

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»

На правах рукописи



Жуков Виталий Владимирович

**Исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы, импульса
с учетом релаксационных явлений**

Специальность: 01.04.14 – Теплофизика и теоретическая теплотехника

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
доцент Кудинов И.В.

Самара – 2021

Оглавление

	Стр.
Общая характеристика работы.....	4
1. Обзор работ по избранному направлению исследований.....	11
2. Исследование условий теплового взрыва, инерции и локализации теплоты в нелинейных задачах теплопроводности с нелинейными источниками теплоты	19
2.1. Автомодельность, инерция и локализация теплоты в нелинейных задачах теплопроводности с нелинейными источниками теплоты...	19
2.2. Моделирование условий теплового взрыва в нелинейных задачах теплопроводности.....	28
2.3. Моделирование условий теплового взрыва в задачах теплопровод- ности с переменными физическими свойствами среды.....	36
3. Исследование внутренних механизмов переноса теплоты с учетом нелокальности реальных физических процессов	49
3.1. Математические модели теплопроводности с учетом пространст- венно – временной нелокальности.....	49
3.2. Разработка математической модели трехмерной теплопроводности с учетом релаксационных явлений.....	61
3.3. Идентификация коэффициентов теплоотдачи и релаксационных свойств среды.....	66
3.4. Аналогия локально – неравновесных математических моделей процессов переноса тепла, массы, импульса и электромагнитных колебаний	75
4. Математические модели динамической и квазистатической термо- упругости.....	78
4.1. Моделирование ударных волн напряжений и перемещений при тепловом ударе на поверхности материала	78
4.2. Наведение остаточных напряжений при термопластическом уп- рочнении пограничного слоя.....	87
5. Экспериментально – теоретические исследования продольных и поперечных колебаний стержня.....	94
5.1. Моделирование продольных колебаний стержня с учетом началь- ных ускорений.....	95
5.2. Математическое моделирование поперечных колебаний стержня...	102
5.3. Экспериментальные исследования продольных колебаний стержня...	110
5.4. Экспериментальные исследования поперечных колебаний стержня..	115
6. Исследование резонансных, бифуркационно – флаттерных и авто- колебательных процессов в газе	117

6.1. Разработка математической модели колебаний газа с учетом релаксационных явлений	117
6.2. Автоколебательные процессы в термоакустике	125
Заключение.....	134
Список литературы.....	136
Приложения.....	147

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Теплофизика – это наука, в которой теоретическими и экспериментальными методами исследуются свойства веществ в твердом, жидком и газообразном состоянии при протекании процессов тепло- и массообмена в широком диапазоне температур и давлений. Известные математические модели указанных процессов основаны на параболических уравнениях, выведенных на основе уравнений теплового и массового балансов с учетом эмпирических законов Фурье и Фика. При их выводе используются гипотезы о локальном термодинамическом равновесии и сплошности среды, согласно которым пренебрегается молекулярно – атомным строением вещества, то есть считается, что в областях пространственной и временной переменных, сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц (молекул, атомов, электронов, ионов, фононов), теплообмен происходит мгновенно, так как величинами, характеризующими релаксационные свойства веществ (время релаксации, характерный пространственный масштаб микроструктуры – длина свободного пробега микрочастиц), пренебрегается. В связи с чем, в классических моделях оказывается заложеной бесконечная скорость распространения потенциалов исследуемых полей и, следовательно, они не могут быть использованы для описания процессов переноса при малых и сверхмалых значениях временной и пространственной переменных (включая наноматериалы и нанопленки), а также для всех быстропротекающих процессов, время изменения которых сопоставимо с временем релаксации. Для описания таких процессов необходима разработка новых математических моделей, основанных на учете релаксационных свойств материалов, позволяющих учитывать конечную скорость распространения возмущений исследуемых величин.

Степень разработанности темы исследования

Разработаны математические модели локально-неравновесных процессов тепломассопереноса, колебаний твердых тел и газов, получены их аналитиче-

ские и численные решения, проведены сравнения с экспериментальными данными, на основе которых выполнена идентификация моделей.

Объектом исследования являются локально-неравновесные процессы переноса тепла, массы, импульса с учетом пространственно-временной нелокальности, протекающие в реальных технических устройствах.

Предметом исследования являются твердые, жидкие и газообразные среды, для которых создаются математические модели с учетом релаксационных явлений.

Целью работы является исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы, импульса на основе новых математических моделей, учитывающих пространственно – временную нелокальность реальных физических процессов.

Задачи работы

1. Моделирование условий инерции и локализации теплоты, характеризующих конечную скорость её распространения, в нелинейных задачах теплопроводности с нелинейными источниками теплоты.

2. Моделирование условий возникновения теплового взрыва (неограниченного возрастания температуры) в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды и зависящими от температуры источниками теплоты.

3. Исследование внутренних механизмов переноса теплоты с учетом нелокальности реальных физических процессов на основе локально – неравновесных моделей, учитывающих молекулярно – атомное строение веществ.

4. Разработка математической модели нестационарной трехмерной теплопроводности с учетом релаксационных явлений и программного обеспечения для исследования высокоскоростных процессов тепломассопереноса и термоупругости в технических объектах сложной геометрической формы.

5. Исследование причин и условий возникновения ударных волн напряжений и перемещений на основе локально – неравновесной модели несвязанной динамической термоупругости.

6. Математическое моделирование колебаний газа с учетом релаксационных явлений применительно к термоакустическим двигателям.

Научная новизна диссертационной работы

1. Получены новые данные о причинах и условиях возникновения автомодельности, инерции и локализации теплоты в нелинейных задачах теплопроводности с нелинейным источником теплоты, позволившие сделать вывод о связи между линейным гиперболическим и нелинейным параболическим дифференциальными операторами.

2. На основе определения дополнительных искомым функций и дополнительных граничных условий разработан приближенный аналитический метод решения нелинейных задач теплопроводности с нелинейным источником теплоты, получен критерий, позволяющий отделить стационарные процессы от процессов неограниченного возрастания температуры (теплового взрыва).

3. На основе локально – неравновесных математических моделей, включающих релаксационные свойства материалов (время релаксации, характерный пространственный масштаб микроструктуры) выполнены исследования внутренних механизмов переноса теплоты.

4. Разработана математическая модель несвязанной задачи динамической термоупругости с учётом пространственно – временной нелокальности в тепловой и динамической задачах, позволяющая выполнять исследования ударных волн напряжений и перемещений при воздействии на материалы мощных энергетических потоков.

5. Разработана математическая модель колебаний газа с учётом его релаксационных свойств, позволяющая выполнять исследования резонансных и би-

фуркационно – флаттерных колебаний (биений) при воздействии внешней тепловой и механической нагрузки.

6. Разработана математическая модель продольных колебаний стержня с учетом релаксационных явлений и выполнена ее верификация с использованием результатов экспериментальных исследований.

Теоретическая значимость результатов исследования. В диссертации впервые получены аналитические решения ряда краевых задач, описывающих процессы теплопроводности, теплового взрыва, колебаний упругих твёрдых тел и газов с учётом релаксационных явлений. Найденные решения, ввиду учёта релаксационных свойств материалов, являются наиболее приближенными к реальным физическим процессам и позволили получить некоторые новые, неизвестные ранее особенности их протекания.

Практическая значимость результатов исследования. Разработана компьютерная программа для решения нестационарных трёхмерных задач локально-неравновесной теплопроводности, которая позволяет определять значения температур и тепловых потоков при быстропротекающих процессах в телах сложной геометрической формы. Разработанные алгоритмы и комплексы программ, реализующие полученные в диссертации аналитические и численные решения краевых задач тепломассопереноса, использованы на предприятии РКЦ «Прогресс» при проектировании, доводке, испытаниях и эксплуатации изделий космической техники.

Методология и методы диссертационного исследования

В диссертации развивается новое научное направление, связанное с разработкой математических моделей локально – неравновесных процессов переноса тепла, массы, импульса с учетом релаксационных явлений. Вывод моделей основан на учете в эмпирических формулах законов Фурье и Гука скоростей и ускорений движущих сил (градиентов соответствующих величин) и их следствий (теплового потока и нормальных напряжений). Введение в эти формулы коэф-

фициентов релаксации позволяет учесть длину и время свободного пробега микрочастиц (электронов, ионов, атомов, фононов и др.). Для исследования полученных моделей разрабатываются методы получения их приближенных и точных аналитических решений, а также численные методы. При разработке аналитических методов используется новое направление, основанное на использовании дополнительных искомым функций и дополнительных граничных условий.

Достоверность результатов исследования обосновывается адекватностью разработанных моделей реальным процессам, происходящим в конкретных устройствах, на сопоставлении найденных решений с численными и экспериментальными данными, а также с точными решениями, приведенными в независимых источниках.

Положения, выносимые на защиту

1. Результаты многовариантных численных исследований нелинейных краевых задач с нелинейными источниками теплоты, позволившие заключить о возникновении автомодельности, инерции и локализации теплоты, обусловленные конечной скоростью её распространения.

2. Результаты исследований внутренних механизмов переноса теплоты с учётом нелокальности реальных физических процессов на основе локально – неравновесных математических моделей, учитывающих релаксационные свойства материалов.

3. Математическая модель нестационарной трёхмерной теплопроводности с учётом пространственно – временной нелокальности и результаты разработки программного комплекса 3D – моделирования высокоскоростных процессов теплопроводности и термоупругости с учётом релаксационных явлений для конструкций сложной геометрической формы.

4. Математическая модель несвязанной задачи динамической термоупругости с учётом пространственно – временной нелокальности в тепловой и дина-

мической задачах, позволяющая выполнять исследования ударных волн напряжений и перемещений при воздействии на материалы мощных энергетических потоков.

5. Результаты разработки математической модели продольных колебаний стержня с учетом релаксационных явлений и ее верификации на основе экспериментальных исследований.

6. Математическая модель колебаний газа с учётом его релаксационных свойств, позволяющая выполнять исследования резонансных и бифуркационно – флаттерных колебаний при воздействии внешней тепловой и механической нагрузки применительно к пневмо– и термоакустическим двигателям.

Вклад автора в проведенное исследование.

В теоретической части работы: разработка математических моделей локально-неравновесных процессов теплопроводности (в том числе для трехмерного случая), термоупругости, колебаний упругих тел и газов.

В расчётной части: разработка методов математического моделирования процессов теплопроводности, колебаний упругих тел и газов, написание алгоритмов, поиск решений, оценка достоверности полученных решений.

В экспериментальных исследованиях: постановка и выполнение экспериментальных исследований продольных и поперечных колебаний стержней, обработка и анализ экспериментальных данных, верификация разработанных математических моделей.

Апробация полученных в диссертации результатов. Наиболее важные положения диссертации были доложены и обсуждены на Десятой Всероссийской конференции с Международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2016 г.); XXIX Международной конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ – 29» (Самара, 2016 г.); X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого

тела (Самара, 2017); Седьмой Российской национальной конференции по теплообмену (Москва, 2018 г.).

Связь диссертации с государственными программами научных исследований. Исследования выполнялись в соответствии с Аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы» по тематическому плану НИР № 551/02, при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № FSSS-2020-0019), по грантам РНФ (проект № 18 – 79 – 00171) и РФФИ (проект № 20-38-70021).

Внедрение результатов работы. Результаты диссертации были использованы при проведении хоздоговорных работ с Волжской территориальной генерирующей компанией, а также в РКЦ «Прогресс». Экономический эффект, подтвержденный актами о внедрении, приведёнными в приложениях диссертации, составляет 1,2 млн. руб.

Публикации по теме диссертации. По теме диссертации опубликовано 16 работ, из них 15 работ являются публикациями в рецензируемых научных изданиях и публикациями, приравненными к ним.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, шести глав, выводов, списка используемой литературы, приложений; изложена на 146 страницах основного текста, содержит 92 рисунков. Список литературы включает 108 наименований.

1. Обзор работ по избранному направлению исследований

В настоящее время для многих сложных нелинейных краевых задач точные решения не найдены. Для задач с переменными свойствами и граничными условиями и др. известные решения представляют сложные, плохо сходящиеся ряды. Математические модели с учетом релаксационных свойств материалов особый интерес представляют при исследовании процессов тепломассопереноса, динамической термоупругости, колебательных и автоколебательных процессов в изделиях авиационной и космической техники, работающих в экстремальных условиях. Однако получение их аналитических решений представляет существенные трудности ввиду высокого порядка производных, содержащихся в дифференциальных уравнениях.

Применительно к решению краевых задач используются следующие методы: классические аналитические – Фурье, функций Грина [8, 20, 30, 49, 60]; интегральных преобразований (Ханкеля, Лапласа, Лежандра) и др. [20,49]; приближенные аналитические – Ритца, Бубнова - Галеркина; Л. В. Канторовича [17, 30, 31]; интегральный метод теплового баланса и др. [5, 9, 25, 29, 35, 37 – 39]. Известны методы совместного использования методов Фурье или интегральных преобразований с методом Бубнова – Галеркина [30, 31, 65, 66].

Классические аналитические решения состоят из бесконечных рядов, содержащих функции Бесселя (для цилиндрических координат), неудобство которых в том, что они представляют вид двойного (или тройного) ряда. Поэтому, возникает необходимость разработки более эффективных методов, среди которых известны вариационные, взвешенных невязок, теплового баланса и др. Эти методы могут быть применены к широкому кругу линейных и нелинейных задач. Однако, их общим недостатком является малая точность, что связано с необходимостью решения больших систем алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами. Кроме того, например, в методе Л. В. Канторовича увеличение числа приближений приводит к большим системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Собственные числа здесь определяются из трансцендентных (или степенных) уравнений, решения которых не представ-

ляются общей формулой. Использование классических методов совместно с методами взвешенных невязок приводит к решениям, не содержащим функции Бесселя. Однако с увеличением числа приближений точность решений может быть недостаточной из-за плохой обусловленности матриц.

В интегральном методе теплового баланса процесс теплопроводности представляется в виде двух стадий, что позволяет сводить уравнение в частных производных к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. Однако этот метод имеет малую точность. Причина заключается в трудностях увеличения количества приближений из-за отсутствия краевых условий, из которых находятся неизвестные коэффициенты. В работах [25 – 31, 33, 35, 37 – 39, 41, 56, 57] повышение точности интегрального метода связано с использованием дополнительных граничных условий. Основная цель их определения в том, что при их выполнении выполняется уравнение на границе, что, как показывают выполненные исследования, приводит к его удовлетворению и внутри области. Кроме того, дополнительные условия приводят решения к разреженным матрицам, для которых не возникает проблем их плохой обусловленности.

Классическая термодинамика базируется на допущениях о локальном равновесии и сплошности - полагается, что в малых элементах среды мгновенно устанавливается локальное равновесие, в то время как во всей системе имеются градиенты потенциалов [54, 55, 93 – 95]. Допущение локального равновесия справедливо лишь для времени, существенно бóльшего времени релаксации и для величин макромасштаба, намного бóльших микромасштаба системы. Из этих допущений следует, что законы переноса выполняются для любой малой части системы. Для этих систем в интегральных законах сохранения энергии выполняется предельный переход и в результате выводятся дифференциальные уравнения. Таким образом получают классические параболические уравнения, которые являются локальными, из-за неучета в них релаксационных явлений.

Решению проблемы получения уравнений, описывающих конечную скорость переноса тепла, посвящены публикации [4, 25, 32 – 36, 40, 43, 49, 66, 54,

55, 76, 91 – 95]. Потребность их вывода связана с парадоксами классических параболических уравнений, вывод которого основан на формуле Фурье, в котором отсутствует время и, в связи с чем, изменение градиента температуры приводит к мгновенному изменению теплового потока. Так, уже при выводе этого уравнения закладывается бесконечная скорость переноса.

Учёт релаксационных свойств позволяет получать модели с конечной скоростью переноса теплоты, что связано с инерционностью описываемых этими моделями процессов, то есть с учётом запаздывания (однофазного или двухфазного). Исследование таких моделей позволяет заключить, что в реальных процессах граничные условия 1-го рода не могут приниматься мгновенно, а лишь в течение некоторого диапазона времени.

Наряду с получением гиперболических уравнений теплопроводности, позволяющих описывать распространение теплоты с конечной скоростью, существует еще один путь расширения класса решений параболического уравнения, рассматривая нелинейный оператор при зависимости теплопроводности от температуры [11, 21, 22, 44, 50, 58]. При решении таких задач обнаруживаются явления автомодельности, инерции и локализации теплоты, что свидетельствует о конечной скорости распространения теплоты и, следовательно, обнаруживается связь между линейным гиперболическим и нелинейным параболическим операторами. Существование такой связи математически обосновывается в работе [69].

Физически эту связь можно объяснить тем, что с изменением температуры изменяются длина и время свободного пробега микрочастиц. Следовательно, принимая свойства среды переменными от температуры, выполняется учет влияния её релаксационных свойств на процесс переноса теплоты.

При большой интенсивности изменения температуры напряжения зависят от их предшествующего распределения. Время становится независимой переменной и в уравнениях термоупругости возникают слагаемые, связанные с изменением напряжений от времени. Сопряжение полей деформаций и температур использовали Ж.-М. К Дюамель, Дж. Ф. Нейман, В. Фойхт, Г. Джеффрис,

В.И. Даниловская, Б. Боли, Мур, Стернберг, Чакраворти, В. Новацкий, Игначак, Ю.М. Коляно, Я.С. Подстригач, Г. Паркус, А. Д. Коваленко, Э.М. Карташов и др. [8, 11, 23, 51, 69]. Важно отметить, что практически во всех случаях механики следовали за теплофизиками по мере усложнения моделей теплопроводности, среди которых можно отметить феноменологии: Фурье, Каттанео – Вернотта – Лыкова, среды с тепловой памятью, с двухфазным запаздыванием и др. При этом определяющие соотношения термомеханики не изменялись – изменялись (точнее усложнялись) лишь температурные функции, а, следовательно, и все последующие расчёты.

Новый уровень развития теории термических напряжений, связанный с изменением определяющих соотношений термомеханики посредством учёта двухфазного запаздывания (напряжений и деформаций), представляют материалы, полученные в работе [25]. В определяющие уравнения термомеханики вводятся новые слагаемые, учитывающие релаксационные свойства напряжений через коэффициенты релаксации. Кроме того, в температурном слагаемом уравнения динамической термоупругости также учтено двухфазное запаздывание – теплового потока и градиента температуры. Данное уравнение учитывает перекрёстные эффекты, связанные с одновременным проявлением временной и пространственной неравновесности и их совместное влияние на термомеханическую реакцию упругой области при тепловом ударе. Подобного вида уравнения в известной литературе, включая современные публикации, не обнаружены.

Применительно к новому уравнению динамической термоупругости формулируется задача для пластины и находится её точное решение в виде бесконечного ряда. Детальное исследование полученного решения позволило обнаружить ряд интересных фактов, раскрывающих особенности термомеханики в новых теплофизических и термомеханических условиях. И, в частности, было показано, что при тепловом ударе на границе пластины внутри неё возникают высокочастотные колебания в результате движущихся от поверхностей механических волн со скоростью звука в данном теле – определена также и частота ко-

лебаний. Возможность возбуждения подобных колебаний была впервые установлена теоретическими исследованиями В. Боли и Барбера (1957 г.), Крауса (1966 г.)

Теория колебаний и волн является наукой, изучающей колебательные и волновые процессы, независимо от их физической природы. Под колебательными процессами понимаются периодические движения тел, около положения устойчивого равновесия (математический, физический, пружинный и др. маятники). Систему, совершающую колебательное движение, называют ещё осциллятором.

Распространение волн в различных средах описывается волновым уравнением [7, 8, 16, 60]. Получение его точных аналитических решений при внешней нагрузке представляет существенные трудности [7, 8, 16, 69]. Решений задач, описывающих конечную скорость переноса импульса, в литературе не обнаружено. Но, как показано в данной работе, учет релаксационных явлений позволяет устранить проблему скачкообразного изменения искомых функций, (напряжения, температуры, перемещения и проч.), возникающего из-за того, что формулы классических эмпирических законов (Фурье, Фика, Гука, Ньютона, Ома и др.) описывают бесконечные скорости переноса. Учёт конечной скорости приводит к существенному изменению закономерностей протекания указанных процессов, максимально приближая их к протеканию реальных физических процессов.

Между колебательными и волновыми движениями существуют общие закономерности, не зависящие от конкретного вида колеблющихся систем. Зная эти закономерности, можно предсказывать физические явления в различных областях науки. Ввиду аналогии колебательных и волновых процессов возникла самостоятельная наука, называемая теорией колебаний и волн. Предметом исследования этой науки является динамическая система, для описания которой создается набор правил (алгоритм). Наиболее часто изменение параметров динамической системы описывается дифференциальными, интегральными или конечно – разностными уравнениями. Следовательно, теория колебаний и волн

изучает не конкретные физические системы, а их абстрактные математические модели.

Колебательные процессы можно разделить на три группы: свободные или собственные (происходят в системах, не содержащих источников энергии); вынужденные (происходят под действием внешней нагрузки); самовозбуждающиеся или автоколебания, при которых колеблющаяся система, называемая автоколебательной, самостоятельно регулирует поступление энергии от внешнего непериодического источника, причём в таком количестве, чтобы процесс колебаний был незатухающим. К самовозбуждающимся колебаниям относятся: фрикционные, флаттерные, колебания в часах с анкерным механизмом, термоакустические и др.

Непериодический (постоянный) источник внешней энергии может вызвать незатухающие колебания лишь в случае, когда колеблющаяся система будет периодически прерывать или изменять поступление внешней энергии так, чтобы совершаемая ею общая работа была положительной. Следовательно, эта энергия должна действовать в направлении движения тела. При изменении направления движения колеблющегося тела внешняя энергия должна отключаться от системы, чтобы избежать совершения отрицательной работы, под которой понимается передача энергии от колеблющегося тела к источнику внешней энергии. Примером отрицательной работы является так называемое отрицательное трение (отрицательное сопротивление), возникающее при колебаниях закрепленного на пружине груза, расположенного на ленте движущегося транспортера и др. Известны также автоколебательные системы с инерционным возбуждением. Механизмом возбуждения автоколебаний является здесь инерционное взаимодействие между колебательной системой и регулирующим устройством (обратная связь), исключаящим передачу энергии от колеблющегося тела к внешнему источнику.

Таким образом, автоколебательной является система, в которой совершаются незатухающие периодические колебания от действия непериодического источника энергии. Подобная система включает: непериодический источник; ко-

лебательную систему; устройство, регулирующее поступление энергии в колебательную систему от источника энергии. Автоколебания в такой системе могут возникать только при наличии обратной связи между колебательной системой и регулирующим устройством. Регулирующая система управляет движением колебательной системы, которая, в свою очередь, через обратную связь управляет работой регулирующего устройства и таким путем осуществляется самоуправление работой колебательной системы.

Инерционное взаимодействие наряду с отрицательным трением, может быть линейным и нелинейным. Линейное взаимодействие может приводить к самовозбуждению, нелинейное – лишь к жесткому возбуждению, которое возникает лишь в случае, когда системе сообщается начальный импульс конечной величины [7, 45].

Конкретным примером системы с инерционным возбуждением является резонатор Гельмгольца с неравномерно нагретыми стенками, относящийся к классу термомеханических систем. Термомеханической (термоакустической) называется система, содержащая механический колебательный элемент, колебания которого возбуждаются тепловым источником. Ввиду того, что источник теплоты в резонаторе Гельмгольца не является периодическим, то его можно отнести к автоколебательной системе с инерционным самовозбуждением [46].

Важность выполнения исследований таких систем связана термоакустическими двигателями, представляющими устройства для преобразования теплоты в энергию акустических колебаний [10, 14]. В сравнении с поршневыми двигателями они имеют минимум движущихся деталей и представляют заполненный газом канал с теплообменником. Описание рабочих процессов термоакустических двигателей сводится в основном к рассмотрению стационарных режимов работы. Однако важным является исследование запуска двигателей. Так как подобные двигатели представляют автоколебательные системы, то большой интерес представляет нахождение условий, при которых двигатели будут работать в режиме автоколебаний при неколебательном характере их источника, каковым здесь является постоянной мощности источник теплоты.

По результатам обзора следуют выводы:

1. Несмотря на большое число моделей, в настоящее время отсутствует единая непротиворечивая теория локально – неравновесных процессов. В известных теориях недостаточно представлены результаты детальных исследований и теоретических обоснований получаемых результатов и, к тому же, результаты известных теорий между собой, обычно, не согласуются. Поэтому, наряду с совершенствованием известных моделей, необходима разработка новых теорий процессов переноса с учетом пространственно – временной нелокальности.

2. Одним из путей расширения класса решений параболического оператора теплопроводности является рассмотрение его нелинейного оператора в предположении зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Наблюдаемые при этом явления автомодельности, инерции и локализации теплоты пока еще недостаточно исследованы и теоретически обоснованы.

3. Применительно к решению нелинейных задач большой интерес представляют приближенные аналитические методы, среди которых наиболее эффективны ортогональные методы взвешенных невязок. Однако их использование сдерживается проблемой, связанной с недостаточной точностью получаемых результатов. В этом направлении представляются весьма эффективными методы, в которых используются дополнительные функции и граничные условия.

4. Применительно к динамическим задачам термоупругости в известной литературе недостаточно рассмотрены вопросы получения определяющих дифференциальных уравнений с учетом релаксационных явлений как в термоупругой, так и в температурной задачах. В работе [25] показано, что при выводе дифференциальных уравнений динамической термоупругости необходимо использовать модифицированные законы Гука и Фурье. Применительно к решению динамических задач термоупругости в известной литературе приводятся математические постановки краевых задач в напряжениях – решения краевых задач в перемещениях отсутствуют. Отсутствуют также детальные исследова-

ния механических колебаний, возникающих при воздействии теплового удара на поверхности конструкции – в известной литературе отмечается лишь возможность возбуждения подобных колебаний.

5. По автоколебательным процессам известны многочисленные данные, относящиеся к выводу описывающих их дифференциальных уравнений. Однако недостаточно изучены вопросы, связанные с их решением и детальным исследованием полученных решений. Кроме того, отсутствуют данные, связанные с исследованием колебательных процессов в газах с учетом релаксационных явлений.

2. Исследование условий теплового взрыва, инерции и локализации теплоты в нелинейных задачах теплопроводности с нелинейными источниками теплоты

2.1. Авто модельность, инерция и локализация теплоты в нелинейных задачах теплопроводности с нелинейными источниками теплоты

В последнее время большую актуальность приобретают вопросы получения аналитических решений нелинейных краевых задач, в которых учитывается зависимость основных физических свойств рассматриваемых объектов от каких-либо параметров (температуры, координаты, времени и др.). Необходимость исследования нелинейных краевых задач обусловлена применением в технике высокоинтенсивных тепловых процессов в широком диапазоне температур, что приводит к изменению зависящих от температуры физических свойств среды ввиду их зависимости от температуры. Её неучёт приводит к существенному отличию математических моделей от реальных процессов. В случае, когда наряду с нелинейностью теплофизических свойств следует также учитывать температурозависящие источники теплоты, математические постановки задач намного усложняются. Отметим, что необходимость решения подобных задач возникает при исследовании многих физических процессов: теплообмен в плазме, тепловое воспламенение и взрыв (химическая кинетика), распространение эпидемий, экологические процессы и др. В работах, посвященных исследо-

ванию таких задач [12, 21, 22, 44, 50, 58, 68], отмечаются следующие особенности их решений: автомодельность (самоподобие); инерция и локализация теплоты; конечная скорость её распространения; неограниченное увеличение температуры (тепловое воспламенение (в химической реакции), тепловой взрыв (источники от электромагнитного поля, высокочастотных колебаний и проч.)). Однако во многих работах исследование выполнено для задачи Коши либо для полупространства, что не позволяет оценить влияние граничных краевых условий на процесс теплообмена. В связи с чем, рассмотрим нелинейную задачу для пластины при экспоненциальной зависимости температуропроводности и источника теплоты от температуры в следующей постановке

$$c\rho \frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(t) \frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x} \right] + \omega(t), \quad (\tau > 0; 0 < x < \delta); \quad (2.1)$$

$$t(x,0) = t_0; \quad (2.2) \quad t(0,\tau) = t_{ct}; \quad (2.3) \quad \partial t(\delta,\tau)/\partial x = 0, \quad (2.4)$$

где t – температура, K ; x – координата, m ; τ – время, s ; $\lambda(t)$ – коэффициент теплопроводности, $Bm/(m \cdot K)$; c – теплоемкость, $Dж/(кг \cdot K)$; ρ – плотность, $кг/м^3$; $\omega(t)$ – мощность источника теплоты, $Bm/м^3$; δ – половина толщины пластины, m ; t_0 – начальная температура, K ; t_{ct} – температура стенки, K .

Предположим, что $\lambda(t)$ и $\omega(t)$ описываются экспоненциальными функциями вида

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{\beta(t-t_0)}; \quad (2.5) \quad \omega(t) = \omega_0 e^{\gamma(t-t_0)}, \quad (2.6)$$

где λ_0 , $(Bm/(m \cdot K))$ – коэффициент теплопроводности при температуре $t = t_0$; ω_0 , $(Bm/м^3)$ – мощность источника теплоты при температуре $t = t_0$; β , $(1/K)$; γ , $(1/K)$ – константы, характеризующие интенсивность изменения λ и ω от температуры.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{t - t_0}{t_{ct} - t_0}; \quad Fo = \frac{a_0 \tau}{\delta^2}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad Po = \frac{\omega_0 \delta^2}{\lambda_0 \Delta t}; \quad \lambda_0 = c\rho a_0; \quad \Delta t = t_{ct} - t_0, \quad (2.7)$$

где Θ , ξ , Fo – безразмерные температура, координата, время (число Фурье); Ro – число Померанцева.

Постановка задачи принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^{\beta \Delta t \Theta(\xi, Fo)} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right) + Ro e^{\gamma \Delta t \Theta(\xi, Fo)}, \quad (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (2.8)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (2.9) \quad \Theta(0, Fo) = 1; \quad (2.10) \quad \partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (2.11)$$

Для решения задачи (2.8) – (2.11) численным методом введем конечно-разностную сетку (рис. 2.1)

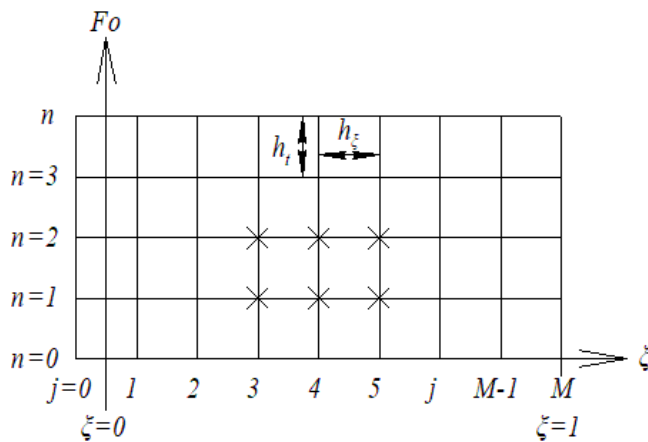


Рис. 2.1. Конечно-разностная сетка и шаблон (крестики) в расчётной области

Для конечно-разностной аппроксимации задачи (2.8) – (2.11) используем шеститочечный шаблон и схему с весами σ [15]. Уравнение (2.8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_j^{n+1} - \Theta_j^n}{h_t} = e^{\beta \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1})} & \left[\beta \Delta t \left(\sigma \frac{\Theta_{j+1}^n - \Theta_{j-1}^n}{2h_\xi} + (1-\sigma) \frac{\Theta_{j+1}^{n+1} - \Theta_{j-1}^{n+1}}{2h_\xi} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \sigma \frac{\Theta_{j+1}^n - 2\Theta_j^n + \Theta_{j-1}^n}{h_\xi^2} + (1-\sigma) \frac{\Theta_{j+1}^{n+1} - 2\Theta_j^{n+1} + \Theta_{j-1}^{n+1}}{h_\xi^2} \right] - Ro e^{\gamma \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1})}; \quad (2.12) \\ & (n = 0, 1, 2, \dots; j = 1 \dots M - 1). \end{aligned}$$

Соотношение (2.12) аппроксимирует (2.8) с порядком $O(h_\xi^2 + h_t^2)$, если принимается схема Кранка – Никольсона ($\sigma = 1/2$), и с порядком $O(h_\xi^2 + h_t)$, если $\sigma \neq 1/2$. Аппроксимации начального условия (2.9) и условия (2.10) записываются точно. За счет специального выбора узлов сетки (граница области рас-

положена посередине между последним и предпоследним узлами) аппроксимация с порядком $O(h_\xi^2)$ краевого условия (2.11) значительно упрощается. Отсюда условия (2.9) – (2.11) принимают вид

$$\Theta_j^0 = 0 ; j = 0 \dots M ; \quad (2.13)$$

$$\Theta_0^{n+1} = 1 ; n = 0, 1, 2 \dots ; \quad (2.14)$$

$$\Theta_M^{n+1} = \Theta_{M-1}^{n+1} ; n = 0, 1, 2 \dots . \quad (2.15)$$

Так как уравнение (2.12) является нелинейным, то для его решения будем использовать метод итераций. Применяя метод простой итерации, уравнение (2.12) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\Theta_{j-1}^{n+1}[k+1]$, $\Theta_j^{n+1}[k+1]$, $\Theta_{j+1}^{n+1}[k+1]$, имеющая

$$a_j \Theta_{j-1}^{n+1}[k+1] - c_j \Theta_j^{n+1}[k+1] + b_j \Theta_{j+1}^{n+1}[k+1] = -f_j ;$$

$$(n = 0, 1, 2 \dots ; j = 1 \dots M - 1), \quad (2.16)$$

где

$$a_j = e^{\beta \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1}[k])} \left(-\beta \Delta t \left[\frac{\sigma(1-\sigma)}{2h_\xi^2} (\Theta_{j+1}^n - \Theta_{j-1}^n) + \left(\frac{1-\sigma}{2h_\xi} \right)^2 (\Theta_{j+1}^{n+1}[k] - \Theta_{j-1}^{n+1}[k]) \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{1-\sigma}{h_\xi^2} \right) \right); \quad b_j = e^{\beta \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1}[k])} \left(\beta \Delta t \left[\frac{\sigma(1-\sigma)}{2h_\xi^2} (\Theta_{j+1}^n - \Theta_{j-1}^n) + \left(\frac{1-\sigma}{2h_\xi} \right)^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\Theta_{j+1}^{n+1}[k] - \Theta_{j-1}^{n+1}[k]) \right] + \left(\frac{1-\sigma}{h_\xi^2} \right) \right); \quad c_j = + \frac{1}{h_t} + \frac{2(1-\sigma)}{h_\xi^2} e^{\beta \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1}[k])} ;$$

$$f_j = \frac{\Theta_j^n}{h_t} + e^{\beta \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1}[k])} \left(\beta \Delta t \left(\frac{\sigma}{2h_\xi} \right)^2 (\Theta_{j+1}^n - \Theta_{j-1}^n)^2 + \left(\frac{\sigma}{h_\xi^2} \right) (\Theta_{j+1}^n - 2\Theta_j^n + \Theta_{j-1}^n) \right) + \\ + \text{Poe}^{\gamma \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1}[k])} .$$

Система уравнений (2.16) решается методом прогонки. Контроль решения системы (2.12) – (2.15) по методу простых итераций осуществляется решением соответствующей неявной задачи по методу Ньютона, отличающегося повы-

шенными математическими трудностями, но, имеющего преимущество в скорости сходимости и надежности [15].

Исходные данные для расчета приняты следующими: $t_{\text{ст}} = 373 \text{ K}$; $t_0 = 293 \text{ K}$; $\lambda_0 = 40 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $\delta = 0,02 \text{ м}$; $\omega_0 = 100 \text{ Вт}/\text{м}^3$. Исследования выполнялись для двух значений β ($\beta = 0,01 / \text{К}$ и $\beta = 0,1 / \text{К}$). Для каждого из значений β находились коэффициенты γ , приводящие к стационарному режиму и к неограниченному возрастанию температуры.

Расчёты даны на рис. 2.2 – 2.14, из которых видно, что при $\beta = 0,01 / \text{К}$ величина коэффициента γ , не приводящая к тепловому взрыву, должна быть $\gamma < 0,1216 / \text{К}$ (рис. 2.2 – 2.4). В частности, при $\gamma = 0,1216 / \text{К}$ стационарный режим наблюдается при $Fo \approx 5$. Максимальная температура имеет место в центре пластины ($\xi = 1$) и составляет $\Theta \approx 1,12$ (рис. 2.2, 2.4). На рис. 2.3 приведены расчёты для малых и сверхмалых времен ($10^{-7} \leq Fo \leq 0,75$), из которых следует, что в диапазоне $10^{-7} \leq Fo \leq 0,02$ влияние граничного условия 1 – го рода (2.10) в каждый момент начального времени распространяется лишь на некоторую глубину, за пределами которой температура изменяется лишь от внутреннего источника теплоты. То есть это влияние происходит не мгновенно, а в виде движущегося по координате ξ фронта возмущения, отделяющего возмущённую и невозмущённую части пластины, несмотря на то, что решается параболическое уравнение. При $Fo = 0,75$ температура пластины по всей её толщине равна заданной граничным условием (2.10) температуре $\Theta = 1$ (рис. 2.2 – 2.4).

Для всех $\gamma \geq 0,13 / \text{К}$ (при $\beta = 0,01 / \text{К}$) происходит неограниченное увеличение температуры (тепловой взрыв). И, в частности, при $\gamma = 0,13 / \text{К}$ тепловой взрыв наблюдается при $Fo > 1,00262$ (рис. 2.5, 2.6). С увеличением γ зона неограниченного возрастания температуры смещается к точке $\xi = 0$. И, в частности, при $\gamma = 0,17 / \text{К}$ тепловой взрыв происходит при $Fo > 0,2883$ в окрестности точки $\xi \approx 0,17$ (рис. 2.7, 2.8).

С увеличением β тепловой взрыв наблюдается при бóльших γ и за более короткое время (рис. 2.9 – 2.14). Так, при $\beta = 0,1 / K$ для всех $\gamma < 0,25 / K$ тепловой взрыв отсутствует (рис. 2.9 – 2.11). Причём, для всех γ этого диапазона стационарное состояние устанавливается при $\Theta = 1$. Следовательно, при существенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, установление стационарного состояния происходит при одинаковой по всей толщине пластины температуре и равной температуре, задаваемой граничным условием 1 – го рода (рис. 2.9 – 2.11). При этом выделяются области времени и пространственной переменной, где происходит локализация теплоты и автомодельное (самоподобное) изменение температуры. Так, при $\beta = 0,1 / K$ и $\gamma = 0,159 / K$ (рис. 2.10) происходит движение температурного фронта, за пределами которого температура, являясь постоянной по толщине пластины, изменяется лишь от внутреннего источника теплоты. Причём, температура до фронта возмущения изменяется практически по одинаковой закономерности (автомодельное изменение температуры). Диапазон координаты, в котором происходит изменение температуры, в пределах $10^{-8} \leq \Theta \leq 0,1$ с течением времени остаётся практически неизменным. Температура пластины до указанного движущегося диапазона по координате ξ остаётся неизменной и равной температуре $\Theta = 1$, задаваемой условием 1 – го рода. При достижении фронтом возмущения координаты $\xi = 1$, температура по всей толщине пластины устанавливается равной температуре граничного условия 1 – го рода $\Theta = 1$.

Вариант неограниченного возрастания температуры при $\beta = 0,1 / K$ и $\gamma = 0,25 / K$ представлен на рис. 2.12 – 2.14. И, в частности, тепловой взрыв происходит при $Fo > 3,6 \cdot 10^{-4}$ в области координаты $\xi \approx 0,22$. Здесь также обнаруживается движущийся фронт температурного возмущения ($0 \leq Fo < 3,6 \cdot 10^{-4}$), локализация теплоты и автомодельное изменение температуры (рис. 2.14). Отличие лишь в том, что температура на фронте в некоторый момент времени начинает превышать температуру $\Theta = 1$, заданную граничным условием, хотя

фронт возмущения ещё не достигает центра пластины ($\xi = 1,0$). В связи с чем, тепловой взрыв происходит не в точке $\xi = 1$, а в некоторой точке ($\xi \approx 0,22$) (рис. 2.12).

Обсуждение результатов

Анализ результатов исследований показал, что для каждой величины коэффициента β , учитывающего изменение коэффициента теплопроводности от температуры, наблюдается предельная величина γ , отделяющая стационарные режимы от режимов неограниченного увеличения температуры (теплого взрыва). В обоих режимах наблюдаются автомодельность, инерция и локализация теплоты в определенной области пространства, за пределами которой температура не изменяется с течением времени. Отмечается наличие движущегося фронта температурного возмущения, отделяющего возмущённую область от области, изменение температуры в которой обусловлено лишь внутренним источником теплоты. Показано, что с увеличением коэффициента β коэффициент γ , отделяющий взрывные и невзрывные режимы, возрастает, а время достижения неограниченного возрастания температуры уменьшается.

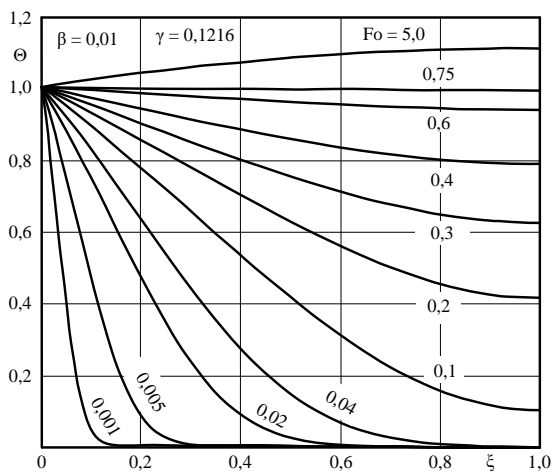


Рис. 2.2. Изменение температуры.
Тепловой взрыв отсутствует

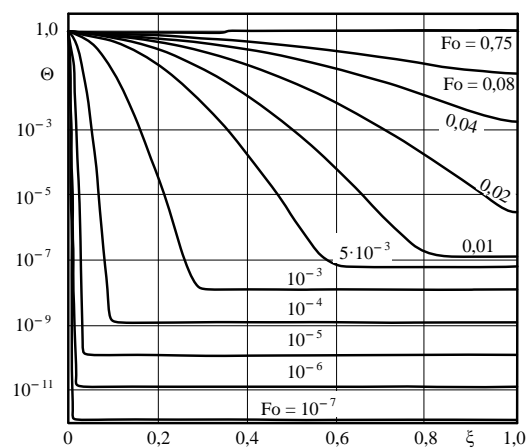


Рис. 2.3. Изменение температуры ($\beta = 0,01$;
 $\gamma = 0,1216$). Тепловой взрыв отсутствует

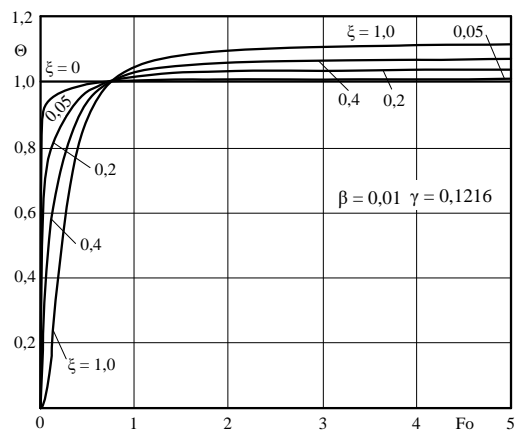


Рис. 2.4. Изменение температуры. Тепловой взрыв отсутствует

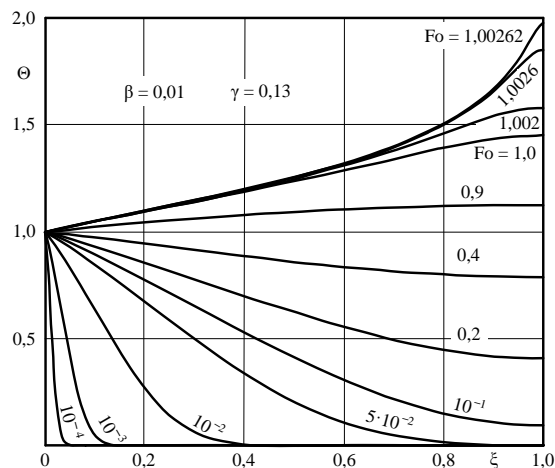


Рис. 2.5. Изменение температуры. Тепловой взрыв при $Fo > 1,00262$ ($\xi = 1,0$)

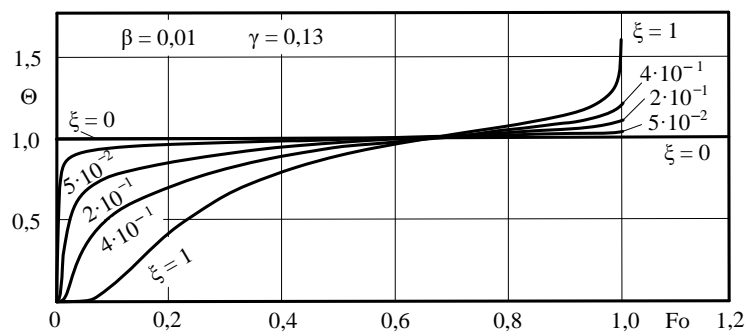


Рис.2.6. Изменение температуры. Тепловой взрыв при $Fo > 1,00262$ ($\xi = 1,0$)

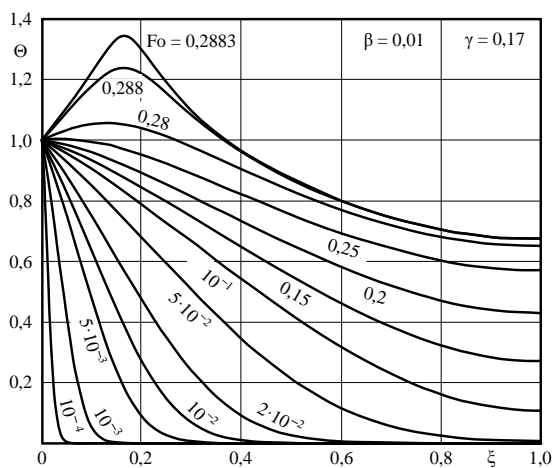


Рис. 2.7. Изменение температуры. Тепловой взрыв при $Fo > 0,2883$ ($\xi \approx 0,17$)

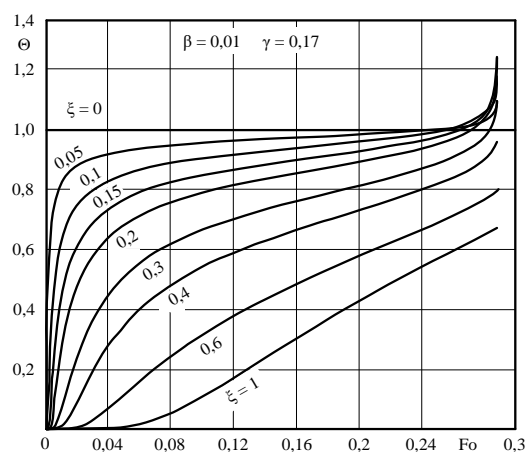


Рис. 2.8. Изменение температуры. Тепловой взрыв при $Fo > 0,2883$ ($\xi \approx 0,17$)

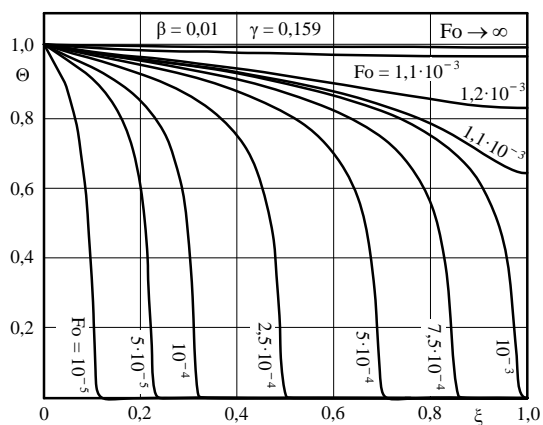


Рис. 2.9. Изменение температуры.
Тепловой взрыв отсутствует

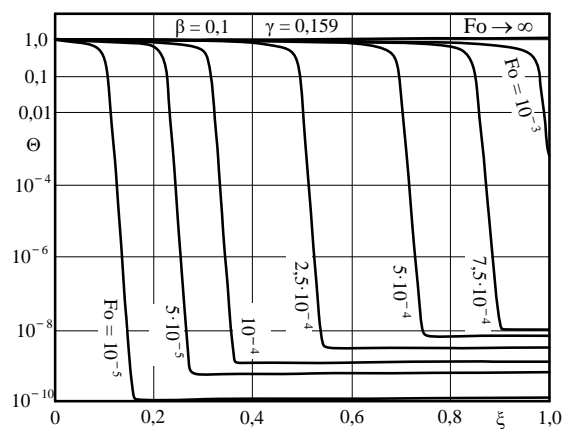


Рис. 2.10. Изменение температуры.
Тепловой взрыв отсутствует

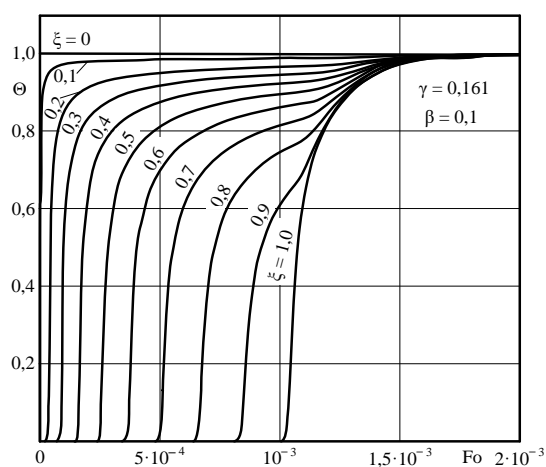


Рис. 2.11. Изменение температуры.
Тепловой взрыв отсутствует

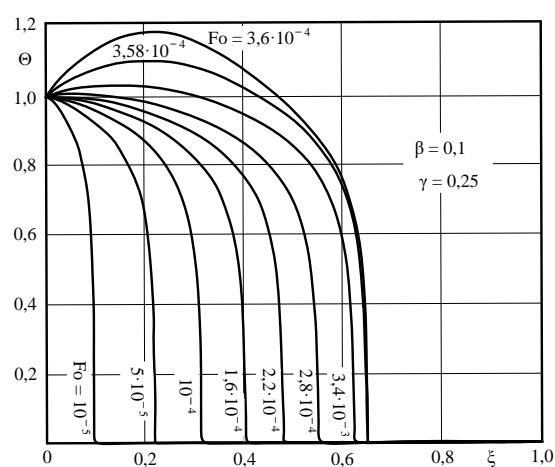


Рис. 2.12. Изменение температуры. Тепло-
вой взрыв при $Fo > 3,6 \cdot 10^{-4}$ ($\xi \approx 0,22$). Ав-
томодельное изменение температуры
($0 \leq \xi \leq 0,4$; $0 \leq Fo \leq 3,6 \cdot 10^{-4}$)

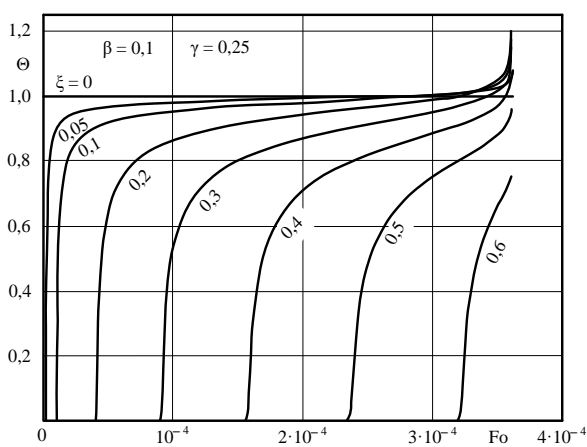


Рис. 2.13. Изменение температуры. Тепло-
вой взрыв при $Fo > 3,6 \cdot 10^{-4}$ ($\xi \approx 0,22$)

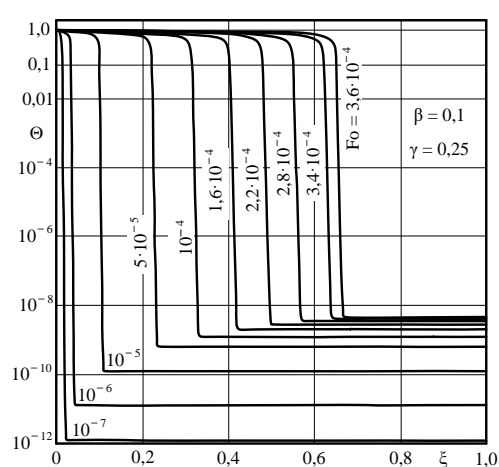


Рис. 2.14. Изменение температуры. Тепло-
вой взрыв при $Fo > 3,6 \cdot 10^{-4}$ ($\xi \approx 0,22$)

2.2. Моделирование условий теплового взрыва в нелинейных задачах теплопроводности

Выше (см. п. 2.1.) приведены результаты численных исследований нелинейной задачи теплопроводности с нелинейным источником теплоты при экспоненциальном изменении коэффициента теплопроводности и источника теплоты от температуры. Получение аналитических решений таких задач не представляется возможным. Однако, если принять зависимость $\lambda(T)$ и $\omega(T)$ в виде линейных функций температуры, то можно получить приближенное решение. В работах [25 – 29, 37 – 39, 41, 56, 57] рассматривается эффективное направление получения приближенных аналитических решений сложнейших задач, основанное на введении дополнительных искомых функций (ДИФ) и дополнительных граничных условий (ДГУ). Целью введения ДИФ является сведение задачи к интегрированию обыкновенного уравнения. ДГУ принимаются так, чтобы их удовлетворение было равносильно выполнению уравнения на границах области. В работах [37, 61] есть доказательства теорем, свидетельствующих о том, что, выполняя уравнение на границе, происходит удовлетворение и внутри области.

В качестве примера рассмотрим нелинейную задачу для пластины с нелинейным источником теплоты

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(T) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \right] + \frac{\omega(T)}{c\rho}; \quad (t > 0; 0 < x < \delta); \quad (2.17)$$

$$T(x,0) = T_0; \quad (2.18) \quad T(0,t) = T_{\text{ст}}; \quad (2.19) \quad \partial T(\delta,t) / \partial x = 0, \quad (2.20)$$

где T – температура, K ; x – координата, m ; t – время, s ; a_0 – температуропроводность при $T = T_0$, m^2 / c ; c – теплоемкость, $(Дж / (кг \cdot K))$; ρ – плотность, $кг / m^3$; T_0 – начальная температура, K ; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки, K ; δ – половина толщины пластины, m ; ω – мощность внутренних источников теплоты, $Вт / m^3$.

Рассмотрим решение задачи (2.17) – (2.20), когда коэффициент температуропроводности и источник теплоты представлены линейными функциями температуры

$$a(T) = a_0(1 + \beta(T - T_0)); \quad (2.21) \quad \omega(T) = \omega_0(1 + \gamma(T - T_0)), \quad (2.22)$$

где $\beta, 1/K; \gamma, 1/K$ - коэффициенты, характеризующие интенсивность изменения $a(T)$ и $\omega(T)$ от температуры; a_0, ω_0 - коэффициенты температуропроводности и мощность внутреннего источника теплоты при $T = T_0$.

Уравнение (2.17) с учетом (2.21), (2.22) будет

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \beta(T(x,t) - T_0)) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right] + \frac{\omega_0 \gamma}{c\rho} (T(x,t) - T_0) + \frac{\omega_0}{c\rho}. \quad (2.23)$$

Введем ДИФ $q(t)$ вида

$$T(\delta, t) = q(t). \quad (2.24)$$

Отметим, что ее использование существенно упрощает процесс получения решения.

Обозначим

$$\Theta = T - T_0; \quad \xi = x/\delta; \quad \text{Fo} = \frac{a_0 t}{\delta^2}, \quad (2.25)$$

где Θ – избыточная температура; ξ – безразмерная координата; Fo – число Фурье.

Краевая задача (2.23), (2.18) – (2.20) принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \beta \Theta(\xi, \text{Fo})) \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right] + \text{Po}(\gamma \Theta(\xi, \text{Fo}) + 1); \quad (2.26)$$

$$(\text{Fo} > 0; 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (2.27) \quad \Theta(0, \text{Fo}) = \Delta T; \quad (2.28) \quad \frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (2.29)$$

$$\Theta(1, \text{Fo}) = q(\text{Fo}) - T_0, \quad (2.30)$$

где $\Delta T = T_{\text{ст}} - T_0$; $\text{Po} = \frac{\omega_0 \delta^2}{\lambda_0}$; $\lambda_0 = a_0 c\rho$.

Решение задачи примем в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q) \xi^k, \quad (2.31)$$

где $b_k(q)$, ($k = \overline{0, n}$) – неизвестные коэффициенты.

Для получения решения в 3-ем приближении подставим (2.31) (для 3-х членов ряда) в (2.28) – (2.30). Для $b_k(q)$, ($k = 0, 1, 2$) будем иметь систему трех алгебраических уравнений, решение которой: $b_0 = \Delta T$; $b_1 = -2(T_{ct} - q(Fo))$; $b_2 = T_{ct} - q(Fo)$. Отсюда (2.31) принимает вид

$$\Theta(1, Fo) = \Delta T - \xi(2 - \xi)(T_{ct} - q(Fo)). \quad (2.32)$$

Потребуем, чтобы (2.32) удовлетворяло интегралу теплового баланса (ИТБ)

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \beta \Theta(\xi, Fo)) \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] d\xi + \int_0^1 [Po(\gamma \Theta(\xi, Fo) + 1)] d\xi. \quad (2.33)$$

Подставляя (2.32) в (2.33), для $q(Fo)$ будем иметь

$$\frac{2}{3} \frac{dq(Fo)}{dFo} - 2Bq(Fo) - B_1 = 0, \quad (2.34)$$

где $B = \beta \Delta T - \frac{\gamma Po}{3} + 1$; $B_1 = -Po(1 + \gamma \Delta T)$.

Интегрируя (2.34), имеем

$$q(Fo) = C \exp(3(FoB - B_1)) / (6B), \quad (2.35)$$

где C – постоянная интегрирования.

Подставим (2.35) в (2.32)

$$\Theta(\xi, Fo) = \Delta T - \xi(2 - \xi) \left(T_{ct} - \frac{C \exp(3(FoB - B_1))}{6B} \right). \quad (2.36)$$

Для нахождения C найдем интеграл взвешанной невязки условия (2.27)

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) d\xi = 0. \quad (2.37)$$

Подставляя (2.36) в (2.37), для постоянной C получаем уравнение, из которого находим

$$C = 3(B(2T_0 - \Delta T) + B_1).$$

Подставляя соотношение для C в (2.36), получаем формулу для решения задачи (2.26) – (2.29) в третьем приближении

$$\Theta(\xi, Fo) = \Delta T - \xi(2 - \xi) \left(T_{ct} (3(B(2T_0 - \Delta T) + B_1)) \frac{\exp(3(FoB - B_1))}{6B} \right). \quad (2.38)$$

Если положить $\beta = \gamma = Po = 0$, $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{ct} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, то соотношение (2.38) приводится к виду

$$\Theta^* = (T - T_0)/(T_{ct} - T_0) = 1 - 3\xi(1 - 0,5\xi) \exp(-3Fo). \quad (2.39)$$

Расчёт по (2.39) и точное решение [49] даны на рис. 2.15, из которых следует, что при $0,2 \leq Fo \leq \infty$ расхождение составляет 5 %.

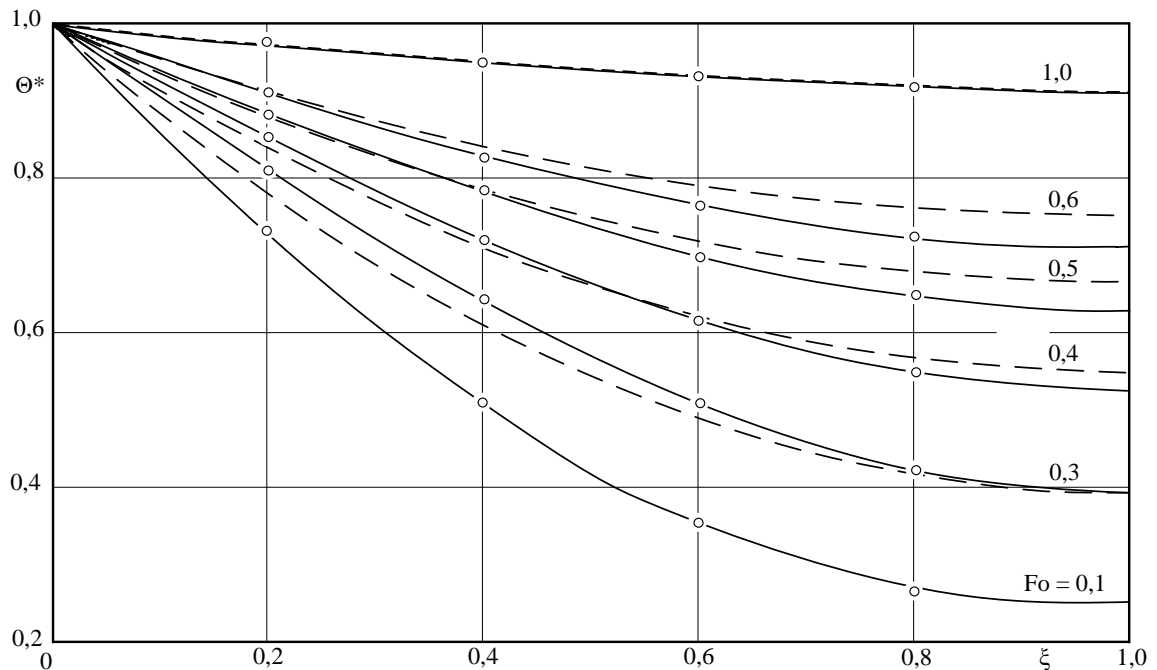


Рис. 2.15. Распределение температуры ($\beta = \gamma = Po = 0$). - - - - по формуле (2.39);

○ – по формуле (2.49); ——— – точное решение; $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_{ct} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$

Соотношение (2.38) позволяет отделить стационарные режимы от режимов неограниченного возрастания температуры. Стационарный режим возможен лишь при отрицательной величине $3FoB$, находящейся под знаком экспоненты, что возможно лишь в случае, когда $B = -\beta T_{ct} - 1 + Po\gamma/3$ является отрицательной величиной. Если величина B будет положительной, что возможно лишь при $Po\gamma/3 > (\beta T_{ct} - 1)$, то с увеличением времени Fo будет происходить

неограниченное возрастание температуры. Таким образом, для любой величины β , характеризующей нелинейность физических свойств среды, можно найти такую величину γ , характеризующую интенсивность возрастания источника теплоты от температуры, при которой величина $3FoV$ будет положительной и, следовательно, приводящей к тепловому взрыву.

Для повышения точности будем увеличивать числа слагаемых (2.31). При нахождении неизвестных коэффициентов (2.31) будем использовать условия (2.28), (2.29), (2.30) и ДГУ. Для их определения, дифференцируя (2.28) по Fo : $\partial\Theta(0, Fo)/\partial Fo = 0$ и сравнивая с (2.26) (при $\xi = 0$), получаем ДГУ

$$\beta(\partial\Theta(0, Fo)/\partial\xi)^2 + v\partial^2\Theta(0, Fo)/\partial\xi^2 + v_1 = 0, \quad (2.40)$$

где $v = 1 + \beta T_{ct}$; $v_1 = Po(\gamma T_{ct} + 1)$.

Продифференцируем (2.29) по Fo

$$\partial^2\Theta(1, Fo)/(\partial\xi\partial Fo) = 0. \quad (2.41)$$

Найдем производную от (2.26) по ξ для точки $\xi = 1$

$$\frac{\partial^2\Theta(1, Fo)}{\partial\xi\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial\xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial\xi} \left[(1 + \beta(\Theta(1, Fo) + T_0)) \frac{\partial\Theta(1, Fo)}{\partial\xi} \right] + Po(\gamma(\Theta(1, Fo) + T_0) + 1) \right\}. \quad (2.42)$$

Сравнивая (2.41) и (2.42), с учетом (2.29) находим еще одно ДГУ

$$\partial^3\Theta(1, Fo)/\partial\xi^3 = 0. \quad (2.43)$$

Продифференцируем (2.30) по Fo

$$\frac{\partial\Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial q(Fo)}{\partial Fo}. \quad (2.44)$$

Сравнивая (2.44) с (2.26), для точки $\xi = 1$ получаем дополнительное условие вида

$$1 + Po + q(Fo) \left(\beta \frac{\partial^2\Theta(1, Fo)}{\partial\xi^2} + Po\gamma \right) = \frac{\partial q(Fo)}{\partial Fo}. \quad (2.45)$$

Для решения задачи (2.26) – (2.30) в шестом приближении подставим (2.31) (для шести членов ряда) в (2.28) – (2.30), (2.40), (2.43), (2.45). Относительно b_k , ($k = \overline{0, 5}$) получаем систему шести алгебраических уравнений. После нахождения

ния b_k и подстановки (2.31) в (2.33), для $q(\text{Fo})$ (при $\beta = \gamma = 0,1$; $\text{Po} = 50$; $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_{\text{ст}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$) получаем следующее уравнение

$$\frac{95}{4}q(\text{Fo}) + \frac{3}{4}q'(\text{Fo}) + \frac{935}{24} \frac{q'(\text{Fo})}{q(\text{Fo}) + 10} + \frac{11}{24} \frac{q''(\text{Fo})}{q(\text{Fo}) + 10} - \frac{11}{24} \left(\frac{q'(\text{Fo})}{q(\text{Fo}) + 10} \right)^2 - \frac{36625}{12} = 0, \quad (2.46)$$

где $q'(\text{Fo}) = dq(\text{Fo})/d\text{Fo}$; $q''(\text{Fo}) = d^2q(\text{Fo})/d\text{Fo}^2$.

Для уравнения (2.46) получено численное решение (см. табл. 2.1). Однако, ввиду отсутствия возможности явного выражения $q(\text{Fo})$ из этого решения, формула (2.31) не может быть использована как аналитическое решение. Аппроксимируя результаты численного решения уравнения (2.46), приведенные в табл. 2.1, получаем следующую формулу для его аналитического решения

$$q(\text{Fo}) = -150,309 \exp(-16,16\text{Fo}) + 130,931. \quad (2.47)$$

Таблица 2.1

Fo	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5
q	10,55	57,09	106,7219	126,6875	128,3596	128,5

Результаты сравнения аналитического решения (2.47) с численным решением уравнения (2.46) представлены на рис. 2.16.

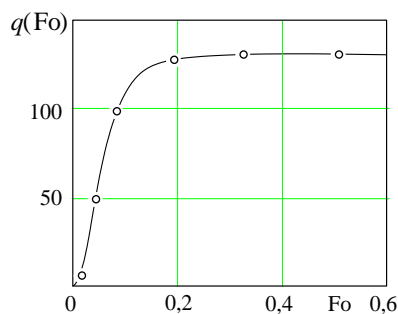


Рис. 2.16. Решение уравнения (2.46). \circ – численное решение, — по формуле (2.47); $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_{\text{ст}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$; $\beta = \gamma = 0,1$; $\text{Po} = 50$

Решение задачи (2.26) – (2.30) с учетом формулы (2.47) в шестом приближении имеет вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 100 + \xi \left(2,5q + \frac{1,5D}{0,4q + 4} - 262,5 \right) - 25\xi^2 - \xi^3 \left(5q + \frac{3,5D}{0,2q + 2} - 625 \right) +$$

$$+ \xi^4 \left(5q + \frac{2D}{0,1q+1} - 625 \right) - \xi^5 \left(1,5q + \frac{2,5D}{0,4q+4} - 187,5 \right), \quad (2.48)$$

где $D = dq(Fo) / dFo$.

Результаты решения задачи (2.26) – (2.30) в шестом приближении, а также численный расчет даны на рис. 2.17, 2.18, из которых заключаем, что расхождение результатов для $0,05 \leq Fo \leq \infty$ не более 2,5 %. Отметим, что при $Fo \geq 0,3$ наблюдается стационарный режим теплообмена. На рис. 2.19 даны расчеты распределения температуры в центре пластины при различных мощностях внутреннего источника теплоты.

ДГУ при получении решения задачи в последующих приближениях находятся аналогично описанному выше методу.

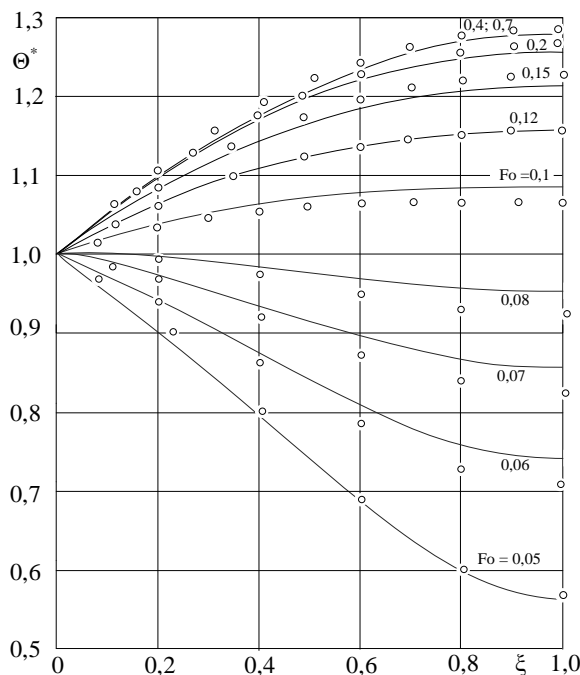


Рис. 2.17. Распределение температуры

$$\Theta^* = (T - T_0) / (T_{ст} - T_0) \quad (\beta = \gamma = 0,1;$$

$$Po = 50; T_0 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}; T_{ст} = 100 \text{ } ^\circ\text{C})$$

○ – по формуле (2.48) (шестое приближение), — — метод конечных разностей

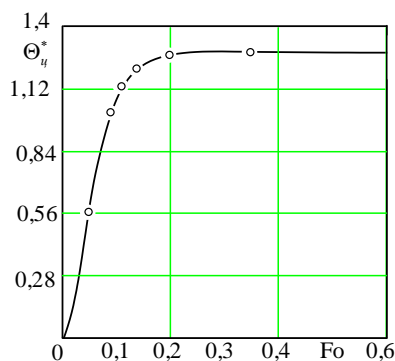


Рис. 2.18. Распределение температуры в центре

$$\text{пластины } \Theta_{ц}^* = (T_{ц} - T_0) / (T_{ст} - T_0) \quad (\beta = \gamma = 0,1;$$

$$Po = 50; T_0 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}; T_{ст} = 100 \text{ } ^\circ\text{C}). \text{ — — метод}$$

конечных разностей; ○ – по формуле (2.48)

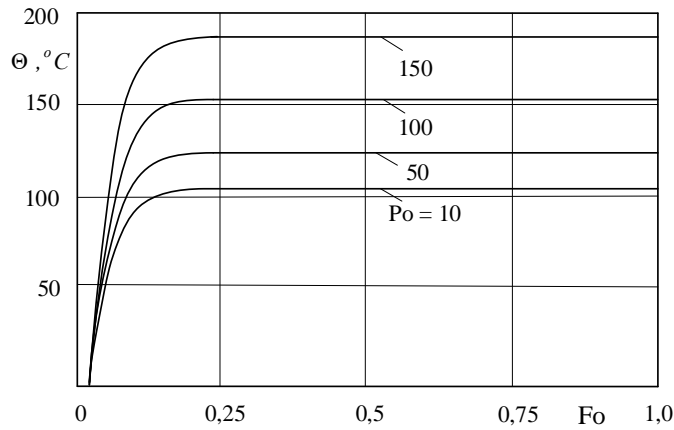


Рис. 2.19. Изменение температуры в центре пластины $\xi = 1$. $\beta = \gamma = 0,1$; $T_0 = 0^\circ C$; $T_{ст} = 100^\circ C$

Решение соответствующей линейной задачи ($\beta = \gamma = 0$; $Pe = 0$; $T_0 = 0^\circ C$; $T_{ст} = 100^\circ C$) в шестом приближении приводится к виду

$$\Theta^*(\xi, Fo) = 1 - e^{-2,471Fo} (1,978\xi - 0,8496\xi^3 + 0,07299\xi^4 + 0,05576\xi^5) + e^{-22,07Fo} (-2,346\xi + 13,66\xi^3 - 15,9\xi^4 + 4,994\xi^5). \quad (2.49)$$

Коэффициенты в экспонентах мало отличаются от точных собственных чисел ($\mu_1 = -2,4674$; $\mu_2 = -22,2066$ [49]). Сравнение расчетов по (2.49) с точным решением [49] приводит к заключению, что при $0,1 \leq Fo < \infty$ расхождение не более 1 %.

Использование изложенного метода применительно к линейным задачам позволяет получать точные решения в виде бесконечного ряда. В работах [26 – 28] для пластины найдены точные решения задач: с несимметричными граничными условиями первого рода; с переменными во времени граничными условиями; с переменным начальным условием и с постоянным источником теплоты.

Обсуждение результатов

Используя ДИФ и ДГУ, найдено аналитическое решение нелинейной задачи теплопроводности с нелинейным источником теплоты. Использование ДИФ позволяет сводить уравнение в частных производных к обыкновенному уравнению. ДГУ определяются так, чтобы их удовлетворение было эквивалентно удовлетворению уравнения в граничных точках.

Полученные результаты работы могут быть использованы для расчетов температурного состояния конструкций с большим диапазоном изменения тем-

пературы, когда неучёт температурного изменения теплофизических свойств материалов может приводить к большим погрешностям в оценке температурного состояния изделий, а также в случаях, когда в телах могут возникать мощные внутренние источники теплоты (например, при воздействии механических, ультразвуковых или электромагнитных колебаний). Если зависимость физических свойств от температуры или мощность внутренних источников теплоты заранее неизвестны, то, используя полученное решение и результаты эксперимента по изменению температуры в любой одной точке конструкции, они могут быть найдены из решения обратной задачи теплопроводности.

2.3. Моделирование условий теплового взрыва в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами

Для нелинейных задач, а также задач с переменными свойствами известен интегральный метод теплового баланса [5, 9, 26, 30]. Этот метод в ряде случаев позволяет находить высокоточные аналитические решения, что оказывается возможным ввиду применения ДГУ и дополнительных искомым функций [26 – 30]. В качестве следующего примера его применения рассмотрим решение задачи теплопроводности для неоднородной пластины с нелинейным источником теплоты в следующей постановке

$$c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right] + \omega(T), \quad (t > 0; 0 < x < \delta); \quad (2.50)$$

$$T(x,0) = T_0; \quad (2.51) \quad T(\delta,t) = T_{ct}; \quad (2.52) \quad \partial T(0,t)/\partial x = 0, \quad (2.53)$$

где T – температура, K ; x – координата, m ; t – время, s ; $\lambda(x)$ – коэффициент теплопроводности, $Вт/(м \cdot K)$; c – теплоемкость, $Дж/(кг \cdot K)$; ρ – плотность, $кг/м^3$; T_0 – начальная температура, K ; T_{ct} – температура стенки, K ; δ – половина толщины пластины, m ; $\omega(T)$ – мощность источника теплоты, $Вт/м^3$.

Найдём решение задачи при следующих зависимостях $\lambda(x)$ и $\omega(T)$

$$\lambda(x) = \lambda_0 \exp(mx); \quad \omega(T) = \omega_0 (1 + \gamma(T - T_0)), \quad (2.54)$$

где $m > 0$ – коэффициент, $1/m$; $\lambda_0 = const$ – теплопроводность при $x = 0$, $Вт/(м \cdot К)$; $\gamma > 0$ – коэффициент, $1/К$; ω_0 – мощность источника при температуре T_0 ($T_0 < T_{ст}$), $Вт/м^3$.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{ст} - T_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{c\rho}; \quad Fo = \frac{a_0 t}{\delta^2}; \quad Po = \frac{\omega_0 \gamma \delta^2}{\lambda_0};$$

$$Po_1 = \frac{\omega_0 \delta^2}{\lambda_0 \Delta T}; \quad \Delta T = T_{ст} - T_0, \quad (2.55)$$

где Θ , ξ , Fo – безразмерные температура, координата, время; Po – число Померанцева; a_0 – коэффициент температуропроводности при $x = 0$.

Задача (2.50) – (2.53) приводится к виду (рис. 2.20)

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^{v\xi} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right) + Po\Theta(\xi, Fo) + Po_1; \quad (2.56)$$

$$(Fo > 0; 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (2.57) \quad \partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = 0; \quad (2.58) \quad \Theta(1, Fo) = 1, \quad (2.59)$$

где $v = m\delta$.

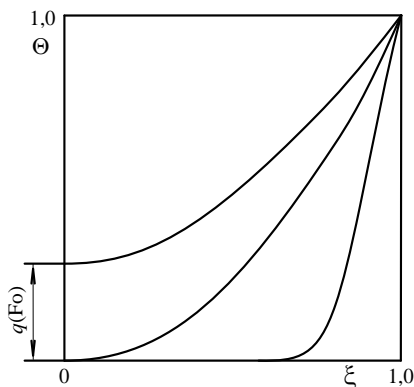


Рис. 2.20. Расчётная схема теплообмена

Введем ДИФ

$$q(Fo) = \Theta(0, Fo). \quad (2.60)$$

Решение задачи принимаем в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q) \varphi_k(\xi) , \quad (2.61)$$

где $\varphi_k(\xi) = \xi^k$ – координатные функции; $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты.

Отметим, что соотношение (2.60), учитывая, что оно должно быть выполнено на границе, по сути, представляет первое дополнительное граничное условие.

Подставляя (2.61) в (2.58), (2.59), (2.60), для $b_k(q)$, ($k = 0, 1, 2$) имеем систему алгебраических уравнений. Ее решение: $b_0(q) = q(Fo)$; $b_1(q) = 0$; $b_2(q) = 1 - q(Fo)$. Соотношение (2.61) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = \xi^2 + (1 - \xi^2)q(Fo) . \quad (2.62)$$

Потребуем, чтобы (2.62) удовлетворяло интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^{v\xi} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right) - Po\Theta(\xi, Fo) - Po_1 \right] d\xi = 0 . \quad (2.63)$$

Подставляя (2.62) в (2.63), находим

$$\frac{dq(Fo)}{dFo} = r_1 q(Fo) + r_2 , \quad (2.64)$$

где $r_1 = Po - 3e^v$; $r_2 = 3e^v + 0,5(Po + 3Po_1)$.

Интегрируя (2.64), имеем

$$q(Fo) = (r_3 - C_1 e^{Fo(Po - 3e^v)}) / r_4 , \quad (2.65)$$

где $r_3 = Po + 3Po_1 + 6e^v$; $r_4 = 2(Po - 3e^v)$; C_1 – постоянная интегрирования.

Подставим (2.65) в (2.62)

$$\Theta(\xi, Fo) = \xi^2 + (1 - \xi^2)(r_3 - C_1 e^{Fo(Po - 3e^v)}) / r_4 . \quad (2.66)$$

Для нахождения C_1 найдем интеграл взвешенной невязки условия (2.57)

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \varphi_0(\xi) d\xi = 0 . \quad (2.67)$$

Подставляя (2.66) в (2.67), находим: $C_1 = 3(Po + 3e^v)$.

Соотношение (2.66) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = \xi^2 - \frac{(1 - \xi^2)(r_3 - 3(Po + 3e^\nu)e^{Fo(Po - 3e^\nu)})}{2(Po - 3e^\nu)}. \quad (2.68)$$

Анализ расчётов по (2.68) в сравнении с решением во втором и третьем приближениях (см. ниже формулы (2.80), (2.92)) позволяет заключить, что для $0,2 \leq Fo < \infty$ их расхождение не более 6%. Исходные данные при решении задачи были следующие: $Po = 5$; $\nu = 2$; $\gamma = 0,1$; $T_0 = 0^\circ C$; $T_{ct} = 100^\circ C$. Во всех последующих расчетах значения ν , γ , T_0 , T_{ct} будут неизменными.

Если положить $\nu = 0$, $Po = 0$, то формула (2.68) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = \xi^2 - 1,5(1 - \xi^2)e^{-3Fo}. \quad (2.69)$$

Отличие результатов по формуле (2.69) от точного решения [49] для $0,2 \leq Fo < \infty$ не более 4%.

Для увеличения числа членов ряда (2.61) необходимо использовать ДГУ. Для определения второго дополнительного условия в точке $\xi = 0$ (первое условие представляет соотношение (2.60)) продифференцируем условие (2.58) по Fo

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} \right) = 0. \quad (2.70)$$

Дифференцируя уравнение (2.56) по ξ и, записывая полученное выражение для точки $\xi = 0$, с учетом (2.58) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} \right) = 2\nu \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3}. \quad (2.71)$$

Формула (2.71) с учётом (2.70) приводится к ДГУ

$$2\nu \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} = 0. \quad (2.72)$$

Дифференцируя (2.59) по Fo ($(\partial \Theta(1, Fo) / \partial Fo) = 0$) и, сравнивая полученное выражение с уравнением (2.56), с учетом (2.59) находим дополнительное условие в точке $\xi = 1$

$$e^{\nu} \left(\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} \right) + Po + Po_1 = 0. \quad (2.73)$$

Дифференцируя (2.60) по Fo ($\partial q(Fo)/\partial(Fo) = (\partial \Theta(0, Fo)/\partial Fo)$) и, сравнивая с (2.56), с учетом (2.58) имеем ДГУ

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} + Po \Theta(0, Fo) + Po_1 = \frac{\partial q(Fo)}{\partial Fo}. \quad (2.74)$$

Аналогично можно получить и другие дополнительные условия (см. ниже условия (2.86) – (2.88)) [25 – 29, 37 – 39, 56, 57]. Так как при их получении применяется уравнение (2.56), то их выполнение решением (2.61) адекватно выполнению уравнения (2.56) в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Во втором приближении подставим (2.61) (при шести членах ряда) в (2.58), (2.59), (2.60), (2.72) – (2.74). Для $b_k(q)$, ($k = \overline{0,5}$) получаем систему шести алгебраических уравнений. Её решение:

$$b_0 = q; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = (Poq + Po_1 + q') / 2; \quad b_3 = -\nu b_2 / 3; \\ b_4 = q' H_1 + q H_2 + H_3; \quad b_5 = q' M_1 + q M_2 + M_3, \quad (2.75)$$

где $q' = dq / dFo$; $H_1 = (\nu - 2)(4\nu + 27)$; $H_2 = Po l_2 + l$;

$$H_3 = Po_1 l_2 + 6e^{-\nu} (Po + Po_1) - l; \quad M_1 = 15 - \nu(3 + \nu); \quad M_2 = l_1 - Po M_1;$$

$$M_3 = -Po_1 M_1 - l_1 - 3e^{-\nu} (Po + Po_1); \quad l = -30(4 + \nu); \quad l_1 = 12(\nu + 3);$$

$$l_2 = 54 - \nu(19 - 4\nu).$$

Подставляя (2.61) в (2.63), относительно функции $q(Fo)$ получаем уравнение вида

$$A_1 \frac{d^2 q}{dFo^2} + A_2 \frac{dq}{dFo} + A_3 q - A_4 = 0, \quad (2.76)$$

где $A_1 = -A_5 / 2$; $A_2 = (270 - 60\nu)e^{\nu} + A_5 Po + 60(\nu + 9)$;

$$A_3 = 36e^{\nu} - A_5 Po^2 - 20(54 - (6\nu - 27)e^{\nu} + 6\nu); \quad A_4 = 0,5e^{-\nu} ((6 + A_5 e^{\nu})Po + \\ + 20(27 - 6\nu)e^{2\nu} + 9Po_1(\nu + 7) + 6Po^2 + 60Po e^{\nu}(3 + \nu) + 3600e^{2\nu}); \quad A_5 = \nu(6 + \nu) - 66.$$

Интегрируя уравнение (2.76), находим

$$q(\text{Fo}) = C_1 e^{\mu_1 \text{Fo}} + C_2 e^{\mu_2 \text{Fo}} + A_3 / A_4, \quad (2.77)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования;

$$\mu_{1,2} = 0,5(\pm\sqrt{(A_2^2 - 4A_1A_3)} / A_3 - A_2 / A_3). \quad (2.78)$$

Формула (2.61) с учётом (2.75), (2.77), (2.78) принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = z + \xi^2(z_1 - \text{Po}z - \text{Po}_1)(0,5 - v\xi/3) + \\ + (H_1z_1 + H_2z + H_3)\xi^4 + (M_1z_1 + M_2z + M_3)\xi^5, \quad (2.79)$$

где $z = C_1 e^{\mu_1 \text{Fo}} + C_2 e^{\mu_2 \text{Fo}} + A_4 / A_3$; $z_1 = C_1 \mu_1 e^{\mu_1 \text{Fo}} + C_2 \mu_2 e^{\mu_2 \text{Fo}}$.

Соотношение (2.79) можно записать в виде

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = C_1 \psi_1(\xi) \exp(\mu_1 \text{Fo}) + C_2 \psi_2(\xi) \exp(\mu_2 \text{Fo}), \quad (2.80)$$

где $\psi_{1,2}(\xi) = 1 + (\mu_{1,2} - \text{Po})(0,5 - v\xi/3)\xi^3 + (H_1\mu_{1,2} + H_2)\xi^4 + (M_1\mu_{1,2} + M_2)\xi^5$ – собственные функции задачи (2.56) – (2.59).

Константы C_1, C_2 находятся из условия (2.57)

$$\int_0^1 (C_1 \psi_1(\xi) + C_2 \psi_2(\xi)) \psi_j(\xi) d\xi = 0, \quad (j=1,2). \quad (2.81)$$

Из (2.81) для C_1 и C_2 получаем систему двух алгебраических уравнений. Её решение: $C_1 = -3,1227$; $C_2 = 0,3494$.

Формула (2.81) позволяет отделить стационарные режимы от режимов теплового взрыва. Очевидно, что условия теплового взрыва будут выполнены при положительной величине первого собственного числа μ_1 , определяемого из формулы (2.78). Например, при $v = 2$ минимальное число Померанцева, при котором происходит тепловой взрыв, равно: $\text{Po} = 8,56$. Расчеты по (2.80) при $\text{Po} = 8,56$ даны на рис. 2.21, из анализа которых видно, что увеличение числа Fo приводит к неограниченному возрастанию температуры.

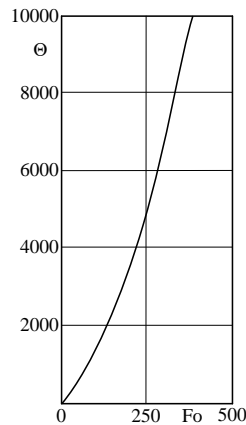


Рис. 2.21 Изменение температуры в точке $\xi = 0$ при $Ro = 8,56$. Расчет по формуле (2.80)

Если принять $\nu = 0$; $Ro = 0$, то (2.80) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + e^{-2,471Fo} (1,257 + 1,553\xi^2 - 0,352\xi^4 + 0,055\xi^5) + e^{-22,07Fo} (0,406 - 4,48\xi^2 + 9,07\xi^4 - 4,99\xi^5). \quad (2.82)$$

Отмечаем, что коэффициенты под знаком экспонент мало отличаются от точных значений собственных чисел ($\mu_1 = -2,467401$; $\mu_2 = -22,2066$ [50]). Сравнение расчетов по (2.82) с точным решением [49] показывает, что при $0,1 \leq Fo < \infty$ их расхождение не более 1,5%.

В последующих приближениях необходимо увеличивать число слагаемых ряда (2.61). Его неизвестные коэффициенты находятся из (2.58), (2.59) и дополнительных граничных условий. В каждом следующем приближении следует использовать три новых дополнительных условия. Общий принцип определения дополнительных условий каждого последующего приближения заключается в следующем. Сначала дифференцируются по времени дополнительные граничные условия предыдущего приближения. В получающихся соотношениях появляются производные от $\Theta(\xi, Fo)$ по времени. Для их замены на производные от пространственной переменной используется уравнение (2.56), определив от него производные по этой переменной. Использование полученных таким методом дополнительных условий приводит к выполнению уравнения (2.56) в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Следуя указанному алгоритму, найдем дополнительные условия третьего приближения. Дифференцируя соотношения (2.72) – (2.74) по Fo , находим

$$2\nu \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo} + \frac{\partial^4 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3 \partial Fo} = 0; \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo} + \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = 0; \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo} + Po \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 q(Fo)}{\partial Fo^2}. \quad (2.85)$$

Вычисляя первую, вторую и третью производные от (2.56) по ξ и сопоставляя с (2.83) – (2.85), получаем ДГУ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^5 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^5} + 6\nu \frac{\partial^4 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^4} + (12\nu^2 + Po) \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} + \\ & + 2\nu(5\nu^2 + Po) \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} = 0; \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} & e^\nu \frac{\partial^4 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^4} + 4\nu e^\nu \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3} + (Po + 5\nu^2 e^\nu) \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} + \\ & (2\nu^3 e^\nu + Po\nu) \frac{\Theta(1, Fo)}{\partial \xi} = 0; \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial^4 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^4} + 3\nu \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} + (3\nu^2 + Po) \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} + Po \frac{\partial q(Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 q(Fo)}{\partial Fo^2}. \quad (2.88)$$

Подставляя (2.61) (для девяти слагаемых ряда) в (2.58), (2.59), (2.60), (2.72) – (2.74), (2.86) – (2.88) для коэффициентов $b_k(q)$, ($k = \overline{0,8}$) получаем систему девяти алгебраических уравнений, решение которой

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= q; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = (q' - 5q - 0,5)/2; \quad b_3 = (10q - 2q' + 1)/3; \\ b_4 &= (q'' + 2q' - 35q - 3,5)/24; \quad b_5 = (11q' - 17,5q - 1,5q'' - 7/4)/15; \\ b_6 &= 0,74q'' - 2,016q' - 1,376q + 1,755e^{-2} + 0,065e^{-4} + 10,422 \\ b_7 &= 3,695q - 2,022q' - 0,0122q'' + 14,084; \\ b_8 &= 0,656q' - 0,00375q'' - 1,527q + 5,4, \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

где $q' = \frac{dq(Fo)}{dFo}$; $q'' = \frac{d^2q(Fo)}{dFo^2}$.

Подставляя (2.61), учитывая (2.89), в (2.63), для $q(Fo)$ получаем уравнение

$$0,00033q''' + 0,0514q'' + 1,8570q' + 6,3802q = 18,7581, \quad (2.90)$$

где $q''' = \frac{d^3q(\text{Fo})}{d\text{Fo}^3}$.

Интегрируя (2.90), находим

$$q(\text{Fo}) = C_1 e^{\mu_1 \text{Fo}} + C_2 e^{\mu_2 \text{Fo}} + C_3 e^{\mu_3 \text{Fo}} + 2,94, \quad (2.91)$$

где C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования; $\mu_1 = -3,832804$; $\mu_2 = -49,8218$; $\mu_3 = -99,1603$.

Подставляя (2.89) с учетом (2.91) в (2.61), находим

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = C_1 \psi_1(\xi) \exp(\mu_1 \text{Fo}) + C_2 \psi_2(\xi) \exp(\mu_2 \text{Fo}) + C_3 \psi_3(\xi) \exp(\mu_3 \text{Fo}), \quad (2.92)$$

где $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi), \psi_3(\xi)$ – собственные функции, имеющие вид

$$\psi_1(\xi) = -4,4164\xi^2 + 5,8885\xi^3 + 1,1656\xi^4 - 5,4464\xi^5 + 7,4428\xi^6 - 4,2343\xi^7 + 0,93151\xi^8 + 1;$$

$$\psi_2(\xi) = -27,411\xi^2 + 36,548\xi^3 + 97,816\xi^4 - 285,92\xi^5 + 283,43\xi^6 - 127,33\xi^7 + 21,839\xi^8 + 1;$$

$$\psi_3(\xi) = -52,08\xi^2 + 69,44\xi^3 + 399,98\xi^4 - 1057,2\xi^5 + 928,99\xi^6 - 316,79\xi^7 + 26,633\xi^8 + 1.$$

Константы C_1, C_2, C_3 находятся из (2.57)

$$\int_0^1 \Theta(\xi, \text{Fo}) \psi_j(\xi) d\xi = 0, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (2.93)$$

Подставив (2.92) в (2.93), для C_1 и C_2 имеем систему трех уравнений, решение которой: $C_1 = -6,6988$; $C_2 = 0,6097$; $C_3 = -0,3254$.

Расчеты по (2.92), даны на рис. 2.22. Для оценки сходимости решени на рис. 2.23, 2.24 приведены невязки уравнения (2.56) для второго и третьего приближений. Из их анализа видно, что в третьем приближении невязка и по толщине пластины (рис. 2.23) и для точки $\xi = 0,1$ во времени (рис. 2.24), значительно меньше невязки второго приближения. Отметим, что благодаря использованию

дополнительных граничных условий уравнение (2.56) в граничных точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ в обоих приближениях выполняется точно (невязка $\varepsilon = 0$).

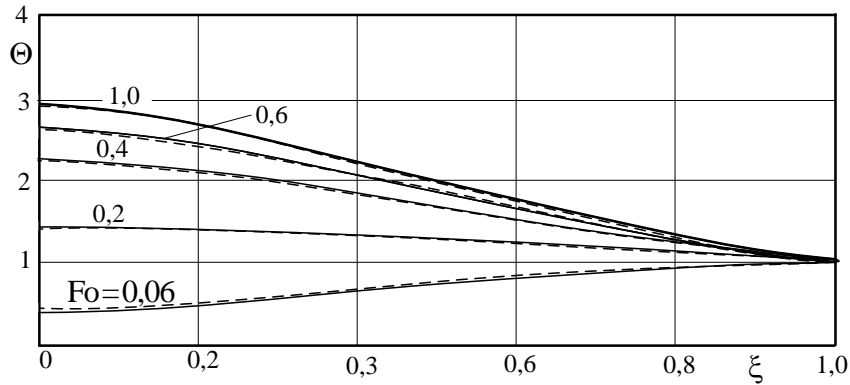


Рис. 2.22. Изменение температуры при $\nu = 2$; $Ro = 5$; ----- по формуле (2.80) (второе приближение); ————— по формуле (2.92) (третье приближение)

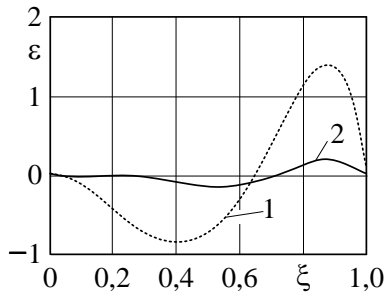


Рис. 2.23. Изменение невязки ε уравнения (2.56) при $Fo = 0,3$ ($\nu = 2$; $Ro = 5$); 1, 2 — соответственно, второе и третье приближение

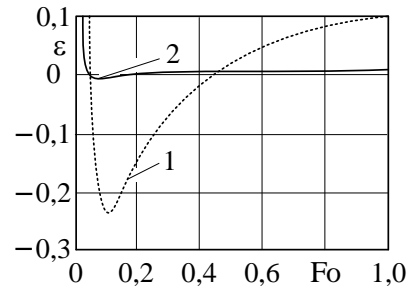


Рис. 2.24. Изменение невязки ε уравнения (2.56) при $\xi = 0,1$ ($\nu = 2$; $Ro = 5$); 1, 2 — соответственно, второе и третье приближение

Если положить $\nu = 0$ и $Ro = 0$ (однородная пластина без источников теплоты), то из решения задачи изложенным методом имеем следующие величины собственных чисел $\mu_1 = -2,4674187$; $\mu_2 = -22,131913$; $\mu_3 = -63,2863$. Точное значение третьего собственного числа: $\mu_3 = -61,685026$. Из сравнения с собственными числами во втором приближении следует, что в третьем приближении происходит значительное уточнение первых двух собственных чисел.

Формула (2.68) по известной из эксперимента температуре в любой точке пластины на основе обратной задачи теплопроводности позволяет идентифицировать величину m , характеризующую переменность свойств среды [1, 2, 24,

72]. Предположим, что изменение температуры в центре пластины ($\xi = 0$), найденное из эксперимента, описывается формулой

$$T(0,t) = T_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad (2.94)$$

где a_1 $1/K$, a_2 $1/K^2$ – коэффициенты аппроксимации данных эксперимента.

Допустим, что согласно экспериментальным данным в моменты времени $t_1 = 5$ с и $t_2 = 10$ с температура в центре пластины была равной 40°C и 65°C при $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Коэффициенты a_1 и a_2 в данном случае будут: $a_1 = 3,5$; $a_2 = 0,1$.

Представим соотношение (2.68) в размерном виде для точки $x = 0$

$$T(0,t) = \frac{1}{2(\text{Po} - 3e^v)} \left((3(T_{\text{ст}} - T_0)(\text{Po}_1 + 3e^v) e^{\frac{at}{\delta^2}(\text{Po} - 3e^v)} + \right. \\ \left. + (3T_0 - T_{\text{ст}}\text{Po} - 3\text{Po}_1 T_{\text{ст}} + 3\text{Po}_1 T_0 - 6T_{\text{ст}}\text{Po}e^v) \right). \quad (2.95)$$

Подставляя (2.94) в (2.95) и вычисляя интеграл в пределах от t_1 до t_2 , будем иметь

$$\int_{t_1}^{t_2} (T_0 + a_1 t + a_2 t^2) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2(\text{Po} - 3e^v)} \left((3(T_{\text{ст}} - T_0)(\text{Po}_1 + 3e^v) e^{\frac{at}{\delta^2}(\text{Po} - 3e^v)} + \right. \\ \left. + (3T_0 - T_{\text{ст}}\text{Po} - 3\text{Po}_1 T_{\text{ст}} + 3\text{Po}_1 T_0 - 6T_{\text{ст}}\text{Po}e^v) \right) dt. \quad (2.96)$$

Найдем величину $v = m\delta$, при следующих исходных данных: $\lambda_0 = 20$ Вт/(м·К); $a_0 = 10^{-6}$ м²/с; $T_0 = 20^\circ\text{C}$; $T_{\text{ст}} = 100^\circ\text{C}$; $\text{Po} = 5$; $\text{Po}_1 = 0,5$; $t_1 = 5$ с; $t_2 = 10$ с; $a_1 = 3,5$; $a_2 = 0,1$; $\delta = 0,02$ м.

После определения интегралов в (2.96) для определения неизвестного значения v получаем следующее трансцендентное уравнение

$$-1500 \left(65 + 21e^v - 36e^{2v} - 1152e^{v + \frac{1}{8} - \frac{3}{40}e^v} - 720e^{\frac{1}{8} - \frac{3}{40}e^v} + \right.$$

$$\left. + 1152e^{v+\frac{1}{16}-\frac{3}{80}e^v} + 720e^{\frac{1}{16}-\frac{3}{80}e^v} \right) = 3125(e^v - 5)^2 .$$

Его решение $v = 2,674885$. Отсюда $m = v/\delta = 133,744$.

Покажем, что, используя интегральный метод [13, 14], применительно к задаче для однородной пластины ($\nu = 0$) без источников теплоты ($P_0 = 0$) можно найти точное решение в форме бесконечного ряда, если применить координатные функции, обладающие свойством ортогональности (например, тригонометрические). Решение задачи (2.56) – (2.59) (при $\nu = 0$ и $P_0 = 0$) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(Fo) \varphi_k(\xi) , \quad (2.97)$$

где $f_k(Fo)$ – неизвестные функции; $\varphi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$ – координатные функции ($r = 2k - 1$).

Соотношение (2.97) удовлетворяет условиям (2.58), (2.59). Составим невязку уравнения (2.56) и потребуем выполнения её ортогональности ко всем координатным функциям $\cos(j\pi\xi/2)$, ($j = r = 2k - 1$)

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{df_k(Fo)}{dFo} \cos\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) + \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^2\pi^2}{4} f_k(Fo) \cos\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) \right] \cos\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right) d\xi = 0 . \quad (2.98)$$

Соотношение (2.98), учитывая ортогональность косинусов, будет

$$\frac{df_k(Fo)}{dFo} + \frac{r^2\pi^2}{4} f_k(Fo) = 0 . \quad (2.99)$$

Интегрируя (2.99), получаем

$$f_k(Fo) = A_k \exp(-\mu_k Fo) , \quad (2.100)$$

где $\mu_k = r^2\pi^2/4$ – собственные числа; A_k – неизвестные коэффициенты.

Подставляя (2.100) в (2.97), имеем

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} A_k \exp(-\mu_k Fo) \cos(r\pi\xi/2) , \quad (r = 2k - 1) . \quad (2.101)$$

Для определения A_k составим невязку условия (2.57) и потребуем её ортогональности координатным функциям $\varphi_k(\xi) = \cos(j\pi\xi/2)$, ($j = r = 2k - 1$)

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) - 1 \right) \cos\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right) d\xi = 0, \quad (j = r = 2k - 1; k = \overline{0, \infty}). \quad (2.102)$$

Ввиду ортогональности косинусов, будем иметь

$$\int_0^1 \left(A_k \cos^2\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) - \cos\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) \right) d\xi = 0. \quad (2.103)$$

Из (2.103), находим $A_k = 4(-1)^{k+1}/(r\pi)$. Подставляя найденные A_k и μ_k в (2.101), получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{r\pi} \exp\left(-\frac{r^2\pi^2}{4}Fo\right) \cos\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right), \quad (2.104)$$

$(r = 2k - 1).$

Соотношение (2.104) представляет точное решение задачи (2.56) – (2.59) (при $\nu = 0$; $Ro = 0$). Оно совпадает с классическими точными решениями, найденными методами Фурье, интегральных преобразований и др. В данном случае отсутствует необходимость применения ДИФ и ДГУ. Однако для сложных дифференциальных уравнений (нелинейных, с переменными коэффициентами и др.) получение точного решения усложняется ввиду невозможности получения точного решения нелинейного обыкновенного уравнения относительно ДИФ. Для таких задач необходимо использование дополнительных функций и дополнительных граничных условий.

3. Исследование внутренних механизмов переноса теплоты с учетом нелокальности реальных физических процессов

Научные результаты данной главы представлены в работах [98, 101 – 103] автора диссертации.

3.1. Математические модели теплопроводности с учетом пространственно – временной нелокальности

Вывод параболического уравнения теплопроводности основан на допущениях локального равновесия и сплошности среды, следуя которым в любом элементе среды, сопоставимом с длиной свободного пробега носителей энергии, наблюдается локальное равновесие, хотя система в целом неравновесна. Допущение принципа локального равновесия возможно в случае, когда скорость изменения макропараметров вследствие за счет внешних воздействий значительно меньше скорости релаксации к локальному равновесию [54, 55]. Принимая этот принцип, в интегральных законах сохранения можно выполнять предельный переход и получать эти законы в дифференциальной форме. Такой прием, вообще говоря, физически некорректен, так как имеющая молекулярно – атомное строение среда обладает свойствами, несовместимыми с гипотезой сплошности. Однако, если характерный микромасштаб системы и время её релаксации к равновесному состоянию намного меньше характерного макромасштаба и общего времени протекания процесса, то получаемые на основе допущений локального равновесия и сплошности среды дифференциальные уравнения будут локальными как по пространству, так и по времени. Таким путем получают параболические уравнения переноса, не содержащие времени релаксации τ и характерного масштаба микроструктуры l (длина свободного пробега микрочастиц) и, в связи с чем, они не могут быть использованы для значений пространственно-временных переменных, сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц, ввиду неадекватного описания реальных физических процессов в области указанных значений переменных. Введение ха-

рактрных пространственно-временных масштабов позволяет определить две скорости процесса переноса [54, 55]

$$v_1 = L/t_0; \quad v_2 = l/\tau,$$

где v_1 – линейная скорость изменения параметров, вызванная несимметричными граничными условиями (например, скорость перемещения изотерм), m/c ; L – характерный макромасштаб системы, m ; t_0 – характерное время протекания процесса до установления состояния равновесия, c ; l – характерный масштаб микроструктуры, m ; τ – время релаксации, связанное с временем свободного пробега микрочастиц, c ; v_2 – скорость распространения возмущений (является внутренней характеристикой системы, не зависящей от граничных условий).

Отсюда можно заключить, что бесконечная скорость распространения возмущений, описываемая параболическими уравнениями, связана с тем, что время релаксации принимается равным нулю и, следовательно, принимается допущение о мгновенном распространении возмущений. Для устранения этого недостатка параболических уравнений необходима разработка математической теории описания процессов переноса, протекающих в локально-неравновесных условиях. Решению этой проблемы посвящены работы многих авторов, в которых рассматриваются различные теории локально – неравновесных систем [4, 25, 54, 55, 62 – 65, 69, 92 – 95]: с использованием понятия тепловой памяти [4, 18]; на основе молекулярно-кинетических методов [54, 55]; уравнения Больцмана; на основе теории случайных блужданий и др. В некоторых работах применительно к исследованию локально – неравновесных систем понятие температуры, определяемое в классической термодинамике необратимых процессов лишь для равновесных систем, заменяется другими понятиями.

Наиболее разработанной теорией, не опирающейся на принцип локального равновесия, является теория, определяемая как «расширенная необратимая термодинамика» (РНТ). Эта теория для теплового потока приводит к дифференциальному уравнению эволюционного (релаксационного) типа (уравнение Максвелла-Каттанео)

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (3.1)$$

где q – тепловой поток, $Вт/м^2$; T – температура, $К$; t – время, $с$; x – координата, $м$; λ – коэффициент теплопроводности, $Вт/(м \cdot К)$; τ – время релаксации, $с$.

Из (3.1) следует, что тепловой поток не определяется только градиентом температуры, как в классической формуле закона Фурье, а является решением эволюционного уравнения, описывающего процесс его релаксации к локально – равновесному значению.

Соотношение (3.1) не может быть отнесено к уравнению полного закона сохранения ввиду того, что оно учитывает лишь временную нелокальность и не описывает пространственно – нелокальные эффекты. Для того чтобы это уравнение представлялось в виде полного закона сохранения, в РНТ вводится следующее дополнительное слагаемое [55]

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} + l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right), \quad (3.2)$$

где l – характерный масштаб нелокальности (длина свободного пробега микро-частиц). Величина $\partial q/\partial x$ – в последнем слагаемом уравнения (3.2) представляет поток теплового потока (поток второго порядка) и описывает пространственно нелокальные эффекты. Перепишем соотношение (3.2) в виде

$$-q - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} - l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right).$$

Очевидно, что отклонение нестационарного теплового потока q от стационарного $\lambda \partial T/\partial x$ пропорционально скорости изменения теплового потока во времени $\tau_1 \partial q/\partial t$ и скорости изменения потока $\partial q/\partial x$ по координате x , то есть $l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)$.

Используются также эволюционные уравнения теплового потока, в которых учитываются скорости теплового потока и градиента температуры [25, 32, 40, 48, 54, 55]

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (3.3)$$

где τ_1, τ_2 – времена релаксации.

В уравнении для теплового потока можно учесть и производные по времени более высокого порядка. Так, учитывая не только скорость теплового потока, но и его ускорение, получаем

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} - \tau_1^2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \quad (3.4)$$

Известно, что всякое отклонение системы от состояния равновесия вызывает её противодействие такому отклонению. Степень этого противодействия характеризуется временами релаксации τ_1, τ_2 и характерным масштабом нелокальности l . Очевидно, что при $\partial T / \partial x = 0$ перенос теплоты невозможен и, следовательно, $q = 0, \tau_1 = \tau_2 = l = 0$.

Для вывода дифференциальных уравнений теплопроводности с учётом нелокальности на основе уравнений (3.1) – (3.4) используется также уравнение теплового баланса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad (3.5)$$

где c – теплоёмкость Дж/(кг·К); ρ – плотность, кг/м³.

Подставив (3.1) в (3.5), находим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (3.6)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности.

Уравнение (3.6) относится к гиперболическому типу. Оно описывает как диффузионный способ передачи теплоты (при $\delta \gg l$, где δ – толщина пластины), так и волновой (при $\delta \sim l$).

Подставляя (3.2) в (3.5), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + l^2 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}. \quad (3.7)$$

Наличие смешанной производной превращает гиперболическое уравнение (3.6) в параболическое. Её появление в уравнении (3.7) связано с учетом длины свободного пробега микрочастиц в уравнении для теплового потока (3.2) и, следовательно, пространственной нелокальности в уравнении для температуры (3.7).

Подставляя (3.3) в (3.5) имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a\tau_2 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}. \quad (3.8)$$

Очевидно, что уравнения (3.7), (3.8) отличаются лишь коэффициентом второго слагаемого правой части. Учитывая, что скорость распространения тепла $v = \sqrt{a/\tau}$, то положив $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, находим $a = v^2 \tau$ [49]. Отсюда для коэффициента второго слагаемого справа в уравнении (3.8) будем иметь $a\tau = v^2 \tau^2 = l^2$. Отсюда заключаем, что уравнения (3.7) и (3.8) эквивалентны. Следовательно, релаксация потока теплового потока и градиента температуры приводит к одинаковым результатам.

Подставляя (3.4) в (3.5), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \tau_1^2 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a\tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2 \partial t}. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9), ввиду наличия слагаемого с третьей производной от температуры по времени, является гиперболическим.

Исследование точного решения уравнения (3.6) показывают, что при $\delta \gg l$ теплообмен происходит с конечной скоростью при скачке температуры на движущемся с постоянной скоростью фронте тепловой волны, отделяющем возмущенную и невозмущенную (где сохраняется начальная температура) части среды [4, 25, 54, 55]. Наличие скачка температуры приводит к бесконечным тепловым потокам на фронте волны и к возникновению изотерм внутри среды. Этот факт следует объяснять отсутствием учёта пространственной нелокальности и, как следствие, неучётом перекрестных эффектов вследствие взаимного влияния временной и пространственной нелокальности. При толщинах пластины, сопоставимых с длиной свободного пробега микрочастиц ($\delta \sim l$), диффузи-

онный процесс переноса теплоты переходит в волновой, что связано с баллистическим переносом теплоты. Детальные исследования точного аналитического решения уравнения (3.6) приведены в работах [4, 48, 54, 55, 66].

Выполним анализ решения уравнения (3.8), краевые условия которого имеют вид

$$T(x,0) = T_0; \quad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0; \quad T(\delta,t) = T_{\text{ст}}, \quad (3.10)$$

где δ – половина толщины пластины; T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура пластины при $x = \delta$ ($0 < x < \delta$, $t > 0$).

Введём следующие безразмерные переменные и параметры

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}; \quad F_1 = \frac{a\tau_1}{\delta^2}; \quad F_2 = \frac{a\tau_2}{\delta^2}; \quad (3.11)$$

где Θ , ξ , Fo – безразмерные температура, координата, время; F_1 , F_2 – безразмерные коэффициенты релаксации.

Задача с учетом обозначений будет

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + F_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + F_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}}; \quad (3.12)$$

$$(\text{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi,0) = 1; \quad (3.13) \quad \frac{\partial \Theta(\xi,0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \Theta(0,\text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (3.15) \quad \Theta(1,\text{Fo}) = 0. \quad (3.16)$$

Точное решение задачи (3.12), (3.16)

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(z_k \text{Fo}) + C_{2k} \exp(z_{2k} \text{Fo})] \cos(r \frac{\pi}{2} \xi), \quad (3.17)$$

где
$$z_{ik} = \frac{-(1 + F_2 v_k) \pm \sqrt{(1 + F_2 v_k)^2 - 4F_1 v_k}}{2F_1}, \quad (i = 1, 2; \quad r = 2k - 1);$$

$$C_{1k} = -C_{2k} z_{2k} / z_{1k}; \quad C_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{4}{r\pi} \left/ \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right) \right.; \quad v_k = \frac{r^2 \pi^2}{4}.$$

Из анализа расчетов по (3.17) следует, что в зависимости от толщины пластины δ существует два режима теплообмена – диффузионный и баллистический. Диффузионный режим наблюдается для толщин пластины, значительно превышающих длину свободного пробега микрочастиц. Решение (3.17) в этом

случае совпадает с решением параболического уравнения (при $F_1 = F_2 = 0$ в уравнении (3.12)) во всем диапазоне числа Фурье, за исключением сверхмалых значений. (см. рис. 3.1). Для этих Fo граничное условие (3.16) не может быть принято мгновенно, а лишь в течение некоторого начального времени участка. Так, при его точном выполнении непосредственно в точке $\xi = 1$ в бесконечно малой окрестности этой точки ($0,999999 \leq \xi \leq 1$) в некотором диапазоне начального времени ($0 \leq Fo \leq 10^{-5}$) происходит скачок температуры, что свидетельствует о сопротивлении среды процессу изменения её температурного состояния. В этом диапазоне числа Фурье каких – либо совпадений с точным решением параболического уравнения не наблюдается.

С уменьшением толщины пластины (что при прочих равных условиях приводит к увеличению F_1 и F_2 (см. обозначения (3.11)) до величин, соизмеримых с длиной свободного пробега микрочастиц, диффузионный процесс теплообмена сменяется на баллистический (см. рис. 3.2). В этом случае теплообмен протекает при практическом отсутствии градиента температуры по пространственной переменной.

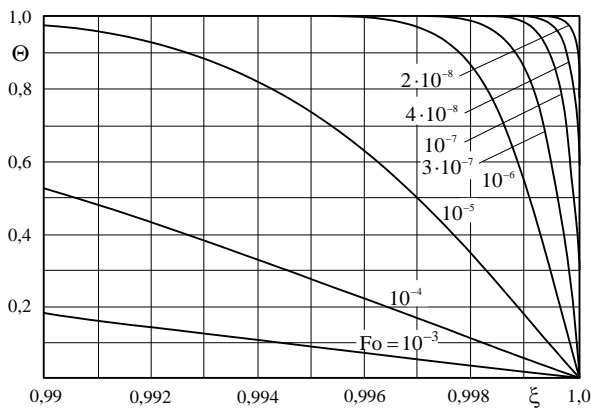


Рис. 3.1. Изменение температуры в диапазоне $2 \cdot 10^{-8} \leq Fo \leq 10^{-3}$ ($0,99 \leq \xi \leq 1,0$). Расчет по формуле (3.17). $F_1 = F_2 = 10^{-7}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-11}$; $a = 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$; $\delta = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}$

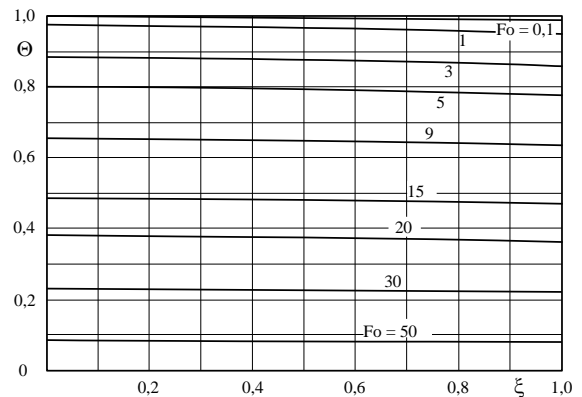


Рис. 3.2. Изменение температуры в диапазоне $0,1 \leq Fo \leq 50$. Расчет по формуле (3.17). $F_1 = F_2 = 20$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-11} \text{ с}$; $a = 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$; $\delta = 0,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}$

Выполним исследование точного решения уравнения (3.9). Краевые условия для пластины в данном случае будут

$$\begin{aligned}
T(x,0) = T_0; \quad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial^2 T(x,0)}{\partial t^2} = 0; \\
\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0; \quad T(\delta,t) = T_{\text{cr}}, \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Для приведения задачи (3.9), (3.18) к безразмерному виду к обозначениям (3.11) добавим еще $F_3 = a^2 \tau_1^2 / \delta^4$. С учетом обозначений задача будет

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + F_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} + F_3 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \text{Fo}^3} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + F_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}}; \quad (3.19) \\
(\text{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1);
\end{aligned}$$

$$\Theta(\xi,0) = 1; \quad (3.20) \quad \frac{\partial \Theta(\xi,0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad (3.21) \quad \frac{\partial^2 \Theta(\xi,0)}{\partial \text{Fo}^2} = 0; \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \Theta(0,\text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (3.23) \quad \Theta(1,\text{Fo}) = 0. \quad (3.24)$$

Решение задачи находим в виде

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \varphi(\text{Fo})\psi(\xi), \quad (3.25)$$

где $\varphi(\text{Fo})$ и $\psi(\xi)$ – функции времени Fo и координаты ξ .

Подставим (3.25) в (3.19)

$$\frac{\phi' + \text{Fo}_1 \phi'' + \text{Fo}_3 \phi'''}{\phi + \text{Fo}_2 \phi'} = \frac{\psi''}{\psi}, \quad (3.26)$$

где $\phi' = d\phi/d\text{Fo}$; $\phi'' = d^2\phi/d\text{Fo}^2$; $\phi''' = d^3\phi/d\text{Fo}^3$; $\psi'' = d^2\psi/d\xi^2$.

Приравняв правую и левую части соотношения (3.26) некоторой постоянной – ν_k , относительно $\phi(\text{Fo})$ и $\psi(\xi)$ будем иметь

$$\phi' + F_1 \phi'' + F_3 \phi''' + (\phi + F_2 \phi')\nu = 0; \quad (3.27)$$

$$\psi'' + \nu\psi = 0. \quad (3.28)$$

Подставив (3.25) в (3.23), (3.24), имеем

$$\psi'(0) = 0; \quad (3.29) \quad \psi(1) = 0. \quad (3.30)$$

Решение задачи (3.28) – (3.30) ищем в виде

$$\psi(\xi) = \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right). \quad (3.31)$$

Формула (3.31) удовлетворяет условиям (3.29), (3.30). Подставив (3.31) в (3.28), получим формулу для собственных чисел

$$\nu_k = r^2 \pi^2 / 4, \quad (r = 2k - 1; \quad k = \overline{1, \infty}). \quad (3.32)$$

Запишем характеристическое уравнение для (3.27)

$$F_3 z^3 + F_1 z^2 + z + (1 + F_2 z)\nu_k = 0. \quad (3.33)$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$z_j = -2\sqrt{Q} \cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}j\right) - \frac{F_1}{3F_3},$$

$$\text{где } j = 1, 2, 3; \quad \phi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right); \quad Q = \left(\frac{F_1}{3F_3}\right)^2 - \frac{1 + v_k F_2}{3F_3};$$

$$R = \left(\frac{F_1}{3F_3}\right)^3 - \frac{(1 + v_k F_2)F_1}{6F_3^2} + \frac{v_k}{2F_3}.$$

Определив z_1, z_2, z_3 , решение уравнения (3.27) будет

$$\phi(F_0) = C_1 \exp(z_1 F_0) + C_2 \exp(z_2 F_0) + C_3 \exp(z_3 F_0), \quad (3.34)$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

Подставим (3.31), (3.34) в (3.25) и найдем сумму частных решений

$$\Theta(\xi, F_0) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_{1k} e^{z_{1k} F_0} + C_{2k} e^{z_{2k} F_0} + C_{3k} e^{z_{3k} F_0}) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right), \quad (r = 2k - 1). \quad (3.35)$$

Для определения C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} составляется невязка условий (3.20) – (3.22) и требуется ее ортогональность к функциям $\cos(j\pi\xi/2)$, ($j = r = 2k - 1$)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (C_{1k} + C_{2k} + C_{3k}) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi &= \int_0^1 \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi; \\ \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (z_{1k} C_{1k} + z_{2k} C_{2k} + z_{3k} C_{3k}) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi &= 0; \\ \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (z_{1k}^2 C_{1k} + z_{2k}^2 C_{2k} + z_{3k}^2 C_{3k}) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi\right) d\xi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

$$(r = j = 2k - 1).$$

Соотношения (3.36) ввиду ортогональности косинусов C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} приводятся к системе трех алгебраических для C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}

$$C_{1k} = 4\eta z_{3k} z_{2k} / ((-2\mu\eta z_{3k} - r\pi z_{3k} + 2\mu\eta z_{1k} + r\pi z_{1k})(z_{1k} - z_{2k})); \quad C_{2k} = -4\eta z_{3k} z_{1k} / ((z_{3k}(z_{1k} - z_{2k})(2\mu\eta z_{2k} + r\pi z_{2k} - 2\mu\eta) - r\pi z_{3k}));$$

$$C_{3k} = 4\eta z_{1k} z_{2k} / (-2\mu\eta z_{3k} z_{1k} - r\pi z_{3k} + 2\mu\eta z_{3k}^2 + r\pi z_{3k}^2 - 2z_{2k} z_{3k} \mu\eta - r\pi z_{2k} z_{3k} + 2\mu\eta z_{1k} z_{2k} + r\pi z_{1k} z_{2k}),$$

где $\mu = \cos((2k - 1)\pi/2)$; $\eta = \sin((2k - 1)\pi/2)$.

Расчеты по (3.35) даны на рис. 3.3 – 3.8, из анализа которых видно, что определяющее влияние на температурное распределение оказывает толщина пластины. Это влияние наиболее существенно проявляется при переходе к пластинкам наноразмерной толщины, соизмеримой с длиной свободного пробега микрочастиц. При этом существует некоторая толщина пластины, отделяющая диффузионные режимы теплообмена от волновых. Рассмотрим результаты рас-

четов для толщины пластины $\delta = 10^{-3}$ м (см. рис. 3.3, 3.4). Анализ позволяет заключить о задержке установления граничного условия первого рода (3.24) в окрестности точки ξ . Так, при точном выполнении условия (3.24) в точке $\xi = 1$, что следует из решения (3.35), в бесконечно малой ее окрестности ($0,99999 \leq \xi \leq 1,0$) в диапазоне времени ($0 \leq Fo \leq 0,081$) происходит скачок температуры, что свидетельствует о сопротивлении среды изменению ее температуры (рис. 3.3, 3.4). Например, в точке $\xi = 0,99999$ в моменты времени $Fo = 10^{-10}; 5 \cdot 10^{-10}; 10^{-9}; 5 \cdot 10^{-9}$ наблюдаются соответственно температуры $\Theta = 0,59; 0,28; 0,18; 0,09$. Температура $\Theta = 0$ наблюдается в этой точке лишь при $Fo \approx 0,081$ (см. рис. 3.4). Для всех $Fo > 10^{-8}$ решение совпадает с решением параболического уравнения. Несовпадение с решением параболического уравнения для $Fo < 10^{-8}$ объясняется неадекватностью решения параболического уравнения в области сверхмалых значений временной и пространственной переменных, сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц. Таким образом, при толщинах пластины $\delta \geq 10^{-3}$ м и при заданных выше коэффициентах релаксации τ_1, τ_2 происходит диффузионный процесс переноса теплоты с задержкой принятия граничного условия (3.24) в окрестности точки $\xi = 1,0$ и, как следствие, несовпадение с решением параболического уравнения теплопроводности в области сверхмалых значений времени и пространства.

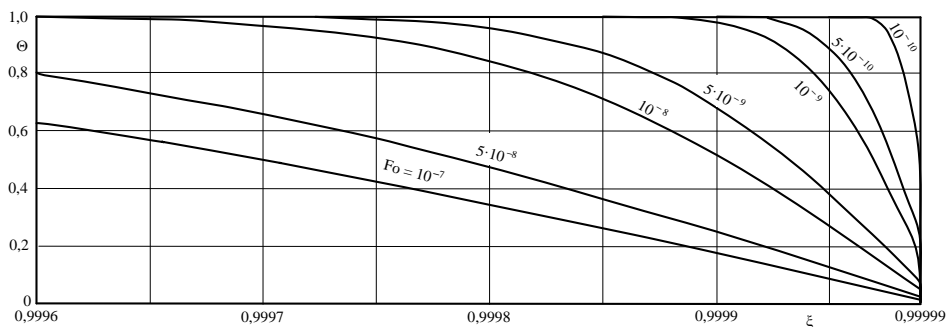


Рис. 3.3. Распределение температуры в диапазоне координаты $0,9996 \leq \xi \leq 1,0$.
 $a = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$; $\delta = 10^{-3} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-8} \text{ с}$; $\tau_2 = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $F_1 = 2 \cdot 10^{-11}$; $F_2 = 10^{-11}$;
 $F_3 = 10^{-22}$

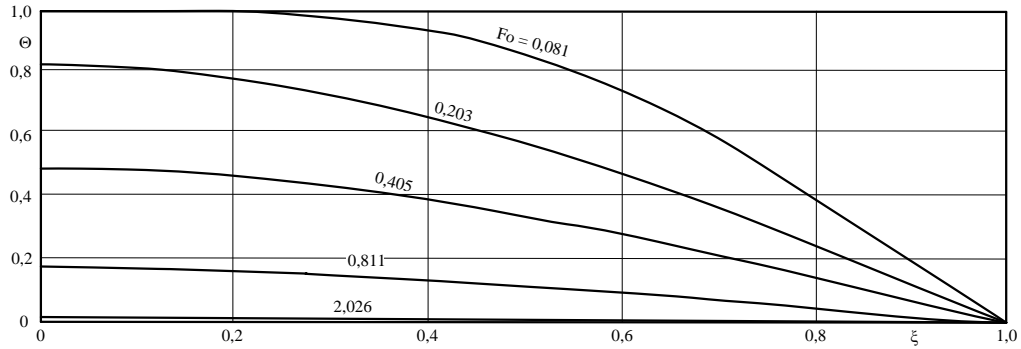


Рис. 3.4. Распределение температуры. $a = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$; $\delta = 10^{-3} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-8} \text{ с}$; $\tau_2 = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $F_1 = 2 \cdot 10^{-11}$; $F_2 = 10^{-11}$; $F_3 = 10^{-22}$

Расчеты при $\delta = 10^{-6} \text{ м}$ даны на рис. 3.5, 3.6. Из их анализа видно, что, как и в предыдущем случае, установление граничного условия первого рода происходит в течение некоторого диапазона начального времени. Однако существенным отличием является то, что температурные кривые, вплоть до момента времени, когда тепловая волна достигает центра пластины, пересекают линию начальной температуры $\Theta(\xi, 0) = 1,0$ под некоторым углом α , уменьшающимся с увеличением времени и принимающим величину $\alpha = 0$ при достижении фронтом волны координаты $\xi = 0$. То есть температурная кривая в этой точке является касательной к линии начальной температуры $\Theta(\xi, 0) = 1,0$. Это объясняется тем, что в точке $\xi = 0$ выполняется условие симметрии (адиабатной стенки) вида (3.23). Наличие угла α свидетельствует о конечной скорости распространения теплоты.

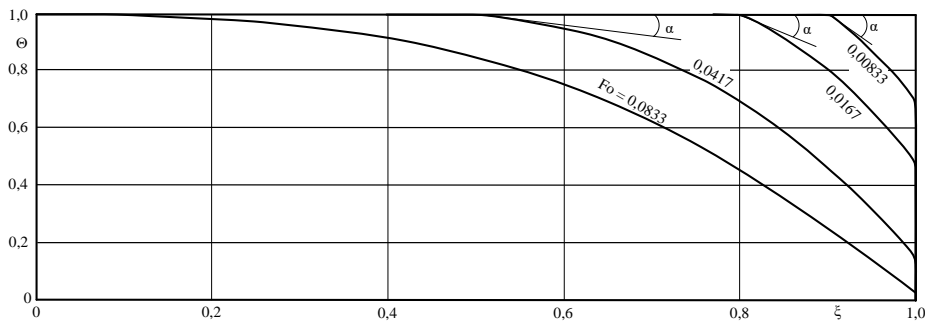


Рис. 3.5. Распределение температуры. $a = 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$; $\delta = 10^{-6} \text{ м}$; $\tau_1 = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $\tau_2 = 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $F_1 = 0,025$; $F_2 = 0,0225$; $F_3 = 0,000625$

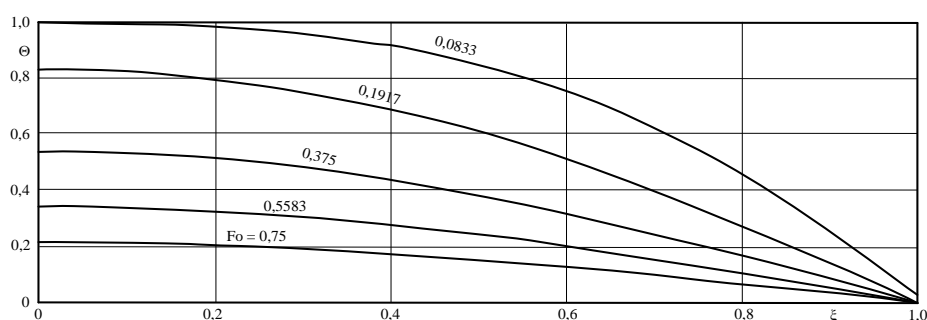


Рис. 3.6. Распределение температуры. $a = 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$; $\delta = 10^{-6} \text{ м}$;
 $\tau_1 = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $\tau_2 = 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $F_1 = 0,025$; $F_2 = 0,0225$; $F_3 = 0,000625$

При дальнейшем уменьшении толщины пластины происходит качественное изменение в распределении температуры. Расчеты при $\delta = 10^{-9} \text{ м}$ даны на рис. 3.7, 3.8. Из их анализа видно, что теплообмен протекает при практическом отсутствии градиентов температур по толщине пластины (рис. 3.7), что свидетельствует о баллистическом переносе теплоты. Ввиду малой толщины пластины время наступления стационарного режима ($Fo \approx 500000$) составляет $t = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ (рис. 3.8). Отметим, что классические модели в данном случае не могут быть использованы ввиду неадекватного описания столь быстропротекающих процессов.

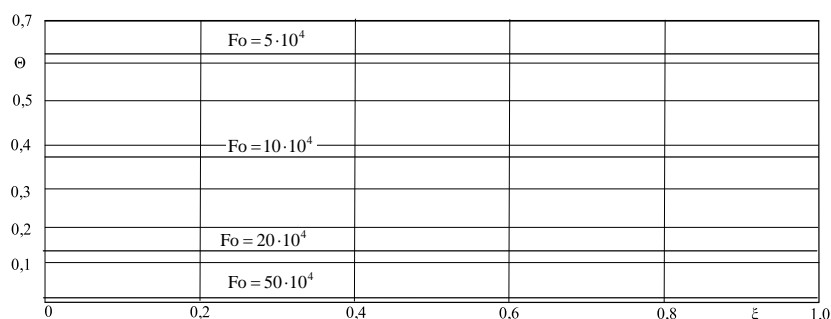


Рис. 3.7. Распределение температуры. $a = 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$;
 $F_1 = 200000$; $F_2 = 100000$; $F_3 = 4 \cdot 10^{10}$

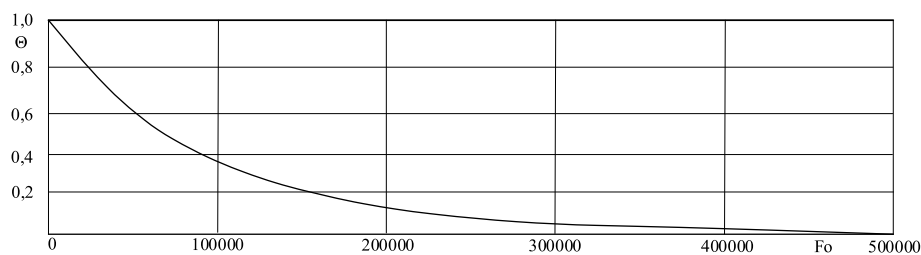


Рис. 3.8. Изменение температуры в центре пластины ($\xi = 0$). $a = 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$;
 $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $F_1 = 200000$; $F_2 = 100000$; $F_3 = 4 \cdot 10^{10}$

3.2. Разработка математической модели трехмерной теплопроводности с учетом релаксационных явлений

Решение задач для объемных тел произвольной конфигурации представляет большие математические трудности. Точные аналитические решения таких задач не найдены и поэтому они могут быть решены лишь численными методами. При этом особую актуальность представляет получение решений такого рода задач для наноразмерных объектов. Это связано с тем, что в области таких размеров (сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц) классические методы не могут использоваться ввиду неадекватного описания ими реальных физических процессов. В связи с чем, разработка математических моделей, позволяющих исследовать процессы переноса в телах произвольной формы (в том числе и наноразмерных) представляется актуальной проблемой.

Рассмотрим последовательность вывода трехмерного уравнения теплопроводности с учётом двухфазного запаздывания в формуле Фурье

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3.37)$$

где q_x, q_y, q_z – тепловые потоки по координатным осям x, y, z ; T – температура; x, y, z – координаты; λ – коэффициент теплопроводности.

Формулы (3.37), учитывая скорости изменения теплового потока и градиента температуры (реализация двукратного запаздывания), принимают вид

$$q_x = -\tau_1 \frac{\partial q_x}{\partial t} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}; \quad (3.38)$$

$$q_y = -\tau_1 \frac{\partial q_y}{\partial t} - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial t}; \quad (3.39)$$

$$q_z = -\tau_1 \frac{\partial q_z}{\partial t} - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial t}; \quad (3.40)$$

где t – время; τ_1 – коэффициент релаксации теплового потока; τ_2 – коэффициент релаксации градиента температуры.

Подставляя (3.38) – (3.40) в уравнение теплового баланса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right), \quad (3.41)$$

имеем

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = & -\tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \\ & + \lambda \tau_2 \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 T}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^3 T}{\partial z^2 \partial t} \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

где c – теплоёмкость; ρ – плотность.

Уравнение (3.42) с учётом (3.41) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \nabla^2 T + a \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 T), \quad (3.43)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности.

В случае граничных условий первого рода для тела в форме куба краевые условия будут

$$T(x, y, z, 0) = T_0; \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} T(0, y, z, t) = T(\delta, y, z, t) = T(x, 0, z, t) = \\ = T(x, \delta, z, t) = T(x, y, 0, t) = T(x, y, \delta, t) = T_{cm}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где T_0 – начальная температура; T_{cm} – температура стенки.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{T - T_{cm}}{T_0 - T_{cm}}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \eta = \frac{y}{\delta}; \quad \rho = \frac{z}{\delta}; \quad \text{Fo}_1 = \frac{a\tau_1}{\delta^2}; \quad \text{Fo}_2 = \frac{a\tau_2}{\delta^2}, \quad (3.46)$$

где Θ – безразмерная температура; Fo – число Фурье; ξ, η, ρ – безразмерные координаты; δ – длина ребра куба; Fo_1, Fo_2 – безразмерные коэффициенты релаксации.

Задача с учётом обозначений будет

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} = \nabla^2 \Theta + \text{Fo}_2 \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \nabla^2 \Theta; \quad (3.47)$$

$$\Theta(\xi, \eta, \rho, 0) = 1; \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \Theta(0, \eta, \rho, Fo) = \Theta(1, \eta, \rho, Fo) = \Theta(\xi, 0, \rho, Fo) = \Theta(\xi, 1, \rho, Fo) = \\ = \Theta(\xi, \eta, 0, Fo) = \Theta(\xi, \eta, 1, Fo) = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Для задачи (3.47) – (3.49) в диссертации разработана компьютерная программа, позволяющая определять температурное состояние в телах сложной конфигурации, в том числе и для наноматериалов, характеризующихся малыми временами протекания процессов. Программа построена на последней версии Ansys 2020 R1 и может быть использована в стандартных модулях Ansys, таких как Static Structural и Dynamic Structural для определения квазистатических и динамических напряжений в телах сложной конфигурации [6].

Отличительной особенностью разработанного для решения задачи (26), (27) программного комплекса является возможность моделирования высокоскоростных теплообменных процессов для трехмерных тел любой геометрической формы, в том числе и для наноматериалов.

На основе метода математического моделирования локально – неравновесных процессов разработан APDL – алгоритм, позволивший впервые исследовать температуру в телах сложной геометрической формы с учетом релаксационных явлений. Использование стандартных средств автоматизации расчетов ANSYS, позволило создать удобный пользовательский интерфейс, интегрированный в решатель стандартного модуля Transient Thermal. Система инженерного анализа ANSYS предоставляет широкий набор инструментов для работы с базой данных модели. Разработанный программный продукт позволяет использовать следующие средства автоматизации работы с расчётной моделью ANSYS: построение (импорт) геометрической модели, генерация расчётной сетки, наложение граничных и начальных условий, формирование матриц теплоемкости и теплопроводности, решение системы линейных уравнений, а также трёхмерное цветографическое отображение результатов расчёта (рис. 3.9а)

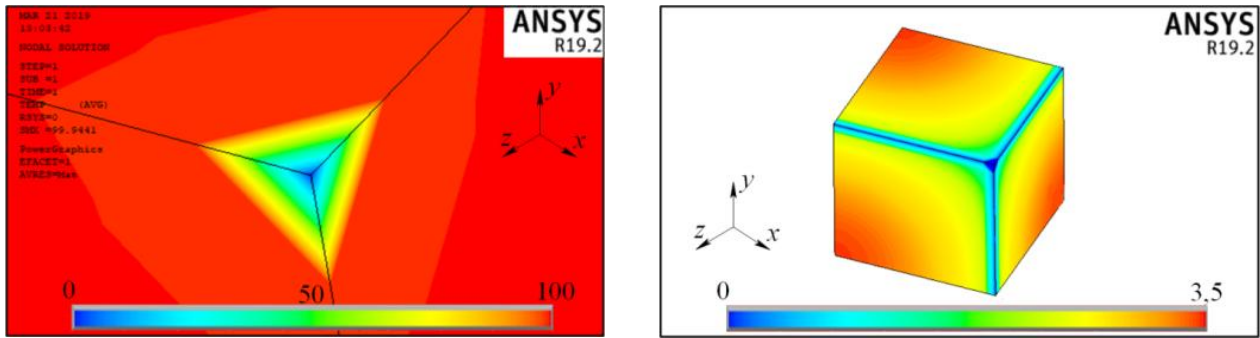


Рис. 3.9а. Скрининг результатов расчета программного комплекса, созданного на базе Ansys

Для проверки работоспособности программы были выполнены расчеты по методу расщепления и прогонки для куба в постановке (3.47) – (3.49) при $Fo_1 = Fo_2 = 0$ (см. рис. 3.9б). Расчеты расчетов с учетом релаксационных свойств даны на рис. 3.10. – 3.12, из анализа которых следует, что граничные условия первого рода не могут быть приняты мгновенно, а лишь в течение некоторого начального времени (рис. 3.13). Отметим, что непосредственно в точках границы условия (3.49) выполняются. Однако в малой окрестности этих точек происходит скачок температуры, наблюдающийся лишь на начальном временном участке. Этот скачок можно объяснить инерционностью процесса теплообмена – то есть тело как бы «сопротивляется» процессу проникновения теплоты. Отсюда следует, что величина коэффициентов теплоотдачи зависит от физических свойств тела и она не может принимать бесконечных значений, как это обычно принимается при задании граничных условий первого рода, когда полагают $\alpha \rightarrow \infty$.

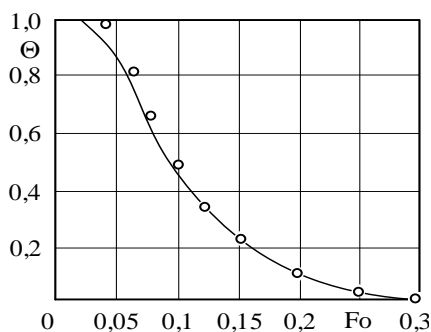


Рис. 3.9б. Изменение температуры в центре куба. $Fo_1 = Fo_2 = 0$

— — численное решение методом конечных разностей;

○ — численное решение методом конечных элементов на основе программного комплекса, созданного на базе Ansys

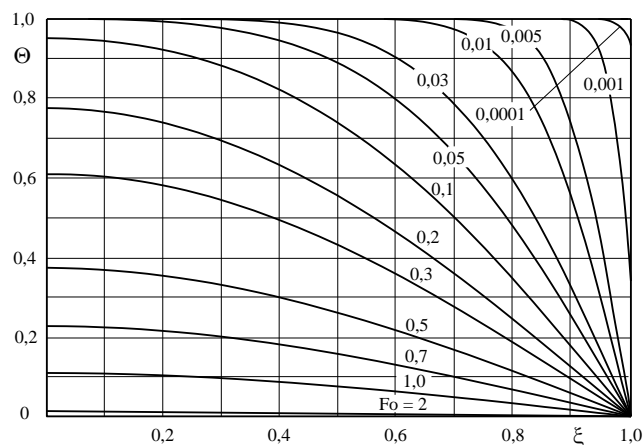


Рис. 3.10. Распределение температуры при $\eta = 0,5$; $\rho = 0,5$; $0,5 \leq \xi \leq 1,0$.
 $Fo_1 = Fo_2 = 10^{-3}$

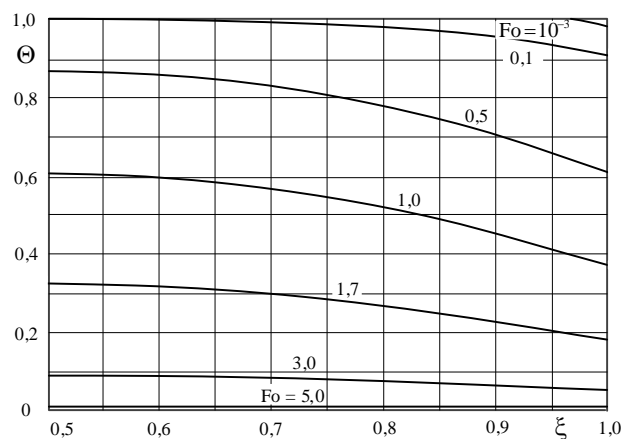


Рис. 3.11. Распределение температуры при $\eta = 0,5$; $\rho = 0,5$; $0,5 \leq \xi \leq 1,0$.
 $Fo_1 = Fo_2 = 1$

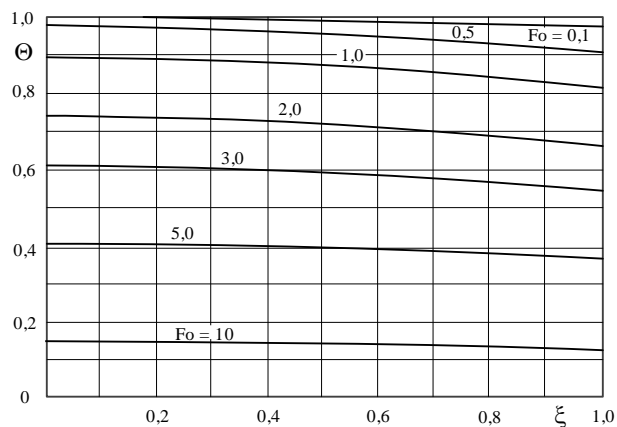


Рис. 3.12. Распределение температуры при $\eta = 0,5$; $\rho = 0,5$; $0,5 \leq \xi \leq 1,0$.
 $Fo_1 = Fo_2 = 2$

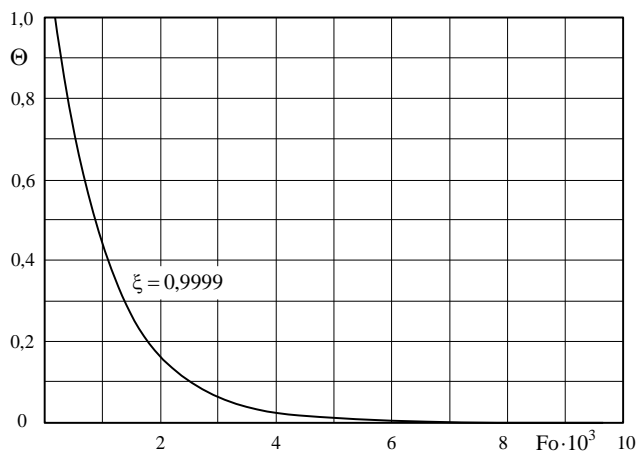


Рис. 3.13. Распределение температуры во времени в точке $\xi = 0,9999$.
 $Fo_1 = Fo_2 = 10^{-3}$

3.3. Идентификация коэффициентов теплоотдачи и релаксационных свойств среды

При постановке краевой задачи теплопроводности в твердом теле обычно используется классическое параболическое уравнение теплопроводности, начальные и граничные условия. Если интересующий исследователя процесс протекает при граничных условиях 1-го, 2-го или 4-го рода, то трудностей в их задании не возникает. Однако, если теплообмен на границах твердого тела протекает в результате контакта с жидкостью или газом – появляется необходимость определения коэффициента теплоотдачи, зависящего от большого числа факторов (геометрии тела, скорости и направления движения жидкости, теплофизических свойств жидкости и тела, температуры тела и проч.). В случае стационарного теплообмена для определения коэффициента теплоотдачи используются критериальные уравнения и числа подобия [49]:

1) по известным скорости движения среды, её свойствам и геометрическим параметрам твердого тела определяется режим движения жидкости (ламинарный, переходный или турбулентный), т.е. определяется критерий Рейнольдса $Re = w\delta / \nu$, где w – скорость течения среды, м/с; δ – определяющий размер тела, м; ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости или газа, м²/с.

2) в зависимости от режима движения жидкости выбирается эмпирическая формула для определения критерия Nu:

$$- \text{ для свободной конвекции } Nu = A (Gr_{жс} Pr_{жс})^m \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25} ;$$

$$- \text{ для вынужденной конвекции } Nu = B Re_{жс}^n Pr_{жс}^l \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25} ,$$

где A, B, m, n, l – эмпирические коэффициенты, значения которых зависят от вида поверхности и режима движения теплоносителя.

3) из формулы критерия Нуссельта $Nu = \alpha\delta / \lambda_{жс}$ находится искомый коэффициент теплоотдачи α .

В случае, если теплообмен между жидкостью и стенкой протекает в нестационарных условиях, определение переменного от времени коэффициента теплообмена затруднительно – как правило он находится из обратной задачи на основе эмпирических данных по температурам тела в процессе теплообмена. Однако, как показывают приведенные в настоящей работе исследования, для моделирования температурного изменения в твердом теле при граничных условиях третьего рода вместо использования коэффициента теплоотдачи достаточно учесть релаксационные свойства материала, характерные для рассматриваемого процесса теплообмена. С этой целью в формуле закона Фурье учитывается изменение во времени теплового потока и градиента температуры. Отметим, что в классическом законе Фурье

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

следствие (q – тепловой поток) и причина ($\partial T / \partial x$ – градиент температуры) не зависят от времени. То есть с изменением причины следствие наступает мгновенно. Но перенос тепловой энергии происходит не мгновенно, а за определенный промежуток времени Δt . Неучёт релаксационных явлений в задачах теплопереноса приводит к известным парадоксам: бесконечному тепловому потоку в точке задания граничных условий первого рода, бесконечной скорости распространения теплоты. Проблему парадоксов теории теплопроводности можно решить путем учета скорости теплового потока и градиента температуры в эмпирической формуле Фурье

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}, \quad (3.50)$$

где τ_1 , τ_2 – коэффициенты релаксации.

С целью анализа теплообмена при условиях 3-го рода рассмотрим решение задачи

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + Fo_1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Fo_2 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo}; \quad (3.51)$$

$$(Fo > 0; \quad 0 < \xi < 1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (3.52) \quad \partial\Theta(\xi, 0)/\partial Fo = 0; \quad (3.53) \quad \partial\Theta(0, Fo)/\partial\xi = 0; \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial\Theta(1, Fo)}{\partial\xi} + Bi\Theta(1, Fo) = 0, \quad (3.55)$$

$$\text{где } \Theta = \frac{t - t_{cp}}{t_0 - t_{cp}}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad Fo = \frac{a\tau}{\delta}; \quad Fo_1 = \frac{a\tau_1}{\delta^2}; \quad Fo_2 = \frac{a\tau_2}{\delta^2}; \quad Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda};$$

Fo – число Фурье; Bi – число Био; t – температура; Fo_1, Fo_2 – безразмерные коэффициенты релаксации; τ – время; Θ – безразмерная температура x – координата; t_0 – начальная температура; δ – толщина пластины; α – коэффициент теплоотдачи; t_{cp} – температура среды; λ – теплопроводность; ξ – безразмерная координата; a – температуропроводность.

Решение задачи (3. 51) – (3.55) принимаем в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \varphi(Fo)\psi(\xi). \quad (3.56)$$

Подставим (3.56) в (3.51)

$$Fo_1 \frac{d^2\varphi}{dFo^2} + (v^2 Fo_2 + 1) \frac{d\varphi}{dFo} + v^2 \varphi = 0; \quad (3.57)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + v^2 \psi = 0, \quad (3.58)$$

где v – собственные числа.

Подставляя (3.56) в (3.54), (3.55), находим

$$\frac{d\psi(0)}{d\xi} = 0; \quad (3.59) \quad \frac{d\psi(1)}{d\xi} + Bi\psi(1) = 0. \quad (3.60)$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (3.58) – (3.60) принимается в виде

$$\psi(\xi) = \cos(v\xi). \quad (3.61)$$

Решение (3.61) удовлетворяет (3.58) и (3.59). Подставим (3.61) в (3.60)

$$\left[-v \sin(v\xi) + Bi \cos(v\xi) \right]_{\xi=1} = 0. \quad (3.62)$$

Отсюда получаем

$$ctgv = v/Bi. \quad (3.63)$$

Уравнение (3.63) для любого V_i выполняется только при некоторых дискретных значениях собственных чисел v . При $V_i \rightarrow \infty$ получаем

$$v_k = (2k - 1)\pi/2, \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (3.64)$$

Полученные по (3.64) v_k совпадают с собственными числами задачи Штурма – Лиувилля. Для других V_i уравнение (3.63) решается численными (или графическими) методами.

Уравнение (3.57) имеет характеристическое уравнение

$$Fo_1 z^2 + (v^2 Fo_2 + 1)z + v^2 = 0, \quad (k = \overline{1, \infty}) \quad (3.65)$$

Если $D = (v^2 Fo_2 + 1)^2 - 4Fo_1 v^2 > 0$, то уравнение (3.65) имеет 2 действительных корня z_{1k} и z_{2k}

$$z_{ik} = \frac{v^2 Fo_2 - 1 \pm \sqrt{(v^2 Fo_2 + 1)^2 - 4Fo_1 v^2}}{2Fo_1}, \quad (i = 1, 2; k = \overline{1, \infty}) \quad (3.66)$$

Учитывая z_{1k} и z_{2k} , решение уравнения (3.57) имеет вид

$$\varphi_k(Fo) = C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo), \quad (3.67)$$

где C_{jk} ($j = 1, 2; k = \overline{1, \infty}$) – константы интегрирования.

Подставим (3.61) и (3.67) в (3.56)

$$\Theta_k(\xi, Fo) = [C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo)] \cos(v_k \xi), \quad (k = \overline{1, \infty}) \quad (3.68)$$

Каждое решение (3.68) удовлетворяет (3.51), (3.54) и (3.55). Для выполнения условий (3.52), (3.53) составим сумму

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo)] \cos(v_k \xi). \quad (3.69)$$

Подставим (3.69) в (3.53)

$$C_{1k} = -C_{2k} z_{2k} / z_{1k}. \quad (3.70)$$

Подставив (3.69) в (3.52), с учетом (3.70) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} (1 - z_{2k} / z_{1k}) \cos(v_k \xi) = 1. \quad (3.71)$$

Соотношение (3.71) является разложением единицы в ряд Фурье. Умножим (3.71) на $\cos(v_k \xi)$ и найдём интегралы

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right) \cos(v_k \xi) - 1 \right] \cos(v_k \xi) d\xi = 0. \quad (3.72)$$

С учётом ортогональности косинусов получаем

$$\int_0^1 C_{2k} \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right) \cos^2(v_k \xi) d\xi - \int_0^1 \cos(v_k \xi) d\xi = 0, \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (3.73)$$

Отсюда находим

$$C_{2k} = \frac{\sin v_k}{(1 - z_{2k}/z_{1k})[v_k/2 + 0,25 \sin(2v_k)]}, \quad (k = \overline{1, \infty}) \quad (3.74)$$

С учётом C_{1k} и C_{2k} , $(k = \overline{1, \infty})$ точное решение задачи определяется из (3.69).

Если дискриминант (3.66) $D = (v^2 Fo_2 + 1)^2 - 4Fo_1 v^2 < 0$, будем иметь 2 комплексных корня $z_{1k} = \gamma + i\beta$; $z_{2k} = \gamma - i\beta$, где $i = \sqrt{-1}$;
 $\beta = \sqrt{(v^2 Fo_2 + 1)^2 - 4Fo_1 v^2} / 2Fo_1$; $\gamma = (-v^2 Fo_2 - 1) / 2Fo_1$.

Частные решения уравнения (3.57) имеют вид

$$\varphi_{1k} = \exp(\gamma + i\beta) Fo; \quad \varphi_{2k} = \exp(\gamma - i\beta) Fo. \quad (3.75)$$

Интеграл уравнения (3.57) будет

$$\varphi_k(Fo) = C_{1k} \exp[(\gamma + i\beta) Fo] + C_{2k} \exp[(\gamma - i\beta) Fo], \quad (3.76)$$

где C_{jk} ($j = 1, 2$; $k = \overline{1, \infty}$) – константы интегрирования.

Соотношение (3.76) запишем в виде

$$\varphi_k(Fo) = \exp(\gamma Fo) [C_{1k} \exp(i\beta Fo) + C_{2k} \exp(-i\beta Fo)]. \quad (3.77)$$

Согласно формулам Эйлера $\exp(is) = \cos(s) + i \sin(s)$;
 $\exp(-is) = \cos(s) - i \sin(s)$, (3.77) будет

$$\begin{aligned} \varphi_k(Fo) &= \exp(\gamma Fo) [C_{1k} (\cos(\beta Fo) + i \sin(\beta Fo)) + \\ &\quad + C_{2k} (\cos(\beta Fo) - i \sin(\beta Fo))] = \\ &= \exp(\gamma Fo) [(C_{1k} + C_{2k}) \cos(\beta Fo) - i(C_{2k} - C_{1k}) \sin(\beta Fo)]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Учитывая обозначения $C_{1k} + C_{2k} = B_{1k}$; $i(C_{2k} - C_{1k}) = B_{2k}$, находим

$$\varphi_k(F_0) = \exp(\gamma F_0) [B_{1k} \cos(\beta F_0) - B_{2k} \sin(\beta F_0)]. \quad (3.79)$$

Подставим (3.61) и (3.79) в (3.56) и составим сумму частных решений

$$\Theta(\xi, F_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\exp(\gamma F_0) [B_{1k} \cos(\beta F_0) - B_{1k} \sin(\beta F_0)] \right] \cos\left(r \frac{\pi \xi}{2}\right) \right\}. \quad (3.80)$$

$$(r = 2k - 1; k = \overline{1, \infty}).$$

Констант B_{1k} и B_{2k} находятся из (3.52), (3.53). Подставляя (3.80) в (3.52), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma B_{1k} - \beta B_{2k}) \cos\left(r \frac{\pi \xi}{2}\right) = 0.$$

Или

$$B_{2k} = \gamma B_{1k} / \beta. \quad (3.81)$$

Подставляя (3.80) в (3.53), с учетом (3.81) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) = 1. \quad (3.82)$$

Умножая (3.82) на $\cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right)$, ($r = 2k - 1$) и определяя интегралы, получаем

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi = \int_0^1 \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi. \quad (3.83)$$

С учётом ортогональности косинусов, имеем

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cos^2\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) d\xi - \int_0^1 \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) d\xi = 0. \quad (3.84)$$

Отсюда получаем

$$B_{1k} = \frac{4}{r\pi}. \quad (3.85)$$

Определив констант B_{1k} и B_{2k} решение находится из (3.80). Проверка (3.69) и (3.80) показала, что все соотношения задачи (3.51) – (3.55) выполняются.

Расчеты по формулам (3.69) и (3.80) позволяют заключить, что при $V_i \rightarrow \infty$ решение совпадает с точным решением при условиях первого рода [50].

Предположение, что изменение температуры при граничных условиях третьего рода может быть описано уравнением теплопроводности, включающим релаксационные слагаемые, было выдвинуто в [69], однако подтверждение этой гипотезы получила только в ходе выполненных в настоящей работе исследований. Выполняя решение задачи при граничных условиях первого рода, принимая температуру на границе, равную температуре среды и, учитывая, что при учёте релаксационных свойств температура на границе в зависимости от коэффициентов релаксации может быть переменной во времени, находятся такие коэффициенты релаксации, при которых температурное поле идентично тому, которое получается при заданных коэффициентах теплоотдачи. Как видно из графиков рис. 3.14, 3.15, отличие расчётов по классической методике с учётом коэффициентов теплоотдачи с расчётом по предлагаемой методике с учётом релаксационных свойств тела (минуя рассмотрение коэффициентов теплоотдачи) не превышает 4 %. Таким образом, предложен альтернативный способ моделирования изменения температурных полей в теле, который отличается от классического тем, что интенсивность теплообмена с окружающей средой учитывается не величиной коэффициента теплоотдачи, а температурой среды и коэффициентами релаксации тела. Данный метод позволяет идентифицировать коэффициенты теплоотдачи по известному из эксперимента распределению температуры. При известных коэффициентах теплоотдачи имеется возможность идентифицирования коэффициентов релаксации. Выполним исследование решений (3.69) и (3.80) при различных значениях числа Bi и безразмерных коэффициентов релаксации Fo_1 и Fo_2 .

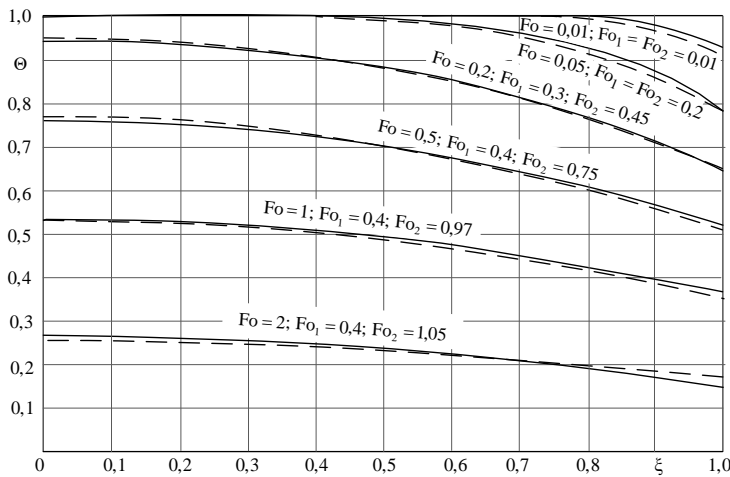


Рис. 3.14. Температурные поля в пластине при граничных условиях 1-го и 3-го рода. — — — — решение при ГУ 3-го рода по формуле (3.80), $Bi = 1; Fo_1 = Fo_2 = 0$; ————— решение при ГУ 1-го рода из [49]

Рассмотрим вариант, когда один из коэффициентов релаксации практически равен нулю $Fo_2 = 10^{-7}$ (рис. 3.16 – 3.18). Если коэффициент релаксации Fo_1 также принимает значения, близкие к нулю ($Fo_1 < 10^{-7}$), то решение (3.80) будет совпадает с решением параболического уравнения. При увеличении Fo_1 ($Fo_1 = 1$) для одинакового Bi на кривых появляется излом, движущийся по ξ во времени (рис. 3.16). Обнаруживаются также прямые и обратные волны с отклонением температуры в область отрицательных её значений. Излом на прямой волне характеризуется тем, что температурные линии составляют угол с линией начальной температуры $\Theta = 1$, что является свидетельством конечной скорости распространения теплоты. В случае параболического уравнения для времени, когда фронт волны ещё не достигает центра пластины, температурные линии касательные к линии начального условия $\Theta(\xi, 0) = 1$. При увеличении Fo_1 ($Fo_1 = 3$) возникают скачки температур с отклонением в область отрицательных значений (рис. 3.17, 3.18). Это объясняется тем, что при больших значениях $Fo_1 = 3$ и малой величине $Fo_2 = 10^{-7}$ уравнение (3.51) идентично гиперболическому уравнению теплопроводности, которое при малых толщинах описывает волновое изменение температуры.

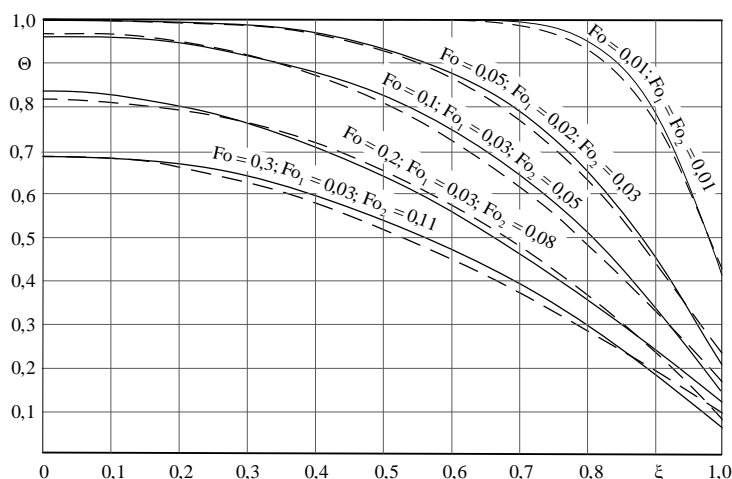


Рис. 3.15. Температурные поля в пластине при граничных условиях 1-го и 3-го рода.

— — — — — решение при ГУ 3-го рода по формуле (3.80), $Bi = 10$; $Fo_1 = Fo_2 = 0$;

————— решение при ГУ 1-го рода из [49]

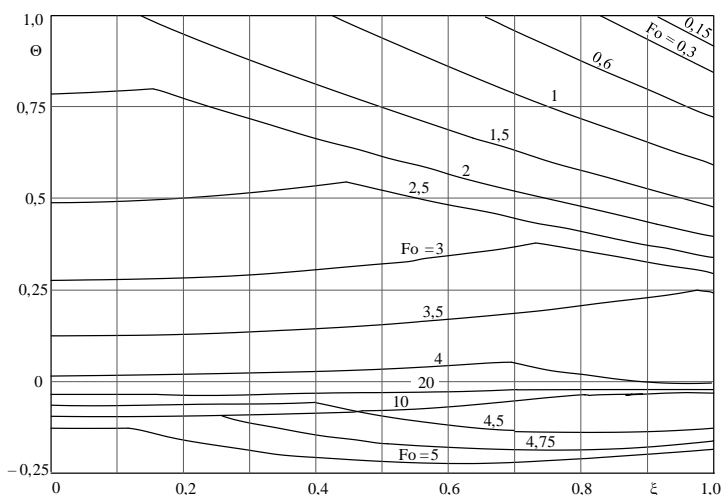


Рис. 3.16. Изменение температуры.

$Bi = 1$; $Fo_1 = 1$; $Fo_2 = 10^{-7}$; $n = 1000$ –
число членов ряда (3.80)

На рис. 3.19 представлены температурные кривые в пластине при $Bi = 10$ с учетом релаксационных явлений при $Fo_1 = Fo_2 = 3$. В отличие от рис. 3.18, на котором температура изменяется скачкообразно и смещается в область отрицательных значений, в данном случае температурные кривые принимают вид практически горизонтальных линий, а процесс теплообмена протекает существенно медленнее, чем без учета локальной неравновесности при $Fo_1 = Fo_2 = 0$.

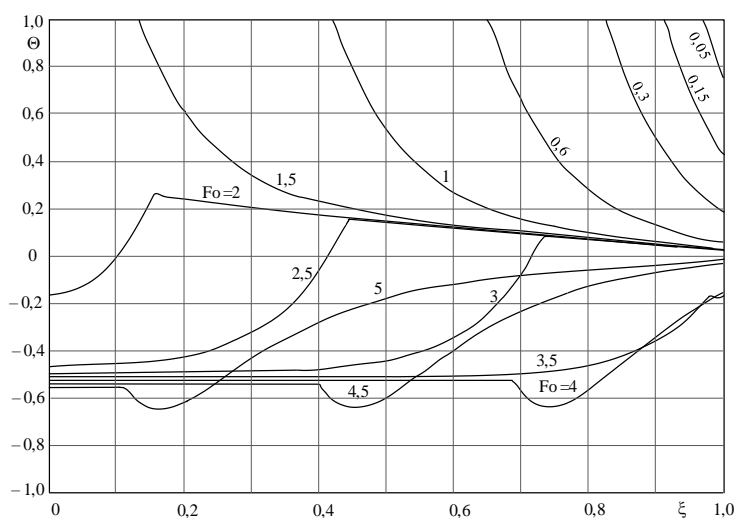


Рис. 3.17. Распределение температуры.

$Bi = 10$; $Fo_1 = 3$; $Fo_2 = 10^{-7}$; $n = 200$ – число членов ряда (3.80)

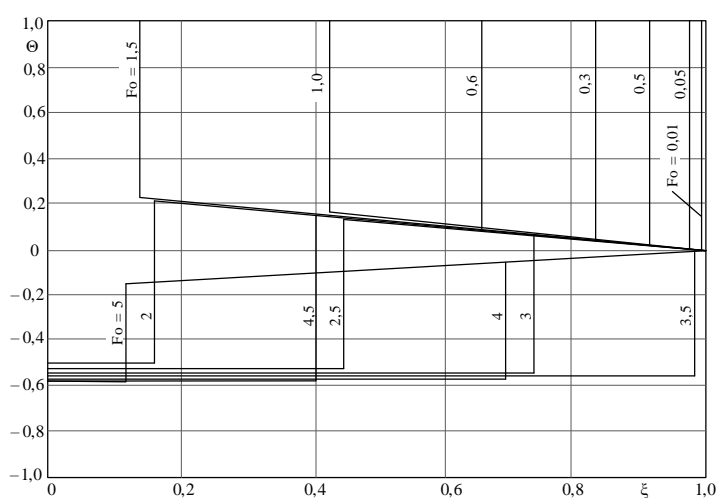


Рис. 3.18. Изменение температуры.

$Bi = 10^6$; $Fo_1 = 3$; $Fo_2 = 10^{-7}$;

$n = 1000$ – число членов ряда (3.80)

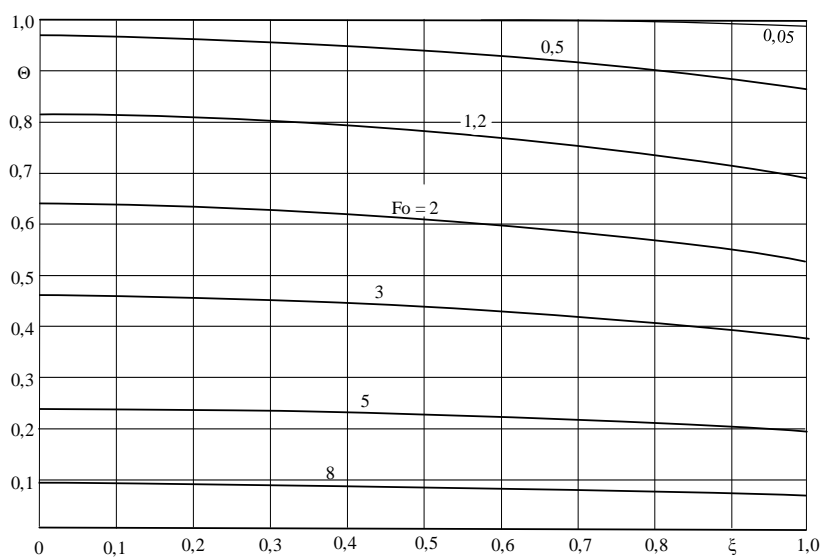


Рис. 3.19. Температурные поля в пластине при граничных условиях

3-го рода с учётом релаксационных явлений. $Bi = 10$; $Fo_1 = 3$; $Fo_2 = 3$; $n = 100$ – число членов ряда (3.80)

3.4. Аналогия локально – неравновесных математических моделей процессов переноса тепла, массы, импульса и электромагнитных колебаний

Выполненные в диссертации исследования показали полную аналогию математических моделей переноса, полученных с учетом релаксационных явлений. Так, полностью аналогичными являются уравнения теплопроводности, диффузии, движения жидкости в трубопроводах, теплообмена в жидкостях, колебательных процессов в твердых телах, жидкостях и газах, а также электромагнитных колебаний (релаксированное телеграфное уравнение без учета потерь через изоляцию) (см. уравнения (3.86) – (3.92):

– теплопроводность (диффузия)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + Fo_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + Fo_1^2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial Fo^3} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} Fo_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo}; \quad (3.86)$$

– давление (скорость) в жидкости

$$Fo_r \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} + \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo^2} + Fo_1 \frac{\partial^3 \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo^3} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} + Fo_2 \frac{\partial^3 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2 \partial Fo}; \quad (3.87)$$

– продольные колебания стержня

$$Fo_3 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + Fo_1 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^3} + \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Fo_2 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo}; \quad (3.88)$$

–колебания струны

$$Fo_r \left[\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^3} \right] + \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Fo_r \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo}; \quad (3.89)$$

– колебания газа

$$Fo_3 \frac{\partial \psi(\eta, Fo)}{\partial Fo} + Fo_1 \frac{\partial^3 \psi(\eta, Fo)}{\partial Fo^3} + \frac{\partial^2 \psi(\eta, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \psi(\eta, Fo)}{\partial \eta^2} + Fo_2 \frac{\partial^3 \psi(\eta, Fo)}{\partial \eta^2 \partial Fo}; \quad (3.90)$$

– изменение скорости при течении Куэтта

$$Fo_p \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^3} + \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + Fo_p \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Fo_p \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo}; \quad (3.91)$$

– телеграфное уравнение в пренебрежении сопротивлением изоляции

$$D_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial Fo^3} + D_3 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + D_4 \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} - D_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - D_5 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo} = 0. \quad (3.92)$$

Безразмерные решения уравнений (3.86) – (3.92) при одинаковых по форме записи краевых условиях одинаковы. Они отличаются лишь различными константами, зависящими от физических свойств, коэффициентов релаксации, сопротивления и проч. Удивительным является тот факт, что все эти многочисленные и совершенно разнородные процессы описываются одним и тем же уравнением, отличающимся для каждого отдельного процесса лишь постоянными коэффициентами (либо их комплексами). Этот факт позволяет верифицировать решения уравнения теплопроводности, ввиду трудности экспериментального определения температуры для малых значений времени, используя для этих целей верифицированные уравнения колебательных процессов, для которых разработаны высокоточные экспериментальные технологии, позволяющие выполнять исследование колебательных процессов наносекундной длительности.

Аналогия дифференциальных уравнений свидетельствует о едином физическом механизме, лежащем в основе процессов переноса тепла, массы, импульса и электромагнитных колебаний. Следовательно, все эти разнородные процессы управляются едиными физическими законами, являющимися законами сохранения.

Выводы

1. Найдено точное решение задачи теплопроводности с учётом релаксационных явлений при граничных условиях 3-го рода.
2. Показано, что температурные поля при условиях 3-го рода могут быть описаны уравнением теплопроводности с учётом двухфазного запаздывания.
3. В конкретных технических устройствах проблема определения коэффициента теплоотдачи, зависящего от большего количества факторов, может быть решена путем идентификации феноменологических коэффициентов в представленной математической модели.

4. Математические модели динамической и квазистатической термоупругости

Научные результаты данной главы представлены в работе [99] автора диссертации. Обычно задачи термоупругости решаются в квазистатической постановке, когда не учитывается изменение напряжений от времени. При учёте их изменения во времени задача становится динамической. Математическая теория таких задач пока ещё недостаточно разработана, что связано с необходимостью учёта в определяющих уравнениях динамической термоупругости аналитических решений нестационарных задач теплопроводности. Известные уравнения динамической термоупругости получены без учёта релаксационных явлений. В настоящей работе, используя модифицированные законы Гука и Фурье выведено уравнение динамической термоупругости с учетом релаксационных явлений как в тепловой, так и в термоупругой задачах. Важность исследования динамических задач термоупругости состоит в том, что при воздействии тепловой нагрузки на поверхности тела, например, при тепловом ударе, возникающем при воздействии мощных энергетических потоков (например, лазерное излучение), внутри его возникают ударные механические волны, движущиеся со скоростью звука в данном теле. При высоких скоростях приложения тепловой нагрузки напряжения, возникающие в ударных волнах, могут превышать пределы прочности материалов.

4.1. Моделирование ударных волн напряжений и перемещений при тепловом ударе на поверхности материала

Резкое изменение температуры (тепловой удар) на поверхности исследуемого материала приводит к возникновению ударных волн, которые, в свою очередь, могут приводить к разупрочнению и повреждению материала, расслоению композитных конструкций, используемых в ракетно – космической отрасли, авиационной, военной промышленности и др. областях. Решения задач динамической термоупругости с учетом релаксационных свойств позволяют смо-

делировать процессы распространения ударных волн в теле, выполнить их детальный анализ и предложить варианты, повышающие надежность конструкций, подверженных таким воздействиям.

Используя модифицированный закон Гука, в котором учитывается зависимость напряжений и деформаций от скорости их изменения, получено уравнение термических динамических напряжений, включающее слагаемые, учитывающие релаксационные свойства материалов. В качестве температурной функции использовано точное аналитическое решение уравнения теплопроводности, выведенного с учетом локальной неравновесности. Анализ точного решения уравнения динамической термоупругости для пластины при тепловом ударе на её поверхности позволяет заключить о возникновении ударных волн напряжений и перемещений. Изменение перемещений (напряжений) происходит по гармоническому закону с затухающей амплитудой колебаний.

Материал данного раздела представляет новый уровень развития теории термических напряжений, связанный с изменением определяющих соотношений термомеханики, посредством учёта двукратного запаздывания (напряжений и деформаций). В определяющие уравнения термомеханики вводятся новые слагаемые, учитывающие релаксационные свойства напряжений через коэффициенты релаксации. Кроме того, в температурном слагаемом уравнения динамической термоупругости также учтено двукратное запаздывание – теплового потока и скалярной величины градиента температуры. Полученное уравнение учитывает перекрёстные эффекты, связанные с одновременным проявлением временной и пространственной неравновесности и их совместное влияние на термомеханическую реакцию упругой области при тепловом ударе.

Применительно к новому уравнению динамической термоупругости формулируется краевая задача для пластины и находится её точное решение в виде бесконечного ряда. Детальное исследование полученного решения позволило обнаружить ряд интересных фактов, раскрывающих особенности термомеханики в новых теплофизических и термомеханических условиях. И, в частности, было показано, что при тепловом ударе на поверхности пластины внутри неё

возникают высокочастотные колебания в результате движущихся от поверхности механических волн со скоростью звука в данном теле – определена также и частота колебаний. Возможность возбуждения подобных колебаний была впервые установлена теоретическими исследованиями Б. Боли и Барбера (1957 г.), Крауса (1966 г.).

Вывод уравнения динамической термоупругости основан на соотношениях

$$\frac{\sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad (4.1) \quad \varepsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \sigma_x + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha (T - T_0), \quad (4.2)$$

где σ_x – нормальное напряжение; x – координата; T – температура; T_0 – температура в ненапряженном состоянии (начальная температура); t – время; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; α – коэффициент линейного расширения; ρ – плотность; u – перемещение; $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$ – деформация.

Дифференцируя (4.1) по x , с учётом для ε_x получаем

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (4.3)$$

Подставив (4.2) в (4.3), получаем [8, 23]

$$\frac{\partial^2 \sigma_x(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma_x(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \rho \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}, \quad (t > 0; 0 < x < \delta), \quad (4.4)$$

где $c = \sqrt{E(1-\nu) / [(1+\nu)(1-2\nu)\rho]}$ – скорость волны; δ – толщина пластины.

Распределение температуры предполагается известным из решения задачи теплопроводности.

Уравнение (4.4) описывает незатухающие колебания напряжений, ввиду того, что оно не содержит членов, учитывающих сопротивление среды.

В основе вывода дифференциальных уравнений различного рода колебательных процессов (стрейней, струн, мембран, пружин и проч.), лежат закон Гука и второй закон Ньютона. По закону Гука напряжение пропорционально деформации $\varepsilon = \partial U / \partial x$

$$\sigma_x = E \partial U / \partial x. \quad (4.5)$$

Следуя закону Ньютона

$$F = ma = m \frac{d\upsilon}{dt} = m \frac{d^2U}{dt^2} = \rho S \Delta x \frac{d^2U}{dt^2}, \quad (4.6)$$

где F – сила; m – масса; $a = d\upsilon/dt$ – ускорение; $\upsilon = du/dt$ – скорость; ρ – плотность; S – площадь сечения; Δx – длина элементарного участка.

Сила, действующая на некотором элементарном участке $(x + \Delta x)$ тела, равна

$$F = S(\sigma_{x+\Delta x} - \sigma_x) = S \Delta x \partial \sigma / \partial x. \quad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в (4.6), получаем уравнение равновесия вида (4.3). Это уравнение, а также полученное при его использовании уравнение (4.4), найдены без учёта временного запаздывания напряжений и деформаций в законе Гука (4.5).

В работе [25] для учёта скоростей и ускорений σ_x и $\partial U / \partial x$ в формуле закона Гука представляется в виде

$$\sigma_x + \tau_1 \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \tau_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} + \dots = E \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial t^2} + \dots \right), \quad (4.8)$$

где τ_1 и τ_2 – коэффициенты релаксации.

Ограничиваясь двумя первыми слагаемыми правой и левой части находим

$$\sigma_x = E \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right) - \tau_1 \frac{\partial \sigma_x}{\partial t}. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) совпадает с усложнёнными моделями Максвелла и Кельвина–Фойхта. Она также может быть найдена из обобщенной системы уравнений Онзагера, полученной с учётом релаксационных явлений [48]

$$J_i = L_i^{(r)} \frac{\partial J_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \left(L_{ik} X_k + L'_{ik} \frac{\partial X_k}{\partial t} \right), \quad (4.10)$$

где J_i – поток тепла, массы, импульса и т.д.; X_k – движущиеся силы (градиенты соответствующих величин); $L_i^{(r)}$, L_{ik} , L'_{ik} – некоторые постоянные.

Если положить $L_i^{(r)} = -\tau_1$; $L_{ik} = E$; $L'_{ik} = E\tau_2$; $J_i = \sigma_x$; $X_k = \partial U / \partial x$, то из (4.10) получается формула (4.9).

Учитывая, что сила сопротивления является объемной силой, будем иметь

$$F_c = -\beta \rho S \Delta x \partial U / \partial t, \quad (4.11)$$

где β – коэффициент сопротивления, $1/c$.

Подставляя (4.7), (4.11) в левую часть соотношения (4.6), получаем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \beta \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.9) в (4.12), находим

$$E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + E\tau_2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} - \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) - \rho\beta \frac{\partial U}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (4.13)$$

Продифференцируем (4.2) по x

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = A \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - B \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4.14)$$

где $A = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $B = \frac{\alpha E}{1-2\nu}$.

Подставляя (4.14) в (4.13), будем иметь

$$E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (E\tau_2 - A\tau_1) \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + B\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} = \rho\beta \frac{\partial U}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (4.15)$$

Для пластины одна из граничных поверхностей которой ($x=0$) свободна от внешней нагрузки, а вторая ($x=\delta$) – жестко закреплена, краевые условия для функции $U(x,t)$ будут

$$U(x,0) = 0; \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0; \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial U(\delta,t)}{\partial x} = 0; \quad (4.17) \quad U(0,t) = 0, \quad (4.18)$$

Температурная функция $T(x,t)$ находится из решения следующей задачи

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo_T)}{\partial Fo_T} + Fo_T \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo_T)}{\partial Fo_T^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo_T)}{\partial \xi^2} + Fo_T \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo_T)}{\partial \xi^2 \partial Fo_T}; \quad (4.19)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo_T} = 0; \quad \frac{\partial \Theta(0, Fo_T)}{\partial \xi} = 0; \quad \Theta(1, Fo_T) = 0, \quad (4.20)$$

где $\Theta = (T - T_{cm})/\Delta T$ – безразмерная температура; $Fo_T = a_T t / \delta^2$ – число Фурье; $\xi = x/\delta$ – безразмерная координата; $\Delta T = T_0 - T_{cm}$; T_0 – начальная температура;

T_{cm} – температура стенки при $x = \delta$; $Fo_r = a_r \tau / \delta^2$ – безразмерный коэффициент релаксации; a_r – температуропроводность; τ – коэффициент релаксации температурной задачи.

Уравнение (4.18) получено с учётом двукратного запаздывания, то есть оно выведено с использованием уравнения теплового баланса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x} \quad (4.21)$$

и формулы Фурье вида

$$q = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left[T + \tau_{T_2} \frac{\partial T}{\partial t} \right] - \tau_{T_1} \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (4.22)$$

где λ – коэффициент теплопроводности; τ_{T_1}, τ_{T_2} – коэффициенты релаксации (далее примем $\tau_{T_1} = \tau_{T_2} = \tau$); c – теплоёмкость.

В работе [19] получено следующее точное решение задачи (4.18) – (4.20)

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_{1k} \exp(z_{1k} Fo_T) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo_T) \right] \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right), \quad (4.23)$$

где $C_{1k} = -C_{2k} \frac{z_{2k}}{z_{1k}}$; $C_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{4}{r\pi} \sqrt{1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}}}$; $v_k = r^2 \pi^2 / 4$; $r = 2k - 1$;

$$z_{ik} = \frac{-(1 + Fo_r v_k) \pm \sqrt{(1 + Fo_r v_k)^2 - 4Fo_r v_k}}{2Fo_r}, \quad (i = 1, 2). \quad (4.24)$$

Для приведения задачи (4.15) – (4.18), к безразмерному виду обозначим:

$$N = \frac{U}{\delta}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad Fo = \frac{ct}{\delta}, \quad (4.25)$$

где N, ξ, Fo – соответственно безразмерные перемещение, координата, время.

С учётом обозначений задача будет

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial^3 N}{\partial \xi^2 \partial Fo} + \mu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi \partial Fo} = R \frac{\partial N}{\partial Fo} + l \frac{\partial^2 N}{\partial Fo^2}; \quad (4.26)$$

$$N(\xi, 0) = 0; \quad (4.27) \quad N(\xi, 0) / \partial Fo = 0; \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial N(1, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad (4.29) \quad N(0, Fo) = 0, \quad (4.30)$$

где $\eta = F_2 + \eta_1 F_1$; $\mu = \mu_1 F_1$; $r = \rho \beta c \delta / E$; $l = \rho c^2 / E$; $F_1 = c \tau_1 / \delta$; $F_2 = c \tau_2 / \delta$; $\eta_1 = A / E$; $\mu_1 = B \Delta T / E$; F_1, F_2 – безразмерные коэффициенты релаксации.

Для согласования по времени температурной и упругой задач из равенства $Fo_T = Fo$ получаем

$$Fo_T = a_T Fo / c \delta. \quad (4.31)$$

В решении (4.23) после его подстановки в уравнение (4.26) вместо Fo_T следует использовать соотношение (4.31).

Решение задачи (4.26) – (4.30) с учетом известного соотношения для температуры вида (4.23) принимается в виде

$$N(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(Fo) \sin\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right), \quad (r = 2k - 1). \quad (4.32)$$

Подставляя (4.32) в (4.26), после деления на $\sin\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right)$ находим

$$l \frac{d^2 \varphi}{d Fo^2} + D \frac{d \varphi}{d Fo} + a_k \varphi = A e^{z_{1k} m Fo} + B e^{z_{2k} m Fo},$$

где $A = -0,5 v_k^{0,5} \mu m C_{1k} z_{1k}$; $B = -0,5 v_k^{0,5} \mu m C_{2k} z_{2k}$; $D = R + \eta a_k$; $a_k = v_k / 4$; C_{1k} , C_{2k} – константы интегрирования задачи теплопроводности.

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(Fo) = & C_{1n} e^{\frac{(D+D^2-4a_k l) Fo}{2l}} + C_{2n} e^{\frac{(D-(D^2-4a_k l) Fo)}{2l}} + \\ & + \frac{A(Dz_{2k} m + a_k + z_{2k}^2 m^2 l) e^{z_{1k} m Fo} + B(Dz_{1k} m + a_k + z_{1k}^2 m^2 l) e^{z_{2k} m Fo}}{(Dz_{2k} m + a_k + z_{2k}^2 m^2 l) (Dz_{1k} m + a_k + z_{1k}^2 m^2 l)}, \end{aligned}$$

где C_{1n} , C_{2n} – константы интегрирования (определяются из условий (4.27), (4.28)). В итоге решение задачи (4.26) – (4.30) будет

$$N(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^n \varphi(Fo) \sin\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right), \quad (r = 2k - 1) \quad (4.33)$$

Расчеты по (4.33) даны на рис. 4.1 – 4.5, из анализа которых видно, что в пластине возникают ударные волны перемещений, движущиеся со скоростью звука в теле в виде высокочастотных затухающих колебаний.

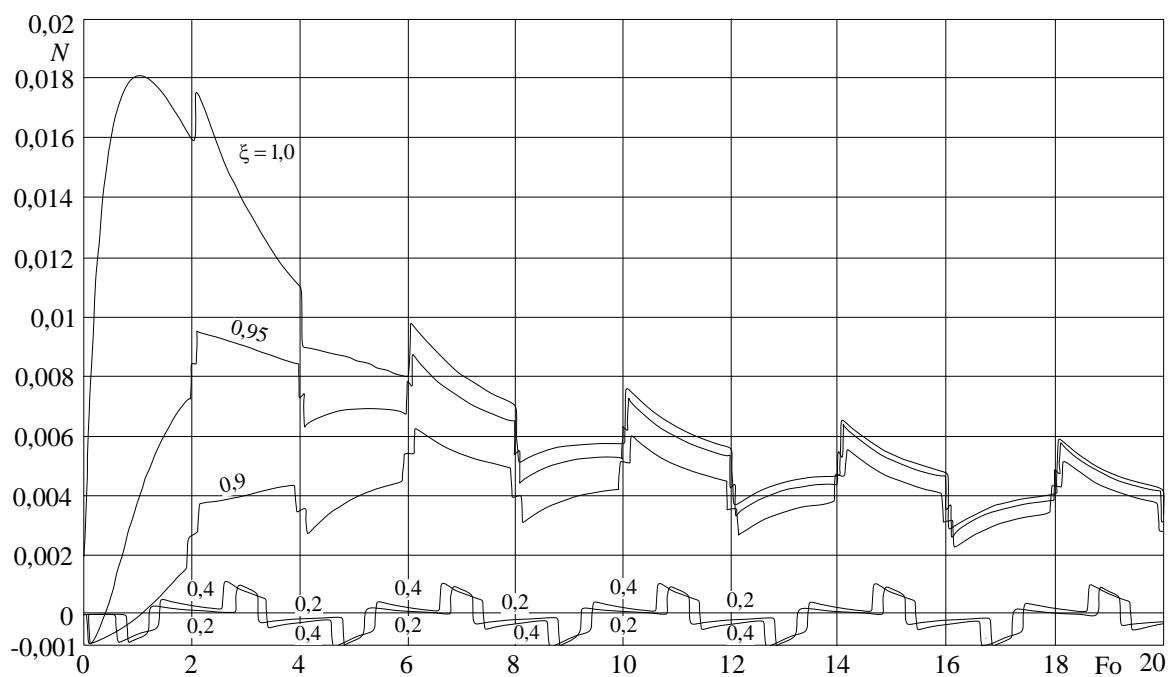


Рис. 4.1. Изменение перемещений в динамической задаче термоупругости.

$$m = 10^{-3}; Fo_r = 10^{-3}; \eta = 10^{-7}; R = 10^{-7}; \mu = 1,0; I = 1,0; n = 100$$

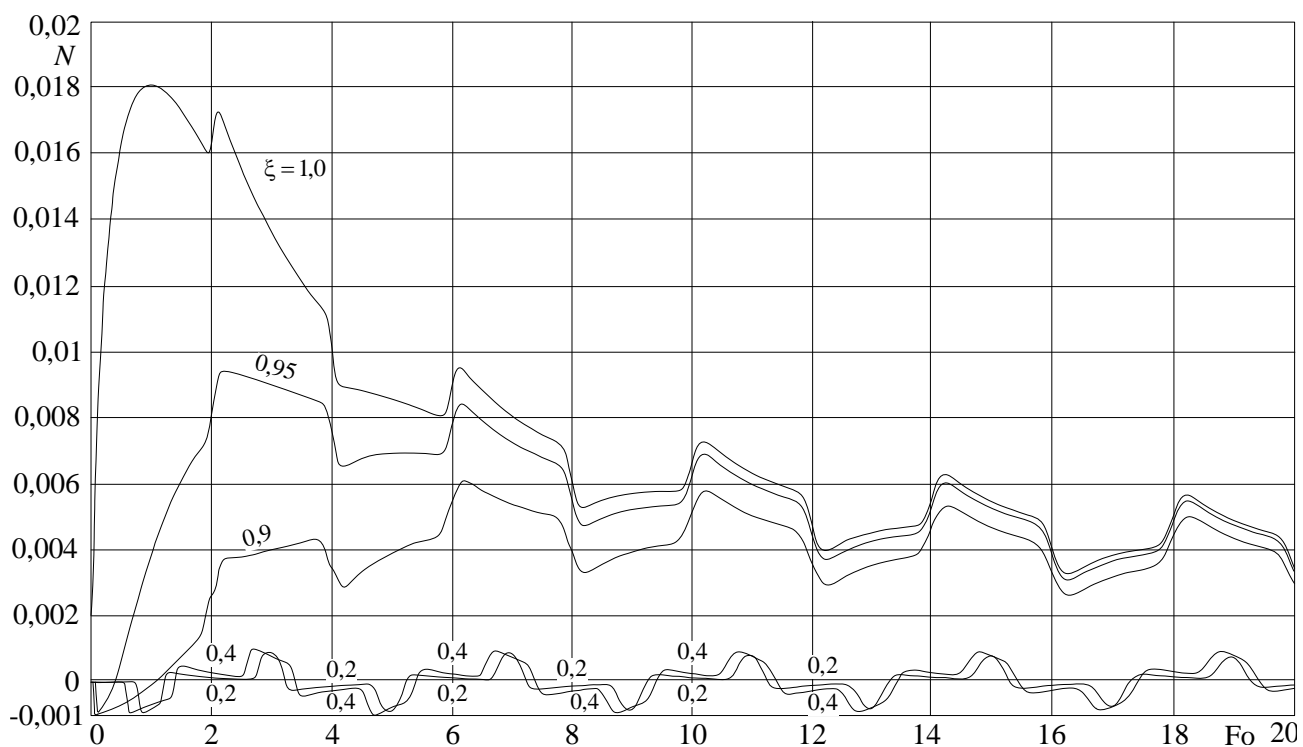


Рис. 4.2. Изменение перемещений в динамической задаче термоупругости.

$$m = 10^{-3}; Fo_r = 10^{-3}; \eta = 10^{-3}; R = 10^{-7}; \mu = 1,0; I = 1,0; n = 100$$

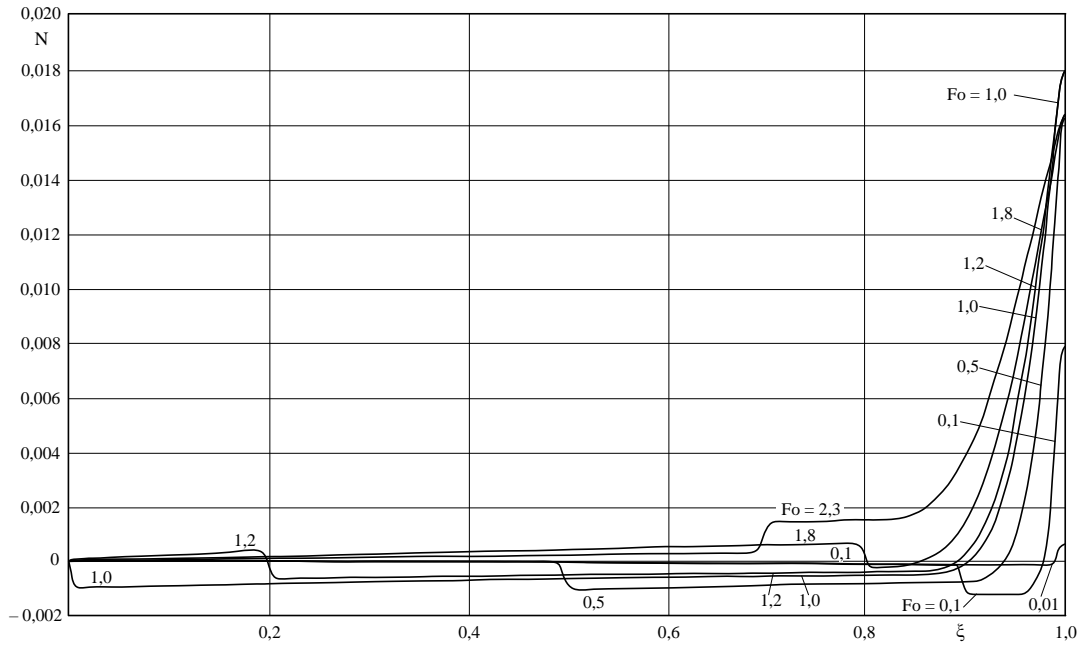


Рис. 4.3. Изменение перемещений в динамической задаче термоупругости.
 $m = 10^{-3}$; $Fo_r = 10^{-3}$; $\eta = 10^{-7}$; $R = 10^{-7}$; $\mu = 1,0$; $I = 1,0$; $n = 500$ – число членов ряда (4.33)

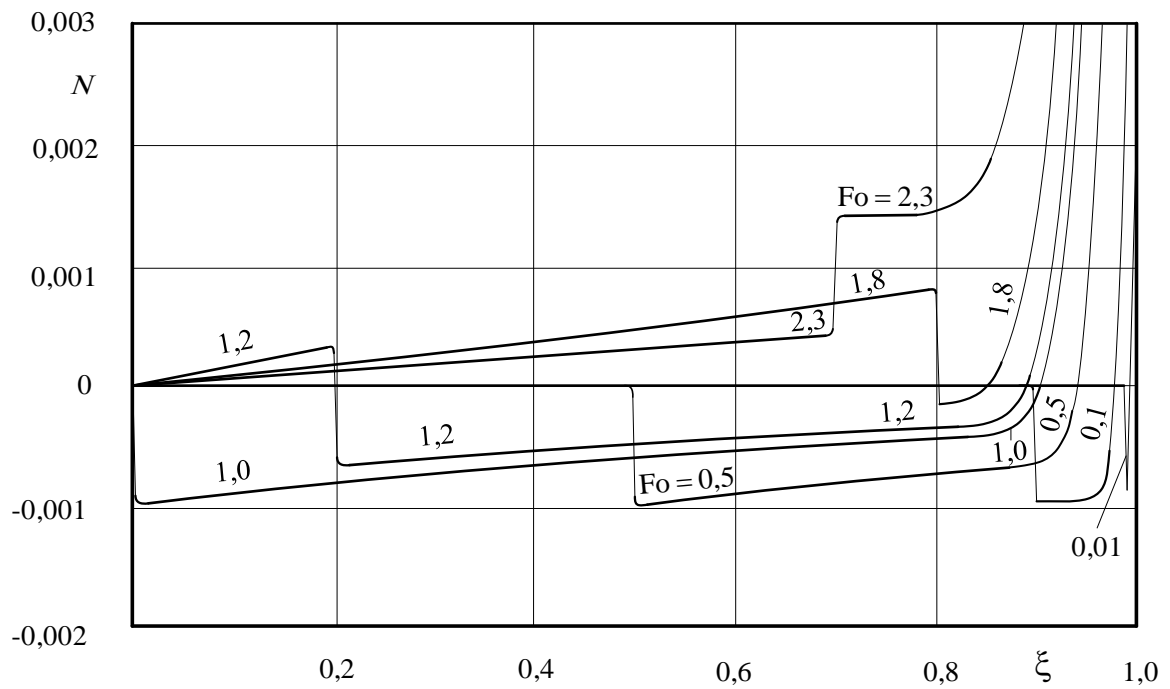


Рис. 4.4. Изменение перемещений в динамической задаче термоупругости.

$$m = 10^{-3}; Fo_r = 10^{-3}; \eta = 10^{-7}; R = 10^{-7}; \mu = 1,0; I = 1,0; n = 500$$

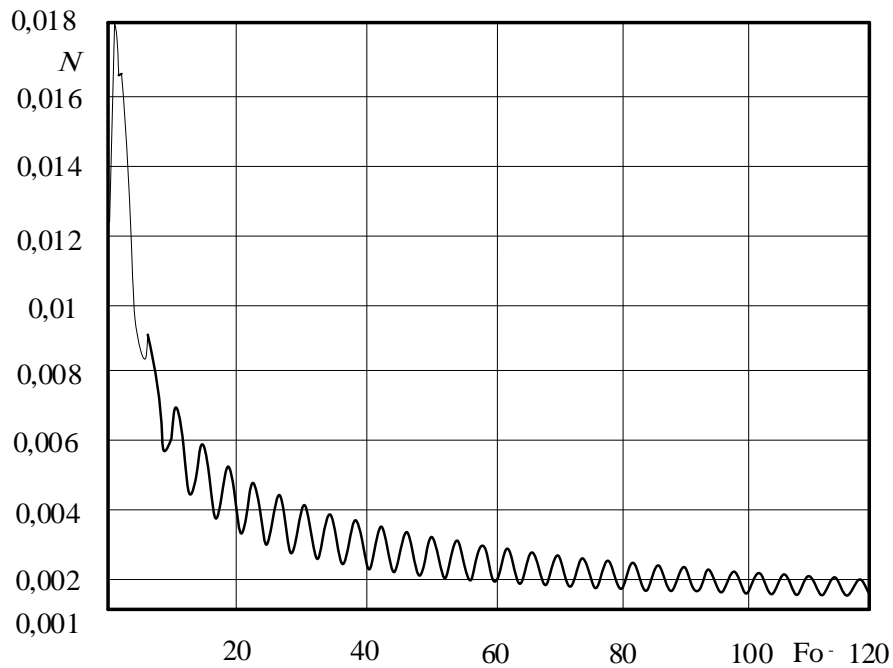


Рис. 4.5. Изменение перемещений в динамической задаче термоупругости.

($\xi = 1,0$); $m = 10^{-3}$; $Fo_r = 10^{-3}$; $\eta = 0,01$; $R = 10^{-7}$; $\mu = 1,0$; $I = 1,0$; $n = 100$

4.2. Создание остаточных напряжений при термопластическом упрочнении пограничного слоя

Для упрочнения поверхностных слоёв материалов применяются различные способы – закалка, наклёп, обработка лазерным излучением, токами высокой частоты и проч. В ряде случаев для повышения долговечности конструкций, работающих в условиях растягивающих напряжений, применяются способы, позволяющие создать на поверхности изделий так называемые остаточные (наведённые) напряжения сжатия. В настоящей работе с целью наведения остаточных напряжений сжатия в пограничном слое стальной пластины, нагретой до температуры $T_0 = 600^\circ\text{C}$, рассмотрен метод её спрейерного водяного охлаждения (рис. 4.6) при переменных от времени коэффициентах теплоотдачи. Путём решения соответствующей задачи теплопроводности показано, что максимальный перепад температуры между поверхностью и центром пластины, толщиной 2 мм, составляет 105°C и наблюдается через 0,02 с с момента начала охлаж-

дения при времени её полного охлаждения, равном $0,32 \text{ с}$. Из расчётов температурных напряжений методом конечных элементов следует, что на внешней поверхности пластины возникают температурные напряжения растяжения, достигающие 26 кг/мм^2 , что превышает предел текучести данного материала $\sigma_{\text{пр}} = 25 \text{ кг/мм}^2$. В результате пластической деформации происходит сброс температурных напряжений растяжения в процессе охлаждения поверхностного слоя пластины и при её полном охлаждении в этом слое (глубиной $0,25 \text{ мм}$) наводятся остаточные напряжения сжатия, составляющие $- 21,8 \text{ кг/мм}^2$ (на поверхности пластины).

Для повышения износостойкости тонких пограничных слоёв металлических изделий применяют различные методы. Среди них известны методы, связанные с наведением в тонком пограничном слое остаточных напряжений сжатия, с целью повышения работоспособности материалов, работающих в условиях растягивающих напряжений. Его реализация связана с резким охлаждением погранич-

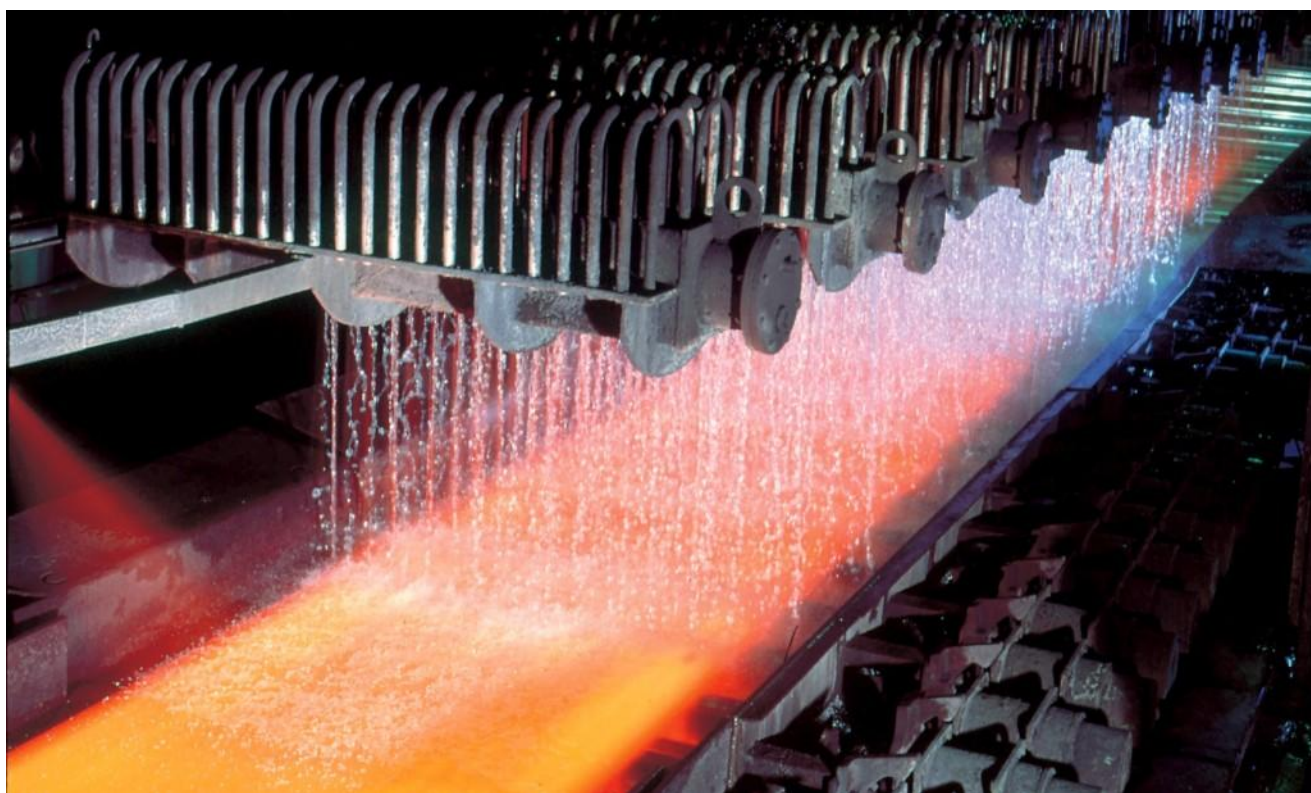


Рис 4.6. Спрейерная закалка поверхности пластины

ного слоя предварительно нагретого изделия с таким расчётом, чтобы температурные напряжения растяжения в этом слое достигали величин, при которых наблюдается текучесть материала. В слое пластины, незатронутым охлаждением, возникают температурные напряжения сжатия. Текучесть материала в пограничном слое позволяет сбросить возникающие в нём напряжения растяжения, тогда как в остальном слое материала напряжения сжатия сохраняются. Охлаждение основной массы материала (за исключением пограничного слоя, который уже охлаждён и разгружен от температурных напряжений, вследствие произошедших в нём процессов пластических деформаций) сопровождается сбросом в этой части изделия напряжений сжатия и наведением напряжений такого же знака в пограничном слое, что позволяет повысить ресурс изделий, работающих в условиях растягивающих напряжений на их поверхностях.

Основной задачей при таком способе повышения работоспособности конструкций является создание в поверхностном слое градиентов температур, достаточных для наведения напряжений растяжения, сопоставимых с пределом текучести материала. Создание соответствующих градиентов температур для металлов представляет большую проблему, ввиду их высокой теплопроводности, приводящей к выравниванию температурного поля конструкции. Определяющее значение при этом имеет организация ускоренного во времени процесса охлаждения изделия. Для этих целей применяют струйное водяное охлаждение, позволяющее при большой скорости течения среды практически исключить процессы плёночного кипения. Эти процессы значительно увеличивают время охлаждения вследствие уменьшения коэффициентов теплоотдачи и, следовательно, приводят к уменьшению градиентов температур до величин, не позволяющих наводить напряжения, приводящие к текучести материала, являющейся необходимым условием создания остаточных напряжений.

В качестве конкретного примера наведения остаточных напряжений рассмотрим процесс струйного охлаждения стальной пластины толщиной 2 мм, нагретой до некоторой начальной температуры (600°C), при изменяющихся от температуры условиях 3-го рода. Постановка задачи теплопроводности будет

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad (t > 0; 0 < x < \delta); \quad (4.33)$$

$$T(x,0) = T_0; \quad (4.34) \quad \lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \alpha(T) [T(0,t) - T_{cp}]; \quad (4.35) \quad \frac{\partial T(\delta,t)}{\partial x} = 0, \quad (4.36)$$

где T – температура; x – координата; a – температуропроводность; λ – теплопроводность; T_0 – начальная температура; T_{cp} – температура среды; δ – половина толщины пластины; $\alpha(T)$ – коэффициенты теплоотдачи.

Исходные данные были следующие:

$$\lambda = 60,5 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}); \quad a = 17,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}; \quad T_0 = 600^\circ\text{C}; \quad T_{cp} = 0^\circ\text{C}; \quad \delta = 2 \text{ мм}.$$

Экспериментальные данные по зависимости коэффициентов теплоотдачи от температуры для процесса струйного охлаждения приведены в таблице 4.1 [19].

Таблица 4.1

$T_k, ^\circ\text{C}$	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
$\alpha, \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$	0	25	100	200	250	200	133	100	78,5	68	62	57,5	54

Для решения задачи теплопроводности (4.33) – (4.36) применялся расчетный модуль Transient Thermal программы Ansys Workbench 18.2 [6].

Для построения конечно – элементной сетки использовался алгоритм Sweep Method, применяемый в задачах с преимущественным одномерным изменением искомой функции и позволяющий создать структурированную гексаэдрическую сетку конечных элементов; охлаждаемая пластина была разделена на 1800 гексаэдрических элементов, сетка состояла из 8672 узлов (рис. 4.7).

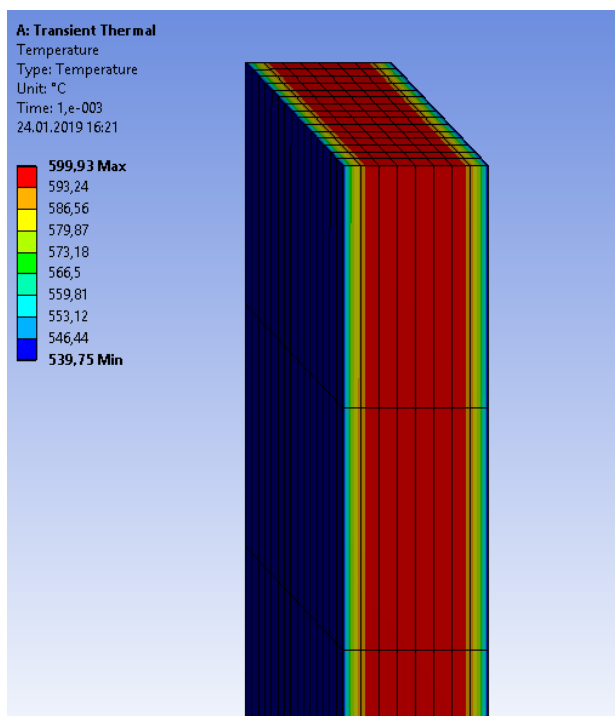


Рис. 4.7. Схема разбиения пластины на конечные элементы и температурное поле в момент времени $t = 0,001 \text{ с}$.

Расчеты температуры приведены на рис. 4.7, 4.8. Из их анализа видно, что при столь высокой интенсивности охлаждения уже через $0,32 \text{ с}$ пластина охлаждается до температуры охлаждающей воды. При этом, максимальные градиенты температур в диапазоне $0 \leq x \leq 0,25 \text{ мм}$ наблюдаются при $t = 0,02 \text{ с}$ (перепад температуры в указанном диапазоне координаты x составляет около 105 °C).

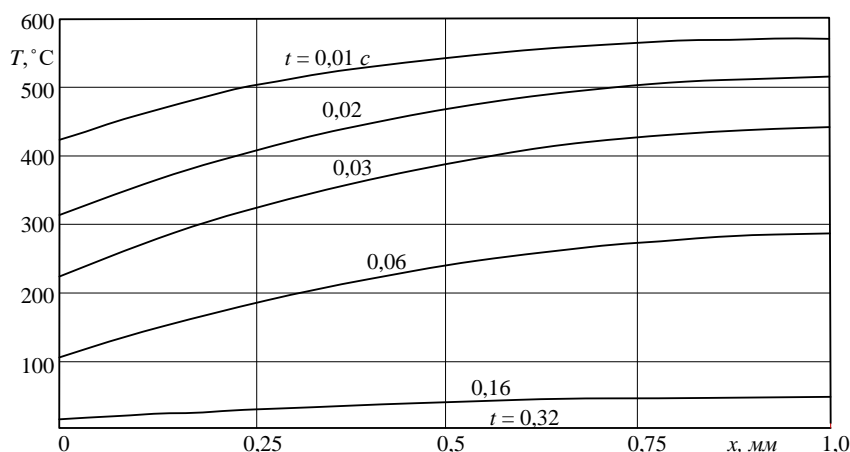


Рис. 4.8. Распределение температуры от края до середины пластины во времени

Найденное распределение температуры было использовано для расчета квазистатических температурных напряжений методом конечных элементов в расчетном модуле Static Structural программы Ansys Workbench 18.2 [6]. В данном случае рассматривается свободная от поверхностных нагрузок пластина, у ко-

торой температура изменяется лишь по толщине и она находится из полученного выше решения задачи теплопроводности. Представляя рассматриваемое тело как трехмерное, у которого размер по оси x значительно меньше размеров по осям y и z будем иметь

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{y,z}(x) = \sigma(x). \quad (4.37)$$

Используя метод конечных элементов, составляется общая система алгебраических линейных уравнений для всей конечно-элементной модели деформируемого тела. Для квазистатических задач, решаемых с помощью расчетного модуля Static Structural, она имеет вид [6]

$$[K]\{U\} = \{P\} + \{P\}^q + \{P\}^s + \{P\}^{\varepsilon_0} + \{P\}^{\sigma_0}, \quad (4.38)$$

где $[K]^T$ – касательная матрица жесткости; $\{U\}$ – вектор узловых перемещений; $\{P\}$ – общий вектор внешних узловых сил; $\{P\}^q, \{P\}^s, \{P\}^{\varepsilon_0}, \{P\}^{\sigma_0}$ – общие векторы узловых сил.

Соотношение (4.38) представляет систему алгебраических уравнений для узловых перемещений конечно – элементной модели. Метод конечных элементов позволяет получать сильно разреженные матрицы жесткости $[K]$ ленточного типа, симметричные относительно главной диагонали. Для таких матриц важной характеристикой является ширина ленты, определяемая разностью номеров узлов для элемента, в котором эта разность наибольшая. Следовательно, ширина ленты зависит от способа автоматического разбиения области на конечные элементы. Граничные условия задаются в виде отсутствия напряжений на контуре. Задаются также условие отсутствия перемещений какой – либо точки по всем координатным осям, а также отсутствие перемещений в некоторой другой точке по одной из координатных осей.

Изменение температуры по толщине пластины для отдельных моментов времени охлаждения было использовано для расчетов температурных напряжений $\sigma(x)$ методом конечных элементов. Расчеты даны на рис. 4.9. Из их анали-

за видно, что через 1 с процесса охлаждения на поверхности пластины наводятся остаточные напряжения сжатия, составляющие $\sigma(0) = -21,8 \text{ кг/мм}^2$.

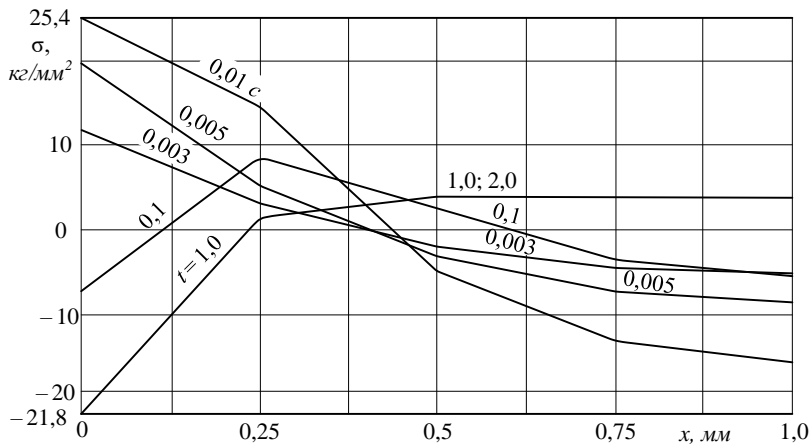


Рис. 4.9. Распределение напряжений от края до середины пластины во времени

Выводы

1. Используя эксперименты по изменению коэффициентов теплообмена, полученные в работе [19], выполнены расчеты её температурного состояния. Из анализа следует, что время полного охлаждения пластины составляет 0,32 с. Максимальный перепад температуры в диапазоне $0 \leq x \leq 0,25 \text{ мм}$ наблюдается через 0,02 с после начала охлаждения и равен $\Delta T \approx 105^\circ \text{C}$.

2. Температурные напряжения растяжения на поверхности пластины при указанном перепаде температур, превышая предел текучести рассматриваемого материала (сталь 25 кг/мм^2), вызывают его пластическую деформацию, сопровождающуюся полным сбросом напряжений растяжения. При дальнейшем (полном) охлаждении пластины в её поверхностном слое наводятся остаточные напряжения сжатия, составляющие $-21,8 \text{ кг/мм}^2$.

5. Экспериментально – теоретические исследования продольных и поперечных колебаний стержня

Научные результаты данной главы представлены в работах [97, 100, 104] автора диссертации. Известно, что появление вибрационных колебаний, возникающих вследствие растяжения либо сжатия отдельных частей рассматриваемого объекта, приводит к уменьшению прочности материала. В некоторых случаях, когда к собственным колебаниям тела прилагается дополнительная вибрационная нагрузка, например, при пусках летательных аппаратов, прохождении турбулентных потоков в атмосфере, теплового воздействия и др. (рис. 5.1) могут возникать бифуркационные, флаттерные и резонансные вибрации, развивающиеся стремительно быстро и зачастую приводящие к разрушению материала. Представленные в работе математические модели, для процессов колебаний с учетом релаксационных свойств, как показали экспериментальные исследования, выполненные в настоящей работе, позволяют получить качественное и количественное совпадение результатов точного аналитического решения и эксперимента с точностью, достаточной для практического использования.

В настоящей работе выявлена полная аналогия локально – неравновесных уравнений колебательных процессов (в твердых телах и газах) с аналогичными уравнениями для теплопереноса. Этот факт, полученный теоретически, свидетельствует, что учет внутренней структуры вещества (его молекулярно – атомного строения) приводит к аналогичным закономерностям переноса тепла, массы, импульса. Исследование и анализ колебательных процессов твердых тел с учетом релаксационных явлений представляет интерес в связи с большими возможностями верификации моделей (по сравнению с тепловыми задачами). Это связано с большими возможностями экспериментального исследования колебательных процессов для малых и сверхмалых значений времени, при которых исследование температурного состояния не представляется возможным. Ввиду аналогичности краевых задач теплопроводности и колебательных процессов, представленных в безразмерном виде, результаты

верификации моделей колебательных процессов могут быть использованы и в решениях тепловых задач.

5.1. Моделирование продольных колебаний стержня с учетом начальных ускорений

В настоящем разделе приводятся результаты теоретического исследования точного решения уравнения продольных колебаний стержня закрепленного на одном из торцов, с учётом начального ускорения. Уравнение получено с учётом двукратного запаздывания путем использования модифицированной формулы закона Гука, в которой учитывается зависимость напряжения от скорости его изменения, а также от скорости изменения деформации, то есть учитывается пространственно – временная нелокальность.

Вывод уравнения колебаний основан на законе Гука

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial U}{\partial x} \quad (5.1)$$

и втором законе Ньютона

$$F = ma = m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (5.2)$$

где σ – напряжение; E – модуль упругости; $\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x}$ – деформация; U – перемещение; x – координата; F – сила; m – масса; a – ускорение; t – время.

Используя (5.1), (5.2), выводится следующее уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (5.3)$$

где $e = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость волны; ρ – плотность.

Уравнение (5.3) является гиперболическим, описывающим незатухающие колебания. В работе [26] с учётом пропорциональности силы сопротивления

скорости перемещения получено следующее уравнение затухающих колебаний

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (5.4)$$

где γ – коэффициент сопротивления.

Уравнение (5.4) не содержит слагаемых, учитывающих пространственно–временную нелокальность. В работе [25] для её учёта используется закон Гука вида

$$\sigma = E \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right) - \tau_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (5.5)$$

где τ_1, τ_2 – коэффициенты релаксации. Используя (5.5) и уравнение движения с учётом внутреннего сопротивления, в работе находится следующее уравнение

$$\tau_1 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = e^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \right] - \gamma \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (5.6)$$

Найдем решение краевой задачи для стержня, закрепленного на одном из торцов, с учётом начального ускорения. Краевые условия к уравнению (5.6) при линейном изменении начального ускорения имеют вид

$$U(x, 0) = b(\delta - x); \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = \eta(\delta - x); \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 U(x, 0)}{\partial t^2} = 0; \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial x} = 0; \quad (5.10)$$

$$U(\delta, t) = 0, \quad (5.11)$$

где b – коэффициент учёта начальных перемещений; η – коэффициент учёта начальных ускорений; δ – длина стержня.

Обозначим:

$$Fo = \frac{et}{\delta}; \quad \Theta = \frac{U}{U_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad Fo_1 = \frac{e\tau_1}{\delta}; \quad Fo_2 = \frac{e\tau_2}{\delta}; \quad Fo_3 = \frac{\delta\gamma}{e},$$

где Θ , ξ , Fo – безразмерные перемещение, координата, время; $U_0 = b\delta$; Fo_1 , Fo_2 – безразмерные коэффициенты релаксации; Fo_3 – безразмерный коэффициент сопротивления.

С учетом обозначений получаем

$$Fo_3 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + Fo_1 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^3} + \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Fo_2 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo}; \quad (5.12)$$

$$(Fo > 0; \quad 0 < \xi \leq 1);$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1 - \xi; \quad (5.13) \quad \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo} = D(1 - \xi); \quad (5.14) \quad \frac{\partial^2 \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo^2} = 0; \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad (5.16) \quad \Theta(1, Fo) = 0, \quad (5.17)$$

где $D = \eta\delta^2 / (U_0 e)$.

Отметим, что уравнение (5.12) с точностью до постоянных совпадает с уравнением (3.19).

Уравнение (5.12) по сравнению с уравнением (5.3) имеет три дополнительных слагаемых, учитывающих релаксацию напряжений в законе Гука, а также внутреннее сопротивление среды.

Точное решение задачи ищем в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \varphi(Fo)\psi(\xi). \quad (5.18)$$

Подставим (5.18) в (5.12)

$$Fo_1 \varphi''' + \varphi'' + (Fo_3 + \nu Fo_2) \varphi' + \nu \varphi = 0; \quad (5.19)$$

$$\psi'' + \nu \psi = 0, \quad (5.20)$$

где ν – постоянная.

Граничные условия к уравнению (5.20) будут

$$d\psi(0)/d\xi = 0; \quad (5.21) \quad \psi(1) = 0. \quad (5.22)$$

Решение задачи (5.20) – (5.22) имеет вид

$$\psi(\xi) = \cos(r\pi\xi/2), \quad (r = 2k - 1; \quad k = 1, 2, \dots). \quad (5.23)$$

Соотношение (5.23) удовлетворяет условиям (5.21), (5.22). Подставив (5.23) в (5.20), получаем

$$v_k = r^2 \pi^2 / 4, \quad (r = 2k - 1; \quad k = 1, 2, \dots). \quad (5.24)$$

Характеристическое уравнение уравнения (5.19) будет

$$Fo_1 z^3 + z^2 + (Fo_3 + v_k Fo_2)z + v_k = 0, \quad (k = 1, 2 \dots). \quad (5.25)$$

Его корни

$$z_{1k} = \gamma + i\beta; \quad (5.26) \quad z_{2k} = \gamma - i\beta; \quad (5.27) \quad z_{3k} = (A/2 - 2B/A - 1) / (3Fo_1), \quad (5.28)$$

где $\gamma = (B/A - A/4 - 1) / (3Fo_1)$; $\beta = \sqrt{3}(A/2 + 2B/A - 1) / (6Fo_1)$; $i = \sqrt{-1}$;

$$A = \{36Fo_1(v_k Fo_2 + 2Fo_3) - 108v_k Fo_1^2 - 8 + 12\sqrt{3}[2v_k m_1(2v_k^2 Fo_2^2 + 6v_k m_2 + 6Fo_3^2 - 9v_k) - v_k Fo_2(v_k Fo_2 + 2Fo_3) + 2m_3(2Fo_3^2 - 9v_k) - Fo_3^2 + 27v_k Fo_1^2 + 4v_k]^{1/2} Fo_1\}^{1/3};$$

$$B = 3Fo_1(v_k Fo_2 + Fo_3) - 1; \quad m_1 = Fo_1 Fo_2; \quad m_2 = Fo_2 Fo_3; \quad m_3 = Fo_1 Fo_3.$$

Частные решения уравнения (5.19) имеют вид

$$\varphi_1 = \exp(\gamma + i\beta)Fo; \quad \varphi_2 = \exp(\gamma - i\beta)Fo; \quad \varphi_3 = \exp(z_{3k}Fo). \quad (5.29)$$

Общее решение для функции $\varphi_k(Fo)$ будет

$$\varphi_k(Fo) = C_{1k} \exp[(\gamma + i\beta)Fo] + C_{2k} [\exp(\gamma + i\beta)Fo] + C_{3k} \exp(z_{3k}Fo). \quad (5.30)$$

где C_{jk} ($j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \dots$) – константы интегрирования.

Соотношение (5.30) запишем в виде

$$\varphi_k(Fo) = \exp(\gamma Fo) [C_{1k} \exp((i\beta)Fo) + C_{1k} \exp((-i\beta)Fo)] + C_{3k} \exp(z_{3k}Fo). \quad (5.31)$$

Используя формулы Эйлера [10]

$$\exp(is) = \cos s + i \sin s; \quad \exp(-is) = \cos s - i \sin s,$$

соотношение (5.31) будет

$$\begin{aligned} \varphi_k(Fo) &= \exp(\gamma Fo) [C_{1k} ((\beta Fo) + i \sin(\beta Fo)) + C_{2k} (\cos(\beta Fo) - i \sin(\beta Fo))] + \\ &+ C_{3k} \exp(z_{3k} Fo) = \exp(\gamma Fo) [(C_{1k} + C_{2k}) \cos(\beta Fo) - i ((C_{2k} + C_{1k}) \sin(\beta Fo))] + \\ &+ C_{3k} \exp(z_{3k} Fo). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Обозначим $B_{1k} = C_{1k} + C_{2k}$; $B_{2k} = i(C_{2k} - C_{1k})$.

С учетом обозначений (5.32) будет

$$\varphi_k(\text{Fo}) = \exp(\gamma \text{Fo}) [B_{1k} \cos(\beta \text{Fo}) - B_{2k} \sin(\beta \text{Fo})] + C_{3k} \exp(z_{3k} \text{Fo}). \quad (5.33)$$

Подставим (5.23), (5.33) в (5.18)

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \text{Fo}) = & \{ \exp(\gamma \text{Fo}) [B_{1k} \cos(\beta \text{Fo}) - B_{2k} \sin(\beta \text{Fo})] + \\ & + C_{3k} \exp(z_{3k} \text{Fo}) \} \cos(r\pi\xi/2) \quad (r = 2k - 1; \quad k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Каждое частное решение (5.34) удовлетворяет уравнению (5.12) и условиям (5.16), (5.17), но они не удовлетворяют условиям (5.13) – (5.15). Для их выполнения составим сумму

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \text{Fo}) = & \sum_{k=1}^{\infty} \{ \exp(\gamma \text{Fo}) [B_{1k} \cos(\beta \text{Fo}) - B_{2k} \sin(\beta \text{Fo})] + \\ & + C_{3k} \exp(z_{3k} \text{Fo}) \} \cos(r\pi\xi/2), \quad (r = 2k - 1; \quad k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (5.35)$$

где B_{1k} , B_{2k} , C_{3k} определяются из (5.13) – (5.15). Подставляя (5.35) в (5.15), находим

$$B_{1k} = (B_{2k} \beta - C_{3k} z_{3k}) / \gamma. \quad (5.36)$$

Подставим (5.35) в (5.14),

$$B_{2k} = [(\gamma^2 - \beta^2) B_{1k} + C_{3k} z_{3k}^2] / (2\gamma\beta). \quad (5.37)$$

Подставляя (5.35) в (5.13), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B_{1k} + C_{3k}) \cos(r\pi\xi/2) = 1 - \xi \quad (r = 2k - 1). \quad (5.38)$$

Умножим (5.38) на $\cos(j\pi\xi/2)$ ($j = 1, 2, \dots$) и найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (B_{1k} + C_{3k}) \cos(r\pi\xi/2) \cos(j\pi\xi/2) d\xi = & \int_0^1 (1 - \xi) \cos(r\pi\xi/2) d\xi \\ & (j = r = 2k - 1). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Ввиду вследствие ортогональности косинусов будем иметь

$$\int_0^1 (B_{1k} + C_{3k}) \cos^2(r\pi\xi/2) d\xi = \int_0^1 (1 - \xi) \cos(r\pi\xi/2) d\xi, \quad (j = r = 2k - 1). \quad (5.40)$$

Отсюда находим

$$C_{3k} = -[(D + r^2\pi^2)B_{1k} + 8\cos(0,5r\pi) - 8]/(D + r^2\pi^2),$$

$$(r = 2k - 1; k = 1, 2, \dots), \quad (5.41)$$

где $D = 2r\pi\cos(0,5r\pi)\sin(0,5r\pi)$.

С учётом B_{1k} , B_{2k} , и C_{3k} решение задачи определяется из (5.35).

При $Fo_1 = Fo_2 = 0$ и $Fo_3 \neq 0$ уравнение (5.25) будет иметь вид

$$z^2 + Fo_3 z + v_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5.42)$$

Его решение

$$z_{1k,2k} = -0,5Fo_3 \pm 0,5\sqrt{Fo_3^2 - 4v_k}, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5.43)$$

Общий интеграл уравнения (5.25) будет

$$\varphi_k(Fo) = C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo), \quad (5.44)$$

где C_{1k} и C_{2k} – постоянные интегрирования.

Подставив (5.23) и (5.44) в (5.18), составим сумму частных решений

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo)] \cos(r\pi\xi/2);$$

$$(r = 2k - 1; k = 1, 2, \dots), \quad (5.45)$$

Формулы для C_{1k} и C_{2k} , определяемых из начальных условий (5.13), (5.14), имеют вид

$$C_{1k} = \frac{8[\cos(0,5r\pi) - 1]}{r\pi(z_{2k} - z_{1k})(2E_1 + r\pi)}; \quad C_{2k} = C_{1k}z_{1k}/z_{2k}, \quad (5.46)$$

где $E_1 = \cos(r\pi/2)\sin(r\pi/2)$.

Соотношение (5.45) является точным решением задачи (5.12) – (5.17) при $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 \neq 0$.

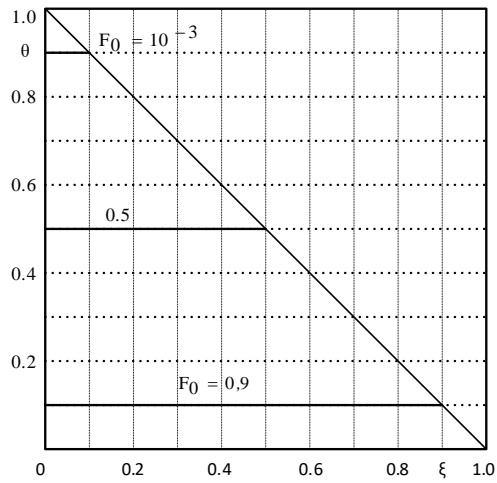


Рис. 5.2а. Перемещение стержня.
 $Fo_1 = Fo_2 = Fo_3 = 0$; $D = 0,01$;
 $n = 100$ – число членов ряда (4.34)

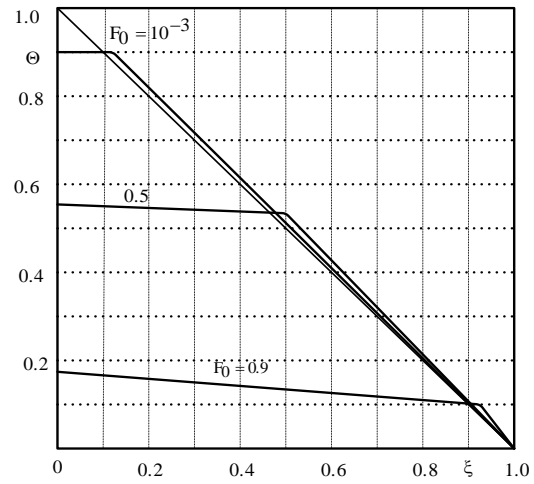


Рис. 5.2б. Перемещение стержня.
 $Fo_1 = Fo_2 = Fo_3 = 0$; $D = 0,1$; $n = 500$

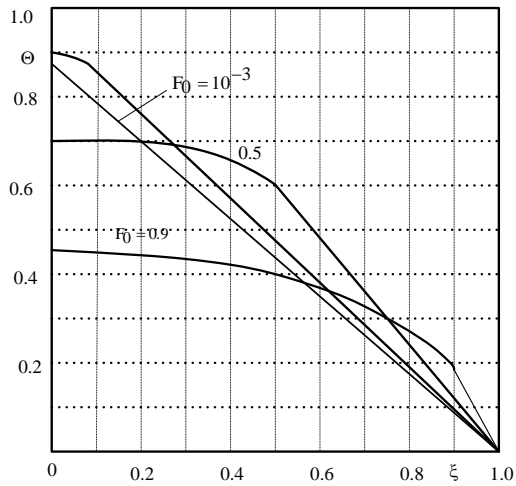


Рис. 5.3. Перемещение стержня.
 $Fo_1 = Fo_2 = Fo_3 = 0$; $D = 0,5$;
 $n = 500$

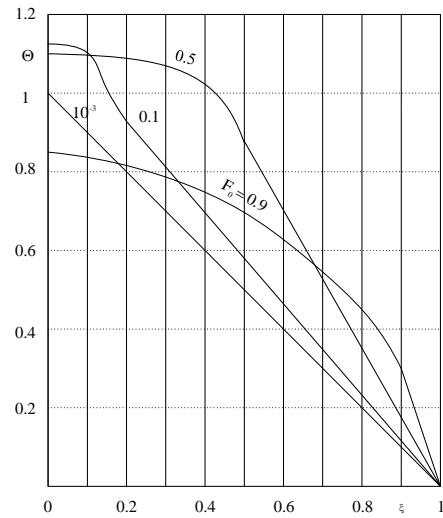


Рис. 5.4. Перемещение стержня.
 $Fo_1 = Fo_2 = Fo_3 = 0$; $D = 1$; $n = 500$

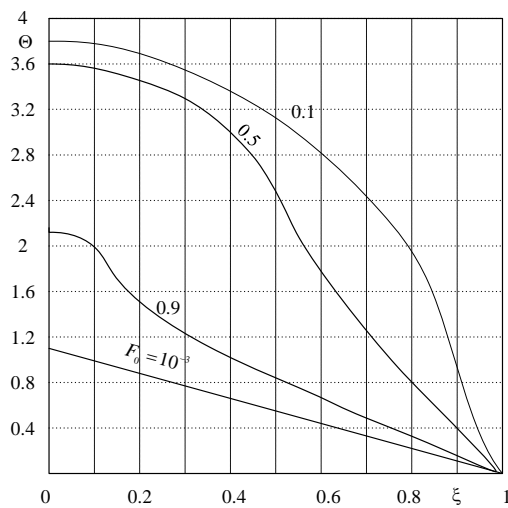


Рис. 5.5. Перемещение стержня.
 $Fo_1 = Fo_2 = Fo_3 = 0$; $D = 2$; $n = 500$

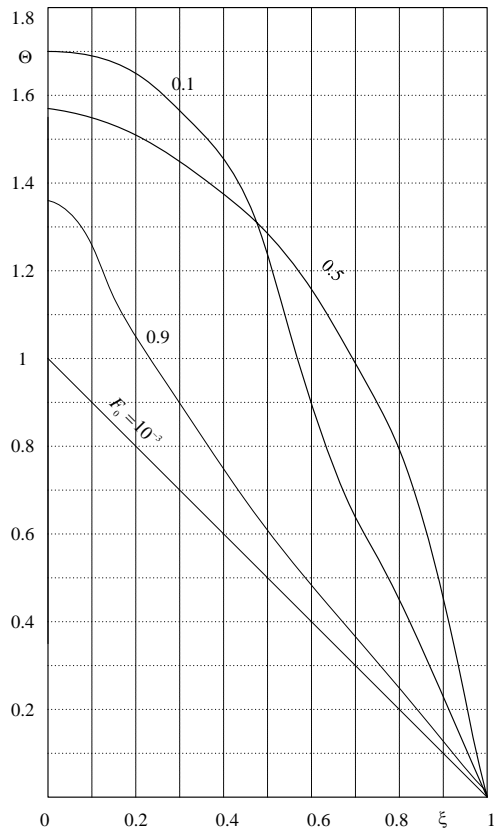


Рис. 5.6. Перемещение стержня.
 $F_{o1} = F_{o2} = F_{o3} = 0$; $D = 5$; $n = 200$

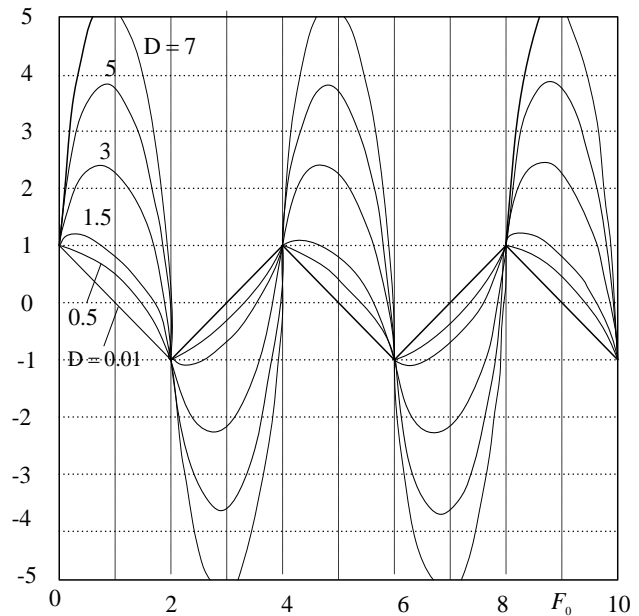


Рис. 5.7. Перемещение стержня.
 $F_{o1} = F_{o2} = F_{o3} = 0$; $\xi = 0$; $n = 10$

5.2. Математическое моделирование поперечных колебаний стержня

Поперечные колебания балок, стержней и проч. наиболее часто встречающиеся в технике колебательные процессы (колебания вращающихся валов, лопаток турбин, пролетов мостов и др.). Математическая теория таких колебаний ещё недостаточно разработана, что объясняется сложностью протекающих в таких конструкциях колебательных процессов. Известные математические модели включают сложные гиперболические уравнения. Получение их точных решений представляет большие математические трудности. При этом практическая ценность таких решений в том, что они позволяют найти сечения исследу-

двух конструкций, имеющие наибольшую частоту колебаний. Именно в таких сечениях наиболее вероятно появление дефектов в виде трещин и разрывов. В настоящей работе, используя разделение переменных, получено точное решение гиперболического уравнения поперечных колебаний стержня и выполнен его детальный анализ. И, в частности, показано, что различные участки стержня по его высоте имеют различные частоты амплитуды колебаний. При этом минимальную частоту и максимальную амплитуду имеет свободный торец стержня. Максимальную частоту при минимальной амплитуде колебаний имеют участки стержня, находящиеся вблизи от закреплённого торца. Колебания каждой точки стержня происходят со многими амплитудами и частотами. Переход свободного торца стержня из одного крайнего положения в другое происходит с некоторой временной задержкой в его крайних положениях при минимальном времени процесса перехода, что подтверждается результатами экспериментальных исследований (см. п. 5.3).

Вывод дифференциального уравнения поперечных колебаний стержня, основан на допущении о том, что в недеформированном состоянии его ось прямолинейна, и совпадает с центрами тяжести поперечных сечений. Действие внешней силы в её направлении при его изгибе не приводит к кручению стержня. Уравнение поперечных колебаний имеет вид [7, 60]

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = 0, \quad (t > 0; 0 < x < l), \quad (5.47)$$

где y – поперечные перемещения оси стержня; x – продольная координата; t – время; $a = EI / \rho S$; E – модуль упругости; I – момент инерции; ρ – плотность материала стержня; S – площадь поперечного сечения; l – длина стержня.

Уравнение (5.46) не учитывает релаксационные свойства и сопротивление среды. Для учета силы сопротивления примем, что она пропорциональна скорости деформации (скорости изменения восстанавливающей силы). В уравнении (5.47) эта сила описывается вторым слагаемым. Следовательно, скорость её уменьшения будет [7]

$$a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y^4(x,t)}{\partial x^4} \right) = a^2 \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial x^4 \partial t}. \quad (5.48)$$

Отсюда формула для силы внутреннего трения будет

$$F_c = \lambda a^2 \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial x^4 \partial t}, \quad (5.49)$$

где λ – коэффициент сопротивления.

Подставим (5.49) в (5.47)

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \lambda a^2 \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial x^4 \partial t} = 0. \quad (5.50)$$

Уравнение (5.50) характеризует затухающие колебания. Кроме того, последний член уравнения (5.50) наряду с сопротивлением описывает также и релаксационные свойства материала, то есть оно характеризует также запаздывание колебаний, которое оценивается коэффициентом сопротивления λ , являющимся, по существу и коэффициентом релаксации, о чём свидетельствует тот факт, что он имеет размерность времени.

Краевые условия к уравнению (5.50) будут

$$y(x,0) = xy_0 / e; \quad (5.51) \quad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0; \quad (5.52)$$

$$y(0,t) = 0; \quad (5.53) \quad \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0; \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = 0; \quad (5.55) \quad \frac{\partial^3 y(l,t)}{\partial x^3} = 0; \quad (5.56)$$

где y_0 – начальный изгиб незакрепленного торца стержня.

Согласно условию (5.52) начальная скорость принимается равной нулю. Условия (5.53) и (5.54) характеризуют равенство нулю перемещения и угла поворота относительно оси в точке $x = 0$. Из условия (5.55) следует равенство нулю изгибающего момента на свободном торце стержня. Условие (5.56) означает, что тангенциальная сила на свободном торце отсутствует.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{y}{y_0}; \quad \text{Fo} = \frac{at\gamma}{l^2}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad F = \frac{a\lambda}{l^2};$$

где Θ – безразмерное перемещение; Fo – число гомохронности (безразмерное время); ξ – безразмерная координата; F – безразмерный коэффициент сопротивления (релаксации); $y_0 = bl$; γ – безразмерный коэффициент.

С учетом обозначений задача будет

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} + \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^4} + F \frac{\partial^5 \Theta}{\partial \xi^4 \partial \text{Fo}} = 0, \quad (\text{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < l), \quad (5.57)$$

$$\Theta(\xi, 0) = \xi; \quad (5.58) \quad \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad (5.59)$$

$$\Theta(0, \text{Fo}) = 0; \quad (5.60) \quad \frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \xi^2} = 0; \quad (5.62) \quad \frac{\partial^3 \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \xi^3} = 0. \quad (5.63)$$

Решение задачи принимаем в виде

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \varphi(\text{Fo}) \psi(\xi). \quad (5.64)$$

Подставим (5.64) в (5.57)

$$\varphi'' + F \nu \varphi' + \nu \varphi = 0; \quad (5.65)$$

$$\psi_{\xi}^{IV} + \nu \psi = 0, \quad (5.66)$$

где $\varphi' = \partial \varphi / \partial \text{Fo}$; $\varphi'' = \partial^2 \varphi / \partial \text{Fo}^2$; $\psi_{\xi}^{IV} = \partial^4 \psi / \partial \xi^4$; ν – постоянная

Граничные условия для (5.66) имеют вид

$$\psi(0) = 0; \quad (5.67) \quad \frac{\partial \psi(0)}{\partial \xi} = 0; \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial \xi^2} = 0; \quad (5.69) \quad \frac{\partial^3 \psi(1)}{\partial \xi^3} = 0. \quad (5.70)$$

Интегрируя (5.66), получаем

$$\psi(\xi) = A \cosh(\omega) + B \sinh(\omega) + C \cos(\omega) + D \sin(\omega), \quad (5.71)$$

где $\omega = \xi^4 \sqrt{\nu}$; A, B, C, D – постоянные интегрирования.

Подставив (5.71) в (5.67), (5.68), находим $C = -A$; $D = -B$.

Соотношение (5.71) будет

$$\psi(\xi) = A(\cos h(\omega) - \cos(\omega)) + B \sin h(\omega) - \sin(\omega). \quad (5.72)$$

Постоянные A и B находятся из условий (5.69), (5.70). Подставляя (5.72) в эти условия, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} A(\cos h(\mu) + \cos(\mu)) + B \sin h(\mu) + \sin(\mu) &= 0; \\ A(\sin h(\mu) - \sin(\mu)) + B \cos h(\mu) + \cos(\mu) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.73)$$

где $\mu = \sqrt[4]{v}$.

Для нетривиального решения однородной системы её определитель приравняем к нулю

$$\begin{vmatrix} \cos h(\mu) + \cos(\mu) & \sin h(\mu) + \sin(\mu) \\ \sin h(\mu) - \sin(\mu) & \cos h(\mu) + \cos(\mu) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.74)$$

Раскрывая определитель, имеем

$$\cos h(\mu) \cos(\mu) = -1. \quad (5.75)$$

Решения уравнения (5.75) позволяют найти собственные числа μ_k задачи (5.66) – (5.70). Первые 6 из них следующие: $\mu_1 = 1,875$; $\mu_2 = 4,694$; $\mu_3 = 7,855$; $\mu_4 = 10,996$; $\mu_5 = 14,137$; $\mu_6 = 17,279$. Собственные функции определяются из (5.72).

Коэффициенты A и B соотношения (5.72) находятся из системы уравнений (5.73). В однородной системе следует положить $A = 1$. Первые четыре коэффициента B будут $B_1 = 0,734$; $B_2 = -1,01846$; $B_3 = -0,99922$; $B_4 = -1,00033$.

Характеристическое уравнение для уравнения (5.65) будет

$$z^2 + F_2 v z + v = 0. \quad (5.76)$$

Уравнения (5.65) имеет следующее решение

$$\varphi(F_0) = C_{1k} e^{z_{1k} F_0} + C_{2k} e^{z_{2k} F_0}, \quad (5.77)$$

где C_{1k} , C_{2k} , – константы интегрирования; z_{1k} , z_{2k} , – корни уравнения (5.76).

Подставим (5.72), (5.77) в (5.64)

$$\Theta(\xi, F_0) = (C_{1k} e^{z_{1k} F_0} + C_{2k} e^{z_{2k} F_0} +) (\cos h(\omega) - \cos(\omega) + B(\sin(\omega) - \sin(\omega))) \quad (5.78)$$

Каждое решение (5.78) удовлетворяет (5.57), (5.60) – (5.63). Однако они не удовлетворяют условиям (5.58), (5.59). Запишем сумму решений (5.78)

$$\Theta(\xi, F_0) = \sum_{k=1}^{\infty} [(C_{1k} e^{z_{1k} F_0} + C_{2k} e^{z_{2k} F_0} +) (\cos h(\omega) - \cos(\omega) + B(\sin(\omega) - \sin(\omega))]. \quad (5.79)$$

Константы C_{1k} , C_{2k} , C_{3k} находятся из (5.58) – (5.59) из условия определения их невязки и выполнения её ортогональности к собственным функциям $\psi_k(\xi)$. Ввиду ортогональности $\psi_k(\xi)$, неизвестные в системе алгебраических уравнений относительно разделяются. Для C_{1k} , C_{2k} , C_{3k} получают и следует решать три алгебраических уравнения, после решения которых точное решение задачи находится из (5.79).

Расчеты по (5.79) представлены на рис. 5.8, 5.9, из анализа которых заключаем, что частота и амплитуда колебаний по высоте стержня различна. Максимальная амплитуда при минимальной частоте наблюдаются на свободном торце, а максимальная частота при минимальной амплитуде - вблизи точки закрепления ($\xi = 0$). В этой связи можно отметить, что наиболее неблагоприятные условия в отношении надёжности и долговечности работы конструкций будут создаваться в сечениях стержня, где частота колебаний будет наибольшая пусть даже при минимальной амплитуде. Аналитическое решение вида (5.79) позволяет определить также сечения. И, в частности, в сечении $\xi = 0,15$ достигается максимальная частота колебаний.

Важной особенностью процесса колебаний является наличие временной задержки свободного торца стержня в крайних противоположных положениях. Наиболее чётко этот факт отмечается в результатах эксперимента (см. рис. 5.8 и 5.17), анализ которых приводит к заключению, что время задержки в крайних положениях превышает время перехода свободного торца из одного крайнего положения в другое. Следовательно, данный переход происходит в форме скачка (хлопка). Отметим, что результаты теоретических и экспериментальных исследований согласуются лишь качественно.

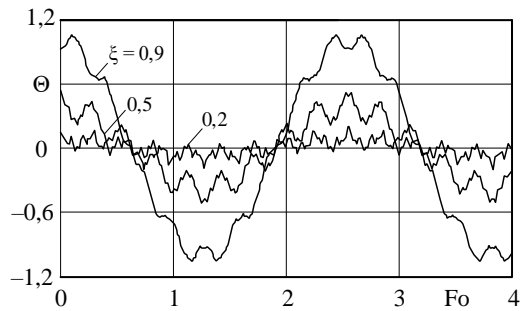


Рисунок 5.8. Перемещения стержня в сечениях $\xi = 0,2; 0,5; 0,9$

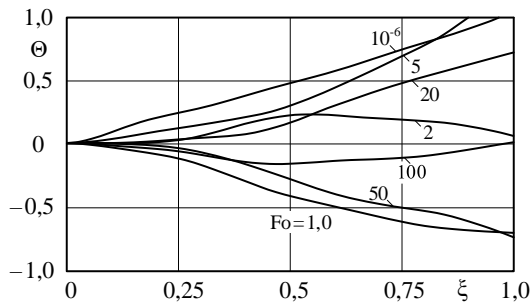


Рисунок 5.9. Изгиб стержня по его длине во времени

На рис. 5.9а даны результаты расчетов, подтверждающих приведенные выше заключения. И, в частности, используя метод конечных элементов, были выполнены расчеты напряжений в лопатке цилиндра низкого давления (ЦНД) паровой турбины Т – 100 – 130. Необходимость проведения таких расчетов объясняется тем, что на практике довольно часто происходит обрыв лопаток в области замка, то есть там, где выполняется жесткое крепление лопатки к диску. Анализ результатов расчетов позволяет заключить, что со стороны сил давления пара наблюдаются растягивающие (отрицательные) напряжения, достигающие около 40 кг/мм^2 . С обратной стороны имеют место напряжения сжатия (отрицательные) примерно такой же величины. Таким образом, при поперечных колебаниях лопатки обрыв происходит примерно на одной третьей части её высоты, считая от точки крепления.

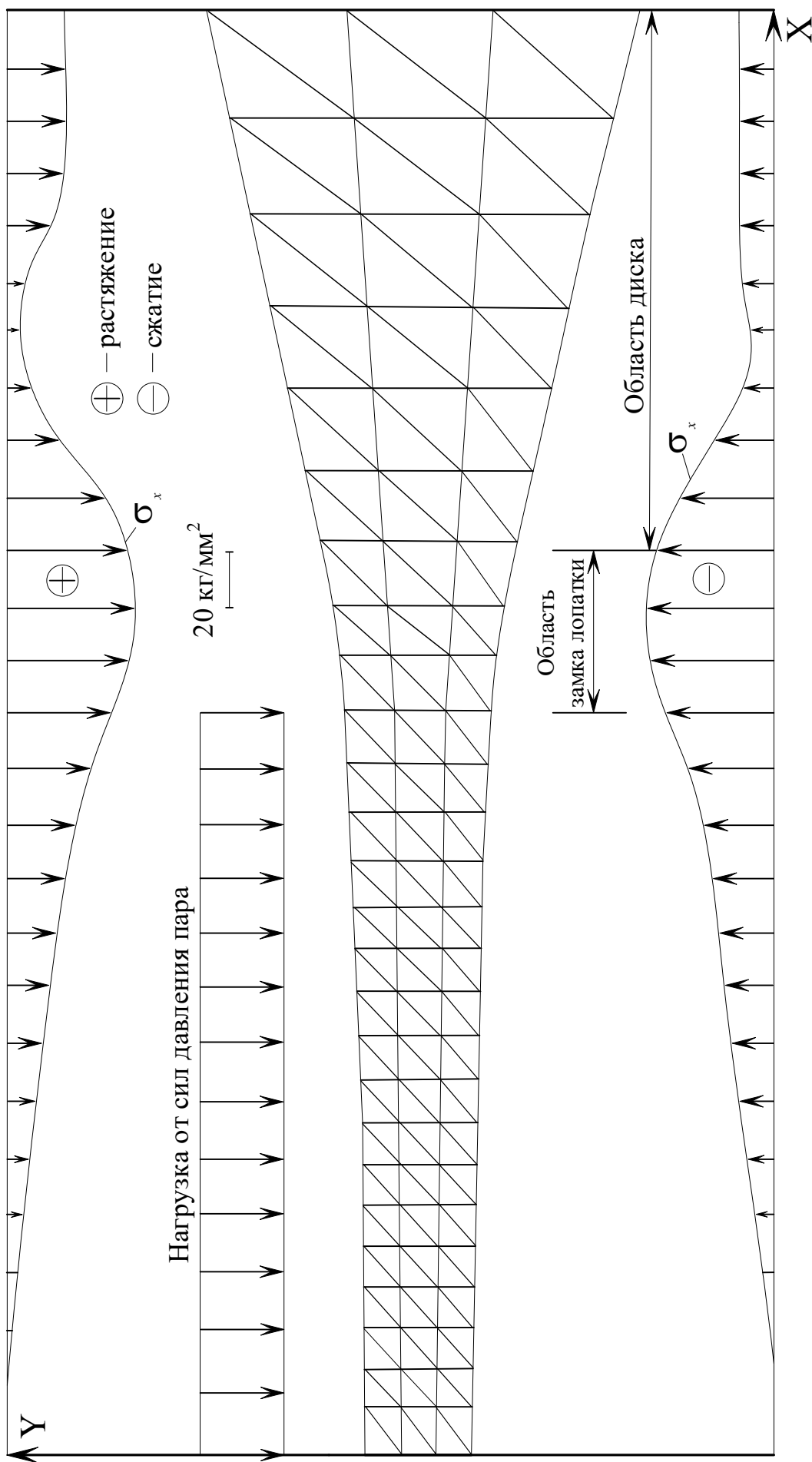


Рис. 5.9а. Напряжения в лопатке паровой турбины.

5.3. Экспериментальные исследования продольных колебаний стержня

С целью подтверждения теоретических расчетов, полученных в диссертации, в АО РКЦ «Прогресс» были проведены эксперименты по исследованию продольных и поперечных колебаний стержня, которые выполнялись по плану Соглашения о совместном научном и техническом сотрудничестве, заключенного между АО РКЦ «Прогресс» и Самарским государственным техническим университетом (Соглашение № 1 – сотр. от 26.04.2017 г.).

Установка для экспериментальных исследований продольных колебаний стержня включала (рис. 5.10): стенд для получения начальных удлинений; измерительную систему ИИС «АСИДХК»; акселерометры РСВ Piezotronics типа 354 C02; усилитель сигнала РСВ Piezotronics 481A03; измерительный усилитель QuantumX MX 840B (класс точности 0,05); тензометрический датчик силы – модель U9B2KN (класс точности 0,2); индуктивный датчик перемещения; ноутбук с программным обеспечением (Microsoft Win 8.1, CatmanAP v.4.3).

При проведении эксперимента стальной стержень 1 (сталь 30ХГСА) с диаметром 17 и длиной 310 мм, закреплялся на левом торце (рис. 5.11) путем жёсткого присоединения к цилиндрической втулке длиной 80 и диаметром 40 мм. К втулке 3 правого торца жёстко присоединялась разрывная шпилька 4 диаметром узкой части 4 мм. Диаметр шпильки принимался таким, чтобы её разрыв происходил при заданной величине растягивающей нагрузки на правом торце. После разрыва шпильки стержень, растянутый до 0,1 мм совершал колебания, отмечаемые измерительными приборами.

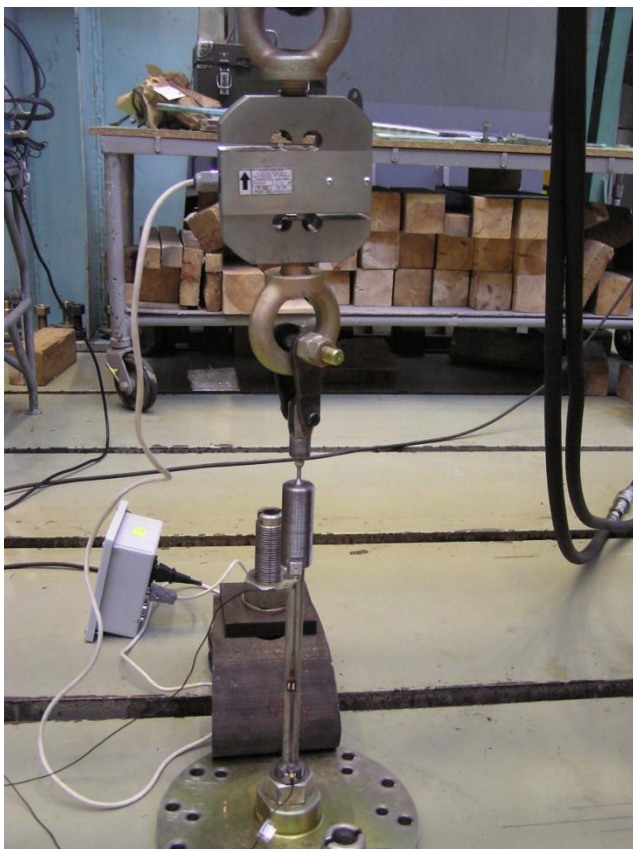


Рис. 5.10. Установка исследования продольных колебаний

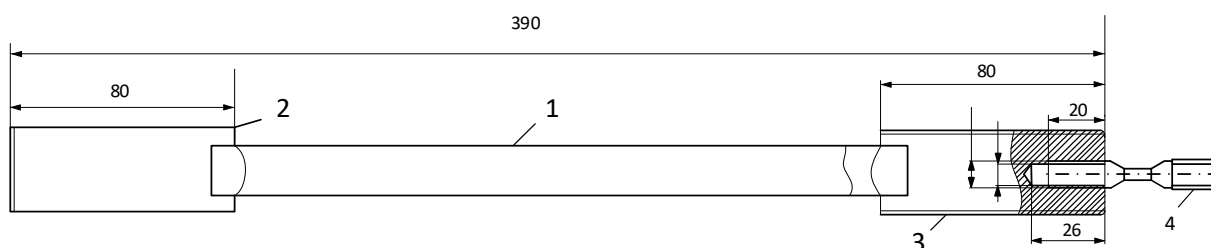


Рисунок 5.11. Схема закрепления стержня. 1 – стержень; 2 – неподвижная втулка; 3 – подвижная втулка; 4 – разрывная шпилька. Размеры даны в мм

Анализ результатов приводит к заключению, что имеются два временных участка с существенно отличающимися процессами колебаний свободного торца стержня (рис. 5.12, 5.14). Так, на участке времени $0 \leq \tau \leq 0,04$ с колебания происходят с резко изменяющейся амплитудой. Причём, колебания на данном временном участке совершаются с двумя амплитудами (см. участок *b* на рис. 5.13) – с большой амплитудой и малой частотой (с периодом колебания $2a$), а также с малой амплитудой и большой частотой (см. участок *a*). На участке времени $0,04 \leq \tau \leq 0,1$ с колебания стабилизируются, приобретая вид гармонич-

ческих колебаний с медленно уменьшающейся амплитудой. Полученные на первом временном участке объясняются тем, что высокоамплитудные процессы сжатия (расширения) сопровождаются одновременно высокочастотными и низкоамплитудными колебаниями, то есть колебания стержня происходят одновременно с двумя амплитудами при различных частотах. В работе [25] показано, что результаты теоретических исследований, выполненных по формуле (5.35), качественно совпадают с данными эксперимента, в случае, если для двух временных участков, с существенно отличающимися процессами колебаний, принимать различные коэффициенты сопротивления и релаксации.

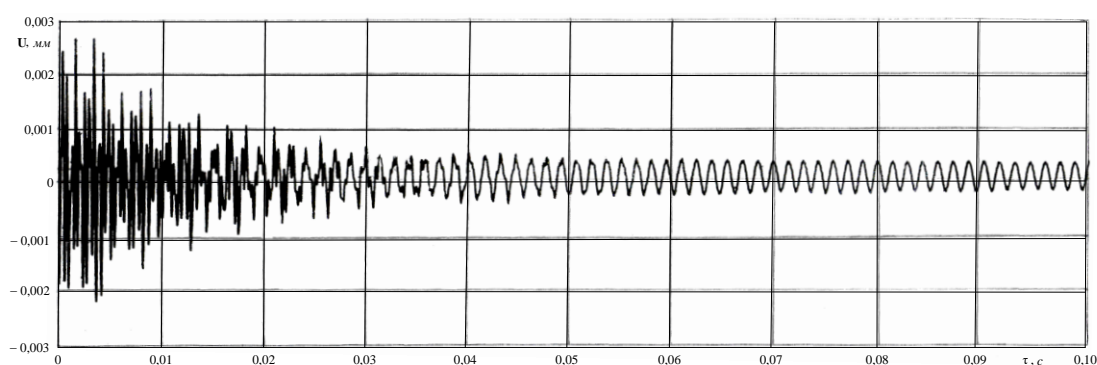


Рисунок 5.12. Перемещение свободного торца стержня в диапазоне времени $0 \leq \tau \leq 0,1$ с (эксперимент)

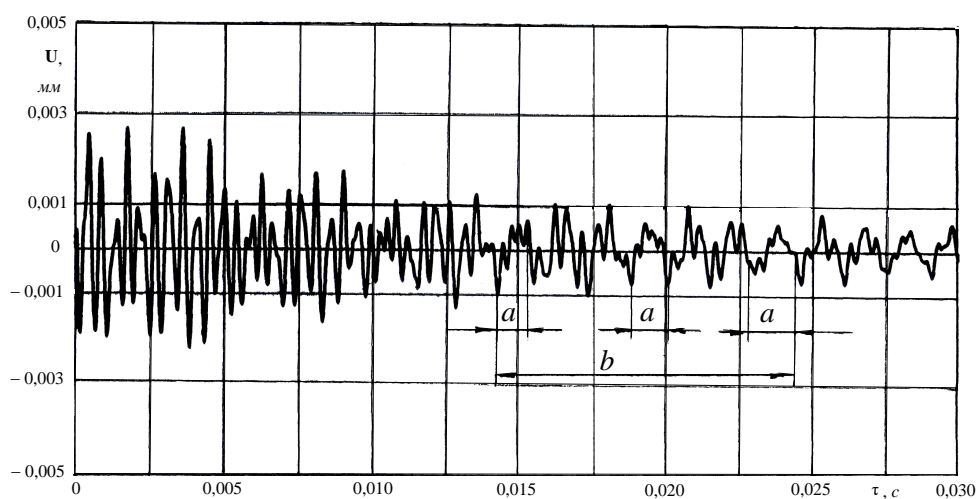


Рисунок 5.13. Перемещение свободного торца стержня в диапазоне времени $0 \leq \tau \leq 0,03$ с

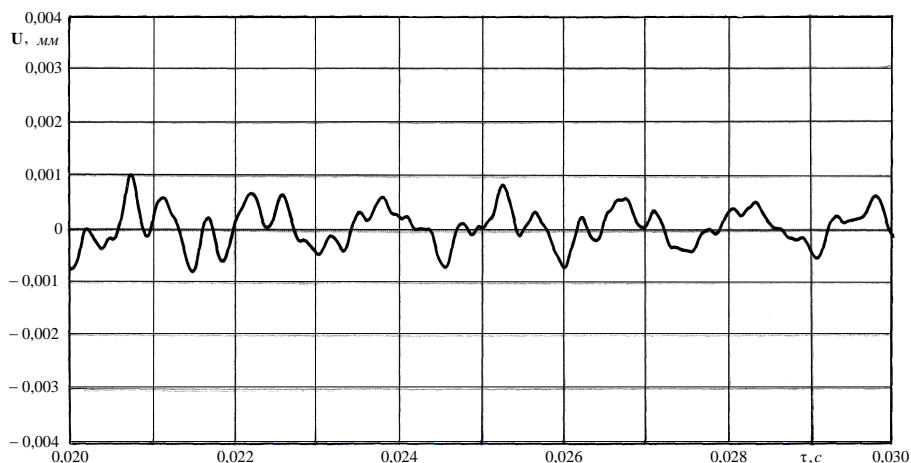


Рисунок 5.14. Перемещение свободного торца стержня в диапазоне времени $0,02 \leq \tau \leq 0,03$ с (эксперимент)

Выполненные экспериментально – теоретические исследования показали, что неучёт релаксационных явлений приводит к более высокой амплитуде – максимальная погрешность по сравнению с экспериментальными данными составила $\Delta_{\max} = 42\%$ при совпадающей частоте (рис. 5.14 а). Учёт коэффициентов релаксационных процессов позволяет уменьшить расхождение результатов – максимальная относительная погрешность теоретических и экспериментальных исследований составила $\Delta_{\max} = 15\%$ (рис. 5.14 б).

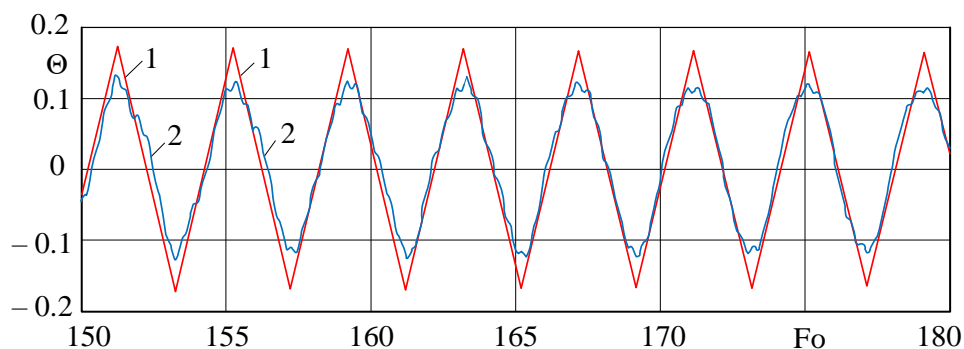


Рис. 5.14 а. Колебания стержня на участке линейного изменения амплитуды (в увеличенном масштабе). 1 – расчет (расчет, основанный на классическом законе Гука (1)) при $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $Fo_3 = 0,003$; 2 – эксперимент в диапазоне времени $0,055 \leq t \leq 0,066$ с

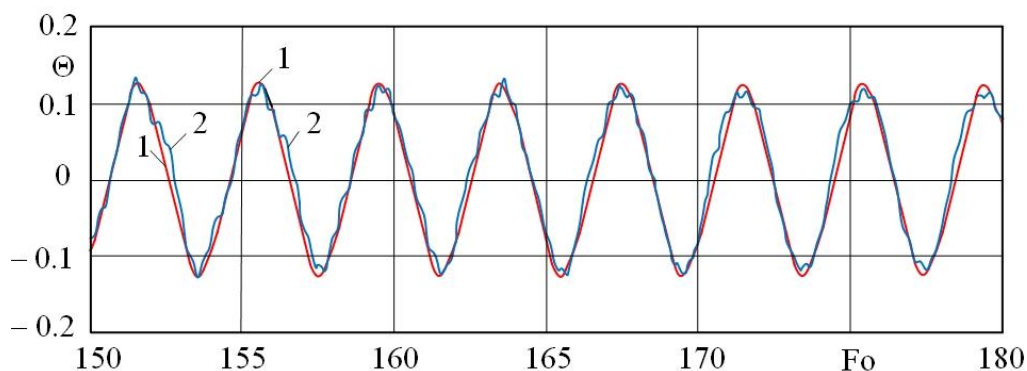


Рис. 5.14 б. Колебания стержня на участке линейного изменения амплитуды (в увеличенном масштабе). 1 – расчет (расчет, основанный на модифицированном законе Гука (8)) при $F_{o_1} = F_{o_2} = 0,5$; $F_{o_3} = 0,003$; 2 – эксперимент в диапазоне времени $0,055 \leq t \leq 0,066$ с

Характеристика оборудования, использованного при исследовании продольных колебаний стержня

Оборудование для экспериментального определения перемещений стержня:

1. Измерительная система: ИИС «АСИДХК». Свидетельство о калибровке СРК 502497 от 19.07.16;

2. Акселерометры: 354C02 серийные номера 15894, 15899; свидетельство о поверке 448089 от 23.11.2015 т 448093 от 23.11.2015; диапазон рабочих частот от 0,2 до 6000 Гц; диапазон измерения ускорения до 500 g;

3. Усилитель сигнала: РСВ Piezotronics тип 481A03 серийный номер 376; свидетельство о поверке 503877 от 09.08.2016; диапазон рабочих частот от 0,5 до 10000 Гц.

Оборудование для определения разрушающей нагрузки:

1. Ноутбук с программным обеспечением (Microsoft Win 8.1, CatmanAP v.4.3);

2. Измерительный усилитель QuantumX MX 840B с классом точности 0,05; зав. № 0009E5006FC5; свидетельство поверки № 502797 действительно до 02.08.2017 г.;

3. Тензометрический датчик силы модель U9B 2 kN класс точности 0,2; зав. № 143713097; свидетельство поверки № СвП - 389676 до 20.10.2016 г.;

4. Индуктивный датчик перемещения (участвовал в первом эксперименте по определению усилия растяжения на 0,2 мм).

5.4. Экспериментальные исследования поперечных колебаний стержня

Были также выполнены эксперименты по исследованию поперечных колебаний стержня (рис. 5.15). Размеры стержня: длина – 200 мм; ширина - 20 мм; толщина – 5 мм. Материал стержня - сталь 30ХГСА. В точках 1, 2, 3 были установлены соответственно датчики перемещений LS5 – 2012, LS5 – 10/10, LS5 – 50/100. Датчик 1 был расположен непосредственно на торце стержня, датчики 2 и 3 соответственно на расстояниях 50 мм и 100 мм от незакрепленного торца.

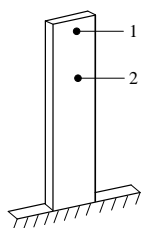


Рис. 5.15. Схема измерений. 1, 2 – точки расположения датчиков перемещений

Исследования выполнялись на специализированной установке АО РКЦ «Прогресс» (рис. 5.16).



Рис. 5.16. Общий вид э установки. 1 – стержень; 2 – электромагнит; 3 – датчик силы; 4 – датчик перемещений; 5 – термогигрометр

Рассмотрим порядок выполнения эксперимента. Незакрепленный торец стержня 1 с помощью электромагнита z отклонялся на некоторое расстояние от

вертикального положения, регулируемое датчиком силы. После отключения электромагнита стержень совершал поперечные колебания, фиксируемые датчиком перемещений.

Анализ результатов приводит к заключению, что колебания происходят с некоторой задержкой в крайних состояниях стержня (рис. 5.17). Причем, переход из одного крайнего состояния происходит за короткий отрезок времени. Видно, что колебания различных сечений стержня по высоте происходят с разной частотой, причем бóльшая частота происходит в точках, сечениях приближенных к точке закрепления. Результаты численных и экспериментальных исследований качественно согласуются.

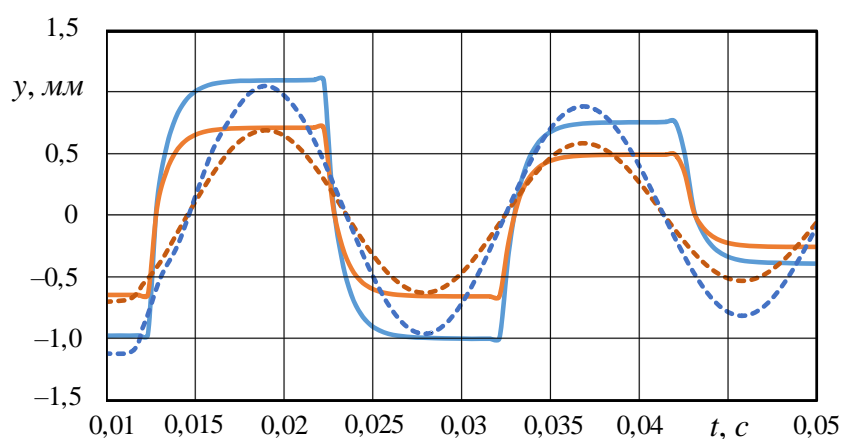


Рис. 5.17. Перемещение различных точек стержня во времени — — — — экспериментальные данные; — — — — результаты расчета по формуле (5.79) при $F = 0,015$; $\gamma = 0,004$

6. Исследование резонансных, бифуркационных и автоколебательных процессов в газе

6.1. Разработка математической модели колебаний газа с учетом релаксационных явлений

Научные результаты данной главы представлены в работах [106 – 108] автора диссертации. В настоящем разделе представлены результаты разработки новой математической модели колебаний газа с учетом сопротивления среды и внешней нагрузки. Предложенная модель получена с учётом релаксационных слагаемых во втором законе Ньютона и законе Гука, позволяет обнаруживать новые физические эффекты и моделировать процессы колебаний газа в нестационарном режиме, что особенно важно для дальнейшего развития и модернизации акустических двигателей (рис. 6.1), а также для фундаментального изучения большого количества процессов колебаний газа в нестационарных (переходных) режимах работы.

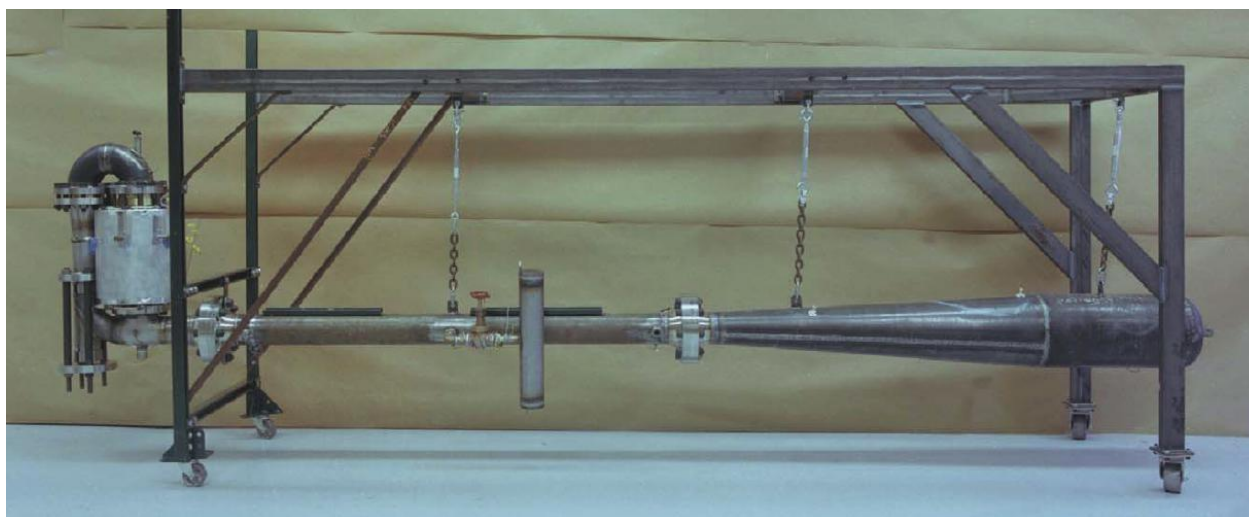


Рис. 6.1. Общий вид термоакустического двигателя [84]

Исследования, выполненные численными методами, позволили заключить, что совпадение собственной частоты колебаний газа с частотой внешней нагрузки сопровождается резонансом, при котором происходит неограниченное увеличение амплитуды колебаний газа. При учете сопротивления газа в случае резонансных частот амплитуды колебаний стабилизируются на некоторой постоянной

ной величине, которая определяется коэффициентом сопротивления. При частотах, вблизи резонансных, происходят бифуркационные колебания, при сопровождающиеся периодическим увеличением амплитуды. При значительно не совпадающих частотах колебаний нагрузки и газа колебания газа в каждой точке происходят с двумя амплитудами: с высокой амплитудой и малой частотой, а также с малой амплитудой и высокой частотой. При большом сопротивлении газа (большая вязкость) происходит критическое затухание, когда возврат газа в исходное положение протекает без колебательного процесса.

Скорость распространения продольных деформаций в газе определяется его физическими свойствами. Колебания газа, не сопровождающиеся его движением в канале, называется волновым. Подобные колебаний описываются волновыми (гиперболическими) уравнениями.

При выводе уравнения колебаний газа используются закон Гука и уравнение второго закона Ньютона. Согласно уравнению закона Гука, избыточное давление в газе возникающее при его колебаниях, эквивалентно деформации $\varepsilon = d\xi/dx$, [16]

$$p_{\text{из}} = -\rho_0 e^2 \varepsilon, \quad (6.1)$$

где ξ – перемещение; x – координата; $p_{\text{из}}$ – избыточное давление; ρ_0 – плотность в исходном состоянии; ε – деформация; $e = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$ – скорость волны.

Второй закон Ньютона принимается в виде

$$F = ma = m \frac{d\nu}{dt} = m \frac{d^2\xi}{dt^2} = \rho S \Delta x \frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad (6.2)$$

где F – сила, m – масса тела, $a = d\nu/dt$ – ускорение, $\nu = d\xi/dt$ – скорость, ρ – плотность, S – площадь поперечного сечения канала, Δx – длина элементарного участка.

Сила давления, приложенная на участке $(x + \Delta x)$, равна

$$F = S \Delta x dp_{\text{из}} / dx. \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в (6.2), получаем следующее уравнение движения (равновесия)

$$\rho_0 S \Delta x \frac{d^2 \xi}{dt^2} = S \Delta x \frac{dp_{\text{вз}}}{dx}. \quad (6.4)$$

Подставляя (6.1) в (6.4), находим

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2}. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) описывает незатухающие колебания, что связано с отсутствием здесь слагаемых, учитывающих сопротивление газа. С целью его учета допустим, что сопротивления F_c пропорциональна изменению перемещения

$$F_c = -r \partial \xi / \partial t, \quad (6.6)$$

где «минус» означает, что направление действия силы F_c противоположно направлению перемещения; r , $\text{кг}/\text{с}$ – коэффициент.

Подставим (6.6) в (6.4)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{\text{вз}}}{\partial x} - \frac{r}{\Delta V} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (6.7)$$

где $\Delta V = S \Delta x$ – объем элементарного участка.

Подставим (6.1) в (6.7)

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t}, \quad (6.8)$$

где $\gamma = r / (\rho_0 \Delta V)$ – коэффициент сопротивления, $1/\text{с}$.

Уравнение (6.8) получено без учета релаксационных явлений, так как при его выводе применена формула закона Гука (6.1), в котором не учтена причинно – следственная связь, где причина деформация, следствие – избыточное давление. Так как они не зависят от времени, то следствие при изменениях причины наступает мгновенно. Однако передача импульса в реальных системах связана с определенным запаздыванием зависящим от коэффициента релаксации.

Для учета запаздывания запишем (6.1) в виде

$$p_{\text{вз}} + \tau_1 \partial p_{\text{вз}} / \partial t = -\rho_0 e^2 (\varepsilon + \tau_2 \partial \varepsilon / \partial t), \quad (6.9)$$

где τ_1 , τ_2 – коэффициенты релаксации.

Формула (6.9) может быть найдена из обобщенной системы Онзагера [40, 41]

$$J_i = L_i^{(r)} \frac{\partial J_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \left(L_{ik} X_k + L'_{ik} \frac{\partial X_k}{\partial t} \right), \quad (6.10)$$

где J_i – поток субстанции; X_k – движущая сила; $L_i^{(r)}$, L_{ik} , L'_{ik} – постоянные.

Если принять $L_i^{(r)} = -\tau_1$; $L_{ik}^{(r)} = E$; $L'_{ik} = \rho_0 e^2 \tau_2$; $J_i = p_{из}$; $X_k = \partial \xi / \partial x$, то (6.10) к (6.9).

Формула (6.9) совпадает также с моделями Максвелла и Кельвина – Фойхта

$$\sigma + Q \partial \sigma / \partial t = E(\varepsilon + Q \partial \varepsilon / \partial t), \quad (6.11)$$

где σ – напряжение, E – модуль упругости, $\varepsilon = d\xi / dx$ – перемещение; t – время; Q – постоянная.

Постоянная Q с размерностью времени определяется как время релаксации.

При $\sigma = p_{из}$; $E = \rho_0 e^2$; $\tau_1 = \tau_2 = Q$ формула (6.11) совпадает с (6.9).

Выражая $p_{из}$ из (6.9) и подставляя в (6.7), находим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho_0 e^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \rho_0 e^2 \tau_2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t} - \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p_{из}}{\partial x} \right) - \frac{r}{\Delta V} \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (6.12)$$

Заменяя в (6.12) $\partial p_{из} / \partial x$ ее величиной из (6.4), имеем

$$\tau_1 \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + e^2 \tau_2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t} - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (6.13)$$

Уравнение (6.13) представляет волновое уравнение колебаний газа, учитывающее сопротивление среды и релаксационные явления. Если принять $\tau_1 = \tau_2 = \gamma = 0$, то (6.13) приводится к (6.5).

Рассмотрим получение решения уравнения (6.13) для газа в трубопроводе с закрытым концом при $x = \delta$. На втором конце – действует давление p (при $x = 0$)

$$\frac{p}{S} = \rho_0 e^2 \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = \cos(\omega t), \quad (6.14)$$

где S – единица площади; $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота, rad/c .

При начальном перемещении газа, равном ξ_0 и начальном ускорении описываемом линейной функцией, математическая постановка задачи будет

$$\tau_1 \frac{\partial^3 \xi(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = e^2 \left[\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 \xi(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] - \gamma \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}, \quad (6.15)$$

$$(t > 0; \quad 0 < x < \delta);$$

$$\xi(x,0) = \xi_0; \quad (6.16) \quad \frac{\partial \xi(x,0)}{\partial t} = z(\delta - x); \quad (6.17) \quad \frac{\partial^2 \xi(x,0)}{\partial t^2} = 0; \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \xi(0,t)}{\partial x} = \cos(\omega t); \quad (6.19) \quad \xi(\delta,t) = 0, \quad (6.20)$$

где δ – длина трубы; z – коэффициент, $1/c$.

Обозначим:

$$\psi = \frac{\xi}{\xi_0}; \quad \eta = \frac{x}{\delta}; \quad \text{Fo} = \frac{et}{\delta}; \quad F_1 = \frac{e\tau_1}{\delta}; \quad F_2 = \frac{e\tau_2}{\delta}; \quad F_3 = \frac{\delta\gamma}{e}, \quad (6.21)$$

где ψ , η , Fo – безразмерные перемещение, координата, время; $\xi_0 = b\delta$; F_1 , F_2 – безразмерные коэффициенты релаксации; F_3 – безразмерный коэффициент сопротивления.

Учитывая (6.15) – (6.20) будет

$$F_3 \frac{\partial \psi(\eta, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + F_1 \frac{\partial^3 \psi(\eta, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}^3} + \frac{\partial^2 \psi(\eta, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \psi(\eta, \text{Fo})}{\partial \eta^2} + F_2 \frac{\partial^3 \psi(\eta, \text{Fo})}{\partial \eta^2 \partial \text{Fo}}, \quad (6.22)$$

$$(\text{Fo} > 0; \quad 0 < \eta < 1);$$

$$\psi(\eta, 0) = 1; \quad (6.23) \quad \frac{\partial \psi(\eta, 0)}{\partial \text{Fo}} = D(1 - \eta); \quad (6.24) \quad \frac{\partial^2 \psi(\eta, 0)}{\partial \text{Fo}^2} = 0; \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial \psi(0, \text{Fo})}{\partial \eta} = F_4 \cos(F_5 \text{Fo}); \quad (6.26) \quad \psi(1, \text{Fo}) = 0, \quad (6.27)$$

где $F_4 = \delta/\xi_0$; $F_5 = \omega\delta/e$ – безразмерная частота колебаний нагрузки); $D = \delta^2 z / (e\xi_0)$ – безразмерный комплекс.

Отметим, что уравнение (6.22) с точностью до постоянных совпадает у уравнениями (3.19) и (5.12).

Задача (6.22) – (6.27) решалась численным методом. Строилась сетка с шагами $\Delta\eta = 0,005$, $\Delta\text{Fo} = 0,005$ по η и Fo так, что

$$\eta_k = k \Delta\eta, \quad k = \overline{0, K}; \quad \text{Fo}_i = i \Delta\text{Fo}, \quad i = \overline{0, I}, \quad (6.28)$$

где $K = 200$, $I = 50000$ – число шагов по η и Fo .

На сетке (6.28) вводились функции $\psi_k^i = \psi(\eta_k, Fo_i)$. Задача (6.22) – (6.27) в конечных разностях будет

$$F_3 \frac{\psi_k^{i+1} - \psi_k^i}{\Delta Fo} + F_1 \frac{\psi_k^{i+1} - 3\psi_k^i + 3\psi_k^{i-1} - \psi_k^{i-2}}{\Delta Fo^3} + \frac{\psi_k^{i-1} - 2\psi_k^i + \psi_k^{i+1}}{\Delta Fo^2} =$$

$$= \frac{\psi_{k-1}^i - 2\psi_k^i + \psi_{k+1}^i}{\Delta \eta^2} + F_2 \left(\frac{\psi_{k-1}^i - 2\psi_k^i + \psi_{k+1}^i}{\Delta \eta^2 \Delta Fo} - \frac{\psi_{k-1}^{i-1} - 2\psi_k^{i-1} + \psi_{k+1}^{i-1}}{\Delta \eta^2 \Delta Fo} \right);$$

$$\psi_k^0 = 1; \quad \frac{\psi_k^1 - \psi_k^0}{\Delta Fo} = D(1 - \eta); \quad \frac{\psi_k^0 - 2\psi_k^1 + \psi_k^2}{\Delta \eta} = 0;$$

$$\frac{\psi_1^i - \psi_0^i}{\Delta \eta} = F_4 \cos(F_5 Fo_i); \quad \psi_K^i = 0.$$

Результаты исследований даны на рис. 6.2 – 6.9. В случае неучёта релаксационных свойств и сил сопротивления ($F_1 = F_2 = F_3 = 0$), а также внешней нагрузки ($F_4 = 0$), колебания газа незатухающие с собственной частотой $\omega = 1,575$.

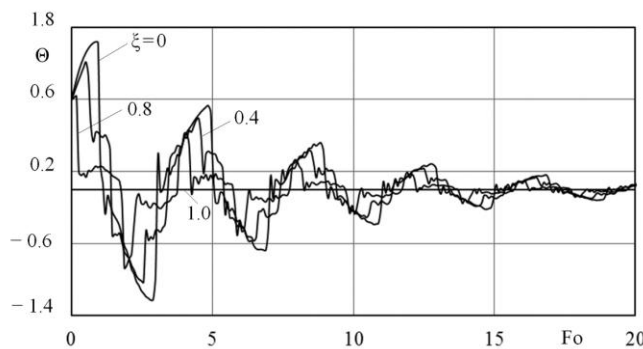


Рис. 6.2а. Изменение перемещений.

$$F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = 0; \quad F_3 = 0,3; \quad D = 1,5$$

При ненулевых коэффициентах сопротивления ($F_3 \neq 0$) и неучете релаксационных явлений ($F_1 = F_2 = 0$) колебания затухающие (рис. 6.2а).

При $F_1 = F_2 = F_3 = 0$; $F_4 = 0,5$; $F_5 = 1,575$ частота вынужденных колебаний совпадает с собственной частотой. Здесь происходит неограниченное увеличение амплитуды (резонанс) (рис. 6.2б).

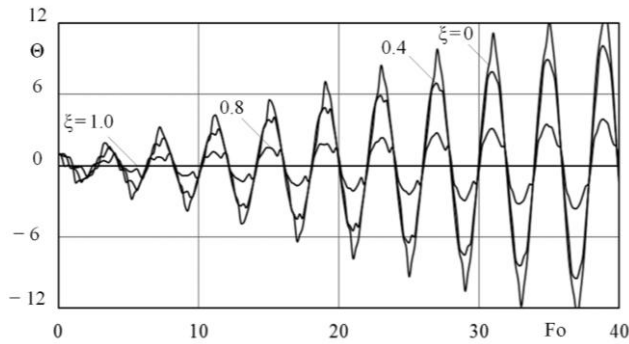


Рис. 6.2б. Изменение перемещений.

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0; \quad F_4 = 0,5; \\ F_5 = 1,575; \quad D = 1,5$$

При малых коэффициентах релаксации ($F_1 = F_2 = 0,1$) и при $F_3 = 0,3$; $F_4 = 0,1$; $F_5 = 1,575$ (резонансные частоты) на начальном отрезке времени амплитуда уменьшается до некоторого минимума. Затем она возрастает, стабилизируясь на постоянной величине (рис. 6.3).

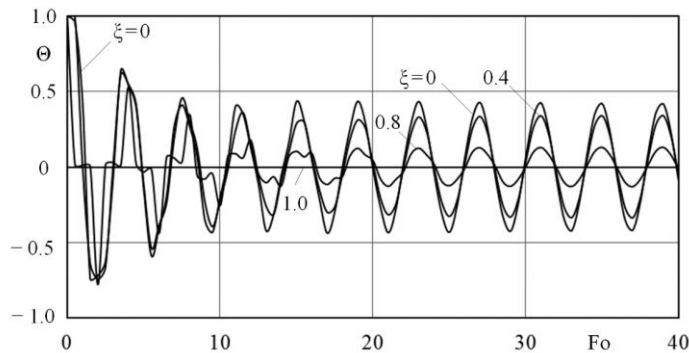


Рис. 6.3. Изменение перемещений.

$$F_1 = F_2 = 0,1; \quad F_3 = 0,3; \quad F_4 = 0,1; \\ D = 1,5$$

Колебания в резонансных частотах при $F_1 = F_2 = 2$, $F_3 = 1$ приведены на рис. 6.4, из которого видно, что происходит периодическое возрастание амплитуды.

Были выполнены также расчеты при близких к резонансным частотам и при существенно от них отличающихся. При близких к резонансным частотам ($F_5 = 1,5$) происходит бифуркационное изменение амплитуды, при котором она периодически возрастает от нуля до некоторого максимального значения. Такие колебания называются еще биениями.

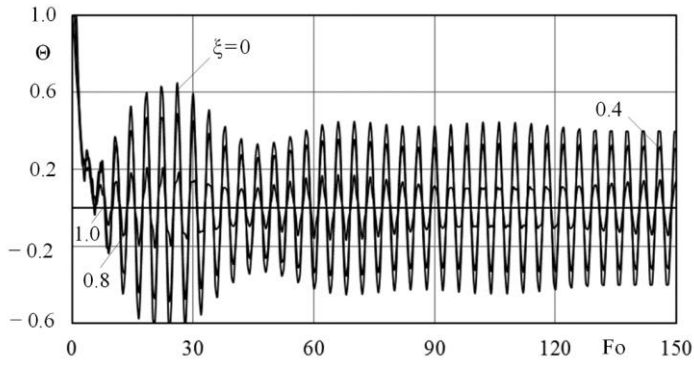


Рис. 6.4. Изменение перемещений.

$$F_1 = F_2 = 2; F_3 = 1; F_4 = 0,1; D = 0$$

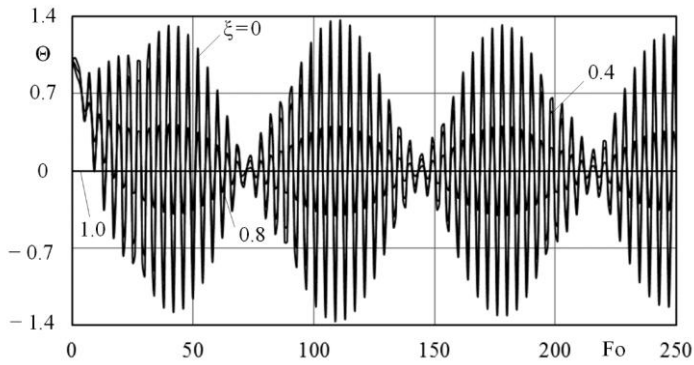


Рис. 6.5. Изменение перемещений.

$$F_1 = F_2 = 10; F_3 = 0,3; F_4 = 0,1;$$

$$D = 0$$

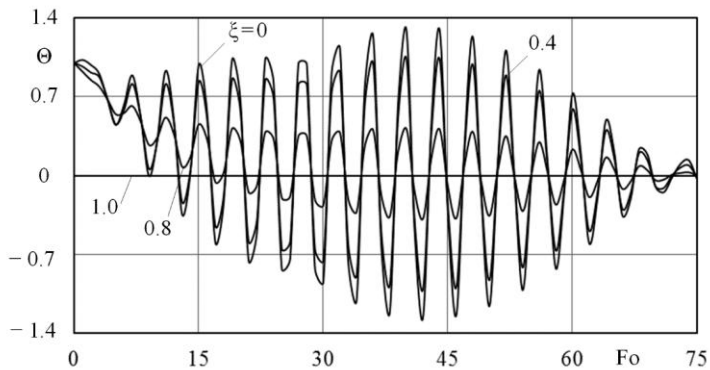


Рис. 6.6. Изменение перемещений.

$$F_1 = F_2 = 10; F_3 = 0,3; F_4 = 0,1; D = 0$$

Пример колебаний газа при частотах, существенно отличающихся от резонансных ($F_5 = 0,1$), любая точка газа участвует в двух колебательных процессах – в высокочастотном и малоамплитудном, а также в низкочастотном и высокоамплитудном (рис. 6.7).

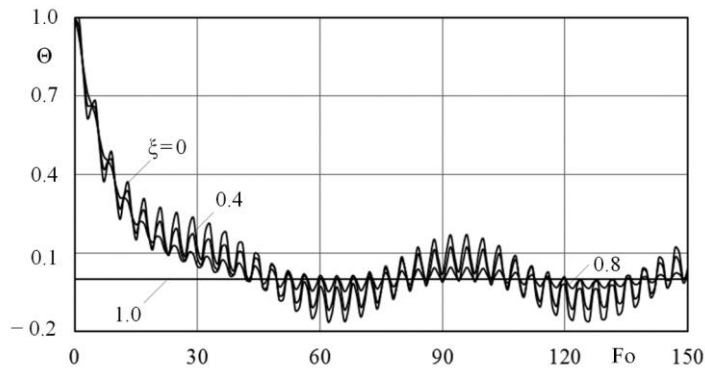


Рис. 6.7. Изменение перемещений газа в нерезонансных частотах:

$$F_1 = F_2 = 10 ; F_3 = 0,3 ; F_4 = 0,1 ; F_5 = 0,1$$

6.2. Автоколебательные процессы в термоакустике

Колебательные процессы разделяются на три группы: свободные или собственные (происходят в системах, не содержащих источников энергии); вынужденные (происходят под действием внешней нагрузки); самовозбуждающиеся или автоколебания, при которых колеблющаяся система, называемая автоколебательной, самостоятельно регулирует поступление энергии от внешнего непериодического источника, причём в таком количестве, чтобы процесс колебаний был незатухающим. К самовозбуждающимся колебаниям относятся: фрикционные колебания, флаттерные колебания, колебания в часах с анкерным механизмом, в термомеханике (термоакустические колебания) и др.

Известны также автоколебательные системы с инерциональным возбуждением. Механизмом возбуждения автоколебаний является здесь инерционное взаимодействие между колебательной системой и регулирующим устройством (обратная связь), исключая передачу энергии от колеблющегося тела к внешнему источнику (см. рис. 6.8) [7, 45].

Таким образом, автоколебательной является система, в которой совершаются незатухающие периодические колебания от действия непериодического источника энергии. Подобная система включает: непериодический источник; колебательную систему; устройство, регулирующее поступление энергии в колебательную систему от источника энергии. Автоколебания в такой системе могут возникать только при наличии обратной связи между колебательной системой и регулирующим устройством. Регулирующая система управляет движением колебательной системы, которая, в свою очередь, через обратную связь

управляет работой регулирующего устройства и таким путем осуществляется самоуправление работой колебательной системы [7, 45].

Инерционное взаимодействие наряду с отрицательным трением, может быть линейным и нелинейным. Линейное взаимодействие может приводить к самовозбуждению, нелинейное – лишь к жесткому возбуждению, которое возникает лишь в случае, когда системе сообщается начальный импульс конечной величины.

В качестве конкретного примера системы с инерционным возбуждением рассмотрим резонатор Гельмгольца с неравномерно нагретыми стенками,

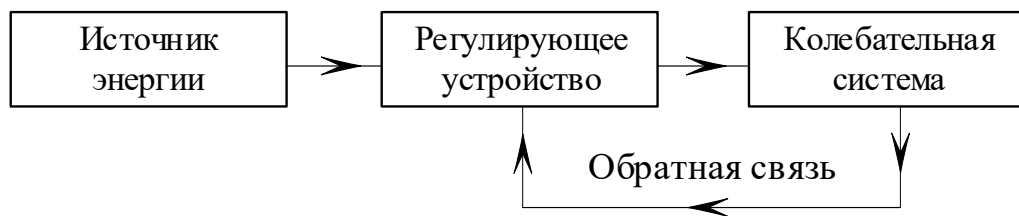


Рис. 6.8. Схема автоколебательной системы с инерционным возбуждением

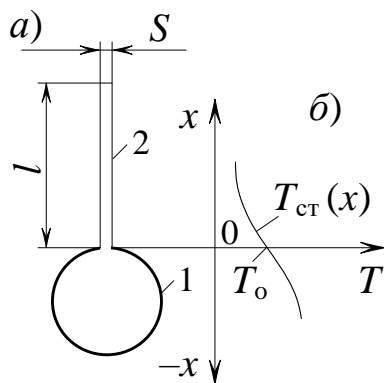


Рис. 6.9. Резонатор Гельмгольца а) и распределение температуры $T(x)$ б). 1 – шаровая часть конструкции; 2 – трубка

относящийся к классу термомеханических систем (рис. 6.9). Термомеханической (термоакустической) называется система, содержащая механический колебательный элемент, колебания которого возбуждаются тепловым источником. Ввиду того, что источник теплоты в генераторе Гельмгольца не является периодическим, то его можно отнести к автоколебательной системе с инерционным самовозбуждением [45].

Важность исследований таких систем объясняется с перспективным направлением, связанным с разработкой и внедрением термоакустических двигателей, в которых тепловая энергия преобразуется в энергию акустических колебаний. В сравнении с традиционными тепловыми двигателями они имеют минимум движущихся частей и представляют заполненный газом канал с теплообменником. Описание их рабочего процесса, в основном, сводится к рассмотрению стационарных режимов работы. Однако важным является исследование акустических процессов, протекающих при запуске двигателей. Так как подобные двигатели представляют автоколебательные системы, то большой интерес представляет нахождение условий, при которых двигатели будут работать в режиме автоколебаний при неколебательном характере их источника, каковым здесь является постоянной мощности источник теплоты.

Собственная частота звуковых колебаний газа в резонаторе Гельмгольца определяется по формуле [45]

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{kp_0S}{\rho_0lV}}, \quad (6.29)$$

где $k = C_p / C_v$ – показатель адиабаты; c_p , c_v – теплоемкости газа при постоянных давлении и объёме; S – площадь поперечного сечения трубы; ρ_0 – плотность заполняющего резонатор газа при атмосферном давлении; l – длина трубки; V – объём шаровой части резонатора; p_0 – атмосферное давление.

Для нахождения причин и условий возникновения автоколебаний выведем уравнение движения газа в трубке. Согласно второму закону Ньютона

$$F = ma = m \frac{d\nu}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = \rho_0Sl \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (6.30)$$

сила действующая на газ, $кг\ м/с^2$; m – масса газа, $кг$; $\nu = dx/dt$, $м/с$; $a = d\nu/dt$ – ускорение $м/с^2$; x – перемещение, $м$.

Сила, действующая на газ в трубке, будет

$$F = S \frac{dp}{dx} = S\Delta p(x) = S(p(x) - p_0), \quad (6.31)$$

где $p(x)$ – давление газа в шаровой части.

С целью учета трения газа о стенки рассмотрим силу сопротивления F_c

$$F_c = -\gamma \frac{dx}{dt}, \quad (6.32)$$

где γ – коэффициент сопротивления, кг/с.

Подставляя (6.31), (6.32) в левую часть формулы (6.30), находим

$$\rho_0 l S \frac{d^2 x}{dt^2} - S \Delta p(x) + \gamma \frac{dx}{dt} = 0. \quad (6.33)$$

Для нахождения $\Delta p(x)$ используем уравнение первого закона термодинамики

$$Q = mc_v(T - T_0) + p_0 S x, \quad (6.34)$$

где Q – количество теплоты, подводимое к газу в шаровой части при его смещении в трубке на величину x ; $T - T_0$ – изменение температуры в шаровой части при том же самом смещении в трубке (предполагается, что теплообмен в шаровой части происходит так быстро, что температуру газа во всех его точках можно считать одинаковой).

Уравнение состояния идеального газа запишем в виде

$$pV = mc_v(k - 1)T. \quad (6.35)$$

Выражая T из (6.34) и подставляя в (6.35), учитывая, что $p(x) = \Delta p(x) + p_0$, находим

$$\Delta p(x) = \frac{k - 1}{V} Q - \frac{kp_0 S}{V} x. \quad (6.36)$$

Подставляя (6.36) в (6.33), получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{(k - 1)}{V \rho_0 l} Q. \quad (6.37)$$

Аппроксимируем температурную кривую, приведенную на рис 6.9, следующей линейной функцией

$$T_{ct}(x) = T_0 - \alpha x \quad (6.38)$$

В соотношении (6.38) коэффициент α , по сути, представляет перепад температуры между шаровой частью и трубкой, отнесённый к величине x , то есть $\alpha = -(T_{\text{ст}}(x) - T_0)/x$.

Следуя закону Ньютона, можно записать

$$\frac{dQ}{dt} = K(T_{\text{ст}}(x) - T) = K(T_0 - \alpha x - T), \quad (6.39)$$

где K – коэффициент теплоотдачи.

Выражая T из (6.34) и подставляя в (6.39), находим

$$\frac{dQ}{dt} = K \left(\left(\frac{p_0 S}{m c_v} - \alpha \right) x - \frac{Q}{m c_v} \right). \quad (6.40)$$

Таким образом, необходимо найти решение двух взаимосвязанных уравнений (6.37) и (6.40). Выражая Q из (6.37) и подставляя в (6.40), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^3 x(t)}{dt^3} + A \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Cx(t) = 0, \quad (6.41)$$

где $A = \frac{\gamma}{m} + \frac{K}{m c_v}$; $B = \omega_0^2 + \frac{\gamma K}{m^2 c_v}$; $C = \frac{\omega_0^2 K}{m c_v} + \frac{a(k-1)}{ml}$; $a = K \left(\alpha - \frac{p_0 S}{m c_v} \right)$.

Получено точное решение уравнения (6.41)

$$x(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} + C_3 e^{z_3 t}, \quad (6.42)$$

где z_1, z_2, z_3 – корни характеристического уравнения; C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования, определяемые из условий:

$$x(0) = 1; \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0; \quad \frac{d^2 x(0)}{dt^2} = 0.$$

Исследование колебаний газа в резонаторе проводилось при следующих исходных данных:

- диаметр шаровой части резонатора $D = 0,1$ м;
- диаметр трубки $d = 0,01$ м;
- плотность газа $\rho_0 = 1$ кг/м³;

- коэффициент теплоотдачи от стенок резонатора к газу $K = 1 \frac{Вт}{м^2 \text{ } ^\circ C}$;
- коэффициент интенсивности изменения температуры стенок $\alpha = 2 \frac{^\circ C}{м}$;
- изохорная массовая теплоемкость $C_v = 1000 \frac{Дж}{кг K}$;
- длина трубки $l = 1 м$;
- коэффициент сопротивления $\gamma = 0,001 кг/с$.

На рис. 6.10 даны результаты расчетов заданных исходных данных. Вследствие низкой интенсивности теплообмена $K = 1 \frac{Вт}{м^2 \text{ } ^\circ C}$ и малой разности температур ($\alpha = 2 \text{ } ^\circ C/м$) наблюдается критическое затухание практически без колебательного процесса. Выполнено исследование влияния различных параметров (диаметра трубки, объёма резервуара, коэффициента теплоотдачи, температуры стенки резонатора) на частоту, амплитуду и характер колебательных процессов в резонаторе.

На рис. 6.11 показано, что уменьшение диаметра трубки ($d = 0,002 м$) приводит к увеличению амплитуды колебаний газа и уменьшению собственной частоты ω_0 . Из рис. 6.12 видно, что с увеличением коэффициента теплоотдачи ($K = 100$), процесс затухания происходит в несколько раз быстрее, при этом значительно увеличивается амплитуда колебаний. На рис. 6.13 показано, что при совместном увеличении коэффициента теплоотдачи ($K = 10^4$) и разности температур стенок резонатора ($\alpha = 100$) наблюдаются медленно затухающие колебания с высокой амплитудой и частотой. Увеличение одной лишь только разности температур ($\alpha = 100$) с сохранением слабой интенсивности теплообмена ($K = 1$) приводит к возникновению резонансных колебаний (рис. 6.7). Отметим, что самовозбуждение колебаний газа происходит только при больших значениях градиента температур α (рис. 6.13, 6.14), что согласуется с результатами, приведенными в [45].

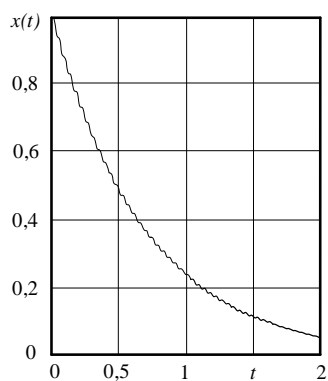


Рис. 6.10. Изменение перемещений газа во времени. $A = 3,82$; $B = 2,1 \cdot 10^4$; $C = 3,018 \cdot 10^4$

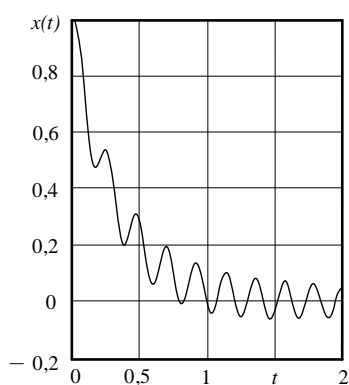


Рис. 6.11. Изменение перемещений газа во времени. $A = 3,82$; $B = 844$; $C = 2674$

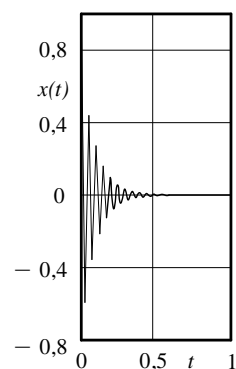


Рис. 6.12. Изменение перемещений газа во времени. $A = 193$; $B = 2136$; $C = 3,018 \cdot 10^6$

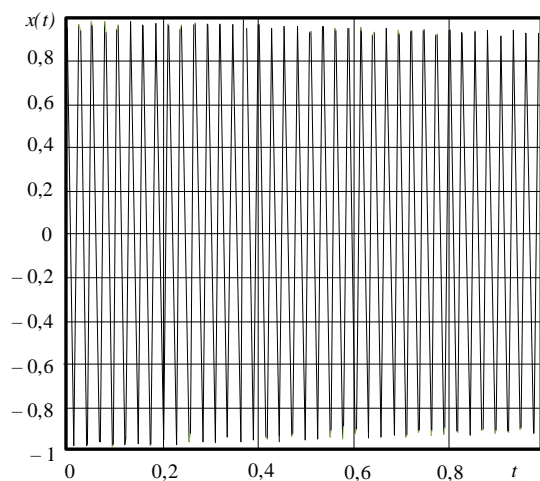


Рис. 6.13. Изменение перемещений газа во времени. $A = 1,91 \cdot 10^4$; $B = 5,748 \cdot 10^4$;
 $C = 1,05 \cdot 10^9$

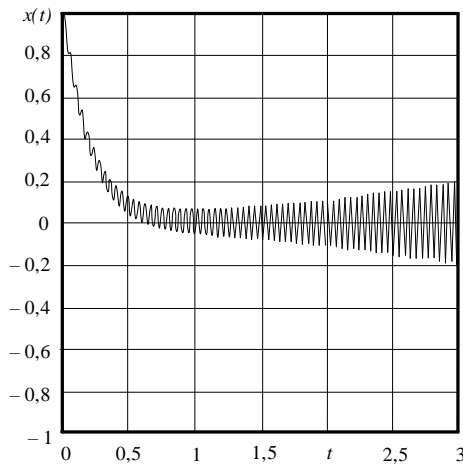


Рис. 6.14. Изменение перемещений газа во времени. $A = 3,82$; $B = 2,1 \cdot 10^4$; $C = 1,05 \cdot 10^5$

На основании условия, приведённого в [45], получена формула критического значения градиента температуры, при котором возникают автоколебания

$$\alpha_{кр} = \frac{p_0 S}{m c_v} + \frac{\gamma e}{K - 1} \left(\omega_0^2 + \frac{\gamma K}{m^2 c_v} + \left(\frac{\gamma}{m} \right)^2 \right), \quad (6.43)$$

Постановка формулы (6.43) в (6.42), позволяет выполнить условие стабильной работы резонатора Гельмгольца. Отметим, что решение (6.42), независимо от (6.43), позволяет провести исследование различных режимов работы резонатора (например возникновение резонансных колебаний, критическое затухание и др.).

Показано, что установившийся колебательный процесс с постоянной амплитудой и частотой возможен лишь в случае, если $\alpha = \alpha_{кр} = 67,518$ (рис. 6.15). Если значение градиента температуры $\alpha < \alpha_{кр}$, то будут наблюдаться затухающие колебания (рис. 6.16), если $\alpha > \alpha_{кр}$, то будет происходить самовозбуждение колебаний, сопровождающееся неограниченным увеличением амплитуды колебаний (рис. 6.17). Таким образом, стабильная работа резонатора Гельмгольца возможна только при определённых условиях, когда $\alpha = \alpha_{кр}$.

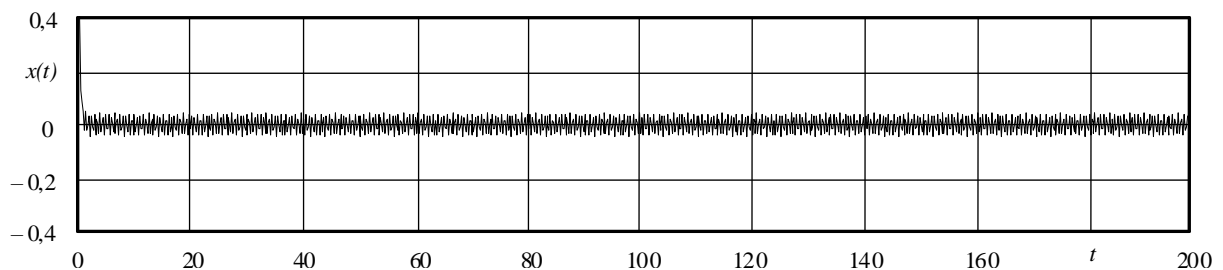


Рис. 6.15. Изменение перемещений газа во времени. $A = 3,82$; $B = 2,1 \cdot 10^4$; $C = 8,023 \cdot 10^4$; $\alpha = 67,518$

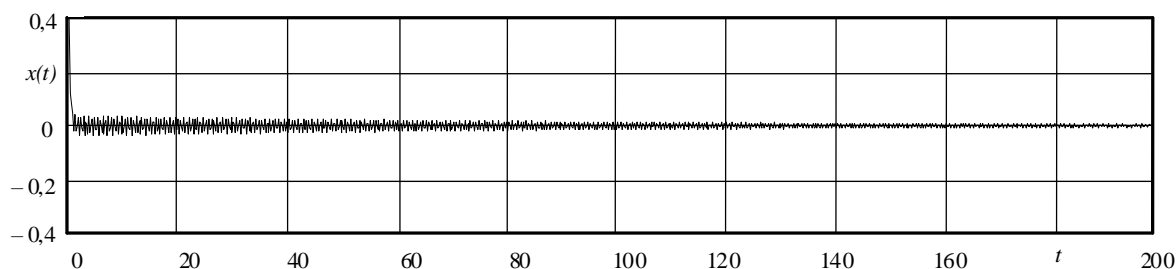


Рис. 6.16. Изменение перемещений газа во времени. $A = 3,82$; $B = 2,1 \cdot 10^4$; $C = 7,983 \cdot 10^4$; $\alpha = 67$

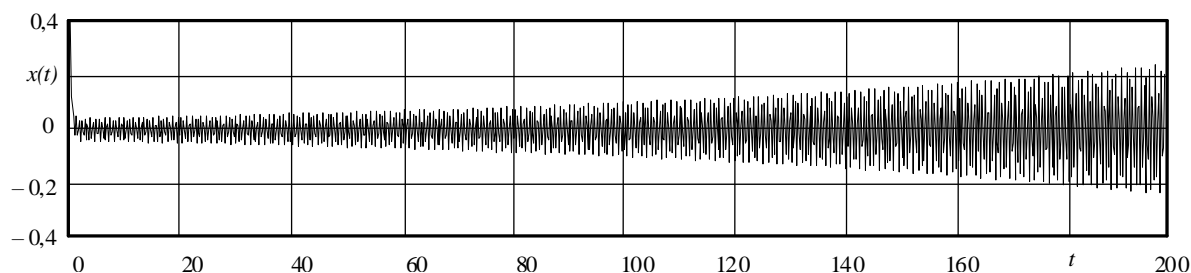


Рис. 6.17. Изменение перемещений газа во времени. $A = 3,82$; $B = 2,1 \cdot 10^4$; $C = 8,06 \cdot 10^4$; $\alpha = 68$

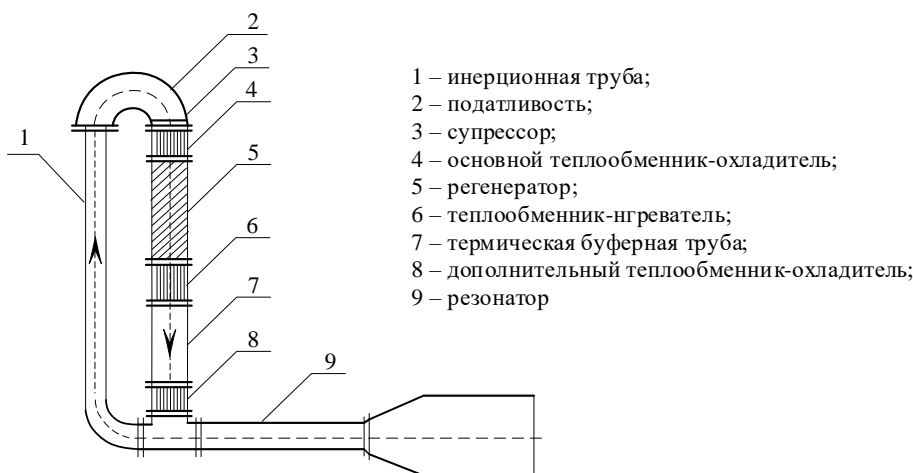


Рис. 6.18. Схема термоакустического двигателя

Применительно к термоакустическому двигателю (см. рис. 6.18), разработанному в [10, 14], согласно критерию (6.43) необходимо:

1. Увеличивать объём всех теплообменников, включая регенератор, то есть элементов 2 – 8 на рис. 6.18.

2. Увеличивать длину трубок 1, 9 и уменьшать их диаметр.

3. Увеличивать перепад температуры между нагревателем 6 и теплообменниками охладителями 4, 8.

4. Увеличивать перепад между давлением рабочего газа в двигателе и окружающей средой.

5. Уменьшать гидравлические сопротивления (возможно, путем применения газа с малой вязкостью).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Получены новые данные о причинах и условиях возникновения автотемпературы, инерции и локализации теплоты в нелинейных задачах теплопроводности с нелинейными источниками теплоты, позволившие заключить об аналогии между линейным гиперболическим и нелинейным параболическим дифференциальными операторами вследствие взаимной зависимости между временем релаксации и зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности.

2. Разработаны локально – неравновесные математические модели, позволяющие выполнять исследования внутренних механизмов переноса теплоты с учетом молекулярно – атомного строения вещества, посредством введения времени релаксации и длины свободного пробега микрочастиц (носителей энергии).

3. Разработана математическая модель трехмерной теплопроводности с учетом пространственно – временной нелокальности, позволяющая выполнять исследования высокоскоростных процессов теплопереноса и термоупругости в телах сложной конфигурации, в том числе и наноматериалах. Совместно с ЗАО «Cadferm CIS» на основе последней версии Ansys 2020 R1 разработана компьютерная программа для решения нестационарных трёхмерных задач локально-неравновесной теплопроводности, которая позволяет определять значения температур и тепловых потоков при быстропротекающих процессах в телах сложной геометрической формы. Полученные с помощью данного программного продукта температурные поля могут быть использованы в стандартных модулях Ansys, таких как Static Structural и Dynamic Structural, для наиболее достоверного определения возникающих в результате высокоинтенсивного температурного воздействия квазистатических и динамических температурных напряжений в твердых телах сложной геометрической формы.

4. Разработана математическая модель и получено точное аналитическое решение несвязанной задачи динамической термоупругости с учетом релаксационных явлений в тепловой и динамической задачах, позволяющая выполнять исследования ударных волн напряжений и перемещений при воздействии на материалы мощных потоков энергии (лазерных, электронных, ионных и др.)

5. Показана полная аналогия математических моделей переноса тепла, массы, импульса, полученных с учетом пространственно – временной нелокальности, что позволяет унифицировать верификацию моделей теплопроводности, используя экспериментальные данные по колебательным процессам твердых тел, для которых разработаны высокоточные технологии, позволяющие выполнять исследования для сверхмалых значений времени. Выполненные теоретические и экспериментальные исследования продольных и поперечных колебаний для твердого тела (закрепленного на одном из торцов стержня) подтверждают применимость и актуальность «релаксационных» методик. Так, экспериментально обнаруженный факт колебаний стержня с двумя амплитудами и частотами теоретически подтверждается только в случае, когда учитываются релаксационные свойства материалов. Учет коэффициентов релаксации позволяет значительно уменьшить расхождение теоретических и экспериментальных данных – с 42 % до 15 %. Результаты решения задачи о поперечных колебаниях стержня позволили обнаружить наиболее опасные сечения, в которых создаются максимальные высокочастотные колебания, оказывающие существенное влияние на надежность и долговечность конструкции.

6. Разработана математическая модель, описывающая возникновение автоколебаний газа под действием постоянного (непериодического) источника теплоты. Исследования точного аналитического решения полученной модели позволили определить условия возникновения автоколебаний. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и разработке термоакустических двигателей.

Благодарности. *Результаты работы получены с использованием оборудования центра коллективного пользования «Учебно-научный производственный центр «Вибрационная прочность и надежность аэрокосмических изделий» при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № FSSS-2020-0019). Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-70021.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М. Машиностроение, 1988. 297 с.
2. *Алифанов О.М., Вабищевич П.Н., Михайлов В.В. и др.* Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем. Учеб. пос. М.: Логос. 2001. 400 с.
3. *Бранфилева А.Н.* Разработка математических и компьютерных моделей переноса тепла, массы, импульса для систем тепло – и водоснабжения. Диссертация кандидата технических наук. М.: «НИУ «МЭИ», 2015.
4. *Баумейстер К., Хамилл Т.* Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. 1969, № 4. С. 112 – 119.
5. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.
6. *Бруйка В.А., Фокин В.Г., Солдусова Е.А., Глазунова Н.А., Адеянов И.Е.* Инженерный анализ в ANSYS Workbench. Часть I. Самара: Самарский государственный технический университет, 2010. 271 с.
7. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
8. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. – 517 с.
9. *Гудмен Т.* Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена. Проблемы теплообмена. Сборник научных трудов. М.: Атомиздат, 1967. С. 41 – 96.
10. *Довгялло А.И., Зиновьев Е.А., Воротников Г.В.* Режимно – параметрический анализ работы термоакустического двигателя с внешним подводом тепла. Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева. 2010, № 4. С. 146 – 154.
11. *Даниловская В.И.* Динамические температурные напряжения в бесконечной плите. Инженерно – физический журнал. 1961. Т. 1. Вып. 4. С. 86 – 94.

12. *Еленин А.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23, № 2. С. 380 – 390.
13. *Зельдович Я.Б., Рейзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 2008. 656 с.
14. *Зиновьев Е.А., Довгялло А.И.* Упрощенная методика расчета термоакустического двигателя. Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева (Национального исследовательского университета). 2012, № 3 (27). С. 208 – 212.
15. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы. В двух книгах. Книга 2. Методы математической физики. М.: Академия, 2013. 304 с.
16. *Кабисов К.С., Камалов Т.Ф., Лурье В.А.* Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями. Изд. 2 – ое. М.: КомКнига, 2010. – 360 с.
17. *Канторович Л.В.* Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Прикл. мат. и механ. Т. 6. № 1, 1942. С. 31 – 40.
18. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
19. *Кравченко Б.А. Круцило В.Г., Гутман Г.Н.* Термопластическое упрочнение – резерв повышения прочности и надежности деталей машин. Самара: СамГТУ, 2000. 216 с.
20. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
21. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Сборник статей под ред. *А.А. Самарского*. М.: Наука, 1988. 176 с.
22. Компьютеры и нелинейные явления. Сборник статей под ред. *А.А. Самарского* М.: Наука, 1988. 192 с.
23. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. Киев: Наукова Думка. 1970. 308 с.
24. *Калинников Л.Д., Шумаков Н.В.* Обратная задача теплопроводности для пластины. Теплофизика высоких температур // 1971. Т. 9, № 4. С. 812-816.

25. *Кудинов И.В.* Математическое моделирование локально – неравновесных процессов переноса теплоты, массы, импульса с учётом релаксационных явлений. Диссертация доктора технических наук. Самара. СамГТУ. 2017.

26. *Кудинов И.В.* Получение точных аналитических решений задач теплопроводности с переменными во времени граничными условиями. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. Самара: 2016, № 4 (52). С. 108 – 117.

27. *Кудинов И.В., Стефанюк Е.В., Скворцова М.П., Максименко Г.Н.* Об одном методе получения точных аналитических решений задач теплопроводности с источником теплоты. Известия высших учебных заведений. Чёрная металлургия. 2017. Т. 60, № 11. С. 877 – 882.

28. *Кудинов В.А., Кудинов И.В., Котова Е.В.* Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности. Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55, № 4. С. 556 – 563.

29. *Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. Учебное пособие. М.: Высшая школа, 2008. – 305 с.

30. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. Учеб. пособ. для втузов. М.: Высшая школа, 2005. – 429 с.

31. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Стефанюк Е.В.* Техническая термодинамика и теплопередача. Учебник для бакалавров. 2 – ое издание. Перераб. и доп. М.: Юрайт, 2013. – 566 с.

32. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Исследование теплопроводности с учётом конечной скорости распространения теплоты // Теплофизика высоких температур. Т. 51, № 2, 2013. С. 301 – 310.

33. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки// Теплофизика высоких температур. Т. 50, № 1, 2012. С. 118 – 125.

34. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта // Известия АН. Энергетика. № 1, 2012. С. 119 – 133.

35. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ – мат. науки. 2010, № 5 (21). С. 159 – 169.

36. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кудинов И.В.* Разработка и исследование сильнонеравновесной модели теплообмена в жидкости с учётом пространственно – временной нелокальности и диссипации энергии. Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 6. С. 929 – 935.

37. *Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А.* Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомым функций // Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. Т. 22, №2. С. 153 – 165.

38. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий // ИФЖ. Т. 82. № 3, 2009. С 540 – 558.

39. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Антимонов М.С.* Аналитические решения задач теплообмена при течении жидкости в плоскопараллельных каналах на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно – физический журнал. Т. 80. № 4. 2007. С. 178 – 186.

40. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В.* Исследование сильнонеравновесной модели теплового воспламенения с учётом пространственно – временной нелокальности. Физика горения и взрыва. 2018. Т. 54., № 6. С. 25 – 29.

41. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Известия Российской академии наук. Энергетика. № 5, 2008. С. 141 – 157.

42. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Исследование распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе с учетом релаксационных свойств вязкой жидкости // Инженерно – физический журнал. Т. 87. № 2, 2014. С. 336 – 346.
43. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Исследование точного аналитического уравнения продольных волн в жидкости с учётом её релаксационных свойств// Инженерно – физический журнал. Т. 86. № 5, 2013. С. 1116 – 1125.
44. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А.* Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1986. Т. 26, № 8. С. 1187 – 1205.
45. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 552 с.
46. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. Учеб. для вузов. 7 – ое изд. М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
47. *Лыков А.В., Михайлов Ю.А.* Теория тепло- и массопереноса. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 535 с.
48. *Лыков А.В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инженерно – физический журнал. Т. 9. № 3, 1965. С. 287 – 304.
49. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
50. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 312 с.
51. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
52. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. – 412 с.
53. *Рудобашта С.П., Карташов Э.М.* Диффузия в химико – технологических процессах. М.: Химия. 1993. – 209 с.
54. *Соболев С.Л.* Процессы переноса и бегущие волны в локально – неравновесных условиях. Успехи физических наук. 1991. Т. 161, № 3. С. 5 – 29.

55. *Соболев С.Л.* Локально – неравновесные модели процессов переноса. Успехи физических наук. 1997. Т. 169, № 10. С. 1096 – 1106.
56. *Стефанюк Е.В., Кудинов В.А.* Дополнительные граничные условия с нестационарных задачах теплопроводности // ТВТ. Т. 47. № 2, 2009. С. 250 – 262.
57. *Стефанюк Е.В.* Модельные представления аналитических решений краевых задач теории теплообмена на основе введения дополнительных граничных условий. Дисс. доктора техн. наук. Москва. МАТИ, 2010.
58. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 476 с.
59. *Тимошпольский В.И., Постольник Ю.С., Андрианов Д.Н.* Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. Минск: Белорусская наука, 2005. 560 с.
60. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Государственное издательство технико – теоретической литературы. Москва – Ленинград, 1951. – 659 с.
61. *Фёдоров Ф.М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука. 2000. 220 с.
62. *Формалёв В.Ф.* Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.:Физматлит, 2014. 312 с.
63. *Формалёв В.Ф.* Численные исследование двумерных нелинейных задач теплопроводности в анизотропных телах. Теплофизика высоких температур, 1988. Т. 26, № 6.
64. *Формалёв В.Ф.* Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.:Физматлит, 2015. 280 с.
65. *Цой П.В.* Методы расчёта отдельных задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1971. – 382 с.
66. *Цой П.В.* Системные методы расчёта задач тепломассопереноса. М.: Издательство МЭИ, 2005. – 568 с.

67. *Чарный И.А.* неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: «Недра», 1975. – 296 с.
68. *Чернавский Д.С.* Синергетика и информация (динамическая теория информации). М.: Едиториал УРСС, 2004. 288 с.
69. *Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности: системно – структурный подход. Изд. 2 – ое, доп. М.: Едиториал УРСС, 2004. – 296 с.
70. *Швец М.Е.* О приближённом решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. Прикладная математика и механика. Т. 13. № 3, 1949. С. 257 – 266.
71. *Шлихлинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. – 472 с.
72. *Шумаков Н.В., Калинин Л.Д., Лебедев В.В., Мусеев В.И.* Решение обратной задачи теплопроводности для пластины с источниками // Теплофизика высоких температур. 1971. Т. 9, № 2. С. 366-372.
73. *Юдаев Б.Н.* Основы теплопередачи. Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1981. – 319 с.
74. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск. Наука, 1987, – 195 с.
75. *Cattaneo G.* Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée, – «Comptes Rendus», 1958, Vol. 247, № 4, P. 431 – 433.
76. *Landahl H.D.* Bull. Math. Biophys., 15, 376 (1953).
77. *Oldroyd J.G.* Proc. Roy. Soc. A 218, 172, 1953
78. *Pohlhausen K.Z.* Angew. Math. Mech., 1, 252 (1921).
79. *Vernott P.* Les paradoxe de la theorie continue de l'équation de la chaleur. – «Comptes Rendus», 1958, Vol. 246, № 22, P. 3154 –3155.
80. *Reddy .M.G., Makinde O.D.* Magnetohydro – dynamic peristaltic transport of Jeffrey nanofluid in an asymmetric channel, J. Mol. Liq. 223 (2016) 1242 – 1248.
81. *Alvi T Latif N., Hussain Q., Asghar S.* Peristalsis of nonconstant viscosity Jeffrey fluid with nanoparticles, Results Phys. 6 (2016) 1109 – 1125.

82. *Makinde O.D., Iskander T., Mabood F., Khan W.A., Tshehla M.S.* MHD Couette – Poiseuille flow of variable viscosity nanofluids in a rotating permeable channel with Hall effect, *J. Mol. Liq.* 221 (2016) 778 – 787.
83. *Eckhardt B.* Irregular scattering // *Physica D*, 1984. Pp. 33 – 89.
84. *Eremin A.V., Kudinov V.A., Stefanyuk E.V.* Heat exchange in a cylindrical channel at stabilized fluid laminar flow // *Fluid Dynamics*, 2018. № 82 (1). Pp. 29 – 39.
85. *Eremin A.V., Kudinov V.A., Stefanyuk, E.V., Kudinov I.V.* Investigation of Temperature Change under Influence of Ultrashort Laser Pulses Taking into Account Relaxation Properties of Materials // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018. № 327 (2). Pp. 6 – 13.
86. *Eremin A.V.* Study of thermal exchange with liquid flowing in a cylindrical channel // *IEEE Xplore*, 2019. Pp. 1 – 6.
87. *Landahl H.D.* An Approximation Method for the Solution of Diffusion and Related Problems // *Bulletin of mathematical biophysics*, 1953. № 15 (1). Pp. 49 – 61.
88. *Landahl H.D.* On the spread of information with time and distance // *Bulletin of mathematical biophysics*, 1953. № 15 (3). Pp. 367 – 381.
89. *Li Ji., Zhengfang Z., Dengying L.* Difference Scheme for Hyperbolic Heat Conduction Equation with Pulsed Heating Boundary // *Journal of Thermal Science*, 2000. № 2 (9). Pp. 152 – 157.
90. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V.* Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction – diffusion equations with delay // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2013. № 49 (5). Pp. 622 – 635.
91. *Polyanin A.D., Zhurov A.* Exact solutions of linear and non – linear differential – difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // *International Journal of Non – Linear Mechanics*, 2013. № 54. Pp. 115 – 126.
92. *Sobolev S.L.* Discrete space – time model for heat conduction: Application to size dependent thermal conductivity in nano – films // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2017. № 108. Pp. 933 – 939.
93. *Sobolev S.L.* Effective temperature in nonequilibrium state with heat flux using discrete variable model // *Physics Letters A*, 2017. № 381. Pp. 2893 – 2897.

94. *Sobolev S.L.* Nonlocal diffusion models: Application to rapid solidification of binary mixtures // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2014. № 71. Pp. 295 – 302.

95. *Swift G. W.* Thermoacoustics: A unifying perspective for some engines and refrigerators // *Acoustical Society of America*, New York. – 2017. – 326 pp.

96. *Kudinov I.V., Stefanyuk, E.V., Skvortsova M.P., Maksimenko G.N.* Method of obtaining exact analytical solutions of tasks of heat conductivity with warmth sources // *Izvestiya Ferrous Metallurgy*. Vol. 60 Is. 11. 2017. Pp. 877 – 882. DOI: 10.17073/0368-0797-2017-11-877-882.

97. *Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., Dovgallo A.I., Zhukov V.V.* Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag // *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 200-201. P. 231 – 241. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.05.018.

98. *Zhukov V.V.* Study of analytical solution of the thermal conductivity equation considering relaxation phenomena under the third class boundary conditions // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1889. Art. 022027. doi: 10.1088/1742-6596/1889/2/022027.

99. *Zhukov V.V., Kudinov I.V., Kutsev N.M., Mikheeva G.V., Klebleev R.M.* Determination of quasi-static and residual stresses in the course of the thermoplastic hardening in a boundary layer of the material // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. Vol. 709. Is. 3. Art. 033078. doi: 10.1088/1757-899X/709/3/033078.

100. *Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Zhukov V.V.* Mathematical model of rod oscillations with account of material relaxation behaviour // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 327. Is. 4. Art. 042059. doi: 10.1088/1757-899X/327/4/042059.

101. *Eremin A.V., Kudinov V.A., Kudinov I.V., Zhukov V.V., Trubitsyn K.V.* Mathematical model of fuel heat ignition considering space-time nonlocality // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 552. Is. 1. Art. 012003. doi: 10.1088/1757-899X/552/1/012003.

102. *Kudinov V.A., Eremin A.V., Zhukov V.V.* Mathematical Models of Heat Ignition And Explosion Considering Local Non-Equilibrium of Processes // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. Vol. 891. Art. 012100. doi: 10.1088/1742-6596/891/1/012100.

103. *Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В.* Критические условия теплового взрыва с учетом пространственно-временной нелокальности // *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2018. № 2. С. 100-104.

104. *Еремин А.В., Жуков В.В., Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Резонансные и бифуркационные колебания стержня с учетом сил сопротивления и релаксационных свойств среды. // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2018. № 5. С. 124-132.

105. *Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В.* Исследование сильнонеравновесной модели теплового воспламенения с учетом пространственно-временной нелокальности // *Физика горения и взрыва*. 2018. № 6. С. 25-29.

106. *Еремин А. В., Кудинов И.В., Жуков В.В.* Об одном методе решения задач теплообмена при течении жидкостей в плоских каналах // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки"*. 2016. № 1. С. 1-12.

107. *Еремин А. В., Кудинов И.В., Абишева Л.С., Жуков В.В.* Исследование теплообмена при течении жидкости в цилиндрическом канале // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Технические науки"*. 2015. № 4. С. 85-92.

108. *Кудинов В.А., Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Жуков В.В., Тарабрина Т.Б.* Аналитическое решение нестационарной задачи теплообмена при ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Технические науки"* 2017. № 4. С. 121-138.

ПРИЛОЖЕНИЯ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017661494

**Решение нестационарных задач теплопроводности на основе
совместного использования методов Л.В.Канторовича и
Бубнова-Галеркина**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Самарский
государственный технический университет» (RU)*

Авторы: *см. на обороте*

Заявка № **2017615113**

Дата поступления **31 мая 2017 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **16 октября 2017 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 **Г.П. Ислюев**



Авторы: *Еремин Антон Владимирович (RU), Жуков Виталий Владимирович (RU), Кудинов Игорь Васильевич (RU), Курганова Ольга Юрьевна (RU), Ткачев Василий Константинович (RU), Скворцова Марина Петровна (RU), Колесников Сергей Владимирович (RU)*

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018660951

Решение нелинейных задач нестационарной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет» (RU)**

Авторы: *см. на обороте*



Заявка № 2018617906

Дата поступления 26 июля 2018 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 30 августа 2018 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Авторы: *Котова Евгения Валериевна (RU), Кудинов Игорь Васильевич (RU), Еремин Антон Владимирович (RU), Ткачев Василий Константинович (RU), Жуков Виталий Владимирович (RU), Трубицын Константин Викторович (RU), Максименко Галина Николаевна (RU), Гаврилова Татьяна Евгеньевна (RU)*

55
/ 39

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020611223

**Исследование нестационарных процессов переноса тепла
в телах сложной геометрической формы с учетом
двухфазного запаздывания**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Самарский
государственный технический университет» (RU)*

Авторы: *см. на обороте*



Заявка № 2020610140

Дата поступления 10 января 2020 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 27 января 2020 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Авторы: *Еремин Антон Владимирович (RU), Кишов Евгений Алексеевич (RU), Жуков Виталий Владимирович (RU), Кудинов Василий Александрович (RU), Кудинов Игорь Васильевич (RU), Стефанюк Екатерина Васильевна (RU)*



**АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКИЙ ЦЕНТР «ПРОГРЕСС»**
(АО «РКЦ «ПРОГРЕСС»)



ул. Зевеца, д.18, г. Самара, 443009, тел. (846) 955-13-61, факс (846) 992-65-18, E-mail: mail@samspace.ru
ОКПО 43892776, ИНН 6312139922, КПП 997450001

«СОГЛАСОВАНО»

Первый проректор –
проректор по научной работе
СамГТУ, д.т.н., профессор



М.В. Нейшчиков

УТВЕРЖДАЮ

Первый зам. генерального
директора - главный инженер
АО РКЦ «Прогресс»



Е.Б. Лукин
2021 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы В.В. Жукова «Исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы, импульса с учетом релаксационных явлений», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Результаты диссертационной работы Жукова В.В. на тему «Исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы, импульса с учетом релаксационных явлений» были использованы на предприятии АО РКЦ «Прогресс» при проектировании, доводке, испытаниях и эксплуатации изделий космической техники. Основными результатами диссертационной работы, которые имеют практическое значение, являются:

1. Разработанная компьютерная программа для решения нестационарных трёхмерных задач локально-неравновесной теплопроводности, которая позволяет определять значения температур и тепловых потоков при быстропротекающих процессах в телах сложной геометрической формы. На основе тепловых расчетов, выполненных в данной программе, были точно определены величины термических напряжений для нескольких объектов ракетно-космической техники.

2. Представленные в работе математические модели, описывающие процессы колебаний упругих твердых тел с учетом релаксационных явлений, как показали экспериментальные исследования, выполненные на оборудовании АО РКЦ «Прогресс», позволяют получить качественное и количественное совпадение результатов аналитического решения и эксперимента с достаточной для инженерных приложений точностью.



**АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКИЙ ЦЕНТР «ПРОГРЕСС»**
(АО «РКЦ «ПРОГРЕСС»)



ул. Земеца, д.18, г. Самара, 443009, тел. (846) 955-13-61, факс (846) 992-65-18, E-mail: mail@samspace.ru
ОКПО 43892776, ИНН 6312139922, КПП 997450001

3. Разработанные алгоритмы и комплексы программ, реализующие полученные в диссертации аналитические и численные решения краевых задач колебаний упругих твердых тел и газов, были использованы в ходе выполнения теоретических расчетов колебаний цилиндрических конструкций космических аппаратов.

Заместитель генерального
конструктора по научной
работе
АО «РКЦ «Прогресс»

Борисов М.В.

Начальник отдела
АО «РКЦ «Прогресс»

Курунтяев П.А.

Ведущий инженер-
технолог
АО «РКЦ «Прогресс»,
к.т.н

Воеводин П.С.

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по УО

Самарского государственного

технического университета

д.п.н., профессор



АКТ

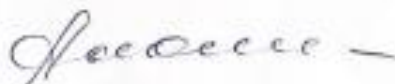
об использовании результатов диссертационной работы В.В. Жукова «Исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы, импульса с учетом релаксационных явлений», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, в учебном процессе Самарского государственного технического университета

Комиссия в составе начальника учебного управления университета, к.э.н., доцента Е.А. Алонцевой, заведующего кафедрой «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика», д.ф.-м.н., профессора В.А. Кудинова и председателя методического совета теплоэнергетического факультета, к.э.н., доцента Ю.Н. Горбуновой составила настоящий акт о том, что в учебном процессе Самарского государственного технического университета использованы следующие результаты кандидатской диссертации В.В. Жукова «Исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы, импульса с учетом релаксационных явлений».

1. Получение численных решений трехмерных задач теплообмена для тел сложной геометрической формы с учетом релаксационных явлений, математическая модель колебаний газа в термоакустическом двигателе излагались в лекционном и практическом курсах дисциплин «Численно-аналитические методы решения краевых задач теплообмена» и «Фундаментальные проблемы теплофизики и механики» для студентов направления 13.04.01 – «Теплоэнергетика и теплотехника» специальности «Проектирование, эксплуатация и инжиниринг систем энергоснабжения».

2. Задачи моделирования процессов теплопроводности и термоупругости, описываемые дифференциальными уравнениями гиперболического и смешанного типа рассматривались в курсовых и выпускных квалификационных работах студентов направления 13.04.01 – «Теплоэнергетика и теплотехника» специальности «Проектирование, эксплуатация и инжиниринг систем энергоснабжения».

Начальник УУ СамГТУ,
к.э.н., доцент



Е.А. Алонцева

Зав. кафедрой ТОТнГ,
д.ф.-м.н., профессор



В.А. Кудинов

Председатель МС ТЭФ,
к.э.н., доцент



Ю.Н. Горбунова