На правах рукописи

Савин Александр Александрович

ИССЛЕДОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИИЙ В ЗАДАЧАХ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И ДИНАМИКИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Специальность 01.02.01 Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре «Теоретическая механика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

БАРДИН Борис Сабирович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Российского университета дружбы народов

МУХАРЛЯМОВ Роберт Гарабшевич

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова

КУЛЕШОВ Александр Сергеевич

Ведущая организация:

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Защита состоится **26 декабря 2013 г. в 12 часов 00 минут** на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), расположенном по адресу: 125993, Москва А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВПО Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Автореферат разослан **25 ноября 2013 г.**

Ученый секретарь диссертационного совета,

к.ф.-м.н., доцент Гидаспов В. Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Данная диссертационная работа посвящена исследованию орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела в двух классических задачах механики: в задаче о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой и в задаче о движении спутника (моделируемого твердым телом) относительно центра масс на круговой орбите.

Актуальность темы.

В классической и небесной механике исследование устойчивости периодических движений часто сводится к анализу устойчивости положения равновесия периодической по времени гамильтоновой системы. В задаче об устойчивости гамильтоновой системы, как правило, приходится иметь дело с, так называемыми, критическими случаями, когда для решения вопроса об устойчивости не достаточно исследования линейной системы. Нелинейный анализ является особенно трудным и необходимым при наличии в системе резонансов. По этой причине для решения новых задач об устойчивости движения в классической и небесной механике нередко требуется применение нестандартных идей, учитывающих конкретную специфику задачи, зависимость ее от параметров и возможные особенности уравнений возмущенного движения.

Для строгого решения задачи об устойчивости гамильтоновой системы приходится привлекать целый арсенал методов локального анализа, КАМ теории и общей теории устойчивости. Весьма эффективным, универсальным и хорошо зарекомендовавшим себя при решении конкретных задач устойчивости движения в классической и небесной механике является подход, разработанный а работах Маркеева А.П. Его основная идея состоит в том, что при нелинейном анализе устойчивости неавтономной, периодической по времени гамильтоновой системы следует построить симплектическое отображение, генерируемое системой уравнений возмущенного движения. Задача об устойчивости периодического движения эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки этого отображения. На основании методов КАМ теории были получены алгебраические критерии, позволяющие делать строгие выводы об устойчивости неподвижной точки симплектического отображения, а следовательно, и рассматриваемого невозмущенного движения.

Исследованию устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести посвящено много работ. Несмотря на это, данная задача еще не получила своего полного решения. Это связано как с наличием большого числа параметров (в общем случае их четыре), так и с наличием особых случаев, когда для получения строгого решения задачи требуется проводить сложный нелинейный анализ с учетом членов достаточно высокой степени в разложении Гамильтониана возмущенного движения в окрестности невозмущенной орбиты. В этой связи интерес представляет исследование отдельных частных случаев данной задачи. Наиболее полно исследованными являются интегрируемые случаи.

В работах Иртегова В.Д. и Брюма А.З. для случая Ковалевской на основе второго метода Ляпунова было дано сторогое решение задачи об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний. Болсиновым А.В., Борисовым А.В. и Мамаевым И.С. для решения данной задачи применялись топологические методы, а в работах Маркеева А.П. исчерпывающе исследование указанной задачи было выполнено на основе метода нормальных форм и теории КАМ.

Другим полностью исследованным случаем задачи об орбитальной устойчивости маятниковых движений твердого тела является случай Горячева-Чаплыгина. На основе метода нормальных форм и теории КАМ Маркеевым А.П. было дано полное решение задачи об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений относительно оси динамической симметрии. Маркеевым А.П. также исследовалась линейная задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений относительно экваториальной оси инерции и было установлено, что в этом случае имеет место тождественный резонанс, а применение метода нормальных форм не позволяет провести нелинейных анализ устойчивости. Бардиным Б.С. было показано, что в указанном случае имеет место, так называемая трансцендентная ситуация, когда задача об устойчивости не может быть решена на основании анализа членов любого конечного порядка в разложении гамильтониана возмущенного движения. На основании теоремы Четаева была доказана орбитальная неустойчивость движения в этом случае. Аналогичные результаты были получены Болсиновым А.В., Борисовым А.В. и Мамаевым И.С. на основе топологических методов и Карапепяном А.В. на основании анализа свойств инвариантных множеств.

Исследование орбитальной устойчивости проводилось также и в неинтегрируемых случаях. Алехин А.К. на основании, упомянутой выше методики Маркеева А.П. исследовал орбитальную устойчивость маятниковых движений динамически симметричного твердого тела, та же методика применялась Бардиным Б.С. для случая Бобылева-Стеклова. Ряд случаев линейной задачи об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела были рассмотрены Яхьей Х.М.

Исследование орбитальной устойчивости плоских движений твердого тела представляет интерес не только как задача классической механики, но может иметь также важное прикладное значение для космической динамики. Дело в том, что уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой с точностью до обозначений совпадают с уравнениями движения спутника, движущегося относительно центра масс под влиянием магнитных моментов, в предположении, что моменты прочих сил (в том числе и гравитационных) пренебрежимо малы. Такая ситуация возникает, например, в случае, когда спутник представляет собой сферически симметричное твердое тело, а на его борту установлены сильные магниты.

Маятниковые движения возникают также в задаче о движении спутника относительно центра масс на круговой орбите. Такие движения представляют собой колебания или вращения одной из главных осей инерции спутника в плоскости орбиты. Они являются неустойчивыми по отношению к координатам и скоростям, поэтому весьма актуальной является задача об их орбитальной устойчивости. Эта задача также привлекает большое внимание исследователей, однако ее полное и строгое решение в настоящее время еще не получено. В линейной постановке она решалась Кейном Т., Меировичем Л., Холостовой О.В. При больших значений периода колебаний задачу об орбитальной устойчивости исследовали Акуленко Л.Д., Нестеров С.В., Шматков А.М., а также Нейштадт А.И. и Сидоренко В.В. Был изучен асимптотический характер движения при приближении к сепаратрисе, разделяющей область колебаний и вращений, установлено, что в этом случае имеет место чередование счетного числа областей устойчивости и неустойчивости.

Нелинейная задача об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений для спутников с различной геометрией масс исследовалась в работах Маркеева А.П., Сокольского А.Г., Бардина Б.С., Чекина А.М. Наиболее полные результаты были получены для динамически симметричного спутника и спутника, обладающего геометрией масс пластинки.

Цель работы.

Целью диссертационной работы является строгое исследование орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений в задаче о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой и в задаче о динамически симметричном спутнике, движущемся относительно центра масс на круговой орбите под влиянием сил гравитационного и магнитного взаимодействий.

Научная новизна.

Дано строгое и полное решение задачи об орбитальной устойчивости следующих периодических движений твердого тела:

- маятниковые колебания и вращения динамически симметричного тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, центр масс которого расположен в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, относительно главной экваториальной оси инерции.
- маятниковые колебания и вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, главные моменты инерции которого связаны тем же соотношением, что и в случае Ковалевской, а центр масс занимает произвольное положение.
- маятниковые колебания и вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой относительно средней или наименьшей оси инерции в случае Бобылева-Стеклова

Решена линейная задача об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений динамически симметричного твердого тела (спутника), движущегося относительно центра масс на круговой орбите под влиянием сил гравитационного и магнитного взаимодействия.

Положения и результаты, выносимые на защиту.

Выполнен строгий нелинейный анализ задачи об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле силы тяжести в следующих случаях:

- тело является динамически симметричным, его центр масс расположен в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, а невозмущенное движение переставляет собой колебания или вращения относительно главной экваториальной оси инерции.
- моменты инерции тела удовлетворяют, тому же соотношению, что и в случае Ковалевской, центр масс занимает произвольное положение в теле, невозмущенное движение переставляет собой колебания или вращения относительно главной экваториальной оси инерции.
- геометрия масс тела соответствует случаю Бобылева - Стеклова, а невозмущенное движение переставляет собой колебания или вращения относительно средней или наименьшей оси инерции.

Выполнено полное исследование данной задачи, в области допустимых значений параметров построены диаграммы устойчивости. В двух предельных случаях: колебания с малыми амплитудами и вращения с большим угловыми скоростями введены малые параметры и выполнено аналитическое исследование, результаты которого дополняют и хорошо согласуются с результатами численного анализа.

Исследован вопрос об орбитальной устойчивости колебаний динамически симметричного спутника относительно центра масс, движущегося по круговой орбите под сил гравитационного и магнитного взаимодействия. В нескольких (наиболее характерных) сечениях трехмерного пространства параметров задачи построены диаграммы устойчивости и сделаны выводы об орбитальной устойчивости в линейном приближении или об орбитальной неустойчивости.

Теоретическая и практическая ценность. Практическая ценность и теоретическая значимость состоит в следующем:

- Полученные строгие результаты об орбитальной устойчивости в задаче о маятниковых движениях твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле силы тяжести и результаты исследования линейной задачи об орбитальной устойчивости маятниковых движений намагниченного спутника позволяют делать выводы о качественном характере движения твердого тела и имеют теоретическое значение для развития классической механики и динамики спутников.

- Качественные результаты решения задач об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений могут быть использованы на этапе проектирования космических аппаратов, в частности, при создании системы пассивной стабилизации и ориентации спутника с учетом влияния сил гравитационного и магнитного взаимодействия.

Достоверность результатов.

Достоверность результатов обеспечивается применением строгих математических методов исследования проблемы, хорошим согласованием результатов диссертации с известными классическими результатами, а также полным совпадением выводов, полученных на основании аналитического и численного анализа.

Апробация работы.

Основные результаты диссертационной работы представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2011).

- Всероссийская конференция (с международным участием) «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (Москва, 2012)
- Девятая Международная конференция по Неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012), (Алушта, 2012)
- The IUTAM Symposium "From Mechanical to Biological Systems - an Integrated Approach"(Ижевск, 2012),

а также на семинарах

- Кафедры теоретической механики Московского авиационного института (Москва, 2012)
- Лаборатории компьютерного моделирования Института машиноведения РАН (Москва, 2012)
- Кафедры теоретической механики Московского физико-технического института (Москва, 2013).

Публикации.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в [1–4].

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 79 наименований. Работа содержит 7 иллюстраций. Общий объем диссертации составляет 106 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе дается постановка задачи об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле тяжести, и излагается общая методика строгого исследования данной задачи, основанная на общем подходе, разработанным Маркеевым А.П.

Рассматривается движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Пусть $OXYZ$ - неподвижная система координат, ось OZ которой направлена вертикально вверх. С телом жестко связана подвижная система координат $Oxyz$, образованная главными осями инерции тела для точки O; A, B и C – соответствующие моменты инерции. Предполагается, что центр масс тела лежит в главной плоскости эллипсоида инерции Oxy на расстоянии l от точки O. Положение цента масс на плоскости Oxy задается углом ϑ между радиусом-вектором центра масс тела и осью Ox.

Положение твердого тела в неподвижной системе координат $OXYZ$ будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ. Уравнения движения, описывающие изменение углов Эйлера, можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода, определяемых следующей функцией Лагранжа

$$\begin{aligned} L = &\frac{A}{2}(\dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi)^2 + \frac{B}{2}(\dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi)^2 \\ &+ \frac{C}{2}(\dot\psi \cos\theta + \dot\varphi)^2 - m\,g\,l\, \sin\theta \sin(\varphi + \vartheta). \end{aligned} \tag{1}$$

Лагранжиан (1) допускает частное решение, при котором главная ось инерции Oz сохраняет неизменное горизонтальное положение, а тело совершает плоские маятниковые движения параллельно плоскости Oxy, т.е. движется как физический маятник. При этом $\psi = \pi/2, \quad \theta = 0$, а эволюция угла φ описывается уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu^2 \cos(\varphi + \vartheta) = 0, \quad \mu^2 = mgl/C \tag{2}$$

Поскольку период маятниковых колебаний и вращений твердого тела зависит от начальных условий, то эти движения будут неустойчивы по Ляпунову по отношению к обобщенным координатам (углам Эйлера) и скоростям. В этом случае как с теоретической, так и с прикладной точек зрения большой интерес представляет вопрос об орбитальной устойчивости данных периодических движений.

В диссертационнной работе исследуется задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела: колебаний и вращений относительно оси Oz. Везде далее предполагается, что проекция кинетического момента на вертикаль, являющаяся первым интегралом движения, остается неизменной и равной нулю.

Уравнения движения можно записать в гамильтоновой форме, где в качестве канонических переменных выбрать углы Эйлера и соответствующие им импульсы. Перейдя к новым каноническим безразмерным переменным

$$q_1 = \varphi - \frac{3\pi}{2}, \quad q_2 = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad p_1 = p_\varphi/\mu C, \quad p_2 = p_\theta/\mu C, \tag{3}$$

и безразмерному времени $\tau = \mu t$, получим гамильтониан

$$H = \frac{1}{I_a I_b}\left[\tan^2 q_2 \left(I_a \sin^2 q_1 + I_b \cos^2 q_1\right) + I_a I_b\right]\frac{p_1^2}{2} + \frac{1}{I_a I_b}\left(I_b \sin^2 q_1 + I_a \cos^2 q_1\right)\frac{p_2^2}{2}$$
$$+ \frac{I_a - I_b}{I_a I_b} \sin q_1 \cos q_1 \tan q_2 \, p_1 p_2 - \cos(q_1 + \vartheta)\cos q_2, \tag{4}$$

Решение задачи об орбитальной устойчивости маятниковых движений тела зависит от значений следующих величин: параметров $I_a = A/C$ и $I_b = B/C$, характеризующих соотношения между моментами инерции, угла ϑ, определяющего положение центра масс тела, и значения интеграла энергии h на невозмущенном движении. Таким образом, в общем случае задача содержит четыре параметра. Такое количество параметров сильно усложняет как проведение вычислений, так и возможность представления результатов. В диссертационной работе рассмотрено три частных случая, в которых накладываются ограничения на геометрию масс тела, что позволяет сократить число параметров задачи до двух.

Кратко опишем методику решения задачи об орбитальной устойчивости. Для описания движения вблизи невозмущенной периодической орбиты вместо пары канонических переменных q_1, p_1 вводятся новые переменные I, w, которые на невозмущенном движении являются переменными действие-угол. Исследуемые периодические движения в новых переменных задаются следующим образом

$$I(\tau) = I_0 = const, w(\tau) = \omega(I_0)\,\tau + w(0), p_2 = 0, q_2 = 0 \tag{5}$$

Гамильтониан (4) разлагается в ряд по степеням $r_1 = I - I_0$, q_2, p_2

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \dots + \Gamma_{2m} + \dots\ , \tag{6}$$

где Γ_2 и Γ_4 – формы второго и четвертого порядков относительно $\sqrt{r_1}$, q_2, p_2, коэффициенты которых периодически зависят от w. Для каждого рассмотренного в работе случая эти коэффициенты были определены явно.

Система канонических уравнений с функцией Гамильтона (6) описывает возмущенное движение в окрестности невозмущенной периодической орбиты $I = I_0$, $q_2 = p_2 = 0$.

Для решения вопроса об орбитальной устойчивости достаточно рассмотреть движение на фиксированном уровне интеграла энергии $\Gamma = 0$, соответствующем невозмущенному движению. Уравнения возмущенного движения на этом уровне энергии (уравнения Уиттекера) получаются в результате выполнения изоэнергетической редукции и имеют вид

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial K}{\partial q_2}. \tag{7}$$

Таким образом, задача об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений симметричного твердого тела с неподвижной точкой свелась к исследованию устойчивости положения равновесия неавтономной гамильтоновой системы (7), правые части которой периодически зависят от новой независимой переменной w.

Исследование устойчивости положения равновесия системы (7) начинается с анализа линейной системы. В зависимости от значений корней ее характеристического уравнения делаются выводы о неустойчивости или об устойчивости в линейном приближении. В общем случае определяющий коэффициент характеристического уравнения можно получить только при помощи численного интегрирования линейной системы. На основе такого численного анализа в пространстве параметров задачи строятся области неустойчивости и области устойчивости в линейном приближении.

Строгие выводы об орбитальной устойчивости периодических движений для значений параметров из областей орбитальной устойчивости в линейном приближении, а также на их границах, можно получить на основании нелинейного анализа с учетом членов не ниже четвертой степени в гамильтониане (6).

Нелинейный анализ устойчивости удобно проводить следуя методике, разработанной Маркеевым А.П. Суть данной методики состоит в построении симплектического отображения, порождаемого системой нелинейных уравнений (7), и исследовании устойчивости его неподвижной точки. Задача об устойчивости неподвижной точки данного отображения эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия системы (7). В главе 1 описана методика построения симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком, системы (7) и приведены известные критерии устойчивости его неподвижной точки.

Во второй главе проведено исследование орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений динамически симметричного ($A = C$) тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Предполагается, что центр масс тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Невозмущенное движение представляет собой маятниковые колебания или вращения относительно неподвижной в абсолютном пространстве главной оси инерции Oz, расположенной в экваториальной плоскости.

При наложенных ограничениях на геометрию масс рассматриваемая задача содержит два параметра: параметр $\nu = \sqrt{C/B}$, который связан с введенным ранее инерционным параметром I_b соотношением $\nu^2 = 1/I_b$, и значения интеграла энергии h на невозмущенном движении. При этом $I_a = 1, \vartheta = 0$

Для большинства значений параметров на основании методики, изложенной в первой главе, численно было построено симплектическое отображение, генерируемое фазовым потоком уравнений возмущенного движения. На основе анализа коэффиицентов данного отображения были получены строгие выводы об орбитальной устойчивости или неустойчивости маятниковых периодических движений. Численный анализ проводился в диапазоне параметров $\nu \in [1/\sqrt{2}; 6]$, $h \in [-1; 1) \cup (1; 3]$. Опишем его результаты, которые представленны на рис. 1. Плоскость параметров задачи разделяется прямой $h = 1$ на две зоны: зону колебаний ($|h|<1$) и зону вращений ($h > 1$). Штриховкой показаны области, где имеет место орбитальная неустойчивость маятниковых периодических движений. В незаштрихованных областях имеет место орбитальная устойчивость в линейном приближении. Для получения строгих выводов об устойчивости здесь потребовался нелинейный анализ, результаты которого описаны ниже.

Дадим еще некоторые комментарии к рис. 1. В случае колебаний области орбитальной неустойчивости исходят из точек прямой $h = -1$ с целочисленными координатами по оси ν. С возрастанием h границы смежных областей орбитальной неустойчивости сближаются и пересекаются на границе зон колебаний и вращений в точках $P_1(1; 1)$, $P_2(1; 2)$, $P_3(1; 4)$. Из этих же точек в зону вращений исходят три области орбитальной устойчивости в линейном приближении, обозначенные на рис. 1 через D_1, D_2, D_3. В той части плоскости параметров ν и h, которая представлена на рис. 1, область D_3 является очень узкой, поэтому она изображена в виде линии. На самом деле, как показали численные расчеты, эта область имеет ненулевую меру и расширяется с возрастанием h.

На границах α_n, β_n областей орбитальной неустойчивости реализуются резонансы первого и второго порядков, причем на границах с четным номером n имеет место резонанс первого порядка, а на границах с нечетным номером n – резонанс второго порядка.

Резонанс четвертого порядка имеет место на кривых γ_i ($i = 1, 2, \ldots$), изображенных на рис.1 пунктирными линиями, начинающимися из точек с координатами $(-1; n/2)$ и продолжающимися из зоны колебаний в зону вращений.

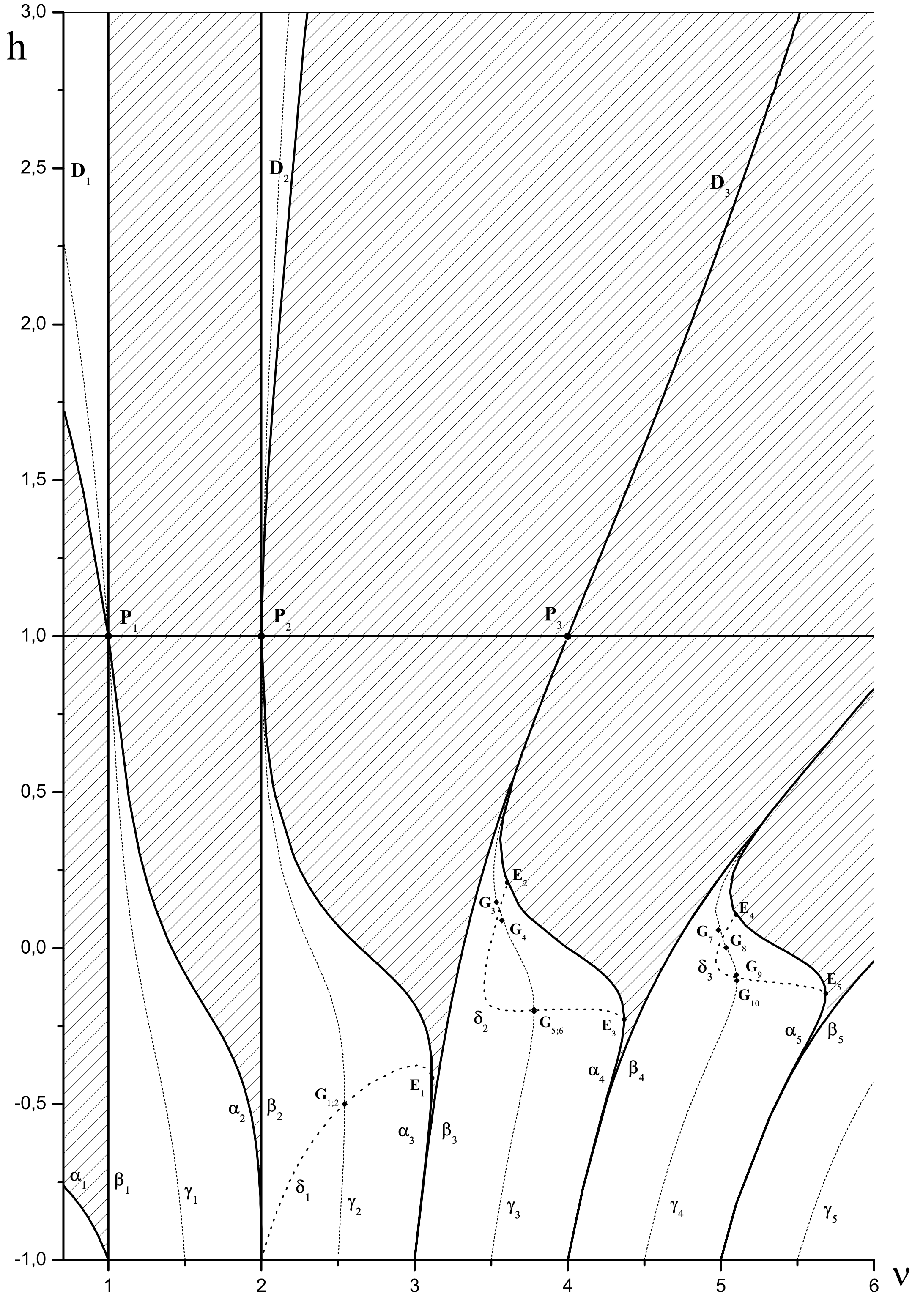

Рис. 1: Диаграмма устойчивости симметричного твердого тела при $I_a = 1, \vartheta = 0$

Для всех значений параметров из областей устойчивости в линейном приближении, изображенных на рис.1, а также на их границах проводился численный нелинейный анализ. Исключение составляет лишь узкая область D_3, в которой нелинейный анализ устойчивости не выполнялся. Расчеты показали, что в областях устойчивости в линейном приближении вне кривых $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, которые в дальнейшем будем называть кривыми вырождения и вне кривых γ_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, отвечающих резонансам четвертого порядка, плоские периодические колебания и вращения орбитально устойчивы.

В случае резонанса четвертого порядка были получены следующие выводы об орбитальной устойчивости периодических движений на резонансных кривых γ_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. На кривой γ_1 и кривой γ_5, в той ее части, которая изображена на рис. 1, плоские колебания и вращения орбитально устойчивы. На кривых γ_2, γ_3, γ_4 в окрестности точек их пересечения с кривыми вырождения $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ имеются небольшие участки, где плоские колебания орбитально неустойчивы. Эти участки ограничены токами G_j $(j = 1, \ldots, 10)$, координаты которых приведены в таблице 1. Вне указанных участков плоские колебания и вращения орбитально устойчивы. Отметим, что участки, ограниченные точками G_1, G_2, и G_5, G_6, очень малы, поэтому на рис.1 для них применяются обозначения $G_{1;2}$ и $G_{5;6}$ соответственно.

Таблица 1.

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}
ν	2,544	2,544	3,535	3,569	3,780	3,780	4,983	5,035	5,102	5,104
h	-0,500	-0,501	0,148	0,089	-0,197	-0,204	0,058	0,001	-0,086	-0,104

Кривые вырождения $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ пересекаются с границами областей неустойчивости в точках E_k $(k = 1, \ldots, 5)$, координаты которых приведены в таблице 2. В этих точках происходит изменение орбитальной устойчивости на неустойчивость и наоборот. В частности, на участке граничной кривой α_3, расположенном ниже точки E_1 плоские колебания орбитально неустойчивы, а на участке, расположенном выше точки E_1 плоские колебания орбитально устойчивы. На участке кривой α_4, ограниченном точками E_2 и E_3, плоские колебания орбитально устойчивы, а вне данного участка на указанной кривой имеет место орбитальная орбитальная неустойчивость плоских колебаний. Аналогичная ситуация возникает на кривой кривой α_5, на участке ограниченном точками E_4 и E_5, плоские колебания орбитально устойчивы, а вне данного участка на указанной кривой имеет место орбитальная орбитальная неустойчивость плоских колебаний. Кривые α_1, α_2, β_3, β_4, β_5 отвечают орбитально устойчивым периодическим движениям.

Таблица 2.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
ν	3,115	3,604	4,369	5,098	5,684
h	-0,417	0,210	-0,229	0,108	-0,146

При значениях параметров на кривых $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, а также в точках G_j ($j = 1, \ldots, 10$) и E_k ($k = 1, \ldots, 5$) требуется нелинейный анализ с учетом членов выше четвертой степени функции Гамильтона (6). В диссертационной работе такой анализ не проводился.

В двух предельных случаях: колебаний с малыми амплитудами и вращений с большими средними угловыми скоростями, был введен малый параметр и выполнено аналитическое исследование орбитальной устойчивости. Результаты численного и аналитического исследования полностью согласуются.

В третьей главе рассматривается задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой со следующей геометрией масс: моменты инерции удовлетворяют соотношениям для случая Ковалевской, а на положение центра масс не накладывается никаких ограничений. Невозмущенные движения представляют собой маятниковые колебания и вращения, при которых главная плоскость инерции, содержащая центр масс и полярную ось эллипсоида инерции, движется в вертикальной плоскости, а главная ось инерции, ей перпендикулярная, сохраняет неизменное горизонтальное положение. При наложенном ограничении на геометрию масс тела инерционные параметры задачи принимают фиксированные значения $I_a = 1, I_b = 1/2$. Таким образом, в задаче имеется два параметра: параметр ϑ, который представляет собой угол между радиус-вектором центра масс и осью Ox и значение интеграла энергии h на невозмущенном движении.

Строгий анализ орбитальной устойчивости маятниковых движений для произвольных значений параметров выполнялся на основании методики, изложенной в главе 1. С этой целью сначала было проведено исследование в рамках линейного приближения. При этом параметры h и ϑ изменялись с шагом $0,01$ в диапазоне $h \in (1; 100]$, $\vartheta \in [0; \pi/2)$. Оказалось, что маятниковые вращения твердого тела орбитально неустойчивы при всех значения параметров из указанного диапазона. На основании проведенных расчетов была также построена диаграмма орбитальной устойчивости маятниковых колебаний, изображенная на рис. 2.

Штриховкой показана построенная на основании линейного анализа область

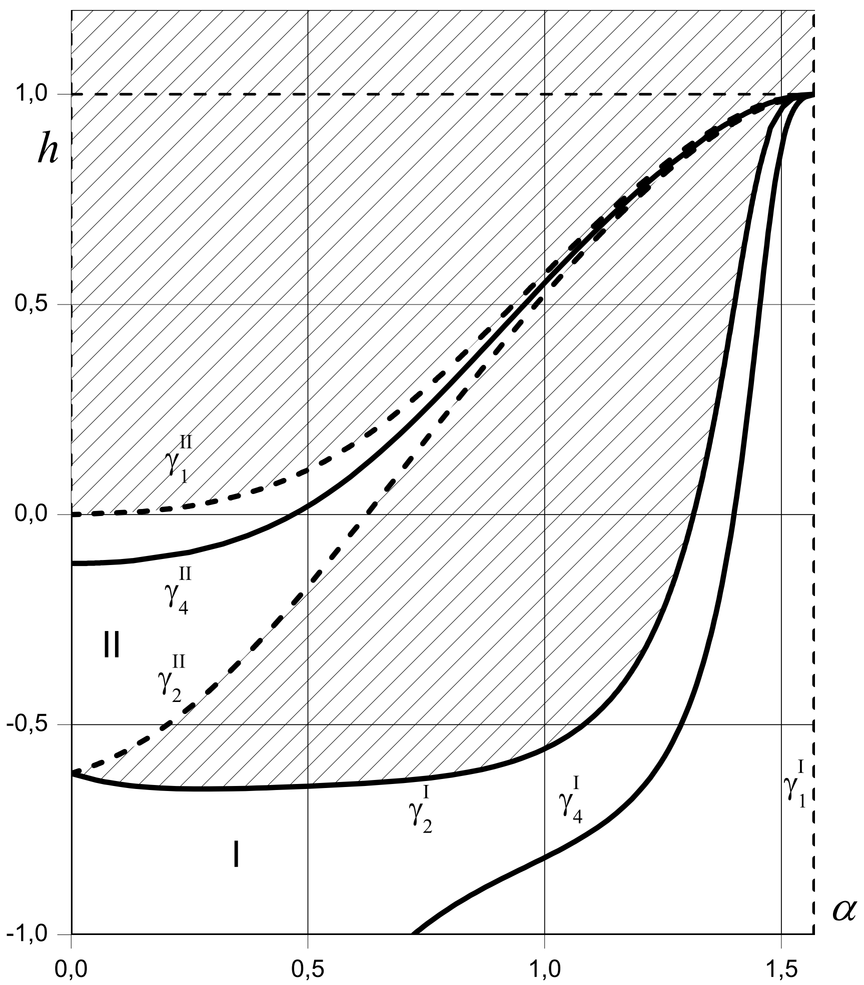

Рис. 2: Диаграмма устойчивости симметричного твердого тела при $I_a = 1, I_b = 1/2$

орбитальной неустойчивости плоских маятниковых колебаний твердого тела. В незаштрихованных областях I и II плоские маятниковые колебания устойчивы в линейном приближении. Символом γ обозначены резонансные кривые первого, второго и четвертого порядков. Нижний индекс в названии кривых обозначает порядок резонанса, верхний – номер области, которую эта кривая ограничивает или в случае резонансов четвертого порядка содержится.

Для значений параметров из областей орбитальной устойчивости в линейном приближении, а также на их границах (где реализуются резонансы первого и второго порядков) было выполнено строгое нелинейное исследование орбитальной устойчивости. Оказалось, что маятниковые колебания твердого тела орбитально устойчивы для значений параметров из областей I и II, а также на границе γ_2^{I} . На граничных кривых $\gamma_1^{\mathrm{II}}, \gamma_2^{\mathrm{II}}$ маятниковые колебания твердого тела орбитально неустойчивы.

Показано, что когда центр масс лежит на оси динамической симметрии (случай интегрируемости Лагранжа) возникает трансцендентная ситуация, когда задача об устойчивости не решается членами конечного порядка в разложении гамильтониана (6) в ряд в окрестности невозмущенной периодической орбиты. В диссертационной работе на основании теоремы Четаева доказана орбитальная неустойчивость периодических движений в этом случае. Кроме того, в случаях малых колебаний и вращений с большими средними угловыми скоростями на основе метода малого параметра было выполнено аналитическое исследование орбитальной устойчивости, результаты которого показали полное согласование описанными выше с результатами численного анализа.

В четвертой главе исследуется орбитальная устойчивость маятниковых периодических движений твердого тела с неподвижной точкой в случае Бобылева-Стеклова, т.е. когда центр масс лежит на оси Ox, а для моментов инерции выполняется соотношение $A = 2B$. Невозмущенное движение представляет собой колебания или вращения относительно главной оси инерции Oz.

Рассматриваемая задача содержит два параметра: параметр $\alpha = C/B$ (причем $1 < \alpha \leqslant 3$), который связан с инерционными параметрами I_a и I_b следующими соотношениями $\alpha = 1/I_b = 2/I_a$, и значения интеграла энергии h на невозмущенном движении.

В соответствии с методикой, изложенной в главе 1, для значений параметров из диапазона $\alpha \in [1; 3)$ и $h \in [-1; 1) \cup (1; 3]$ был выполнен строгий анализ орбитальной устойчивости невозмущенного движения и на его основе были сделаны выводы об орбитальной устойчивости или неустойчивости маятниковых периодических движений. Не останавливаясь на этапах анализа устойчивости опишем результаты проведенного исследования, которые представлены на диаграмме, изображенной на рис. 3.

Плоскость параметров задачи разделяется прямой $h = 1$ на две зоны: зону колебаний ($|h|<1$) и зону вращений ($h > 1$). Штриховкой показаны области орбитальной неустойчивости, в незаштрихованных областях периодические движения орбитально устойчивы, включая все кривые γ_i резонансов четвертого порядка. Кривые α_i и β_i являются резонансными кривыми первого и второго порядков соответственно и разделяют области орбитальной неустойчивости и орбитальной устойчивости. На участках граничных кривых, изображенных пунктиром, имеет место орбитальная неустойчивость периодических движений, а на участках, изображенных сплошными линиями, периодические движения орбитально устойчивы. Кривая

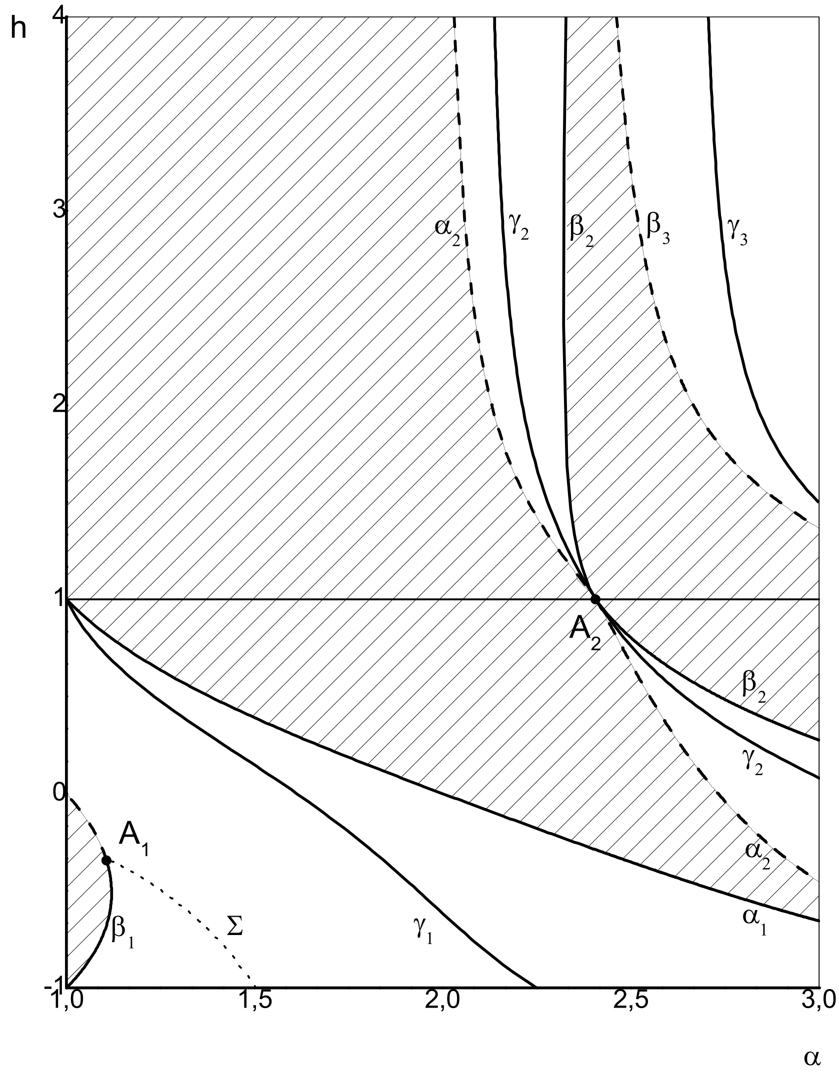

Рис. 3: Диаграмма устойчивости в случае Бобылева–Стеклова

Σ пересекается с границей β_1 области неустойчивости в точке A ($\alpha = 1,106$, $h = -0,345$). Данная точка делит граничную кривую на участок устойчивости и участок неустойчивости маятниковых колебаний. В самой этой точке и на кривой Σ вопрос об орбитальной устойчивости остается открытым. Для его решения необходимо рассматривать члены выше четвертого порядка.

Аналитически исследованы два предельных случая: колебания с малыми амплитудами и вращения с большими угловыми скоростями. Результаты аналитического исследования задачи полностью согласуются с результаты численного исследования и, кроме того, позволили получить асимптотики границ областей орбитальной устойчивости.

В пятой главе рассматривается задача об орбитальной устойчивости в линейном приближении плоских маятниковых колебаний динамически симметричного спутника на круговой орбите под действием магнитных и приливных гравитационных сил. Спутник моделируется динамически симметричным твердым телом, линейные размеры которого малы по сравнению с размерами орбиты центра масс. Последнее предположение позволяет рассматривать задачу в ограниченной постановке, т.е считать, что движение спутника относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс.

Для описания движения спутника вводятся следующие системы координат. Орбитальная система координат $OXYZ$, ось OX которой направлена вдоль радиуса-вектора центра масс, ось OY – вдоль вектора скорости центра масс, а ось OZ – по нормали к плоскости орбиты. Связанная система координат $Oxyz$ оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника так, что Oz является осью динамической симметрии спутника. Ориентация связанной системы координат относительно орбитальной системы задается при помощи углов Эйлера ψ, ϑ, φ.

В диссертационной работе предполагается, что магнитный момент возникает из-за намагничивания материала оболочки спутника магнитным полем Земли. Для достаточно вытянутых спутников его можно считать направленным вдоль оси Oz.

В качестве модели геомагнитного поля Земли примем дипольную модель. Будем считать, что ось магнитного диполя Земли совпадает с осью ее вращения (прямой диполь), а орбита спутника лежит в плоскости экватора. В этом случае вектор магнитной напряженности во всех точках орбиты перпендикулярен к ее плоскости. При сделанных предположениях уравнения движения намагниченного спутника относительно центра масс можно записать в канонической форме. Принимая за независимую переменную истинную аномалию $\nu = \omega_0 t$ и вводя безразмерные импульсы $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$, нормированные множителем $A\omega_0$, для функции Гамильтона имеем следующее выражение

$$H = \frac{1}{2\sin^2\theta}(p_\psi + 1)^2 - p_\psi + \frac{1}{2}p_\theta^2 + \frac{3}{2}(\alpha - 1)\sin^2\psi \sin^2\theta \ - \frac{1}{2}\xi\cos^2\theta. \qquad (8)$$

где $\alpha = C/A (0 \leq \alpha \leq 2)$, ω_0 - угловая скорость движения по орбите, а

$$\xi = \frac{(\mu_0 - 1)\,\mu_E^2\,V}{4\pi R^6} \qquad (9)$$

V – объем спутника, μ_0 – магнитная проницаемость оболочки спутника, $R = |\mathbf{R}|$ – радиус орбиты, μ_E – постоянная земного магнетизма.

Угол φ является циклической координатой, поэтому соответствующий импульс является первым интегралом движения $p_\varphi = \text{const}$. Плоские

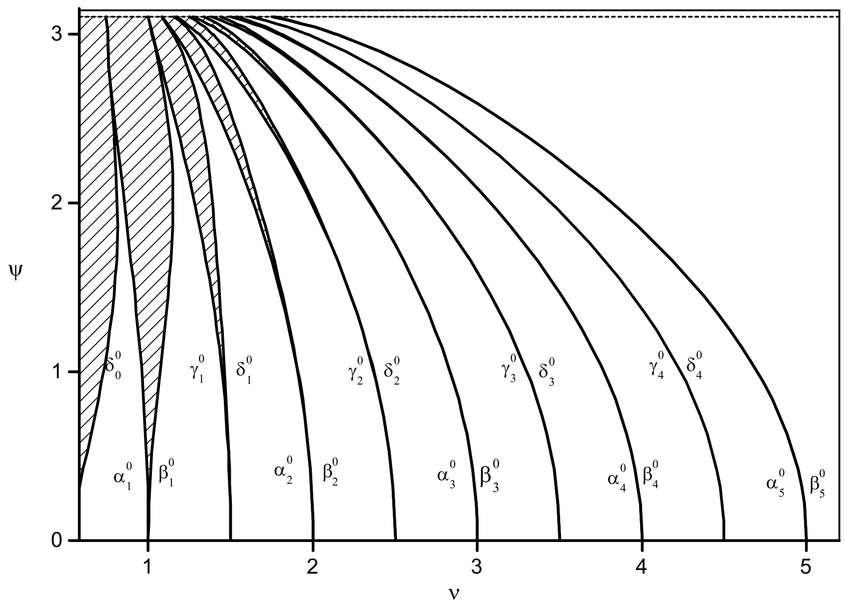

Рис. 4: Диаграмма устойчивости в случае $\xi = 0$

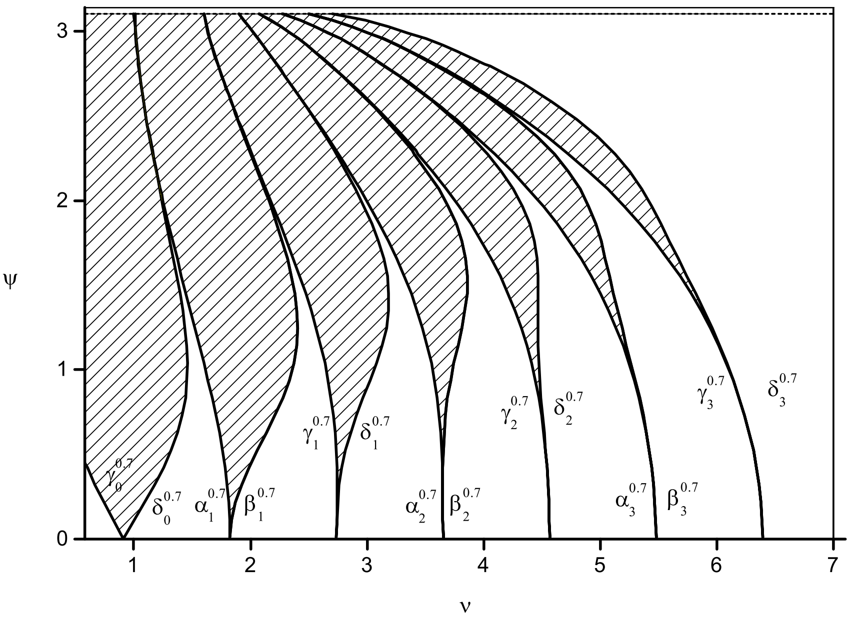

Рис. 5: Диаграмма устойчивости в случае $\xi = 0.7$

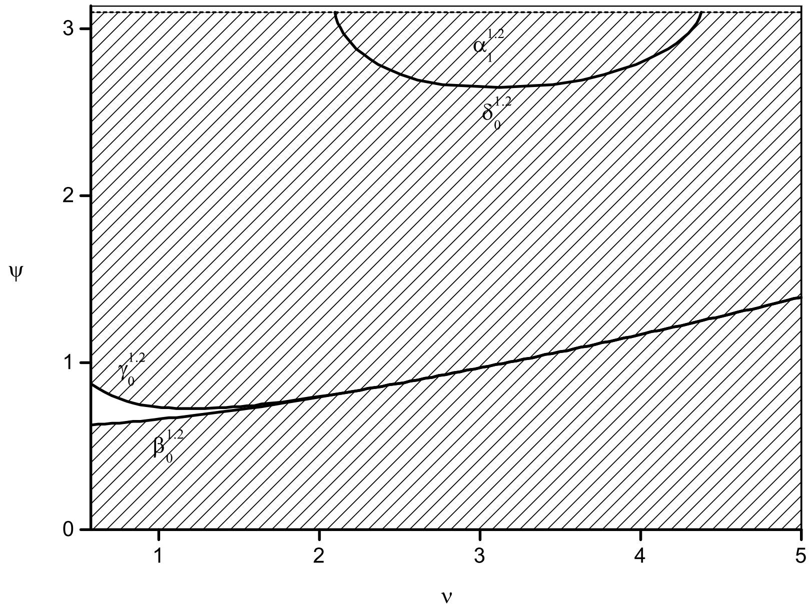

Рис. 6: Диаграмма устойчивости в случае $\xi = 1.2$

периодические движения возможны только при $p_\varphi = 0$. Гамильтониан (8) получен в предположении, что возмущения также удовлетворяют последнему равенству. В импульс p_ψ, соответствующий абсолютному движению, заменен на импульс $p_\psi - 1$, соответствующий относительному движению в орбитальной системе координат.

Допустимые значения параметров представляют собой трехмерную область $(\alpha, \xi, \rho) \in \Lambda = (1, 2) \times (-\infty, \infty) \times [0, \pi)$. Для значений параметров в сечениях $\xi = 0$, $\xi = 0.7$ и $\xi = 1.2$ был выполнен линейный анализ устойчивости, на основании которого были построены диаграммы устойчивости, изображенные на рисунках 4,5,6. По оси абсцисс откладывается значение параметра ν, связанного с инерционным параметром α соотношением $\nu = \sqrt{1/3}\,(\alpha - 1)^{-1/2}$, а по оси ординат удвоенная амплитуда колебаний. Штриховкой показаны области орбитальной неустойчивости, в незаштрихованных областях периодические движения устойчивы в линейном приближении. Кривые α и β являются резонансными кривыми первого порядка, кривые γ и δ – второго, они разделяют области орбитальной неустойчивости и орбитальной устойчивости в линейном приближении для данных сечений. Верхний индекс в названии кривых обозначает значение параметра ξ на сечении, нижний – номер резонансной поверхности, которую это это сечение пересекает.

Основные выводы

1. Выполнено строгое исследование орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой для трех случаев геометрии масс:

   - Твердое тело обладает динамической симметрией, а центр масс лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции.
   - Главные моменты инерции твердого тела связаны тем же равенством, что и в случае С. Ковалевской; центр масс тела может занимать произвольное положение.
   - Случай Бобылева-Стеклова

   В этих случаях анализ устойчивости был выполнен для большинства допустимых значений параметров задачи. В окрестности невозмущенного периодического движения введены локальные координаты и уравнения возмущенного движения записаны в гамильтоновой форме. На основе линейного анализа найдены области орбитальной неустойчивости. Вне указанных областей выполнен нелинейный анализ с учетом членов до четвертой степени включительно в разложении функции Гамильтона в ряд в окрестности невозмущенного движения. Нелинейная задача об орбитальной устойчивости сведена к анализу устойчивости неподвижной точки симплектического отображения, генерируемого системой уравнений возмущенного движения. Коэффициенты симплектического отображения определялись численнои по их значениям на основании известных критериев были сделаны выводы об орбитальной устойчивости или неустойчивости исследуемого периодического движения.

   В случаях колебаний с малыми амплитудами и вращений с большими угловыми скоростями, когда удается ввести малый параметр, орбитальная устойчивость исследована аналитически. Результаты аналитического исследования задачи полностью согласуются с результатами численного исследования, а также дополняют их следующим образом:

   - В первом случае динамически симметричного тела установлено, что множество областей орбитальной устойчивости и неустойчивости является счетным, а также получены качественные выводы об их асимптотическом поведении при больших угловых скоростях вращения тела.

- В случае Бобылева-Стеклова получены асимптотики границ областей орбитальной устойчивости.

Во втором рассматриваемом случае показано, что когда центр масс лежит на оси динамической симметрии (случай интегрируемости Лагранжа) известные критерии устойчивости неприменимы. В этом случае на основании теоремы Четаева доказана орбитальная неустойчивость периодических движений.

2. Исследована задача об устойчивости маятниковых колебаний относительно центра масс намагниченного динамически симметричного спутника (твердого тела) на круговой орбите. На основе численного анализа корней характеристического уравнения линеаризованной системы возмущенного движения, получены строгие выводы об орбитальной неустойчивости и об орбитальной устойчивости в линейном приближении. Исследование выполнено в пространстве трех параметров задачи, а его результаты представлены на диаграммах устойчивости.

Публикации по теме диссертации в журналах перечня ВАК

1. *Бардин Б.С., Савин А.А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 249–266.

2. *Bardin, B. S., Savin A.A.* On the Orbital Stability of Pendulum-like Oscillations and Rotations of a Symmetric Rigid Body with a Fixed Point // Regul. Chaotic Dyn. 2012. Vol. 17. no. 3–4. P. 243–257.

3. *Bardin B. S., Rudenko T.V. Savin, A.A.* On the Orbital Stability of Planar Periodic Motions of a Rigid Body in the Bobylev–Steklov Case // Regul. Chaotic Dyn. 2012. Vol. 17. no. 6. P. 533–546.

4. *Бардин Б.С., Савин А.А.* Об устойчивости плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 6.