

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи



Сухарев Тимур Юрьевич

Численное моделирование процессов гидродинамического перемешивания

Специальность 01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., проф.

Ревизников Д. Л.

Москва – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ.	11
1.1. Обзор литературы.	12
1.2. Методы моделирования процессов перемешивания.	24
1.3. Критерии эффективности перемешивания.....	32
Глава 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В УСТАНОВКАХ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ТИПА.	39
2.1. Постановка задачи.	39
2.2. Анализ результатов и сравнение с экспериментом.	42
2.3. Исследование влияния амплитудно-частотных характеристик колебаний рабочего элемента на процесс перемешивания.	45
2.4. Оптимизация пространственного расположения лопаток.	48
2.5. Влияние формы лопатки на эффективность перемешивания.	52
2.6. Масштабирование перемешивающих устройств колебательного типа.	55
2.7. Выводы к главе 2.....	57
Глава 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В СИСТЕМЕ ПОДВИЖНЫХ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ.	58
3.1. Постановка задачи.	58
3.2. Валидация математической модели и численных алгоритмов.	61
3.3. Анализ результатов.	65
3.4. Профилирование поверхностей рабочих элементов.	67
3.5. Масштабирование в системе подвижных профилированных цилиндров. ...	69
3.6. Использование других протоколов перемешивания.	72
3.7. Выводы к главе 3.....	74
Глава 4. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ДИНАМИЧЕСКИМ МОДАМ.	76
4.1. Описание алгоритма разложения по динамическим модам.	76
4.2. Тестирование программной реализации DMD-алгоритма.	80

4.3. Редукция моделей гидродинамического перемешивания на основе DMD-алгоритма.	83
4.4. Постановка задачи перемешивания и методы численного моделирования.	84
4.5. Анализ результатов.	85
4.6. Выводы к главе 4.	90
Глава 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ С ВОЛОКНИСТЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ.	91
5.1. Математическая модель и вычислительные алгоритмы.	93
5.2. Тестирование комплекса программ для моделирования динамики гибкого волокна в жидкой среде.	99
5.3. Постановка задачи перемешивания с волокнистыми включениями.	105
5.4. Анализ результатов.	107
5.5. Выводы к главе 5.	111
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.	112
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.	114

ВВЕДЕНИЕ.

Актуальность темы. Гидродинамическое перемешивание присутствует во многих производственных технологических циклах, где необходимо равномерно распределить примесь по рабочему объему перемешивающего устройства. В некоторых областях промышленности, таких как производство композитных материалов, суспензий, битумов, моющих средств и др., в качестве примеси используются твердотельные взвешенные частицы и волокнистые включения. Понимание механического и реологического поведения отдельных частиц примеси и их агрегатов имеет важное значение для повышения эффективности этих технологий. Как правило, такие процессы рассматриваются в рамках теории двухфазных сред. Мощным инструментом в данном направлении является компьютерное моделирование. В настоящее время вычислительные мощности ЭВМ позволяют использовать сложные математические модели, которые дают возможность в деталях проследить ход протекаемых процессов. Разработанные при этом программно-алгоритмические решения могут быть использованы для создания эффективных схем устройств микширования и режимов их работы. Ряд значимых результатов в этом направлении был получен в филиале Института машиноведения имени А.А. Благонравова Российской академии наук «Научный центр нелинейной волновой механики и технологии РАН». Представленная работа базируется на исследованиях этой научной школы.

Целью работы является создание методов, алгоритмического и программного обеспечения для моделирования процессов гидродинамического перемешивания и их применения для выбора эффективных схем и оптимальных режимов работы смесительных устройств. В диссертации были поставлены и решены следующие задачи:

1. Проведен анализ существующих методов моделирования двухфазных течений жидкости.

2. Расширен функционал программного комплекса вычислительной гидродинамики Fluent с помощью технологии UDF (user defined function) с целью моделирования течений жидкости в установках с элементами, совершающими колебательные и вращательные движения.
3. Разработаны эффективные численные алгоритмы для описания динамики дисперсной фазы и оценки эффективности перемешивания.
4. Выполнен сравнительный анализ полученных результатов с экспериментальными данными и результатами работ других авторов.
5. Проведен широкомасштабный параметрический анализ с целью выявления режимов работы устройств колебательного типа, обеспечивающих эффективное перемешивание при приемлемых энергетических затратах.
6. Найдены оптимальные с практической точки зрения протоколы перемешивания в системе подвижных коаксиальных цилиндров.
7. Сформулированы числа подобия для перемешивающих устройств двух различных классов.
8. На основе разложений по динамическим модам (DMD-алгоритм) построены редуцированные модели гидродинамического перемешивания, обеспечивающие эффективное хранение информации о поле течения.
9. Разработана математическая модель процессов перемешивания в жидких средах с волокнистыми включениями. Модель реализована в программном комплексе.
10. Проведено исследование влияния разрывного протокола на перемешивание и ориентацию ансамбля волокон в прямоугольной камере с подвижными дном и крышкой.

Методы исследования. Для исследования использовались методы математического моделирования и вычислительной гидродинамики. Для разработки проблемно ориентированных программных комплексов и проведения вычислительных экспериментов использовались современные компьютерные технологии.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые результаты:

1. Разработаны алгоритмы численного моделирования процессов гидродинамического перемешивания, позволяющие определять пространственно-временные структуры в сложных гидродинамических течениях и оценивать их влияние на процесс перемешивания.
2. Изучены процессы гидродинамического перемешивания в установках колебательного типа. Применительно к рассматриваемым процессам сформулированы числа подобия. Созданы основы для определения оптимальных режимов работы устройств колебательного типа с позиций «потребляемая мощность - эффективность перемешивания». Предложен подход к оптимальному размещению рабочих элементов в установке.
3. Изучены процессы гидродинамического перемешивания в системе подвижных коаксиальных профилированных цилиндров. Сформулированы числа подобия, позволяющие обоснованно подходить к масштабированию стендовых устройств. На основе анализа особых точек векторного поля скоростей жидкости предложены способы создания эффективных схем перемешивающих устройств данного типа.
4. С использованием разложений по динамическим модам разработаны алгоритмы и построены редуцированные модели, которые позволяют описать эволюцию поля скоростей жидкости конечномерным линейным оператором.
5. Разработаны и протестированы комплексная математическая модель и численные алгоритмы процессов перемешивания в жидких средах с волокнистыми включениями. Исследовано влияние протокола перемешивания на ориентацию ансамбля волокон в прямоугольной камере с подвижными дном и крышкой.

Практическая значимость. В диссертации были разработаны способы, которые позволяют находить эффективные схемы и режимы работы перемешивающих

устройств. Сформулированы числа подобия, которые дают возможность осуществить переход от лабораторных стендовых установок к реальным производственным аппаратам. Разработанный программный комплекс для построения конечномерных редуцированных моделей позволяет анализировать и экономично хранить информацию о поле течения, полученную не только в ходе расчета, но и в процессе физического эксперимента. Программный комплекс для моделирования динамики волокнистых включений в жидкости позволяет в деталях проследивать процесс формирования структуры композитных материалов.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в ходе диссертационного исследования, обеспечивается согласованностью результатов проведенных вычислительных экспериментов с аналитическими решениями и результатами других авторов, а также с результатами физических экспериментов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

1. XI Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях, Алушта, 2016.
2. XX Юбилейная международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 2017.
3. Международная научная конференция «Колебания и волны в механических системах», Москва, 2017.
4. XII Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли, Алушта, 2018.
5. XII Международная летняя научная школа-конференция «Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение», Чебоксары, 2018.
6. Международная конференция «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения» Москва, 2018.

Личный вклад автора заключается в разработке алгоритмов и программных средств численного моделирования, адаптации математических моделей

применительно к различным схемам перемешивания, проведении вычислительных экспериментов с последующим анализом результатов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 работах, из которых 5 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [130-134], в том числе 5 опубликованы в журналах, цитируемых международными базами Web of Science и Scopus [130-134], 7 работ опубликованы в сборниках материалов научных конференций [135-141].

Диссертационная работа соответствует пунктам паспорта специальности 01.02.05:

- Течения многофазных сред (газожидкостные потоки, пузырьковые среды, газовзвеси, аэрозоли, суспензии и эмульсии).
- Аналитические, асимптотические и численные методы исследования уравнений кинетических и континуальных моделей однородных и многофазных сред (конечно-разностные, спектральные, методы конечного объема, методы прямого моделирования и др.).
- Гидравлические модели и приближенные методы расчетов течений в водоемах, технологических устройствах и энергетических установках.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованных источников (141 наименование). Работа изложена на 127 страницах, содержит 74 иллюстрации и 3 таблицы.

Во **введении** обоснована актуальность, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, описаны методы исследования, обоснована научная новизна и отмечена практическая значимость.

В **первой главе** дан обзор литературы, конкретизирована область исследования, представлена математическая модель двухфазной жидкости и критерии оценки эффективности перемешивания, описаны использованные в работе численные методы и алгоритмы для моделирования течений в установках с элементами, совершающими колебательные и вращательные движения.

Вторая глава посвящена численному моделированию процессов гидродинамического перемешивания в установках колебательного типа. Представлены постановка задачи и описание особенностей моделирования течений в таком типе устройств, проведено сравнение с экспериментальными данными, выполнен широкомасштабный параметрический анализ, определены структуры в жидкости, обеспечивающие перемешивание, и построена соответствующая карта режимов, рассмотрен вопрос масштабирования устройств данного типа.

Третья глава посвящена численному моделированию процессов перемешивания в системе подвижных коаксиальных цилиндров, где внутренний цилиндр профилирован определенным образом. Глава начинается с постановки задачи и описания ее особенностей. После чего проводится валидация математической модели и численных алгоритмов на задаче о течении между двумя эксцентрично расположенными цилиндрами, для которой существует аналитическое решение для поля скорости. Описаны основные структуры в жидкости, обеспечивающие наилучшее качество смеси, на основании анализа особых точек в векторном поле скорости жидкости представлен способ профилирования внутреннего цилиндра. Сформулированы числа подобия, построена карта режимов и определен наиболее оптимальный протокол перемешивания.

Четвертая глава посвящена редукции моделей гидродинамического перемешивания на основе DMD-алгоритма. Применительно к задачам перемешивания изложен алгоритм разложений по динамическим модам. Представлено тестирование программной реализации на серии искусственных шаблонов суперпозиций мультидоминантных конвективных структур в стационарном поле. Показан способ построения редуцированной модели, используя разложения. В качестве приложения рассмотрена задача о перемешивании в каверне с подвижными дном и крышкой. Демонстрируется выигрыш в хранении информации в данной задаче и задаче из главы 2 после обработки DMD-методом.

В **пятой главе** дано введение в проблему моделирования гибких волокон в жидкой среде. Обосновываются выбор используемой модели, численных алгоритмов и их модификация. Проводится сравнение решения задачи о деформации волокна в сдвиговом течении Куэтта с результатами других авторов, аналитическими решениями и данными физического эксперимента. Ставится задача о перемешивании жидкости с волокнистыми включениями в прямоугольной камере с подвижными дном и крышкой. Выделяются характерные особенности воздействия различных режимов на ориентацию ансамбля волокон. Определяется наиболее предпочтительный период разрывного протокола с точки зрения перемешивания и однородности ориентации волокон.

В **заключении** представлены основные результаты диссертационной работы.

Благодарности. Автор выражает благодарность коллегам из филиала Института машиноведения имени А.А. Благонравова Российской академии наук «Научный центр нелинейной волновой механики и технологии РАН» за сотрудничество и предоставленные результаты экспериментов.

Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ.

В настоящее время перемешивание многофазных вязких сред является одним из значимых технологических процессов во многих отраслях промышленности. Для этой цели созданы различные группы перемешивающих аппаратов и их модификации, в зависимости от свойств рабочей жидкости [1-6]. Основная задача перемешивания состоит в получении максимально однородных по пространству композиций. С теоретической точки зрения проблема является сложной и объемной, потому что нет идеализированной исходной картины для анализа. С практической точки зрения даже самый простой случай порой трудно интерпретировать, так как присутствуют различные факторы, которые искажают наблюдаемую картину и делают невозможным проведение двух одинаковых экспериментов. Кроме того, данные процессы определяются многомасштабными физическими явлениями, такими как турбулентность, поверхностное натяжение, конвективный перенос, кавитация, диффузия и др. Поэтому каждый конкретный случай требует своего детального изучения.

Настоящая работа посвящена вопросам перемешивания в ламинарных потоках. К данному классу задач относится перемешивание высоковязких жидкостей. Эта проблема возникает в различных промышленных приложениях, таких как смешивание полимеров, обработка пищевых продуктов, вязкая ферментация и многие другие. Большое количество новых приложений в данной области возникло с развитием в 90-х годах нанотехнологий, основанных на микрогидродинамике (микрофлюидике). Так, например, трудно смешивать растворы в микроканалах [60]. В типичных рабочих условиях потоки в этих каналах являются ламинарными - спонтанные флуктуации скорости, которые имеют тенденцию гомогенизировать жидкости в турбулентных потоках, отсутствуют, а молекулярная диффузия через каналы медленная. Помимо прочего существует большой класс задач, который в представленном исследовании не

рассматривается, когда перемешивание осуществляется в режиме турбулентного потока [7-9].

1.1. Обзор литературы.

Среди первых работ в области перемешивания [10-15] следует выделить статью [13], где автором было выделено три стадии при смешении двух жидкостей с разными физическими характеристиками. Начальная стадия, когда две жидкости разделены четкими границами и не проникают друг в друга. Промежуточная стадия, при которой объемы жидкостей начинают деформироваться: растягиваться и изгибаться. И заключительная стадия, когда смесь становится полностью однородной. При этом значительный промежуток времени занимает начальная стадия. В заключительной стадии однородность достигается преимущественно вследствие молекулярной диффузии. В [13] было предложено классифицировать физический процесс смешения, когда можно пренебречь диффузией («гидродинамическое перемешивание»). Когда роль диффузии существенная («молекулярное перемешивание»). При гидродинамическом перемешивании частица примеси движется вместе с жидкостью, то есть осуществляется пассивная адвекция. На рис 1.1 показан типичный вариант гидродинамического перемешивания. Механизм перемешивания можно охарактеризовать, как растяжение и изгиб по всему пространству обозначенного элемента жидкости. Таким образом, точное описание процесса перемешивания задается функцией распределения примеси по пространству в различные моменты времени. При этом течение жидкости может быть весьма сложным, особенно, когда речь заходит о промышленных аппаратах [1-3]. Однако, исходя из результатов работ [4-6], в некоторых случаях относительно простые поля скоростей жидкости могут обеспечить очень эффективное формирование области таким образом, что комбинированное действие растяжения и складывания приводит к экспоненциальному росту площади, занимаемой примесью.

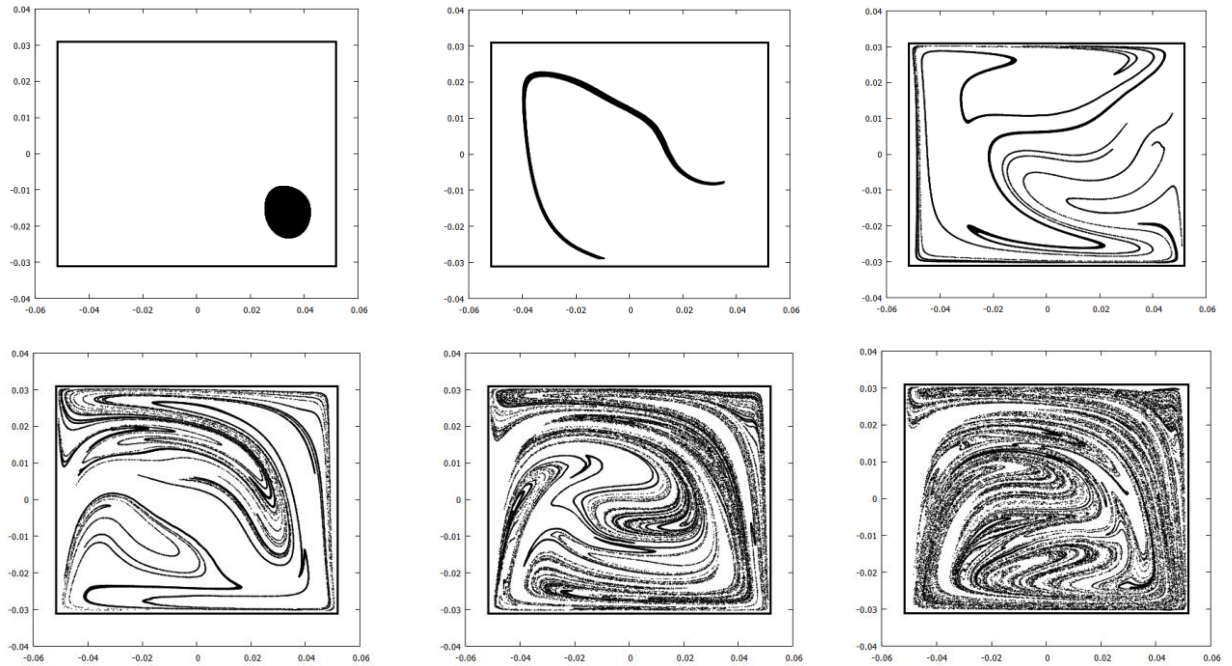


Рис. 1.1. Результаты, полученные в ходе численного моделирования динамики примеси в каверне.

Это явление было подробно изучено в фундаментальной работе [16] и названо автором «хаотической адвекцией». В этой статье перенос заданным потоком пассивной частицы-маркера примеси в Лагранжевом представлении определяет динамическую систему, что позволяет использовать для анализа соответствующий математический аппарат. В качестве приложения был рассмотрен пример перемешивания в несжимаемой невязкой жидкости, когда в двумерной постановке взаимодействуют два точечных мерцающих вихря в круге. В монографии [5] и работах [16-18] этого же автора проанализирована положительная связь хаотического движения маркера с эффективным перемешиванием. Подробности о развитии теории хаотической адвекции можно найти в [19, 20].

Рассмотрение задачи с точки зрения теории хаоса в динамических системах и деформаций векторных полей позволяет проанализировать проблему с более общей точки зрения. Так последовал ряд фундаментальных экспериментально-теоретических работ [21-29]. Программа исследований хаотических потоков в жидкости начиналась с Эйлера описания поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ (полученного, например, как решение уравнений Навье-Стокса или каким-либо другим

способом). Траектория частицы жидкости, находящейся в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, соответствует решению уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

с начальным условием $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Решение (1.1) для всех $\mathbf{x}_0$, принадлежащих области с жидкостью, называется потоком [32, 33] и обозначается следующим образом

$$\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{x}_0) \text{ при } \mathbf{x}_0 = \varphi_{t=0}(\mathbf{x}_0). \quad (1.2)$$

Данная запись означает, что частица жидкости, изначально находящаяся в точке $\mathbf{x}_0$, будет найдена в точке $\mathbf{x}$ через момент времени t . В двумерном пространстве $\mathbf{v} = (v_x; v_y)^T$, $\mathbf{x} = (x; y)^T$, и поток: $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{x}_0)$ является сохраняющим площадь преобразованием [34].

Поведение хаотических систем определяется характером и структурой периодических точек в потоке ($\mathbf{x}_p = \varphi_T(\mathbf{x}_p)$, где T - период). Периодические точки могут быть классифицированы как гиперболические, эллиптические или параболические, в зависимости от деформации жидкости в их окрестности (параболический случай является вырожденным). Характер особой точки задается собственными значениями линеаризованного отображения. Для гиперболической точки два собственных значения действительны, в то время как для эллиптической два собственных значения являются комплексными сопряженными величинами, с модулем равным единице. Гиперболические точки имеют связанные инвариантные области притока и оттока (сепаратрисы), называемые также стабильными и неустойчивыми многообразиями. Если устойчивые и неустойчивые многообразия, принадлежащие гиперболической периодической точке, пересекаются поперечно, то они образуют так называемое поперечное гомоклиническое пересечение. Если устойчивые и неустойчивые многообразия, принадлежащие двум различным гиперболическим периодическим точкам, пересекаются поперечно, они образуют поперечное гетероклиническое пересечение. Более подробно об определениях в [38, 34-36].

В монографии [4] предложено определение хаотической системы, применительно к задачам перемешивания: Систему можно классифицировать как хаотическую, если она удовлетворяет любому из следующих критериев:

- 1) поток производит либо поперечные гомоклинические, либо поперечные гетероклинические пересечения [38, 39],
- 2) поток имеет положительный показатель Ляпунова,
- 3) поток способен растягивать и складывать материал примеси таким образом, что реализуется схема перехода к хаосу по типу отображения «подкова Смейла» [37] (см. рис. 1.2).

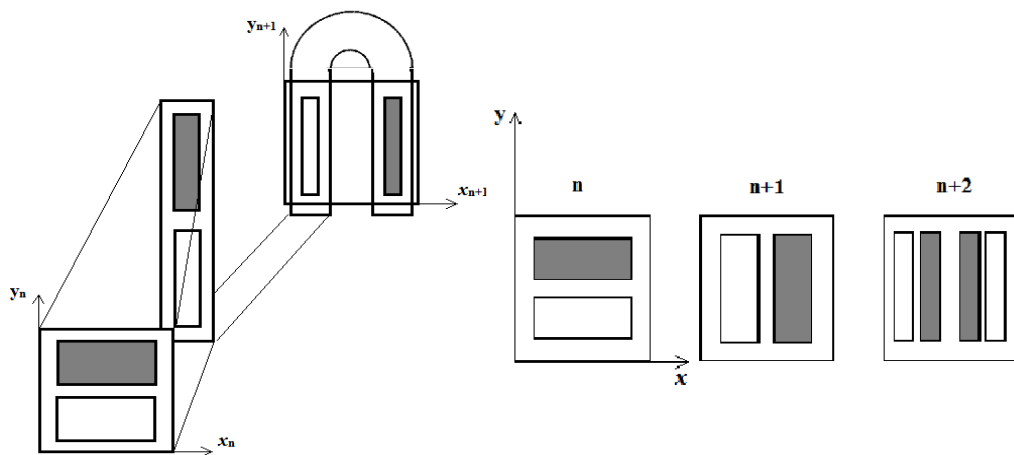


Рис. 1.2. Отображение «подкова Смейла»: вытягивание, сжатие и складывание.

В строгом смысле определения 1) – 3) неэквивалентны, что обсуждалась в [40]. Отметим, что для определения хаотичной системы также используют автокорреляционные функции, спектр преобразования Фурье, бифуркационные диаграммы и методы отображения Пуанкаре (см. [41, 42]). Стоит отметить, что хаотичность системы еще не гарантирует «хорошего перемешивания», в частности, в перемешивающем устройстве могут быть малые по площади регионы, где реализуется хаотическое движение или возможно образование зон, где примесь не перемешивается (для примера см. рис 1.3). В [29] рассмотрены различного рода процессы смешения при наличии химических реакций в потоке.

Один из значимых результатов в области перемешивания приведен в работе [25], где показано, как из теоретических соображений экспериментально

определить наличие в поле течения особых точек по поведению примеси вблизи них. Так, если способ определения периодических точек очевиден, то иначе обстоит дело с определением характера особой точки. Теория, в частности теорема КАМ [38], указывает на то, что эллиптические точки окружены инвариантными кривыми («острова»), которые перемещаются и вращаются, сохраняя свою идентичность. Острова не обмениваются веществом с остальной жидкостью и представляют препятствие для эффективного перемешивания. В эксперименте, если точка является эллиптической, она обычно выглядит как дырка или островок (не заполненный красителем) с конечной площадью (см. рис. 1.2), если краситель не был расположен в окрестности точки в самом начале эксперимента.

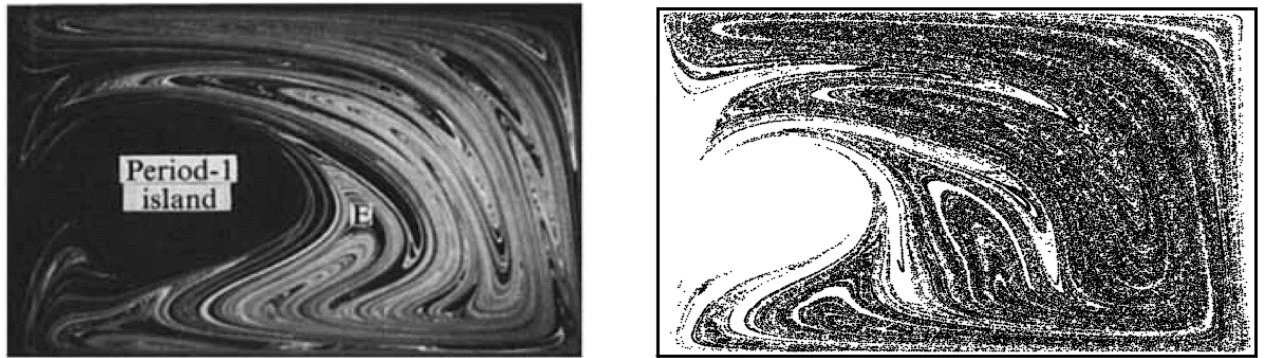


Рис. 1.3. Положение примеси в пространстве. Слева: эксперимент, [25]; Справа: результат расчетов.

Однако, расположение эллиптической точки может быть оценено только в пределах ошибки эксперимента. Также авторы отмечают, что течение внутри островков в основном вращательное, растяжение линейное, и скорости растяжения обычно намного меньше, чем в хаотических областях. Если периодическая точка не является эллиптической, то она должна быть гиперболической. Чтобы убедиться в этом, исследуется растяжение окружающей структуры, образованной в процессе перемешивания. Вблизи гиперболической точки материал сжимается в одном направлении и растягивается в другом (поведение примеси аналогично показанному на рис. 1.1).

В работах [22-24] рассмотрена задача о перемешивании в системе двух вложенных подвижных не коаксиальных цилиндров. Благодаря геометрическому

расположению цилиндров и определенным значениям угловых скоростей, в потоке жидкости появляются одна или две стационарные гиперболические точки, а периодическая по времени работа установки создает гомоклинические и гетероклинические сплетения сепаратрис. Небольшое возмущение такой системы приводит к их сложному расщеплению, что и вызывает хаотическое движение примеси, которое благоприятным образом сказывается на эффективности перемешивания. Кроме того, авторами данная задача решалась численно, было получено отличное совпадение с экспериментом, и именно компьютерное моделирование, позволило в деталях проследить ход протекающих процессов. В статье [57] экспериментально и численно исследованы инерционные эффекты и роль диффузии при переключении движений внутреннего и внешнего цилиндров в данном типе устройств, при малых числах Рейнольдса. Показано, что переходные эффекты значительно улучшают область зоны хаотически движущихся частиц примеси несмотря на их незначительную продолжительность по времени, диффузия также играет положительную роль в перемешивании. Обнаружено, что соответствующие экспериментальные наблюдения находятся в хорошем качественном согласии с численными результатами решений уравнений Навье-Стокса. Данная задача актуальна и на данный момент. Так в работе [42] рассмотрена более сложная конфигурация: внешний цилиндр неподвижен, а внутренний вращается относительно точки, не совпадающей с центрами обоих цилиндров. Автором предложен действенный параметрический метод построения отображений Пуанкаре на фазовом потоке для гамильтоновой системы и найден режим воздействия на среду, при котором площадь области эффективного перемешивания максимальна. Данные исследования были продолжены, и в недавних работах [55, 56] изучено перемешивание между двумя эксцентрически расположенными и произвольно движущимися круговыми цилиндрами. Благодаря некоторым допущениям удалось аналитически построить выражение для поля скорости вязкой жидкости в цилиндрическом зазоре.

Большой интерес также вызвали работы [21-27], где экспериментально исследуется задача о перемешивании в жидкости с низким числом Рейнольдса (96%-глицерин при 25⁰С; динамическая вязкость 0.75 Па·с; плотность 1250 кг/м³) внутри прямоугольной каверны с подвижными дном и крышкой. Детальное описание экспериментальной установки и методика измерений приведены в [25]. В отличие от установки с вложенными цилиндрами здесь для перемешивания жидкости в полости требуется значительно меньше периодов. Другое существенное отличие состоит в том, что в поле скоростей нет стационарных гиперболических точек. Кроме того, было изучено воздействие разрывного и непрерывного периодического протоколов смешивания и показано, что перемешивание зависит сложным нелинейным образом от периода протокола, проходя этапы: рождения и гибели зон с отсутствием перемешивания («островов»); формирования и периодического движения когерентных структур, таких как «острова» или крупномасштабные складки (см. рис. 1.1, 1.3). При этом данная система может быть визуализирована как некая подвижная планетарная система с гиперболическими точками в роли планет, и эллиптическими точками в роли их спутников. Движение жидкости является хаотическим, так как реализовано отображение «подкова Смейла», позднее хаотичность была доказана аналитически с помощью вычисления показателя Ляпунова в работе [4]. В работах [51, 52] авторами данная задача решена численно в квазистационарном приближении Стокса. В работах [53, 54] таким же алгоритмом решена подобная задача, но с геометрической областью в форме кольцевой полости цилиндра и клина. В недавней работе [30] на основании вычислительных экспериментов авторами изучены инерционные эффекты в рассматриваемом типе устройств. Показано, что орбиты периодических точек сдвигаются от их оригинального местоположения с увеличением чисел Рейнольдса, [25]. Рост числа Рейнольдса и уменьшение частоты приводит к большей хаотизации системы. Наряду с этим частота воздействия оказывает гораздо большее влияние на перемешивание, чем на инерционные эффекты.

Исследование перемешивания в трехмерном пространстве началось с изучения ABC-потока (Arnold–Beltrami–Childress flow) [34]. Данный поток представляет собой трехмерное несжимаемое поле скоростей, которое описывается системой из 3-х обыкновенных дифференциальных уравнений, являющимися точным решением системы уравнений Эйлера. В 1965 году в фундаментальной работе [43] автор выдвинул утверждение, что такие потоки могут иметь сложную топологию. Это было подтверждено в расчетной работе [44], где показано, что поток имеет несколько гиперболических точек и пересечений многообразий. Все это доказывает тот факт, что хаос в трехмерных течениях возможен даже при условии стационарности потока. В работе [28] приведено подробное описание основных видов трехмерных смесительных агрегатов и приведено теоретическое (на основании метода сечений Пуанкаре) и экспериментальное доказательства их работоспособности. В работе [6] на основании расчетов обосновано получение гомогенных смесей в проточных трактах без использования подвижных механических частей, путем перемешивания в системе дорожек Кармана за препятствиями на пути потока. Также из новых исследований стоит выделить [45], где использовалось статическое смесительное устройство, состоящее из наружной трубы, содержащей внутри несколько переплетающихся внутренних. Было продемонстрировано улучшение перемешивания при использовании тонких внутренних труб, равно как и при условии, если они переплетаются по определенному математическому закону. Данные результаты были получены на основе работ, речь о которых пойдет в следующем абзаце. В дополнение ко всему в [61] экспериментально изучено перемешивание в запыленном потоке скрученного воздуховода, который по конфигурации представляет трехмерный устойчивый открытый поток. При помощи лазерно-индуцированной флуоресценции (LIF визуализации) обнаружено, что присутствуют многие характеристики Лагранжевой хаотической системы: сильное растяжение и складывание материальных линий и поверхностей; чувствительность к начальным условиям; экспоненциальный рост растяжения в некоторых областях течения.

Кроме того, необходимо отметить работу [60], где представлен пассивный метод смешивания потоков в микроканалах. Периодическая последовательность микроканалов на дне в виде «елочки» придает пассивное возмущение потоку первичного канала, вызывая хаотическую адвекцию и, как следствие, быстрое перемешивание.

В 90-е годы на основе экспериментальных наблюдений и вычислительных экспериментов была опубликована статья [49], где исследовалось поведение примеси в системе «blinking rotlet model» в круге (в прямоугольнике [58]), которая является более близкой, в технологическом смысле, адаптацией модели двух точечных мерцающих вихрей [16], обсуждаемой выше. Базируясь на принципах данной статьи, вышла фундаментальная работа [47], посвященная топологической гидромеханике перемешивания, где был представлен новый подход к адвекции регулярной и хаотической жидкости, использующий теорему классификации Терстона-Нильсена [48]. В качестве примера исследовалась двумерная задача перемешивания конечным числом цилиндрических стержней, присоединенных к диску жидкости. Теория говорит о том, что для конкретных «протоколов перемешивания» топологический хаос наступает тогда, когда присутствуют три или более цилиндрических стержня, которые перемещаются в среде определенным образом, в отличие от работ, где стержни были закреплены на месте и просто вращались вокруг своих осей [16, 49]. Для выбора протокола перемешивания применяется теория кос. Основная теория была изложена без доказательств, а для иллюстрации применимости был проведен простой эксперимент, в котором вязкую жидкость перемешивают тремя мешалками. После чего, взяв за основу элементы данной теории, в вычислительной работе [50] было продемонстрировано, что топологически более сложный поток является более эффективным в плане перемешивания. Кроме того, были обнаружены положения эллиптических периодических точек и показано, что общая площадь несмешанных островков незначительна по сравнению с рабочей площадью устройства. В работе [64] показано, что происходит эффективное перемешивание при использовании одного

стержня, движущегося по орбите в форме перевернутой восьмерки, внутри круга, при этом вращение внешнего круга с постоянной скоростью приводит к ускорению процесса. Отметим, что данная теория также применима, если в качестве мешалок выступают не физические стержни, а пассивные частицы жидкости. Так в [59] демонстрируется возникновение топологического хаоса для Стоксова потока в двумерной камере с разделенной на части подвижной крышкой без внутренних стержней. Некоторые из аспектов топологического перемешивания жидкостей нашли свое применение при численном моделировании процессов сегрегации в текучих полидисперсных гранулированных материалах [31].

Небольшое количество исследований посвящено перемешиванию в открытых каналах. Среди них стоит выделить экспериментальное исследование авторов [46, 62]. В приведенных работах изучено перемешивание в открытом проточном канале при условии, что поток пересекает ограниченную область смешения, что актуально для проектирования промышленных аппаратов. Была дана классификация протоколов смешения в соответствии с общими сценариями. В дополнение, продемонстрировано, что наблюдаются структуры и динамика перемешивания, аналогичные рассмотренным в [25]. В недавно вышедшей монографии [63] обсуждается смешивание в практических ситуациях и представлены эксперименты, мотивированные промышленным применением. Показано, что хаотическое седло (гиперболическая точка) и его устойчивые и неустойчивые многообразия составляют каркас, вокруг которого организована динамика примеси, а их фрактальные свойства управляют адвекцией и перемешиванием в открытых потоках. Кроме того, исследуется влияние КАМ-островов на смешивание, а также взаимодействие между молекулярной диффузией и хаотической адвекцией. В качестве приложения обсуждается применение этих концепций к динамике планктона в океанах.

Перемешивание в системе вихрей также представляет большой научный интерес. Так рассмотрение моделей вихреобразования используется при решении таких задач геофизической гидродинамики, как динамика переноса и

перемешивания примеси в океане. В работе [68], используя модель точечного топографического вихря, исследуется перенос примеси в однонаправленном пульсирующем проточном течении над подводной возвышенностью дельтообразной формы. На основании свойства локальной устойчивости введена характеристика, позволяющая определить область хаотического поведения частиц. В [69] используется аналогичная модель для моделирования движения вихря с частицами вдоль прямолинейной границы с выемкой в форме дуги окружности, моделирующей береговую линию. Авторами определены параметры, при которых обеспечивается наиболее эффективный вынос примеси из выемки благодаря хаотическому движению. Более прикладные аспекты, в плане проектирования промышленных аппаратов, представлены в работе [65], где экспериментально изучен процесс вихреобразования в жидкости за цилиндром, колеблющимся нормально по отношению к набегающему свободному однородному потоку. Управление данным процессом осуществлялось путем изменения амплитуды и частоты колебаний цилиндра. Авторами дана классификация основных типов образующихся вихрей и построена соответствующая им бифуркационная диаграмма в зависимости от безразмерной амплитуды и частоты колебаний цилиндра. В теоретическо-расчетной работе [66] удалось частично воспроизвести данную диаграмму. В [67] рассмотрен вопрос переноса пассивного скалярного маркера примеси в поле деформации осесимметричного вихря. Это наиболее простой протокол смешения, для которого проблема адвекции-диффузии поддается почти точному описанию. Полное переходное поле концентрации в спирали доступно из уравнений Фурье в правильно выбранной системе отсчета. Продемонстрировано, что капля примеси сворачивается по спирали, которая в конечном итоге исчезает в среде благодаря молекулярной диффузии.

Кроме прочего, следует выделить недавнюю вычислительную работу авторов [78], где показано влияние геометрии границ на процесс перемешивания, а именно их геометрическую деформацию. В качестве примера исследован желудок человека, который является сильным мышечным сосудом между пищеводом и

тонкой кишкой. Это не просто камера для хранения продуктов, но и смеситель, в котором готовится химус. Желудок в модельном рассмотрении представлен в виде прямоугольной каверны с деформируемыми по гармоническому закону дном и крышкой. Показано, что в такого рода каверне наблюдаются области хаотического движения частиц жидкости. Несмотря на то, что данный пример из области математического моделирования физиологии человека, подобные механизмы переноса и перемешивания можно в дальнейшем использовать при создании своего рода смесительных перистальтических насосов. Достаточно полный и современный обзор применения хаотической адвекции в различных областях науки представлен в [79].

В заключении отметим, что на данный момент созданы различные группы промышленных перемешивающих аппаратов и их модификации в зависимости от свойств рабочей жидкости. Одним из наиболее распространенных являются устройства, в которых перемешивание происходит за счет вращения рабочих элементов внутри смесительного аппарата. Непосредственно численному моделированию такого рода устройств посвящен ряд недавних работ [70-73], где изучаются такие вопросы, как влияние формы лопастей и параметров работы вращающегося элемента на процесс перемешивания. Однако, такой способ конструирования мешалок зачастую приводит к образованию застойных и термически активных зон в рабочем объеме, а решение этой проблемы влечет за собой чрезмерное усложнение конструкций самого устройства и его рабочих органов. Существенно повысить эффективность перемешивания в данном случае можно посредством волнового и колебательного воздействия на среду. В [74-77] представлены различные методы и технологические аспекты создания смесительных устройств волнового типа. Ряд значимых результатов в этом направлении был получен в филиале Института машиноведения имени А.А. Благоднарова Российской академии наук «Научный центр нелинейной волновой механики и технологии РАН» [1, 3]. Представленная работа базируется на исследованиях этой научной школы. Цель работы – создание методов и средств

численного моделирования пространственно-временных структур в сложных гидродинамических течениях, и их применение для выбора эффективных схем перемешивающих устройств и оптимальных режимов работы при проектировании стендовых и промышленных смесительных аппаратов.

1.2. Методы моделирования процессов перемешивания.

В работе [6] авторами выделены ключевые моменты при численном исследовании процессов смешения в замкнутых емкостях и проточных трактах. Моделирование процессов гидродинамического перемешивания включает в себя три этапа: моделирование течения жидкости; моделирование эволюции объема примеси в несущей среде; расчет критериев эффективности перемешивания. Данный раздел посвящен первым двум пунктам.

На первом этапе математическая модель течения жидкости может быть описана различными способами [80] в зависимости от условий задачи. Так как в данной работе и большинстве трудов из обзора рассматриваются двумерные задачи, то ограничимся двумерными постановками. В приведенном исследовании моделирование течения несущей среды производится путем решения двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

В (1.3) приняты следующие обозначение x, y – координаты [м], ρ – плотность жидкости [кг/м³], P – давление [Па], μ – динамическая вязкость [Па·с], u, v – компоненты скорости [м/с] в направлениях x, y соответственно, t – время [с].

Решение системы (1.3) в аналитическом виде может быть получено только в частных случаях при ряде допущений и относительно простой геометрии

исследуемой области [80, 81]. Во всех остальных случаях решение системы находится с помощью численного моделирования.

К настоящему времени для этой цели разработаны достаточно точные математические модели и эффективные вычислительные алгоритмы, реализованные как в авторских программных кодах [82], так и в CFD (Computational Fluid Dynamics) программных комплексах. Данные программные модули обычно состоят из трех больших взаимодействующих блоков: построитель вычислительной сетки, расчетный модуль и модуль для последующей графической обработки данных.

Отличительной чертой настоящего исследования является наличие в перемешивающем устройстве тел, совершающих колебательные и вращательные движения в жидкости. Поэтому, чтобы наиболее точно моделировать ход протекающих процессов, использовались как стационарные структурируемые вычислительные сетки, так и различного рода динамические: деформируемые, скользящие и перестраиваемые. Необходимо отметить, что универсального алгоритма для решения уравнений Навье-Стокса не существует, поэтому выбор подхода во многом зависит от условий задачи в каждом конкретном случае, таких как геометрические свойства расчетной области, параметры набегающего потока, физические свойства жидкости, ограничения по вычислительной мощности и т.д., [83].

В представленной работе для получения гидродинамических полей использовался пакет программ вычислительной гидродинамики ANSYS FLUENT. Данный инструмент был выбран из-за своей универсальности и широкого функционала. Помимо прочего, он позволяет пользователю дописывать собственные функции на языке программирования C и интегрировать их в вычислительный код через набор определённых макросов, используя технологию UDF (User Define Function). Данная технология активно использовалась при численном моделировании течений жидкости, которые возникают при наличии в потоке твердых тел, совершающих колебания различной природы, а также, для

задания граничных и начальных условий. Кроме того, в данном CFD коде имеется возможность выбора численных алгоритмов для решения системы уравнений Навье-Стокса (1.3). Список опций включает: несколько модификаций алгоритма SIMPLE [85] (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) и алгоритм PISO [84] (Pressure Implicit with Splitting-Operators), который отличается от предыдущего процедурой предиктор с двумя корректорами. В настоящей работе согласование полей скоростей и давления проводилось с использованием метода PISO, так как он обеспечивает наиболее быструю сходимость на каждом временном шаге по сравнению с другими, т.е. требуется меньшего расчетного времени. Это является важным, так как решаются нестационарные задачи.

В дисперсной фазе для описания динамики каждого элемента примеси используется система обыкновенных дифференциальных уравнений. Другими словами, для моделирования эволюции примеси используется Лагранжев подход. В представленном исследовании рассматривалась только безынерционная примесь, поэтому система ОДУ для описания движения ее элемента имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = u(t, X, Y), & X(t = 0) = X_0; \\ \frac{dY}{dt} = v(t, X, Y), & Y(t = 0) = Y_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь $u(t, X, Y)$, $v(t, X, Y)$ – поля скорости, [м/с], полученные из решения системы уравнений (1.3), а X , Y – координаты положения частицы примеси в пространстве, [м], t – время, [с]. Система (1.4) является конкретной для нашего случая записью более общих систем уравнений (1.1), (1.2). Отметим, что в более общем случае модель динамики дисперсной фазы описывается с использованием второго закона Ньютона:

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1.5)$$

где m_p – масса частицы, [кг] $\mathbf{u}_p$ – вектор скорости частицы, [м/с], $\mathbf{F}$ – вектор сил, [Н], действующий на частицу примеси, который является суперпозицией сил различной

природы: сопротивления, Магнуса, Архимеда, Бассэ и многих других [88]. Такие задачи рассмотрены, например, в работах [86, 87].

Наиболее полный обзор вычислительных способов слежения за примесью в задачах перемешивания изложен в работах [6, 89, 90]. Среди них можно выделить три основных метода: маркерный, контурный и дипольный.

Маркерный метод из-за своей простоты был одним из первых, который начал применяться для слежения за примесью. По своей сути он является математическим аналогом экспериментальных методов, когда для слежения за гидродинамическим полем в течении размещаются подкрашенные порошкообразные вещества, которые находятся во взвешенном состоянии в жидкости. Суть метода заключается в следующем: частица-маркер представляет собой постоянный объем примеси. Конечное множество всех маркеров составляет первоначальный объем. На каждом временном шаге выполняется перенос каждого из маркеров полем скорости несущей среды согласно уравнению (1.4). Множество маркеров с новыми координатами образует объем примеси на следующем временном шаге.

Контурный метод основан на том, что мы следим лишь за границей примеси (контуром некоторого пятна). Данный алгоритм состоит в следующем [89]. В начальный момент времени определяется набор маркеров (n_0 штук), который аппроксимирует границу контура вокруг примеси таким образом, что расстояние между двумя центрами соседних маркеров не превышает длины l , принадлежащей отрезку $[l_{max}; l_{min}]$, а угол, образованный линиями, проходящими через центры маркеров, между любых трех рядом расположенных частиц-маркеров был меньше некоторого наперед заданного значения (обычно 120°). Затем центры маркеров соединяются прямыми линиями при этом образуется многоугольник с n_0 вершинами. Далее для определения положение контура на новом временном шаге интегрируется система (1.4) в каждой из вершин и определяются их новые координаты. При этом, если расстояние $l > l_{max}$, то между соответствующими маркерами добавляется ещё один, если $l < l_{min}$, то один из маркеров удаляется.

Также происходит добавление двух маркеров-вершин к центральной вершине, если значение угла в треугольнике, образованном тремя вершинами, стало больше заданного. Очевидно, что в процессе перемешивания контур испытывает деформацию, которая может быть значительной, например, как в задаче перемешивания в прямоугольной каверне (см. рис. 1.1), поэтому, как правило, количество вершин n_t в момент времени t значительно больше чем n_0 . Стоит отметить, что контур может аппроксимироваться не только набором кусочно-линейных функций, но и сплайнами различных порядков, однако представленный алгоритм из [89] является наиболее эффективным с точки зрения времени расчета и программной реализации.

Последним из рассмотренных методов является дипольный. Он был предложен в работе [90]. Здесь используются квадратные маркеры, сумма площади которых равна площади пятна примеси. Также вводится понятие диполя - это два маркера, которые соединены между собой плечом L . В начальный момент времени примесь аппроксимируется конечным числом диполей, исходя из условия наиболее плотного заполнения начального объема примеси без пересечений маркеров. После чего из системы (1.4) определяется новое положение маркеров. Так как величина плеча L будет переменной, то вводится ее максимальное пороговое значение L_{max} , при достижении которого диполь разделяется на два новых, с одинаковыми площадями, которые равны половине площади первоначального диполя. Вычислительный процесс деления возможен до тех пор, пока площадь новообразованных маркеров не станет меньше значения машинного эпсилон.

Если проводить сравнительный анализ между методами, то с точки зрения алгоритмической простоты и программной реализации бесспорно выигрывает маркерный метод. Кроме того, ничего не стоит его обобщение на трехмерный случай, и он также легко справится со слежением примеси в сложном течении даже если ее частицы будут инерционными. Единственным недостатком является то, что используется конечное число маркеров. Это иногда может приводить к недостаточному разрешению положения границ примеси при ее сильном

растяжении. Однако не всегда необходимо такое детальное отслеживание с высоким разрешением. Так же необходимо отметить, что данный недостаток играет положительную роль при оперировании памятью на ЭВМ в процессе вычислительного эксперимента. Иначе дело обстоит с контурным методом, который является наиболее точным из представленных. Однако, слежение за контуром – требовательная процедура не только к вычислительным ресурсам, но и к программной реализации, так как помимо прочего необходимо отслеживать различного рода самопересечения, объединять или удалять излишнее количество тонких близкорасположенных ответвлений контура. Кроме того, при наличии интенсивного гидродинамического перемешивания из-за непрерывного добавления новых вершин в многогранник, аппроксимирующий контур, увеличивается время обработки и количество памяти необходимое для их хранения, причем данный рост близок к экспоненциальному. При рассмотрении трехмерного случая потребуется аппроксимировать контур уже не кусочно-линейной функцией, а некой треугольной поверхностью, что опять же повлечет за собой усложнение алгоритма и увеличение времени расчета. Дипольный метод является некоторым развитием маркерного в сторону контурного, с целью улучшения разрешающей способности первого. Данный метод требует больше вычислительных ресурсов в отличие от маркерного. Но в тоже время он имеет ограничение на количество делений диполя и позволяет управлять этой величиной через длину его плеча L , что позволяет избежать экспоненциального роста расхода вычислительных ресурсов. Кроме того, этот метод потребует незначительные доработки для распространения на трехмерный случай. Однако при рассмотрении инерционной примеси метод становится достаточно трудоемким, особенно при наличии в потоке на пути движения примеси твердых тел.

В представленной работе в силу его простоты и эффективности отдается предпочтение маркерному методу. Для более детального описания динамики используется примесь, которая аппроксимируется относительно большим количеством маркеров.

Для численного решения системы уравнений (1.4) применялись явные методы Рунге-Кутты 4 и 5-го порядков точности [91]. Метод 5-го порядка использовался с целью оценки локальной погрешности на каждом временном шаге. Также была реализована модификация для 4-го порядка (алгоритм Рунге-Кутты-Фельберга) с автоматическим выбором шага интегрирования. Все представленные методы дают практически одинаковые результаты. С учетом того, что частиц примеси в вычислительном эксперименте было как минимум несколько сотен тысяч, то для ускорения времени расчёта в основном использовался метод Рунге-Кутты 4 порядка точности с постоянным шагом интегрирования, равным гидродинамическому шагу по времени. Кроме прочего, необходимо восстанавливать на каждом шаге интегрирования параметры потока $u(t_j, X_i, Y_i)$, $v(t_j, X_i, Y_i)$ в точке локализации частицы с координатами (X_i, Y_i) (i – порядковый номер частицы, j – номер временного слоя). Для этого на первом шаге необходимо определить какой ячейке вычислительной сетки принадлежит частица. Так как мы рассматриваем двумерные постановки, то вычислительная сетка является либо структурированной с прямоугольными ячейками, либо неструктурированной с треугольными. В первом случае для определения принадлежности номеру ячейки используется операция `mod`; во втором – используется условие P2L (particle-to-the-left) [83]. После того как определено какой ячейке принадлежит частица примеси восстанавливаются параметры несущей среды путем процедуры интерполяции: для структурированной сетки с прямоугольными ячейками используется линейная интерполяция по каждой оси координат, а в случае треугольных ячеек – применяется билинейная интерполяция, где строится интерполирующая плоскость по трем узлам.

Также стоит отметить тот факт, что при рассмотрении задачи главы 2 в экспериментах наблюдаются всплески жидкости на верхней границе. Чтобы передать данный факт в математическую модель, вводится условие зеркального отражения частицы от границы:

$$\mathbf{u}_{p1} = \mathbf{u}_{p0} + 2|\mathbf{u}_{p0} \cdot \mathbf{n}|\mathbf{n}, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{u}_{p0}$, $\mathbf{u}_{p1}$ – векторы скорости частицы до и после столкновения с границей, а $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности стенки, взаимодействие происходит без закрутки частиц. Обычно в выражение (1.6) вводится коэффициент восстановления импульса при соударении, в реальности он имеет некую стохастическую природу, поэтому на практике для проведения вычислительных экспериментов, исходя из эмпирических данных, его заменяют среднестатистическим показателем [86]. В данной задаче, на основе экспериментального видеоматериала и с целью не усложнять модель стохастической составляющей было сделано предположение, что он близок к 1 (абсолютно упругое взаимодействие). Кроме того, необходимо отметить тот факт, что в силу условия безынерционности примеси, должны отсутствовать столкновения частиц с твердыми границами рассматриваемых установок. Однако, из-за ошибок при интерполяции и численном интегрировании, а также при деформации вычислительных сеток в процессе расчета такие столкновения присутствуют, при этом доля частиц, протерпевших столкновения, мала по сравнению с общим количеством частиц и равна в процентном соотношении для 2-ой главы $\sim 0.008\%$, для 3-ей главы $\sim 0.0013\%$. Чтобы не удалять из расчета данные частицы и сохранить их общее число для последующего вычисления критериев эффективности, на всех твердых границах поверхностей установок также задается условие (1.6). Все модели и численные алгоритмы, описывающие динамику дисперсной фазы, были реализованы в авторском программном коде на языке программирования C++.

В большом количестве частных случаев при исследовании процессов перемешивания [4, 5, 16-21, 26, 27, 41, 42, 49, 51-56, 58, 59, 68, 69, 78] рассматривают высоковязкие жидкости в двумерных установках с гладкими границами. В таком случае система (1.1) имеет гамильтонову структуру:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.7)$$

где ψ является функцией тока [10]. Стоит отметить, что если поле скорости является постоянным, т.е. ψ не зависит от времени, то система не может быть хаотической, но если ψ является периодической по времени, то фазовое пространство системы имеет одно дополнительное измерение и существует высокая вероятность того, что система будет хаотической, и как следствие, будет обладать высоким перемешивающим потенциалом. Рассмотрев первые два уравнения движения системы (1.3) в приближении Стокса и сделав некоторые преобразования, получим, что функция тока описывается бигармоническим уравнением:

$$\Delta^2 \psi = 0. \quad (1.8)$$

Где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. На границе задаются условия прилипания. Эффективные методы решения задач данного класса представлены, например, в работе [92].

1.3. Критерии эффективности перемешивания.

Одной из практически значимых целей изучения гидродинамического перемешивания является ответ на вопрос, через какой момент времени стоит прекратить оказывать воздействие на среду, получив при этом максимально однородную смесь. Фундаментальные основы для решения данной проблемы были заложены в работе [93] при рассмотрении гамильтоновых систем вида (1.7), стремящихся к статистически однородному равновесию. Данный подход предполагает, что вся зона перемешивания площадью S разбивается на квадратные ячейки со стороной a и площадью $S_a = a^2$. При этом примесь находится внутри области и имеет площадь S_p . Если N_a – это общее количество квадратных ячеек, то величина общей площади может быть выражена как $S = N_a S_a$. Вводится площадь S_n , пропорциональная площади примеси внутри ячейки с номером n . На основании введенных величин вычисляется отношение $F_n = S_n/S_a$, которое называется грубой

плотностью распределения. При таком определении средняя плотность жидкости, занимаемая примесью, $\langle F \rangle$ будет равна следующей сумме ($\langle \rangle$ - усреднение по всем ячейкам):

$$\langle F \rangle = \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} F_n = \frac{1}{N_a S_a} \sum_{n=1}^{N_a} S_n = \frac{S_p}{S}. \quad (1.9)$$

Как видно из (1.9) эта величина будет постоянной в процессе микширования. Используя плотность распределения примеси F_n , авторы статьи [89] (в предположении, что известно поле жидкости) вводят несколько критериев для оценки эффективности перемешивания:

1) среднеквадратичная плотность:

$$\langle F^2 \rangle = \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} F_n^2 = \frac{1}{S} \sum_{n=1}^{N_a} F_n S_n; \quad (1.10)$$

2) энтропия:

$$e = - \sum_{n=1}^{N_a} F_n \log F_n; \quad (1.11)$$

3) интенсивность сегрегации:

$$I_0 = \frac{1}{N_a \langle F \rangle (1 - \langle F \rangle)} \sum_{n=1}^{N_a} (F_n - \langle F \rangle)^2. \quad (1.12)$$

В работе [4] в качестве критерия интенсивности сегрегации использовалась величина $I_0(1 - \langle F \rangle)$. Существенным недостатком данных критериев является вычисление площади S_n , которая ограничена контуром пятна примеси внутри ячейки, так как необходимо реализовывать неэффективный контурный метод слежения за примесью. Кроме того, при рассмотрении более эффективных схем перемешивающих устройств [6] данные критерии затруднительно использовать и необходима их модификация. Помимо прочего, существует более простые способы оценки перемешивания [94], которые предполагают рассмотрение примеси, как

совокупности маркеров с одинаковой площадью, и основаны на вычислении процентного заполнения области жидкости маркерами.

Отметим, что в настоящей работе не представлены критерии, которые используются при исследовании хаотических динамических систем (показатели Ляпунова, спектр Фурье, автокорреляционные функции и т.д.). Их использование в задачах из глав 2, 3 позволяет ответить только на вопрос о том, что поведение частиц примеси является хаотическим (что видно из непосредственного наблюдения за маркерами), однако, выделить меру хаоса (которая являлась бы хорошим критерием) затруднительно. В основном это связано со сложностью задач и с тем, что в системе уравнений (1.4) правые части не имеют аналитического представления и могут быть получены только численно.

В процессе выполнения диссертационной работы была предпринята попытка построить собственный критерий, взяв за основу Q-критерий [95]:

$$Q = \frac{1}{2} (\|E\|^2 - \|W\|^2). \quad (1.13)$$

Здесь $E = 0.5(G + G^T)$ – тензор скоростей деформации, описывающий скорости растяжения и сдвига; $W = 0.5(G - G^T)$ – тензор завихренности, описывающий скорость вращения; G – тензор градиента скорости; норма тензора определяется как $\|E\| = (\text{trace}(EE^T))^{1/2}$. Однако, удалось получить только локальные условия перемешивания в точке для двумерных задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} < 0, \\ \left| \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right| > \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right). \end{cases} \quad (1.14)$$

Попытка построить глобальный критерий перемешивания путем интегрирования по пространству величины Q оказалась неудачной, так как полученные интегральные значения не характеризовали наблюдаемый процесс должным образом.

Работы по созданию оптимального критерия оценки качества перемешивания все еще продолжаются. Один из последних результатов в области

экспериментально-теоретического метода оценивания представлен в работе [46], посвященной микшированию в открытых каналах. На основе анализа полей концентрации примеси-красителя выделяются паттерны вблизи гиперболических особых точек, которые обеспечивают наилучшее смешение. После чего вводится мера отклонения наблюдаемой картины от данного шаблона, на основании которой строятся глобальный и локальные критерии эффективности. Однако, данный критерий доказал свою применимость только для ограниченного типа устройств.

На основе литературных данных и анализа большого количества вычислительных экспериментов, можно выделить несколько свойств для идеального критерия оценки эффективности. Он должен быть:

- a) наглядным и объективно отражать наблюдаемую визуальную картину;
- b) глобальным, то есть описывать процесс во всей рабочей зоне;
- c) робастным, то есть быть устойчивыми к тому, что в силу каких-либо причин примесь в незначительном количестве может скапливаться в рабочей зоне;
- d) вычислительно простым, его вычисление должно занимать приемлемое время и требовать мало вычислительных ресурсов;
- e) универсальным, то есть применимым к широкому классу задач с различной формой расчетной области;
- f) основан на некотором реологическом параметре примеси.

Критерия, который удовлетворял бы всем выше перечисленным свойствам, в настоящее время не найдено. В нашем исследовании свойство f) не играет важной роли, так как рассматривается безынерционная примесь. Изначально в данной работе были использованы модифицированные критерии (1.10), (1.12) из [6]. Однако, при рассмотрении задачи из главы 2, где из-за всплесков жидкости частицы могли начать скапливаться в верхних углах расчетной области, использование данных критериев искажало информацию о процессе, нарушая свойства c) и a). Поэтому для оценки эффективности перемешивания была введена другая группа критериев, которые в совокупности удовлетворяют свойствам a)-e),

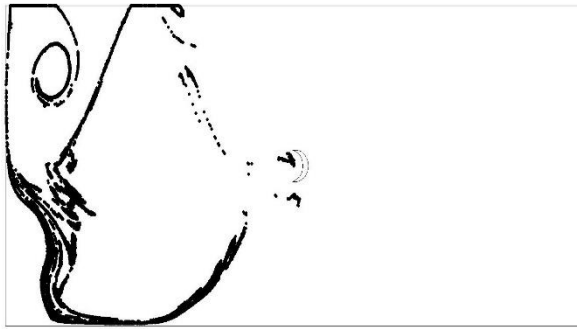
а именно, эффективность перемешивания определяется посредством основного и дополнительного критериев. Вся расчетная область разбивается прямоугольной сеткой на N_0 одинаковых ячеек. В качестве основного критерия I_1 выбран процент заполнения частицами ячеек, составляющих исследуемую область:

$$I_1 = \frac{N}{N_0}, \quad (1.15)$$

где N – количество ячеек, заполненных частицами. Кроме того, для получения более полной информации вычислялся дополнительный критерий I_2 , характеризующий неравномерность распределения частиц по заполненным ячейкам:

$$I_2 = 1 - \frac{1}{1 + \alpha d}, \quad d = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - M)^2}, \quad M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i. \quad (1.16)$$

где X_i – количество частиц, находящихся в i -ой «заполненной» ячейке, M – математическое ожидание величины X_i , α – масштабирующий параметр равный $1/3$. При этом в отличие от основного критерия, меньшее значение дополнительного критерия указывает на лучшее качество перемешивания. Отметим, что вообще говоря, возможно рассмотрение еще одного дополнительного критерия, характеризующего неравномерность распределения заполненных ячеек по пространству. Однако, как показали вычислительные эксперименты в рассматриваемых процессах его значения сильно коррелируют со значениями основного критерия, поэтому его использование дает мало дополнительной информации. Для иллюстрации сказанного рассмотрим задачу из главы 2. На рис. 1.4 сверху показано положение примеси в пространстве для частот 40 Гц и 20 Гц в момент времени $t = 3.6$ с, а на рис 1.4 снизу – результат обработки критериями I_0 (1.12) и I_1 (1.15) соответственно. Значение I_0 близкое к 0 соответствует лучшему перемешиванию, для I_1 наоборот, чем ближе к 1, тем качество смеси выше. Отчетливо видно, что I_0 дает результат, который не согласуется с визуально наблюдаемой картиной, а I_1 адекватно описывает наблюдение.



20 Гц



40 Гц

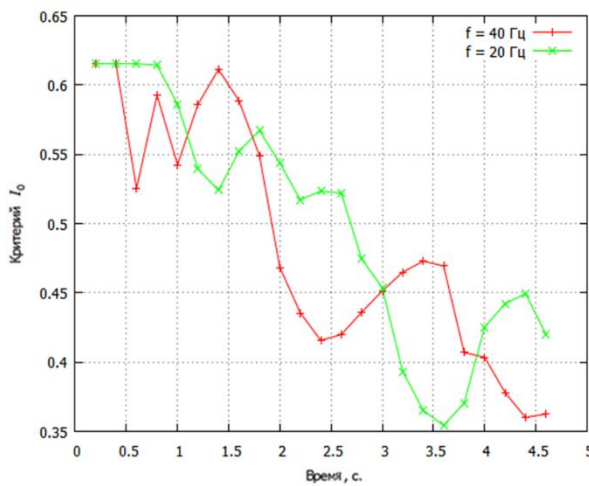
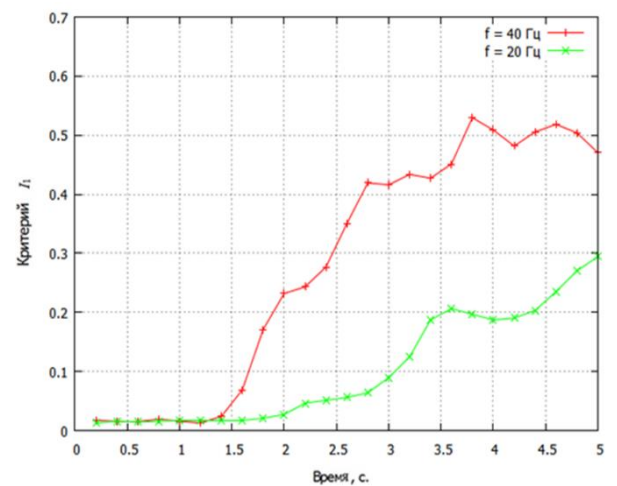
Критерий I_0 Критерий I_1

Рис. 1.4. Сравнение критериев в момент времени $t = 3.6$ с.

На основании временной динамики критерия эффективности I_1 можно выделить несколько типичных сценариев процессов перемешивания, которые представлены на рис. 1.5.

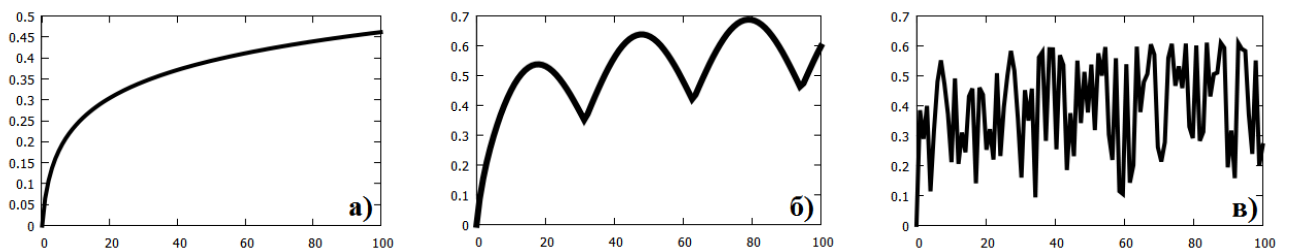


Рис. 1.5. Варианты зависимости критерия эффективности перемешивания от времени.

Вариант, а) – это сценарий перемешивания без локального ухудшения качества, когда качество смеси с течением времени асимптотически стремится к своему предельному значению. Вариант б) – сценарий с частичным локальным

ухудшением, когда присутствует некоторое частичное периодическое восстановление качества смеси, но в среднем оно продолжает стремиться асимптотически к своему предельному значению. И вариант в) – сценарий, когда происходит периодическое сильное ухудшение качества смеси с последующим восстановлением, при этом средняя эффективность стремится к своему постоянному значению.

Глава 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В УСТАНОВКАХ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ТИПА.

Различного рода эффекты в динамике многофазных течений позволяют за счет малых возмущений волновой природы создать сильные дополнительные движения жидкости [74, 75]. При этом не требуется значительных затрат энергоресурсов [1, 3], в связи с чем последнее время все больший интерес вызывает перемешивание в установках колебательного типа. Конструкция таких устройств предполагает расположение внутри объема жидкости относительно небольшого профилированного рабочего тела, которое совершает колебания с малой частотой и амплитудой. При определенных значениях параметров колебаний рабочего элемента удастся добиться однородного распределения примеси по заполненному жидкостью пространству перемешивающего аппарата. Глава 2 посвящена изучению процессов гидродинамического перемешивания в данном типе устройств с целью определения эффективных режимов работы и создания предпосылок для проектирования смесительных машин такого рода.

2.1. Постановка задачи.

Постановка задачи физического эксперимента представлена схематически на рис 2.1 слева. Имеется резервуар в форме прямоугольного параллелепипеда, который частично заполнен жидкостью в состоянии покоя. Внутри емкости расположено небольших размеров спрофилированное твердое тело (лопатка), которое совершает колебания с наперед заданной частотой и амплитудой в направлении, перпендикулярном боковым стенкам. Помимо прочего, в рабочий объем добавляется твердотельная примесь, которая находится во взвешенном состоянии в жидкой среде. Благодаря колебательным движениям создаются условия для возникновения перемешивания. Глобальная цель исследования заключается в том, чтобы в рамках поставленной задачи определить какие-либо

способы воздействия на среду, чтобы примесь равномерно распределилась по пространству.

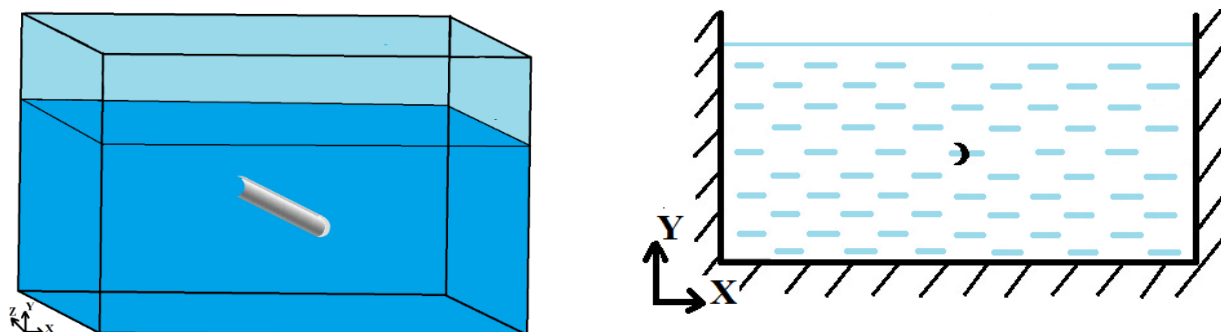


Рис. 2.1. Схематические представления эксперимента (слева) и расчетной области вычислительного эксперимента (справа).

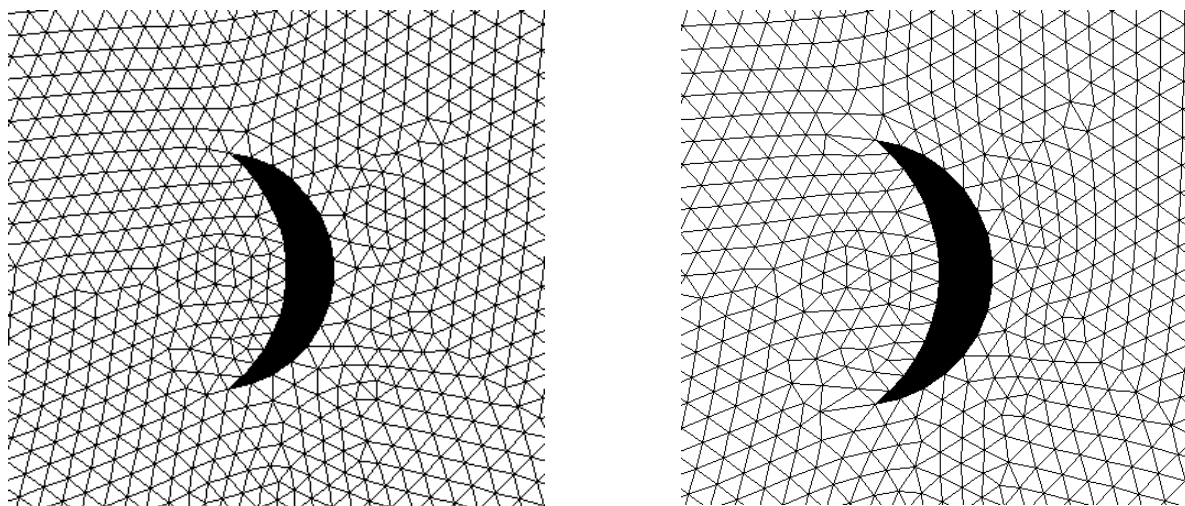


Рис. 2.2. Форма лопатки и вид вычислительной сетки вблизи нее. Слева: при отсутствии деформации вычислительной сетки (лопатка проходит положение равновесия). Справа: при максимальной деформации (максимальное удаление от положения равновесия).

В проведенной серии вычислительных экспериментов рассматривается двумерная постановка задачи (см. рис. 2.1 справа). В соответствии с физическим экспериментом расчетная область представляет собой прямоугольник размерами 22×10 см, заполненный рабочей жидкостью (водой) с плотностью $\rho = 1000$ кг/м³ и динамической вязкостью $\mu = 10^{-3}$ Па·с. Внутри области расположена профилированная лопатка (геометрическая форма лопатки показана на рис. 2.2.) с максимальным диаметром 10 мм. В начальный момент времени среда находится в

состоянии покоя. Жидкость приходит в движение вследствие колебаний лопадки по синусоидальному закону с амплитудой $a = 3.5$ мм и частотой $f = 30$ Гц.

Для решения поставленной задачи применялась методика, описанная в разделе 1.2 настоящей работы. Расчеты проводились на триангулярных сетках размерами от 13 до 50 тыс. ячеек. При изучении сеточной сходимости на вложенных сетках, было показано, что решение практически перестает меняться при разрешении от 13 тыс. ячеек и больше. Так как с помощью стандартного функционала программного пакета вычислительной гидродинамики Fluent можно сделать расчет только течений вблизи неподвижных тел, то для описания течений жидкости при наличии в потоке тел, совершающих колебания, был написан модуль с использованием технологии UDF на языке C, который задает гармонический закон продольного движения подвижного элемента. С целью избежать полного перестроения расчетной сетки на каждом временном шаге, была использована деформируемая сетка. При таком подходе грань сетки представляет собой пружину в состоянии равновесия с коэффициентом упругости, обратно пропорциональным длине грани. Каждая грань перемещается на предписанную величину, исходя из закона движения лопадки, после чего находится новое положение равновесия системы. Параметры деформации подбирались экспериментально таким образом, чтобы предотвратить исчезновение мелких ячеек и избежать быстрого изменения объема. Вид вычислительной сетки в процессе расчета вблизи лопадки при максимальной деформации и ее отсутствии представлены на рис. 2.2.

Что касается граничных условий, то на боковых и нижней границах прямоугольной области, а также на поверхностях лопаток, ставились условия прилипания и непротекания ($u = 0, v = 0$), на верхней границе задавалось условие равенства статического давления атмосферному. Примесь аппроксимировалась набором из 500 тыс. частиц-маркеров. В качестве начального положения частиц в пространстве были рассмотрены два распространенных на практике варианта: примесь равномерно распределялась вдоль верхней границы и располагалась пятном внутри области. Шаги по времени для гидродинамического расчета и

дисперсной фазы совпадают и равны $\Delta t = 0.001$ с. Для оценки эффективности перемешивания использовались критерии (1.15), (1.16) из раздела 1.3. Для ускорения их расчета применялась новая декартовая сетка размером 50×25 ячеек, которая накладывалась на исследуемую прямоугольную область.

2.2. Анализ результатов и сравнение с экспериментом.

Характер протекающих процессов показан на рис. 2.3. Видно неплохое качественное соответствие расчетных и экспериментальных данных. Эксперимент предоставлен Научным центром нелинейной волновой механики и технологии Российской академии наук.

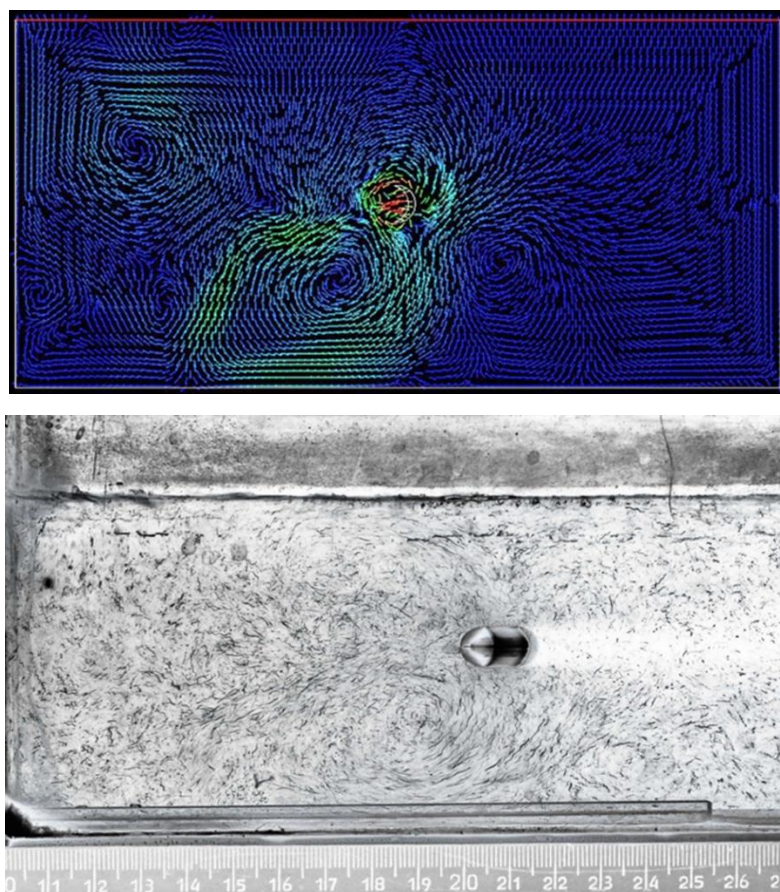


Рис. 2.3. Рассчитанное и экспериментальное поля скоростей в момент времени $t = 3$ с.

По данным вычислительного эксперимента в процессе перемешивания можно выделить два этапа. Начальный этап или «процесс затягивания» примеси, в

ходе которого частицы затягиваются внутрь области к колеблющемуся телу, практически не перемешиваясь (см. рис. 2.4 слева). Это явление также наблюдалось

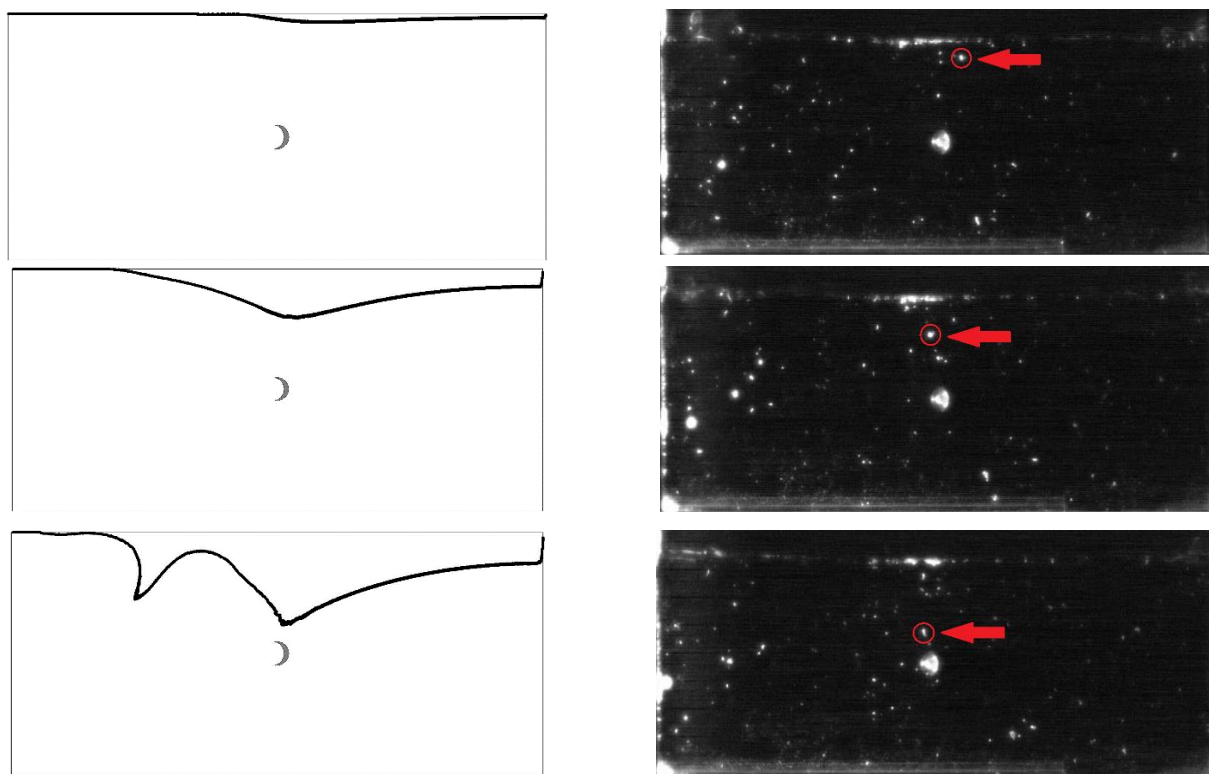


Рис. 2.4. Процесс «затягивания» частиц с верхней поверхности в вычислительном и физическом экспериментах.

в физическом эксперименте (см. рис. 2.4 справа), и было отмечено авторами работ [1, 3]. Появлению данного эффекта способствуют продольные колебания рабочего элемента внутри объема, так как вблизи него в векторном поле скорости жидкости образуется особая точка – устойчивый узел (см. рис. 2.5). При этом роль формы лопатки незначительна.

Затем наступает второй этап, когда вблизи лопатки начинают образовываться вихревые структуры, расходящиеся со временем по пространству. Структура в жидкости, способствующая перемешиванию, представлена на рис 2.6. Она представляет из себя гиперболическую точку h , у которой устойчивая и неустойчивая ветви сепаратрис замыкаются и образуют гомоклиническую кривую, внутри которой существует эллиптическая точка e , [38]. Возмущение данной

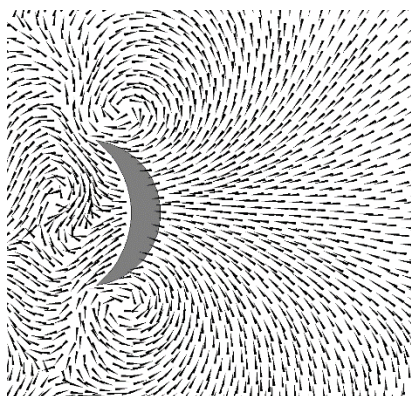


Рис. 2.5. Векторное поле скорости вблизи колеблющегося элемента, которое характеризует процесс затягивания частиц.

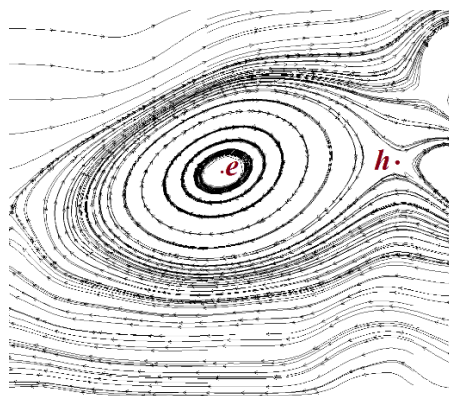


Рис. 2.6. Траектории жидкости в фиксированный момент времени в части расчетной области слева от лопатки.

системы приводит к распаду гомоклинической кривой, что способствует хаотическому движению частиц примеси. На втором этапе существенный вклад на процесс микширования оказывает влияние как геометрическая форма лопатки, так и ее параметры колебаний. При этом частицы все также продолжают затягиваться внутрь области в направлении колеблющегося тела.

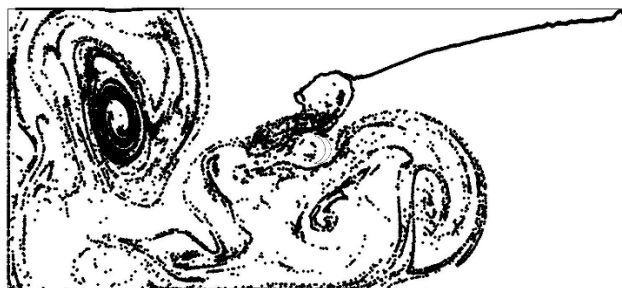


Рис. 2.7. Положение частиц в пространстве ($t = 4\text{с.}$), изначально располагавшихся: распределенными вдоль верхней границы (слева); пятном внутри области (справа).

По результатам вычислительного эксперимента было получено, что независимо от того, где в начальный момент времени располагались частицы примеси, вдоль поверхности или пятном внутри области, через некоторый промежуток времени они занимали приблизительно одинаковые положения в пространстве, см. рис. 2.7. Данное наблюдение объясняется тем, что рассматривалась безынерционная примесь, положение в пространстве которой определялось одним и тем же полем скорости.

2.3. Исследование влияния амплитудно-частотных характеристик колебаний рабочего элемента на процесс перемешивания.

В задаче раздела 2.1. рассматривались колебания рабочего элемента с амплитудой 2.5 – 4.5 мм, и частотой 20 – 50 Гц. В начальный момент времени жидкость внутри области находится в состоянии покоя. Необходимо отметить, что при частотах 40 – 50 Гц расчет ведется с шагом по времени $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ с. Исследуем влияние частоты и амплитуды колебаний рабочего тела на эффективность перемешивания. Распределение примеси по объему в момент времени, равный 100

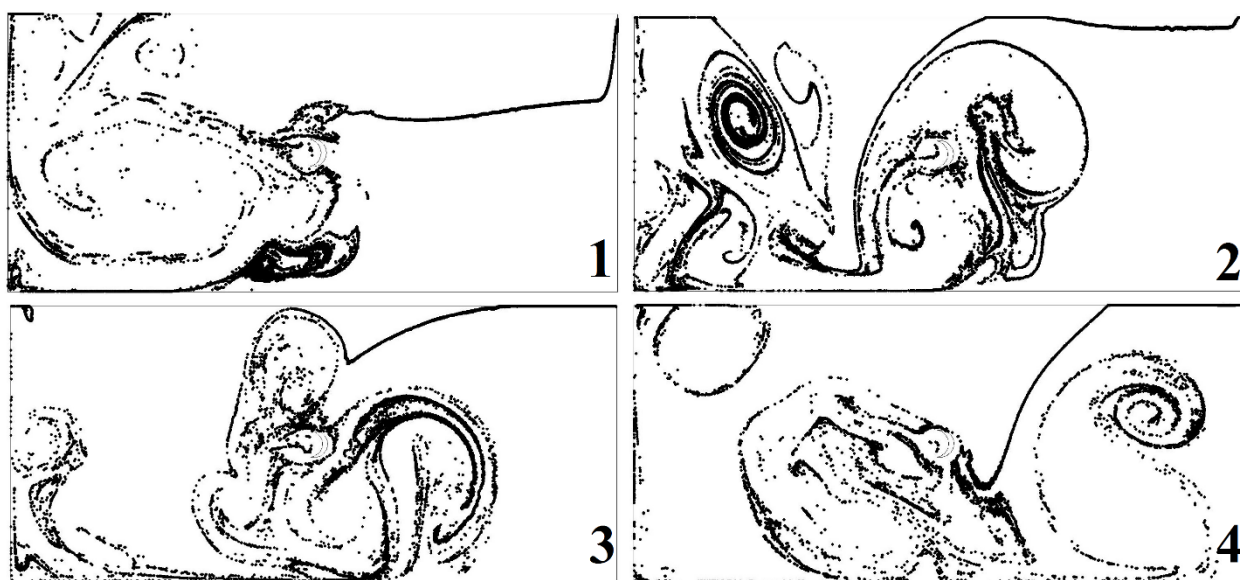


Рис 2.8. Положение частиц в пространстве при различных частотах колебания лопатки. $t = 100T$. 1 – 20 Гц, 2 – 30 Гц, 3 – 40 Гц, 4 – 50 Гц.

периодам колебаний (развитая стадия перемешивания) для различных частот показано на рис. 2.8, где амплитуда колебаний для всех вариантов 3.5 мм. Примесь затягивается в процессе перемешивания с верхней поверхности.

Несмотря на различие наблюдаемых картин, для всех частот наблюдается достаточно интенсивное перемешивание (рис. 2.10, а), близкое к сценарию с частичной переориентацией (см. раздел 1.3). Видно различие в темпах перемешивания для различных частот; максимальный темп реализуется при частоте 50 Гц. Было проведено исследование данного феномена. Для этого в начальный момент времени в расчетную прямоугольную область равномерно

помещались безынерционные частицы, и, начиная с момента времени 1 с и до конца расчета, через каждые равные значения периода колебаний лопадки отслеживалось расположение частиц-маркеров в пространстве, полученные результаты представлены на рис. 2.9.

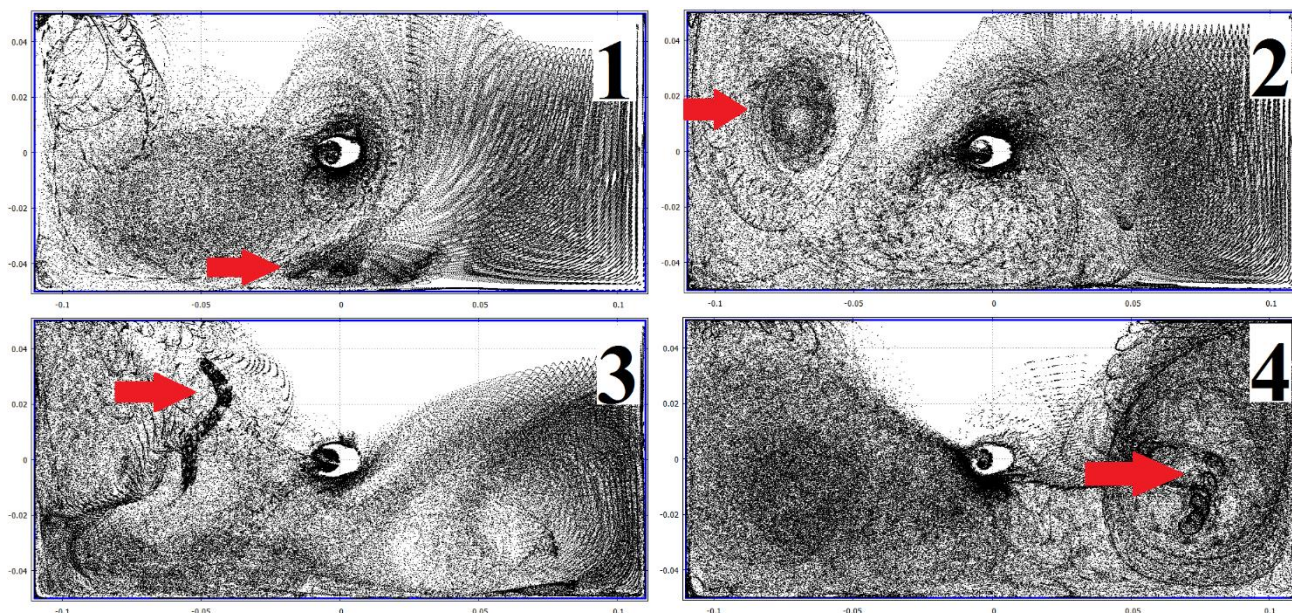


Рис. 2.9. Положение изначально равномерно распределенных частиц в пространстве через каждый период колебаний лопадки. 1 – 20 Гц, 2 – 30 Гц, 3 – 40 Гц, 4 – 50 Гц.

На изображении для каждого варианта частоты стрелками выделены зоны жгутования частиц. Чтобы объяснить природу данной области, необходимо обратиться к рис. 2.6. Уже отмечалось, что внутри гомоклинического сплетения образуется особая эллиптическая точка e , частицы примеси, которые попадают в окрестность ее влияния, практически не перемешиваются. В свою очередь структура из рис. 2.6. до своего разрушения каким-либо образом перемещается в поле течения, при этом эллиптическая точка e совершает движение по той или иной кривой. Данная кривая или «орбита» определяет область жгутования частиц на рис. 2.9. По мимо прочего скопление частиц на данном рисунке наблюдается и в близи колеблющегося элемента, это уже связано с узловой точкой в векторном поле скорости жидкости (рис. 2.5). Благодаря геометрической формы колеблющегося элемента, вихревые структуры в жидкости в начале процесса перемешивания начинают образовываться в левой половине расчетной области. Как видно из

рисунка 2.9 рост частоты колебаний лопатки приводит к уменьшению области жгутования в данной области, следовательно, структуры, содержащие эллиптическую точку e , быстрее разрушаются, и это сказывается на темпе перемешивания в начале процесса, что подтверждает рис 2.10, а. Однако, полностью избавиться от зон жгутования частиц, увеличивая частоту, не удастся, с течением времени данное явление наблюдается в правой части области у 50 Гц (см. рис. 2.9). Поэтому значение эффективности перемешивания для частоты 50 Гц выравнивается до значений 30÷40 Гц. Частота 20 Гц оказывается не столь эффективной.

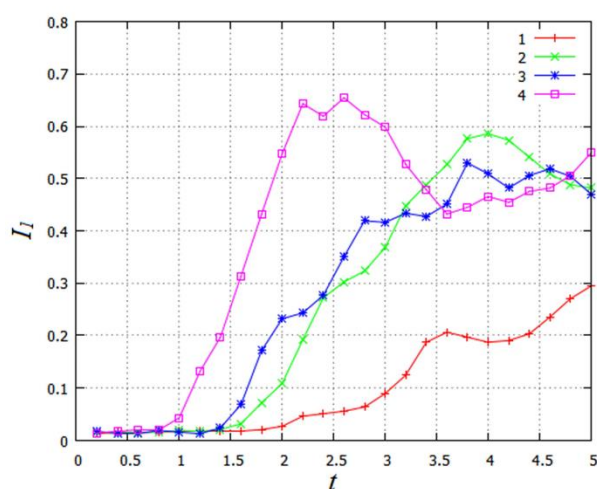


Рис 2.10а. Зависимость критерия I_1 от времени при разных частотах колебаний лопатки. 1 – 20 Гц, 2 – 30 Гц, 3 – 40 Гц, 4 – 50 Гц.

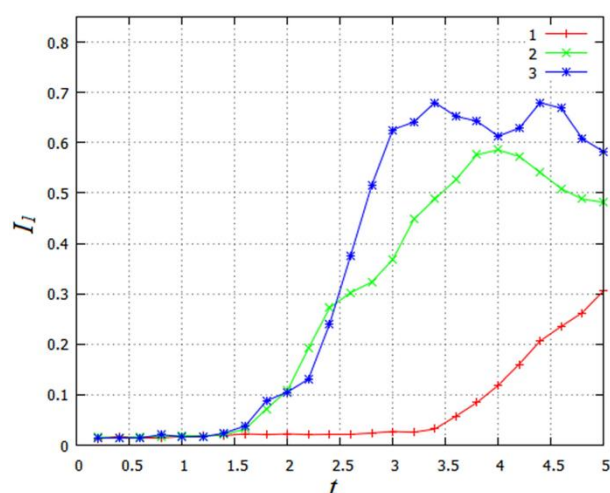


Рис 2.10б. Зависимость критерия I_1 от времени при разных амплитудах колебания лопатки. 1 – 2.5 мм, 2 – 3.5 мм, 3 – 4.5 мм.

На рис. 2.10, б показана динамика перемешивания для различных амплитуд колебаний лопатки при частоте 30 Гц для всех вариантов. Видно различие в темпах перемешивания и постепенное выравнивание значений эффективности перемешивания со временем для амплитуд 3.5 и 4.5 мм.

Большое значение в рассматриваемых процессах имеет мощность, потребляемая смесительной установкой. С целью расчета этой величины в каждый момент путем интегрирования вдоль поверхности касательного напряжения и давления определяли силу сопротивления движению лопатки в жидкой среде. С

учетом скорости лопадки определяли мгновенную мощность, которую затем осредняли по периоду колебаний. Полученные значения для рассмотренных вариантов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Карта режимов.

f , Гц.	a , мм.	P , Вт.	I_1^*	I_2^*
20	3.5	0.706421	0.219086	0.432830
	4.5	1.386698	0.441943	0.730958
30	3.5	2.572326	0.539429	0.520771
	4.5	5.412382	0.637029	0.657189
40	3.5	6.364576	0.501257	0.669236
	4.5	13.414508	0.371657	0.793940
50	3.5	12.672672	0.529973	0.735022
	4.5	24.805027	0.528907	0.703615

Здесь же даны средние значения основного I_1^* и дополнительного I_2^* критериев перемешивания (осреднение проводилось без учета начального этапа «затягивания» частиц). Из данной таблицы следует, что увеличение амплитуды требует значительных энергетических затрат, при этом добиться значительного улучшения качества смеси удастся только для частоты 20 Гц.

Представленные данные позволяют выбрать оптимальные режимы работы смесительной установки с позиций «потребляемая мощность – эффективность перемешивания».

2.4. Оптимизация пространственного расположения лопаток.

В данном разделе анализируется влияние пространственного расположения лопаток на процесс гидродинамического перемешивания при фиксированной частоте и амплитуде колебаний. По результатам численного анализа сформулирован подход к оптимальному размещению лопаток в пространстве, обеспечивающему высокое качество смеси.

В проведенной серии вычислительных экспериментов рассматриваются варианты с тремя базисными позициями двух одинаковых лопаток (с максимальным диаметром 10 мм) в пространстве (см. рис. 2.11).

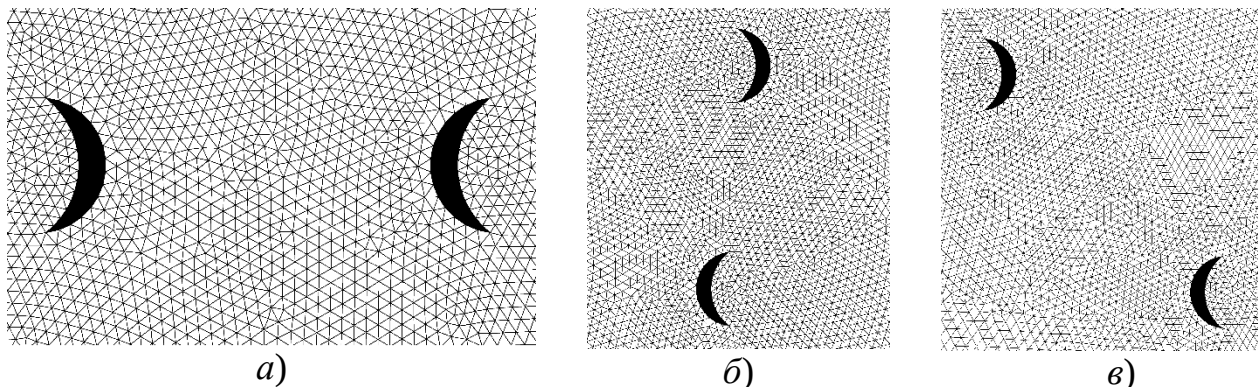


Рис. 2.11. Варианты пространственного расположения двух лопаток.

Лопатки совершают колебания в одной фазе с одинаковой амплитудой 3.5 мм и частотой 30 Гц.

Характер протекающих процессов проиллюстрирован на рис. 2.12, где показано пространственное расположение частиц в момент времени, соответствующий развитой стадии перемешивания.

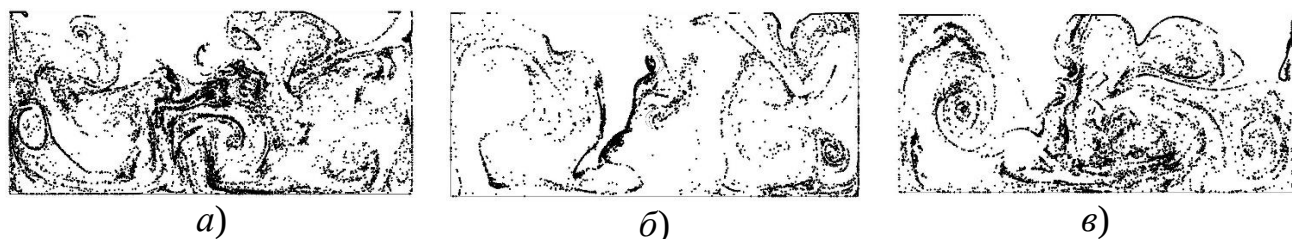


Рис 2.12. Распределение частиц примеси в пространстве при $t = 5$ с.

Наблюдаемой картине соответствует основной критерий I_1 на рис. 2.13, а). Кроме того, на рис. 2.13. приведена динамика критериев перемешивания для устройства с одной лопаткой (кривая 4), расположенной в центре рассматриваемой области, такого же размера при тех же режимах работы установки. Как и следовало ожидать, поведение основного критерия указывает на то, что перемешивающий потенциал у устройства с двумя лопатками выше. При этом наиболее предпочтительным с точки зрения эффективности и темпа перемешивания оказывается вариант *а*, с горизонтальным пространственным расположением. Варианты *б* и *в* ведут себя примерно одинаково на протяжении всего времени.

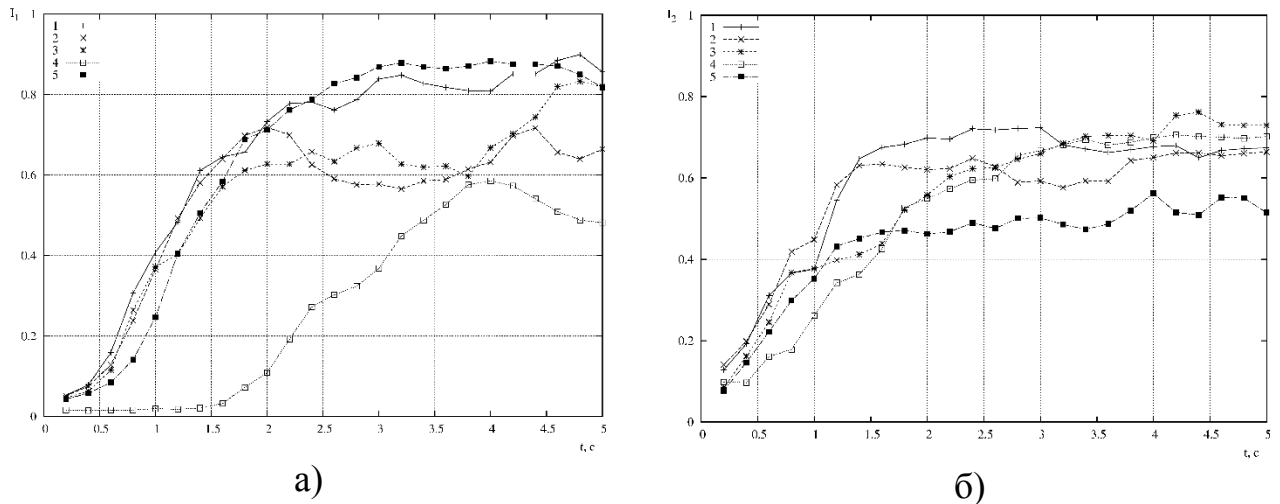


Рис 2.13. а) критерии эффективности перемешивания I_1 ; б) критерии – I_2 .

1 – вариант а, 2 – вариант б, 3 – вариант в, 4 – вариант с одной лопаткой, 5 – вариант г.

Также стоит отметить тот факт, что критерий I_2 , показывающий равномерность распределения частиц по заполненным ячейкам, с течением времени для всех рассмотренных вариантов принимает приблизительно одинаковое значение (см. рис. 2.13, б).

Перейдем к описанию подхода к оптимальному размещению лопаток в пространстве. В работе [6] отмечалось, что в перемешивающих устройствах проточного типа удастся увеличить производительность системы путем размещения на пути следования пятен примеси дополнительных препятствий. На основании этого, а также проведенных исследований в разделах 2.2 и 2.3, был предложен следующий принцип построения алгоритма пространственного размещения лопаток для замкнутых емкостей с колебательными рабочими элементами. Пусть в начале имеется только одна лопатка, которая расположена в центре прямоугольной расчетной области. Примесь в начальный момент времени располагается пятном в правом нижнем углу области. Проведем для этого варианта расчет, по методике, представленной в настоящей работе. При этом, на каждом временном шаге будем сохранять информацию о местонахождении каждой частицы. В итоге получим траектории движения частиц. Примем в расчет то, что перемешивание состоит из двух этапов: «процесс затягивания» примеси и собственно перемешивание. Исключим из рассмотрения первый этап, и отобразим

историю движения каждой частицы на втором этапе («установившийся» процесс). В результате получим картину, представленную на рис. 2.14, а).

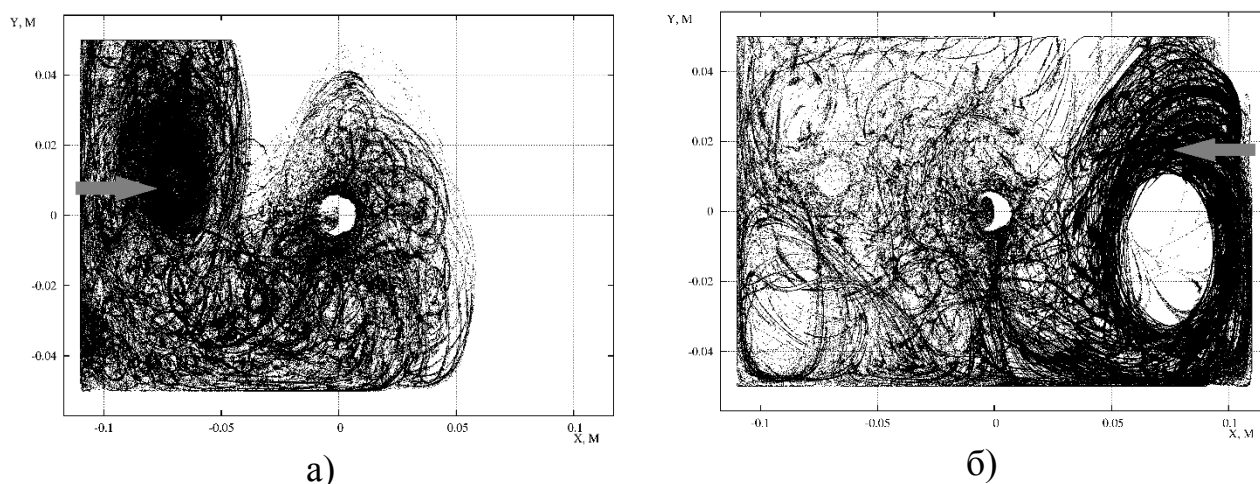


Рис 2.14. Траектории всех частиц внутри области. а) вариант с одной лопаткой; б) вариант с двумя лопатками, расположенными согласно алгоритму данного раздела.

Анализ данного изображения, показывает, что существует определённая зона в пространстве, где частица оказывается с наибольшей вероятностью. С целью достижения максимального эффекта, расположим следующую лопатку именно в данной зоне. Для определения координат точки в пространстве воспользуемся разбиением расчетной области прямоугольной сеткой, которая используется при вычислении критерия эффективности перемешивания. Исключив ячейки, которые располагаются вблизи колеблющегося элемента, найдем ту, в которую попало наибольшее количество частиц за все время расчета. Следующая лопатка помещается в центр данной ячейки. В рассматриваемой задаче это точка с координатами $(X, Y) = (-0.07226; 0.008)$ (система координат аналогична рис. 2.14, место размещения лопатки показано стрелкой). Остается решить вопрос, как ориентировать рабочий элемент. Как было показано ранее (например, см. рис. 2.8) интенсивное вихреобразование и, как следствие, перемешивание происходит в той части области, куда направлена плохообтекаемая часть профиля лопатки. Поэтому целесообразно выбрать направление от левой стенки к правой, чтобы обеспечить максимально возможное распространение вихревых структур на большую область смесительного устройства. На рис. 2.13, а) и б) маркированными кривыми 5

показаны зависимости критериев эффективности перемешивания I_1 , I_2 от времени для расположения двух лопаток, определенного с помощью представленного подхода (вариант z). Видно, что основной критерий эффективности перемешивания I_1 у вариантов z и a , в среднем близки. Однако новое расположение лопаток позволило улучшить критерии I_2 (рис. 2.13, б), т.е. частицы распределены в заполненных ячейках более равномерно, чем во всех предыдущих вариантах. Далее проводится расчет для новой пространственной конфигурации (рис. 2.14, б), и процесс повторяется с целью определения местоположения других лопаток.

Таким образом, в данном разделе с помощью методов математического и компьютерного моделирования было исследовано влияние пространственного размещения рабочих элементов в установках колебательного типа. Предложен подход к оптимизации расположения лопаток в пространстве, основанный на отслеживании траекторий каждой из частиц примеси. Это создает предпосылки для автоматизации процесса проектирования такого рода волновых перемешивающих устройств.

2.5. Влияние формы лопатки на эффективность перемешивания.

В данном разделе исследуется влияние формы рабочего элемента на эффективность перемешивания. Рассматриваются шесть вариантов геометрических форм профиля лопатки (см. рис. 2.15). Все шаблоны получаются

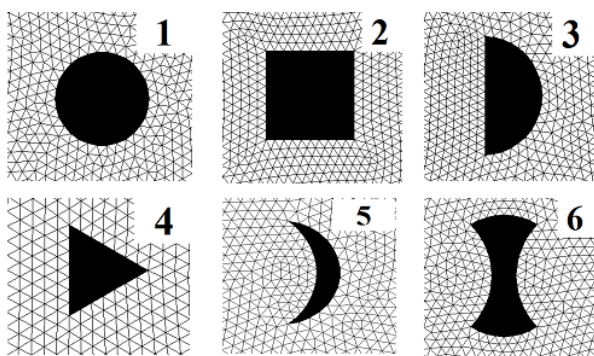


Рис. 2.15. Варианты геометрической формы лопаток.

из варианта 1 диаметром 10 мм. Лопатка совершает колебания с амплитудой $a = 3.5$ мм и частотой $f = 30$ Гц. В начальный момент времени среда находится в состоянии покоя, а частицы примеси расположены пятном в правой нижней части области. На рисунках 2.16 и 2.17 приведены картины, которые

соответствуют начальной (лопатка совершила 48 колебаний) и развитой (лопатка совершила 150 колебаний) стадиями перемешивания.

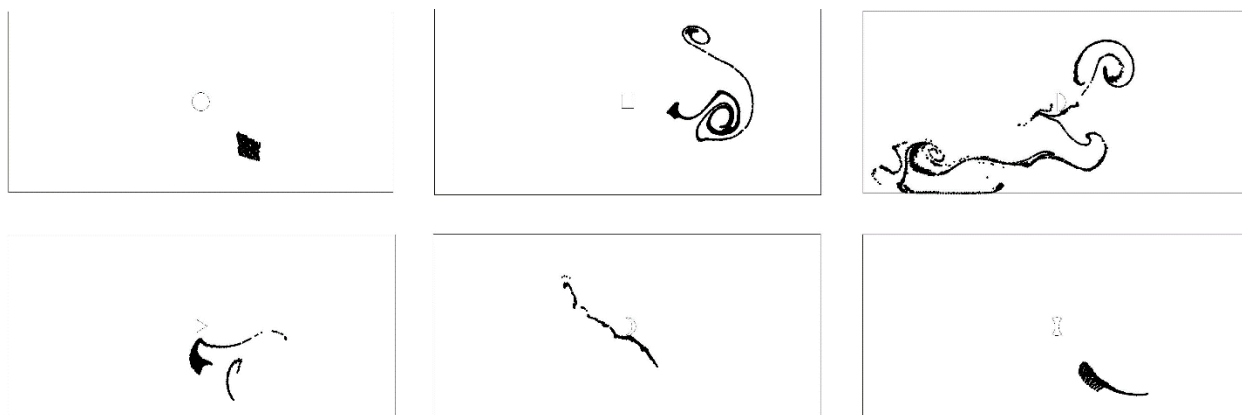


Рис. 2.16 Распределение частиц в пространстве при $t = 1.6$ с для всех вариантов. Расположение вариантов аналогично Рис. 2.15.

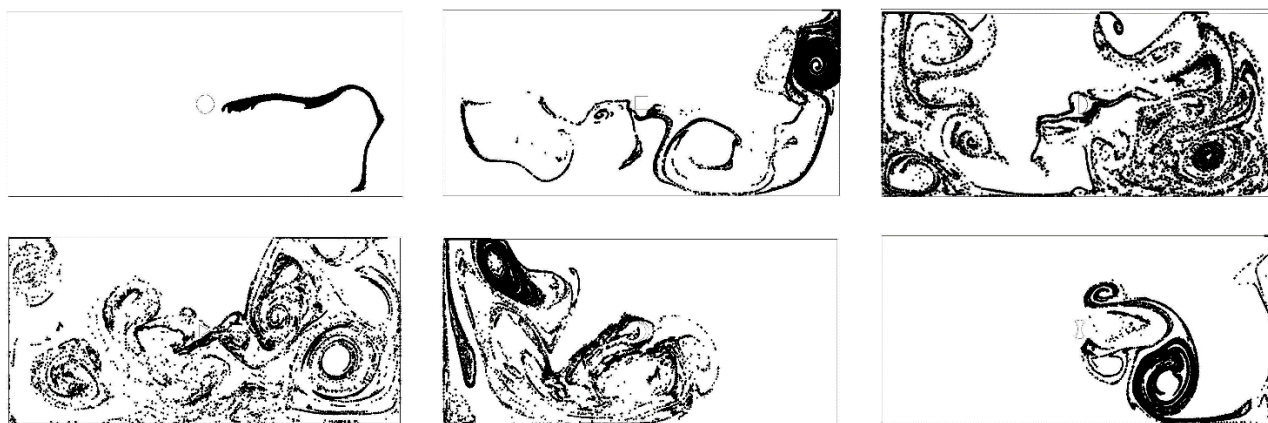


Рис. 2.17 Распределение частиц в пространстве при $t = 5.0$ с для всех вариантов. Расположение вариантов аналогично Рис. 2.15.

Наблюдаемым картинам соответствует основной критерий I_1 на рис. 2.18. Дадим краткое описание каждому варианту. Для круглого профиля перемешивание практически отсутствует. Характерен очень долгий процесс «затягивания» частиц (около 3-4 с). Это можно объяснить симметрией профиля и его хорошей обтекаемостью: образуется очень мало вихревых структур, способствующих перемешиванию. Для вариантов 2, 6 характерно что процесс происходит как в левой части области, так и в правой, но из-за симметрии и плохой обтекаемости профиля с течением времени частицы начинают скапливаться около боковых стенок. Вариант 5 обсуждался подробно в предыдущих разделах, поэтому не будем

останавливаться на его описании. Наибольший интерес вызывают варианты 3 с полукруглым профилем и 4 с треугольным, так как за относительно короткий промежуток времени частицы заполняют больше 75% области. При этом полукруглый вариант обладает значительно большим темпом. Также существенным отличием является как происходит перемешивание. В ходе колебательного процесса область заполняют вихревые образования, которые и участвуют в транспортировке частиц по пространству. Для треугольного профиля

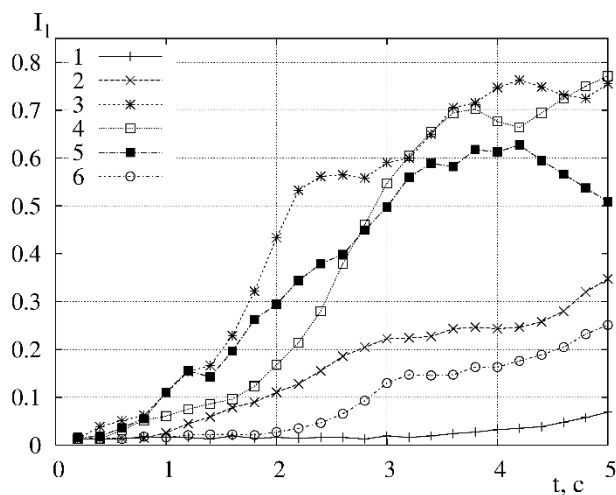


Рис. 2.18. Критерии качества перемешивания I_1 . Нумерация кривых соответствует номерам вариантов.

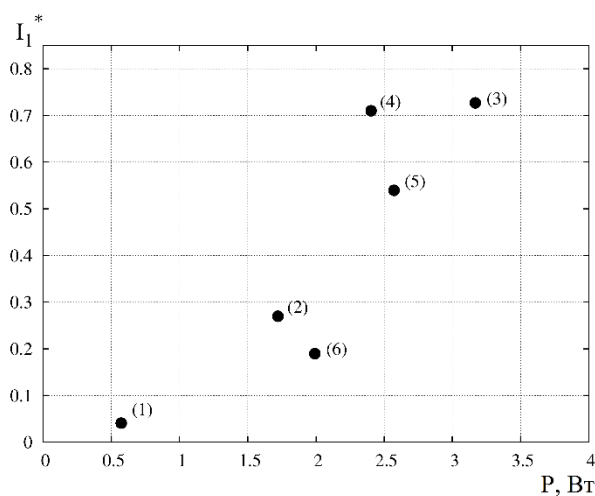


Рис. 2.19. Карта режимов. Нумерация маркеров соответствует номерам вариантов.

характерно наличие в поле течения многих мелких вихрей малой интенсивности, а для полукруглого варианта – небольшое количество вихрей большей интенсивности. Данное явление также объясняет более высокий темп перемешивания у варианта 3, т.е. время процесса «затягивания» частиц значительно меньше.

Дополнительно была рассчитана потребляемая мощность установки для преодоления гидродинамической силы сопротивления. Также была проведена оценка среднего значения критериев I_1^* без учета начального этапа «затягивания» частиц. На основании расчетных данных на рис. 2.19 была построена карта режимов в плоскости «потребляемая мощность – эффективность перемешивания».

Обобщая полученные результаты, можно утверждать, что наихудший результат качества смеси достигается при использовании профилей симметричных относительно прямой, перпендикулярной направлению колебаний рабочего элемента. На основании оценок эффективности перемешивания на рис. 3а можно отдать предпочтение варианту 3 (полукруглый профиль), однако, с точки зрения потребляемой мощности (рис. 3б) более эффективным является вариант 4 (треугольный профиль).

В данном исследовании продемонстрировано, что большое влияние на эффективность перемешивания оказывает геометрическое профилирование лопатки. Выявлено, что нецелесообразно использовать симметричные профили относительно прямой перпендикулярной направлению колебаний рабочего элемента. Была построена соответствующая карта режимов.

2.6. Масштабирование перемешивающих устройств колебательного типа.

В этом разделе рассматривается вопрос масштабирования перемешивающих устройств колебательного типа, который является актуальным при переходе от лабораторных стендовых установок к реальным производственным аппаратам. При решении данной задачи были введены в рассмотрение два критерия подобия, которые были преобразованы с целью описания процессов волнового перемешивания. Аналог числа Рейнольдса, где в классическом случае скорость заменяется произведением частоты и амплитуды, а характерная длина – на отношение площади установки к амплитуде, имеет место следующее выражение:

$$Re^* = \frac{f\rho L_x L_y}{\mu}, \quad (2.1)$$

где L_x, L_y – это соответствующие размеры установки по осям x, y . И аналог числа Струхала, введенный подобным образом:

$$St^* = \frac{L_x L_y}{a^2}. \quad (2.2)$$

Из теории подобия следует, что равенство критериев подобия физической системы – это необходимое и достаточное условие физического подобия [96]. Для проверки правильности введенных критериев, проведем вычислительный эксперимент. Возьмем стандартную форму лопатки (вариант 5) и увеличим расчетную область и размер лопатки пропорционально в два раза. При этом числа Re^* , St^* для данного варианта такие же, как и в рассмотренном выше случае. Отсюда следует, что амплитуда должна увеличиться в 2 раза, а частота уменьшиться в 4 раза для получения подобного течения в укрупненном перемешивающем устройстве.

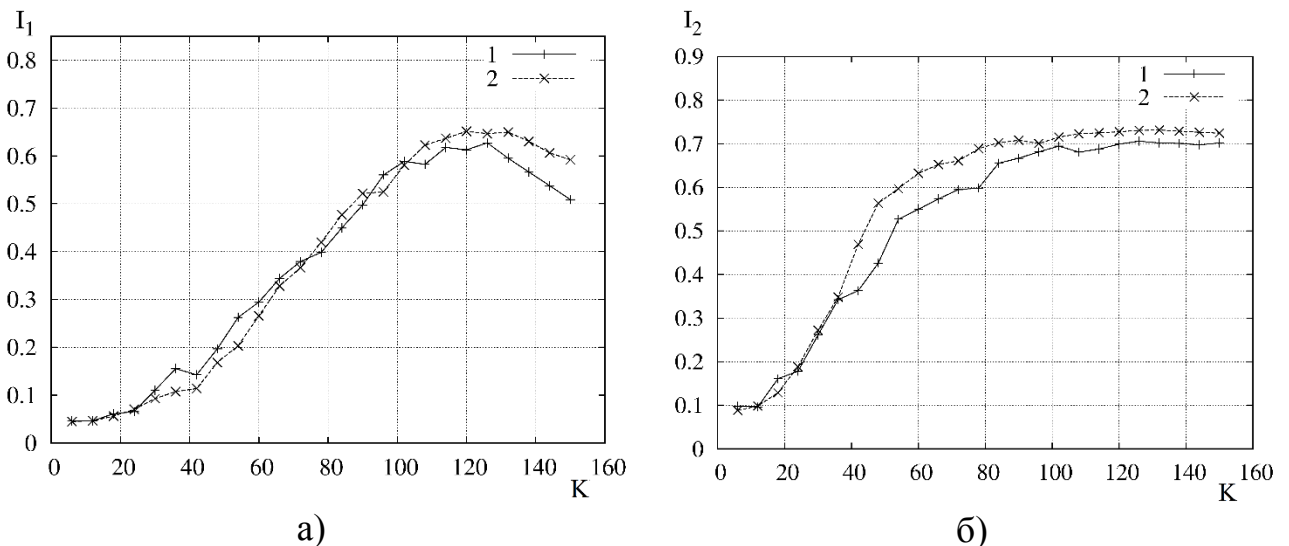


Рис. 2.20. а) зависимость критерия эффективности перемешивания I_1 от количества колебаний; б) зависимость критерия I_2 от количества колебаний. 1 – стандартный размер установки, 2 – размер установки пропорционально увеличен в 2 раза.

Проведем расчет с новыми параметрами: размер области 44×20 см, размер лопатки пропорционально увеличивается в 2 раза, $a = 7.0$ мм, $f = 7.5$ Гц.

Кроме того, было проведено исследование влияния увеличения количества частиц в примеси при расчете критериев перемешивания на прямоугольной сетке размером 50×25 , по итогам которого сделан вывод, что при увеличении расчетной области в два раза, вполне достаточно такого же разрешения по частицам (500 тыс.).

На рис. 2.20 представлены данные критериальной обработки вычислительного эксперимента совместно с результатами для стандартного размера области. Так как два процесса имеют разные частоты, то для сравнения на оси X откладывается число колебаний K рабочего элемента. По результатам анализа данных зависимостей можно утверждать, что присутствует физическое подобие [96], определяемое критериями (2.1), (2.2).

Таким образом, применительно к рассматриваемым процессам гидродинамического перемешивания введены числа подобия, что позволяет обоснованно подходить к масштабированию установок колебательного типа.

2.7. Выводы к главе 2.

Во второй главе, используя методы численного моделирования, удалось в деталях проследить ход протекаемых процессов гидродинамического перемешивания в установках колебательного типа. Исследовано влияние на интенсивность перемешивания таких параметров как: форма колеблющегося элемента и его частотно-амплитудные характеристики. Дана оценка потребляемой мощности. Построена карта режимов в пространстве «потребляемая мощность - эффективность перемешивания». По результатам численного анализа предложен подход к оптимальному размещению рабочих элементов в пространстве, что создает основу для автоматизации процесса проектирования волновых перемешивающих устройств. Применительно к рассматриваемым процессам сформулированы числа подобия, позволяющие рационально обеспечить переход от лабораторных стендовых устройств к промышленным перемешивающим устройствам данного типа.

Глава 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В СИСТЕМЕ ПОДВИЖНЫХ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ.

В данной главе рассматривалось перемешивание в плоском течении ньютоновской жидкости в области между двумя бесконечными коаксиальными профилированными цилиндрами, в результате движения одного или обоих цилиндров вокруг своих осей.

В случае гладких цилиндров, когда пренебрегают инерционными эффектами, определение поля потока рассматривалось многими авторами. Так автор работы [97] исследовал проблему с точки зрения теории смазки, сделав предположение, что радиусы цилиндров почти равны. Это ограничение стало в дальнейшем известно, как приближение смазки. А задача о течении между двумя эксцентрично расположенными цилиндрами впервые была рассмотрена в [98]. В [99] было получено обобщенное решение данной проблемы для разных случаев вращений цилиндров, и установлен ряд условий, при которых могут существовать точки застоя и вихри. Данные результаты использовались в настоящем исследовании, чтобы провести валидацию используемых вычислительных алгоритмов.

Численное моделирование проводилось при различных значениях чисел Рейнольдса. Целью данного анализа является определения эффективных схем устройств и режимов их работы, чтобы создать предпосылки для проектирования промышленных смесительных машин данного типа.

3.1. Постановка задачи.

Постановка задачи физического эксперимента представлена схематически на рис 3.1 слева. Есть емкость в форме цилиндра радиуса R_w , который заполнен покоящейся жидкостью. Цилиндрическая поверхность которого (статор) может совершать движения с угловой скоростью $\omega_w(t)$. Внутри резервуара коаксиально

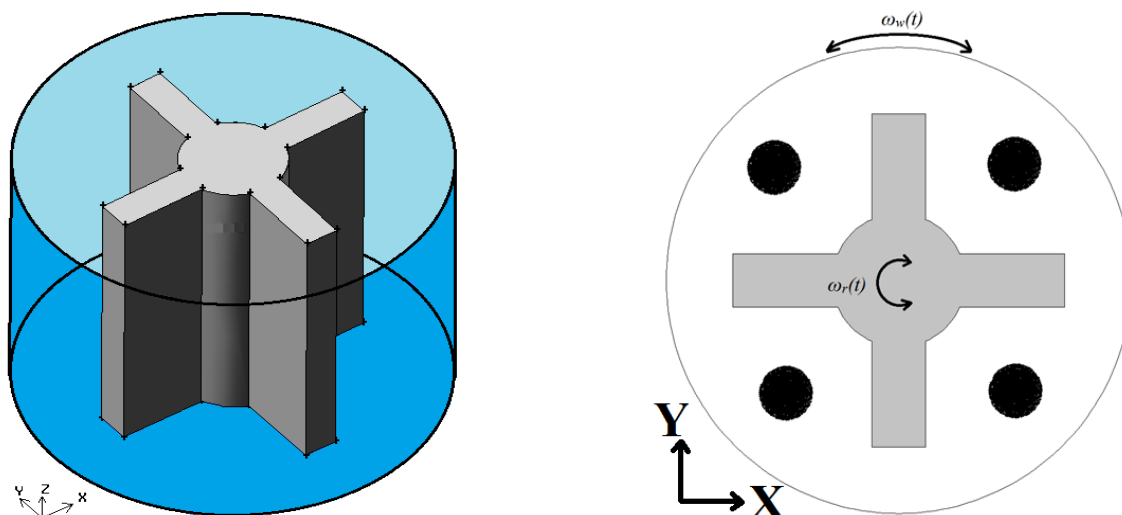


Рис. 3.1. Схематические представления эксперимента (слева) и расчетной области вычислительного эксперимента (справа).

расположен второй цилиндр (ротор) такой же высоты, но меньшего радиуса. Причем ротор спрофилирован таким образом, что величина минимального зазора между внешним и внутренним цилиндром равна H . Форма внутреннего цилиндра представлена на рис. 3.1, а его движение определяется зависимостью угловой скорости от времени, $\omega_r(t)$. Кроме того, в рабочий объем добавляется твердотельная примесь, которая находится во взвешенном состоянии в жидкой среде. Благодаря движениям цилиндров создаются условия для возникновения перемешивания. Глобальная цель исследования аналогична главе 2: в рамках поставленной задачи определить какие-либо способы воздействия на среду, чтобы примесь равномерно распределилась по пространству.

В проведенной серии вычислительных экспериментов из соображений, что возмущение от верхней и нижней границ емкости незначительны, чтобы оказать влияние на процесс перемешивания, рассматривалась двумерная постановка задачи. На рис. 3.1 справа представлен вид расчетной области. Радиус внешней стенки (статора) $R_w = 1.75$ м. Минимальная величина зазора между ротором и статором $H = 0.5$ м. В качестве рабочей жидкости рассматривался глицерин при стандартных условиях с плотностью $\rho = 1250$ кг/м³ и динамической вязкостью $\mu = 0.75$ Па·с. В начальный момент времени среда находится в состоянии покоя.

Жидкость приходит в движение вследствие перемещений цилиндров по определенному закону. Угловые скорости рабочих элементов равны по модулю и противоположны по направлению: $|\omega_w(t)| = |\omega_r(t)| = 0.1$ рад/с. Движение ротора и статора осуществляется по разрывному протоколу (3.1) с периодом $T = 20$ с:

$$\omega_r(t) = \begin{cases} -\omega, & kT < t \leq T\left(k + \frac{1}{2}\right); \\ 0, & \left(k + \frac{1}{2}\right)T < t \leq T(k + 1). \end{cases}$$

$$\omega_w(t) = \begin{cases} 0, & kT < t \leq T\left(k + \frac{1}{2}\right); \\ \omega, & \left(k + \frac{1}{2}\right)T < t \leq T(k + 1). \end{cases} \quad (3.1)$$

Где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. То есть первую половину периода движется только ротор (статор неподвижен), а вторую половину движется только статор в противоположном направлении (ротор неподвижен, смена движения происходит мгновенно). Первым движение начинает ротор. График изменения угловых скоростей представлен на рис. 3.2.

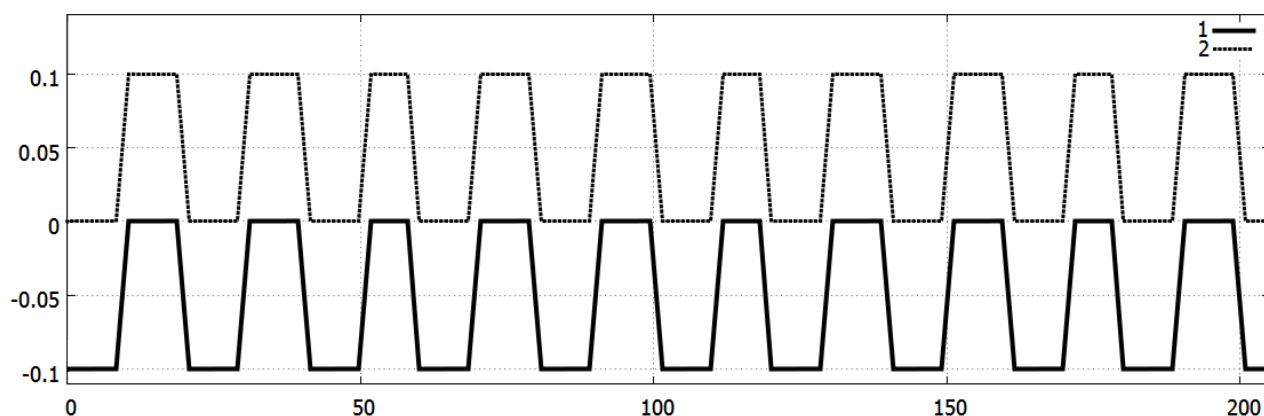


Рис. 3.2. График зависимости угловой скорости рабочего элемента от времени. 1 – статор; 2 – ротор.

Для решения поставленной задачи применялась методика, описанная в разделе 1.2 настоящей работы. Расчеты проводились на триангулярных сетках. При изучении сеточной сходимости на вложенных сетках было показано, что решение практически переставало меняться при разрешении от 25 тыс. ячеек и больше. Аналогично главе 2, был написан модуль с использованием технологии UDF на

языке C, который задает закон движения ротора. Движение статора осуществлялось путем задания закона изменения компонент скорости на гладкой границе при помощи UDF. Так как расчетная область в процессе вычислительного эксперимента сильно видоизменяется (ротор совершает полные обороты), использовался гибрид вычислительной сетки, состоящей из перестраиваемой и деформируемой сеток. То есть до определенного критического изменения угла треугольной ячейки использовалась деформируемая сетка, как только достигалось критическое значение сетка полностью перестраивалась. Параметры деформации и перестроения подбирались экспериментально таким образом, чтобы предотвратить чрезмерное появление мелких ячеек и избежать быстрого изменения объема ячейки.

В начальный момент времени $t = 0$ в расчетную область круглым пятном радиуса 0.2 м помещается некоторый объем примеси в центре каждого квадранта (см. рис. 3.1. справа). Общее количество частиц примеси равно 240 тыс. Шаг интегрирования по времени для гидродинамического поля и частиц совпадает и равен $\Delta t = 0.01$ с.

3.2. Валидация математической модели и численных алгоритмов.

Для валидации математической модели рассматривалась задача о течении в приближении Стокса между двумя эксцентрично расположенными цилиндрами (см. рис. 3.3.). Несмотря на то, что в [99] было получено обобщенное решение данной проблемы для разных случаев вращений цилиндров, представленная задача не потеряла своей актуальности на данный момент. Так в недавней работе [56] авторами получено аналитическое решение для поля скорости, когда течение жидкости создается не только вращательным, но и поступательным движениями цилиндров.

Ниже представлены данные аналитические выражения для получения поля скорости между цилиндрами, которые были преобразованы с целью дальнейшей

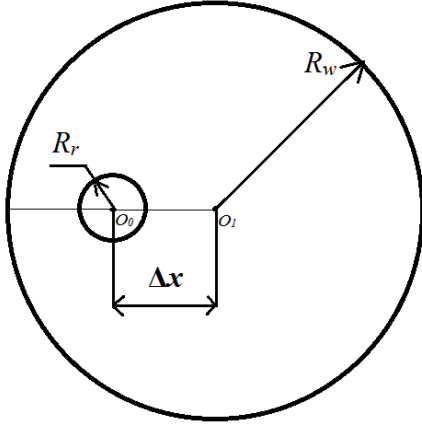


Рис. 3.3. Схематическое представление задачи о течении между двумя эксцентрично расположенными цилиндрами.

реализации в программном коде на ЭВМ. Согласно рис. 3.3. вводятся следующие обозначения: R_r и R_w – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров, ω_r , ω_w – постоянные угловые скорости вращения цилиндров соответственно, $U_r = R_r\omega_r$, $U_w = R_w\omega_w$ – соответствующие линейные скорости, Δx – расстояние между центрами цилиндров. Для построения аналитического поля

нам потребуются следующие переменные:

$$a = \frac{\sqrt{(\Delta x^2 - R_w^2 - R_r^2)^2 - 4(R_r R_w)^2}}{2\Delta x}, \quad (3.2)$$

$$n_w = \ln \frac{\sqrt{a^2 + R_w^2} + a}{R_w}, \quad n_r = \ln \frac{\sqrt{a^2 + R_r^2} + a}{R_r}.$$

Решение строится в биполярных координатах (ξ, η) , которые выражаются через декартовы следующим образом:

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{(x - c + a)^2 + y^2}{(x - c - a)^2 + y^2}, \quad \xi = \operatorname{arctg} \left(\frac{x - c + a}{y} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{x - c - a}{y} \right), \quad (3.3)$$

$$c = -a \cdot \operatorname{cth}(n_w).$$

С учетом того факта, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Компоненты скорости могут быть вычислены по следующим выражениям:

$$u = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad v = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (3.5)$$

Выпишем оставшиеся частные производные.

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2a(a^2 - c^2 - x^2 + y^2 + 2cx)}{((x - c + a)^2 + y^2)((x - c - a)^2 + y^2)}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{4ay(c - x)}{((x - c + a)^2 + y^2)((x - c - a)^2 + y^2)}.$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -\frac{M(\eta) \cdot \sin(\xi)}{(\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\xi))^2}. \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{dN}{d\eta} + \frac{dM}{d\eta}(\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\xi)) - \frac{M(\eta) \cdot \operatorname{sh}(\eta)}{(\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\xi))^2}. \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\eta} = & A_3 \operatorname{ch}(\eta) + A_2 \operatorname{sh}(\eta) + A_1 (\operatorname{sh}(\eta) + \eta \cdot \operatorname{ch}(\eta)) \\ & + A_4 (\operatorname{sh}(\eta) \cdot \operatorname{ch}(2\eta) + 2\operatorname{ch}(\eta) \cdot \operatorname{sh}(2\eta)) \\ & + A_5 (\operatorname{sh}(\eta) \cdot \operatorname{sh}(2\eta) + 2\operatorname{ch}(\eta) \cdot \operatorname{ch}(2\eta)), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\frac{dN}{d\eta} = A_0 - 2A_4 \operatorname{sh}(2\eta) - 2A_5 \operatorname{ch}(2\eta).$$

Где коэффициенты A_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ определяются выражениями (3.10):

$$\begin{aligned} A_0 = & a \cdot \operatorname{cth}(\beta) \left[\frac{(U_w \operatorname{ch}(n_w) - U_r \operatorname{ch}(n_r)) \operatorname{sh}(\alpha) \operatorname{sh}(\beta)}{\beta (\operatorname{ch}(\alpha) \operatorname{ch}(\beta) - 1) - \operatorname{sh}(\beta) (\operatorname{ch}(\alpha) - \operatorname{ch}(\beta))} \right. \\ & \left. - \frac{(U_w \operatorname{sh}(n_w) - U_r \operatorname{sh}(n_r)) (\beta + \operatorname{ch}(\alpha) \operatorname{sh}(\beta))}{\beta (\operatorname{ch}(\alpha) \operatorname{ch}(\beta) - 1) - \operatorname{sh}(\beta) (\operatorname{ch}(\alpha) - \operatorname{ch}(\beta))} \right], \\ A_1 = & a \left[\frac{(U_w \operatorname{sh}(n_w) - U_r \operatorname{sh}(n_r)) \operatorname{sh}(\alpha) \operatorname{ch}(\beta)}{\beta (\operatorname{ch}(\alpha) \operatorname{ch}(\beta) - 1) - \operatorname{sh}(\beta) (\operatorname{ch}(\alpha) - \operatorname{ch}(\beta))} \right. \\ & \left. + \frac{(U_w \operatorname{ch}(n_w) - U_r \operatorname{ch}(n_r)) (1 - \operatorname{ch}(\alpha) \operatorname{ch}(\beta))}{\beta (\operatorname{ch}(\alpha) \operatorname{ch}(\beta) - 1) - \operatorname{sh}(\beta) (\operatorname{ch}(\alpha) - \operatorname{ch}(\beta))} \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{\operatorname{sh}(n_r)}{2} (A_1 \operatorname{sh}(n_r) + A_0 \operatorname{ch}(n_r) + a U_r) \\ & + \frac{\operatorname{sh}(n_w)}{2} (A_1 \operatorname{sh}(n_w) + A_0 \operatorname{ch}(n_w) + a U_w), \end{aligned}$$

$$A_3 = -A_1 n_r - \operatorname{ch}(n_r) (A_1 \operatorname{sh}(n_r) + A_0 \operatorname{ch}(n_r) + a U_r),$$

$$A_4 = -\frac{A_0 \operatorname{sh}(\alpha)}{2 \operatorname{ch}(\beta)}, A_5 = -\frac{A_0 \operatorname{ch}(\alpha)}{2 \operatorname{ch}(\beta)}, \alpha = n_r + n_w, \beta = n_w - n_r.$$

С использованием выражений (3.5) были построены линии тока $\Psi = const$ для двух следующих вариантов: $R_r = 0.2$, $R_w = 1.0$, $\omega_r = 5.0$, $\omega_w = -0.2$, $\Delta x = 0.4$ и $R_r = 0.3$, $R_w = 1.0$, $\omega_r = 12.0$, $\omega_w = 1.0$, $\Delta x = 0.525$. Помимо прочего, на основании разделов 1.2 и 3.1 для соответствующих режимов были проведены численные расчеты. Полученные результаты представлены ниже на изображениях 3.4 и 3.5.

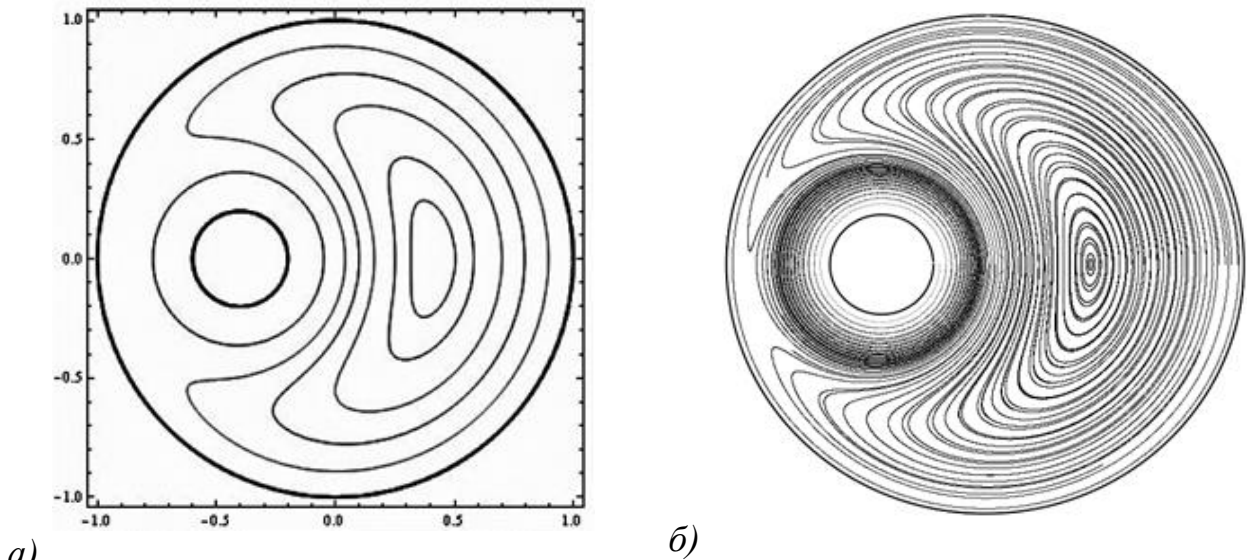


Рис. 3.4. Линии тока для задачи с параметрами $R_r = 0.2$, $R_w = 1.0$, $\omega_r = 5.0$, $\omega_w = -0.2$, $\Delta x = 0.4$. а) решение, полученное по аналитическим выражениям 3.6; б) решение, полученное численно путем решения уравнений Навье-Стокса.

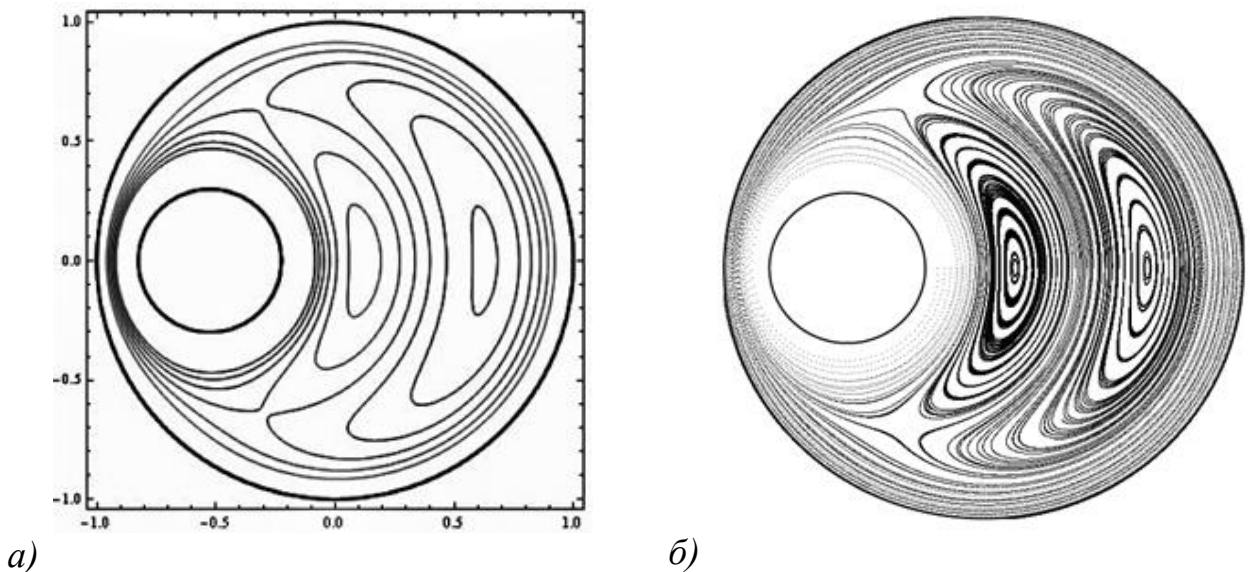


Рис. 3.5. Линии тока для задачи с параметрами $R_r = 0.3$, $R_w = 1.0$, $\omega_r = 12.0$, $\omega_w = 1.0$, $\Delta x = 0.525$. а) решение, полученное по аналитическим выражениям 3.6; б) решение, полученное численно путем решения уравнений Навье-Стокса.

Из рисунков видно, что численное моделирование адекватно описывает наблюдаемую картину, при этом удастся отследить все особые точки в векторном поле жидкости. Валидация численных алгоритмов на этом закончена.

3.3. Анализ результатов.

В данной части переходим к рассмотрению задачи из раздела 3.1.

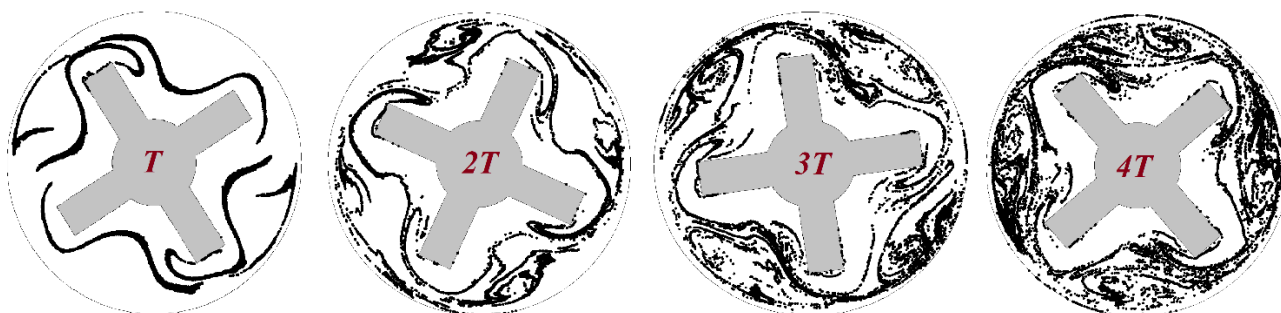


Рис. 3.6. Положение частиц в пространстве в моменты времени кратные периоду.

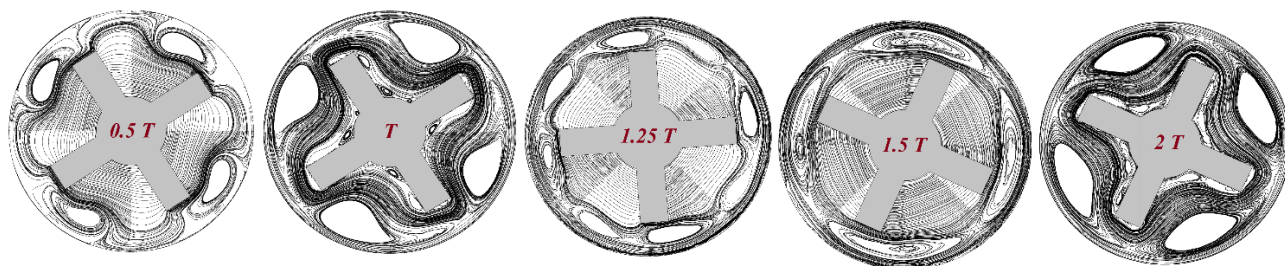


Рис. 3.7. Структура течения жидкости в моменты времени $0.5T$, T , $1.25T$, $1.5T$, $2T$.

На рис. 3.6. показаны положения частиц примеси через равные периоды времени на протяжении 80 с. Видно, что у данного типа устройства высокий перемешивающий потенциал. Разберем подробнее способствующий этому механизм. Структуры в жидкости, в основном являются эллиптическими точками

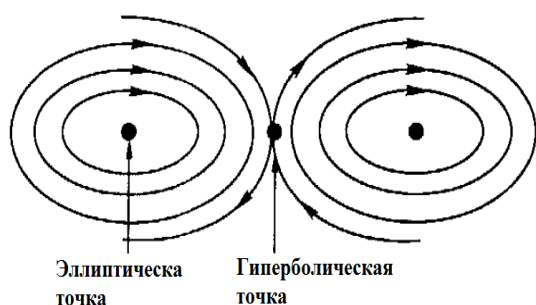


Рис. 3.8. Структура в жидкости, способствующая перемешиванию.

(они образуют «островки» с пустотами на рис. 3.7), по отдельности они окружены инвариантными кривыми, которые совершают поступательные и вращательные движения, сохраняя свою идентичность. Не возникает обмена веществ между слоями жидкости и, следовательно, нет

интенсивного перемешивания. Однако взаимодействие двух эллиптических точек, порождает гиперболическую (см. рис. 3.8.), в окрестности которой происходит сжатие и растяжение примеси, вытягивание ее в нить. Наличие системы таких гиперболических точек и приводит к эффективному перемешиванию в рассматриваемом случае.

Опишем систему особых точек, которая возникает в нашем конкретном случае на рис. 3.7 (структура течения жидкости визуализируется траекториями меченых частиц (pathlines)). В начале процесса, в момент времени ($0 - 0.5T$), когда вращается только ротор, между лопастями ротора и внешней стенкой, возникают изолированные эллиптические точки (см. рис. 3.7.). Затем ротор останавливается, и начинает вращение внешняя стенка (статор), двигаясь в противоположном направлении. Это приводит к появлению устойчивой структуры из четырех взаимодействующих эллиптических точек, которые порождают в свою очередь 4 гиперболические точки, на протяжении всего времени вращения статора ($0.5T - T$). Далее внешняя стенка останавливается, и снова начинает вращаться ротор. За счет этого в момент времени с T по $1.1T$ происходит бифуркация четырех эллиптических точек предыдущего режима, в результате появляются восемь эллиптических и восемь гиперболических особых точек. Данная структура не является устойчивой и сохраняется до момента времени $1.35T$. И к моменту времени $1.5T$ снова происходит бифуркация: происходит слияние двух пар эллиптических точек при этом уничтожается одна гиперболическая. Далее при вращении внешней стенки данные структуры смещаются и остаются в новом положении на протяжении времени $1.5T - 2T$. После чего процесс повторяется периодически с периодом T , как в моменты времени $T - 2T$. Стоит отметить, что интенсивность перемешивания значительно выше в моменты $0.5T - T$, $1.5T - 2T$, т.е. когда вращается внешняя стенка потому что движение статора увеличивает скорость вращения вихря, порождающего эллиптическую точку. При этом роль бифуркаций на отрезке $1.5T - 2T$ также важна, так как увеличивает хаотизацию системы, особенно на больших интервалах времени работы установки. Однако, в

конце каждого периода вблизи ротора возникает система из мелких эллиптических точек, которые являются центрами вихрей малой интенсивности, что приводит к образованию застойной зоны. Также стоит отметить существенное влияние величины минимального зазора H на процесс перемешивания. При его уменьшении в каждом квадранте расчетной области образуется изолированная эллиптическая точка, и микширование практически отсутствует. При его увеличении происходит незначительное смещение только вблизи поверхности внешнего цилиндра.

Таким образом, компьютерное моделирование позволило в деталях проследить ход протекающих процессов и определить структуры в жидкости, обеспечивающие перемешивание.

3.4. Профилирование поверхностей рабочих элементов.

В работе [28] с применением элементов аппарата теории Колмогорова-Арнольда-Мозера [35] рассматривался вопрос о перемешивании в трехмерных проточных трактах. Было показано, что в процессе перемешивания образуются ориентированные трубки, соответствующие КАМ кривым, которые являются инвариантными поверхностями и не могут пересекаться частицами примеси. В свою очередь, наблюдаемые на рис. 3.7. картины похожи на те, которые образуются

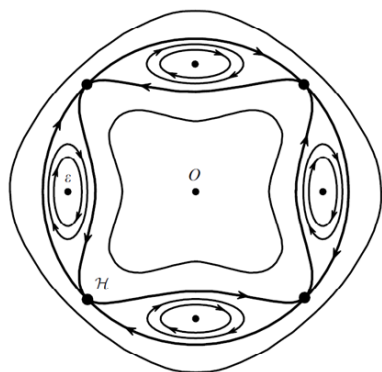


Рис. 3.9. Положение особых точек в нелинейных системах с малым возмущением вблизи резонанса, [38].

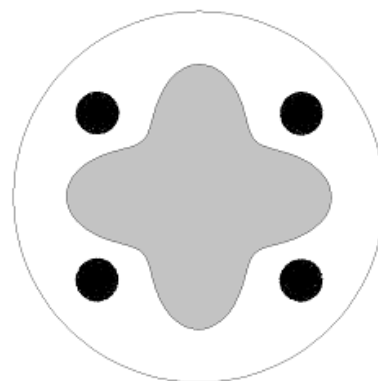


Рис. 3.10. Вид расчетной области после профилирования ротора и начальное расположение примеси.

при рассмотрении в гамильтоновой механике фазовых портретов систем, близких к интегрируемым, при нелинейных резонансах [38] (рис. 3.9). Проводя аналогию, можно сказать, что рассматриваемая в вычислительном эксперименте система из гиперболических точек образует гетероклиническое сплетение сепаратрис («гирлянды» сепаратрис). Небольшое возмущение такой системы приводит к сложному расщеплению сепаратрис, что и вызывает хаотическое движение примеси, которое благоприятным образом сказывается на перемешивании. Однако, следует отметить, что на приведенных картинах наблюдаются застойные зоны.

Рассмотрим подробнее картину течения в момент времени, кратный периоду, на рис. 3.7. Как отмечалось выше, данная картина топологически похожа на ту, которая возникает в нелинейных системах с малым возмущением вблизи резонанса, рис. 3.9. Если придерживаться такой логики, то поверхность, которая образуется сгущением траекторий меченых частиц, будет КАМ-поверхностью, и частицы примеси не смогут пересечь ее. Таким образом, наиболее простой способ избавиться от застойной зоны состоит в профилировании ротора формой, которая определяет КАМ-поверхность как на рис. 3.7 в момент времени кратный периоду T . Для этой цели, а также с точки зрения простоты конструирования, форма ротора была аппроксимирована следующим уравнением в полярной системе координат (R, φ) :

$$R_r(\varphi) = 1.0 + 0.25\cos(4\varphi) \quad (3.11)$$

Геометрическая область теперь выглядит как на рис. 3.10.

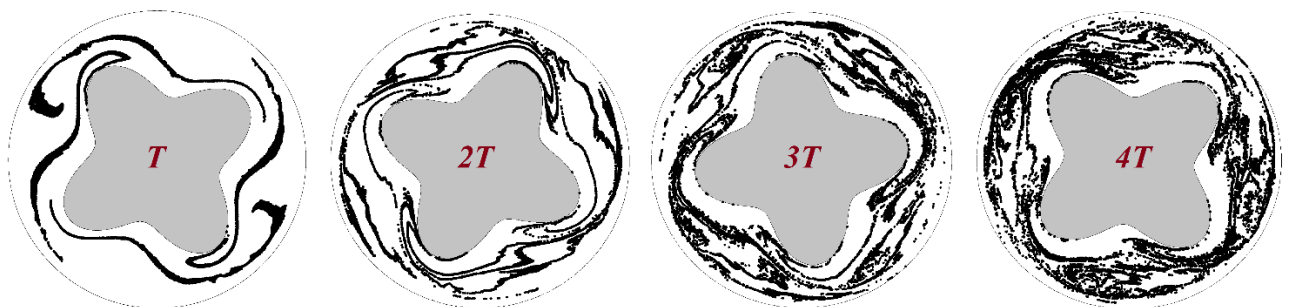


Рис. 3.11. Положение частиц в пространстве в моменты времени кратные периоду.



Рис. 3.12. Структура течения жидкости в моменты времени $0.5T$, T , $1.25T$, $1.5T$, $2T$.

Как видно из результатов расчета на рис. 3.12, данное профилирование никак не отразилось на динамике особых точек, но при этом удалось существенно сократить площадь застойной зоны (рис. 3.11). Добиться их полного отсутствия при такой новой форме ротора, как будет показано в следующем разделе, возможно через подбор определенных значений периода и угловой скорости подвижных элементов установки.

3.5. Масштабирование в системе подвижных профилированных цилиндров.

В этом разделе рассматривается вопрос масштабирования в системе подвижных коаксиальных цилиндров. При решении данной задачи сформулированы два числа подобия из механики жидкости и газа, которые были преобразованы с целью описания процессов гидродинамического перемешивания в данном типе устройств.

Аналог числа Рейнольдса:

$$Re^* = \frac{|u|}{\nu} \left(\frac{H^2}{W} \right). \quad (3.12)$$

И аналог число Струхала:

$$St^* = \frac{1}{T|u|} \left(\frac{H^2}{W} \right). \quad (3.13)$$

Здесь $u = \omega R_w$ – линейная скорость статора, $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость, H – минимальная величина зазора между ротором и статором, $W = 2\pi R_w$ – линейный размер статора. В нашем конкретном случае числа подобия равны соответственно: $Re^* = 6.629$, $St^* = 0.0065$.

Для доказательства нашего утверждения была проведена серия вычислительных экспериментов, представим один из расчётов с рабочей жидкостью, динамическая вязкость которой в 10 раз больше, то есть 7.5 Па·с. Рассмотрим вариант при той же геометрии расчетной области с увеличенным в 10 раз модулем линейной скорости ($|u| = 1.75$ м/с) и периодом, уменьшенным в 10 раз

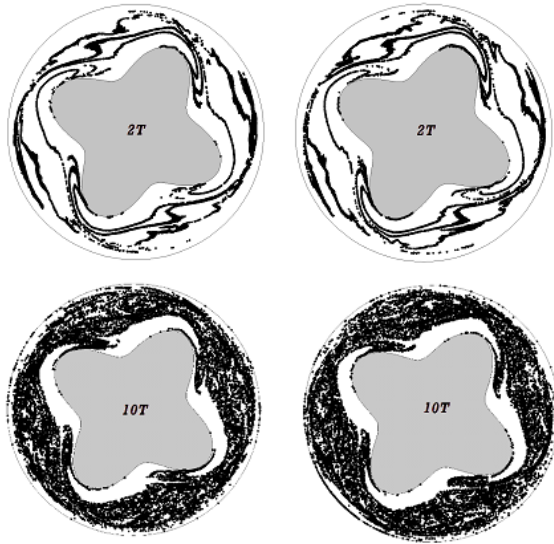


Рис. 3.13. Положения частиц в пространстве в начале процесса перемешивания и в конце. Слева: вязкость 7.5 Па·с; справа – 0.75 Па·с.

($T = 2$ с). При этом числа Re^* , St^* для данного варианта такие же, как и в рассмотренном случае выше. На рис. 3.13 представлены результаты расчета для обоих вариантов через равные периоды в начале и в конце процесса. Данные картины идентичны, что свидетельствует о наличии физического подобия [96], определяемого выражениями (3.12) и (3.13).

Был проведен параметрический анализ по влиянию динамической вязкости и периода разрывного протокола на исследуемый процесс. Результаты представлены в таблице 3.1 в пространстве чисел подобия (Re^* ; St^*). Примесь изначально располагалась круглым пятном в центре каждого квадранта, как на рис. 3.9.

Таблица 3.1. Карта режимов.

	$St^* = 1.3e-02$	$St^* = 6.5e-03$	$St^* = 3.3e-04$
$Re^* = 6.629e-01$			

Продолжение таблицы 3.1.

	$St^* = 1.3e-02$	$St^* = 6.5e-03$	$St^* = 3.3e-04$
$Re^* = 6.629e+00$			
$Re^* = 6.629e+01$			
$Re^* = 6.629e+02$			

Обобщая полученные результаты, можно утверждать, что с уменьшением динамической вязкости μ (увеличением Re^*) процесс перемешивания развивается

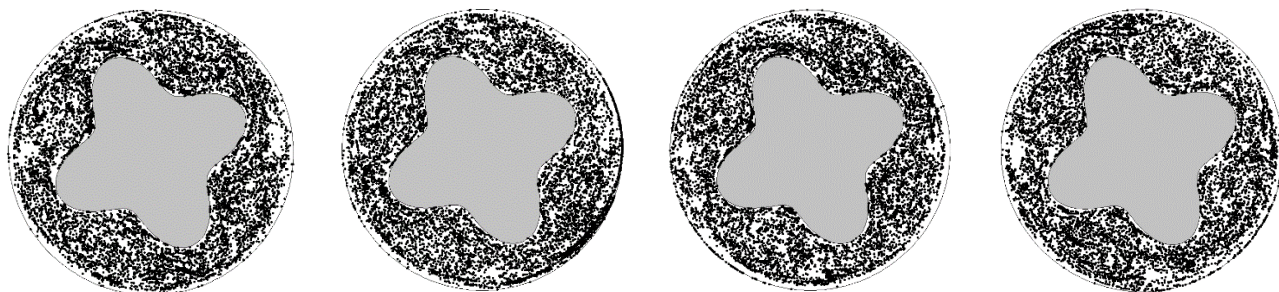


Рис. 3.14. $(Re^*; St^*) = (6.629e+00; 3.3e-04)$. Положение отдельных пятен через $10T$ вблизи внутреннего цилиндра. Отмечено положительное влияние на процесс микширования увеличение периода разрывного протокола T (уменьшение St^*). Если рассмотреть стандартный вариант $(Re^*; St^*) = (6.629e+00; 6.5e-03)$, то

увеличение периода в несколько раз позволило добиться идеального перемешивания, $(Re^*; St^*) = (6.629e+00; 3.3e-04)$. На рис. 3.14 для данного варианта показано положения частиц в пространстве для каждого отдельного пятна примеси (изначальное расположение на рис. 3.9).

3.6. Использование других протоколов перемешивания.

В связи с тем, что применение в чистом виде разрывного протокола (3.1) в реальных аппаратах затруднено, так как мгновенные смены движения оказывают высокую нагрузку на приводы машин, то было исследовано влияние на процесс микширования колебательных протоколов движения рабочих элементов в задаче с профилированным ротором при $(Re^*; St^*) = (6.629e+00; 6.5e-03)$.

Первым был рассмотрен режим, когда ротор неподвижен, а статор совершает движения по следующему колебательному закону:

$$\begin{aligned}\omega_r &= 0, \\ \omega_w(t) &= -\omega \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Практически в течение всего процесса перемешивания у нас имеются четыре изолированные эллиптические точки, положение которых показано на рис. 3.15 а. Так как скорость жидкости в окрестности этих точек практически нулевая, то отсутствует перемешивание, что наглядно демонстрируется рис. 3.15 б.



Рис. 3.15 а.

Структура течения
жидкости. $t=80с$.

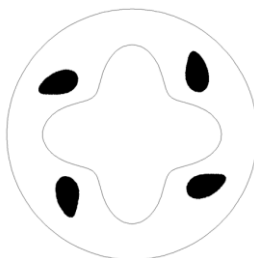


Рис. 3.15 б.

Положения частиц в
пространстве. $t=80с$.

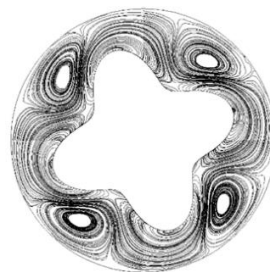


Рис. 3.16 а.

Структура течения
жидкости. $t = 80с$.



Рис. 3.16 б.

Положения частиц в
пространстве. $t=80с$.

Следующим рассматривался режим, когда ротор и статор одновременно совершают колебательные движения по следующим законам (аналогичные результаты получены для случая, когда в (3.15) статор неподвижен $\omega_w = 0$):

$$\begin{aligned}\omega_r(t) &= -\omega \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), \\ \omega_w(t) &= \omega \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Данный вариант предпочтительней рассматриваемого ранее. Здесь также на протяжении всего периода времени в поле присутствуют изолированные эллиптические точки, что не способствует эффективному перемешиванию. Однако, на интервале времени кратный периоду T (см. рис. 3.16, а) образуются гиперболические особые точки вблизи ротора, которые существуют очень короткий интервал времени $T - 1.1T$. При наличии подобных когерентных структур в поле перемешивание присутствует, но с очень низким темпом, в отличие от рассмотренного ранее разрывного протокола (3.1), что и демонстрируется на рис. 3.16, б. Пятно с частицами примеси в основном совершает движение в пределах своего квадранта, и требуется значительный интервал времени, чтобы примесь начала из одного квадранта начала занимать область другого.

В работе [64] была рассмотрена задача о перемешивании внутри круга при использовании одного цилиндрического стержня, движущегося по орбите в форме символа бесконечности, при этом вращение внешнего круга с постоянной скоростью приводит к ускорению процесса смешения. С учетом данного факта был рассмотрен следующий режим, колебательно-вращательный:

$$\begin{aligned}\omega_r(t) &= -\omega \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), \\ \omega_w(t) &= \omega.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Опишем основные особенности данного процесса. В начале процесса существуют четыре изолированные эллиптические точки. Начиная с момента времени кратному $0.25T$ образуются еще 4 гиперболические особые точки, которые



Рис. 3.17. Структура течения жидкости. 90, 100 с.

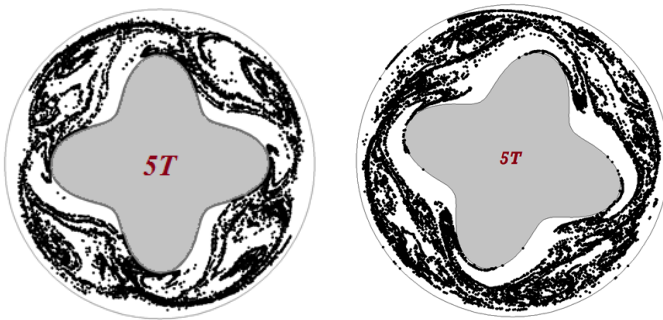


Рис. 3.18. Положения частиц примеси в пространстве $t = 100$ с. Колебательно-вращательный (слева) и разрывный (справа) протоколы.

существую вплоть до $0.75T$ (см. рис. 3.17). Затем они исчезают и снова появляются на временном интервале $0.875T - T$ (рис. 3.17. справа). При наличии подобных когерентных структур в поле течения жидкости перемешивающий потенциал колебательно - вращательного режима высокий, что и демонстрируется на рис. 3.18, где проводится его сравнение с разрывным протоколом в момент времени $5T$.

Из этого следует, что найден оптимальный с

практической точки зрения протокол перемешивания.

3.7. Выводы к главе 3.

В третьей главе компьютерное моделирование перемешивания в системе подвижных коаксиальных цилиндров позволило в деталях проследить ход протекающих процессов и определить основные структуры в поле течения. По результатам компьютерного моделирования перемешивания в системе подвижных коаксиальных цилиндров на основе анализа особых точек векторного поля скоростей жидкости был предложен способ профилирования ротора. В данной системе также сформулированы числа подобия, использование которых позволяет осуществить переход от лабораторных стендовых установок к реальным

производственным аппаратам. Были построены карты режимов в зависимости от чисел Re^* и St^* . Определен наиболее технологический способ управления процессом перемешивания в системе подвижных коаксиальных цилиндров.

Глава 4. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ДИНАМИЧЕСКИМ МОДАМ.

В данной главе рассматривается применение DMD-алгоритма [100] к задачам гидродинамического перемешивания. Основная цель перемешивания состоит в получении максимально однородных по пространству композиций. Разработка оптимальных технологий перемешивания начинается с изучения свойств потоков несущей среды в проектируемой перемешивающей установке, поскольку качество получаемой смеси в первую очередь зависит от структуры течения. Эффективность перемешивания, как правило, связана с наличием в потоке взаимодействующих вихревых структур, созданием условий для возникновения топологического хаоса.

Компьютерное моделирование, позволяющее в деталях проследить ход протекающих процессов, является неотъемлемой частью проектирования и оптимизации перемешивающих установок. Вычислительный эксперимент включает в себя численное решение уравнений Навье - Стокса и расчет динамики частиц примеси по полученному полю скоростей. Необходимость высокого пространственно-временного разрешения для описания разномасштабных вихревых структур требует значительных затрат вычислительных ресурсов, что ограничивает применение таких моделей при проектировании, когда необходим многовариантный анализ. В этой связи актуальным представляется построение более простых, редуцированных, моделей, обеспечивающих достаточно высокую точность при приемлемых вычислительных затратах. Данному вопросу посвящено настоящее исследование в этой главе.

4.1. Описание алгоритма разложения по динамическим модам.

При численном моделировании и экспериментальном исследовании гидродинамических процессов важную роль играет выявление основных особенностей течения. Получаемая при этом информация может быть использована как для анализа характерных структур и образований в среде [101,

[102], так и для сведения сложных систем с бесконечным числом степеней свободы к конечномерным динамическим системам. Тем самым создается основа для построения редуцированных математических моделей. Существует широко известная методика для идентификации когерентных структур, которая основана на методе главных компонент (POD) [103]. Так, например, на ее основе в работе [104] строится редуцированная модель для решения обратной задачи теплопроводности. Решение такого рода задачи актуально, например, при идентификации термических свойств материалов [105]. Однако у метода главных компонент существует ряд недостатков, подробно описанных в [106], из которых можно выделить два наиболее существенных: 1) энергетический спектр не является правильной мерой для ранжирования когерентных структур; 2) теряется информация о фазе, которая является временной характеристикой течения. Среди методов и подходов, позволяющих преодолеть указанные сложности, следует выделить разложение по динамическим модам (DMD-метод). Этот метод возник из теоретической работы по исследованию линейного оператора Купмана (Koopman), связанного с нелинейной динамической системой [107]. В статье [100] было предложено использовать этот метод в гидроаэродинамике для обработки экспериментальных и расчетных данных. В работе [108] DMD-метод использовался применительно к анализу шпирен-картин гелиевой струи, полученных в ходе измерений PIV (particle image velocimetry) методом. Это позволило идентифицировать и количественно описать основные физические механизмы в потоке. В последнее время DMD - метод активно развивается как с позиций теоретического анализа и построения различных модификаций алгоритма, так и в прикладном плане [109-114]. Такой интерес, прежде всего, вызван тем, что разложение дает информацию не только о пространственных структурах течения, но и о динамике потока, даже если эта динамика нелинейная.

Согласно DMD-методу, производится декомпозиция пространственно-временных данных в набор динамических мод, которые получаются из временных срезов в процессе расчета или измерений данной системы во времени. Для того

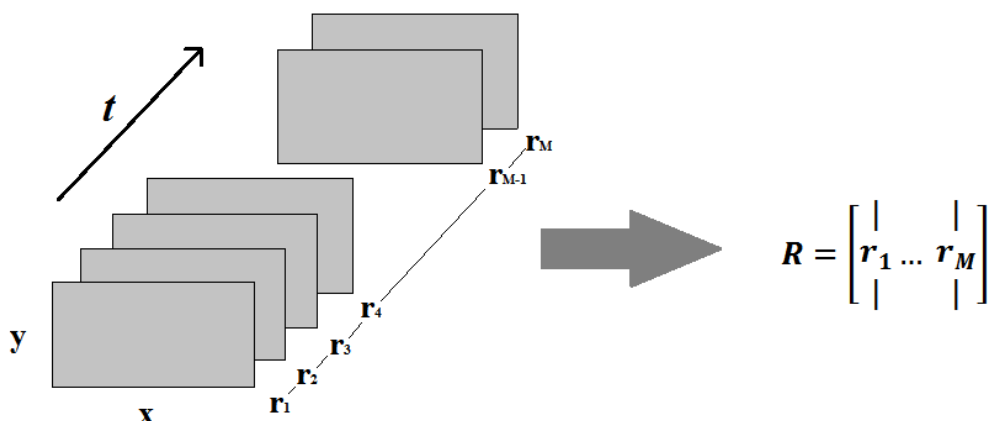


Рис. 4.1. Схема процесса подготовки данных.

чтобы произвести разложение, требуется точно определить два параметра: N – количество пространственных измерений (точек, в которых измеряется или рассчитывается соответствующая величина) на одном временном срезе; M – количество временных срезов. В данном исследовании используется классический вариант DMD-метода, в котором информация поступает через одинаковые промежутки времени:

$$t_{j+1} = t_j + \Delta t. \quad (4.1)$$

Здесь t_1 и t_M – время начала и конца измерений соответственно, Δt – интервал между измерениями. Данные измерений группируются в матрицу R размером $N \times M$ (рис. 4.1):

$$R = [r(t_1) \ r(t_2) \ r(t_3) \ \dots \ r(t_M)]. \quad (4.2)$$

Вектор $r(t_j)$ состоит из N значений переменной состояния системы в конкретный момент времени t_j . В случае двумерной области (рис.4.1) такой вектор получается в процессе векторизации двумерного массива данных. Отметим, что в общем случае нет необходимости производить разложение над всем полем течения, достаточно выбрать локальный пространственный участок, который содержит наиболее значимую информацию для исследования. Для проведения процедуры разложения вводится следующая матрица:

$$R_j^k = [r(t_j) \ r(t_{j+1}) \ r(t_{j+2}) \ \dots \ r(t_k)], \quad (4.3)$$

где нижний индекс показывает номер временного слоя, с которого начинается сбор информации, а верхний – на котором заканчивается сбор данных. Разложение по динамическим модам включает в себя нахождение матрицы A , которая связывает состояние r_j в момент времени t_j с состоянием системы r_{j+1} на следующем временном шаге t_{j+1} :

$$r_{j+1} \approx Ar_j. \quad (4.4)$$

Если предыдущее соотношение выполняется точно (достигается равенство), и данные получаются из линейной системы. Для дальнейшего построения алгоритма возьмем временные срезы с 1 по $M-1$, тогда каждый столбец R_1^{M-1} является элементом подпространства Крылова [107], а именно:

$$R_1^{M-1} = [r_1 \quad Ar_1 \quad A^2r_1 \quad \dots \quad A^{M-2}r_1]. \quad (4.5)$$

Тогда уравнение можно записать в следующем более общем виде:

$$R_2^M \approx AR_1^{M-1}, \quad (4.6)$$

где матрица A выбрана так, что минимизирует Фробениусову норму:

$$\|R_2^M - AR_1^{M-1}\|_F. \quad (4.7)$$

Для нахождения матрицы A широко используются два подхода [100]. Первый основан на методе Арнольди, а второй базируется на сингулярном разложении матрицы (SVD). В настоящей работе используется второй подход, так как согласно [100] он более устойчив к шуму в измерениях.

Непосредственно сам алгоритм DMD, согласно [111], представлен ниже:

- 1) Подготавливаются наборы данных R_1^{M-1}, R_2^M .
- 2) Производится SVD разложение матрицы R_1^{M-1} :

$$R_1^{M-1} = P\Sigma Q^T. \quad (4.8)$$

- 3) Вычисляется A :

$$A = P^T R_2^M Q \Sigma^{-1}. \quad (4.9)$$

- 4) Вычисляются собственные значения и собственные векторы матрицы-пропагатора, A :

$$AW = \Lambda W, \quad (4.10)$$

где столбцы матрицы W - собственные векторы и Λ - диагональная матрица с соответствующими собственными значениями λ_k , которые содержат в себе информацию о динамике процесса. Отметим, что элементы матриц W и Λ могут принимать комплексные значения.

- 5) Динамическими модами будут столбцы матрицы Ψ , которая определяется следующим образом:

$$\Psi = R_2^M Q \Sigma^{-1} W. \quad (4.11)$$

Данный алгоритм был реализован в авторском программном коде на языке C++.

4.2. Тестирование программной реализации DMD-алгоритма.

Для проведения тестирования программной реализации DMD-алгоритма была выбрана работа [115]. В ней проводилось комплексное сравнение идентификации когерентных структур в потоке жидкости с использованием метода главных компонент (POD) и разложений по динамическим модам (DMD), где было доказано преимущество второго. Также исследовалось влияние мультидоминантных структур и гармоник высокого порядка на разложенные моды. С этой целью была построена серия искусственных шаблонов, суперпозиций мультидоминантных конвективных структур в стационарном поле для эталонного моделирования. Данные шаблоны использовались для тестирования собственного программного кода. Ниже представлены математическое описание данных шаблонов:

$$q = q_0 + q_1 + q_2 + q_3, \quad (4.12)$$

$$q_0(x, y, t) = \exp\left(-\frac{y^2}{0.7}\right), \quad (4.13)$$

$$q_n(x, y, t) = \alpha_n(t) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} (-1)^m \exp\left[-\left(\frac{(x - \beta_n m - \gamma_n t)^2}{d_n}\right) + \frac{y^2}{d_n}\right], \quad (4.14)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Здесь $d_n = a_n x + b_n$ - диаметр структуры, a_n, b_n - константы, β_n - дистанция между двумя соседними структурами, γ_n - конвективная скорость

переноса структуры, $\alpha(t)$ – фактор роста. Доминирующие частоты этих трех структур q_1, q_2, q_3 , определяются как $f_n = \gamma_n / (2\beta_n)$ и равны соответственно 0.5, 1.64 и 4.0 Гц соответственно. Недостающие константы для определения шаблонов представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Константы для определения искусственных паттернов.

n	a_n	b_n	β_n	γ_n	f_n	$\alpha(t)$
1	0.030	0.050	0.8	0.8	0.5	1
2	0.015	0.035	0.55	1.8	1.64	$\exp(-t/30) - 0.1$
3	0.0075	0.020	0.3	2.4	4.0	$1 - \exp(-t/20) + 0.2$

Так как паттерн (4.12) содержит все остальные, то в рамках данного раздела ограничимся его детальным описанием. Одним из главных тестов является обратное восстановление поля с использование разложений по динамическим модам. Результат данного сравнения представлен на рис. 4.2. Видно качественное

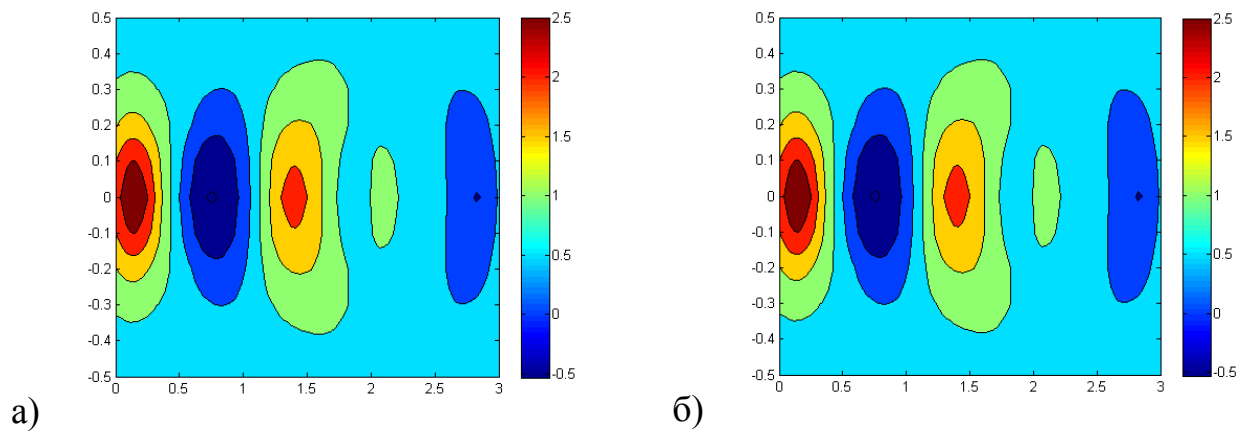


Рис. 4.2. Поле течения q при $t = 0.1$ с. а) построено по выражению (4.12);

б) восстановленное DMD-алгоритмом.

совпадение. Относительная погрешность максимального различия, составляет менее $1.0\text{e-}12$ %. Временной анализ DMD, выполненный на временных срезах

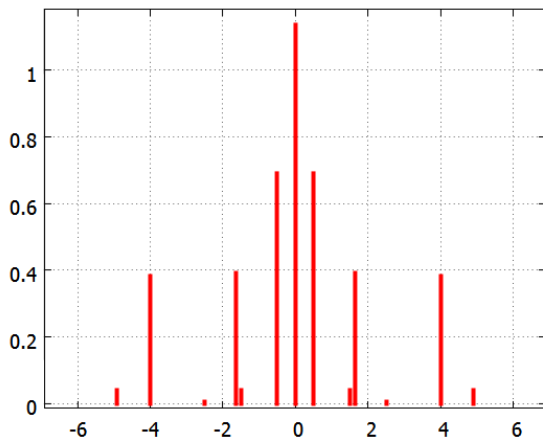


Рис. 4.3. Энергетический спектр всех динамических мод.

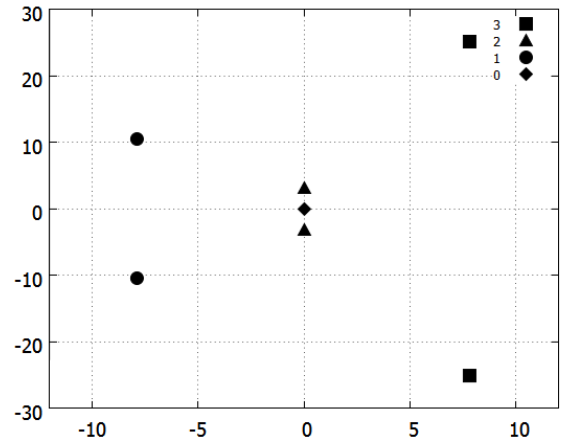


Рис. 4.4. Логарифмическое отображение значений Ритца для доминирующих частот.

мультидоминантной структуры, позволил построить энергетический спектр всех динамических мод [115] (рис 4.3. на оси Ox откладывается частота в Гц), а также позволил вычислить логарифмическое отображения Ритца ($Re(\omega_k); Im(\omega_k)$), где ω_k :

$$\omega_k = \frac{\ln(\lambda_k)}{\Delta t}. \quad (4.15)$$

Здесь $Re(\dots)$ означает вещественную часть, а $Im(\dots)$ соответствующую мнимую. На рис. 4.3. отчетливо видно четыре различных амплитудных пика, соответствующих значениям 0.0, 0.5, 1.64 и 4.0 Гц, соответственно. Для соответствующих пиков на рис. 4.4. построено отображение Ритца, которое определяет, что структура q_2 , отмеченная 2, остается постоянной, в то время как структуры q_1 , отмеченные 1, и q_3 , отмеченные 3, находятся в стабильном (затухающем) и неустойчивом (растущем) состояниях соответственно. Вышеупомянутая информация, определенная из временного анализа DMD, хорошо согласуется с предварительно определенными фактами о сфабрикованном паттерне (таблица 4.1), то есть частоте, скорости роста (затухания) и пространственных особенностях. Помимо прочего проводилось сравнение реальных частей некоторых динамических мод непосредственно с автором работы [115], и были получены идентичные картины. Все полученные результаты говорят о правильной реализации DMD-алгоритма, представленного в разделе 4.1.

4.3. Редукция моделей гидродинамического перемешивания на основе DMD-алгоритма.

С математической точки зрения, динамическая мода – это некоторая комплекснозначная функция от пространственных переменных, которая содержит информацию об основных структурах гидродинамического поля. При этом вещественная часть описывает положение основных паттернов в пространстве. Мнимая часть, помноженная на соответствующее собственное значение, согласно [108], задает адвективно-диффузионный процесс для каждой отдельной структуры динамического режима.

В результате уравнения течения жидкости на основании (4.4) можно свести к конечномерной системе, которая представляется следующим образом:

$$dr/dt = Ar. \quad (4.16)$$

Матрица A является матрицей-пропагатором для данной динамической системы.

Задача (4.16) может быть решена любым известным численным методом для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, целесообразно использовать найденные в пунктах 4) и 5) собственные значения матрицы пропагатора (4.10) и динамические моды (4.11). Тогда решение данной системы будет иметь вид (подробный вывод представлен в работе [116]):

$$r_{DMD}(t) = \Psi \text{diag}(\exp(\omega t))b, \quad (4.17)$$

где компоненты вектора ω определяются по формуле (4.15). В выражении (4.15) функция логарифма используется для устранения проблем, возникающих при работе с разномасштабными собственными значениями. Для определения вектора коэффициентов b можно использовать начальное условие при $t_1 = 0$, тогда получим:

$$r(0) = \Psi b. \quad (4.18)$$

Так как в общем случае Ψ не является квадратной матрицей, то решение для b может быть найдено методом наименьших квадратов и записано через псевдообратную матрицу:

$$b = \Psi^+ r(0). \quad (4.19)$$

Кроме того, можно проводить усечение матрицы-пропагатора по сингулярным числам на этапе 2) алгоритма, понижая тем самым размерность матрицы A с N до K ($P \in \mathbb{R}^{N \times K}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{K \times K}$, $Q \in \mathbb{R}^{M-1 \times K}$, K – ранг SVD усечения), что актуально, так как на практике начальная размерность может быть достаточно большой.

4.4. Постановка задачи перемешивания и методы численного моделирования.

Рассматривается задача о перемешивании в плоской прямоугольной каверне с подвижными дном и крышкой. В этой задаче проявляется ряд основных особенностей, характерных для процессов гидродинамического перемешивания. В [25] приведены результаты натурного эксперимента. Рассматривались три варианта задачи перемешивания. В первых двух расчетная область представляет собой прямоугольник длиной 0.1035 м и высотой 0.062 м. Рабочая жидкость – глицерин с динамической вязкостью 0.75 Па·с и плотностью 1250 кг/м³. Жидкость приходит в движение посредством задания скорости на нижней (дно) и верхней (крышка) границах области соответственно. На боковых границах каверны ставились условия прилипания и непротекания ($u = 0$, $v = 0$).

В *первом* случае скорость крышки U_{top} и дна U_{bot} равны по модулю и движутся в одну сторону: $U_{\text{top}} = U_{\text{bot}} = 0.0158$ м/с.

Во *втором* случае действует синусоидальный протокол с периодом $T = 20$ с и сдвигом фазы $\alpha = \pi/2$, который определяется следующим законом:

$$\begin{aligned} U_{\text{top}} &= 0.0269 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi t}{T} + \alpha\right), \\ U_{\text{bot}} &= -0.0269 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

В *третьем* случае рассмотрена задача из [6]. Расчетная область – прямоугольник размером 2×1 м. Жидкость имеет динамическую вязкость 15 Па·с и плотность 1250 кг/м³. Действует разрывный протокол перемешивания, а именно:

крышка и дно двигаются попеременно в разных направлениях с периодом $T = 15$ с (первую половину периода движется крышка со скоростью $U_{\text{top}} = 1$ м/с, вторую – дно со скоростью $U_{\text{bot}} = -1$ м/с).

Решение уравнений Навье-Стокса (1.3) осуществлялось согласно методике, описанной в разделе 1.2, где граничные условия задавались при помощи определяемых пользователем функций (UDF) на языке C, путем задания компонент скорости на верхней и нижней границах области. Шаг по времени в процессе гидродинамического расчета и расчета примеси – одинаковый, $\Delta t = 0.01$ с. Время окончания расчета с разрывным протоколом равно 65 с, для остальных вариантов – 280 с. Вычислительная сетка – прямоугольная размером 84 на 50 ячеек. В DMD методе измерение величин u и v для последующей редукции проводится в центре каждой ячейки, т.е. кол-во пространственных измерений на одном временном срезе $N = 4.2e+03$; максимальное количество временных срезов $M = 2.8e+04$ и $6.5e+03$ в случае задачи с разрывным протоколом. Для получения векторной величины $\mathbf{r}_j$ производится векторизация двумерных массивов пространственных переменных $u(t_j, X, Y)$ и $v(t_j, X, Y)$ на j -ом временном слое.

4.5. Анализ результатов.

Рассмотрим вначале случай движения стенок в одном направлении с одинаковой скоростью. Примесь изначально располагается вдоль оси OY полосой толщиной 5 мм согласно [25]. Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис 4.5, а. Видно хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных (рис. 4.5, б). Далее для обработки векторных полей был применен метод разложения по динамическим модам, и построена редуцированная модель по формулам (4.17), (4.19). На рис. 4.6. показаны основные динамические моды процесса. Как уже отмечалось, использовать все динамические моды для редукции нецелесообразно. Поэтому после второго этапа DMD-алгоритма (см. раздел 4.1.) производится понижение размерности матрицы-пропагатора A .

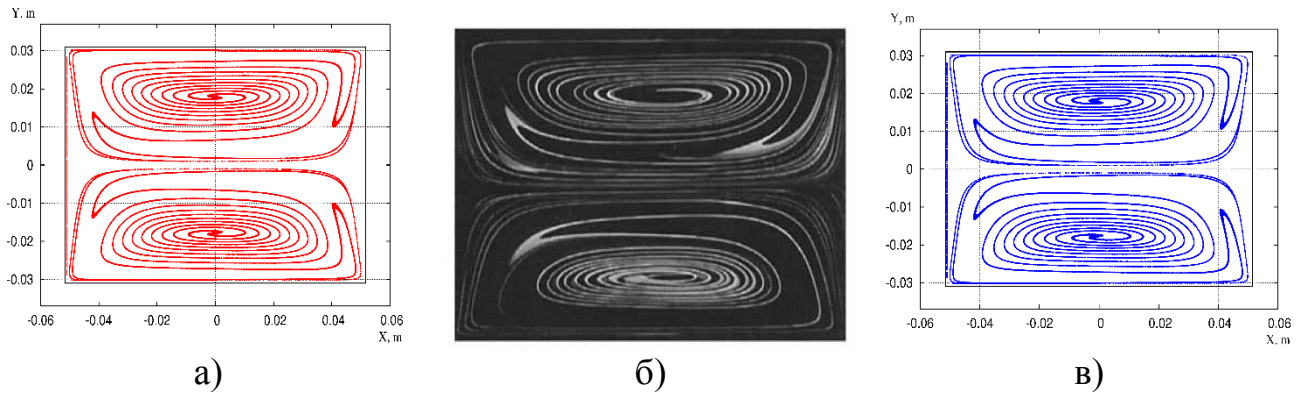


Рис. 4.5. Положение примеси в пространстве при $t = 280$ с. а) Гидродинамическое поле получено из численного решения системы уравнений Навье-Стокса. б) Эксперимент, [25]. в) Гидродинамическое поле построено при помощи редуцированной модели при $K = 1$.

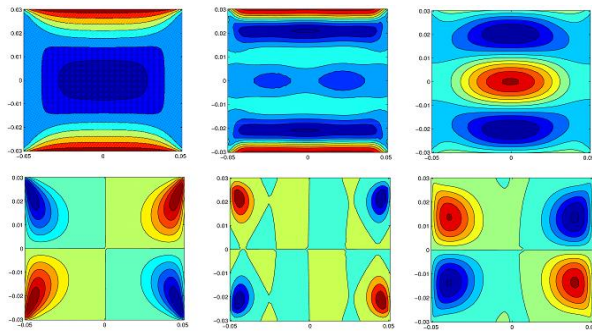


Рис. 4.6. Динамические моды (вещественная часть) для поля скорости, по времени относительной погрешности u – сверху; v – снизу. Слева направо - модуля скорости от количества номер моды $K = 1, 3, 5$.

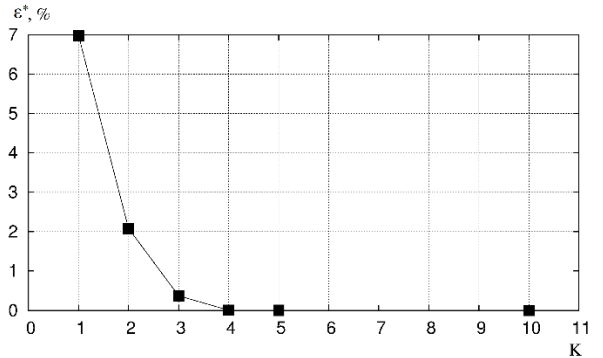


Рис. 4.7. График зависимости осредненной по времени относительной погрешности модуля скорости от количества динамических мод.

Для выбора оптимального количества динамических мод K (ранг матрицы после SVD усечения) используется относительная погрешность редуцированной модели по сравнению с точным решением на каждом временном слое:

$$\varepsilon(t) = \frac{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_{DMD}(t)\|_F}{\|\mathbf{r}(t)\|_F} \cdot 100\% \quad (4.21)$$

Чтобы не рассматривать по отдельности поля скоростей $u(t_j, X, Y)$ и $v(t_j, X, Y)$, вычисляется их абсолютная величина скорости. Затем вычисляется погрешность по формуле (4.21) и проводится усреднение по времени. Полученный график осредненной по времени относительной погрешности модуля скорости ε^* в

зависимости от числа динамических мод представлен на рис. 4.7. Так как решение в данном случае выходит на стационарный режим, то достаточно всего лишь одной моды ($K = 1$), чтобы построить редуцированную модель с погрешностью менее 7%. При этом вполне адекватно описывается поведение примеси (см. рис. 4.5, в).

Для синусоидального протокола (4.20) движения стенок каверны примесь в пространстве изначально располагается аналогично предыдущему случаю – полоской толщиной 5 мм вдоль оси ординат. Результаты численного моделирования и физического эксперимента показаны на рис. 4.8, а и рис. 4.8, б.

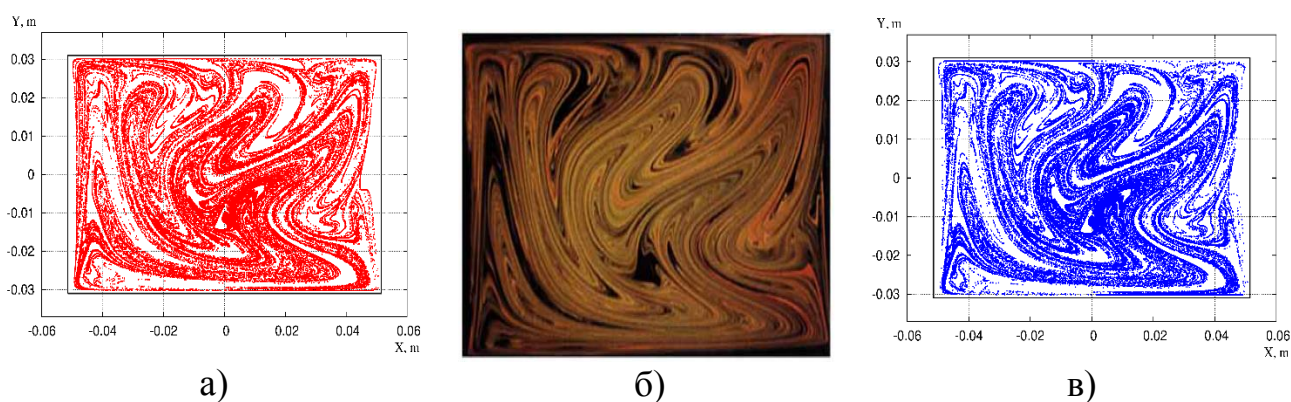


Рис. 4.8. Положение примеси в пространстве при $t = 280$ с. а) Гидродинамическое поле получено из численного решения системы уравнений Навье-Стокса. б) Эксперимент, [25]. в) Гидродинамическое поле построено при помощи редуцированной модели при $K = 30$.

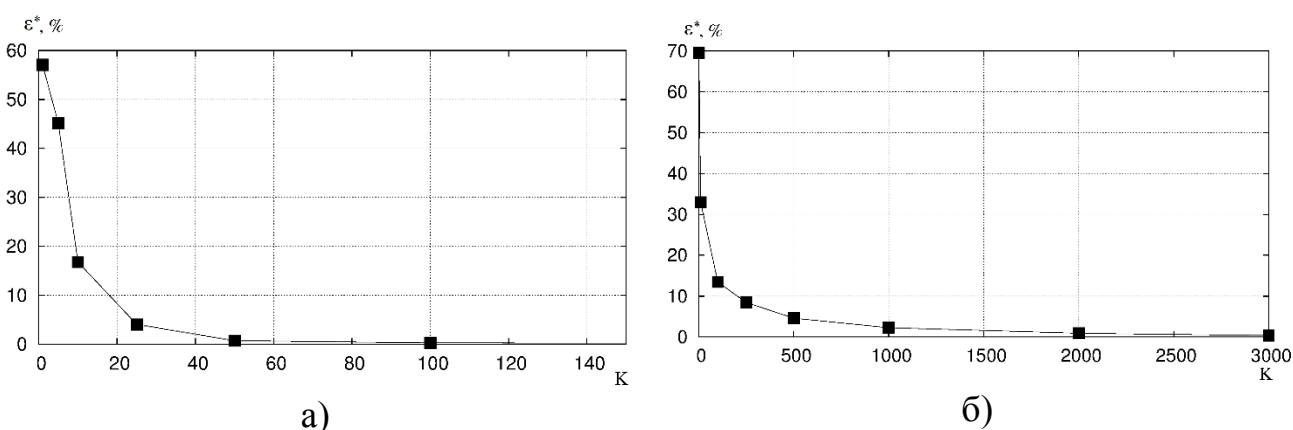


Рис. 4.9. График зависимости осредненной по времени относительной погрешности модуля скорости от количества динамических мод. а) Синусоидальный протокол перемешивания. б) Разрывной протокол перемешивания.

При данном режиме гидродинамическое поле уже существенно нестационарное. Тем не менее, если посмотреть на график погрешности $\varepsilon^*(K)$ на рис. 4.9, а, то видно, что для описания процесса с точностью менее 1% достаточно 45-ти динамических мод. Результат расчета распределения примеси по данному редуцированному полю показан на рис. 4.8, в.

В случае разрывного протокола, согласно [6], примесь в начале процесса была расположена круглым пятном радиуса 0.125 м с координатами центра пятна в точке (1.75; 0.25). Поле, порождаемое мгновенными попеременными движениями дна и крышки через каждые полпериода, является существенно нестационарным.

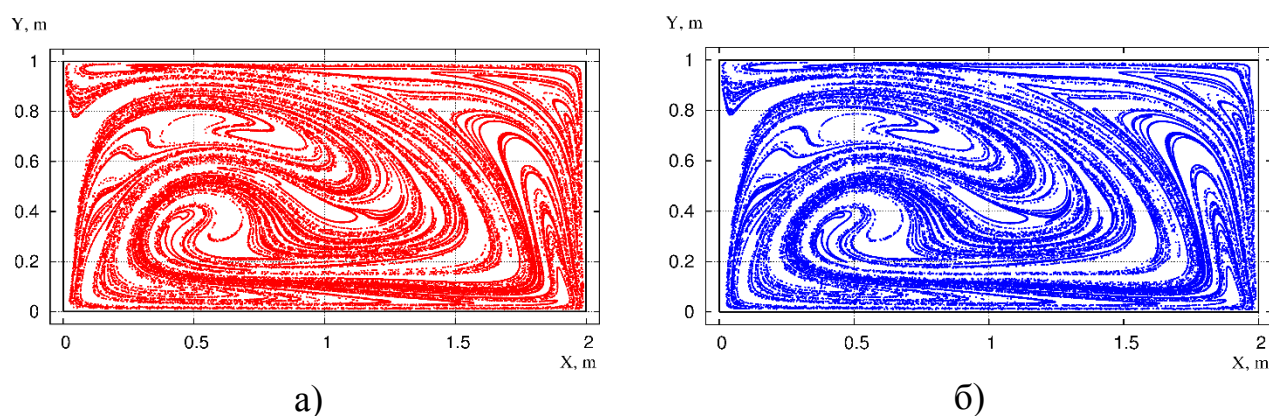


Рис. 4.10. Положение примеси в пространстве при $t = 65$ с. а) Гидродинамическое поле получено из численного решения системы уравнений Навье-Стокса. б) Гидродинамическое поле построено при помощи редуцированной модели при $K=650$. Поэтому для описания данного режима требуется большее число мод (см. рис. 4.9, б) по сравнению с рассмотренными выше вариантами. При $K = 650$ погрешность не превышает 5%. Стоит отметить, что в момент времени равный полупериоду, когда происходит мгновенная смена скорости верхней и нижней границы каверны, происходит локальный скачок погрешности, который не виден при рассмотрении средней величины ε^* . Однако он наблюдается в течение короткого промежутка времени и не оказывает сильного воздействия на конечное распределение частиц в пространстве (см. рис. 4.10).

Таким образом, использование метода разложения по динамическим модам позволило построить ряд конечномерных редуцированных моделей. Процедура

усечения матрицы - пропагатора дает возможность существенно сократить объем хранимой информации о течении. В отличие от классического случая, когда для хранения информации о режиме необходима вся матрица R размера $N \times M$, для редуцированной модели необходимо знать матрицу ψ размером $N \times K$, и два вектора - столбца ω , $\mathbf{b}$ размера K . Выигрыш в хранении информации о течении после обработки DMD - методом составляет для рассмотренных в данной статье режимов 80% и более.

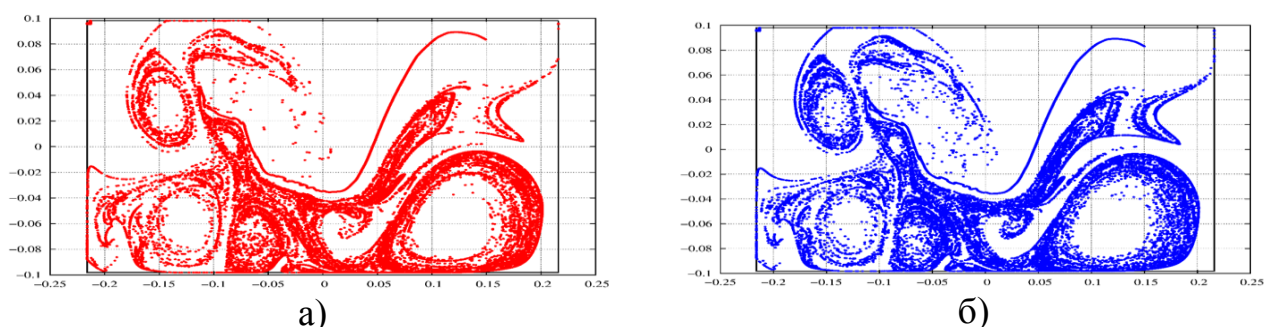


Рис. 4.11. Положение примеси в пространстве при $t = 12.3$ с. а) Гидродинамическое поле получено из численного решения системы уравнений Навье-Стокса. б) Гидродинамическое поле построено при помощи редуцированной модели при $K=850$.

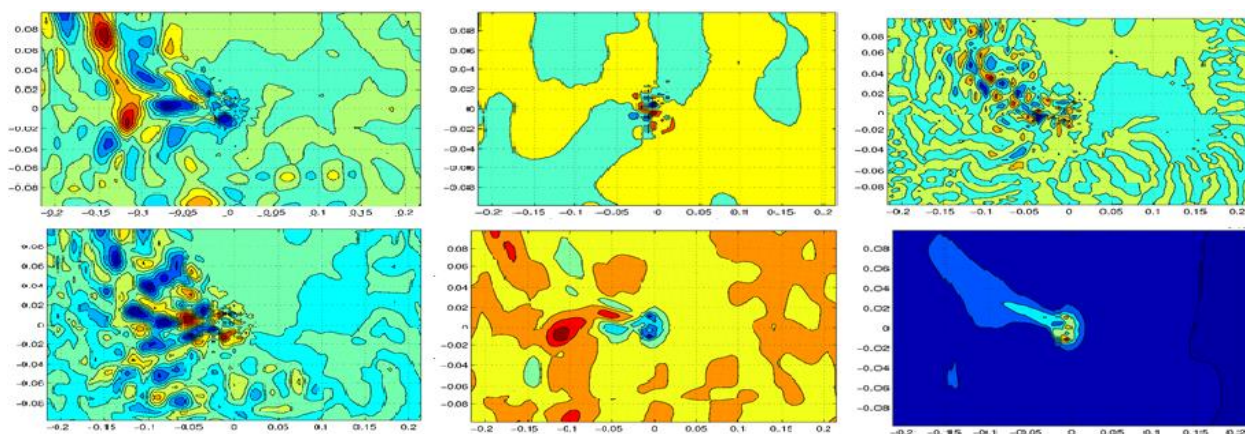


Рис. 4.12. Основные динамические моды (вещественная часть) для модуля поля скорости в задаче о перемешивании в установках колебательного типа.

Также необходимо отметить, что при рассмотрении полностью хаотических режимов перемешивания прогностическая сила выражения (4.17) снижается, однако, выигрыш в хранении уже рассчитанных данных будет оставаться значительным. Так при рассмотрении задачи о перемешивании в установках колебательного типа из раздела 2.1, начиная со значения $K = 800$, ошибка ε^*

составляет приблизительно 8%. Как видно из рис. 4.11 это не сильно влияет на конечное распределение примеси. На рис. 4.12. показаны значимые динамические моды данного процесса.

С использованием разложения по динамическим модам построены редуцированные модели гидродинамического перемешивания. Показано, что для различных периодических режимов перемешивания применяемый подход позволяет получить достаточно точные пространственно-временные картины распределения примеси при существенном сокращении вычислительных затрат.

4.6. Выводы к главе 4.

В главе четыре с использованием разложения по динамическим модам построены редуцированные модели гидродинамического перемешивания. Показано, что для различных периодических режимов перемешивания применяемый подход позволяет получить достаточно точные пространственно-временные картины распределения примеси при существенном сокращении вычислительных затрат. Кроме того, показано, что выигрыш в хранении информации в задаче о смещении в прямоугольной камере с подвижными дном и крышкой после обработки DMD-методом составляет 80% и более. Для задачи из главы 2 получен схожий результат в выигрыше при хранении (~78%). Описанный подход можно также применять при обработке экспериментальных данных, например, получая гидродинамические характеристики PIV-методом через равные интервалы времени.

Глава 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ С ВОЛОКНИСТЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ.

Двухфазные течения с твердотельной дисперсной фазой нашли применение во многих областях промышленности. Частицы примеси могут иметь форму сферы, эллипсоида, цилиндра, а также более сложную геометрию с характерными размерами от нескольких сантиметров до нанометров. Приобретаемые за счет формы дополнительные свойства примеси обычно моделируются системой уравнений (5.1), состоящей из уравнений поступательного и вращательного движений [88]:

$$\begin{cases} m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{F}, \\ I_p \frac{d\mathbf{w}_p}{dt} = \mathbf{T}_p, \end{cases} \quad (5.1)$$

где m_p , I_p , $\mathbf{w}_p$, $\mathbf{u}_p$ – масса, момент инерции, векторы скорости и угловой скорости частицы, $\mathbf{F}$, $\mathbf{T}_p$ – результирующие векторы сил и вращающего момента, действующих на частицу. Отметим, что сила сопротивления, действующая на частицу неправильной формы, может быть определена путем задания коэффициента сопротивления для несферических частиц, через параметр не сферичности [117]. Формулы для коэффициента сопротивления сферы для различных режимов обтекания приведены в работах [81, 118].

Особый интерес вызывает моделирование поведения волокнистых включений в жидкой среде. В грубом приближении, когда волокна практически не деформируются в жидкости, их можно аппроксимировать частицами цилиндрической формы. Подобное исследование проводилось в работе [119], посвященной моделированию движения цилиндрических частиц (биотоплива) в неоднородном поле течения жидкости. Полученные результаты находятся в согласовании с экспериментальными данными.

Однако, в ряде прикладных и теоретических задач [128, 129] требуется моделировать поведение гибких волокон в жидкости. Для задач волокнистых

включений возможность применения классической теории упругости ограничена из-за усложнения геометрии волокна и условий погружения волокон в жидкую среду. Помимо прочего, такие свойства, как поверхностный заряд и межфазное трение, не могут быть эффективно оценены с помощью теории упругости. Чтобы исследовать динамику гибких волокон в вязкой среде необходимо рассматривать, как связи между отдельными сегментами волокна, так и взаимодействие жидкость-волокно. Отдельные волокна можно описать дискретной моделью с использованием нескольких связанных сегментов, и этот метод может быть реализован в численных алгоритмах для многих волоконных систем. Так авторы работ [120, 121] разработали метод моделирования, при котором гибкое волокно рассматривается как цепочка твердых тел сферической формы. Каждая такая пара связанных сфер под действием гидродинамических сил может растягиваться, изгибаться и скручиваться. В математической модели учитываются такие факторы, как модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала волокна, расстояние между сферами, углы изгиба и кручения, относительные поступательные и угловые скорости сферических элементов. При определенных допущениях метод был модифицирован в работе [122], модель представляла волокна с большим соотношением сторон при относительно небольшом количестве сегментов волокна посредством рассмотрения вместо сфер сегментов в форме эллипсоидов. Гибкость волокон в обеих моделях может быть получена и изменена в соответствии с параметрами растяжения, изгиба и скручивания. Также не учитывалось влияние инерционных эффектов, так как оба исследования были посвящены динамике волокна в жидкой среде с низким числом Рейнольдса ($Re < 1$).

В главе 5 делается акцент на моделировании именно динамики гибких волокон, то есть волокно имеет тенденцию деформироваться под действием гидродинамических сил и принимать различные конфигурации в жидкости. Данное свойство может использоваться во многих прикладных задачах, связанных с перемешиванием, где возникает необходимость контроля ориентации и расположения волокон в пространстве рабочего устройства.

5.1. Математическая модель и вычислительные алгоритмы.

Для моделирования динамики гибкого волокна за основу была взята модель, предлагаемая в [120, 121], где волокно аппроксимируется набором из N одинаковых сферических сегментов заданного радиуса a (см. рис. 5.1), сцепленных друг с другом. Данный выбор был обусловлен тем, что для сферических элементов имеется надежная информация по коэффициенту сопротивления в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

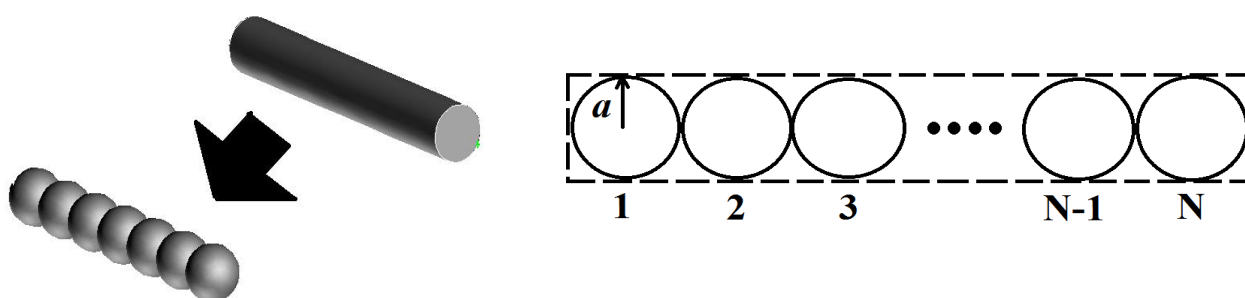


Рис. 5.1. Схематическое представление волокна, состоящего из сфер.

Сферические сегменты скреплены и связаны друг с другом. Каждая пара сфер может растягиваться, изгибаться и крутиться, изменяя при этом расстояние связи,

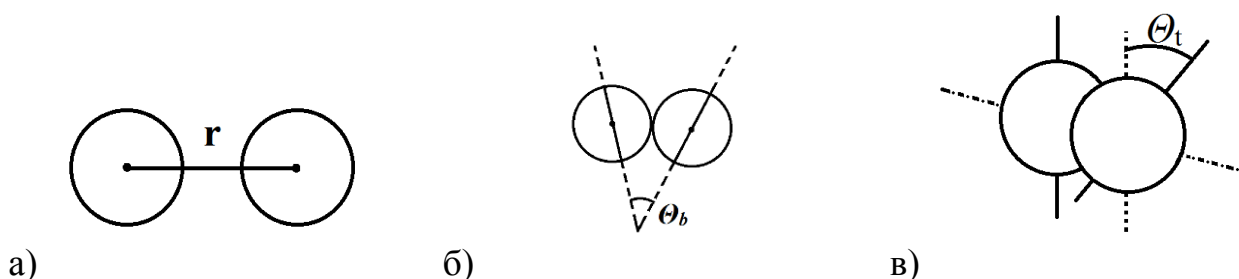


Рис 5.2. Конфигурации пары связанных сфер при деформации: а) растяжение; б) изгиб; в) скручивание.

углы изгиба и кручения соответственно. Деформации при изгибе и скручивании происходят соответственно в плоскостях изгиба и кручения.

Рассмотрим пару связанных сфер i и j . Сила, действующая на каждую сферу, зависит от расстояния связи r между центрами сфер i и j . Если расстояние отличается от равновесного состояния $r_{eq} = 2a$ (см. рис. 5.2, а), то на каждую сферу

начинает действовать сила упругости F^s , стремящаяся восстановить равновесное состояние:

$$F^s = -k_s(r - r_{eq}), \quad (5.2)$$

где k_s – постоянная силы упругости. Направление действия силы (5.2) параллельно вектору $\mathbf{n}_{ij}$, который определяется следующим образом:

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}. \quad (5.3)$$

Константа силы растяжения определяется с использованием модуля Юнга E :

$$k_s = \frac{\pi a}{2} E. \quad (5.4)$$

Это соотношение получено из сравнения деформации растяжения связанных сфер с упругой деформацией цилиндрического стержня [123].

Деформация изгиба связи (рис. 5.2, б) является функцией угла изгиба θ_b между сферами. Если угол изгиба изменяется от равновесного угла $\theta_{b\text{ eq}}$ ($\theta_{b\text{ eq}} = 0$), то на каждую сферу, чтобы поддержать угол равновесного соединения, действует следующий момент T^b :

$$T^b = -k_b(\theta_b - \theta_{b\text{ eq}}), \quad (5.5)$$

где k_b – постоянная изгибающего момента. Направление этого изгибающего момента определяется вектором, перпендикулярным $\mathbf{n}_{ij}$. Константа при изгибе k_b получена из сравнения изгиба связанных сфер с деформацией изгиба цилиндрического стержня и определяется следующим образом:

$$k_b = \frac{\pi a^3}{8} E. \quad (5.6)$$

Деформация кручения связи (рис. 5.2, в) является функцией угла кручения (торсионного угла) θ_t между сферами. Если торсионный угол изменяется от равновесного угла $\theta_{t\text{ eq}}$ ($\theta_{t\text{ eq}} = 0$), то на каждую сферу, чтобы поддержать угол равновесного соединения, действует крутящий момент T^t :

$$T^t = -k_t(\theta_t - \theta_{t\text{ eq}}) \quad (5.7)$$

где k_t – постоянная крутящего момента. Этот крутящий момента направлен вдоль вектора $\mathbf{n}_{ij}$. Константа определяется с помощью модуля сдвига G :

$$k_t = \frac{\pi a^3}{4} G. \quad (5.8)$$

Это соотношение также выводится из сравнения деформации скручивания связанных сфер с упругой деформацией цилиндрического стержня при скручивании [123].

Таким образом, модель волокна, построенная из связанных сфер, может растягиваться, изгибаться и скручиваться. Гибкость волокна определяется параметрами связи k_s , k_b и k_t . Например, для моделирования жесткого волокна следует взять большие значение параметров, а для моделирования гибкого волокна, наоборот, небольшие значения.

Далее предполагается, что волокно погружено в ньютоновскую жидкость с динамической вязкостью μ . Жидкость находится в движении, которое определено

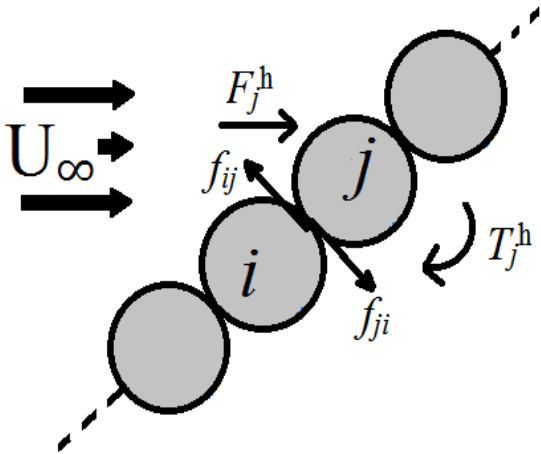


Рис. 5.3. Гидродинамические взаимодействия связанных сфер в поле течения.

полем скорости $\mathbf{U}_\infty$. Броуновским движением частиц пренебрегается. Гидродинамическая сила $\mathbf{F}^h$ и крутящий момент $\mathbf{T}^h$ действуют на каждую сферу, а тангенциальная сила трения $\mathbf{f}$ действует в точке контакта между каждой парой сфер, как показано на рис. 5.3. Помимо прочего, рассматривается жидкость с низким числом Рейнольдса ($Re < 1$). Теперь если $\mathbf{r}_j$ и $\boldsymbol{\theta}_j$ – это векторы положения и угла для сферы j , тогда сила гидродинамического

сопротивления $\mathbf{F}_j^h$, действующая на сферический сегмент j равна:

$$\mathbf{F}_j^h = -6\pi\mu a \left(\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} - \mathbf{U}_\infty \right). \quad (5.9)$$

Похожим образом определяется соответствующий гидродинамический момент:

$$\mathbf{T}_j^h = -8\pi\mu a^3 \left(\frac{d\boldsymbol{\Theta}_j}{dt} - \mathbf{w}_\infty \right), \quad (5.10)$$

где $\mathbf{w}_\infty$ – это угловая скорость жидкости:

$$\mathbf{w}_\infty = 0.5 \operatorname{rot} (\mathbf{U}_\infty). \quad (5.11)$$

Тангенциальная сила трения $\mathbf{f}_{ji}$, перпендикулярная $\mathbf{n}_{ij}$, действует на сферу j со стороны сферы i в их точке контакта. Сила трения $\mathbf{f}_{ij}$, которая действует на сферу i со стороны сферы j , равна: $-\mathbf{f}_{ji}$. В точке контакта двух сфер накладывается условие скольжения, поступательные скорости каждой сферы одинаковы. Это условие записывается следующим образом (символ $\times$ обозначает векторное произведение):

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + a \frac{d\boldsymbol{\Theta}_i}{dt} \times \mathbf{n}_{ij} = \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} + a \frac{d\boldsymbol{\Theta}_j}{dt} \times \mathbf{n}_{ji} \quad (5.12)$$

Согласно [120], если волокно растягивается, то из-за непрерывности физического волокна по-прежнему рассматривается условие скольжения на контакте двух сфер (5.12).

Поступательное и вращательное движения сегмента волокна i в поле течения описываются следующими дифференциальными уравнениями:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum \mathbf{F}_i^s + \sum \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{F}_i^h, \quad (5.13)$$

$$\frac{2}{5} m a^2 \frac{d^2 \boldsymbol{\Theta}_i}{dt^2} = \sum \mathbf{T}_i^b + \sum \mathbf{T}_i^t + \sum \mathbf{f}_{ij} \times a \mathbf{n}_{ij} + \mathbf{T}_i^h. \quad (5.14)$$

Здесь m – масса сферического сегмента с плотностью ρ_f . Знак суммирования в уравнениях (5.13), (5.14) означает суммирование слева и справа от элемента i .

Для нахождения $\mathbf{f}_{ij}$ необходимо продифференцировать (5.12) по времени, тогда получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} + a \frac{d^2 \boldsymbol{\Theta}_i}{dt^2} \times \mathbf{n}_{ij} + a \frac{d\boldsymbol{\Theta}_i}{dt} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\Theta}_i}{dt} \times \mathbf{n}_{ij} \right) \\ = \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2} + a \frac{d^2 \boldsymbol{\Theta}_j}{dt^2} \times \mathbf{n}_{ji} + a \frac{d\boldsymbol{\Theta}_j}{dt} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\Theta}_j}{dt} \times \mathbf{n}_{ji} \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

В результате подстановки уравнений (5.13), (5.14) в (5.15) получаем систему из $3(N-1)$ линейных уравнений для нахождения f_{ij} . После чего, из (5.13), (5.14) определяем r_j и Θ_j на новом временном шаге, используя методы численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем определяются новые значения гидродинамических и деформационных сил и моментов по выражениям (5.2), (5.5) (5.7), (5.9), (5.10), находятся f_{ij} и процесс повторяется для следующего временного шага.

В случае трехмерной модели волокна для описания в пространстве каждой сферы в работе [121] вводят углы Эйлера для i -ой сферы (θ, φ, ψ), рис. 5.4.

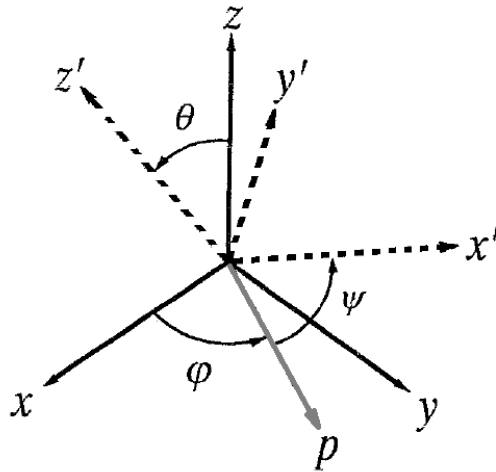


Рис. 5.4. Определение углов Эйлера (θ, φ, ψ) для каждой сферы. x - y - z – глобальная система координат, x' - y' - z' – локальная система координат сферы.

Здесь p – единичный вектор параллельный вектору $z \times z'$. Если принять следующее обозначение:

$$\frac{d\Theta}{dt} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T,$$

то компоненты угловой скорости определяются через углы Эйлера выражениями:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\theta}{dt} \cos\varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin\varphi \sin\theta, \\ \omega_y &= \frac{d\theta}{dt} \sin\varphi - \frac{d\psi}{dt} \cos\varphi \sin\theta, \\ \omega_z &= \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos\theta. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Разрешая данную систему относительно углов Эйлера, получим выражения для их определения:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \omega_x \cos\varphi + \omega_y \sin\varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_z - (\omega_x \sin\varphi - \omega_y \cos\varphi) \cos\theta / \sin\theta, \\ \frac{d\psi}{dt} &= (\omega_x \sin\varphi - \omega_y \cos\varphi) / \sin\theta.\end{aligned}\tag{5.17}$$

В процессе трехмерного моделирования уравнения (5.17) интегрируются для каждой сферы.

Как известно, использование углов Эйлера может привести к расхождению численного алгоритма [119]. С целью стабилизации численного алгоритма и создания более устойчивой модели трехмерного волокна в данном исследовании были введены единичные направляющие векторы для каждой сферы $\mathbf{g}_i$ и использовались параметры Эйлера, который связаны с углами Эйлера следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2}; \quad \varepsilon_2 = \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2}; \\ \varepsilon_3 &= \sin \frac{\psi + \varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2}; \quad \varepsilon_0 = \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2}.\end{aligned}\tag{5.18}$$

Для определения параметров Эйлера на следующем временном шаге интегрируется следующая система:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_1}{dt} &= 0.5(\varepsilon_0 \omega_x - \varepsilon_3 \omega_y + \varepsilon_2 \omega_z), \quad \frac{d\varepsilon_2}{dt} = 0.5(\varepsilon_3 \omega_x + \varepsilon_0 \omega_y - \varepsilon_1 \omega_z), \\ \frac{d\varepsilon_3}{dt} &= 0.5(-\varepsilon_2 \omega_x + \varepsilon_1 \omega_y + \varepsilon_0 \omega_z), \quad \frac{d\varepsilon_0}{dt} = 0.5(-\varepsilon_0 \omega_x - \varepsilon_2 \omega_y - \varepsilon_3 \omega_z).\end{aligned}\tag{5.19}$$

Единичный направляющий вектор для каждой сферы на новом временном слое определяется умножением слева вектора $\mathbf{g}$ с предыдущего шага по времени на соответствующую матрицу трансформации A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \varepsilon_0) & 2(\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_0) \\ 2(\varepsilon_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \varepsilon_0) & 1 - 2(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_1^2) & 2(\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_0) \\ 2(\varepsilon_3 \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \varepsilon_0) & 2(\varepsilon_3 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_0) & 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \end{pmatrix}.\tag{5.20}$$

Что касается численных алгоритмов, то для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.13), (5.14), в отличие от работ [120-123], где использовался явный метод Эйлера, в настоящей работе применялся многошаговый явный метод Адамса-Башфорта 4-го порядка [91]. Аналогичным алгоритмом численно решалась система (5.19). Кроме того, из-за ошибки округления ЭВМ параметры Эйлера должны периодически нормализоваться во время расчета:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i \left[\sum_{k=0}^3 (\varepsilon_k)^2 \right]^{-1/2}, i = 0, 1, 2, 3. \quad (5.21)$$

Система линейных алгебраических уравнений, получаемая из (5.15), может быть решена любым из известных численных методов, например, методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Стоит отметить, что после некоторых преобразований данная СЛАУ имеет схематический вид:

$$B_i X_{i-1} + C_i X_i + D_i X_{i+1} = V_i, i = 1 \dots N - 1,$$

где B, C, D – матрицы. Следовательно, для решения может быть применен метод матричной прогонки. Условия его применимости выполняются в силу особенностей построения матриц B, C, D . Для определения параметров жидкости в (5.9), (5.10) использовались методы из раздела 2.1.

Данная математическая модель и соответствующие численные алгоритмы реализованы в авторском программном комплексе, написанном на языке программирования C++.

5.2. Тестирование комплекса программ для моделирования динамики гибкого волокна в жидкой среде.

Модель и численные алгоритмы из предыдущего раздела тестируются на задаче из работы [120], где рассматриваются вращательные движения с деформацией изгиба волокна и без нее в течении Куэтта. Волокно изначально задается вытянутым в направлении оси y , центр волокна находится в начале

координат, как показано на рис. 5.5. Для $t > 0$ задается двумерный сдвиговой поток, $\mathbf{U}_\infty = (\gamma y, 0, 0)^T$, где γ – скорость сдвига.

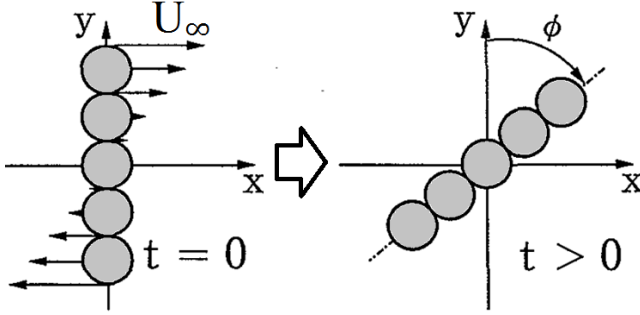


Рис. 5.5. Схематическая постановка задачи.

При такой постановке задачи, волокно начнет вращаться по часовой стрелке. Для дальнейшего сравнения с аналитическими выражениями, необходимо отслеживать угол ориентации ϕ волокна, определяемый на рис. 5.5, и период вращения волокна.

Данное исследование выполнялось в двумерной постановке, поэтому крутящие движения (5.7) не учитывались. Предполагалось, что волокно не растягивается: $k_s = 50000a\mu$.

Для сравнительного анализа удобно провести обезразмеривание величин длины, времени, силы и момента, делением на соответствующие величины: a , $1/\gamma$, $a^2\mu$ и $a^3\mu$. Тогда безразмерный вид уравнений (5.12), (5.13) и (5.14) будет следующий:

$$\frac{d\mathbf{r}_i^*}{dt^*} + \frac{d\boldsymbol{\theta}_i}{dt^*} \times \mathbf{n}_{ij} = \frac{d\mathbf{r}_j^*}{dt^*} + \frac{d\boldsymbol{\theta}_j}{dt^*} \times \mathbf{n}_{ji}, \quad (5.22)$$

$$\frac{4}{3}\pi Re_s \frac{d^2\mathbf{r}_i^*}{dt^{*2}} = \sum \mathbf{F}_i^{s*} + \sum \mathbf{f}_{ij}^* + \mathbf{F}_i^{h*}, \quad (5.23)$$

$$\frac{8}{15}\pi Re_s \frac{d^2\boldsymbol{\theta}_i}{dt^{*2}} = \sum \mathbf{T}_i^{b*} + \sum \mathbf{f}_{ij}^* \times \mathbf{n}_{ij} + \mathbf{T}_i^{h*}, \quad (5.24)$$

где верхний индекс звездочка означает безразмерное значение, а Re_s – это число Рейнольдса для сферического сегмента $Re_s = a^2 \rho \gamma / \mu$. Используемое число Рейнольдса составляет 0.1. Было подтверждено в предварительном моделировании, что динамика волокна была совершенно одинаковой в условиях чисел Рейнольдса, меньших 1.

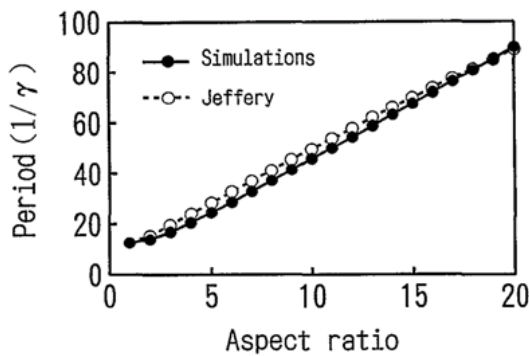
Автором работы [124] была разработана теория движения эллипсоидальной частицы в стоксовом сдвиговом потоке. Установлено, что период вращения частиц зависит от соотношения сторон r_e и скорости сдвига γ :

$$T_{Jeff} = \frac{2\pi}{\gamma} \left(r_e + \frac{1}{r_e} \right), \quad (5.25)$$

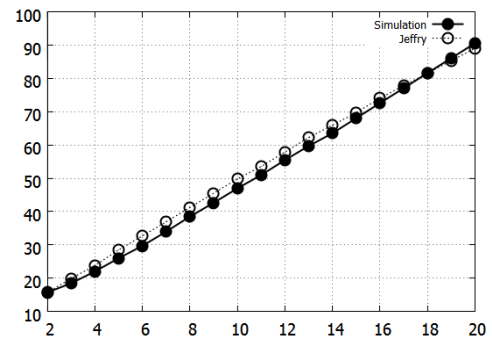
Данный период определяется из уравнения для угла ориентации волокна:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \gamma \left(1 + \frac{r_e^2 - 1}{r_e^2 + 1} \cos 2\varphi \right). \quad (5.26)$$

В работе [125] было продемонстрировано, что уравнение, подобное (5.25), можно использовать для учета частиц цилиндрической формы в сдвиговом потоке, если использовать эквивалентное соотношение сторон.

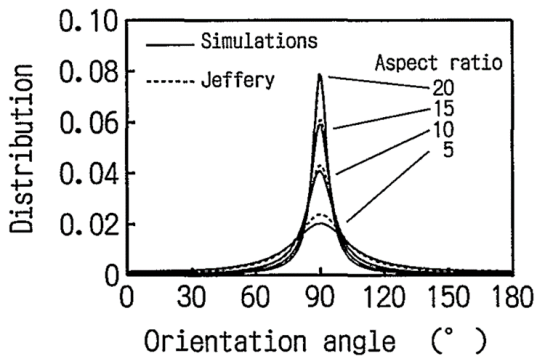


а)

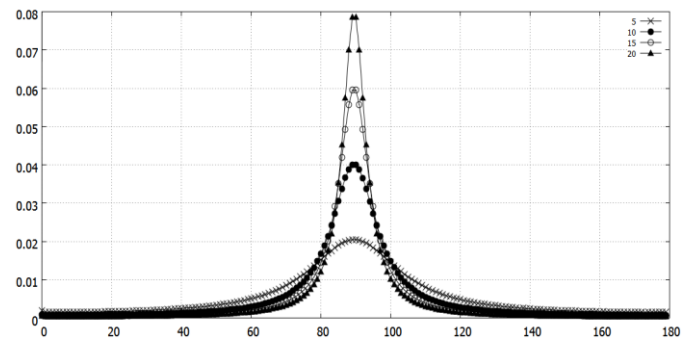


б)

Рис. 5.6. Результат сравнения с аналитическим решением периода вращения жесткого волокна в зависимости от его соотношения сторон. а) Результаты вычислительного эксперимента [120]. б) Расчеты по модели из раздела 5.1.



а)



б)

Рис. 5.7. Результат сравнения с аналитическим решением для функции распределения углов ориентации жесткого волокна в зависимости от его соотношения сторон. а) Результаты вычислительного эксперимента [120]. б) Расчеты по модели из раздела 5.1.

Чтобы смоделировать жесткое цилиндрическое волокно, рассматривалось следующее значение константы $k_b = 2e+03$. Результаты сравнения с аналитическими выражениями для периода (5.25) представлены на рис. 5.6.

Функции распределения углов ориентации φ жесткого волокна, полученные численным решением (5.26) показаны на рис. 5.7.

Изучая гибкие волокна, авторы работы [126] обнаружили, что волокно может подвергаться различным сложным схемам вращения в зависимости от его гибкости, соотношения размеров и скорости сдвига жидкой среды. В ходе вычислительного эксперимента (см. рис. 5.8.) для двумерной постановки задачи удалось выявить характерные режимы деформации волокна при вращении в плоскости XY и сравнить их с результатами экспериментальной работы [126]. В каждом случае волокно продолжает периодически вращаться.

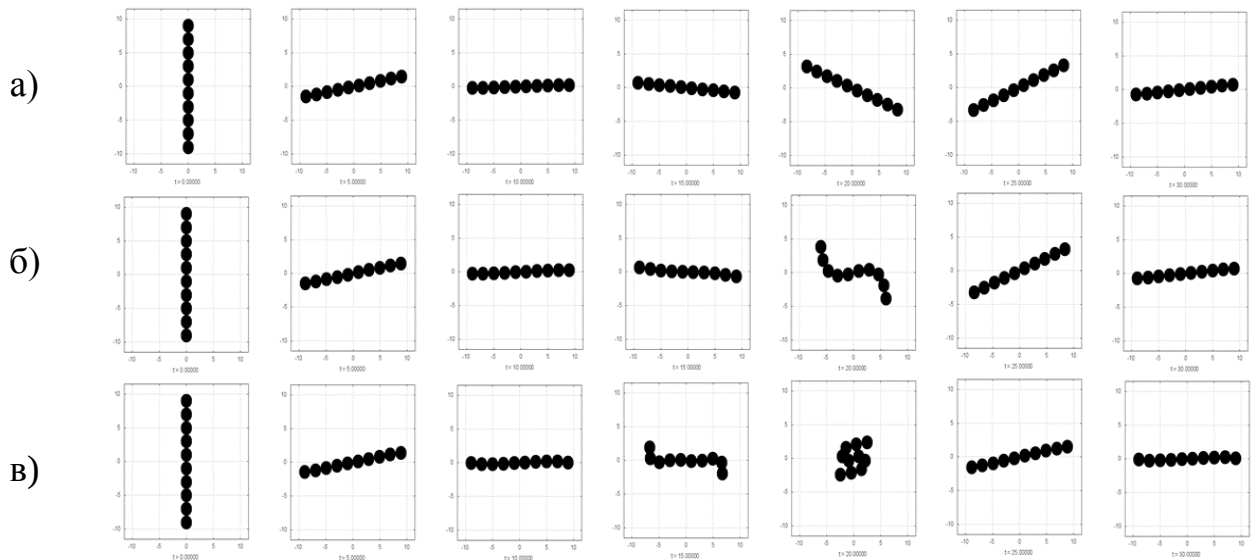


Рис. 5.8. Положение волокна в моменты времени $t^* = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$. а) жесткое волокно $k_b = 2000$; б) гибкое волокно $k_b = 200$; в) сильно гибкое волокно $k_b = 20$.

Для жесткого волокна рис. 5.8, а) модель волокна не изгибается ни в малейшей степени. Также волокно ориентировано в направлении, параллельном потоку, в течение большей части времени.

Для гибкого волокна рис. 5.8, б) модель волокна вращается с небольшой деформацией изгиба. Эта деформация была названа авторами экспериментальной работы [126] «пружинное вращение» («Springy rotation») и описана следующим образом: при вращении в плоскости XY волокно сгибалось, как листовая пружина,

когда концы находились во втором и четвертом квадрантах, и выпрямлялось при выравнивании с потоком.

Было рассмотрено довольно гибкое волокно рис. 5.8, в), модель волокна деформируется в форме символа S и вращается. Такой вид деформации назван авторами [126] «чистый S-поворот» («pure S-turn»). Эти типы движений наблюдались для волокон, основные оси которых имели небольшую кривизну в плоскости XZ при выравнивании по оси X. Начиная с этой ориентации, оба конца начинают изгибаться в противоположных направлениях. Волокно принимает S-образную форму, если смотреть вдоль оси Z, и форму петли, если смотреть вдоль оси Y. Некоторые очень однородные волокна изгибаются так, что формируют S-образную форму полностью в плоскости XY. Такой вид движения назван чистым поворотом.

Кроме того, на рис. 5.9. представлены орбиты, которые описывает в сдвиговом потоке конец волокна в зависимости от гибкости. Видно неплохое

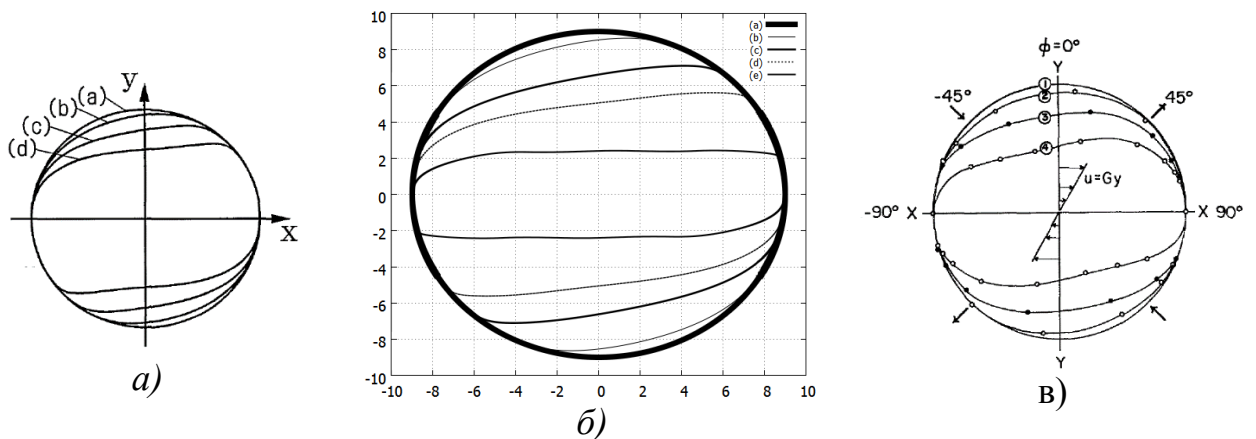


Рис. 5.9. Орбиты вращения волокна, состоящего из десяти сфер в зависимости от константы изгиба k_b : (a) 10 000, (b) 400, (c) 300, (d) 200, (e) 20. а) Результаты вычислительного эксперимента [120], б) Расчеты по модели из раздела 5.1, в) результаты эксперимента [127].

согласование результатов, полученных в ходе вычислительного эксперимента, с результатами других авторов, а также – данными экспериментальной работы [127], где изучались движение и деформация гибких нитевидных нейлоновых волокон в сдвиговом течении.

Учет трехмерных особенностей в модели позволяет получить более точные распределения волокон в пространстве. Так в реальных системах движение волокна по типу «чистый S-поворот», когда вращение идет только в одной плоскости, редко происходит и зачастую наблюдается обычный «S-поворот» как на рис. 5.10.

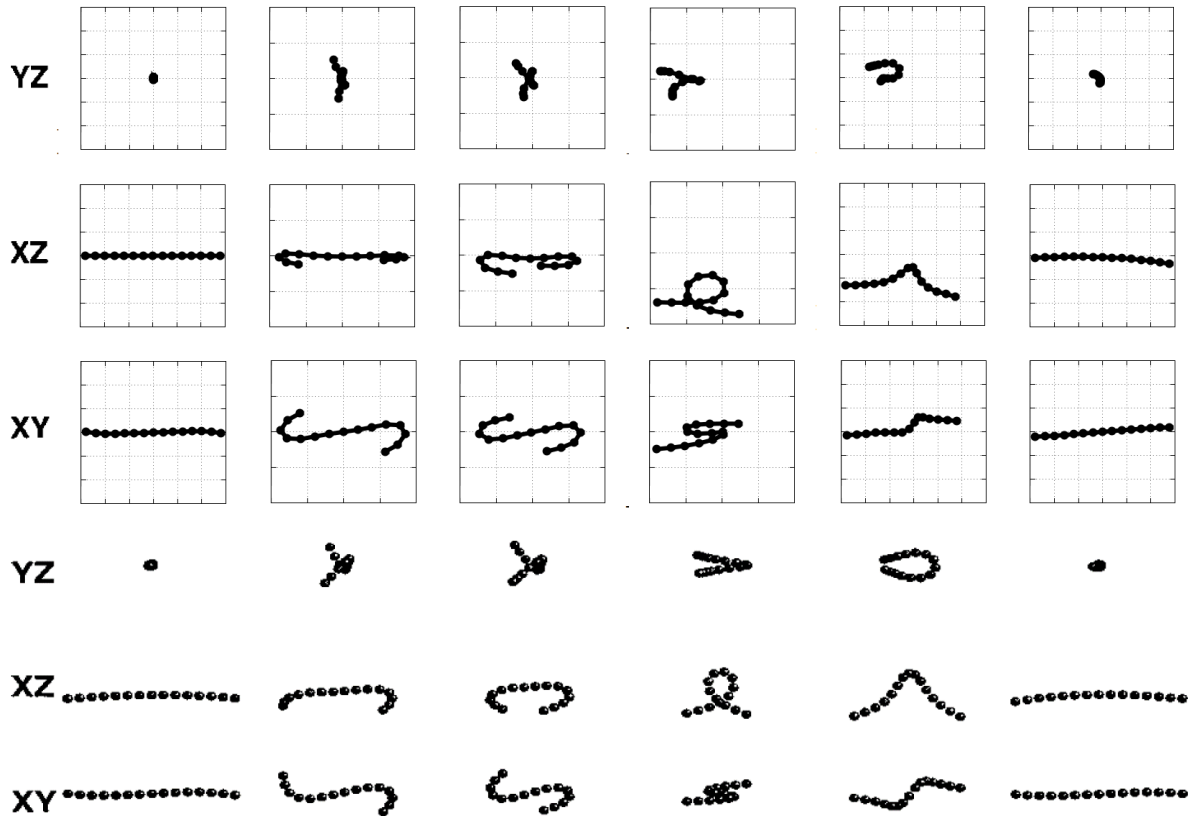


Рис. 5.10. Положение волокна в различные моменты времени. *Сверху* результаты настоящей работы (точками показаны центры положения сфер). *Снизу* результаты работы [122].

На данном рисунке также представлены сравнения с результатами для «S-поворота», полученными авторами работы [122] с помощью другой модели, где аппроксимация волокна производилась эллипсоидами и пренебрегалось растяжением волокна. Кроме того, сравнивались и другие виды движения трехмерного волокна, представленные в [122], было получено качественное согласование с результатами авторов. На рис. 5.11 видно, что модель, представленная в настоящем исследовании, позволила качественно воспроизвести картину, наблюдаемую в эксперименте [126] с очень гибкими нитевидными волокнами.

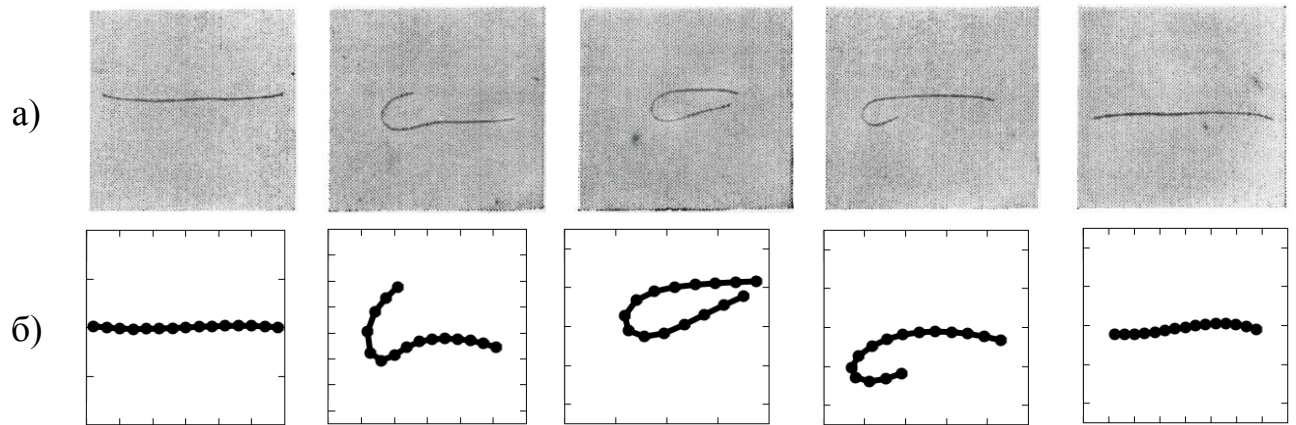


Рис. 5.11. Движение очень гибкого волокна в сдвиговом течении. а) Эксперимент, [126].

б) Результат вычислительного эксперимента.

Таким образом, исходя из предположений модели (см. раздел 5.1.), была подтверждена периодическая особенность орбиты жестких удлиненных тел в сдвиговом течении, хотя гидродинамические сила (5.9) и крутящий момент (5.10) рассчитывалась для сфер на каждом отдельном сегменте. Кроме того, результаты для гибких волокон неплохо согласуются с результатами других авторов и данными физических экспериментов.

5.3. Постановка задачи перемешивания с волокнистыми включениями.

Рассматривается задача о перемешивании в плоской прямоугольной камере с подвижными дном и крышкой [25]. Целью исследования является выявление режимов работы устройства, при которых примесь, состоящая из волокон, должна распределиться по пространству таким образом, чтобы углы ориентации волокон принимали приблизительно равные значения. Для перемешивающего устройства условия аналогичны разделу 4.4. настоящей работы, за исключением того, что в качестве примеси используются волокна, которые могут деформироваться в среде. Принимаются следующие допущения: концентрация волокон такова, что они не оказывают обратного влияния на жидкость и не взаимодействуют друг с другом.

В качестве жидкой фазы выступает глицерин с динамической вязкостью $\mu = 0.75 \text{ Па}\cdot\text{с}$ и плотностью $\rho = 1250 \text{ кг/м}^3$. Жидкость приходит в движение посредством

задания скорости на нижней и верхней границах области соответственно. На боковых границах каверны ставятся условия прилипания и непротекания ($u = 0, v = 0$). Действует разрывный протокол перемешивания, а именно: крышка и дно двигаются попеременно в разных направлениях с периодом $T = 20$ с (первую половину периода движется крышка со скоростью $U_{\text{top}} = 0.0269$ м/с, вторую – дно со скоростью $U_{\text{bot}} = -0.0269$ м/с). Для расчета поля скорости жидкости использовалась методика, представленная в разделе 1.2.

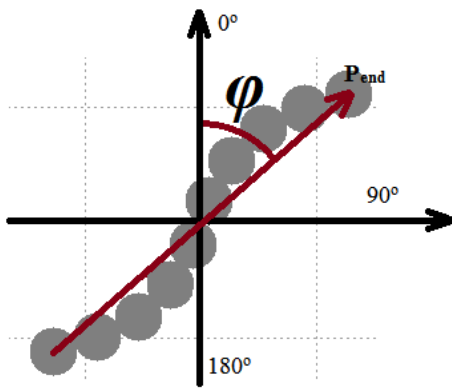


Рис. 5.12. Схематическое определение угла ориентации волокна.

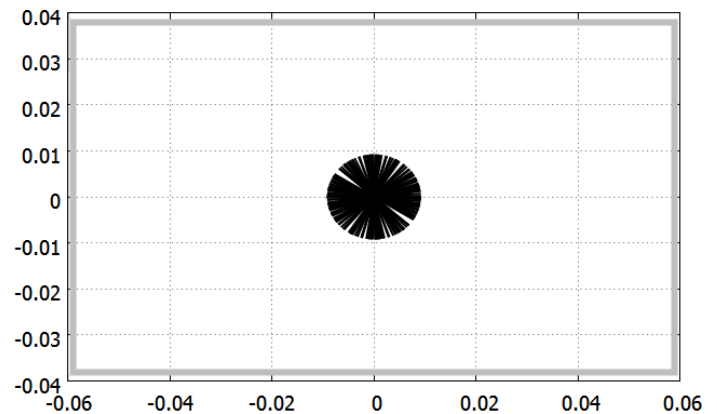


Рис. 5.13. Начальные положения 100 волокон в пространстве.

В качестве материала дискретной фазы используется стекловолокно с длиной волокна 1.8 см и соотношением сторон 1:50. Таким образом, рассматривается модель волокна со следующими параметрами: $E = 50$ ГПа, $G = 2.9$ ГПа, $\rho_f = 2500$ кг/м³, $a = 1.8 \times 10^{-4}$ м, $N = 50$. Общее число волокон в вычислительном эксперименте постоянно и равно 100. Для определения угла ориентации волокна $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ]$ служит вектор $\mathbf{P}_{\text{end}}$, который соединяет концы волокна (см. рис. 5.12). Изначально волокна расположены так, что центр масс каждого из них находится в центре каверны (см. рис. 5.13), при этом угол ориентации является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке от 0 до 180 ($\varphi \sim \mathcal{R} [0, 180]$). Начальное положение пятна генерировалось один раз и использовалось в дальнейших исследованиях. На боковых границах каверны для дискретной фазы были сформулированы периодические условия. Шаг по времени в процессе

гидродинамического расчета равен $1.0\text{e-}02$ с, а для расчета примеси $1.0\text{e-}05$ с. Время окончания расчета составляет 300 секунд или 15 периодов.

5.4. Анализ результатов.

Обычно в прикладных задачах волокна в процессе перемешивания хаотично ориентированы [128]. Однако, рассматриваемая схема перемешивающего устройства позволяет определенным образом воздействовать на ориентацию волокон. На рис. 5.14 и 5.15 проиллюстрирован ход протекаемых процессов.

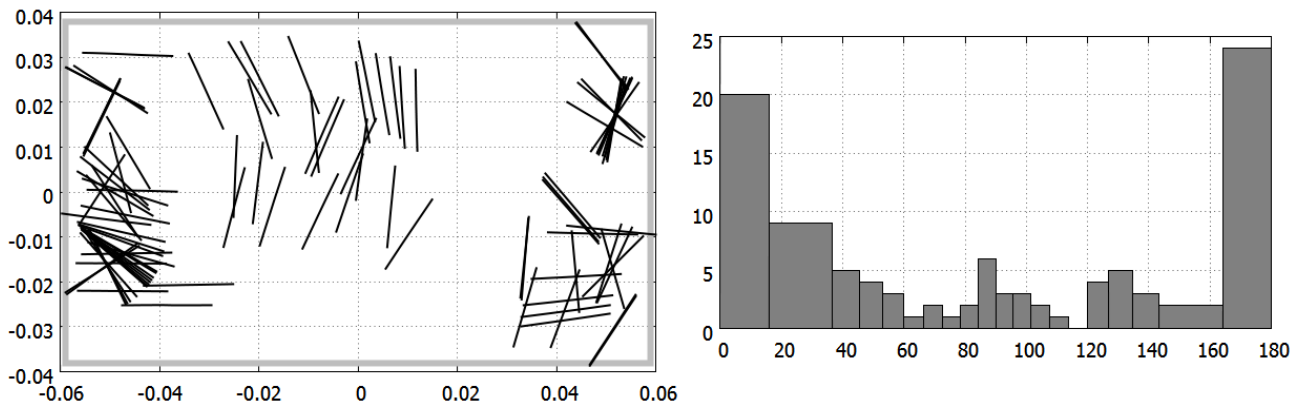


Рис. 5.14. Положения волокон в пространстве и гистограмма углов их ориентации в момент времени $t = 160.049$ с. Период разрывного протокола $T = 20$ с.

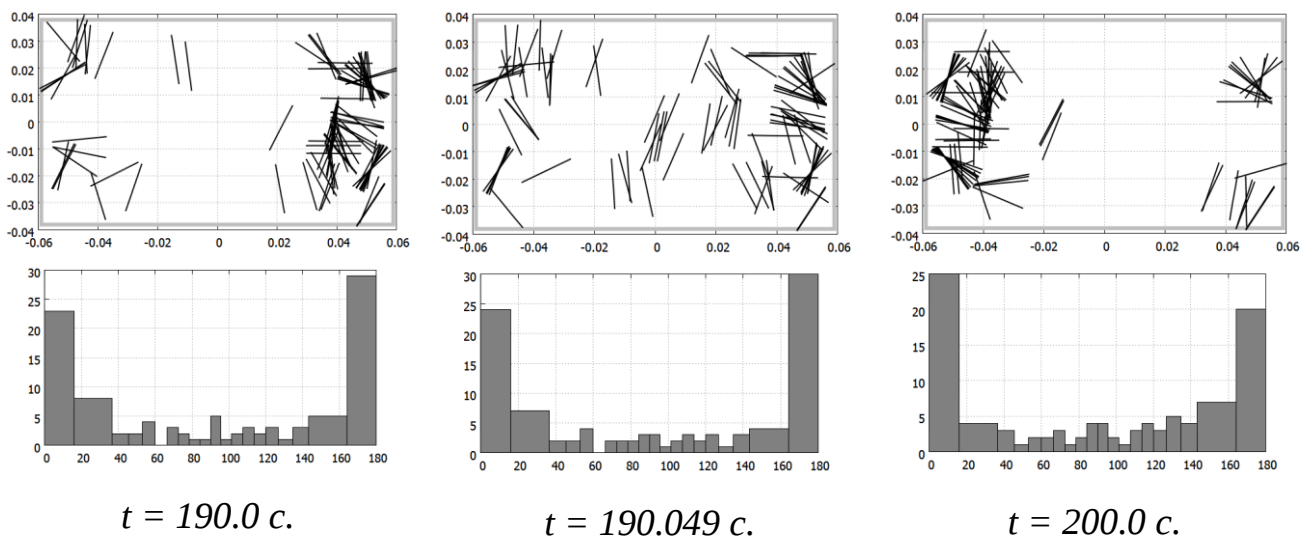


Рис. 5.15. Положения волокон в пространстве и гистограмма углов их ориентации в различные моменты времени. Период разрывного протокола $T = 20$ с.

Сразу выделяется тот факт, что при рассматриваемых параметрах жидкой и дисперсной фаз, волокна не испытывают сильной деформации. Максимальное отклонение от прямого волокна показано на рис. 5.16, оно составляет десятую часть миллиметра и практически не воспринимается на рисунках глазом.

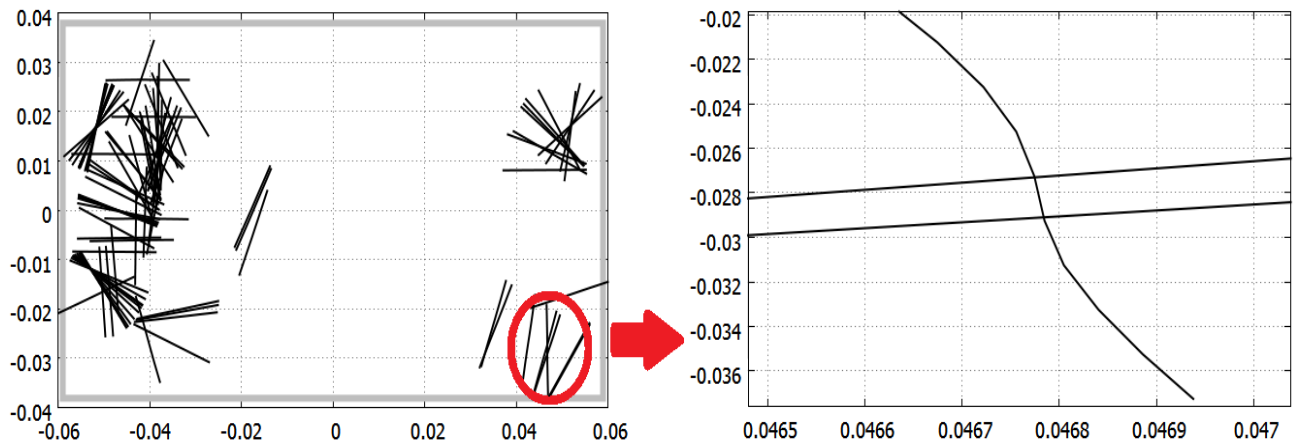


Рис. 5.16. Положения волокон в пространстве $t = 200$ с. Период разрывного протокола $T = 20$ с. Увеличена зона с максимальной деформацией волокон.

Другой отличительной особенностью является то, что практически на большей части времени периода ансамбль волокон движется вдоль границ, и только в короткий момент времени, когда происходят переключения движения дна и крышки, наблюдается разброс волокон по пространству (на рис. 5.15 момент времени $t = 190.049$ с). При этом больше половины волокон имеют углы ориентации близкие к 0° и 180° (с инженерной точки зрения одно и то же), то есть направлены вдоль оси ОУ. С увеличением времени расчета картина принципиально не изменяется. Приходим к выводу, что перемешивающий потенциал у данного режима невысокий, хотя удастся повлиять на ориентацию волокнистых включений.

С целью определения более эффективных режимов работы устройства с точки зрения и перемешивания, и направленности волокон проводилось исследование влияния периода разрывного протокола на процесс. Период варьировался от 1 до 30 секунд.

Изменение величины периода от 10 до 30 секунд не повлияло каким-либо образом на процесс. В диапазоне значений периода от 3 до 10 с обнаружилось такое

явление, как зоны жгутования: скопление волокон, очень близко расположенных друг к другу. Рассмотрим данное явление при периоде $T = 4$ с.

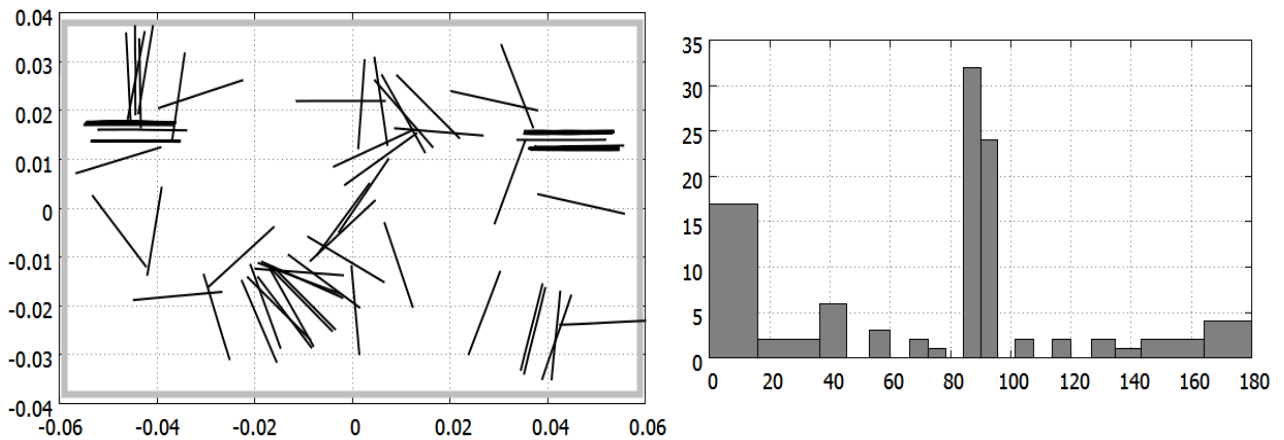


Рис. 5.17. Положения волокон в пространстве и гистограмма углов их ориентации в момент времени $t = 70.0$ с. Период разрывного протокола $T = 4$ с.

На рис. 5.17 показано характерное распределение волокон в пространстве. В отличие от рассмотренного ранее режима, здесь большая часть ансамбля волокон имеет угол ориентации близкий к 90° , направление волокна вдоль оси ОХ. На рис. 5.18 выделены зоны жгутования, и показана их конфигурация.

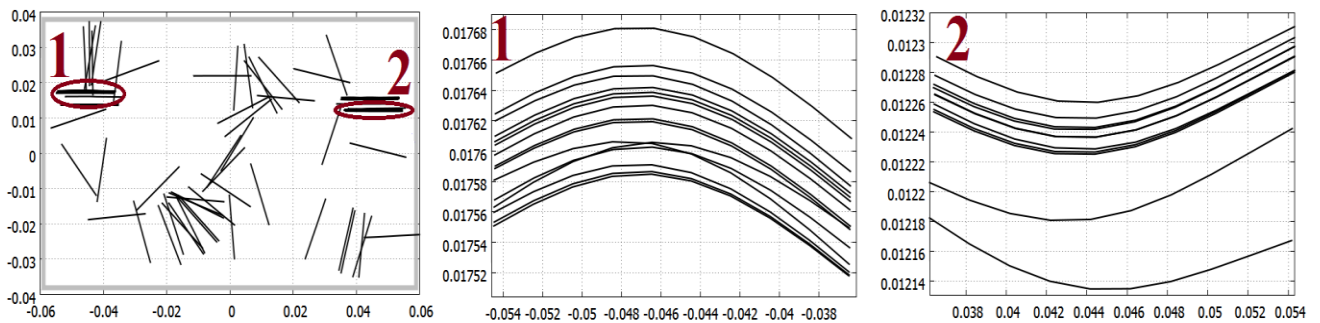


Рис. 5.18. Положения волокон в пространстве $t = 70$ с. Период разрывного протокола $T = 4$ с. Увеличены зона жгутования волокон.

Однако, рассмотрение режимов с меньшим значением периода разрывного протокола позволило полностью избавиться от зон жгутования и добиться распределения волокон по пространству перемешивающего устройства с сохранением направленности волокон близкой к 0° и 180° . На рис. 5.19. представлена временная развертка процесса, доказывающая наше утверждение.

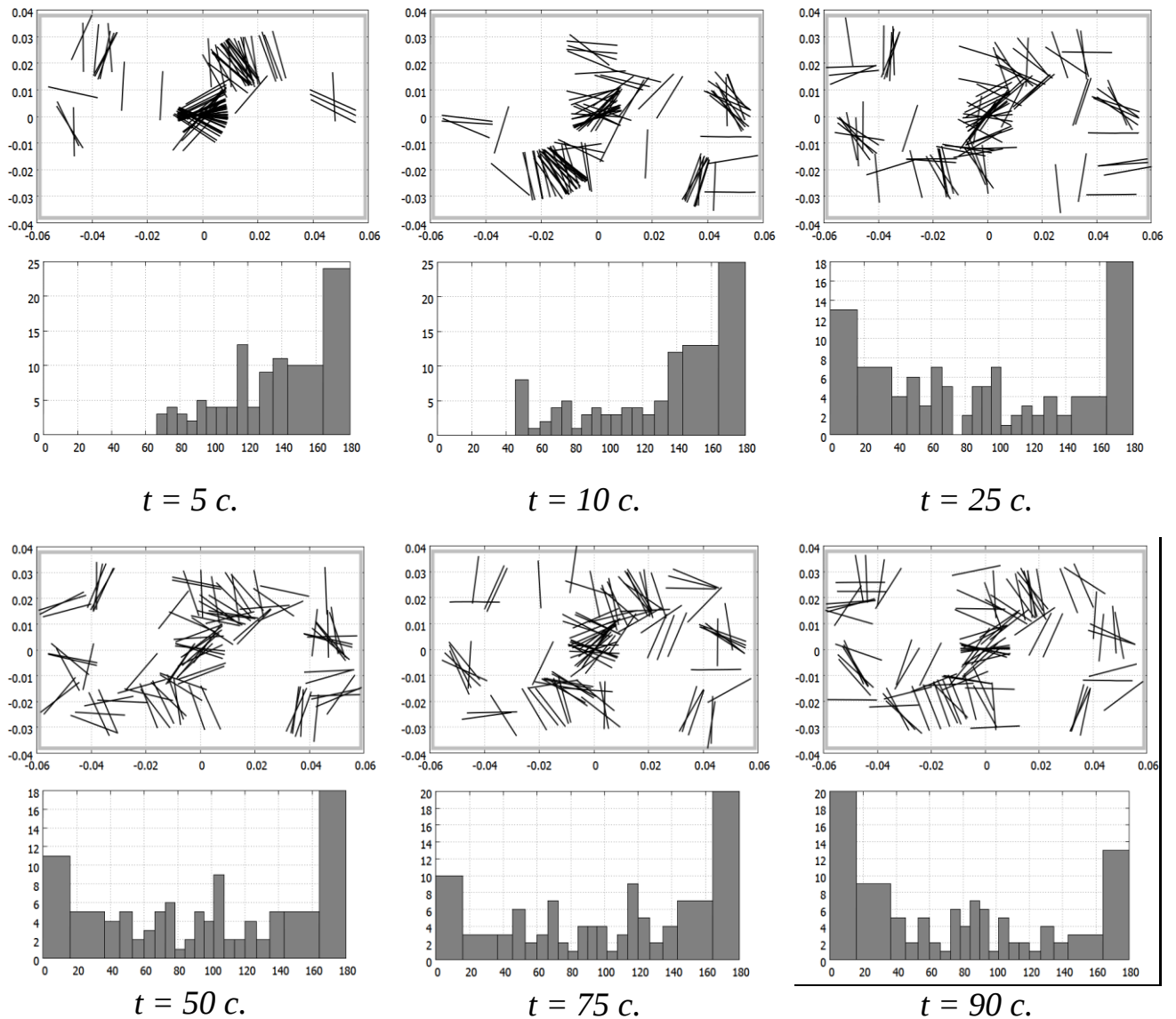


Рис. 5.19. Положения волокон в пространстве и гистограмма углов их ориентации в различные моменты времени. Период разрывного протокола $T = 2$ с.

Стоит отметить, что время окончания расчета для режима с периодом разрывного протокола $T = 2$ с, было продолжено до $t = 250T$, при этом были получены картины, аналогичные приведенным на рис. 5.18 для $t > 50$ с.

Таким образом, сформулированная в разделе 5.3 задача о перемешивании с волокнистыми включениями была решена на ЭВМ с использованием математической модели из раздела 5.1, реализованной в программном комплексе.

5.5. Выводы к главе 5.

В главе пять представлена математическая модель волокон, в которой волокно аппроксимируется набором сфер, сцепленных друг с другом. Каждая пара сфер может растягиваться, изгибаться и крутиться, изменяя при этом расстояние между сферами, углы изгиба и кручения соответственно. Сила сцепления и гибкость волокна определяются тремя постоянными параметрами. Движение волокна в поле течения определяется путем решения уравнений поступательного движения и вращения для отдельных сфер под действием гидродинамических сил и крутящего момента. Исследуется поведение волокна в сдвиговом течении при различных параметрах гибкости, рассчитывается период вращения волокна. Полученные результаты сравниваются с аналитическими решениями. Для гибких волокон деформация и структура потока согласуются с экспериментальными данными и результатами других авторов. Сформулирована задача о перемешивании с волокнистыми включениями в прямоугольной каверне. Определены режимы работы устройства, при которых волокна распределяются по пространству таким образом, что большинство углов ориентации принимают приблизительно равные значения. Тем самым создаются основы для управления процессом получения свойств анизотропии у композитов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В ходе выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

1. Разработаны методы, алгоритмическое и программное обеспечение для моделирования процессов гидродинамического перемешивания, которые позволяют описывать пространственно-временные структуры в сложных течениях и оценивать их влияние на процесс перемешивания. Это создаёт основы для выбора эффективных схем перемешивающих устройств и оптимальных режимов их работы.

2. Представлены результаты численного моделирования процессов гидродинамического перемешивания в установках колебательного типа. Исследовано влияние на процесс перемешивания амплитудно-частотных характеристик колеблющегося элемента, а также его геометрической формы. Получена карта режимов в плоскости «эффективность перемешивания – потребляемая мощность». Предложена методика оптимального размещения рабочих элементов.

3. Представлены результаты численного моделирования процессов гидродинамического перемешивания в системе подвижных коаксиальных профилированных цилиндров. Определены эффективные протоколы перемешивания, построена соответствующая карта режимов. Предложена методика профилирования внутреннего цилиндра на основе анализа особых точек в векторном поле скорости жидкости. Выявлен наиболее технологичный способ управления процессом перемешивания.

4. Сформулированы числа подобия для перемешивающих устройств двух различных классов. С помощью вычислительных экспериментов доказана их состоятельность.

5. С использованием разложений по динамическим модам разработаны алгоритмы и построены редуцированные модели для ряда задач перемешивания. Данный подход обеспечивает эффективное хранение информации о поле течения.

6. Сформулирована комплексная математическая модель динамики гибкого волокна в жидкой среде. Разработан и апробирован соответствующий программно-алгоритмический комплекс. Исследовано влияние протокола перемешивания на ориентацию ансамбля волокон в представленном типе устройств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е. Нелинейная волновая механика и технологии. Волновые и колебательные явления в основе высоких технологий. – М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2011, 780 с.
2. Брагинский Л.Н., Бегачев В.И., Барабаш В.М. Перемешивание в жидких средах: Физические основы и инженерные методы расчета. – Л.: Химия, 1984, 336 с.
3. Ганиев Р.Ф., Ганиев С.Р., Касилов В.П., Пустовгар А.П. Волновые технологии в инновационном машиностроении. Волновые и колебательные явления в создании высоких технологий в промышленности. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014, 108 с.
4. Ottino J.M. The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport. – Cambridge: Cambridge University Press, 1989, 363 p.
5. Aref H., El Naschie M.S. (Eds.) Chaos applied to Fluid Mixing. London: Pergamon, 1994, 380 p.
6. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Украинский Л.Е. Волновое перемешивание // Нелинейная динамика, 2008, Т. 4, №4, С. 483-496.
7. Dimotakis P.F., Miake-Lye R.C. and Papantoniou D.A. Structure and dynamics of turbulent round jets // Phys. Fluids, 1983, N. 26, P. 3185-3192.
8. Васильев О.Ф., Воропаева О.Ф., Курбацкий А.Ф. Турбулентное перемешивание в устойчиво стратифицированных течениях окружающей среды: современное состояние проблемы (обзор) // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2011. Т. 47. № 3. С. 291-307.
9. Неуважаев В.Е., Яковлев В.Г. Турбулентное перемешивание двух жидкостей при произвольном законе ускорения // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42. № 4. С. 11-20.
10. Жуковский Н.Е. Кинематика жидкого тела // Математ. сборник, 1876, т. 8, С. 1–79, 163–238

11. Taylor G. I. The formation of emulsions in definable fields of flow // Proc. Roy. Soc., 1934, V. A146, P. 501-523.
12. Brothman A., Wollan G.N., and Feldman S.M. New analysis provides formula to solve mixing problem // Chem. Metal. Eng., 1945, V. 52, P. 102-106
13. Eckart C. An analysis of the stirring and mixing processes in incompressible fluids // J. Marine Res., 1948, V. 7, № 3, p. 265–275.
14. Spencer R. S. and Wiley R. M. The mixing of very viscous liquids // J. Coll. Sci., 1951, V. 6, P. 133-145.
15. Welander. P. Studies on the general development of motion in a two-dimensional ideal fluid // Tellus, 1955, V. 7, P. 141-156.
16. Aref H. Stirring by chaotic advection // J. Fluid Mech., 1984, V. 143, p. 1-24.
17. Aref H. Stochastic particle motion in laminar flows // Phys. Fluids, 1991, V. A3, p. 1009–1016
18. Ареф Х. Вихревая динамика волновых следов // Нелинейная динамика, 2006, Т.2, №4, с.411-424.
19. Aref H. The development of chaotic advection // Phys. Fluids, 2002, V. 14, p. 1315–1325.
20. Ареф Х. Развитие хаотической адвекции // Нелинейная динамика, 2006, Т.2, №1, с.111-133.
21. Ottino J. M., Chella R. Laminar mixing of polymeric liquids; a brief review and recent theoretical developments // Polym. Eng. Sci., 1983, V. 23, p. 357–379
22. Chien W. L., Rising H., Ottino J. M. Laminar mixing and chaotic mixing in several cavity flows. // J. Fluid Mech., 1986, V. 170, p. 419-451.
23. Ottino, J. M., Leong, C. W., Rising, H., & Swanson, P. D. (1988). Morphological structures produced by mixing in chaotic flows. // Nature, 1988, V. 333, N 6172, p. 419-425.
24. Ottino J.M. The Mixing of Fluids // Scientific American, 1989, V. 260, №1, P. 56-67.

25. Leong C.W., Ottino J.M. Experiments on mixing due to chaotic advection in a cavity. *J. Fluid Mech.* 1989. Vol. 209. P. 463–499.
26. Ottino J.M. Mixing, Chaotic Advection and Turbulence // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1990, №22, p.207-253
27. Ottino J. M., Jana S. C., Chakravarthy V.S. From Reynolds's stretching and folding to mixing studies using horseshoe maps // *Phys. Fluids*, 1994, V. 6, p. 685–699
28. Kusch H., Ottino J. Experiments on mixing in continuous chaotic flows. // *J. Fluid Mech.*, 1992, V. 236, P. 319-348.
29. Ottino J.M. Mixing and chemical reactions. A tutorial // *Chem. Eng. Sci.*, 1994, V. 49, p. 4005–4027.
30. Wang J., Feng L., Ottino J., Lueptow R. Inertial effects on chaotic advection and mixing in 2D cavity flow // *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2009, V. 48, p. 2436-2442.
31. Schlick C.P., Isner A.B., Freireich B.J., Fan Y.c, Umbanhowar, P.B., Ottino J.M., Lueptow R.M. A continuum approach for predicting segregation in flowing polydisperse granular materials // *J. Fluid Mech.*, 2016, V. 797, P. 95-109.
32. Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, 1985, Т.1, С. 7—140.
33. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000, 368 с.
34. Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. – М.: МЦНМО, 2007, 392 с.
35. Арнольд В. И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 284 с
36. Арнольд В. И., Афраимович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций. // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, 1985, Т.5, С. 5—218.

37. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bulletin of the American Mathematical Society, 1967, V. 73, N 6, p. 747 – 817.
38. Лоскутов А. Ю. Динамический хаос. Системы классической механики. // Успехи физических наук. 2007, Т. 177, № 9, С. 989-1015.
39. Мельников В. К. Об устойчивости центра для периодических по времени возмущений // Труды Моск. матем. общества, 1963, Т. 12, С. 3-52.
40. Doherty M. F., Ottino J. M. Chaos in deterministic systems: strange attractors, turbulence and applications in chemical engineering. // Chem. Engng Sci., 1988, V. 43, p. 139-183.
41. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
42. Петров А. Г. Метод отображений Пуанкаре в гидродинамических системах. Динамический хаос в жидком слое между эксцентрически вращающимися цилиндрами // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 44. № 1. С. 3-21.
43. Arnold V. I. Sur la topologie des ecoulements stationnaires des fluides parfaits // C. R. Acad. Sci. Paris, 1965, V. 261, p. 17-20.
44. Dombre T., Frisch U., Greene J. M., Hénon M., Mehr A., Soward A. M. Chaotic streamlines in the ABC flows // J. of Fluid Mechanics, 1986, V. 167, p 353-391
45. Finn M. D., Cox S. M., Byrne H.M. Chaotic advection in a braided pipe mixer. // Phys. Fluids, 2002, V. 15, N 11, p. 77-80.
46. Gouillart E., Dauchot O., Thiffeault J.-L., and Roux S. Open-flow mixing experimental evidence for strange eigenmodes// Phys. Fluids, 2009, V. 21, N 2. P. 023603:1-10.
47. Boyland P.L., Aref H., Stremler M.A. Topological fluid mechanics of stirring // J. Fluid Mech., 2000, V. 403, P. 277-304.
48. Thurston W. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces // Bull. Am. Math. Soc., 1988, V. 19, P. 417-431.
49. Meleshko V. V., Aref H. A blinking rotlet model for chaotic advection. // Phys. Fluids, 1996, V. 8, N 12, P. 2393-2399.

50. Vikhansky A. Simulation of topological chaos in laminar flows // CHAOS, 2004, V.14, №1, p. 14-22.
51. Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proc. R. Soc. Lond., 1996, V. A452, p. 1999–2022.
52. Meleshko V. V., Peters G.W. M. Periodic points for two-dimensional Stokes flows in a rectangular cavity // Phys. Letters, 1996, V. A216, p. 87–96.
53. Krasnopol'skaya T.S., Meleshko V. V., Peters G.W. M., Meijer H.E. H. Steady Stokes flow in an annular cavity // Quart. J. Mech. Appl. Math., 1996, V. 49, p. 593–619.
54. Krasnopol'skaya T.S., Meleshko V. V., Peters G.W. M., Meijer H.E. H. Mixing in Stokes flow in an annular wedge cavity // Eur. J. Mech., B — Fluids, 1999, V. 18, p. 793–822.
55. Петров А.Г. О перемешивании вязкой жидкости в слое между вращающимися эксцентричными цилиндрами // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. № 5. С. 741-758.
56. Казакова А.О., Петров А.Г. О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 16-25.
57. Dutta P., Chevray R. Inertial effects in chaotic mixing with diffusion // J. Fluid Mech., 1995, V. 285, P. 1-16.
58. Woude D., Clercx H. J. H., Heijst G. J. F., Meleshko V. V. Stokes flow in a rectangular cavity by rotlet forcing // Phys. of fluids, 2007, V. 19, P. 083602:1-19
59. Stremler M. A., Chen J. Generating topological chaos in lid-driven cavity flow // Phys. Fluids. 2007. V. 19. № 10. P. 103602.
60. Stroock A. D., Dertinger S. K.W., Adjari A., Mezić I., Stone H. A., Whitesides G.M. Chaotic mixer for microchannels // Science, 2002, V. 295, 647-650.
61. Castelain C., Mokrani A., Guer Y.L., Peerhossaini H. Experimental study of chaotic advection regime in a twisted duct flow // Eur. J. Mech. B – Fluids, 2001, V. 20, P. 205–232.

62. Boujlel J., Pigeonneau F., Gouillart E., Jop P. Rate of chaotic mixing in localized flows // PHYSICAL REVIEW FLUIDS, 2016, V. 1, 031301:1-8.
63. Moura A., Feudel U., Gouillart E. Mixing and Chaos in Open Flows. Elsevier, Advances in Applied Mechanics, V. 45, P. 50.
64. Thiffeault J-L., Gouillart E., Dauchot O. Moving walls accelerate mixing // PHYSICAL REVIEW E, 2011, V. 84, 036313.
65. Williamson C. H.K., & Roshko A. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder // Journal of Fluids and Structures, 1988, V. 2, p. 355–381.
66. Ponta F. L., & Aref H. Vortex synchronization regions in shedding from an oscillating cylinder // Physics of Fluids, 2005a, V. 17, 011703.
67. Meunier P., Villiermaux E. How vortices mix // J. Fluid Mech. 2003. V. 476. P. 213–222.
68. Рыжов Е.А., Кошель К.В. Хаотический перенос и перемешивание пассивной примеси вихревыми потоками за препятствиями // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 2. С. 204-211.
69. Рыжов Е.А., Израильский Ю.Г., Кошель К.В. Вихревая динамика жидкости вблизи границы с округлой выемкой // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 4. С. 477-483.
70. Кичатов Б.В., Коршунов А.М., Бойко И.В., Ассорова П.В. Влияние формы лопастей мешалки на размеры капель при перемешивании взаимно нерастворимых жидкостей // Теоретические основы химической технологии, 2003, Т. 37, № 1, с. 21-26.
71. Газизуллин Н. А. Численное моделирование вторичного течения вязкоупругой жидкости в аппарате с турбинной мешалкой // Вестник ИЖГТУ им. М.Т.Калашникова, 2014. № 3, с. 11-14.
72. Газизуллин Н. А. Исследование динамики потоков в аппарате с листовой мешалкой // Вестник Ижевского государственного технического университета, 2011, № 4, с. 54-56.

73. Газизуллин Н. А. Перемешивание жидкости в аппарате с лопастной мешалкой // Вестник Ижевского государственного технического университета, 2010, № 4, с. 54-56.
74. Ганиев Р.Ф., Чукаев А.Г., Беляев Ю.А., Фомин В.Н., Малюкова Е.Б., Берлин А.А. Некоторые аспекты моделирования гидродинамики при волновом перемешивании жидкостей // ДАН, 2009, Т. 429, № 1, с. 72-75.
75. Панин С. С. Разработка волнового смесителя для перемешивания высоковязких неньютоновских жидкостей // Пробл. машиностроения и надежности машин, 2012, № 2, с. 61-70.
76. Сайфуллин И.Ш., Панин С.С., Ганиев Р.Ф., Ганиев О.Р. О перспективах разработки и использования нелинейных волновых технологий для переработки энергетических конденсированных систем // Пробл. машиностроения и надежности машин, 2018, № 5, с. 96-100.
77. Ганиев С.Р., Касилов В.П., Кочкина Н.Е., Скобелева О.А. Применение волнового воздействия для получения композиционных материалов на основе крахмала и поливинилового спирта // Пробл. машиностроения и надежности машин, 2018, №6, С. 73-80.
78. Arrieta J, Cartwright J.H.E, Gouillart E, Piro N, Piro O, Tuval I. Geometric Mixing Peristalsis, and the Geometric Phase of the Stomach // PLoS ONE, 2015, V. 10, N 7, p. e0130735:1-17.
79. Hassan Aref, John R. Blake, Budišić M, Silvana S. S. and etc. Frontiers of chaotic advection // Rev. Mod. Phys, 2017, V. 89, 025007.
80. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1-2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
81. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974, 712 с.
82. Винников В.В., Ревизников Д.Л. Применение декартовых сеток для решений Навье-Стокса в областях с криволинейными границами // Математическое моделирование, 2005, Т.17, №8, с. 15-30.

83. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012, 468 с.
84. Issa R.I. Solution of implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // J. of Comput. Physics, 1986, V. 62, N 1, P. 40-65.
85. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984, 152 с.
86. Ревизников Д. Л., Способин А. В., Сухарев Т. Ю. Численное моделирование обтекания затупленного тела сверхзвуковым полидисперсным потоком. // ТВТ, 2017, Т. 55, № 3, С. 418-425.
87. Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю. Гиперзвуковое обтекание затупленных тел в условиях атмосферы Земли и Марса. Сравнительный анализ математических моделей. // Тепловые процессы в технике, 2018, Т. 10, № 1-2, С. 5-15.
88. Crowe C.T., Sommerfeld M., Tsuji Y. Multiphase flows with droplets and particles. CRC Press LLC, 1998, 471 p.
89. Мелешко В.В., Краснопольская Т.С. Смешивание вязких жидкостей // Нелинейная динамика, 2005, Т.1, №1, с. 69-109.
90. Винников В.В., Ганиев К.О., Ревизников Д.Л., Украинский Л.Е. Дипольный метод для моделирования процессов перемешивания // Вестник московского авиационного института, 2009, Т.16, №2, с. 122-130.
91. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2006, 408 с.
92. Казакова А.О. Численное моделирование течения вязкой жидкости в приближении стока // В сборнике: ГИДРОДИНАМИКА БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ И КОРАБЛЕСТРОЕНИЕ Сборник научных трудов XII Международной летней научной школы-конференции, посвященной 155-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова. 2018. С. 145-152.
93. Gibbs J. W. Elementary Principles in Statistical Mechanics. New York: Scribner, 1902, 207 p.

94. Irving H. F. and Saxton R. L. *Mixing of High Viscosity Materials*//*Mixing: Theory and Practice*, II. Palo Alto: Academic, 1967. P. 169-224.
95. Hunt J., Wray A., Moin P. Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows. // *Technical Report*/. Center for Turbulent Research, 1988. No. CTR-S88. P. 193-208.
96. Седов Л. И. *Методы подобия и размерности в механике*. – М: Наука, 1981, 440 с.
97. Reynolds O. On the Theory of Lubrication // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 1886. V. 177, N 1, P. 157-234.
98. Жуковский Н.Е. Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие тела внутри жидкой массы // *Собр. соч. Т. 2. Гидродинамика*, Л.: Гостехиздат, 1949.
99. Ballal B.Y., Rivlin R.S. Flow of a Newtonian Fluid Between Eccentric Rotating Cylinders: Inertial Effects // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1976. V. 62. P. 237–294.
100. Schmid P. J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. // *Journal of Fluid Mechanics*. 2010. Vol. 656. P. 5-28.
101. Савельев С.К., Чесноков А.В. Идентификация потоков методом локального возмущения. // *Инженерно-физический журнал*. 2017. Т. 90, № 4. С. 1040–1043.
102. Добросельский К.Г. Применение PIV метода для исследования течения вблизи поперечно обтекаемого цилиндра. // *Инженерно-физический журнал*. 2016. Т. 89, № 3. С. 687-693.
103. Lumley J. L. *Stochastic Tools in Turbulence*. New York, Academic Press, 1970.
104. Park H. M., Chung O. Y., Lee J. H. On the solution of inverse heat transfer problem using the Karhunen-Loève Galerkin method. // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1999. Vol. 42, №1. P. 127-142.
105. Alifanov O.M., Nenarokomov A.V., Budnik S.A., Michailov V.V., Ydin V.M. Identification of thermal properties of materials with applications for

- spacecraft structures. // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2004. Vol. 12. № 5. P. 579-594.
106. Noack B. R., Afanasiev K., Morzynsk, M., Tadmor G., Thiele F. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. // *J. Fluid Mech.* 2003. Vol. 497. P. 335–363.
 107. Mezić I. Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions. // *Nonlinear Dynamics*. 2005. Vol. 41, №1-3. P. 309-325.
 108. Schmid P. J., Li. L., Juniper M.P., Pust O. Applications of the dynamic mode decomposition. // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 2011. Vol. 25, № 1-4. P. 249-259.
 109. Williams M.O., Kevrekidis I.G., Rowley C.W. A Data–Driven Approximation of the Koopman Operator: Extending Dynamic Mode Decomposition. // *Journal of Nonlinear Science*. 2015. Vol. 25, №6. P.1307-1346.
 110. Brunton B.W., Johnson L.A., Ojemann J.G, Kutz J. N. Extracting spatial-temporal coherent patterns in large-scale neural recordings using dynamic mode decomposition. // *Journal of Neuroscience Methods*. 2016. Vol. 258. P. 1-15.
 111. Tu J.H., Rowley C.W., Luchtenburg D.M., Brunton S.L., Kutz J.N. On dynamic mode decomposition: theory and applications. // *Journal of Computational Dynamics*. 2014. Vol. 1, №2. P. 391-421.
 112. Rowley C.W., Mezić I., Bagheri S., Schlatter P., Henningson D.S. Spectral analysis of nonlinear flows. // *Journal of Fluid Mechanics*. 2009. Vol. 641. P. 115-127
 113. Алексеев А.К., Бондарев А.Е. О применении разложения по динамическим модам в задачах вычислительной газовой динамики. Препринт № 154 ИПМ им. М.В.Келдыша. Москва. 2018.
 114. Alekseev A.K., Bistrián D.A., Bondarev A.E, Navon I.M. On linear and nonlinear aspects of dynamic mode decomposition. // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2016. Vol. 82. P. 348–371.

115. Zhang Q., Liu Y., Wang Sh. The identification of coherent structures using proper orthogonal decomposition and dynamic mode decomposition. // Journal of Fluids and Structures. 2014. Vol. 49. P. 5
116. Susuki Y., Mezić I., Raak F., Hikihara T. Applied Koopman operator theory for power systems technology. // Nonlinear Theory and Its Applications. 2016. Vol. 7. №4. P. 430-459.
117. Holzer A., Sommerfeld M. New simple correlation formula for the drag coefficient of non-spherical particles. // Powder Technology, 2008, N. 184, P. 361–365.
118. Henderson C.B. Drag coefficients of sphere in continuum and rarefied flows. // AIAA Journal. 1976. V. 14, N 6. P. 707-708.
119. Yin Ch., Rosendahl L., Knudsen S. K., Sorensen H. Modelling the motion of cylindrical particles in a nonuniform flow // Chemical Engineering Science, 2003, N 58, P. 3489 – 3498.
120. Yamamoto S., Matsuoka T. Method for dynamic simulation of rigid and flexible fibers in a flow field // J. Chem. Phys., 1993, V. 98, P. 664-650.
121. Yamamoto S., Matsuoka T. Viscosity of dilute suspension of rodlike particles: A numerical simulation method. // J. Chem. Phys., 1994, V. 100, P. 3317–3324.
122. Ross R.F., Klingenberg D.J. Dynamic simulation of flexible fibers composed of linked rigid bodies. // J. Chem.Phys. 1997, V. 106, P. 2949–2960.
123. Yamamoto S., Matsuoka T. Dynamic Simulation of Flow-Induced Fiber Fracture. // Polymer Engineering and Science, 1995, V. 35, N 12, P. 1022-1030.
124. Jeffery, G.B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. // Proc. R. Soc. Lond. Ser. 1922, V. 102, P. 161–179.
125. Bretherton F. P. The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number// Journal of Fluid Mechanics, 1962, V 14, P. 284-304.

126. Forgacs O. L., Mason S.G. Particle motions in sheared suspensions: X. Orbits of flexible threadlike particles // *Journal of Colloid Science*, 1959, V. 14, P. 473-485.
127. Forgacs O. L., Mason S.G. Particle motions in sheared suspensions: IX. Spin and deformation of threadlike particles // *Journal of Colloid Science*, 1959, V. 14, P. 457-472.
128. Hämäläinen J., Lindström S. B., Hämäläinen T., Niskanen H. Papermaking fibre-suspension flow simulations at multiple scales // *Journal of Engineering Mathematics*, 2011. V. 71, N 1, P. 55-79.
129. Ганиев О.Р., Гранова Г.Н., Звягин А.В., Украинский Л.Е. О возможности упорядочения направления волокон композита в тонком слое вязкой жидкости волновым воздействием. // *Материалы Международной научной конференции: Колебания и волны в механических системах*, 2017, С. 42-44.
130. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю., Украинский Л.Е. Волновое перемешивание в установках колебательного типа. // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2017. № 3. С. 5-10.
131. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю., Украинский Л.Е. Оптимизация пространственного расположения рабочих элементов в установках колебательного типа. // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2018. № 1. С. 3-8.
132. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю., Украинский Л.Е. Профилирование поверхностей рабочих элементов перемешивающих устройств. // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2019. № 3. С. 3-9.
133. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю., Украинский Л.Е. Влияние формы лопадки на эффективность перемешивания в установках колебательного типа. // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2019. № 2. С. 3-8.

134. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю., Украинский Л.Е. Волновое перемешивание в системе подвижных коаксиальных цилиндров. // Доклады Академии наук. 2019. Т. 486. № 1. С. 30-33.
135. Ганиев Р.Ф., Панин С.С., Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю., Украинский Л.Е. Численное моделирование процесса перемешивания в установках колебательного типа // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016). 25-31 мая 2016 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2016. 600 с. С. 69-70.
136. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю., Украинский Л.Е. Влияние пространственного расположения рабочих элементов на процесс волнового перемешивания в установках колебательного типа // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС'2017). 24-31 мая 2017 г., Алушта. – М.: МАИ-Принт, 2017. 816 с. С. 401-403.
137. Сухарев Т.Ю., Ревизников Д.Л., Украинский Л.Е. Моделирование динамики гибкого волокна в сдвиговом потоке // Материалы Международной научной конференции «Колебания и волны в механических системах». 21-23 ноября 2017 г., Москва. – М.: Столица, 2017. 168 с. С. 35.
138. Ганиев Р.Ф., Сухарев Т.Ю., Ревизников Д.Л., Украинский Л.Е. Математическое моделирование и оптимизация процессов перемешивания в установках колебательного типа. // Материалы Международной научной конференции «Колебания и волны в механических системах». 21-23 ноября 2017 г., Москва. – М.: Столица, 2017. 168 с. С. 33-34.
139. Сухарев Т.Ю., Ревизников Д.Л. Описание гидродинамических полей с использованием разложений по динамическим модам // Сборник научных трудов XII Международной летней научной школы-конференции, посвященной 155-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова. 2018. 24-29 июня 2018 г., Чебоксары. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. гос. ун-та, 2018. 268 с. С. 121-126.

140. Сухарев Т.Ю., Ревизников Д.Л., Украинский Л.Е. Компьютерное моделирование динамики гибкого волокна в жидкой среде. // Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018). 24-31 мая 2018 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2018. 768. С. 227-228.
141. Ганиев Р.Ф., Сухарев Т.Ю., Ревизников Д.Л., Украинский Л.Е. Численное моделирование волнового перемешивания в системе подвижных коаксиальных цилиндров // Сборник тезисов международной конференции, посвященной 80-летию Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения», 21-22 ноября 2018 г., Москва. – Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2018. 225 с. С. 53.