

УДК 681.51

Коррекция орбиты космического аппарата на высокоэллиптической орбите двигателями малой тяги

Протопопов А. П.^{*}, Богачев А. В.^{}, Воробьева Е. А.^{***}**

Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королева,

ул. Ленина, 4А, г. Королев, 141070, Россия

^{}e-mail: dretox@mail.ru*

*^{**}e-mail: oxaalex@yandex.ru*

*^{***}e-mail: Kate.Vorobyeva@yandex.ru*

Аннотация

Рассмотрена задача коррекции наклона орбиты космического аппарата с инерционными исполнительными органами, находящегося на высокоэллиптической орбите, с использованием электрореактивных двигателей при условии неизменности периода орбиты. Получены формулы для расчета циклограммы работы двигателей и определения кинетического момента на момент окончания коррекции.

Ключевые слова: высокоэллиптическая орбита, коррекция орбиты, электрореактивные двигатели, период орбиты, инерционные исполнительные органы.

Введение

Во время полета космического аппарата (КА) на орбите происходит нежелательное изменение параметров орбиты (период обращения, эксцентриситет, наклонение и др.), которые возникают вследствие внешних возмущающих факторов (гравитационное поле Земли, солнечное давление, тяги от электрореактивных двигателей и др.). Следовательно, со временем необходимо проводить коррекцию орбиты с целью восстановления заданных параметров орбиты. Для высокоэллиптической орбиты (ВЭО) коррекция обычно бывает двух типов: апогейно-перигейная (с целью изменения эксцентриситета, периода орбиты) и в окрестности точек пересечения орбиты с её малой осью (с целью изменения наклона). В данной статье представлен алгоритм коррекции орбиты в окрестности точек пересечения с её малой осью с целью изменения наклона орбиты при условии неизменности периода

орбиты. Также в процессе коррекции необходимо решать задачу управления кинетическим моментом инерционных исполнительных органов (ИИО) с целью удержания его в заданной области и минимизации его на конец коррекции. Данная задача была решена для КА на геостационарной орбите. Для коррекции на ВЭО основной сложностью является нелинейное изменение орбитальной угловой скорости в зависимости от положения КА на орбите.

Ориентация КА во время коррекции

Введем связанную систему координат (ССК) $OXYZ$. Точка O – центр масс КА, оси OX , OY , OZ – главные центральные оси инерции КА (рис. 1). Ось OY направлена по бинормали. На сеансе коррекции сохраняется постоянный угол между осью OX и направлением от КА на Землю, который рассчитывается так, чтобы Солнце находилось в плоскости OXY в середине участка коррекции и угол между направлением на Солнце составлял с полуосью $+OX$ не менее 90° , ось OZ дополняет до правой тройки.

Рассматриваемый КА имеет 8 электрореактивных двигателей (ЭРД) на борту (рис. 2), которые имеют одинаковые тяги, равные по модулю: $F_{eng} \sim 8,5$ гс

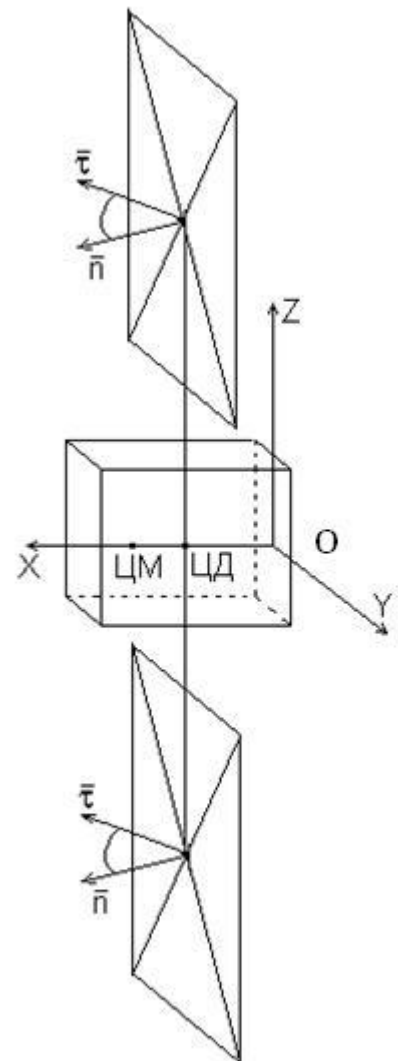
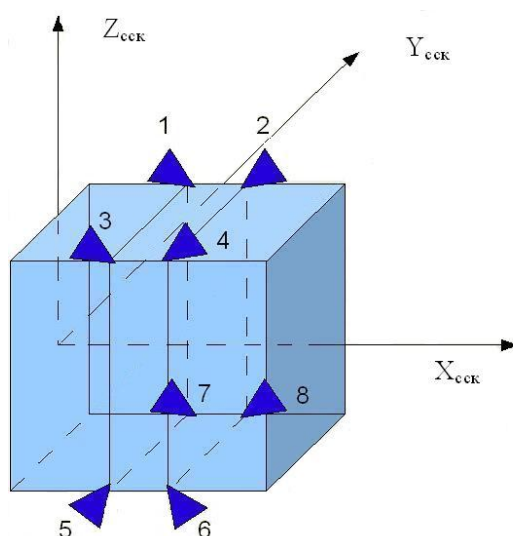


рис. 2. Схема расположения ЭРД на КА

Тяги всех двигателей находятся в плоскости OYZ (в ССК). Необходимо выдать требуемый корректирующий импульс вдоль оси OY. Время, необходимое на коррекцию, находим по формуле:

$$t = \frac{mp_{cor}}{F_{eng}}$$

рис. 1. Общая схема КА

где t - общее время работы двигателей; m - масса КА; p_{cor} - корректирующий импульс; F_{eng} - тяга одного из ЭРД

Изменение периода орбиты

Рассмотрим зависимость изменения периода орбиты от корректирующего импульса. Период обращения КА определяется по формуле [1]:

$$T = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \quad (1)$$

где $a = \frac{1}{2}(r_a + r_p)$ большая полуось эллипса, $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ - гравитационный параметр Земли, r_a и r_p - радиус-векторы апогея и перигея соответственно.

Найдем связь изменения периода T обращения с изменением большой полуоси a путем дифференцирования (1):

$$\Delta T = \frac{3T}{2a} \Delta a$$

Из теории эллиптического движения [2]:

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

где e - эксцентриситет орбиты, а p - фокальный параметр.

Продифференцируем это выражение и получим для Δa :

$$\Delta a = \frac{1}{1-e^2} (\Delta p + \frac{2pe}{1-e^2} \Delta e)$$

Из теории оскулирующих элементов известна зависимость компонент импульса от истинной аномалии и остальных параметров [1],[3]:

$$\Delta p = \frac{2pk}{1+e \cos(v)} \Delta \mathcal{G}_n$$

$$\Delta e = k(\sin(v)\Delta \mathcal{G}_r + \frac{e \cos^2(v) + 2 \cos(v) + e}{1+e \cos(v)} \Delta \mathcal{G}_n)$$

$$k = \sqrt{\frac{p}{\mu}}$$

где ν - истинная аномалия; $\Delta \mathcal{G}_r$, $\Delta \mathcal{G}_n$ радиальная и нормальная компоненты импульса в ССК соответственно.

В итоге получаем зависимость изменения периода обращения от приращений скорости $\Delta \mathcal{G}_r$, $\Delta \mathcal{G}_n$ и от точки приложения корректирующего импульса на орбите (истинной аномалии ν):

$$\Delta T = \frac{3T}{1-e^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} [-e \sin(\nu) \Delta \mathcal{G}_r - (1+e \cos(\nu)) \Delta \mathcal{G}_n] \quad (2)$$

$$\text{Причем } p = \frac{2r_a r_p}{r_a + r_p}, e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

Разложим ускорение двигателя на радиальную (тангенсальную) и нормальную составляющие (рис. 3), тогда:

$$a_r = \frac{\Delta \mathcal{G}_r(\nu)}{dt}$$

$$a_n = \frac{\Delta \mathcal{G}_n(\nu)}{dt}$$

$$\nu = \nu(t)$$

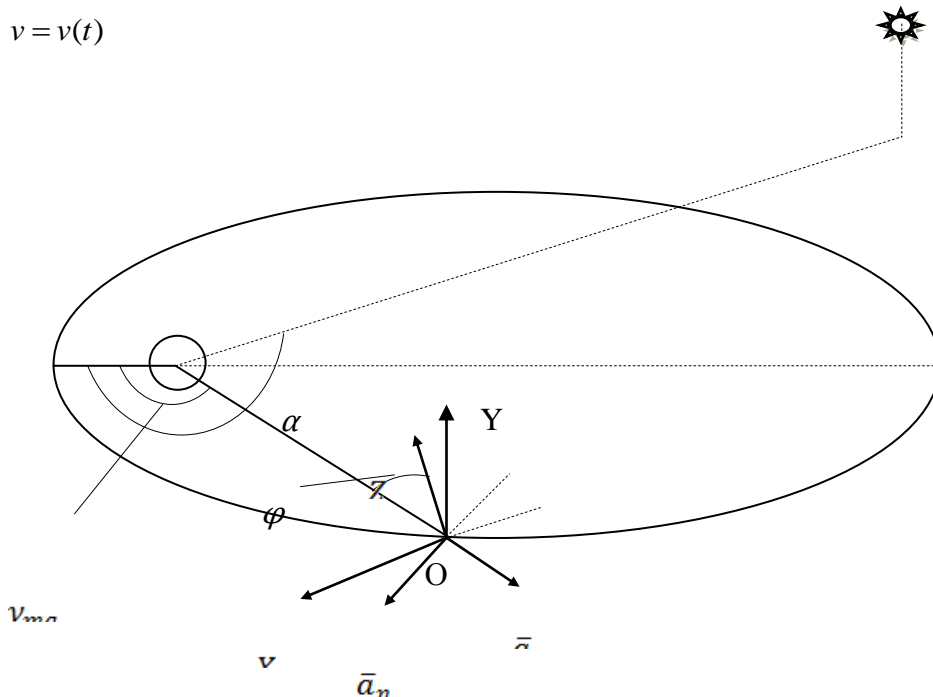


рис. 3. Радиальная и нормальная составляющие КА в плоскости орбиты.

Введем орбитальную систему координат $OX'Y'Z'$: т. О совпадает с началом координат ССК $OXYZ$, ось OX' направлена вдоль радиус-вектора (сонаправлена с a_r), ось OY'

совпадает с осью OY, ось OZ' дополняет до правой тройки. Для перехода из ССК OXYZ в ОСК OX'Y'Z' необходимо повернуться на угол φ в плоскости орбиты, который можно вычислить по формуле:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\alpha - v_{ma})$$

α - угол между проекцией вектора направления на Солнце на плоскость орбиты и вектором направленным из центра Земли к перигею; v_{ma} - истинная аномалия в окрестности пересечения орбиты с её малой осью эллипса.

Спроектируем ускорение двигателя a на оси системы координат OX'Y'Z':

$$a_r = -a_z \cos(\varphi) = a_z \sin(\alpha - v_{ma})$$

$$a_n = -a_z \sin(\varphi) = a_z \cos(\alpha - v_{ma})$$

где a_z - ускорение вдоль оси OZ ССК (т.к. направления тяг двигателей имеют проекции только по осям OY, OZ, а ось OY направлена по бинормали), a_r , a_n - радиальная и нормальная компоненты ускорения в OX'Y'Z'.

Следовательно, выражение (2) можно представить следующим образом:

$$\Delta T = A \int_{t_i}^{t_j} (e \sin(v) a_r + (1 + e \cos(v)) a_n) dt \quad (3)$$

$$\text{где } A = -\frac{3T}{1-e^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}}$$

Уравнение эллипса в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(v)} \quad (4)$$

где r - радиус вектор КА.

Из интеграла площадей следует [3]:

$$dt = \frac{r^2 dv}{c} \quad (5)$$

где $c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, dt - изменение времени, dv - изменение истинной аномалии.

Из выражений (4), (5) получаем:

$$dv = \frac{c(1 + e \cos(v))^2}{p^2} dt \Rightarrow dt = \frac{p^2}{c(1 + e \cos(v))^2} dv \quad (6)$$

Тогда для выражения изменения периода(3), используя (6), получаем:

$$\Delta T = A \frac{p^2}{c} \int_{v_i}^{v_j} e \sin(v) a_r \frac{dv}{(1 + e \cos(v))^2} + A \frac{p^2}{c} \int_{v_i}^{v_j} (1 + e \cos(v)) a_n \frac{dv}{(1 + e \cos(v))^2} \Rightarrow$$

$$\Delta T = A \frac{p^2}{c} \left(\frac{a_r}{1+e \cos(v)} + \frac{2a_n}{\sqrt{1-e^2}} \arctan\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right) \right) \Big|_{v_i}^{v_j} \quad (7)$$

Нахождение v для заданного t , связано с нахождением E (эксцентрическая аномалия) по заданному M (средняя аномалия) с помощью уравнение Кеплера [3]:

$$E - e \sin E = M$$

где средняя аномалия определяется по формуле:

$$M = n(t - \tau)$$

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$$

где τ - эпоха (время последнего прохождения перигея), n – средняя угловая скорость обращения вокруг центрального тела [3], $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ - гравитационный параметр Земли.

Эксцентрическая аномалия связана с истинной аномалией соотношением [3]:

$$\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \quad (8)$$

Решим уравнение Кеплера итерационным методом:

$$E_{n+1} = e \sin(E_n) + M \quad (9)$$

Этот процесс сходится к единственному решению \bar{E} , где \bar{E} - корень уравнения

$$\bar{E} = e \sin(\bar{E}) + M$$

Откуда находим пределы интегрирования для (8) из (9), подставляя $E = \bar{E}$.

Промежутки работы ЭРД

Основной целью данного алгоритма является минимизация изменения периода во время коррекции орбиты путем изменения промежутков работы ЭРД. Для пошагового изменения периода использование формулы (7) связано с громоздкими вычислениями, и, соответственно, увеличением времени расчета оптимальной коррекции (т.к. на борту небольшие вычислительные мощности). Поэтому решено было использовать приближенный метод (который применим вследствие малой величины шага dt), получение которого следует из формулы (3):

$$\begin{cases} \Delta T_0^{p+1} = \Delta T_0^p \mp A(e \sin(v_p) a_r^0 + (1+e \cos(v_p) a_n^0)) dt \\ \Delta T_1^{p+1} = \Delta T_1^p \pm A(e \sin(v_p) a_r^1 + (1+e \cos(v_p) a_n^1)) dt \end{cases} \quad (10)$$

$$v_p = v_1 \mp p dv$$

где p - номер шага, dv - изменение истинной аномалии в зависимости от шага dt , определяемое формулой (6), v_1 - истинная аномалия на момент переключения двигателей.

Начальные значения ΔT_0^0 и ΔT_1^0 вычисляются из формулы (7). Погрешность предложенного приближенного метода не превышает 4% (результаты численного моделирования).

Условие на неизменность периода орбиты:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 \rightarrow 0 \quad (11)$$

Оценка кинетического момента

Для кинетического момента применимы общеизвестные формулы [4]:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \bar{H} + J\bar{\omega} \\ \frac{d\bar{K}}{dt} &= \bar{M} \Rightarrow \bar{\omega} \times (\bar{H} + J\bar{\omega}) + \dot{\bar{H}} + J\dot{\bar{\omega}} = \bar{M} \\ \dot{\bar{H}} &= -\bar{\omega} \times (\bar{H} + J\bar{\omega}) - J\dot{\bar{\omega}} + \bar{M} \end{aligned} \quad (12)$$

где \bar{K} - кинетический момент системы, \bar{H} - кинетический момент системы ИИО, J - тензор инерции КА, $\bar{\omega}$ - орбитальная угловая скорость, \bar{M} - момент от двигателей.

Все вычисления для кинетического момента производятся в ССК OXYZ

Так как тензор инерции рассматриваемого КА предполагается диагональным и, орбитальная угловая скорость направлена по бинормали к орбите (т.е. имеет одну компоненту по оси OY), то:

$$-\bar{\omega} \times J\bar{\omega} = 0 \quad (13)$$

Без ограничения общности, рассмотрим требуемый корректирующий импульс вдоль положительного направления оси OY. Решим уравнение (12) приближенно, для этого возьмем орбитальную угловую скорость постоянной и равной орбитальной угловой скорости в точке пересечения орбиты и её малой оси. Учитывая (6), получаем:

$$\omega = \omega_{avg} = \frac{dv}{dt} = \frac{c}{r^2} = \frac{c \cdot (1 + e \cos v_{ma})^2}{p^2} \quad (14)$$

Член $J\dot{\bar{\omega}}$ мы учтем при более точном просчете далее. В итоге, учитывая (13) и (14) получаем:

$$\dot{\bar{H}} = -\bar{\omega} \times \bar{H} + \bar{M} = \begin{pmatrix} -\omega_{avg} H_z + M_x \\ M_y \\ \omega_{avg} H_x + M_z \end{pmatrix} \quad (15)$$

Решая данное дифференциальное уравнение (15), получаем:

$$\begin{cases} H_x(t) = -\left(H_{z0} - \frac{M_x}{\omega_{avg}}\right) \sin(\omega_{avg} t) + \left(H_{x0} + \frac{M_z}{\omega_{avg}}\right) \cos(\omega_{avg} t) - \frac{M_z}{\omega_{avg}} \\ H_y(t) = H_{y0} + M_y t \\ H_z(t) = \left(H_{z0} - \frac{M_x}{\omega_{avg}}\right) \cos(\omega_{avg} t) + \left(H_{x0} + \frac{M_z}{\omega_{avg}}\right) \sin(\omega_{avg} t) + \frac{M_x}{\omega_{avg}} \end{cases} \quad (16)$$

Систему (16) используем далее, при выборе подходящих двигателей, путем расчета кинетического момента для системы ИИО на конец работы каждого из двигателей.

Выбор двигателей и точный просчет кинетического момента.

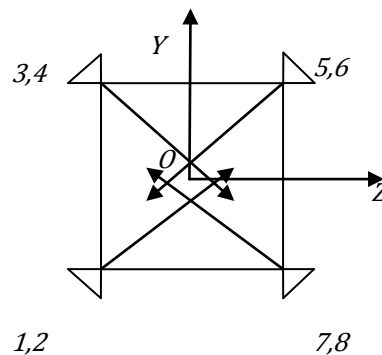


рис. 4. Схема расположения двигателей на КА.

Условия на выбор двигателей:

- 1) Тяги двигателей направлены под углом 45° (как видно из рис. 4) к осям Y,Z. Совершая коррекцию, необходимо выдать приращение импульса по положительному или отрицательному направлению оси OY. Соответственно, 4 из 8 двигателей отсеиваются.
- 2) Требуется выдать импульс только вдоль одной оси, поэтому надо скомпенсировать импульс вдоль другой (если работали двигателем 1 или 2, то следующим 7 или 8).
- 3) Кинетический момент не должен превышать порогового значения. По окончании коррекции, он должен быть минимально возможным или меньше значения H_{exit} , которое задается как начальное условие.

Изначально планировалось проводить коррекцию с помощью 2-х двигателей, однако после проведения численного моделирования оказалось, что это не всегда возможно и оптимально. Поэтому решено было проводить коррекцию с помощью 3-х двигателей. Без ограничения общности, будем рассматривать корректирующий импульс вдоль

положительной оси ОУ. Тогда, если мы 1-м работаем из пары двигателей 1,2, то 2-м двигателем из пары 7,8, а 3-м из 1,2.

Минимальное время работы ЭРД 60 сек (из технических характеристик двигателей), поэтому, первоначально включаем первый двигатель на 60 сек, а для остальных минимизируем период, используя формулы (10).

Условие на неизменность периода (11) тогда принимает вид:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \textit{addition} \rightarrow 0 \quad (17)$$

где *addition* - изменение по периоду для 1-го двигателя, которое вычисляем по формуле (7), пределы интегрирования: v_i - истинная аномалия начала коррекции, v_j - истинная аномалия окончания работы 1-го двигателя, которую получаем из времени работы данного двигателя по формулам (8), (9).

Получая времена работы каждого из двигателей с помощью алгоритма для периода (10) с условием (17), находим кинетический момент на конец работы каждого из двигателя по формулам (16), сравниваем с пороговым значением $H_{\max} = 30 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. И находим кинетический момент на конец коррекции с помощью точного итерационного метода, который получаем из (12), учитывая $J\dot{\omega}$:

$$\begin{cases} \frac{dH_x}{dt} = -\omega H_z + M_x \\ \frac{dH_y}{dt} = -J_y \frac{d\omega}{dt} + M_y \\ \frac{dH_z}{dt} = \omega H_x + M_z \end{cases} \quad (18)$$

где $\frac{d\omega}{dt}$ можно найти как:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{c(1+e \cos v)^2}{p^2} \right) = -\frac{2ec^2}{p^4} \sin v (1+e \cos v)^3$$

Истинная аномалия изменяется каждый шаг по формуле:

$$v = v \pm dv$$

где dv определяется из формулы (6)

После расчета для промежутка времени работы 1-го двигателя 60 с, увеличиваем это время на dt , и просчитываем заново. Повторяем данный алгоритм до получения требуемых нам значений по кинетическому моменту на момент окончания коррекции с помощью формул (16), или, до тех пор, пока время работы какого-либо из двигателей не станет

меньше минимального (т.е. 60 с). После получения набора двигателей, просчитываем уже точный кинетический момент с помощью формул (18).

Заключение

В работе получены аналитические выкладки и общая схема алгоритма коррекции орбиты. Возможны 2 варианта схемы работы предложенного алгоритма:

- получение кинетического момента на момент окончания коррекции, меньше либо равного требуемого H_{exit} , которое задается на входе.
- получение минимально возможного кинетического момента на момент окончания коррекции.

1-й вариант по скорости вычисления превосходит второй, но мы получаем неоптимальное значение по кинетическому моменту.

На выходе работы данного алгоритма получаем порядок включения двигателей, необходимый для проведения коррекции, промежутки работы каждого из них. При этом минимизируется изменение по периоду орбиты. Также, в процессе коррекции решается задача удержания кинетического момента ИИО в заданной области.

Предложенный алгоритм также возможно использовать для изменения периода в положительную или отрицательную сторону. Для этого необходимо только изменить условие (17) и указать значение, которое нам необходимо.

Библиографический список

1. Авдеев Ю.Ф., Беляков А.И., Брыков А.В. Полет космических аппаратов. Примеры и задачи. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.
2. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета: Учеб. пособие. - М.: Наука, 1990. – 448 с.
3. Раушенбах Б. В., Овчинников М.Ю. Лекции по динамике космического полета. – М.: МФТИ, 1997. – 188 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. – М.: Наука, 1979. – 520 с.