

ЛЕ ЧУНГ ХИЕУ

**ТРЕХМЕРНАЯ ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ**

01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московского авиационного института (национального исследовательского университета)».

Научный руководитель: Доктор технических наук, профессор,
Фирсанов Валерий Васильевич

Официальные оппоненты: **Зверяев Евгений Михайлович,**
доктор технических наук, профессор, Институт
прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, в.н.с.

Иванов Вячеслав Николаевич,
доктор технических наук, профессор,
Российский университет дружбы народов, профессор.

Ведущая организация: **Институт прикладной механики РАН**

Защита диссертации состоится «21» декабря 2012 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВПО «Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете)» по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно - технической библиотеке ФГБОУ ВПО «Московского авиационного института (национального исследовательского университета)».

Автореферат разослан «20» ноября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Федотенков Г.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации

При расчете НДС оболочечных конструкций вблизи зон искажения напряженного состояния классическая теория оболочек типа Кирхгофа – Лява не дает удовлетворительного совпадения с практикой в силу существенной трехмерности НДС. Поэтому для описания объемного НДС необходимо построить уточненные теории оболочек, базирующиеся на трехмерных уравнениях теории упругости.

Учет трехмерности НДС дает возможность более точно определить характер НДС оболочечных конструкций, особенно в зонах крепления и действия локальных нагрузок, что позволяет рациональным образом распределить конструкционный материал в указанных областях, и тем самым улучшить показатель весового совершенства перспективной техники.

Поэтому разработка методов прогнозирования НДС оболочек, уточняющих результаты классической теории и применяемых на этапах проектирования перспективной авиационной и ракетно – космической техники, а также изделий машиностроения и строительных сооружений, представляет собой **актуальную проблему**.

Целью диссертации является построение математических моделей определения НДС цилиндрических оболочек переменной толщины, в том числе круговой цилиндрической оболочки, на основе уточненной по отношению к классическим теориям Кирхгофа – Лява и Тимошенко – Рейсснера теории; исследование НДС круговой цилиндрической оболочки постоянной и переменной толщины с типовыми краевыми условиями при действии локальных и распределенных нагрузок различной изменчивости.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Впервые построены двумерные нелинейные уравнения и граничные условия для определения НДС цилиндрической оболочки переменной в продольном и окружном направлениях толщины с использованием разложения компонентов НДС по полиномиальным рядам, зависящим от нормальной координаты. С помощью вариационного принципа Лагранжа трехмерная проблема приведена к двумерной с согласованным количеством дифференциальных уравнений и краевых условий;

2. Для круговых цилиндрических оболочек замкнутого и открытого поперечных сечений за счет повышения порядка полиномов по нормальной координате, аппроксимирующих компоненты НДС, впервые получены системы дифференциальных уравнений в перемещениях и сформулированы граничные условия для основных случаев крепления оболочки;

3. Доказано, что по отношению к классической теории оболочек уточненная теория дает возможность получить большие и сверхбольшие корни характеристических уравнений, которые соответствуют быстро затухающим от линии искажения НДС;

4. Доказано, что дополнительные НДС типа «погранслой», возникающие в зонах искажения бывают двух типов, отличающихся друг от друга характером затухания, а также величинами соответствующих компонентов НДС;

5. Показано, что вблизи зон искажения компоненты напряженного состояния, полученные по уточненной теории, существенно отличаются от соответствующих значений, определенных по классической теории, не только в части поперечных нормальных и касательных напряжений, но и в части тангенциальных напряжений. Например, для основных нормальных напряжений дополнительные добавки могут достигать 60%, поперечные нормальные и касательные напряжения получаются одного порядка с продольными нормальными напряжениями.

Достоверность и обоснованность научных положений и результатов обеспечивается корректным использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела, применением для решения краевых задач строгих математических методов, а также многочисленными сравнениями результатов расчета с известными теоретическими данными, подтверждающими их хорошее согласование для ряда конкретных задач.

Практическую ценность диссертационной работы составляют

1. Предложенные в работе математические модели, методы и алгоритмы расчета, позволяют существенно уточнить НДС оболочечных конструкций в зонах искажения напряженного состояния;

2. В проведении качественного и количественного анализа влияния вида нагружения, геометрических параметров цилиндрической оболочки на ее НДС;

3. В доказательстве наличия в тонких и менее тонких оболочках поперечных нормальных и касательных напряжений, соизмеримых с максимальными значениями основных нормальных напряжений и существенно влияющих на оценку прочности оболочек из изотропных и композиционных материалов;

4. Результаты, полученные на основе аналитических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования в методиках инженерных расчетов и испытаний на прочность типовых авиационных и ракетно – космических конструкций, их соединений, а также в первую очередь, непрерывных соединений типа фланцевых, сварных, клеевых;

5. Полученные в диссертации результаты позволяют разработать рекомендации и справочные материалы для процесса проектирования и оценки прочности машиностроительных конструкций и строительных сооружений.

Апробация работы и публикации

Результаты диссертационной работы докладывались на

– XVIII-м международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Ярополец. Московская обл., 2012 г.;

– Научно – практической конференции студентов и молодых ученых МАИ «Инновация в авиации и космонавтике - 2012». Москва, МАИ, 2012 г.;

– V-й международной научно-практической конференции «Инженерные системы - 2012». Москва, РУДН, 2012 г.

Работа в целом обсуждалась на заседании кафедры № 906 Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и научном семинаре им. А. Г. Горшкова «Проблемы механики деформируемого твердого тела и динамики машин».

Основные результаты диссертации опубликованы в 8-и печатных работах, в том числе в 4-х статьях из Перечня, рекомендованного ВАК РФ.

Объем и структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы, 5 приложений. Работа содержит 190 страниц, 74 рисунка, 2 таблицы. Список литературы содержит 125 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, представлены объект и предмет научных исследований; сформулированы цель и задачи исследования; определена научная новизна и практическая ценность полученных автором результатов; приведены основные положения, выносимые на защиту; дано краткое содержание работы по главам.

В первой главе приведен обзор литературы по тематике диссертации; дана постановка задачи исследования; в нелинейной постановке получены двумерные уравнения уточненной теории цилиндрических оболочек переменной толщины. Сформулированы граничные условия для типовых случаев крепления оболочки.

Фундаментальные исследования по теории оболочек принадлежат С.А. Амбарцумяну, В.В. Болотину, В.З. Власову, А.С. Вольмиру, К.З. Галимову, Б.Г. Галеркину, А.Л. Гольденвейзеру, А.И. Лурье, Х.М. Муштари, В.В. Новожилову, П.Ф. Папковичу, Ю.Н. Работнову, Э. Рейсснеру, С.П. Тимошенко и др.

Применение в различных отраслях техники композиционных материалов, а также разработка новых методов расчета оболочечных конструкций из неоднородных материалов показали неправомерность, в той или иной степени, использования классической теории для этих материалов. Поэтому основные усилия исследователей были направлены на усовершенствование теорий типа Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера. В данном направлении развития теории оболочек нужно отметить работы И.Н. Векуа, Н.А. Кильчевского, Э.И. Григолюка, В.В. Васильева, С.А. Лурье, Б.В. Нерубайло, В.В. Пикуля, В.В. Фирсанова, и др.

Одно из направлений развития теории оболочек, в которых учет поперечных деформаций (ими в классической теории пренебрегают) находится в полном соответствии с локальными уравнениями равновесия и сплошности материала, развито в работах В.В. Васильева и С.А. Лурье. В этих работах решена задача сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и пологих оболочек.

Для развития данного направления в теории оболочек можно поставить следующие задачи:

– Построение нелинейных уравнений для цилиндрической оболочки переменной толщины, позволяющих уточнить НДС в зонах его искажения (краевые области в местах крепления и действия локальной нагрузки);

– Построение уточненных уравнений и решение краевых задач в линейной постановке для круговых цилиндрических оболочек замкнутого и открытого профиля поперечных сечений;

– С помощью уточненной теории проведение расчетов круговой цилиндрической оболочки для различных вариантов локального нагружения с

целью количественной оценки результатов и их сопоставления с данными классической и других теорий;

– Проведение анализа изменяемости и характера распределения НДС по поверхности и толщине цилиндрической оболочки;

– Построение уточненных уравнений и решение краевых задач для круговой цилиндрической оболочки с симметрично и несимметрично изменяющейся относительно срединной поверхности толщиной.

Таким образом, несмотря на известные достижения в теории и методах расчета оболочек, имеется еще ряд нерешенных задач в теории цилиндрических оболочек. Поэтому исследования прочности оболочек, а также оценка погрешности классической теории по сравнению с уточненной теорией продолжают сохранять свою актуальность. Решению этих задач и посвящена диссертация.

Цилиндрическая оболочка переменной в продольном и окружном направлениях толщины рассматривается как трехмерное твердое тело, отнесенное к триортогональной криволинейной системе координат ξ, θ, z . Координатные оси ξ, θ совпадают с главными направлениями срединной поверхности оболочки, а ось z направлена по наружной нормали к этой поверхности.

Толщина оболочки переменная и определяется двумя функциями $h_1(\xi, \theta)$, $h_2(\xi, \theta)$, при этом $-h_1 \leq z \leq h_2$ и $z = R$ соответствует срединной поверхности.

Для описания НДС используются следующие уравнения трехмерной задачи теории упругости:

Уравнения равновесия, разрешенные относительно поперечных напряжений

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13} &= -\frac{1}{(1+rz)} \int_{-h_1}^z \left[\frac{(1+rz)}{A_1} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} (1+rz) \sigma_{12} + \right. \\
 &\quad \left. + (1+rz) G_1 \right] dz + \frac{(1+rz)_{z=-h_1}}{(1+rz)} q_{13}^-, \\
 \sigma_{23} &= -\frac{1}{(1+rz)^2} \int_{-h_1}^z \left[\frac{(1+rz)}{A_2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} + \frac{(1+rz)^2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \frac{(1+rz)^2}{A_1 A_2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \right. \\
 &\quad \left. + (1+rz)^2 G_2 \right] dz + \frac{(1+rz)_{z=-h_1}^2}{(1+rz)^2} q_{23}^-, \\
 \sigma_{33} &= -\frac{1}{(1+rz)} \int_{-h_1}^z \left[\frac{(1+rz)}{A_1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \sigma_{22} + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \frac{(1+rz)}{A_1 A_2} \sigma_{23} + \right. \\
 &\quad \left. + (1+rz) G_3 \right] dz + \frac{(1+rz)_{z=-h_1}}{(1+rz)} q_{33}^-,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Физические уравнения для ортотропной оболочки

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= A_{11} e_{11} + A_{12} e_{22} + A_{13} e_{33}, \quad \sigma_{22} = A_{21} e_{11} + A_{22} e_{22} + A_{23} e_{33}, \quad \sigma_{12} = A_{44} e_{12}, \\
 \sigma_{33} &= A_{31} e_{11} + A_{32} e_{22} + A_{33} e_{33}, \quad \sigma_{13} = A_{55} e_{13}, \quad \sigma_{23} = A_{66} e_{23},
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где A_{mn} обозначают коэффициенты жесткости оболочки.

Геометрические нелинейные уравнения

$$e_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} U_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial U_3}{\partial \xi} \right)^2,$$

$$\begin{aligned}
e_{22} &= \frac{1}{(1+rz)} \left[\left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{U_3}{R} \right) + \frac{1}{2(1+rz)} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial U_3}{\partial \theta} - \frac{U_2}{R} \right)^2 \right], \\
e_{12} &= \frac{1}{A_2(1+rz)} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} U_1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{1}{A_1(1+rz)} \frac{\partial U_3}{\partial \xi} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial U_3}{\partial \theta} - \frac{U_2}{R} \right), \\
e_{13} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_3}{\partial \xi} + \frac{\partial U_1}{\partial z}, \quad e_{23} = \frac{1}{(1+rz)} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial U_3}{\partial \theta} - \frac{U_2}{R} \right) + \frac{\partial U_2}{\partial z}, \\
e_{33} &= \frac{\partial U_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Считаем, что на лицевых $z = +h_2$, $z = -h_1$ и торцевых поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{l3}(+h_2) = q_{l3}^+, \quad \sigma_{l3}(-h_1) = q_{l3}^-, \quad l = 1, 2, 3, \quad \sigma_{\alpha i} = q_{\alpha i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2.$$

Построение двумерных уравнений. Для построения метода расчета приведем систему трехмерных уравнений теории упругости к системе двумерных уравнений, зависящих от независимых тангенциальных переменных ξ , θ . Представим перемещения в виде

$$U_1(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K u_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}, \quad U_2(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K v_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}, \quad U_3(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^{K-1} w_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}$$

С помощью вариационного принципа Лагранжа получим $3K + 2$ нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно обобщенных усилий

$$\begin{aligned}
J_u^0 &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_\xi}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{N_{\theta\xi}}{A_2} \right) + \frac{N_{\xi\theta}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + p_\xi^0 - X_\xi^0 = 0, \\
J_v^0 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{N_\theta}{A_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_{\xi\theta}}{A_1} \right) - \frac{N_\xi}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{\widehat{N}_\theta}{R} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) + \frac{N_{\theta\xi}}{A_1 R} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + \frac{Q_{\theta z}}{R} - \\
&\quad - \sum_{i=1}^K \left(\frac{\widehat{M}_\theta^i}{R^2} v_i \right) + \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{\widehat{M}_\theta^i}{A_2 R} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right) + \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{M_{\theta\xi}^i}{A_1 R} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right) + p_\theta^0 - X_\theta^0 = 0, \\
J_w^0 &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_\xi}{A_1^2} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) - \frac{N_\theta}{R} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Q_{\xi z}}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\widehat{N}_\theta}{A_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Q_{\theta z}}{A_2} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{N_{\theta\xi}}{A_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{N_{\theta\xi}}{A_1 A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^K \left(\frac{\widehat{M}_\theta^i}{R A_2} v_i \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^K \left(\frac{M_{\theta\xi}^i}{A_1 R} v_i \right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{M_\xi^i}{A_1^2} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{\widehat{M}_\theta^i}{A_2^2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} + \frac{M_{\theta\xi}^i}{A_1 A_2} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{M_{\theta\xi}^i}{A_1 A_2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right) + p_z^0 - X_z^0 = 0, \\
J_u^i &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{M_\xi^i}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{M_{\theta\xi}^i}{A_2} + \frac{M_{\xi\theta}^i}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - Q_{\xi z}^i - \sum_{j=1}^K T_z^{ij} u_j + p_\xi^i - X_\xi^i = 0, \quad i = \overline{1, K}, \\
J_v^i &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{M_\theta^i}{A_2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{M_{\xi\theta}^i}{A_1} - \frac{M_\xi^i}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - Q_{\theta z}^i + \frac{(i-1)}{R} M_{\theta z}^i + \frac{\widehat{M}_\theta^i}{R} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) + \frac{M_{\theta\xi}^i}{A_1 R} \frac{\partial w_0}{\partial \xi}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta}^{ij}}{A_2 R} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} \right) + \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta \xi}^{ij}}{A_1 R} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} \right) - \sum_{j=1}^K \frac{L_{\theta}^{ij}}{R^2} v_j - \sum_{j=1}^K T_z^{ij} v_j + p_{\theta}^i - X_{\theta}^i = 0, \quad i = \overline{1, K}, \\
J_w^i &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{M_{\xi z}^i}{A_1} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{M_{\theta z}^i}{A_2} - \frac{M_{\theta}^i}{R} - Q_z^i + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{M_{\xi}^i}{A_1^2} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\widehat{M}_{\theta}^i \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) \right] + p_z^i - X_z^i + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{M_{\theta \xi}^i}{A_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{M_{\theta \xi}^i}{A_1 A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\xi}^{ij}}{A_1^2} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta}^{ij}}{A_2^2} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta \xi}^{ij}}{A_1 A_2} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta \xi}^{ij}}{A_1 A_2} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^K \left(\frac{L_{\theta}^{ij}}{A_2 R} v_j \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{j=1}^K \left(\frac{L_{\theta \xi}^{ij}}{A_1 R} v_j \right) = 0, \quad i = \overline{1, (K-1)},
\end{aligned}$$

Обобщенные усилия представляются как

$$\begin{aligned}
(N_{\xi}, N_{\xi \theta}, Q_{\xi z}) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \times (1 + rz) dz, \quad (N_{\theta}, N_{\theta \xi}, Q_{\theta z}) = \int_{-h_1}^{+h_2} (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}) dz, \\
\widehat{N}_{\theta} &= \int_{-h_1}^{+h_2} \frac{\sigma_{22}}{(1 + rz)} dz, \quad (M_{\xi}^i, M_{\xi \theta}^i, M_{\xi z}^i) = \int_{-h_1}^{+h_2} (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \times (1 + rz) \frac{z^i}{i!} dz, \quad \widehat{M}_{\theta}^i = \int_{-h_1}^{+h_2} \frac{\sigma_{22}}{(1 + rz)} \frac{z^i}{i!} dz, \\
(M_{\theta}^i, M_{\theta \xi}^i, M_{\theta z}^i) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}) \frac{z^i}{i!} dz, \quad (Q_{\xi z}^i, Q_z^i) = \int_{-h_1}^{+h_2} (\sigma_{13}, \sigma_{33}) \times (1 + rz) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \\
Q_{\theta z}^i &= \int_{-h_1}^{+h_2} \sigma_{23} \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \quad T_z^{ij} = \int_{-h_1}^{+h_2} \sigma_{33} (1 + rz) \frac{z^{i+j-2}}{(i-1)!(j-1)!} dz, \quad L_{\theta \xi}^{ij} = \int_{-h_1}^{+h_2} \sigma_{12} \frac{z^{i+j}}{i!j!} dz, \\
L_{\xi}^{ij} &= \int_{-h_1}^{+h_2} \sigma_{11} (1 + rz) \frac{z^{i+j}}{i!j!} dz, \quad L_{\theta}^{ij} = \int_{-h_1}^{+h_2} \frac{\sigma_{22}}{(1 + rz)} \frac{z^{i+j}}{i!j!} dz, \quad (X_{\xi}^i, X_{\theta}^i, X_z^i) = \int_{-h_1}^{+h_2} (G_1, G_2, G_3) \times (1 + rz) \frac{z^i}{i!} dz, \\
p_{\xi}^i &= q_{13}^+ \left[(1 + rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=+h_2)} - q_{13}^- \left[(1 + rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=-h_1)}, \quad p_{\theta}^i = q_{23}^+ \left[(1 + rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=+h_2)} - q_{23}^- \left[(1 + rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=-h_1)}, \\
p_z^i &= q_{33}^+ \left[(1 + rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=+h_2)} - q_{33}^- \left[(1 + rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=-h_1)}, \quad (\overline{N}_{\xi}, \overline{N}_{\xi \theta}, \overline{Q}_{\xi z}) = \int_{-h_1}^{+h_2} (q_{11}, q_{12}, q_{13}) \times (1 + rz) dz, \\
(\overline{M}_{\xi}^i, \overline{M}_{\xi \theta}^i, \overline{M}_{\xi z}^i) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (q_{11}, q_{12}, q_{13}) \times (1 + rz) \frac{z^i}{i!} dz, \quad (\overline{N}_{\theta}, \overline{N}_{\theta \xi}, \overline{Q}_{\theta z}) = \int_{-h_1}^{+h_2} (q_{22}, q_{12}, q_{23}) dz, \\
(\overline{M}_{\theta}^i, \overline{M}_{\theta \xi}^i, \overline{M}_{\theta z}^i) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (q_{22}, q_{12}, q_{23}) \frac{z^i}{i!} dz.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

С помощью $3K+2$ уравнений (1.4) известным способом можно получить полную систему двумерных уравнений, содержащих $(3K+2)$ обобщенных перемещений u_k, v_k, w_k .

Определение краевых условий.

Для края $\xi = const$ имеем следующие варианты краевых условий:

$$\begin{aligned}
N_{\xi} &= \overline{N}_{\xi} \vee u_0 = u_0^r, \quad N_{\xi \theta} = \overline{N}_{\xi \theta} \vee v_0 = v_0^r, \quad M_{\xi}^i = \overline{M}_{\xi}^i \vee u_i = u_i^r, \quad M_{\xi \theta}^i = \overline{M}_{\xi \theta}^i \vee v_i = v_i^r, \quad i = \overline{1, K}, \\
w_0 &= w_0^r \vee \overline{Q}_{\xi z} = Q_{\xi z} + \frac{N_{\xi}}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + N_{\theta \xi} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) - \sum_{i=1}^K \left(\frac{M_{\theta \xi}^i}{R} v_i \right) + \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{M_{\xi}^i}{A_1} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right) + \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{M_{\theta \xi}^i}{A_2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right), \\
w_i &= w_i^r \vee \overline{M}_{\xi z}^i = M_{\xi z}^i + \frac{M_{\xi}^i}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\xi}^{ij}}{A_1} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} \right) + M_{\theta \xi}^i \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) + \tag{1.6}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta\xi}^{ij}}{A_2} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} \right) - \sum_{j=1}^K \left(\frac{L_{\theta\xi}^{ij}}{R} v_j \right), \quad i = \overline{1, K-1},$$

Краевые условия на краю $\theta = const$ представляются как

$$\begin{aligned} N_{\theta\xi} = \overline{N}_{\theta\xi} \vee u_0 = u_0^r, \quad N_\theta = \overline{N}_\theta \vee v_0 = v_0^r, \quad M_{\theta\xi}^i = \overline{M}_{\theta\xi}^i \vee u_i = u_i^r, \quad M_\theta^i = \overline{M}_\theta^i \vee v_i = v_i^r, \quad i = \overline{1, K}, \\ w_0 = w_0^r \vee \overline{Q}_{\theta z} = Q_{\theta z} + \widehat{N}_\theta \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) + \frac{N_{\theta\xi}}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} - \sum_{i=1}^K \left(\frac{\widehat{M}_\theta^i}{R} v_i \right) + \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{\widehat{M}_\theta^i}{A_2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} + \frac{M_{\theta\xi}^i}{A_1} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right), \\ w_i = w_i^r \vee \overline{M}_{\theta z}^i = M_{\theta z}^i + \widehat{M}_\theta^i \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) + \frac{M_{\theta\xi}^i}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta\xi}^{ij}}{A_2} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} \right) + \\ + \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta\xi}^{ij}}{A_1} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} \right) - \sum_{j=1}^K \left(\frac{L_{\theta\xi}^{ij}}{R} v_j \right), \quad i = \overline{1, K-1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Очевидно, что краевые условия (1.6), (1.7) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления оболочки в реальных конструкциях, а их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений (1.4) согласованной теории.

Алгоритм решения задачи. Решая дифференциальные уравнения (1.4) относительно $(3K+2)$ обобщенных перемещений u_k, v_k, w_k , получим общее решение, содержащее неизвестные постоянные интегрирования. Они определяются из краевых условий (1.6), (1.7).

С помощью (1.2), (1.3) получим выражения деформаций и тангенциальных напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ оболочки. Остальные компоненты напряжений определяются из уравнений (1.1), что обеспечивает их полное удовлетворение.

Во второй главе на основе дифференциальных уравнений и краевых условий, полученных в первой главе, построены уравнения теории круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины и метод решения поставленных задач.

1. Вывод уравнений теории круговых цилиндрических оболочек. Для изотропной круговой цилиндрической оболочки имеем

$$A_1 = A_2 = R, \quad h_1 = h_2 = h.$$

Будем предполагать в дальнейшем, что искомые упругие перемещения U_1, U_2, U_3 допускают асимптотические представления вида

$$U_1(\xi, \theta, z) = u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!} + u_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!},$$

$$U_2(\xi, \theta, z) = v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!} + v_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!},$$

$$U_3(\xi, \theta, z) = w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z + w_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!},$$

В данном случае уравнения (1.4) приводятся к уравнениям в перемещениях

$$\begin{aligned} \left(Kl_0^{u_0} + Kl_{11}^{u_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Kl_{22}^{u_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_0 + Kl_{12}^{v_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_0 + Kl_1^{w_0} \frac{\partial}{\partial \xi} w_0 + \left(Kl_0^{u_1} + Kl_{11}^{u_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Kl_{22}^{u_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_1 + \\ + Kl_{12}^{v_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_1 + Kl_1^{w_1} \frac{\partial}{\partial \xi} w_1 + \left(Kl_0^{u_2} + Kl_{11}^{u_2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Kl_{22}^{u_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_2 + Kl_{12}^{v_2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_2 + Kl_1^{w_2} \frac{\partial}{\partial \xi} w_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(Kl_0^{u_3} + Kl_{11}^{u_3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Kl_{22}^{u_3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_3 + Kl_{12}^{v_3} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_3 = Kl_0^{q_{13}^+} q_{13}^+ - Kl_0^{q_{13}^-} q_{13}^-, \quad (2.1) \\
& Kl_{12}^{u_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_0 + \left(Ki_0^{v_0} + Ki_{11}^{v_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{22}^{v_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_0 + Ki_2^{w_0} \frac{\partial}{\partial \theta} w_0 + \left(Ki_0^{v_1} + Ki_{11}^{v_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{22}^{v_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_1 \\
& + Kl_{12}^{u_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_1 + Ki_2^{w_1} \frac{\partial}{\partial \theta} w_1 + Kl_{12}^{u_2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_2 + \left(Ki_0^{v_2} + Ki_{11}^{v_2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{22}^{v_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_2 + Ki_2^{w_2} \frac{\partial}{\partial \theta} w_2 + \\
& + Kl_{12}^{u_3} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_3 + \left(Ki_0^{v_3} + Ki_{11}^{v_3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{22}^{v_3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_3 = Ki_0^{q_{23}^+} q_{23}^+ - Ki_0^{q_{23}^-} q_{23}^-, \\
& Kj_1^{u_0} \frac{\partial}{\partial \xi} u_0 + Kj_2^{v_0} \frac{\partial}{\partial \theta} v_0 + \left(Kj_0^{w_0} + Kj_{11}^{w_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Kj_{22}^{w_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_0 + Kj_1^{u_1} \frac{\partial}{\partial \xi} u_1 + \left(Kj_0^{w_1} + Kj_{11}^{w_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\
& \left. + Kj_{22}^{w_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_1 + Kj_2^{v_1} \frac{\partial}{\partial \theta} v_1 + Kj_1^{u_2} \frac{\partial}{\partial \xi} u_2 + Kj_2^{v_2} \frac{\partial}{\partial \theta} v_2 + \left(Kj_0^{w_2} + Kj_{11}^{w_2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Kj_{22}^{w_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_2 + \\
& + Kj_1^{u_3} \frac{\partial}{\partial \xi} u_3 + Kj_2^{v_3} \frac{\partial}{\partial \theta} v_3 = Kj_0^{q_{33}^+} q_{33}^+ - Kj_0^{q_{33}^-} q_{33}^-, \quad l=1,2,3,4; \quad i=5,6,7,8; \quad j=9,10,11.
\end{aligned}$$

где коэффициенты Kl с буквенными и цифровыми индексами представляют собой постоянные величины, зависящие от геометрических и физических параметров оболочки; R - радиус оболочки, ξ - относительное (измеренное в долях R) расстояние по образующей, θ - центральный угол.

2. *Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов по переменной θ .* Разложение в тригонометрические ряды по окружной переменной θ , как правило, используется к расчету замкнутой круговой цилиндрической оболочки. При этом условия периодичности по окружному направлению автоматически выполняются. Представим нагрузки и перемещения в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned}
q_{i3}^{\pm}(\xi, \theta) &= Q_{(0)i3}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[Q_{(m)i3}^{(1)\pm}(\xi) \cos m\theta + Q_{(m)i3}^{(2)\pm}(\xi) \sin m\theta \right], \quad i=1,2,3, \\
u_k(\xi, \theta) &= U_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[U_{km}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + U_{km}^{(2)}(\xi) \sin m\theta \right], \quad k=0,1,2,3, \quad (2.2) \\
v_k(\xi, \theta) &= V_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[-V_{km}^{(2)}(\xi) \cos m\theta + V_{km}^{(1)}(\xi) \sin m\theta \right], \quad k=0,1,2,3, \\
w_l(\xi, \theta) &= W_{l0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[W_{lm}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + W_{lm}^{(2)}(\xi) \sin m\theta \right], \quad l=0,1,2.
\end{aligned}$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для m -х членов разложений (2.2). В данной главе приведены общие решения соответствующих однородных дифференциальных уравнений, которые здесь не приводятся.

В общем случае характеристическое уравнение имеет 22 корня вида:

$$\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3 \pm iq_3, \pm p_4, \pm p_5, \pm p_6, \pm p_7, \pm p_8. \quad (2.3)$$

и разделяются на три группы: малые корни $\pm p_1 \pm iq_1$, соответствующие обобщенным основным НДС; большие корни $\pm p_2 \pm iq_2$, соответствующие НДС простых краевых

эффектов; сверхбольшие корни $\pm p_3 \pm iq_3, \pm p_4, \pm p_5, \pm p_6, \pm p_7, \pm p_8$ соответствующие НДС дополнительных краевых эффектов.

3. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов по переменной ξ . Как правило, разложение в тригонометрические ряды по ξ применяется к расчету открытых круговых цилиндрических оболочек, имеющих прямолинейные края. Разложим нагрузки и перемещения в виде

$$\begin{aligned} q_{i3}^{\pm}(\xi, \theta) &= Q_{(0)i3}^{\pm}(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} [Q_{(m)i3}^{(1)\pm}(\theta) \cos \lambda_m \xi - Q_{(m)i3}^{(2)\pm}(\theta) \sin \lambda_m \xi], \quad i = 1, 2, 3, \\ u_k(\xi, \theta) &= U_{k0}(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} [U_{km}^{(1)}(\theta) \cos \lambda_m \xi - U_{km}^{(2)}(\theta) \sin \lambda_m \xi], \quad k = 0, 1, 2, 3, \\ v_k(\xi, \theta) &= V_{k0}(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} [V_{km}^{(2)}(\theta) \cos \lambda_m \xi + V_{km}^{(1)}(\theta) \sin \lambda_m \xi], \quad k = 0, 1, 2, 3, \\ w_l(\xi, \theta) &= W_{l0}(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} [W_{lm}^{(1)}(\theta) \sin \lambda_m \xi + W_{lm}^{(2)}(\theta) \cos \lambda_m \xi], \quad l = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь λ_m - константа, которая пропорциональна m .

Подстановкой (2.4) в (2.1) находятся обыкновенные дифференциальные уравнения для m -х членов разложений (2.4). В диссертации приведены общие решения соответствующих однородных дифференциальных уравнений.

Далее, с помощью операционного метода, основанного на преобразовании Лапласа, получены аналитические решения для замкнутой круговой цилиндрической оболочки с различными краевыми условиями при действии распределенной и локальной нагрузок. Применение преобразования Лапласа дает существенное преимущество по сравнению с классическими методами. При этом краевые условия на одном конце оболочки автоматически выполняются, что вдвое сокращает число произвольных постоянных при интегрировании дифференциальных уравнений.

Рассматривается оболочка, находящаяся под действием радиальной локальной нагрузки, изменяющейся по закону

$$q_{33}^+(\xi, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1 \text{ и } \xi_2 < \xi \leq \xi_0 = L/R, \\ Q_{33}^+(\xi) \cos m\theta, & \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \end{cases}$$

где L - длина оболочки.

В диссертации представлены выражения частных решений для оболочки под действием следующих локальных нагрузок:

- радиальной кольцевой нагрузки, изменяющейся в продольном направлении по закону

$$Q_{33}^+(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1 \text{ и } \text{при } \xi_2 < \xi \leq \xi_0, \\ Q_0, & \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \end{cases} \quad (2.5)$$

- радиальной кольцевой нагрузки, изменяющейся в продольном направлении по параболическому закону

$$Q_{33}^+(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1 \text{ и } \text{при } \xi_2 < \xi \leq \xi_0, \\ Q_2 \xi^2 + Q_1 \xi + Q_0, & \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

- распределенной в окружном направлении силы P , приложенной в произвольной точке $\xi = \xi_1$,

- распределенного в окружном направлении изгибающего момента M , приложенного в произвольной точке $\xi = \xi_1$.

В виду громоздкости здесь они не приводятся.

Отдельно рассматриваются случаи, когда на оболочку действуют изменяющиеся по закону (2.5) и по закону $\cos(m\theta)$ в окружном направлении нагрузки для случаев $m=1$ (ветровая нагрузка) и $m \geq 2$ (общий случай деформации).

В данной главе приведены выражения частных решений для вышеназванных случаев.

В третьей главе проведены результаты параметрических расчетов по исследованию влияния геометрических параметров и изменчивости нагрузки на НДС оболочки, дано сравнение результатов, полученных в данной работе, с классической теорией.

1. Анализ корней характеристического уравнения.

Для сравнения результатов расчета НДС оболочки по разным теориям в таблице 3.1 приведены значения корней характеристического уравнения для осесимметричной задачи при различных значениях относительной полутолщины ε_0 . В таблице 3.1 аббревиатура «Кл. теория» соответствует результатам, полученным по классической теории, $K=2$ полученным в работе [1], $K=3$ - полученным в данной работе.

Таблице 3.1

$\mu = 0,30$						
	ε_0	1/40	1/60	1/80	1/100	1/200
p_1	$K=3$	5,797	7,080	8,163	9,119	12,875
	$K=2$	5,499	6,720	7,752	8,661	12,233
	Кл. теория	5,749	7,040	8,130	9,089	12,854
q_1	$K=3$	5,702	7,002	8,096	9,059	12,833
	$K=2$	5,431	6,665	7,704	8,618	12,203
	Кл. теория	5,749	7,040	8,130	9,089	12,854
p_2	$K=3$	90,979	136,469	181,959	227,449	454,898
	$K=2$	90,988	136,475	181,963	227,453	454,900
q_2	$K=3$	37,692	56,532	75,373	94,215	188,426
	$K=2$	37,686	56,528	75,371	94,213	188,425
p_3	$K=3$	159,481	239,219	318,957	398,696	797,390
p_4	$K=3$	207,701	311,549	415,397	519,245	1038,488

Очевидно, что корни $\pm p_3, \pm q_4$ могут быть определены только по теории $K=3$.

Расхождение между значениями p_2, q_2 , соответствующими вариантам $K=2$ и $K=3$ составляет около 0,025% и следовательно результаты краевых эффектов, соответствующие корням $\pm p_2 \pm iq_2$, определяемым в данной работе и по теории $K=2$, практически совпадают. Размер зоны действия краевых эффектов, соответствующих корням $\pm p_2 \pm iq_2$, примерно равен h от края оболочки (зоны искажения напряженного состояния).

Поскольку p_3, p_4 приблизительно в два раза больше чем p_2 , скорость затухания краевых эффектов, соответствующих корням $\pm p_3, \pm p_4$, в два раза больше чем скорость затухания краевых эффектов, соответствующих корням $\pm p_2 \pm iq_2$. Поэтому размер зоны действия краевых эффектов, соответствующих корням $\pm p_3, \pm p_4$, примерно составляет $h/2$ от края оболочки.

2. Сравнение результатов, полученных в данной работе, с классической теорией. В качестве примера рассматривается круговая цилиндрическая оболочка со следующими параметрами: относительная длина $\xi_0 = L/R = 4$, радиус $R = 0.1$ м, относительная полутолщина $\varepsilon_0 = h/R = 0.005$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Оболочка жестко закреплена на двух концах. Локальная нагрузка приложена в середине оболочки и имеет следующие параметры: $\xi_1 = 1, \xi_2 = 3$.

$$Q_{33}^+(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1 \text{ и при } \xi_2 < \xi \leq \xi_0, \\ Q_0, & \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \end{cases}$$

На рис. 3.1 - 3.4 . показаны результаты расчета НДС оболочки для случая $m = 0$, где аббревиатура «Gol» соответствует результатам классической теории.

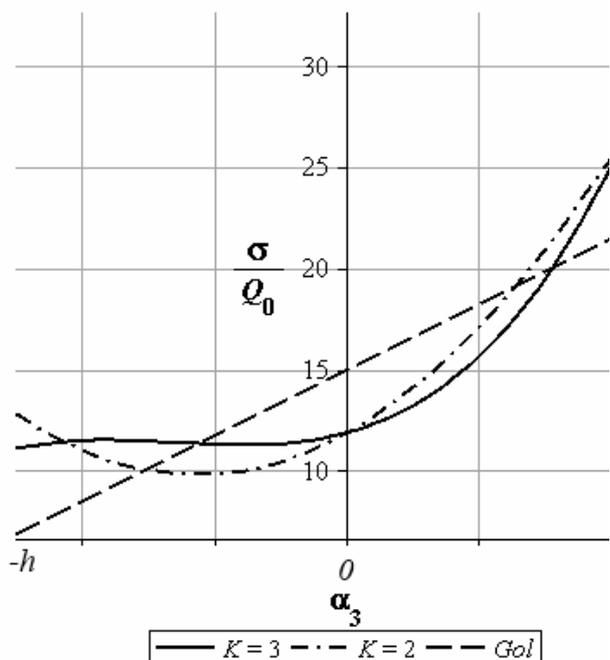


Рис. 3.1, а

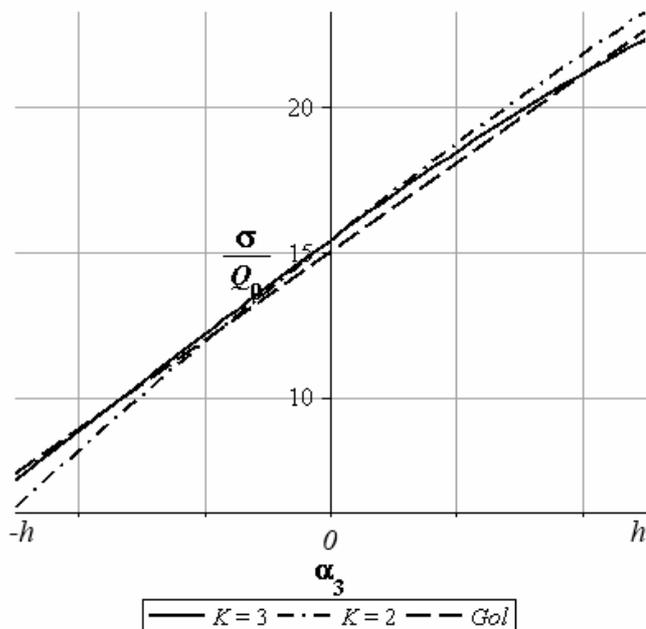


Рис. 3.1, б

Рис. 3.1. Изменение продольных нормальных напряжений σ_{11} по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии $\xi = \varepsilon_0/2$ от края оболочки.

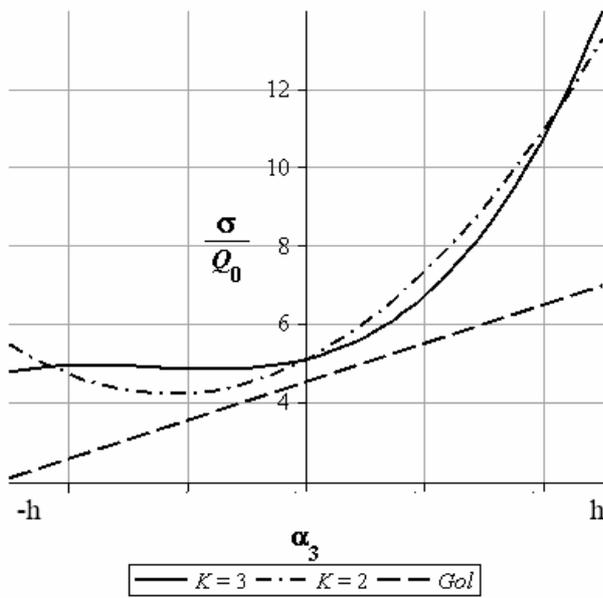


Рис. 3.2, а

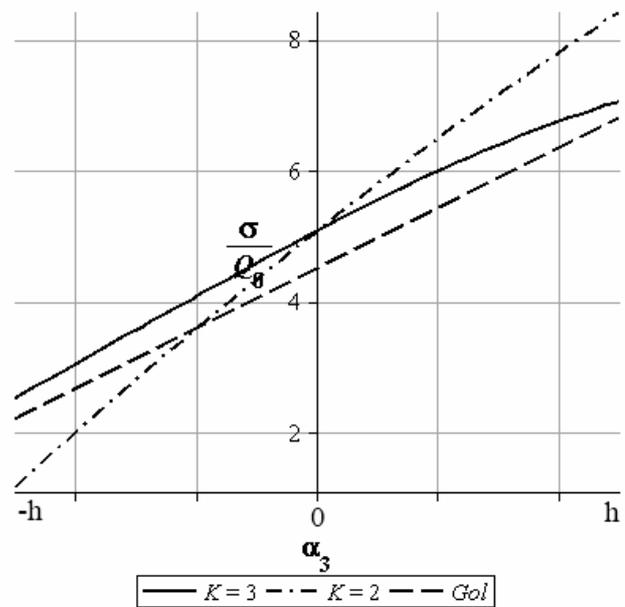


Рис. 3.2, б

Рис.3.2. Изменение тангенциальных нормальных напряжений σ_{22} по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии $\xi = \varepsilon_0/2$ от края оболочки.

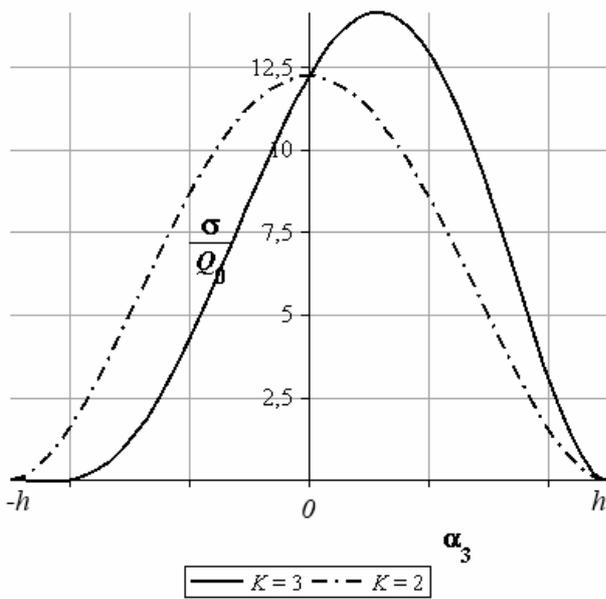


Рис. 3.3, а

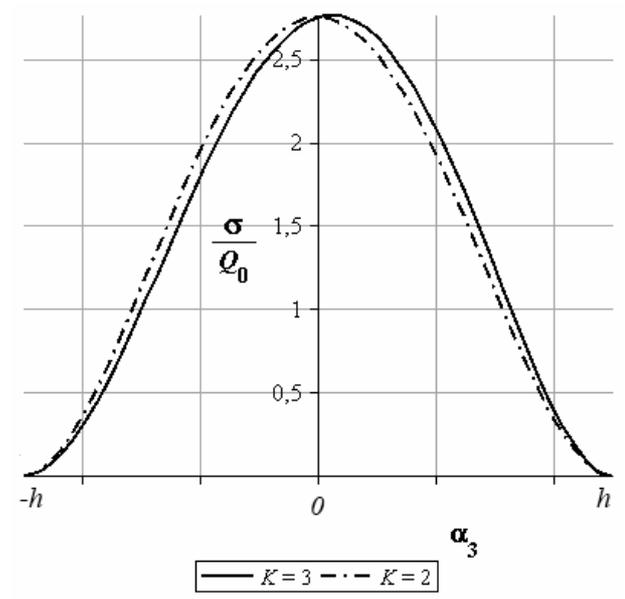


Рис. 3.3, б

Рис. 3.3. Изменение поперечных нормальных напряжений σ_{33} по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии $\xi = \varepsilon_0/2$ от края оболочки

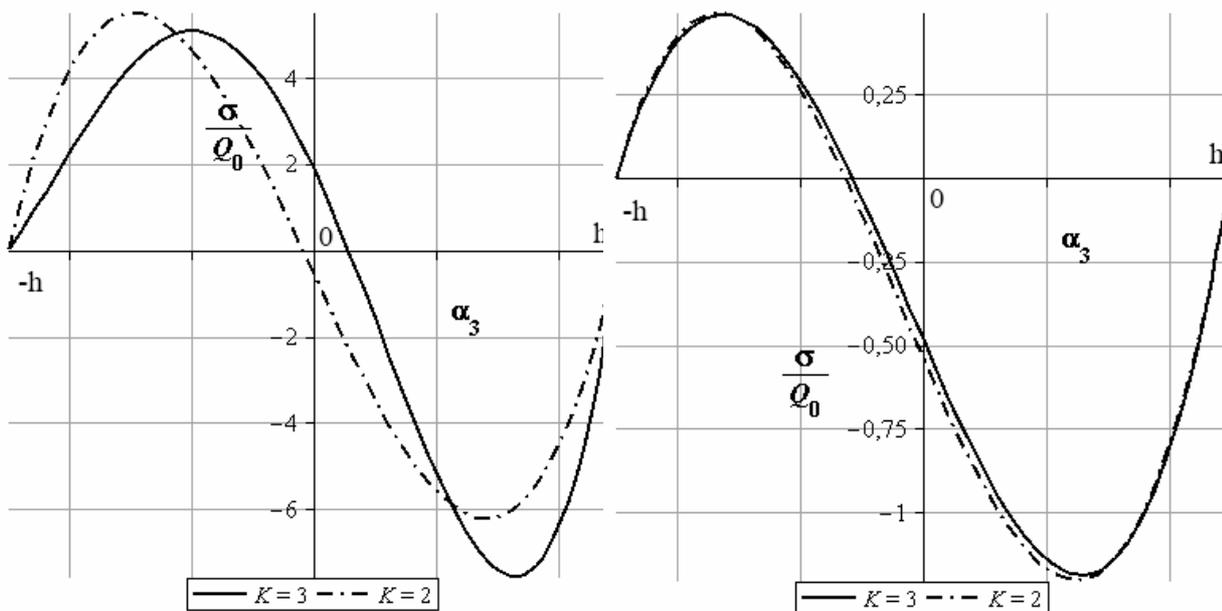


Рис. 3.4, а

Рис. 3.4, б

Рис. 3.4. Изменение поперечных касательных напряжений σ_{13} по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии $\xi = \varepsilon_0 / 2$ от края оболочки.

Анализируя графики на рис. 3.1 – 3.4, можно установить:

- Максимальные нормальные напряжения σ_{11} , определяемые по уточненной теории « $K = 3$ », превышают величину этих же напряжений, соответствующих классической теории, на 35%, что подтверждается результатами работы [5], полученным для круговой пластинки другим методом;

- Максимальные нормальные напряжения σ_{22} , полученные по уточненной теории, вдвое больше соответствующих напряжений, определяемых по классической теории; результаты уточненных теорий « $K = 3$ », « $K = 2$ » относительно этих напряжений практически совпадают;

- Максимальные поперечные нормальные напряжения σ_{33} , достигающие значений порядка 40% от σ_{11} , отличаются друг от друга по обеим уточненным теориям примерно на 13%;

- Максимальные поперечные касательные напряжения σ_{13} , составляющие 22% от σ_{11} , отличаются друг от друга по обеим уточненным теориям на 30%.

- На краю оболочки дополнительные краевые эффекты, соответствующие корням $\pm p_3$, $\pm p_4$, существенно влияют на величину и распределение по толщине поперечных нормальных напряжений σ_{33} . Тангенциальные нормальные и касательные напряжения, полученные в данной работе и по теории $K = 2$, практически совпадают, есть некоторые отличия непосредственно на краю оболочки.

На рис. 3.5 - 3.8. показаны результаты расчета нормальных напряжений оболочки для случая $m = 2$.

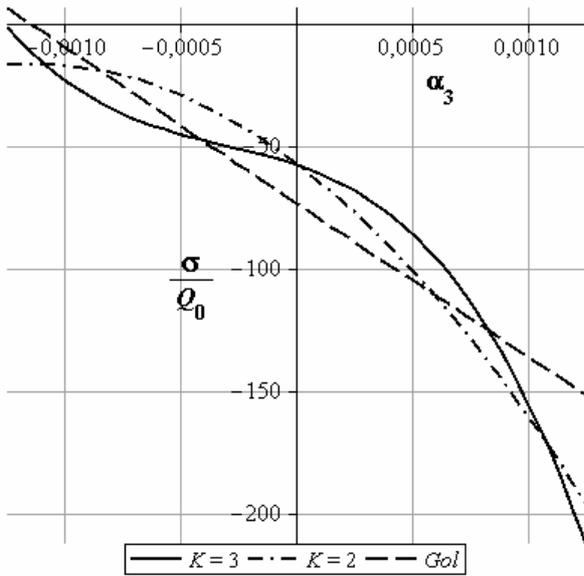


Рис. 3.5, а

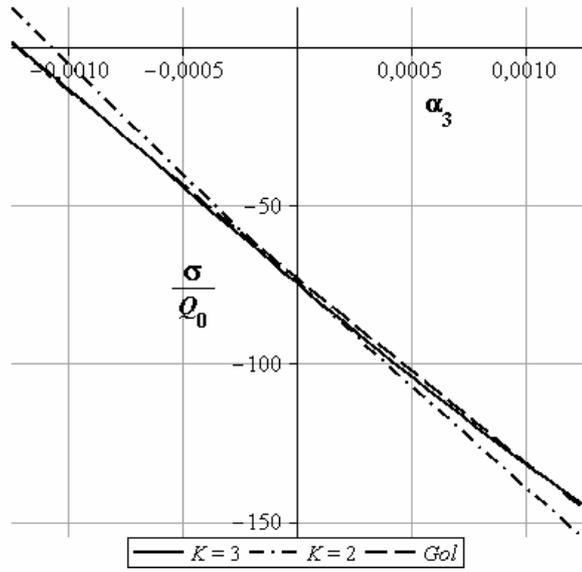


Рис. 3.5, б

Рис. 3.5. Изменение продольных нормальных напряжений σ_{11} по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии $\xi = \varepsilon_0/2$ от края оболочки.

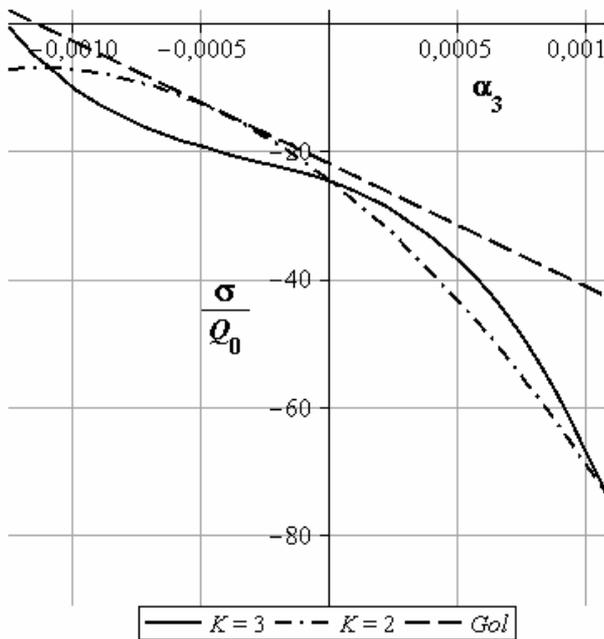


Рис. 3.6, а

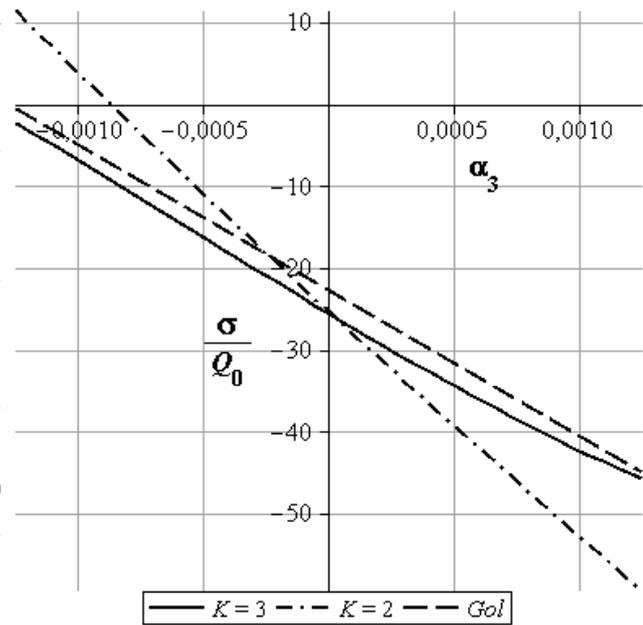


Рис. 3.6, б

Рис.3.6. Изменение тангенциальных нормальных напряжений σ_{22} по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии $\xi = \varepsilon_0/2$ от края оболочки.

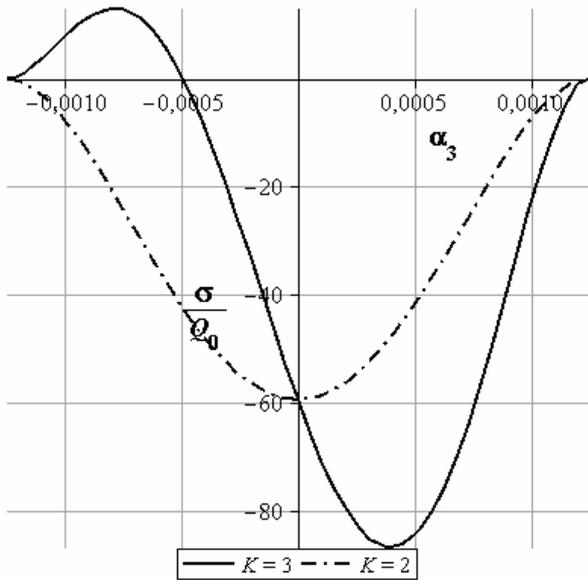


Рис. 3.7, а

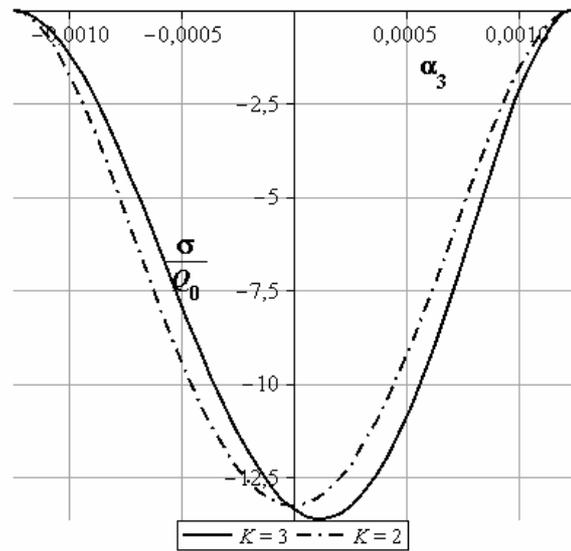


Рис. 3.7, б

Рис. 3.7. Изменение поперечных нормальных напряжений σ_{33} по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии $\xi = \epsilon_0/2$ от края оболочки

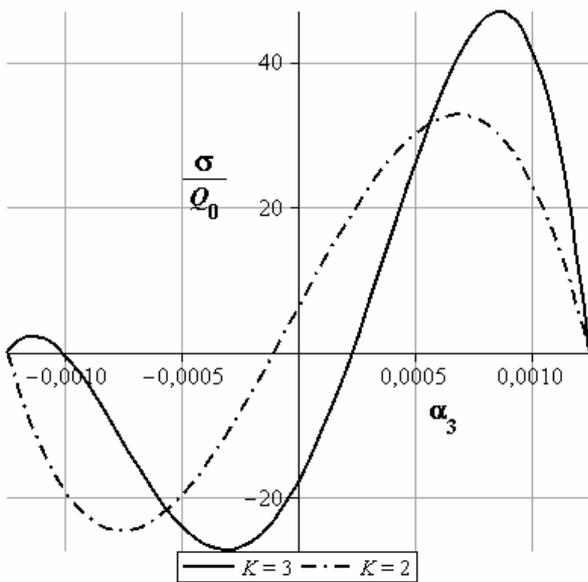


Рис. 3.8, а

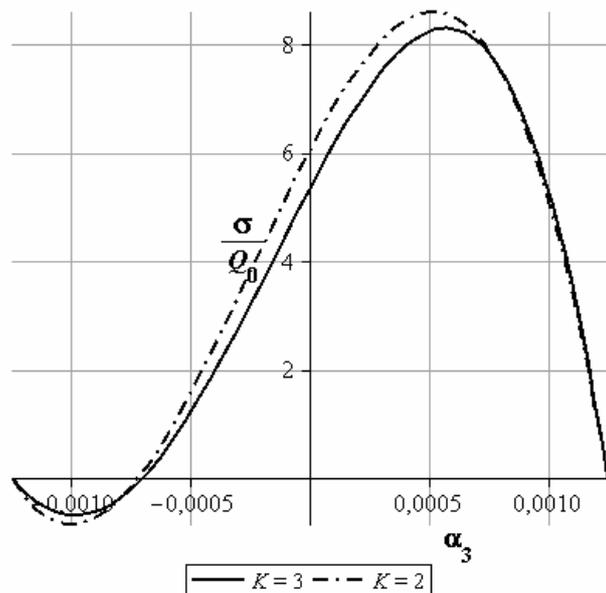


Рис. 3.8, б

Рис. 3.8. Изменение поперечных касательных напряжений σ_{13} по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии $\xi = \epsilon_0/2$ от края оболочки.

Очевидно, что в случае $t=2$ сохраняются те же особенности изменения НДС, что и в случае $t=0$.

В четвертой главе представлены результаты построения уточненных краевых задач для цилиндрических оболочек с симметрично и несимметрично изменяющейся относительно срединной поверхности толщиной.

1. Расчет оболочки переменной толщины, симметрично изменяющейся относительно срединной поверхности

В качестве примера, рассматривается оболочка, жестко заземленная по двум концам, закон изменения толщины которой представляет собой функцию только одной переменной ξ , т.е $h_1 = h_2 = h(\xi)$.

Тогда уравнения в перемещениях принимают вид

$$\begin{aligned} & \left(Kl_0^{u_0} + Kl_1^{u_0} \frac{d}{d\xi} + Kl_{11}^{u_0} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_0 + \left(Kl_0^{w_0} + Kl_1^{w_0} \frac{d}{d\xi} \right) w_0 + \left(Kl_0^{w_1} + Kl_1^{w_1} \frac{d}{d\xi} \right) w_1 + \\ & + \left(Kl_0^{u_1} + Kl_1^{u_1} \frac{d}{d\xi} + Kl_{11}^{u_1} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_1 + \left(Kl_0^{u_2} + Kl_1^{u_2} \frac{d}{d\xi} + Kl_{11}^{u_2} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_2 + \\ & + \left(Kl_0^{w_2} + Kl_1^{w_2} \frac{d}{d\xi} \right) w_2 + \left(Kl_0^{u_3} + Kl_1^{u_3} \frac{d}{d\xi} + Kl_{11}^{u_3} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_3 = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \left(Kj_0^{w_0} + Kj_1^{w_0} \frac{d}{d\xi} + Kj_{11}^{w_0} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) w_0 + \left(Kj_0^{w_1} + Kj_1^{w_1} \frac{d}{d\xi} + Kj_{11}^{w_1} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) w_1 + \\ & + \left(Kj_0^{w_2} + Kj_1^{w_2} \frac{d}{d\xi} + Kj_{11}^{w_2} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) w_2 + \left(Kj_0^{u_0} + Kj_1^{u_0} \frac{d}{d\xi} \right) u_0 + \left(Kj_0^{u_1} + Kj_1^{u_1} \frac{d}{d\xi} \right) u_1 + \\ & + \left(Kj_0^{u_2} + Kj_1^{u_2} \frac{d}{d\xi} \right) u_2 + \left(Kj_0^{u_3} + Kj_1^{u_3} \frac{d}{d\xi} \right) u_3 = Kj_0^{q_{33}^+} q_{33}^+, \quad l = 1, 2, 3, 4; \quad j = 9, 10, 11, \end{aligned}$$

и граничные условия

$$u_i = w_j = 0, \quad i = \overline{0, 3}, \quad j = \overline{0, 2}, \quad \text{при } \xi = 0 \text{ и } \xi = \xi_0.$$

Уравнения (4.1) решаются конечно-разностным методом. Производные 1-го и 2-го порядков аппроксимируются с помощью отношения центральных разностей со 2-м порядком аппроксимации.

$$\frac{dy_i}{d\xi} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2s} + O(s^2); \quad \frac{d^2 y_i}{d\xi^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{s^2} + O(s^2). \quad (4.2)$$

Из уравнений (4.1) и (4.2) получим следующую конечно-разностную систему:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Kl_{11}^{u_0}}{s^2} + \frac{Kl_1^{u_0}}{2s} \right) u_0^{i+1} + \left(\frac{-2Kl_{11}^{u_0}}{s^2} + Kl_0^{u_0} \right) u_0^i + \left(\frac{Kl_{11}^{u_0}}{s^2} - \frac{Kl_1^{u_0}}{2s} \right) u_0^{i-1} + \frac{Kl_1^{w_0}}{2s} w_0^{i+1} + Kl_0^{w_0} w_0^i + \frac{-Kl_1^{w_0}}{2s} w_0^{i-1} + \\ & + \left(\frac{Kl_{11}^{u_1}}{s^2} + \frac{Kl_1^{u_1}}{2s} \right) u_1^{i+1} + \left(\frac{-2Kl_{11}^{u_1}}{s^2} + Kl_0^{u_1} \right) u_1^i + \left(\frac{Kl_{11}^{u_1}}{s^2} - \frac{Kl_1^{u_1}}{2s} \right) u_1^{i-1} + \frac{Kl_1^{w_1}}{2s} w_1^{i+1} + Kl_0^{w_1} w_1^i + \frac{-Kl_1^{w_1}}{2s} w_1^{i-1} + \\ & + \left(\frac{Kl_{11}^{u_2}}{s^2} + \frac{Kl_1^{u_2}}{2s} \right) u_2^{i+1} + \left(\frac{-2Kl_{11}^{u_2}}{s^2} + Kl_0^{u_2} \right) u_2^i + \left(\frac{Kl_{11}^{u_2}}{s^2} - \frac{Kl_1^{u_2}}{2s} \right) u_2^{i-1} + \frac{Kl_1^{w_2}}{2s} w_2^{i+1} + Kl_0^{w_2} w_2^i + \frac{-Kl_1^{w_2}}{2s} w_2^{i-1} + \\ & + \left(\frac{Kl_{11}^{u_3}}{s^2} + \frac{Kl_1^{u_3}}{2s} \right) u_3^{i+1} + \left(\frac{-2Kl_{11}^{u_3}}{s^2} + Kl_0^{u_3} \right) u_3^i + \left(\frac{Kl_{11}^{u_3}}{s^2} - \frac{Kl_1^{u_3}}{2s} \right) u_3^{i-1} = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Kj_{11}^{w_0}}{s^2} + \frac{Kj_1^{w_0}}{2s} \right) w_0^{i+1} + \left(\frac{-2Kj_{11}^{w_0}}{s^2} + Kj_0^{w_0} \right) w_0^i + \left(\frac{Kj_{11}^{w_0}}{s^2} - \frac{Kj_1^{w_0}}{2s} \right) w_0^{i-1} + \frac{Kj_1^{u_0}}{2s} u_0^{i+1} + Kj_0^{u_0} u_0^i + \frac{-Kj_1^{u_0}}{2s} u_0^{i-1} + \\ & + \left(\frac{Kj_{11}^{w_1}}{s^2} + \frac{Kj_1^{w_1}}{2s} \right) w_1^{i+1} + \left(\frac{-2Kj_{11}^{w_1}}{s^2} + Kj_0^{w_1} \right) w_1^i + \left(\frac{Kj_{11}^{w_1}}{s^2} - \frac{Kj_1^{w_1}}{2s} \right) w_1^{i-1} + \frac{Kj_1^{u_1}}{2s} u_1^{i+1} + Kj_0^{u_1} u_1^i + \frac{-Kj_1^{u_1}}{2s} u_1^{i-1} + \\ & + \left(\frac{Kj_{11}^{w_2}}{s^2} + \frac{Kj_1^{w_2}}{2s} \right) w_2^{i+1} + \left(\frac{-2Kj_{11}^{w_2}}{s^2} + Kj_0^{w_2} \right) w_2^i + \left(\frac{Kj_{11}^{w_2}}{s^2} - \frac{Kj_1^{w_2}}{2s} \right) w_2^{i-1} + \frac{Kj_1^{u_2}}{2s} u_2^{i+1} + Kj_0^{u_2} u_2^i + \frac{-Kj_1^{u_2}}{2s} u_2^{i-1} + \\ & + \frac{Kj_1^{u_3}}{2s} u_3^{i+1} + Kj_0^{u_3} u_3^i + \frac{-Kj_1^{u_3}}{2s} u_3^{i-1} = Kj_0^{q_{33}^+} q_{33}^{+(i)}, \quad j = 9, 10, 11, \quad i = \overline{1, (N_0 - 1)}, \end{aligned}$$

где $(N_0 + 1)$, s - соответственно число узлов и шаг конечно-разностной схемы.

Уравнения (4.3) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Она имеет семидиагональную матрицу, которую можно представить следующей системой векторно-матричных уравнений:

$$A_i X_{i-1} + B_i X_i + C_i X_{i+1} = F_i, \quad i = \overline{1, (N_0 - 1)}, \quad A_1 = C_{N_0-1} = \Theta.$$

Здесь Θ - нулевая матрица размером 7×7 ; F_i - векторы правых частей

$$F_i = \left[0, 0, 0, 0, K9_0^{q_{33}^+} q_{33}^{+(i)}, K10_0^{q_{33}^+} q_{33}^{+(i)}, K11_0^{q_{33}^+} q_{33}^{+(i)} \right]^T;$$

$$X_i - \text{векторы искоемых перемещений} \quad X_i = \left[u_0^i, w_0^i, u_1^i, w_1^i, u_2^i, w_2^i, u_3^i \right]^T;$$

A_i, B_i, C_i - квадратные матрицы коэффициентов размером 7×7 , определяемые следующим образом:

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{K1_{11}^{u_0}}{s^2} - \frac{K1_{11}^{u_0}}{2s}, & \frac{-K1_{11}^{w_0}}{2s}, & \frac{K1_{11}^{u_1}}{s^2} - \frac{K1_{11}^{u_1}}{2s}, & \frac{-K1_{11}^{w_1}}{2s}, & \frac{K1_{11}^{u_2}}{s^2} - \frac{K1_{11}^{u_2}}{2s}, & \frac{-K1_{11}^{w_2}}{2s}, & \frac{K1_{11}^{u_3}}{s^2} - \frac{K1_{11}^{u_3}}{2s} \\ \frac{K2_{11}^{u_0}}{s^2} - \frac{K2_{11}^{u_0}}{2s}, & \frac{-K2_{11}^{w_0}}{2s}, & \frac{K2_{11}^{u_1}}{s^2} - \frac{K2_{11}^{u_1}}{2s}, & \frac{-K2_{11}^{w_1}}{2s}, & \frac{K2_{11}^{u_2}}{s^2} - \frac{K2_{11}^{u_2}}{2s}, & \frac{-K2_{11}^{w_2}}{2s}, & \frac{K2_{11}^{u_3}}{s^2} - \frac{K2_{11}^{u_3}}{2s} \\ \frac{K3_{11}^{u_0}}{s^2} - \frac{K3_{11}^{u_0}}{2s}, & \frac{-K3_{11}^{w_0}}{2s}, & \frac{K3_{11}^{u_1}}{s^2} - \frac{K3_{11}^{u_1}}{2s}, & \frac{-K3_{11}^{w_1}}{2s}, & \frac{K3_{11}^{u_2}}{s^2} - \frac{K3_{11}^{u_2}}{2s}, & \frac{-K3_{11}^{w_2}}{2s}, & \frac{K3_{11}^{u_3}}{s^2} - \frac{K3_{11}^{u_3}}{2s} \\ \frac{K4_{11}^{u_0}}{s^2} - \frac{K4_{11}^{u_0}}{2s}, & \frac{-K4_{11}^{w_0}}{2s}, & \frac{K4_{11}^{u_1}}{s^2} - \frac{K4_{11}^{u_1}}{2s}, & \frac{-K4_{11}^{w_1}}{2s}, & \frac{K4_{11}^{u_2}}{s^2} - \frac{K4_{11}^{u_2}}{2s}, & \frac{-K4_{11}^{w_2}}{2s}, & \frac{K4_{11}^{u_3}}{s^2} - \frac{K4_{11}^{u_3}}{2s} \\ \frac{-K9_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K9_{11}^{w_0}}{s^2} - \frac{K9_1^{w_0}}{2s}, & \frac{-K9_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K9_{11}^{w_1}}{s^2} - \frac{K9_1^{w_1}}{2s}, & \frac{-K9_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K9_{11}^{w_2}}{s^2} - \frac{K9_1^{w_2}}{2s}, & \frac{-K9_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{-K10_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K10_{11}^{w_0}}{s^2} - \frac{K10_1^{w_0}}{2s}, & \frac{-K10_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K10_{11}^{w_1}}{s^2} - \frac{K10_1^{w_1}}{2s}, & \frac{-K10_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K10_{11}^{w_2}}{s^2} - \frac{K10_1^{w_2}}{2s}, & \frac{-K10_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{-K11_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K11_{11}^{w_0}}{s^2} - \frac{K11_1^{w_0}}{2s}, & \frac{-K11_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K11_{11}^{w_1}}{s^2} - \frac{K11_1^{w_1}}{2s}, & \frac{-K11_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K11_{11}^{w_2}}{s^2} - \frac{K11_1^{w_2}}{2s}, & \frac{-K11_1^{u_3}}{2s} \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} K1_0^{u_0} - \frac{2K1_{11}^{u_0}}{s^2}, & K1_0^{w_0}, & K1_0^{u_1} - \frac{2K1_{11}^{u_1}}{s^2}, & K1_0^{w_1}, & K1_0^{u_2} - \frac{2K1_{11}^{u_2}}{s^2}, & K1_0^{w_2}, & K1_0^{u_3} - \frac{2K1_{11}^{u_3}}{s^2} \\ K2_0^{u_0} - \frac{2K2_{11}^{u_0}}{s^2}, & K2_0^{w_0}, & K2_0^{u_1} - \frac{2K2_{11}^{u_1}}{s^2}, & K2_0^{w_1}, & K2_0^{u_2} - \frac{2K2_{11}^{u_2}}{s^2}, & K2_0^{w_2}, & K2_0^{u_3} - \frac{2K2_{11}^{u_3}}{s^2} \\ K3_0^{u_0} - \frac{2K3_{11}^{u_0}}{s^2}, & K3_0^{w_0}, & K3_0^{u_1} - \frac{2K3_{11}^{u_1}}{s^2}, & K3_0^{w_1}, & K3_0^{u_2} - \frac{2K3_{11}^{u_2}}{s^2}, & K3_0^{w_2}, & K3_0^{u_3} - \frac{2K3_{11}^{u_3}}{s^2} \\ K4_0^{u_0} - \frac{2K4_{11}^{u_0}}{s^2}, & K4_0^{w_0}, & K4_0^{u_1} - \frac{2K4_{11}^{u_1}}{s^2}, & K4_0^{w_1}, & K4_0^{u_2} - \frac{2K4_{11}^{u_2}}{s^2}, & K4_0^{w_2}, & K4_0^{u_3} - \frac{2K4_{11}^{u_3}}{s^2} \\ K9_0^{u_0}, & K9_0^{w_0} - \frac{2K9_{11}^{w_0}}{s^2}, & K9_0^{u_1}, & K9_0^{w_1} - \frac{2K9_{11}^{w_1}}{s^2}, & K9_0^{u_2}, & K9_0^{w_2} - \frac{2K9_{11}^{w_2}}{s^2}, & K9_0^{u_3} \\ K10_0^{u_0}, & K10_0^{w_0} - \frac{2K10_{11}^{w_0}}{s^2}, & K10_0^{u_1}, & K10_0^{w_1} - \frac{2K10_{11}^{w_1}}{s^2}, & K10_0^{u_2}, & K10_0^{w_2} - \frac{2K10_{11}^{w_2}}{s^2}, & K10_0^{u_3} \\ K11_0^{u_0}, & K11_0^{w_0} - \frac{2K11_{11}^{w_0}}{s^2}, & K11_0^{u_1}, & K11_0^{w_1} - \frac{2K11_{11}^{w_1}}{s^2}, & K11_0^{u_2}, & K11_0^{w_2} - \frac{2K11_{11}^{w_2}}{s^2}, & K11_0^{u_3} \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} \frac{K1_{11}^{u_0}}{s^2} + \frac{K1_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K1_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K1_{11}^{u_1}}{s^2} + \frac{K1_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K1_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K1_{11}^{u_2}}{s^2} + \frac{K1_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K1_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K1_{11}^{u_3}}{s^2} + \frac{K1_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{K2_{11}^{u_0}}{s^2} + \frac{K2_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K2_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K2_{11}^{u_1}}{s^2} + \frac{K2_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K2_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K2_{11}^{u_2}}{s^2} + \frac{K2_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K2_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K2_{11}^{u_3}}{s^2} + \frac{K2_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{K3_{11}^{u_0}}{s^2} + \frac{K3_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K3_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K3_{11}^{u_1}}{s^2} + \frac{K3_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K3_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K3_{11}^{u_2}}{s^2} + \frac{K3_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K3_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K3_{11}^{u_3}}{s^2} + \frac{K3_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{K4_{11}^{u_0}}{s^2} + \frac{K4_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K4_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K4_{11}^{u_1}}{s^2} + \frac{K4_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K4_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K4_{11}^{u_2}}{s^2} + \frac{K4_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K4_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K4_{11}^{u_3}}{s^2} + \frac{K4_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{K9_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K9_{11}^{w_0}}{s^2} + \frac{K9_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K9_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K9_{11}^{w_1}}{s^2} + \frac{K9_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K9_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K9_{11}^{w_2}}{s^2} + \frac{K9_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K9_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{K10_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K10_{11}^{w_0}}{s^2} + \frac{K10_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K10_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K10_{11}^{w_1}}{s^2} + \frac{K10_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K10_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K10_{11}^{w_2}}{s^2} + \frac{K10_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K10_1^{u_3}}{2s} \\ \frac{K11_1^{u_0}}{2s}, & \frac{K11_{11}^{w_0}}{s^2} + \frac{K11_1^{w_0}}{2s}, & \frac{K11_1^{u_1}}{2s}, & \frac{K11_{11}^{w_1}}{s^2} + \frac{K11_1^{w_1}}{2s}, & \frac{K11_1^{u_2}}{2s}, & \frac{K11_{11}^{w_2}}{s^2} + \frac{K11_1^{w_2}}{2s}, & \frac{K11_1^{u_3}}{2s} \end{bmatrix}.$$

Векторы искомых перемещений X_i находятся методом прогонки

$$X_i = P_i X_{i+1} + Q_i, \quad i = \overline{1, (N_0 - 1)}, \quad (4.4)$$

где $X_0 = X_{N_0} = \Theta$, $P_i = -(B_i + A_i P_{i-1})^{-1} C_i$, $P_1 = -(B_1)^{-1} C_1$,

$$Q_i = (B_i + A_i P_{i-1})^{-1} (F_i - A_i Q_{i-1}), \quad Q_1 = (B_1)^{-1} F_1, \quad i = \overline{2, (N_0 - 1)}.$$

Таким образом, с помощью формулы (4.4) определяются перемещения в узлах сетки. Для аппроксимации перемещений используются сплайны. Затем деформации оболочки получаются с помощью геометрических уравнений, а напряжения находятся с использованием соотношений закона Гука и уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

В качестве примера, рассматривается оболочка, толщина которой линейно изменяется. Тогда имеем $h_1 = h_2 = (\varepsilon_0 + k_0 \xi) R$, $\varepsilon_0 = h_0 / R$.

Расчет проводится для оболочки, имеющей следующие параметры: относительная длина $\xi_0 = L/R = 4$, радиус $R = 0.1 \text{ м}$, $h_0/R = 1/40$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Локальная нагрузка изменяется по закону

$$q_{33}^+(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq \xi < 1, \text{ и } 3 < \xi \leq 4. \\ Q_0, & \text{при } 1 \leq \xi \leq 3, \end{cases} \quad (4.5)$$

На рис. 4.1 – 4.3 показаны результаты расчета нормальных напряжений и перемещений при различных значениях k_0 .

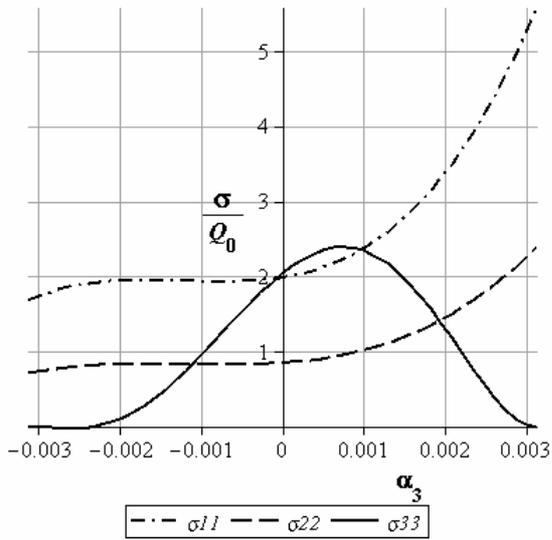


Рис. 4.1, а

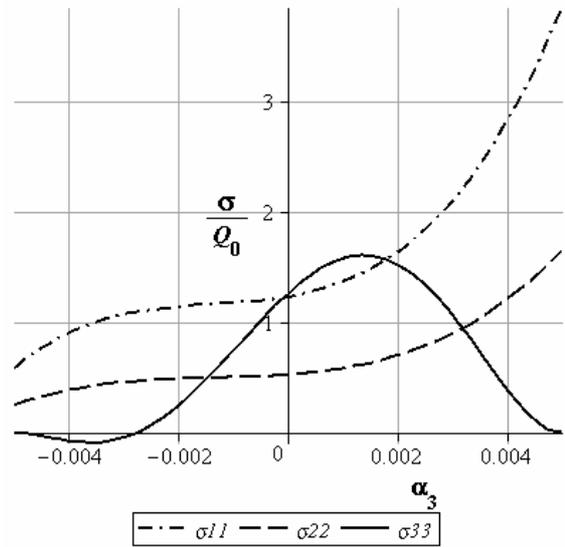


Рис. 4.1, б

Рис. 4.1. Изменение нормальных напряжений по толщине на краю $\xi = \xi_0$ при: а) $k_0 = 1/640$; б) $k_0 = 1/160$.

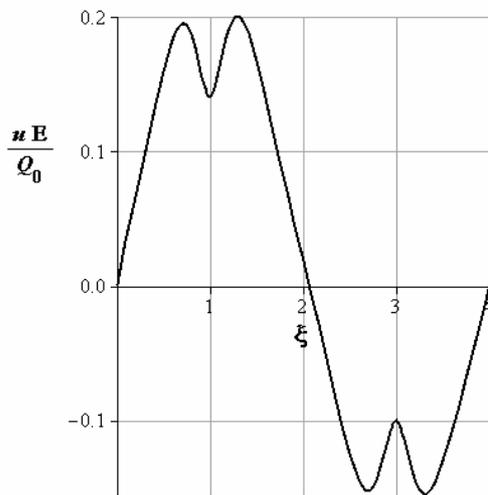


Рис. 4.2, а

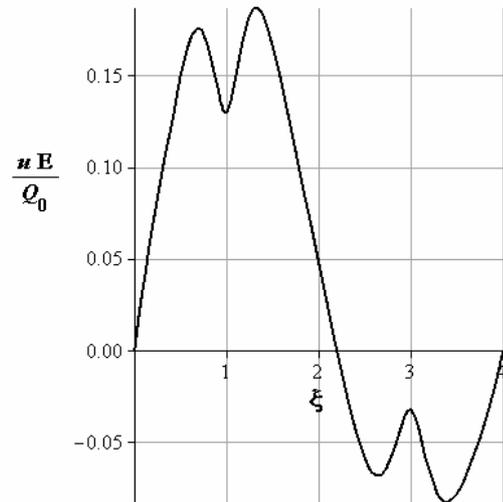


Рис. 4.2, б

Рис. 4.2. Изменение продольного перемещения по длине оболочки на внешней поверхности при : а) $k_0 = 1/640$; б) $k_0 = 1/160$.

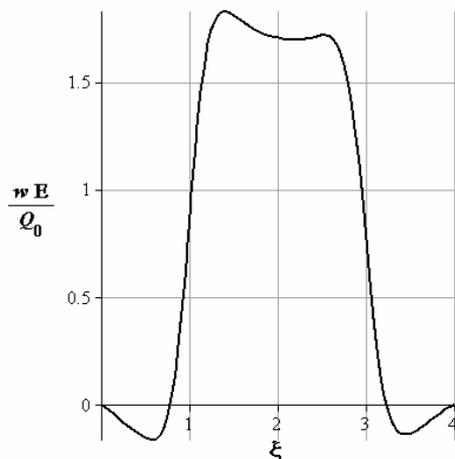


Рис. 4.3, а

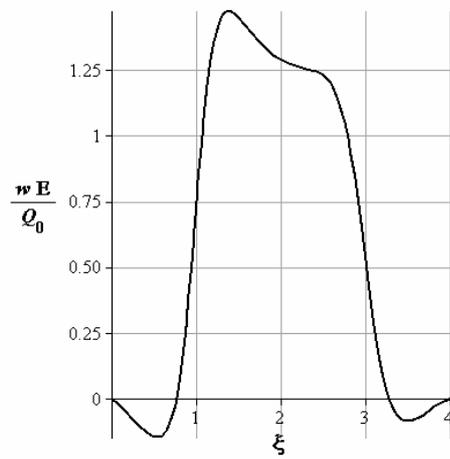


Рис. 4.3, б

Рис. 4.3. Изменение поперечного перемещения по длине оболочки на внешней поверхности при: а) $k_0 = 1/640$; б) $k_0 = 1/160$.

2. Расчет оболочки переменной толщины, изменяющейся несимметрично относительно срединной поверхности

Рассматривается оболочка, толщина которой изменяется по закону $h_1 = h_0 = \varepsilon_0 R = const, h_2 = (\varepsilon_0 + k_0 \xi) R, h_{2e} = (\varepsilon_0 + k_0 \xi_0) R$, имеющая следующие параметры: относительная длина $\xi_0 = L/R = 4$, радиус $R = 0.1 м$, $h_0/R = 1/40$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Локальная нагрузка определяется формулой (4.5).

На рис. 4.4 – 4.6 показаны результаты расчета нормальных напряжений и перемещений при различных значениях k_0 .

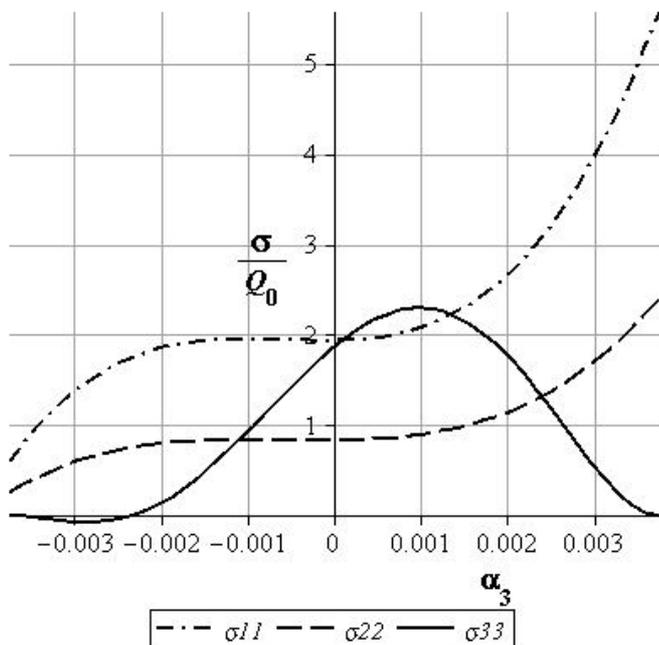


Рис. 4.4, а

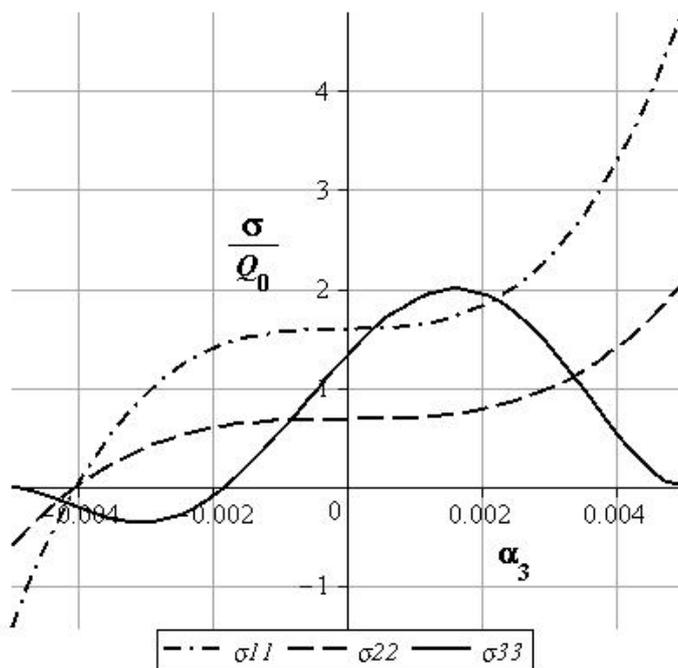


Рис. 4.4, б

Рис. 4.4. Изменение нормальных напряжений по толщине на краю $\xi = \xi_0$ при: а) $k_0 = 1/320$; б) $k_0 = 1/160$.

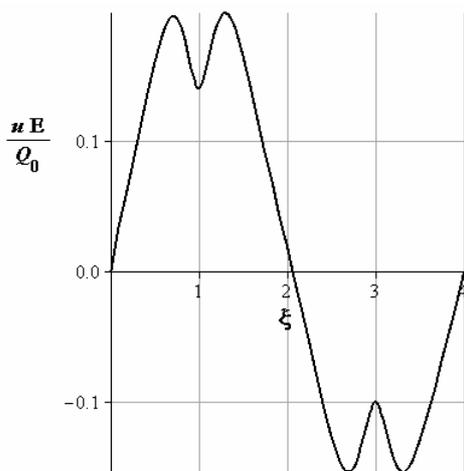


Рис. 4.5, а

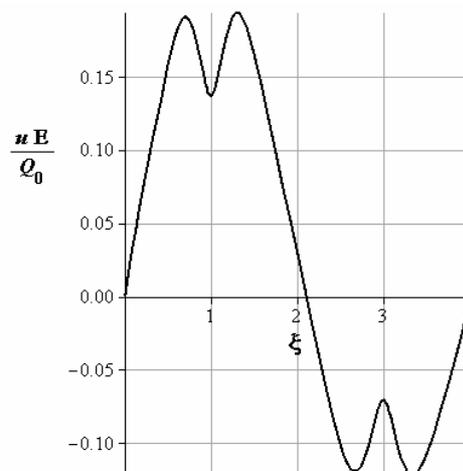


Рис. 4.5, б

Рис. 4.5. Изменение продольного перемещения по длине оболочки на внешней поверхности при: а) $k_0 = 1/320$; б) $k_0 = 1/160$.

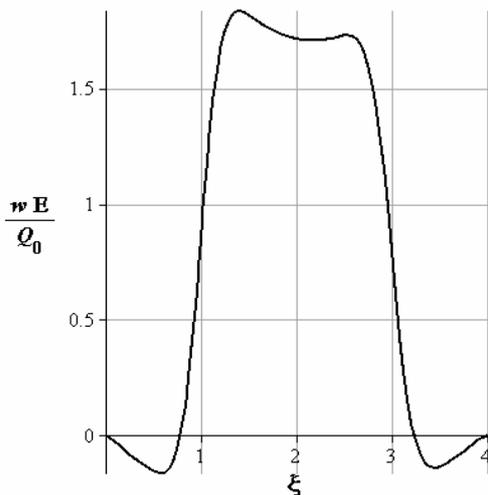


Рис. 4.6, а

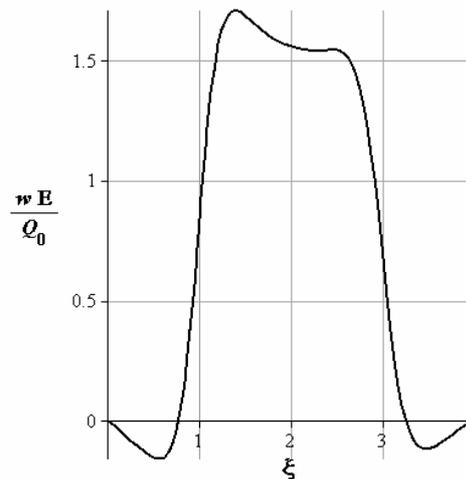


Рис. 4.6, б

Рис. 4.6. Изменение поперечного перемещения по длине оболочки на внешней поверхности при: а) $k_0 = 1/320$; б) $k_0 = 1/160$.

На основании полученных результатов можно установить, что для оболочек, имеющих одинаковое значение толщины, способ изменения толщины (симметричный или несимметричный относительно срединной поверхности) не значительно влияет на перемещения и максимальные величины нормальных напряжений, но существенно влияет на распределение напряжений по толщине оболочки.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Для цилиндрической оболочки переменной в продольном и окружном направлениях толщины построены нелинейные и линейные уравнения, позволяющие уточнить по сравнению с классической и уточненной теориями компоненты НДС в зонах его искажения (краевые области в местах крепления и действия локальной нагрузки).

2. Для круговых цилиндрических оболочек замкнутого и открытого профиля поперечных сечений за счет повышения порядка аппроксимирующих полиномов в разложении компонентов НДС по нормальной к срединной поверхности координате впервые получены уточненные системы дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях и сформулированы граничные условия для основных случаев крепления оболочек.

3. Для круговых цилиндрических оболочек замкнутого и открытого профиля поперечных сечений уточненные уравнения равновесия и граничные условия с помощью разложения перемещений и внешних нагрузок в тригонометрические ряды по окружной и продольной координатам приведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями.

4. Для круговых цилиндрических оболочек замкнутого и открытого профиля поперечных сечений с помощью операторного метода и аппарата операционного исчисления решены уточненные краевые задачи в линейной постановке для ряда случаев действия локальных радиальных нагрузок.

5. На основании анализа соответствующих характеристических уравнений доказано, что по отношению к классической теории оболочек уточненная теория дает возможность получить большие и сверхбольшие корни, которые соответствуют двум типам быстро затухающих от линии НДС типа «погранслоя».

6. Показано, что в зоне искажения напряженного состояния, соизмеримой с толщиной оболочки, поперечные напряжения соизмеримы с основными напряжениями, определяемыми по классической теории, которые также существенно уточняются.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

1. Фирсанов В.В., Чан Нгок Доан, Ле Чунг Хиеу. Исследование напряженно – деформированного состояния цилиндрических оболочек на основе трехмерных уравнений теории упругости // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2012. № 2. С. 98 – 105.
2. Фирсанов В.В., Чан Нгок Доан, Ле Чунг Хиеу. Исследование напряженно – деформированного состояния цилиндрической оболочки по уточненной теории // Вестник МАИ. 2012. Т. 19. № 5. С. 158 – 171.
3. Фирсанов В.В., Чан Нгок Доан, Ле Чунг Хиеу. Исследование напряженно – деформированного состояния открытой цилиндрической оболочки на основе уточненной теории // Вестник МАИ. 2012. Т. 19. № 3. С. 175 – 183.
4. Фирсанов В.В., Ле Чунг Хиеу. Напряженно-деформированное состояние краевого эффекта в цилиндрической оболочке переменной толщины // Вестник МАИ. 2012. Т. 19. № 1. С. 157 – 162.
5. Фирсанов В.В., Ле Чунг Хиеу. Расчет на прочность круглой пластинки с учетом трехмерности НДС в зоне жесткого заземления // Материалы XVI международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. 2009. Т. 2. с. 131-139.
6. Фирсанов В.В., Ле Чунг Хиеу. Уравнения краевого эффекта в цилиндрической оболочке переменной толщины // Материалы XVIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. 2012. Т. 1. С. 180 – 182.
7. Фирсанов В.В., Ле Чунг Хиеу. Напряженно-деформированное состояние круговой цилиндрической оболочки вблизи нерегулярностей // Научно – практическая конференция студентов и молодых ученых МАИ «Инновация в авиации и космонавтике - 2012». 17 – 20 апреля 2012 года. Москва. Сборник тезисов докладов. 2012. С. 275 – 276.
8. Фирсанов В.В., Ле Чунг Хиеу. Об уточнении напряженно – деформированного состояния круговой цилиндрической оболочки // V международная научно-практическая конференция «Инженерные системы - 2012» 16 – 18 апреля 2012 года. Москва. РУДН. Сборник тезисов. С. 74.