жидкости, подчиняющейся реологической модели (1), должны быть учтены условия сопряжения для полей скорости и касательного напряжения на таких границах раздела отдельных зон течения.

Говоря о распределении давления отметим, что из (8) с учетом постановки традиционных граничных условий оно определяется известным соотношением вида

$$P'(z') = P'_0 + \Delta P' \cdot z'; \quad (11)$$

где P'_0 – безразмерное значение давление на входе в канал.

3. Определение поля скоростей для течения нелинейной вязкопластической жидкости

Принимая во внимание характер реологической модели (1), априори, можно в зависимости от значения перепада давления ожидать реализацию трех различных схем течения. Рассмотрим последовательно каждую из этих схем течения.

3.1. Первая схема течения

Прежде всего, заметим, что при выполнении условия

$$\Delta P' \leq \Delta P'_{\min} = \frac{2 \cdot \tau'_p}{G}; \quad (12)$$

касательные напряжения в жидкости не достигают уровня предела текучести и течение в канале в таком случае оказывается невозможным.

Пусть $\Delta P' > \Delta P'_{\min}$. При этом будем полагать, что скорость сдвига в канале удовлетворяет условию $-\dot{\gamma}' \leq \dot{\gamma}'_0$. В такой ситуации канале формируются две зоны течения, структура которых схематично представлена на рис. 1.

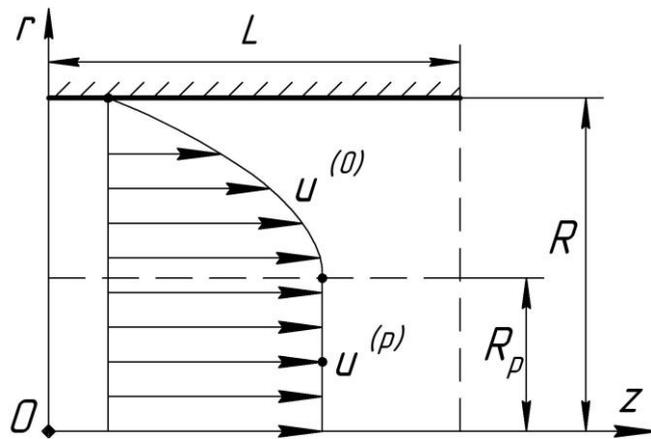


Рис.1. Первая схема течения

Центральную часть канала занимает цилиндрическая зона некоторого, неизвестного заранее радиуса R'_p пластического течения с постоянным значением скорости u'_p , а в диапазоне изменения радиальной координаты $R'_p \leq r' \leq 1$ будет располагаться зона сдвигового течения с постоянным значением вязкости μ_0 . Тогда структурно распределение скорости в поперечном сечении канала будет определяться следующим образом

$$u'(r') = \begin{cases} u'^{(p)}(r'); & 0 \leq r' \leq R'_p; \\ u'^{(0)}(r'); & R'_p \leq r' \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Граничные условия задачи для скорости и касательного напряжения в зоне сдвигового течения в этом случае имеют вид

$$r' = R'_p; \quad \tau'^{(0)} = -\tau'_p; \quad (14)$$

$$r' = 1; \quad u'^{(0)} = 0; \quad \tau'^{(0)} = -\frac{\Delta P' \cdot G}{2};$$

Решая тогда (8) с учетом (11) и удовлетворяя граничным условиям (14), приходим к следующим выражениям, определяющим распределения скорости жидкости по отдельным зонам течения

$$u'^{(0)}(r') = -\frac{\tau'_p}{k'_0}(1-r') + \frac{G \cdot \Delta P'}{4k'_0}(1-(r')^2); \quad (15)$$

$$u'^{(p)} = u'^{(0)}(R'_p).$$

При этом радиус границы раздела между двумя основными зонами течения находится из соотношения

$$R'_p = \frac{2 \cdot \tau'_p}{G \cdot \Delta P'}. \quad (16)$$

Принимая во внимание (13), с учетом (15), (16) приходим к выражению для определения объемного расхода жидкости Q_I , которое в безразмерной форме записи может быть записано следующим образом

$$Q'_I = \frac{Q_I}{\pi \cdot R^2 \cdot v_s} = R_p'^2 \cdot u'^{(p)} + 2 \cdot \int_{R'_p}^1 r' \cdot u'^{(0)}(r') \cdot dr'. \quad (17)$$

Только что рассмотренная схема течения хорошо известна и соответствует течению вязкопластической жидкости Бингама [28].

Эта схема течения должна существовать до тех пор, пока по мере повышения перепада давления будет достигнут некоторый уровень $\Delta P'_1$, при котором модуль скорости сдвига на стенке канала примет граничное значение $|\dot{\gamma}''^{(0)}| = \dot{\gamma}'_0$. Из такого условия приходим к первому критическому значению для перепада давления

$$\Delta P'_1 = \frac{2}{G} (\tau'_p + \dot{\gamma}'_0 \cdot k'_0), \quad (18)$$

при достижении которого завершается первая схема течения.

3.2. Вторая схема течения

Дальнейшее увеличение перепада давления и превышение им первого критического значения ($\Delta P' > \Delta P'_1$) приводит к реализации в канале очередной (второй) схемы с тремя зонами течения: центральная зона пластического течения, зона сдвигового течения с постоянным значением вязкости μ_0 и зона течения, в которой жидкость демонстрирует дилатантное поведение. Структура течения в этом случае схематично представлена на рис. 2.

Вновь формируемая зона нелинейно-вязкого течения будет располагаться у стенки канала. При этом внутри нее модуль скорости сдвига должен удовлетворять условию $\dot{\gamma}'_0 \leq |\dot{\gamma}'^{(1)}| \leq 1$.

Границы разделами между основными зонами течения определяются радиусами R'_p и R'_1 , которые не известны заранее и подлежат определению в ходе решения задачи.

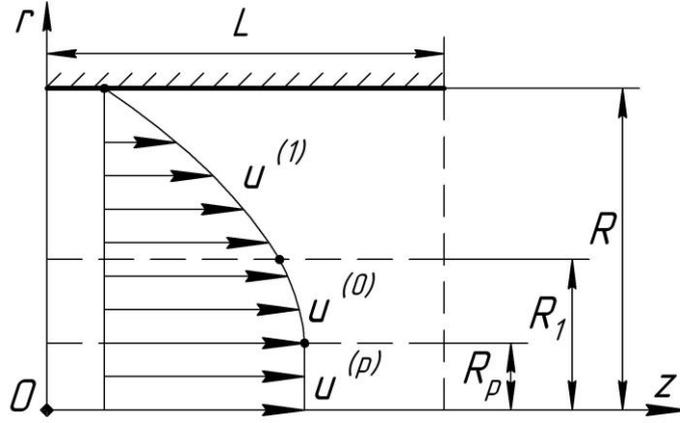


Рис.2. Вторая схема течения

Для такой схемы течения распределение скорости в поперечном сечении канала может быть представлено следующим образом

$$u'(r') = \begin{cases} u'^{(p)}(r'); & 0 \leq r' \leq R'_p; \\ u'^{(0)}(r'); & R'_p \leq r' \leq R'_1; \\ u'^{(1)}(r'); & R'_1 \leq r' \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Запишем граничные условия для касательного напряжения и скорости жидкости в зонах сдвигового вязкого течения

$$\begin{aligned} r' = R'_p; \quad \tau'^{(0)} &= -\tau'_p; \\ r' = R'_1; \quad \dot{\gamma}'^{(0)} = \dot{\gamma}'^{(1)} &= -\dot{\gamma}'_0; \quad u'^{(0)} = u'^{(1)}; \\ r' = 1; \quad u'^{(1)} &= 0; \quad \tau'^{(1)} = -\frac{G \cdot \Delta P'}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Решая тогда (8) с учетом (11) и удовлетворяя граничным условиям (20), приходим к следующим выражениям, определяющим распределения скорости жидкости по отдельным зонам течения

$$u'^{(0)}(r') = \frac{1}{k'_0} \left\{ \tau'_p \cdot (r' - R'_1) - \frac{G \cdot \Delta P'}{4} (r'^2 - R_1'^2) + \left(\frac{G \cdot \Delta P'}{2} \cdot R_1'^2 - R_1' \cdot (\tau_p + k'_0 \cdot \dot{\gamma}'_0) \right) \ln \left(\frac{r'}{R_1'} \right) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\gamma}'_1 \cdot (1 - R'_1) + \frac{2 \cdot k'_1 \cdot n_1}{G \cdot \Delta P' \cdot (n_1 + 1)} \cdot f_1(R'_1); \\
u'^{(1)}(r') &= \dot{\gamma}'_1 \cdot (1 - r') + \frac{2 \cdot k'_1 \cdot n_1}{G \cdot \Delta P' \cdot (n_1 + 1)} \cdot f_1(r'); \\
u'^{(p)} &= u'^{(0)}(R'_p).
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь для краткости записи принято обозначение

$$f_1(r') = \left\{ \left[\frac{1}{k'_1} \cdot \left(\tau'_1 - \frac{G \cdot \Delta P'}{2} \right) \right]^{n_1+1} - \left[\frac{1}{k'_1} \cdot \left(\tau'_1 - \frac{G \cdot \Delta P'}{2} \cdot r' \right) \right]^{n_1+1} \right\}.$$

Радиус границы раздела между двумя зонами сдвигового вязкого течения находится из соотношения

$$R'_1 = \frac{2}{G \cdot \Delta P'} \left[\tau'_1 - k'_1 \cdot (\dot{\gamma}'_1 - \dot{\gamma}'_0)^{n_1} \right]. \tag{22}$$

Что же касается радиуса R'_p , определяющего границу зоны пластического течения, то он с учетом (22) определяется положительным корнем следующего квадратного уравнения

$$R_p'^2 - \frac{2 \cdot \tau'_p}{G \cdot \Delta P'} \cdot R'_p + \left[\frac{2 \cdot R'_1}{G \cdot \Delta P'} \cdot (\tau'_p + k'_0 \cdot \dot{\gamma}'_0)_1 - R_1'^2 \right] = 0, \tag{23}$$

который должен удовлетворять условию $R_p' < R'_1$.

Принимая во внимание (19), с учетом (21) – (23) приходим к выражению для определения объемного расхода жидкости Q_{II} , которое в безразмерной форме записи может быть записано следующим образом

$$Q'_{II} = \frac{Q_{II}}{\pi R^2 v_s} = R_p'^2 \cdot u'^{(p)} + 2 \int_{R'_p}^{R'_1} r' \cdot u'^{(0)}(r') \cdot dr' + 2 \int_{R'_1}^1 r' \cdot u'^{(1)}(r') \cdot dr'. \tag{24}$$

Вторая схема течения должна иметь место до тех пор, когда по мере повышения перепада давления будет достигнут уровень $\Delta P'_2$, при котором модуль скорости сдвига на стенке канала примет граничное значение $|\dot{\gamma}'^{(1)}|=1$. Из такого условия приходим к еще одному критическому значению для перепада давления

$$\Delta P'_2 = \frac{2}{G} \cdot \left[\tau'_1 - k'_1 \cdot (\dot{\gamma}'_1 - 1)^{n_1} \right], \quad (25)$$

при достижении которого завершается вторая схема течения.

3.3. Третья схема течения.

Пусть перепад давления на длине канала удовлетворяет условию $\Delta P' > \Delta P'_2$, что соответствует реализации третьей схемы течения. Такая схема характеризуется наличием уже четырех зон течения: центральная зона пластического течения, зона сдвигового течения с постоянным значением вязкости μ_0 , а также две зоны нелинейно-вязкого течения, в которых жидкость проявляет, соответственно, дилатантное и псевдопластическое поведение. Структура течения жидкости в этом случае схематично представлена на рис. 3.

Отметим, что радиусы R'_p , R'_1 и R'_2 , определяющие границы раздела между основными зонами течения представляют собой неизвестные параметры задачи и должны определяться в ходе ее решения.

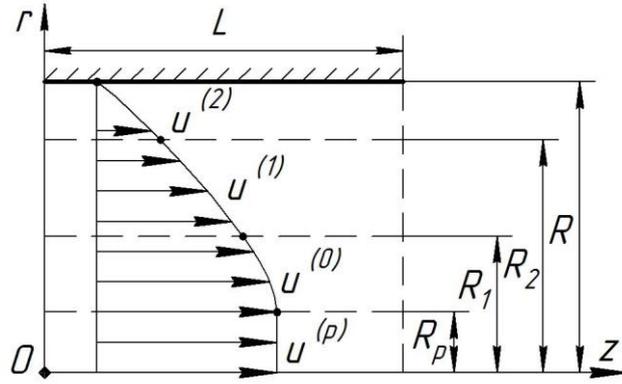


Рис. 3. Третья схема течения

Для третьей схемы течения распределение скорости в поперечном сечении канала может быть представлено следующим образом

$$u'(r') = \begin{cases} u'^{(p)}(r'); & 0 \leq r' \leq R'_p; \\ u'^{(0)}(r'); & R'_p \leq r' \leq R'_1; \\ u'^{(1)}(r'); & R'_1 \leq r' \leq R'_2; \\ u'^{(2)}(r'); & R'_2 \leq r' \leq 1. \end{cases} \quad (26)$$

В данном случае для касательного напряжения и скорости жидкости в зонах сдвигового вязкого течения должны быть поставлены следующие граничные условия

$$\begin{aligned} r' = R'_p; \quad \tau'^{(0)} &= -\tau'_p; \\ r' = R'_1; \quad \dot{\gamma}'^{(0)} = \dot{\gamma}'^{(1)} &= -\dot{\gamma}'_0; \quad u'^{(0)} = u'^{(1)}; \\ r' = R'_2; \quad \dot{\gamma}'^{(1)} = \dot{\gamma}'^{(2)} &= -1; \quad u'^{(1)} = u'^{(2)}; \end{aligned} \quad (27)$$

$$r' = 1; \quad u'^{(1)} = 0; \quad \tau'^{(1)} = -\frac{G \cdot \Delta P'}{2};$$

Интегрируя первое уравнение из (8) с учетом (9), (10) и граничных условий (27) для скорости сдвига, находим параметры задачи R'_2 , R'_1 и R'_p .

Параметр R'_2 , представляющий собой радиус границы раздела двух крайних зон нелинейно-вязкого течения жидкости, соответственно, с дилатантным и псевдопластическим поведением, определяется из выражения

$$R'_2 = \frac{2}{G \cdot \Delta P'} \left[\tau'_2 + k'_2 \cdot (1 - \dot{\gamma}'_2)^{n_2} \right]. \quad (28)$$

Радиус R'_1 границы раздела между зоной, в которой вязкость жидкости принимает постоянное значение, и зоной, где жидкость демонстрирует дилатантное поведение, определяется положительным корнем следующего квадратного уравнения

$$R_1'^2 + \frac{2}{G \cdot \Delta P'} \cdot \left[-\tau'_1 + k'_1 \cdot (\dot{\gamma}'_1 - \dot{\gamma}'_0)^{n_1} \right] \cdot R'_1 - \frac{2 \cdot C_1}{G \cdot \Delta P'} = 0, \quad (29)$$

который должен удовлетворять условию $R'_1 < R'_2$.

В выражении (29) для краткости записи принято обозначение

$$C_1 = \frac{G \cdot \Delta P'}{2} \cdot R_2'^2 + R_2' \cdot \left[-\tau'_1 + k'_1 \cdot (\dot{\gamma}'_1 - 1)^{n_1} \right]. \quad (30)$$

И, наконец, радиус зоны пластического течения определяется с учетом (28) – (30) положительным корнем еще одного квадратного уравнения, которое по форме записи совпадает с (23).

После повторного интегрирования первого уравнения из (8) с учетом (11) и, принимая во внимание граничные условия (27), получаем следующие выражения для распределения скорости жидкости по отдельным зонам течения

$$u^{(2)}(r') = \dot{\gamma}'_2 \cdot (1 - r') + \frac{2 \cdot k'_2 \cdot n_2}{G \cdot \Delta P' \cdot (n_2 + 1)} \cdot f_2(r');$$

$$u'^{(1)}(r') = \gamma'_1 \cdot (R'_2 - r') - \int_{r'}^{R'_2} f_3(r') \cdot dr' + u'^{(2)}(R'_2); \quad (31)$$

$$u'^{(0)}(r') = \frac{1}{k'_0} \left\{ \frac{G \cdot \Delta P'}{4} (R'^2_1 - r'^2) - \tau'_p \cdot (R'_1 - r') + \left(\frac{G \cdot \Delta P'}{2} R'^2_p - \tau'_p \cdot R'_p \right) \ln \left(\frac{r'}{R'_1} \right) \right\} + u'^{(1)}(R'_1);$$

$$u'^{(p)} = u'^{(0)}(R'_p).$$

Для краткости записи в последних выражениях, определяющих распределения скоростей по зонам течения, приняты обозначения

$$f_2(r') = \left\{ \left[\frac{1}{k'_2} \cdot \left(-\tau'_2 + \frac{G \cdot \Delta P'}{2} \right) \right]^{\frac{n_2+1}{n_2}} - \left[\frac{1}{k'_2} \cdot \left(-\tau'_2 + \frac{G \cdot \Delta P'}{2} \cdot r' \right) \right]^{\frac{n_2+1}{n_2}} \right\};$$

$$f_3(r') = \left\{ \frac{1}{k'_1} \cdot \left(\tau'_1 - \frac{G \cdot \Delta P'}{2} \cdot r' + \frac{C_1}{r'} \right) \right\}^{\frac{1}{n_1}}.$$

Принимая во внимание (26), с учетом (31) приходим к выражению для определения объемного расхода жидкости Q_{III} при реализации третьей схемы течения, которое в безразмерной форме записи может быть записано следующим образом

$$Q'_{III} = \frac{Q_{III}}{\pi R^2 v_s} = R'^2_p \cdot u'^{(p)} + 2 \int_{R'_p}^{R'_1} r' \cdot u'^{(0)}(r') dr' + 2 \int_{R'_1}^{R'_2} r' \cdot u'^{(1)}(r') dr' + 2 \int_{R'_2}^1 r' \cdot u'^{(2)}(r') dr'. \quad (32)$$

В качестве примера на рис. 4 представлены профили скорости в поперечном сечении канала, построенные для различных значений перепада давления на его длине. При этом, на каждом графике соответствующими символами указаны положения границ раздела основных зон течения, рассчитанные с учетом соотношений (22), (28) – (30). Данные зависимости построены с привлечением (31)

для следующего набора исходных параметров задачи: $G = 0,05$; $\tau_p = 90 \text{ Па}$; $\mu_0 = 0,25 \text{ Па} \cdot \text{с}$; $\mu_{\max} = 3,8 \text{ Па} \cdot \text{с}$; $\dot{\gamma}_0 = 500 \text{ с}^{-1}$; $\dot{\gamma}_{\max} = 800 \text{ с}^{-1}$; $\dot{\gamma}_2 = 400 \text{ с}^{-1}$; $n_1 = 0,15$; $n_2 = 0,4$.

Такие параметры реологической модели по своей величине близки к соответствующим значениям параметров суспензий на основе полиэтиленгликоля, исследованных в работе [8].

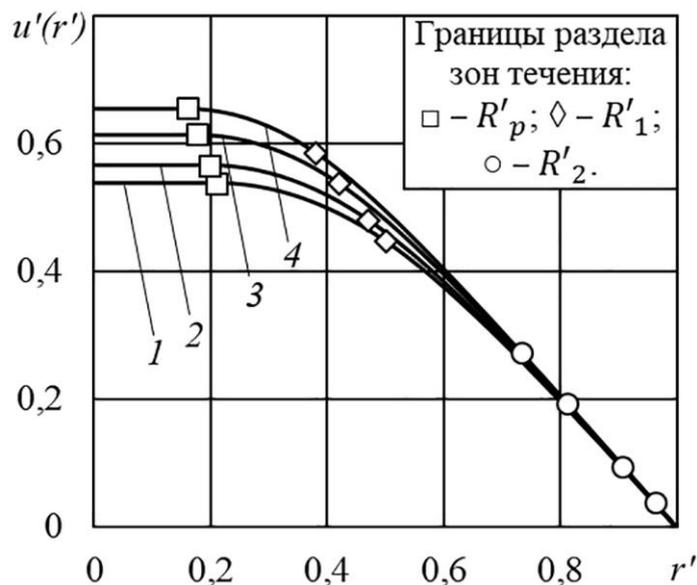


Рис. 4. Распределения скорости в канале для третьей схемы течения при следующих безразмерных значениях перепада давления: $\Delta P' = 80$ (1); 85 (2); 95 (3); 105 (4).

Из рассмотрения полученных зависимостей следует, что по мере повышения перепада давления, как и следовало ожидать, зона пластического течения сокращается, в то время, как четвертая зона в окрестности стенки канала - расширяется.

4. Анализ влияния основных параметров на объемный расход

С точки зрения технических приложений применительно к расчету гидравлических систем, определенный интерес представляет зависимость объемного расхода Q жидкости от перепада давления ΔP на длине канала. Принимая во внимание характер механического поведения жидкости с реологической моделью (1), такая зависимость с учетом (12), (17), (18), (24), (25), (32) может быть в безразмерной форме записи представлена следующим образом

$$Q'(\Delta P') = \begin{cases} 0; & 0 \leq \Delta P' \leq \Delta P'_{\min}; \\ Q'_I(\Delta P'); & \Delta P'_0 \leq \Delta P' \leq \Delta P'_1; \\ Q'_{II}(\Delta P'); & \Delta P'_1 \leq \Delta P' \leq \Delta P'_2; \\ Q'_{III}(\Delta P'); & \Delta P' \geq \Delta P'_2. \end{cases} \quad (33)$$

В качестве иллюстрации на рис.5-а в безразмерном виде приводятся зависимости объемного расхода жидкости от перепада давления на длине канале, полученные с помощью (33) для того же набора числовых значений исходных параметров, которые были приняты при построении профилей скорости на рис. 4, за исключением параметра μ_{\max} . Значения этого параметра варьировались в пределах от $\mu_{\max} = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$ до $\mu_{\max} = 12 \text{ Па} \cdot \text{с}$, что в итоге было представлено с помощью введенного выше безразмерного параметра λ . Фрагмент этих же зависимостей в увеличенном масштабе в окрестности значения $\Delta P'_2$ для перепада давления представлен на рис. 5-б.

Анализируя полученные графики, можно видеть, что при сравнительно низких значениях перепада давления, когда в канале реализуются лишь первая или начальная стадия второй схемы течения, изменение параметра μ_{\max} практически не

влияет на характер зависимости объемного расхода от $\Delta P'$. Наиболее заметные изменения в характере зависимости $Q'(\Delta P')$ при варьировании максимального значения вязкости возникают при превышении перепадом давления уровня $\Delta P'_2$, когда в канале реализуется третья схема течения.

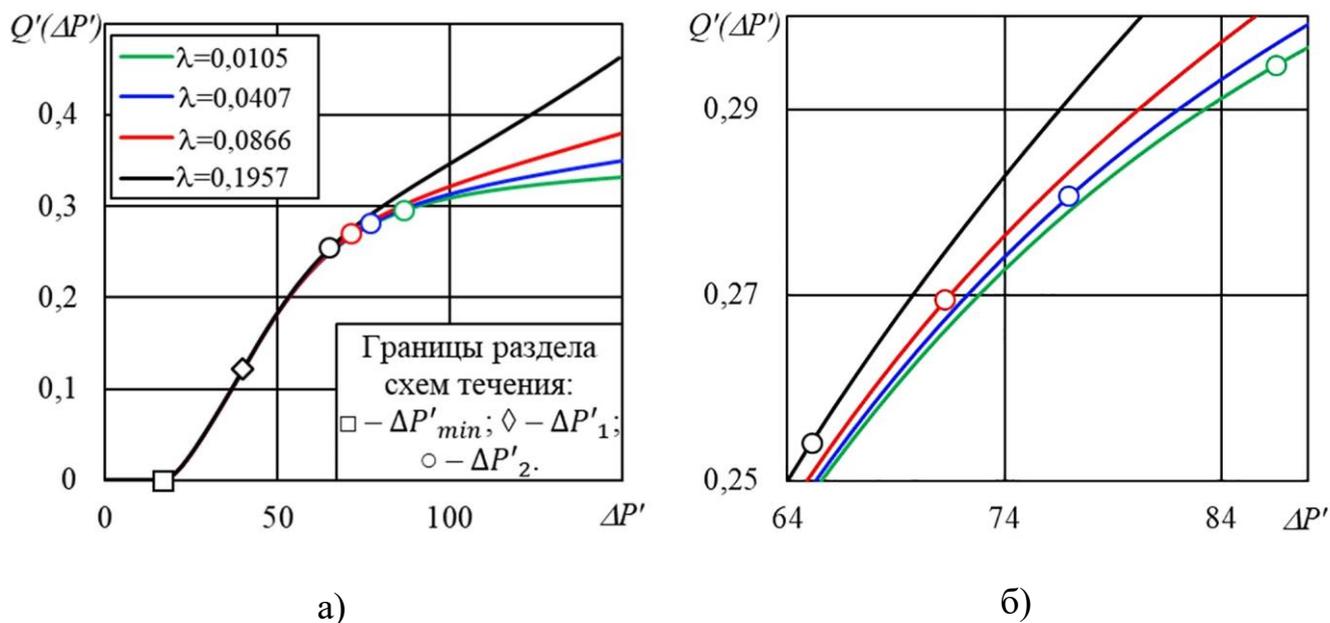


Рис.5. Влияние параметра λ на характер зависимости объемного расхода от перепада давления на длине канала.

При этом, увеличение значений μ_{max} , что соответствует снижению значений безразмерного параметра λ , приводит к вполне ожидаемому результату возрастания объемного расхода жидкости через канал.

Заключение

Рассмотрена реологическая модель нелинейной вязкопластической жидкости комбинированного типа, которая предполагают немонотонное изменение

касательного напряжения от скорости сдвига.

Такая модель позволяет описывать на различных диапазонах изменения скорости сдвига три различных варианта механического поведения жидкости: течение с постоянным значением вязкости, а также дилатантное и псевдопластическое поведение. Кроме этого, реологическая модель предполагает также и возможность учета проявления эффекта “отвердевания” рабочей среды, который заключается в резком возрастании вязкости при приближении скорости сдвига к некоторому критическому значению скорости сдвига.

На основе такой модели получено решение задачи об установившемся течении в цилиндрическом канале и показано, что в наиболее общем случае область течения должна быть разделена на четыре зоны, в каждой из которых реализуются различные варианты механического поведения, заложенного в реологической модели. При этом, наряду с зоной пластического течения, необходимо рассматривать смежную с ней зону течения жидкости Бингама с постоянным значением вязкости, а также еще две зоны нелинейно-вязкого, соответственно, дилатантного и псевдопластического поведения. Получено выражение для расчета зависимости объемного расхода жидкости от перепада давления.

Предложенная методика разбиения исходной области течения на отдельные зоны с различным характером реологического поведения может быть рекомендована для решения и других задач механики жидкости.

Список источников

1. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=53466>
2. Винников В.В., Ревизников Д.Л. Неявный метод погруженной границы с фиктивными ячейками для решения задач о течении вязкой несжимаемой жидкости в сложных областях // Труды МАИ. 2004. № 17. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34203>
3. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 311 с.
4. Литвинов В.Г. Движение нелинейно вязкой жидкости. – М.: Наука, 1982. – 376 с.
5. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. – М.: Химия, 1977. – 439 с.
6. Лебедев Р.В., Лифшиц С.А. Стационарное течение реологически сложной жидкости в бесконечном щелевом канале // Труды МАИ. 2011. № 44. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=25016>
7. Лебедев Р.В., Лифшиц С.А. Исследование критических режимов течения обобщенно-вязких сред в трубчатом реакторе // Труды МАИ. 2011. № 46. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=26013>
8. Wetzel E.D., Lee Y.S., Egres R.G., Kirkwood K.M., Kirkwood J.E., Wagner N.J. The Effect of Rheological Parameters on the Ballistic Properties of Shear Thickening Fluid (STF) – Kevlar Composites // AIP Conference Proceedings, 2004, vol. 712, pp. 288-293. DOI: [10.1063/1.1766538](https://doi.org/10.1063/1.1766538)

9. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition // Journal of Rheology, 2005, vol. 49 (3), pp. 719-746. DOI: [10.1122/1.1895800](https://doi.org/10.1122/1.1895800)
10. Bischoff White E.E., Chellamuthu M., Rothstein J.P. Extensional rheology of shear-thickening cornstarch and water suspension // Rheologica Acta, 2010, vol. 49(2), pp. 119-129. DOI: [10.1007/s00397-009-0415-3](https://doi.org/10.1007/s00397-009-0415-3)
11. Biao Yang, Sheng Wang, Guo Zhi Xu, Fei Xin Preparation of SiO₂/PEG Shear Thickening System by Centrifugal Dispersion // Advanced Materials Research, 2012, vol. 560-561, pp. 586 – 590. DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMR.560-561.586](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.560-561.586)
12. Brown E., Jaeger H.M. The role of dilation and confining stress in shear thickening of dense suspensions // Journal of Rheology, 2012, vol. 56, pp. 875-923. DOI: [10.48550/arXiv.1010.4921](https://doi.org/10.48550/arXiv.1010.4921)
13. Singh A., Mari R., Denn M.M., Morris J.F. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions // Journal of Rheology, 2018, vol. 62, pp. 457-468. DOI: [10.1122/1.4999237](https://doi.org/10.1122/1.4999237)
14. Duan Y., Keefe M., Bogetti T., Cheeseman B. Modeling friction effects on the ballistic impact behavior of a single-ply high-strength // International Journal of Impact Engineering, 2005, vol. 31(8), pp. 996-1012. DOI: [10.1016/j.ijimpeng.2004.06.008](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2004.06.008)
15. Kalman D.P., Schein J.B., Houghton J.M., Laufer C.H.N., Wetzel E.D., Wagner N.J. Polymer dispersion based shear thickening fluid-fabrics for protective applications // Proceedings of SAMPE, (Baltimore, MD), 2007, pp. 1-9.
16. Hasanzadeh M., Mottaghitalab V. The Role of Shear-Thickening Fluids (STFs) in Ballistic and Stab-Resistance Improvement of Flexible Armor // Journal of Materials

Engineering and Performance, 2014, vol. 23 (4), pp. 1182-1196. DOI: [10.1007/s11665-014-0870-6](https://doi.org/10.1007/s11665-014-0870-6)

17. Nilakantan G., Merrill R.L., Keefe M., Gillespie Jr. E.D., Wetzel E.D. Experimental investigation of the role of frictional yarn pull-out and windowing on the probabilistic impact response of Kevlar fabrics // Composites Part B: Engineering, 2015, vol. 68, pp. 215-229. DOI: [10.1016/j.compositesb.2014.08.033](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.08.033)

18. Khodadadi A., Liaghat Gh., Vahid S., Sabet A.R., Hadavinia H. Ballistic performance of Kevlar fabric impregnated with nanosilica/PEG shear thickening fluid // Composites Part B: Engineering, 2019, vol. 162, pp. 643-652. DOI: [10.1016/j.compositesb.2018.12.121](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.121)

19. Ting-Ting Li, Wenna Dai, Liwei Wu, Hao-Kai Peng, Xiayun Zhang, Bing-Chiuan Shiu, Jia-Horng Lin, Ching-Wen Low. Effects of STF and Fiber Characteristics on Quasi-Static Stab Resistant Properties of Shear Thickening Fluid (STF)-Impregnated UHMWPE/Kevlar Composite Fabrics // Fibers and Polymers, 2019, vol. 20(2), pp. 328-336. DOI: [10.1007/s12221-019-8446-6](https://doi.org/10.1007/s12221-019-8446-6)

20. Анистратенко В.А., Кошечая В.Н., Валовой Б.Н. Исследование реологических свойств фильтрационного осадка как объекта транспортирования // Известия вузов. Пищевая технология. 1992. № 1. С. 54-57.

21. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernandez F.J. Numerical simulation in steady flow of non-Newtonian fluids in pipes with circular cross-section // Numerical Simulations – Examples and Applications in Computational Fluid Dynamics, 2010, pp. 3-23. DOI: [10.5772/12900](https://doi.org/10.5772/12900)

22. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernandez F.J. Sevilla A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2011, vol. 166(5), pp. 321-325. DOI: [10.1016/j.jnnfm.2011.01.001](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2011.01.001)
23. Колодежнов В.Н. Моделирование вращательного течения между коаксиальными цилиндрами для жидкости с эффектом отвердевания // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 3. С. 3-14.
24. Vázquez-Quesada A., Wagner N. J., Ellero M. Planar channel flow of a discontinuous shear-thickening model fluid: Theory and simulation // Physics of Fluids, 2017, vol. 29(10), pp. 103-104. DOI: [10.1063/1.4997053](https://doi.org/10.1063/1.4997053)
25. Скульский О.И. Реометрические течения концентрированных суспензий твердых частиц // Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13. № 3. С. 269-278. DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.3.21](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.21)
26. Колодежнов В.Н., Веретенников А.С. Моделирование диссипативного разогрева в плоском канале вязкопластической среды, реологическая модель которой учитывает проявление эффекта “отвердевания” // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и Технологии. 2020. № 3. С. 32-44.
27. Колодежнов В.Н., Веретенников А.С. Математическое моделирование конвективного теплопереноса для течения в плоском канале вязкопластической жидкости, реологическая модель которой учитывает проявление эффекта “отвердевания” // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 10. С. 53-58. DOI: [10.17513/snt.38854](https://doi.org/10.17513/snt.38854)
28. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.

References

1. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53466>
2. Vinnikov V.V., Reviznikov D.L. *Trudy MAI*, 2004, no. 17. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34203>
3. Astarita Dzh., Marruchchi Dzh. *Osnovy gidromekhaniki nen'yutonovskikh zhidkosti* (Principles of non-Newtonian Fluid Mechanics), Moscow, Mir, 1978, 311 p.
4. Litvinov V.G. *Dvizhenie nelineino vyazkoi zhidkosti* (Motion of nonlinear viscous fluid), Moscow, Nauka, 1982, 376 p.
5. Vinogradov G.V., Malkin A.Ya. *Reologiya polimerov* (Polymer Rheology), Moscow, Khimiya, 1977, 439 p.
6. Lebedev R.V., Lifshits S.A. *Trudy MAI*, 2011, no. 44. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=25016>
7. Lebedev R.V., Lifshits S.A. *Trudy MAI*, 2011, no. 46. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=26013>
8. Wetzel E.D., Lee Y.S., Egres R.G., Kirkwood K.M., Kirkwood J.E., Wagner N.J. The Effect of Rheological Parameters on the Ballistic Properties of Shear Thickening Fluid (STF) – Kevlar Composites, *AIP Conference Proceedings*, 2004, vol. 712, pp. 288-293. DOI: [10.1063/1.1766538](https://doi.org/10.1063/1.1766538)
9. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition, *Journal of Rheology*, 2005, vol. 49 (3), pp. 719-746. DOI: [10.1122/1.1895800](https://doi.org/10.1122/1.1895800)

10. Bischoff White E.E., Chellamuthu M., Rothstein J.P. Extensional rheology of shear-thickening cornstarch and water suspension, *Rheologica Acta*, 2010, vol. 49(2), pp. 119-129. DOI: [10.1007/s00397-009-0415-3](https://doi.org/10.1007/s00397-009-0415-3)
11. Biao Yang, Sheng Wang, Guo Zhi Xu, Fei Xin Preparation of SiO₂/PEG Shear Thickening System by Centrifugal Dispersion, *Advanced Materials Research*, 2012, vol. 560-561, pp. 586 – 590. DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMR.560-561.586](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.560-561.586)
12. Brown E., Jaeger H.M. The role of dilation and confining stress in shear thickening of dense suspensions, *Journal of Rheology*, 2012, vol. 56, pp. 875-923. DOI: [10.48550/arXiv.1010.4921](https://doi.org/10.48550/arXiv.1010.4921)
13. Singh A., Mari R., Denn M.M., Morris J.F. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions, *Journal of Rheology*, 2018, vol. 62, pp. 457-468. DOI: [10.1122/1.4999237](https://doi.org/10.1122/1.4999237)
14. Duan Y., Keefe M., Bogetti T., Cheeseman B. Modeling friction effects on the ballistic impact behavior of a single-ply high-strength, *International Journal of Impact Engineering*, 2005, vol. 31(8), pp. 996-1012. DOI: [10.1016/j.ijimpeng.2004.06.008](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2004.06.008)
15. Kalman D.P., Schein J.B., Houghton J.M., Laufer C.H.N., Wetzel E.D., Wagner N.J. Polymer dispersion based shear thickening fluid-fabrics for protective applications, *Proceedings of SAMPE*, (Baltimore, MD), 2007, pp. 1-9.
16. Hasanzadeh M., Mottaghitalab V. The Role of Shear-Thickening Fluids (STFs) in Ballistic and Stab-Resistance Improvement of Flexible Armor, *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2014, vol. 23 (4), pp. 1182-1196. DOI: [10.1007/s11665-014-0870-6](https://doi.org/10.1007/s11665-014-0870-6)

17. Nilakantan G., Merrill R.L., Keefe M., Gillespie Jr. E.D., Wetzel E.D. Experimental investigation of the role of frictional yarn pull-out and windowing on the probabilistic impact response of Kevlar fabrics, *Composites Part B: Engineering*, 2015, vol. 68, pp. 215-229. DOI: [10.1016/j.compositesb.2014.08.033](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.08.033)
18. Khodadadi A., Liaghat Gh., Vahid S., Sabet A.R., Hadavinia H. Ballistic performance of Kevlar fabric impregnated with nanosilica/PEG shear thickening fluid, *Composites Part B: Engineering*, 2019, vol. 162, pp. 643-652. DOI: [10.1016/j.compositesb.2018.12.121](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.121)
19. Ting-Ting Li, Wenna Dai, Liwei Wu, Hao-Kai Peng, Xiayun Zhang, Bing-Chiuan Shiu, Jia-Horng Lin, Ching-Wen Low. Effects of STF and Fiber Characteristics on Quasi-Static Stab Resistant Properties of Shear Thickening Fluid (STF)-Impregnated UHMWPE/Kevlar Composite Fabrics, *Fibers and Polymers*, 2019, vol. 20(2), pp. 328-336. DOI: [10.1007/s12221-019-8446-6](https://doi.org/10.1007/s12221-019-8446-6)
20. Anistratenko V.A., Koshevaya V.N., Valovoi B.N. *Izvestiya vuzov. Pishchevaya tekhnologiya*, 1992, no. 1, pp. 54-57.
21. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernandez F.J. Numerical simulation in steady flow of non-Newtonian fluids in pipes with circular cross-section, *Numerical Simulations – Examples and Applications in Computational Fluid Dynamics*, 2010, pp. 3-23. DOI: [10.5772/12900](https://doi.org/10.5772/12900)
22. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernandez F.J. Sevilla A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, vol. 166(5), pp. 321-325. DOI: [10.1016/j.jnnfm.2011.01.001](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2011.01.001)
23. Kolodezhnov V.N. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2014, no. 3, pp. 3-14.

24. Vázquez-Quesada A., Wagner N. J., Ellero M. Planar channel flow of a discontinuous shear-thickening model fluid: Theory and simulation, *Physics of Fluids*, 2017, vol. 29(10), pp. 103-104. DOI: [10.1063/1.4997053](https://doi.org/10.1063/1.4997053)
25. Skul'skii O.I. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 269-278. DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.3.21](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.21)
26. Kolodezhnov V.N., Veretennikov A.S. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i Tekhnologii*, 2020, no. 3, pp. 32-44.
27. Kolodezhnov V.N., Veretennikov A.S. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 2021, no. 10, pp. 53-58. DOI: [10.17513/snt.38854](https://doi.org/10.17513/snt.38854)
28. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* (Fluid Mechanics), Moscow, Drofa, 2003, 840 p.

Статья поступила в редакцию 12.07.2022

Статья после доработки 14.07.2022

Одобрена после рецензирования 25.07.2022

Принята к публикации 25.08.2022

The article was submitted on 12.07.2022; approved after reviewing on 25.2022; accepted for publication on 25.08.2022