

На правах рукописи



ФАМ ДЫК ТХОНГ

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ
ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2020

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, **Тарлаковский Дмитрий Валентинович**

Официальные оппоненты: Калинин Валерий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, заведующий отделом механики, математики и нанотехнологий, ФГБУН «Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук», г. Ростов-на-Дону;

Дмитриенко Юрий Иванович

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский университет "МЭИ", г.Москва.

Защита диссертации состоится «23» декабря 2020 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

https://mai.ru/upload/iblock/ec3/Dissertation_PhamDucThong.pdf

Автореферат разослан «__» _____ 2020 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

к.ф.-м.н., доцент

Федотенков Григорий Валерьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Различные проблемы электромагнитоупругости рассматривали Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В., Саркисян С.В., Бабаев А.Э. Баженов В.Г., Игумнов Л.А., Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Белоконь А.В., Шульга Н. А., Ватульян А.О., Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Муций Р.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Гринченко В.Т., Карлаш В.Л., Мелешко В.В., Улитко А.Ф., Белянкова Т.И., Калинин В.В., Кудрявцев Б.А., Партон В.З., Новацкий В., Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Фильштинский Л.А., Altay G., Dökmeci M.C., Green A.E., Naghdi P.M., Mindlin R.D., Pao Y.H., Wang J. и многие другие авторы.

Однако в настоящее время наиболее исследованными являются задачи о распространении нестационарных возмущений в классических упругих средах без учета их взаимодействия с полями другой физической природы, в том числе с рассматриваемыми в работе электромагнитными полями. В большинстве известных публикаций это взаимодействие учитывается на уровне несвязанных задач. При этом практически отсутствуют публикации по проблеме распространения нестационарных волн в тонких электромагнитоупругих оболочках.

В тоже время в различных областях новой техники, в том числе в авиации и космонавтике, имеется насущная потребность в использовании моделей нестационарной связанной электромагнитоупругости для тонкостенных элементов конструкций, которые с необходимой степенью точности описывают процессы деформирования. Поэтому тема диссертационной работы представляет собой актуальную проблему.

Цель диссертационной работы заключается в развитии направления механики нестационарного взаимодействия механических и электромагнитоупругих полей, включающего постановки и исследование новых задач для тонких оболочек.

Методы исследования. При построении модели использовались линейные уравнения движения оболочек, уравнения Максвелла, а также линеаризованный обобщенный закон Ома и выражение для силы Лоренца. Для решения задач применялись метод малого параметра, функции Грина, преобразования Лапласа и Фурье и тригонометрические ряды Фурье. Для проведения расчётов разработаны специальные процедуры программ для обработки результатов. Построение графиков проводилось в среде Maple 18.

Достоверность и обоснованность результатов подтверждается тем, что все результаты получены на базе модификации известных моделей механики деформируемого твёрдого тела и электромагнитодинамики. В совокупности с известным математическим аппаратом тензорного анализа и численными методами интегрирования это подтверждает достоверность результатов и полученных аналитических решений.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем.

1. Впервые построена связанная нестационарная модель, описывающая нестационарные процессы в тонких электромагнитных оболочках, пластинах и стержнях.
2. Дано решение новых задач о нестационарных продольных колебаниях бесконечного и конечного электромагнитоупругого стержней.

3. Проведено подробное исследование новых задач о нестационарном изгибе бесконечного и конечного электромагнитоупругого стержней.

Практическая значимость состоит в возможности использовать результаты работы для уточнения функционирования различных электронных устройств, использующих в своей работе проводящие элементы, которые подвергаются экстремальным воздействиям полей различной природы.

Кроме того, полученные точные результаты могут служить эталонными и тестовыми решениями для дальнейших перспективных разработок в области нестационарной электромагнитоупругости.

Апробация основных результатов работы. Основные положения диссертационной работы обсуждались и докладывались на следующих научных конференциях и симпозиумах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская область, Кременки, 2017-2020 гг.);

- Международная научная конференция «Проблемы прочности, динамики и ресурса», посвященная памяти и 80-летию со дня рождения Ю.Г. Коротких (Нижний Новгород, 2017 г.);

- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при взаимодействии полей различной физической природы» (Москва, 2017-2018 гг.);

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2018-2020 гг.)

Публикации. По теме диссертации было опубликовано 10 работ, из них в журналах, рекомендованных ВАК, 3 статьи и 7 тезисов докладов.

Структура и объем диссертации. Объем работы 117 страниц и содержит 48 рисунков. Она состоит из введения, четырёх глав, заключения, приложения и списка литературы из 144 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели работы, приведены методы исследования, обоснована достоверность полученных результатов, отмечена их новизна и практическая значимость, а также изложено краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе приведен аналитический обзор публикаций, посвящённых проблемам электромагнитоупругости. Из него следует, что, несмотря на большое разнообразие существующих в настоящее время моделей электромагнитоупругости, в основном, рассматривались несвязанные задачи, либо связанные задачи, которые решались в статической или в стационарной постановке. При этом во многих публикациях использовались численные методы исследования.

Далее построена математическая модель нестационарных начально-краевых задач для электромагнитоупругих тонких оболочек. Рассматривается тонкая линейно упругая однородная анизотропная оболочка толщины h с гладкой срединной поверхностью

$$\Pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2), (\xi^1, \xi^2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

где \mathbf{r} - радиус вектор, ξ^1, ξ^2 - криволинейные координаты.

Базис $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ касательного пространства, нормальный вектор \mathbf{n} , компоненты тензора кривизны b_{ij} и компоненты метрического тензора g_{ij} базиса $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathbf{n}$ определяются равенствами:

$$\mathfrak{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^j}, \mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|, \mathbf{N} = [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2], b_{ij} = \left(\frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial \xi^j}, \mathbf{n} \right) = \left(\frac{\partial \mathfrak{e}_j}{\partial \xi^i}, \mathbf{n} \right), \quad (2)$$

$$g_{ij} = (\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j), g_{i3} = 0, g_{33} = 1.$$

Здесь и далее, если не оговорено противное, латинские индексы принимают значения 1 и 2.

Уравнения движения оболочки с учетом поворота нормального волокна и его обжата в базисе $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathbf{n}$ записываем в следующем виде (точками обозначены производные по времени t):

$$\rho h \ddot{u}^i = \nabla_j T^{ji} - b_j^i Q^j + q^i + q_e^i, \rho h \ddot{w} = \nabla_i Q^i + b_{ij} T^{ij} + q + q_e, \quad (3)$$

$$\rho I \ddot{\psi}^i = \nabla_j M^{ij} - Q^i + m^i + m_e^i, \rho I \ddot{\psi}_3 = \nabla_i \mu^i - N + m + m_e, I = h^3/12;$$

$$Q^i = \hat{Q}^i + b_j^i \mu^j, T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, N = \hat{N} - b_{ij} M^{ij}; \quad (4)$$

$$\hat{T}^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{ij} dz, M^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma^{ij} dz, \hat{Q}^i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{i3} dz, \quad (5)$$

$$\mu^i = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma^{i3} dz, \hat{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{33} dz;$$

Здесь индекс «3» соответствует нормальной к срединной поверхности координате z ; ρ - плотность материала; u_i и w - тангенциальные и нормальное перемещение; ψ_i - углы поворота нормального к поверхности Π волокна, ψ_3 - его деформация; $\sigma^{ij}, \sigma^{i3}, \sigma^{33}$ - компоненты тензора напряжений; $\mathbf{q}_e = q_e^i \mathfrak{e}_i + q_e \mathbf{n}$, $\mathbf{m}_e = m_e^i \mathfrak{e}_i + m_e \mathbf{n}$ - векторы поверхностных давления и отнесенного к единице площади момента, иницированных электромагнитным полем; $\mathbf{q} = q^i \mathfrak{e}_i + q \mathbf{n}$, $\mathbf{m} = m^i \mathfrak{e}_i + m \mathbf{n}$ - аналогичные величины иной природы.

К этим уравнениям добавляются кинематические соотношения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \kappa_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}), \quad (6)$$

$$\alpha_{ij} = \nabla_i u_j - b_{ij} w, \beta_{ij} = \nabla_i \psi_j - b_{ij} \psi_3 + b_i^k \alpha_{kj}, -\vartheta_i = \nabla_i w + b_i^k u_k, \theta_k = \psi_k - \vartheta_k.$$

где ε_{ij} - тангенциальные деформации; κ_{ij} - компоненты тензора изменения кривизны.

Равенства (6) получены при использовании гипотезы прямой нормали, а именно, приближенных равенств для вектора перемещения \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}(\xi^1, \xi^2, z, t) = \left[u_i(\xi^1, \xi^2, t) + \psi_i(\xi^1, \xi^2, t) z \right] \mathfrak{e}_i + \left[w(\xi^1, \xi^2, t) + \psi_3(\xi^1, \xi^2, t) z \right] \mathbf{n}.$$

Необходимые для замыкания системы уравнений (3) - (6) выражения для координат вектора \mathbf{q}_e и напряжений $\sigma^{ij}, \sigma^{i3}, \sigma^{33}$ рассматриваются ниже.

Используются следующие трехмерные соотношения электромагнитоупругости:

- уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho_e; \quad (7)$$

- линейризованные относительно начального состояния (его компоненты обозначаются дополнительным индексом «0») обобщенный закон Ома и выражение для силы Лоренца \mathbf{F}_e

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}, \mathbf{B}_0]) + \rho_{e0} \mathbf{v}; \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_e = F_e^i \mathbf{e}_i + E_{e3} \mathbf{n} = \rho_{e0} \mathbf{E} + \rho_e \mathbf{E}_0 + c^{-1}([\mathbf{j}_0, \mathbf{B}] + [\mathbf{j}, \mathbf{B}_0]); \quad (9)$$

- физические соотношения

$$\begin{aligned} D^i &= e^{ij} E_j + e^{i3} E_3 + \kappa^{ijk} \hat{\varepsilon}_{jk} + 2\kappa^{ij3} \hat{\varepsilon}_{j3} + \kappa^{i33} \varepsilon_{33}, \\ D_3 &= e^{3j} E_j + e^{33} E_3 + \kappa^{3jk} \hat{\varepsilon}_{jk} + 2\kappa^{3j3} \hat{\varepsilon}_{j3} + \kappa^{333} \varepsilon_{33}, \\ B^i &= \mu^{ij} H_j + \mu^{i3} H_3 + \gamma^{ijk} \hat{\varepsilon}_{jk} + 2\gamma^{ij3} \hat{\varepsilon}_{j3} + \gamma^{i33} \varepsilon_{33}, \\ B_3 &= \mu^{3j} H_j + \mu^{33} H_3 + \gamma^{3jk} \hat{\varepsilon}_{jk} + 2\gamma^{3j3} \hat{\varepsilon}_{j3} + \gamma^{333} \varepsilon_{33}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\hat{\varepsilon}_{jk} = \varepsilon_{jk} + z \kappa_{jk}, \hat{\varepsilon}_{j3} = \theta_j + z(b_j^n \theta_n + \nabla_k \Psi_3), \varepsilon_{33} = \Psi_3;$$

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl} + C^{ij33} \Psi_3 - (\kappa^{ijk} E_k + \kappa^{ij3} E_3 + \gamma^{ijk} H_k + \gamma^{ij3} H_3) / 4\pi,$$

$$\sigma^{i3} = C^{i3k3} \hat{\varepsilon}_{k3} - (\kappa^{i3k} E_k + \kappa^{i33} E_3 + \gamma^{i3k} H_k + \gamma^{i33} H_3) / 4\pi, \quad (11)$$

$$\sigma^{33} = C^{33kl} \hat{\varepsilon}_{kl} + C^{3333} \Psi_3 - (\kappa^{33k} E_k + \kappa^{333} E_3 + \gamma^{33k} H_k + \gamma^{333} H_3) / 4\pi.$$

Здесь $\mathbf{E} = E^i \mathbf{e}_i + E_3 \mathbf{n}$ и $\mathbf{H} = H^i \mathbf{e}_i + H_3 \mathbf{n}$ - векторы напряженностей электрического и магнитного полей; $\mathbf{D} = D^i \mathbf{e}_i + D_3 \mathbf{n}$ и $\mathbf{B} = B^i \mathbf{e}_i + B_3 \mathbf{n}$ - векторы электрической и магнитной индукций; $\mathbf{j} = j^i \mathbf{e}_i + j_3 \mathbf{n}$ - плотность тока; c - скорость света; ρ_e - плотность зарядов; σ - коэффициент электропроводимости; $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ - скорость точек среды; e^{ij} и μ^{ij} - тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости; κ^{ijk} и γ^{ijk} - тензоры пьезоэлектрических и пьезомагнитных постоянных; C^{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) - тензор упругих постоянных.

При этом полагается, что в начальном состоянии электромагнитные параметры не зависят от координаты z и удовлетворяю равенствам ($i = 1, 2, 3$):

$$(\dot{\mathbf{B}})_0 = 0, (\dot{\mathbf{D}})_0 = 4\pi \mathbf{j}_{s0}, \text{rot } \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \text{rot } \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_{s0}), \text{div } \mathbf{D}_0 = 4\pi \rho_{e0}, \mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0,$$

где \mathbf{j}_{s0} - ток смещения.

Входящие в правые части уравнений (3) компоненты векторов \mathbf{q}_e и \mathbf{m}_e аналогично механическим величинам определяются так:

$$q_e^i = \int_{-h/2}^{h/2} F_e^i dz, \quad q_e = \int_{-h/2}^{h/2} F_{e3} dz, \quad m_e^i = \int_{-h/2}^{h/2} z F_e^i dz, \quad m_e = \int_{-h/2}^{h/2} z F_{e3} dz. \quad (12)$$

Компоненты электромагнитного поля представляем в виде приближения уровня формул (5):

$$\begin{aligned} E_i &= e_i(\xi^1, \xi^2, t) + z\chi_i(\xi^1, \xi^2, t), \quad H_i = h_i(\xi^1, \xi^2, t) + z\varphi_i(\xi^1, \xi^2, t), \\ D_i &= d_i(\xi^1, \xi^2, t) + z\delta_i(\xi^1, \xi^2, t) \quad B_i = b_i(\xi^1, \xi^2, t) + z\beta_i(\xi^1, \xi^2, t), \\ j_i &= y_i(\xi^1, \xi^2, t) + z\nu_i(\xi^1, \xi^2, t), \quad \rho_e = r_e(\xi^1, \xi^2, t) + z\lambda_e(\xi^1, \xi^2, t) \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя эти равенства в (10) и (11), с учетом (12) получаем следующие формы физических законов для оболочки:

$$\begin{aligned} d^i &= e^{ij}e_j + e^{i3}e_3 + \kappa^{ijk}\varepsilon_{jk} + \kappa^{ij3}\theta_j + \kappa^{i33}\psi_3, \\ b^i &= \mu^{ij}h_j + \mu^{i3}h_3 + \gamma^{ijk}\varepsilon_{jk} + \gamma^{ij3}\theta_j + \gamma^{i33}\psi_3, \\ \delta^i &= e^{ij}\chi_j + e^{i3}\chi_3 + \kappa^{ijk}\kappa_{jk} + \kappa^{ij3}(b_j^n\theta_n + \nabla_j\psi_3), \\ \beta^i &= \mu^{ij}\varphi_j + \mu^{i3}\varphi_3 + \gamma^{ijk}\kappa_{jk} + \gamma^{ij3}(b_j^n\theta_n + \nabla_j\psi_3) \quad (i, j, k = 1, 2, 3); \\ \hat{T}^{ij} &= h \left[(C^{ijkl}\varepsilon_{kl} + C^{ij33}\psi_3) - \frac{1}{4\pi}(\kappa^{ijk}e_k + \kappa^{ij3}e_3 + \gamma^{ijk}h_k + \gamma^{ij3}h_3) \right], \\ M^{ij} &= I \left[C^{ijkl}\kappa_{kl} - \frac{1}{4\pi}(\kappa^{ijk}\chi_k + \kappa^{ij3}\chi_3 + \gamma^{ijk}\varphi_k + \gamma^{ij3}\varphi_3) \right], \\ \hat{Q}^i &= h \left[C^{i3k3}\theta_k - \frac{1}{4\pi}(\kappa^{i3k}e_k + \kappa^{i33}e_3 + \gamma^{i3k}h_k + \gamma^{i33}h_3) \right], \\ \mu^i &= I \left[C^{i3k3}(b_k^l\theta_l + \nabla_k\psi_3) - \frac{1}{4\pi}(\kappa^{i3k}\chi_k + \kappa^{i33}\chi_3 + \gamma^{i3k}\varphi_k + \gamma^{i33}\varphi_3) \right], \\ \hat{N} &= h \left[C^{33kl}\varepsilon_{kl} + C^{3333}\psi_3 - \frac{1}{4\pi}(\kappa^{33k}e_k + \kappa^{333}e_3 + \gamma^{33k}h_k + \gamma^{333}h_3) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

При построении последних соотношений полагается, что имеет место следующая симметрия:

$$C^{ijk3} = C^{i3kl} = C^{i333} = C^{33k3} = 0. \quad (16)$$

Для линеаризации по z равенств (8) и (9) используем следующее равенство для векторного произведения:

$$[\mathbf{j}, \mathbf{B}]\sqrt{g} = (j_2B_3 - j_3B_2)\mathbf{e}_1 + (j_3B_1 - j_1B_3)\mathbf{e}_2 + (j_1B_2 - j_2B_1)\mathbf{n}, \quad (17)$$

где g - второй инвариант метрического тензора.

В результате при дополнительном использовании (14) приходим к такому аналогу закона Ома:

$$\begin{aligned}
y^1 &= \sigma \left[e^1 + c_g \left(\dot{u}_2 B_{03} - \dot{w} \hat{B}_{02} \right) \right] + \rho_{e0} \dot{u}^1, \quad v^1 = \sigma \left[\chi^1 + c_g \left(\dot{\psi}_2 B_{03} - \dot{\psi}_3 \hat{B}_{02} \right) \right] + \rho_{e0} \dot{\psi}^1, \\
y^2 &= \sigma \left[e^2 + c_g \left(\dot{w} \hat{B}_{01} - \dot{u}_1 B_{03} \right) \right] + \rho_{e0} \dot{u}^2, \quad v^2 = \sigma \left[\chi^2 + c_g \left(\dot{\psi}_3 \hat{B}_{01} - \dot{\psi}_1 B_{03} \right) \right] + \rho_{e0} \dot{\psi}^2, \\
y^3 &= \sigma \left[e_3 + c_g \left(\dot{u}_1 \hat{B}_{02} - \dot{u}_2 \hat{B}_{01} \right) \right] + \rho_{e0} \dot{w}, \quad v_3 = \sigma \left[\chi_3 + c_g \left(\dot{\psi}_1 \hat{B}_{02} - \dot{\psi}_2 \hat{B}_{01} \right) \right] + \rho_{e0} \dot{\psi}_3, \\
c_g &= c^{-1} g^{-1/2};
\end{aligned} \tag{18}$$

Применяя аналогичную процедуру к (9), из (12) находим компоненты векторов \mathbf{q}_e и \mathbf{m}_e :

$$\begin{aligned}
q_e^1 &= h \left[\rho_{e0} e^1 + r_e E_0^1 + c_g \left(j_{02} b_3 - j_{03} b_2 + y_2 B_{03} - y_3 B_{02} \right) \right], \\
q_e^2 &= h \left[\rho_{e0} e^2 + r_e E_0^2 + c_g \left(j_{03} b_1 - j_{01} b_3 + y_3 B_{01} - y_1 B_{03} \right) \right], \\
q_e &= h \left[\rho_{e0} e_3 + r_e E_{03} + c_g \left(j_{01} b_2 - j_{02} b_1 + y_1 B_{02} - y_2 B_{01} \right) \right], \\
m_e^1 &= I \left[\rho_{e0} \chi^1 + \lambda_e E_0^1 + c_g \left(j_{02} \beta_3 - j_{03} \beta_2 + v_2 B_{03} - v_3 B_{02} \right) \right], \\
m_e^2 &= I \left[\rho_{e0} \chi^2 + \lambda_e E_0^2 + c_g \left(j_{03} \beta_1 - j_{01} \beta_3 + v_3 B_{01} - v_1 B_{03} \right) \right], \\
m_e &= I \left[\rho_{e0} \chi_3 + \lambda_e E_{03} + c_g \left(j_{01} \beta_2 - j_{02} \beta_1 + v_1 B_{02} - v_2 B_{01} \right) \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

С целью построения «оболочечного» аналога уравнений (7) для вектора $\mathbf{u} = \hat{u}^i \mathfrak{e}_i + u_3 \mathbf{n} = \tilde{u}^i \mathbf{e}_i + \tilde{u}_3 \mathbf{n}$ используем равенства

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} \operatorname{rot} \mathbf{u} &= \left(\tilde{\nabla}_2 \tilde{u}_3 - \tilde{\nabla}_3 \tilde{u}_2 \right) \mathfrak{e}_1 + \left(\tilde{\nabla}_3 \tilde{u}_1 - \tilde{\nabla}_1 \tilde{u}_3 \right) \mathfrak{e}_2 + \left(\tilde{\nabla}_1 \tilde{u}_2 - \tilde{\nabla}_2 \tilde{u}_1 \right) \mathbf{n}, \\
\operatorname{div} \mathbf{u} &= \tilde{\nabla}_i \tilde{u}^i + \tilde{\nabla}_3 \tilde{u}_3,
\end{aligned} \tag{20}$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ - пространственный базис, первые два вектора которого и компоненты $\tilde{g}_{ij}, \tilde{g}_{i3}, \tilde{g}_{33}$ его метрического тензора определяются в следующем виде:

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\mathbf{r}_0 + z \mathbf{n}) = q_j^i \mathfrak{e}_i, \quad q_j^i = \delta_j^i - z b_j^i, \tag{21}$$

$$\tilde{g}_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} - 2z b_{ij}, \quad \tilde{g}_{i3} = 0, \quad \tilde{g}_{33} = 1, \quad \tilde{g}^{ij} = g^{ij} + 2z b^{ij}.$$

Входящие в (20) ковариантные производные имеют вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_i \tilde{u}_j &= \nabla_i \hat{u}_j - b_{ij} u_3 + z \left(c_{ij} u_3 - b_j^k \nabla_i \hat{u}_k \right), \quad c_{ij} = b_{ik} b_j^k, \\
\tilde{\nabla}_i \tilde{u}_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial \xi^i} + b_i^k \hat{u}_k, \quad \tilde{\nabla}_3 \tilde{u}_i = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} - z b_i^k \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial z}, \quad \tilde{\nabla}_3 \tilde{u}_3 = \frac{\partial u_3}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда вытекает такое соотношение:

$$\tilde{\nabla}_i \tilde{u}^i = \tilde{g}^{im} \tilde{\nabla}_i \tilde{u}_m = \nabla_i \hat{u}^i - 2H u_3 + z \left[b^{ik} \nabla_i \hat{u}_k - 2(2H^2 - K) u_3 \right], \tag{23}$$

где $H = (b_1^1 + b_2^2)/2$ и $K = (b_{11} b_{22} - b_{12}^2)/g$ - средняя и Гауссова кривизны поверхности Π .

Используя теперь формулы (20), (22), (23) и (14), из (7) получаем

$$\frac{\partial e_3}{\partial \xi^2} + b_2^k e_k - \chi_2 = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{b}^1, \chi_1 - \frac{\partial e_3}{\partial \xi^1} - b_1^k e_k = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{b}^2, \nabla_1 e_2 - \nabla_2 e_1 = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{b}_3; \quad (24)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} + b_2^k h_k - \varphi_2 = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y^1 + \dot{d}^1), \varphi_1 - \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} - b_1^k h_k = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y^2 + \dot{d}^2), \quad (25)$$

$$\nabla_1 h_2 - \nabla_2 h_1 = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y_3 + \dot{d}_3);$$

$$\nabla_i d^i - 2Hd_3 + \delta_3 = 4\pi r_e; \quad (26)$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial \xi^2} + b_2^k \chi_k + b_2^k \frac{\partial e_3}{\partial \xi^k} + c_2^k e_k = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{\beta}^1, \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi^1} + b_1^k \chi_k + b_1^k \frac{\partial e_3}{\partial \xi^k} + c_1^k e_k = \frac{\sqrt{g}}{c} \dot{\beta}^2, \quad (27)$$

$$\nabla_1 \chi_2 - \nabla_2 \chi_1 + b_1^k \nabla_k e_2 - b_2^k \nabla_k e_1 = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{\beta}_3;$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^2} + b_2^k \varphi_k + b_2^k \frac{\partial h_3}{\partial \xi^k} + c_2^k h_k = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v^1 + \dot{\delta}^1),$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^1} + b_1^k \varphi_k + b_1^k \frac{\partial h_3}{\partial \xi^k} + c_1^k h_k = -\frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v^2 + \dot{\delta}^2), \quad (28)$$

$$\nabla_1 \varphi_2 - \nabla_2 \varphi_1 + b_1^k \nabla_k h_2 - b_2^k \nabla_k h_1 = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v_3 + \dot{\delta}_3);$$

$$\nabla_i \delta^i - 2H\delta_3 + b^{ik} \nabla_i d_k - 2(2H^2 - K)d_3 = 4\pi \lambda_e. \quad (29)$$

Таким образом, замкнутая система уравнений движения анизотропной электромагнитоупругой оболочки включает в себя равенства (3), (4), (6), (14), (15), (18), (19) и (24) - (29).

Во второй главе, как частный случай, приводится математическая формулировка нестационарных начально-краевых задач для электромагнитоупругих пластин в прямоугольной декартовой системе координат. Для перехода к пластине необходимо считать тензор кривизны нулевым: $b_{ij} = 0$. При этом не изменяются соотношения (14), (18) и (19), равенства (4) упрощаются: $Q^i = \hat{Q}^i$, $T^{ij} = \hat{T}^{ij}$, $N = \hat{N}$. Преобразовываются также соотношения (3), (6), (15) и (24) - (29):

$$\rho h \ddot{u}^i = \nabla_j T^{ji} + q^i + q_e^i, \rho h \dot{w} = \nabla_i Q^i + q + q_e, \quad (30)$$

$$\rho I \ddot{\Psi}^i = \nabla_j M^{ij} - Q^i + m^i + m_e^i, \rho I \ddot{\Psi}_3 = \nabla_i \mu^i - N + m + m_e;$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \kappa_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \psi_j + \nabla_j \psi_i), \theta_k = \psi_k + \nabla_k w_k; \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
T^{ij} &= h \left[\left(C^{ijkl} \varepsilon_{kl} + C^{ij33} \psi_3 \right) - \frac{1}{4\pi} \left(\kappa^{ijk} e_k + \kappa^{ij3} e_3 + \gamma^{ijk} h_k + \gamma^{ij3} h_3 \right) \right], \\
M^{ij} &= I \left[C^{ijkl} \kappa_{kl} - \frac{1}{4\pi} \left(\kappa^{ijk} \chi_k + \kappa^{ij3} \chi_3 + \gamma^{ijk} \varphi_k + \gamma^{ij3} \varphi_3 \right) \right], \\
Q^i &= h \left[C^{i3k3} \theta_k - \frac{1}{4\pi} \left(\kappa^{i3k} e_k + \kappa^{i33} e_3 + \gamma^{i3k} h_k + \gamma^{i33} h_3 \right) \right], \\
\mu^i &= I \left[C^{i3k3} \nabla_k \psi_3 - \frac{1}{4\pi} \left(\kappa^{i3k} \chi_k + \kappa^{i33} \chi_3 + \gamma^{i3k} \varphi_k + \gamma^{i33} \varphi_3 \right) \right],
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
N &= h \left[C^{33kl} \varepsilon_{kl} + C^{3333} \psi_3 - \frac{1}{4\pi} \left(\kappa^{33k} e_k + \kappa^{333} e_3 + \gamma^{33k} h_k + \gamma^{333} h_3 \right) \right]; \\
\frac{\partial e_3}{\partial \xi^2} - \chi_2 &= -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{b}^1, \quad \chi_1 - \frac{\partial e_3}{\partial \xi^1} = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{b}^2, \quad \nabla_1 e_2 - \nabla_2 e_1 = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{b}_3;
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \varphi_2 = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y^1 + \dot{d}^1), \quad \varphi_1 - \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y^2 + \dot{d}^2), \tag{34}$$

$$\nabla_1 h_2 - \nabla_2 h_1 = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi y_3 + \dot{d}_3);$$

$$\nabla_i d^i + \delta_3 = 4\pi r_e; \tag{35}$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial \xi^2} = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{\beta}^1, \quad \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi^1} = \frac{\sqrt{g}}{c} \dot{\beta}^2, \quad \nabla_1 \chi_2 - \nabla_2 \chi_1 = -\frac{\sqrt{g}}{c} \dot{\beta}_3; \tag{36}$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^2} = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v^1 + \dot{\delta}^1), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^1} = -\frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v^2 + \dot{\delta}^2), \tag{37}$$

$$\nabla_1 \varphi_2 - \nabla_2 \varphi_1 = \frac{\sqrt{g}}{c} (4\pi v_3 + \dot{\delta}_3);$$

$$\nabla_i \delta^i = 4\pi \lambda_e. \tag{38}$$

Анализ системы уравнений (14), (18), (19), (30) – (38) показывает, что в общем случае начального электромагнитного поля в отличие от классической упругой пластины изгибные и продольные движения не разделяются.

Здесь и далее используются следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании штрихом обозначены размерные параметры):

$$x = \frac{x'}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u = \frac{u'}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad q_{*1} = \frac{q'_{*1} L}{(\lambda + 2\mu) h}, \quad m_* = \frac{m'_* L^2}{(\lambda + 2\mu) I},$$

$$q' = \frac{qL}{(\lambda + 2\mu) h}, \quad m'_1 = \frac{mL^2}{(\lambda + 2\mu) I}, \quad q'_e = \frac{q_e L}{(\lambda + 2\mu) h}, \quad m'_{e1} = \frac{m_{e1} L^2}{(\lambda + 2\mu) I},$$

$$I = \frac{h^3}{12}, \quad r^2 = \frac{I}{L^2 h}, \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad \eta_e = \frac{c_1}{c_e}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_e^2 = \frac{c^2}{\mu_e \varepsilon_e},$$

$$\begin{aligned}
e_1' &= \frac{e_1}{E_*} \bar{\sigma} e_3 = \frac{e_3'}{E_*}, h_2 = \frac{h_2' \mu_e c_1}{c E_*}, \chi_3' = \frac{\chi_3 L}{E_*}, y_1' = \frac{y_1}{\sigma E_*}, y_3' = \frac{y_3}{\sigma E_*}, v_3' = \frac{L v_3}{\sigma E_*}, \\
\chi_1 &= \frac{\chi_1' L}{E_*}, v_1 = \frac{v_1' L}{\sigma E_*}, \lambda_e' = \frac{4\pi \lambda_e L^2}{\varepsilon_e E_*}, \varphi' = \frac{\varphi \mu_e c_1 L}{c E_*}, r_e' = \frac{4\pi r_e L}{\varepsilon_e E_*}, \\
E_0' &= \frac{E_0}{E_*}, H_0 = \frac{H_0' \mu_e c_1}{c E_*}, \alpha = \frac{\varepsilon_e E_*^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, \gamma = \frac{4\pi \sigma L}{\varepsilon_e c_1}, \zeta = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\eta^2},
\end{aligned}$$

где t - размерное время; L и E_* - некоторые характерные линейный размер и напряженность электрического поля; λ, μ - упругие постоянные Ламе; h - высота поперечного сечения; σ, ε_e и μ_e - коэффициенты электропроводимости, диэлектрической и магнитной проницаемости материала.

В третьей главе рассматривается нестационарное продольное движение прямолинейного с осью Ox однородного изотропного электромагнитоупругого стержня при отсутствии начального электрического поля. Начальные условия полагаются нулевыми. Соответствующие уравнения записываются в пространстве преобразований Лапласа по времени (верхний индекс « L » указывает на изображение; s - параметр) как частный случай построенных в общих уравнений для тонкой оболочки:

$$\begin{aligned}
s^2 u^L &= \frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial \psi_3^L}{\partial x} - \alpha \gamma H_0 (H_0 u^L + e_3^L) + q_{*1}^L, \\
s^2 \psi_3^L &= \eta^{-2} \frac{\partial^2 \psi_3^L}{\partial x^2} - r^{-2} \left(\zeta \frac{\partial u^L}{\partial x} + \psi_3^L \right) + \alpha \frac{H_0^2 \gamma s}{s + \gamma} \left(\frac{\partial \psi_3^L}{\partial x} - s \psi_3^L \right) + m_*^L;
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\frac{\partial h_2^L}{\partial x} = \eta_e^2 \left[(s + \gamma) e_3^L + \gamma s H_0 u^L \right], \quad \frac{\partial e_3^L}{\partial x} = s h_2^L + \frac{\gamma s}{s + \gamma} H_0 \psi_3^L. \tag{40}$$

К замкнутой системе уравнений (39) и (40) добавляются соотношения для дополнительных характеристик возмущенного электромагнитного поля на оси стержня:

$$\chi_1^L = \frac{\gamma s}{s + \gamma} H_0 \psi_3^L, \quad y_3^L = e_3^L + s H_0 u^L, \quad v_1^L = -\frac{s^2}{s + \gamma} H_0 \psi_3^L, \quad \lambda_e^L = H_0 \frac{\gamma s}{s + \gamma} \frac{\partial \psi_3^L}{\partial x}, \tag{41}$$

Далее рассматриваются два варианта геометрии стержня. В случае *бесконечного электромагнитоупругого стержня* для построения решения к системе уравнений (39), (40) применяем преобразование Фурье по координате x (верхний индекс « F » указывает на изображение; q - соответствующий параметр):

$$\begin{aligned}
(k_1^2 + \alpha \gamma H_0^2 s) u^{FL} + i q \zeta \psi_3^{FL} + \alpha \gamma H_0 e_3^{FL} &= q_{*1}^{FL}, \\
\left[(k_2^2 + \eta^2 r^{-2})(s + \gamma) + \alpha H_0^2 \eta^2 \gamma s (i q + s) \right] \psi_3^{FL} \\
- i q \zeta \eta^2 r^{-2} (s + \gamma) u^{FL} &= \eta^2 (s + \gamma) m_*^L,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_e^2 \gamma s H_0 u^{FL} + \eta_e^2 (s + \gamma) e_3^{FL} + i q h_2^{FL} &= 0, \\ \gamma s H_0 \psi_3^{FL} + i q (s + \gamma) e_3^{FL} + s_e^2 h_2^{FL} &= 0,\end{aligned}$$

где

$$k_1 = \sqrt{q^2 + s^2}, \quad k_2 = \sqrt{q^2 + \eta^2 s^2}, \quad s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\cdot} > 0.$$

Исключая из этой системы уравнений функции e_3^{FL} и h_2^{FL} , получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}a_{11}(q, s) u^{FL} + a_{12}(q, s) \psi_3^{FL} &= (s + \gamma) k_e^2 q_{*1}^{FL}, \\ a_{21}(q, s) u^{FL} + a_{22}(q, s) \psi_3^{FL} &= \eta^2 (s + \gamma) m_*^{FL},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}a_{11}(q, s) &= (s + \gamma) \left[k_1^2 k_e^2 + \alpha \gamma s H_0^2 (q^2 + \eta_e^2 s_e^2 - \gamma \eta_e^2 s) \right], \\ a_{12}(q, s) &= i q \left[\zeta (s + \gamma) k_e^2 + \alpha \gamma^2 H_0^2 s \right], \quad a_{21}(q, s) = -i r^{-2} \zeta \eta^2 (s + \gamma) q, \\ a_{22}(q, s) &= (s + \gamma) (k_2^2 + \eta^2 r^{-2}) + \alpha \eta^2 H_0^2 \gamma s (i q + s).\end{aligned}$$

Ее решение системы записываем так:

$$\begin{aligned}u^{FL} &= G_{uq}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL} + G_{um}^{FL}(q, s) m_*^{FL}, \\ \psi_3^{FL} &= G_{\psi_3q}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL} + G_{\psi_3m}^{FL}(q, s) m_*^{FL}.\end{aligned}\tag{42}$$

где

$$\begin{aligned}G_{uq}^{FL}(q, s) &= \frac{(s + \gamma) k_e^2 a_{22}(q, s)}{D(q, s)}, \quad G_{um}^{FL}(q, s) = -\frac{\eta^2 (s + \gamma) a_{12}(q, s)}{D(q, s)}, \\ G_{\psi_3q}^{FL}(q, s) &= -\frac{(s + \gamma) k_e^2 a_{21}(q, s)}{D(q, s)}, \quad G_{\psi_3m}^{FL}(q, s) = \frac{\eta^2 (s + \gamma) a_{11}(q, s)}{D(q, s)}, \\ D(q, s) &= a_{11}(q, s) a_{22}(q, s) - a_{12}(q, s) a_{21}(q, s).\end{aligned}$$

Здесь $G_{uq}^{FL}(q, s)$ и $G_{am}^{FL}(q, s)$, ($a = u, \psi_3$) - изображения функций влияния. Аналогичным образом можно представить остальные искомые функции: $e_3^{FL}, h_2^{FL}, \chi_1^{FL}, y_3^{FL}, \upsilon_1^{FL}, \lambda_e^{FL}$.

Оригиналы преобразования Лапласа находятся достаточно просто, поскольку изображения функций влияния являются рациональными функциями параметра s . Однако аналитическое обращение преобразования Фурье при этом невозможно. Попытка численного обращения не приводит к удовлетворительному результату из-за наличия быстро осциллирующих функций. Поэтому далее используем упрощенную модель стержня. Полагаем, что электромагнитное поле является квазистационарным, т.е.

$$\eta_e^2 = 0.\tag{43}$$

Кроме того, пренебрегаем обжатием стержня, что эквивалентно равенству

$$\psi_3 = 0.\tag{44}$$

Соответствующий результат проще получить, если с использованием (43) и (44) исключить из (42) величину m_*^{FL} :

$$u^{FL} = \Gamma_{uq}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL}, \Gamma_{uq}^{FL}(q, s) = \frac{1}{k_1^2 + \beta_0 s}, \beta_0 = \alpha \gamma H_0^2. \quad (45)$$

Здесь $\Gamma_{uq}^{FL}(q, s)$ - изображение функции влияния для упрощенной модели. Соответствующий оригиналы находим последовательным обращением преобразований Фурье и Лапласа:

$$\Gamma_{uq}(x, \tau) = \frac{1}{2} e^{-\beta_0 \tau / 2} I_0 \left[\frac{\beta_0}{2} \sqrt{\tau^2 - x^2} \right] H(\tau - |x|),$$

где $I_\nu(x)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν , $H(\tau)$ функция Хевисайда, $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Здесь и далее в качестве примера алюминиевый стержень, материал которого характеризуется следующими величинами:

$$\eta = 2,04; \zeta = 0,519; \gamma = 5,06; \alpha = 0,0806.$$

Здесь принято $E_* = 100$ в/м и $L = 1$ м. Полагаем также, что $H_0 = 1$ и стержень имеет квадратное поперечное сечения со следующими геометрическими параметрами: $h = 0,05$ м; $r^2 = h^2 / (12L^2) = 0,208 \cdot 10^{-3}$.

На рисунках 1 и 2 представлены построенные зависимости функций влияния $\Gamma_{uq}(x, \tau)$ от координаты x и времени τ .

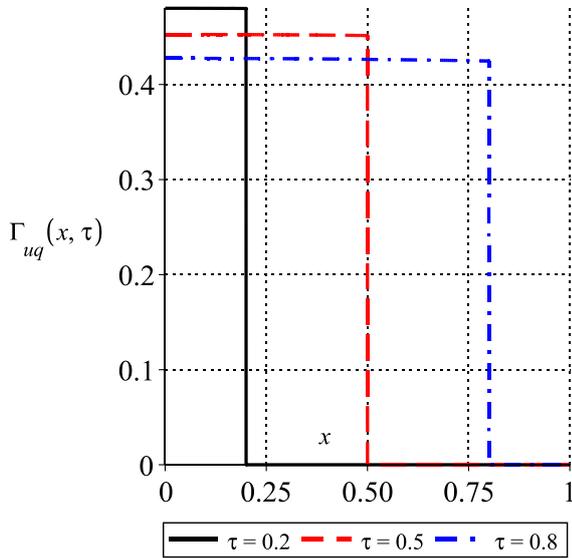


Рис.1. Зависимости $\Gamma_{uq}(x, \tau)$ от x

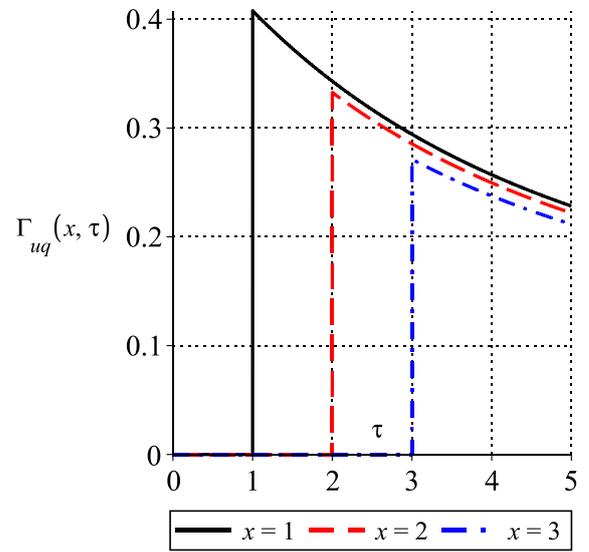


Рис. 2. Зависимости $\Gamma_{uq}(x, \tau)$ от τ

Оригиналы нетривиальных функций согласно (45) записывается так (звездочки обозначают свертки по времени и координате):

$$u(x, \tau) = \Gamma_{uq}(x, \tau) ** q_{*1}(x, \tau), \quad (46)$$

В качестве примера действия нагрузки рассмотрим вариант сосредоточенной поперечной силы:

$$q_{*1}(x, \tau) = H(\tau) \delta(x).$$

При этом равенства (46) принимают следующий вид:

$$u(x, \tau) = \Gamma_{uq}(x, \tau) * H(\tau) = \int_0^{\tau} \Gamma_{uq}(x, t) dt = \frac{1}{2} H(\tau - |x|) \int_{|x|}^{\tau} e^{-\beta_0 t/2} I_0\left(\frac{\beta_0}{2} \sqrt{t^2 - x^2}\right) dt.$$

На рисунках 3 и 4 представлены построенные зависимости функций влияния $u(x, \tau)$ от координаты x и времени τ .

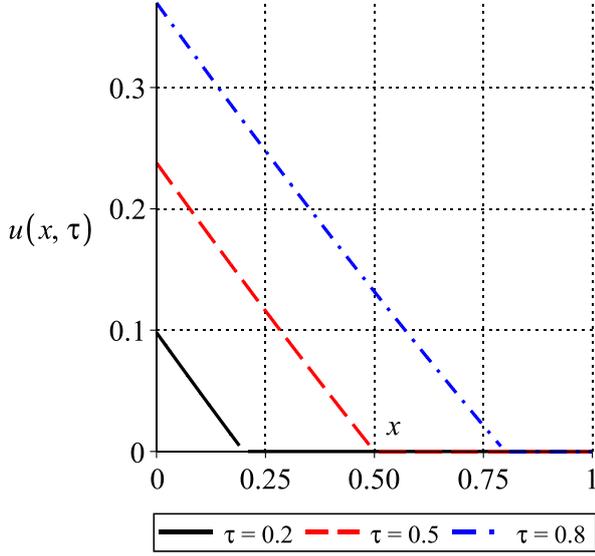


Рис.3. Зависимости $u(x, \tau)$ от x

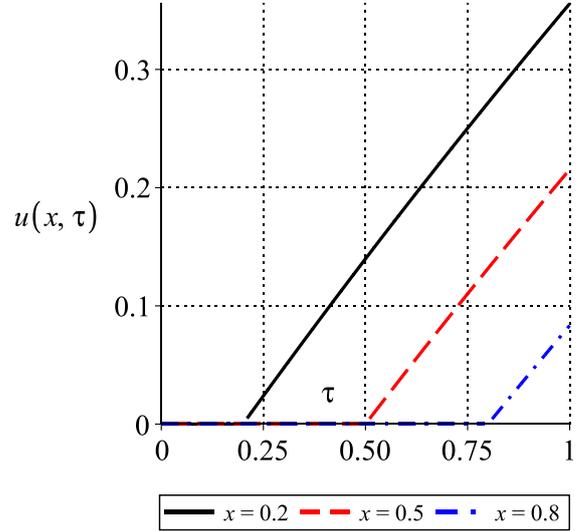


Рис.4. Зависимости $u(x, \tau)$ от τ

Во втором варианте стержень является конечным единичной длины с закрепленными концевыми сечениями, что соответствует следующим граничным условиям:

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

При этом используем предположения (43) и (44).

Для решения этой задачи раскладываем искомые функции и внешнюю нагрузку в тригонометрические ряды Фурье:

$$u(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad q_{*1}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n. \quad (47)$$

Подставляя ряды (47) в (39), (40), (41) с учетом (43) и (44) получаем результат

$$u_n^L = \Lambda_{un}^L(s) q_n^L, \quad \Lambda_{un}^L(s) = \frac{1}{k_{1n}^2 + \beta_0 s}, \quad k_{1n}^2 = k_1^2 (\lambda_n^2, s^2). \quad (48)$$

Коэффициенты рядов (47) в соответствии с (48) определяются так:

$$u_n(\tau) = \Lambda_{un}(\tau) * q_n(\tau). \quad (49)$$

Оригинал ядра этой свертки находится достаточно просто:

$$\Lambda_{un}(\tau) = \frac{\sin \mu_n \tau}{\mu_n} e^{-\beta_0 \tau/2} H(\tau), \quad \mu_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \beta_0^2/4}, \quad (50)$$

Здесь учтено, что для реальных материалов для любых $n \geq 1$ выполняется неравенство $\lambda_n > \beta_0$. Подставляя равенства (49) и (50) в (47), получаем искомые оригиналы:

$$u(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{un}(\tau) * q_n(\tau) \sin \lambda_n x. \quad (51)$$

Рассмотрим сосредоточенную нагрузку:

$$q_{*1}(x, \tau) = f(\tau) \delta(x - x_0), \quad 0 < x_0 < 1.$$

Отсюда получаем

$$q_n(\tau) = 2f(\tau) \int_0^1 \delta(x - x_0) \sin \lambda_n x dx = 2f(\tau) \sin \lambda_n x_0.$$

Подставляя эти равенства в (51), получаем

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{un}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x.$$

Для примера положим, что нагрузка изменяется по закону $f(\tau) = H(\tau)$. При этом получаем

$$\Lambda_{un}(\tau) * H(\tau) = \int_0^{\tau} \Lambda_{un}(t) dt = \frac{1}{\lambda_n^2} \left[1 - \left(\frac{\beta_0}{2\mu_n} \sin \mu_n \tau + \cos \mu_n \tau \right) e^{-\beta_0 \tau / 2} \right] H(\tau).$$

Примеры расчётов приведены на рисунках 5 и 6 для нагрузки в центре стержня ($x_0 = 1/2$).

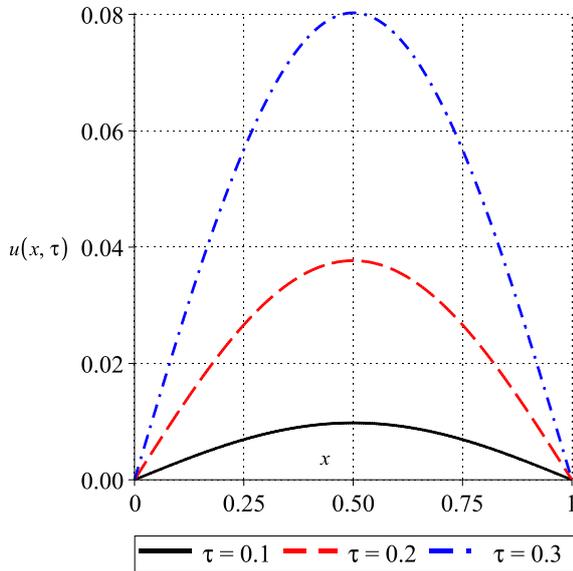


Рис.5. Зависимости $u(x, \tau)$ от x

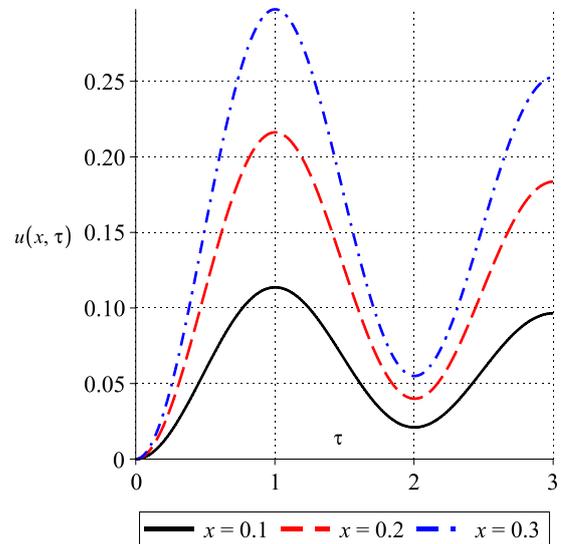


Рис. 6. Зависимости $u(x, \tau)$ от τ

В четвертой главе рассмотрена задача о нестационарном изгибе электромагнитоупругого стержня. На него действуют погонные поперечная нагрузка q и изгибающий момент m . Полагается, что задано начальное однородное электромагнитное поле с постоянными напряженностями электрического E_0 и магнитного H_0 полей. В начальный момент времени $\tau = 0$ стержень находится в покое и изменение электромагнитного поля отсутствует. Все искомые функции полагаются

ограниченными. Уравнения соответствующего процесса записываем в пространстве преобразований Лапласа по времени:

$$s^2 w^L = \eta^{-2} (\psi'^L + w''^L) + \frac{\alpha \gamma H_0}{s + \gamma} \left[s (E_0 w'^L - s H_0 w^L) - s E_0 \psi^L - \eta_e^{-2} \phi^L \right] + q^L, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} s^2 \psi^L &= \psi''^L - \eta^{-2} r^{-2} (\psi^L + w'^L) - \alpha \gamma H_0 \left[H_0 s \psi^L + \chi^L \right] + m^L; \\ \eta_e^{-2} \phi'^L &= (s + \gamma) \chi^L + \gamma s H_0 \psi^L, \quad \chi'^L = s \phi^L. \end{aligned} \quad (53)$$

Изменения электромагнитного поля, которые для обеспечения указанного выше изгиба должны иметь следующий вид ($z = x_3$):

$$\begin{aligned} E_1 &= e(x, \tau), \quad E_2 = 0, \quad E_3 = z \chi(x, \tau), \quad H_1 = H_3 = 0, \quad H_2 = z \phi(x, \tau), \\ j_1 &= y(x, \tau), \quad j_2 = 0, \quad j_3 = z \upsilon(x, \tau), \quad \rho_e = r_e(x, \tau). \end{aligned}$$

При этом имеют место равенства

$$\begin{aligned} (s + \gamma) e^L &= \gamma s H_0 w^L - \eta_e^{-2} \phi^L, \quad (s + \gamma) y^L = -\eta_e^{-2} \phi^L - s^2 H_0 w^L, \\ \upsilon^L &= \chi^L + s H_0 \psi^L, \quad (s + \gamma) r_e^L = H_0 \gamma s (w'^L - \psi^L). \end{aligned} \quad (54)$$

Далее аналогично главе 3 рассматриваются два варианта стержней. В случае *бесконечного электромагнитоупругого стержня* для построения решения системы уравнений (52), (53) дополнительно применяем преобразование Фурье по координате x :

$$\begin{aligned} \left[(s + \gamma) k_2^2 + \alpha H_0 \eta^2 \gamma s (iq E_{30} + H_0 s) \right] w^{FL} + \left[iq (s + \gamma) + \alpha E_{30} H_0 \eta^2 \gamma s \right] \psi^{FL} + \\ + \alpha H_0 \gamma \eta^2 \eta_e^{-2} \phi^{FL} = \eta^2 (s + \gamma) q^{FL}, \quad k_1 = \sqrt{q^2 + s^2}, \quad k_2 = \sqrt{q^2 + \eta^2 s^2}, \quad \text{Re} \sqrt{\cdot} > 0, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} (\eta^2 k_1^2 + \alpha \eta^2 \gamma H_0^2 s + r^{-2}) \psi^{FL} - r^{-2} iq w^{FL} + \alpha \gamma H_0 \eta^2 \chi_3^{FL} = \eta^2 m^{FL}; \\ iq \eta_e^{-2} \phi^{FL} + (s + \gamma) \chi^{FL} + \gamma s H_0 \psi^{FL} = 0, \quad s \phi^{FL} + iq \chi^{FL} = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

При этом соотношения (54) трансформируются так:

$$\begin{aligned} (s + \gamma) e^{FL} &= \gamma s H_0 w^{FL} - \eta_e^{-2} \phi^{FL}, \quad (s + \gamma) y^{FL} = -\eta_e^{-2} \phi^{FL} - s^2 H_0 w^{FL}, \\ \upsilon^{FL} &= \chi^{FL} + s H_0 \psi^{FL}, \quad (s + \gamma) r_e^{FL} = -H_0 \gamma s (iq w^{FL} + \psi^{FL}). \end{aligned}$$

Исключая из (55), (56) функции χ^{FL} и ϕ^{FL} , получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$b_{11}(q, s) w^{FL} + b_{12}(q, s) \psi^{FL} = \eta^2 k_e^2 (s + \gamma) q^{FL}, \quad b_{21}(q, s) w^{FL} + b_{22}(q, s) \psi^{FL} = \eta^2 k_e^2 m^{FL},$$

где

$$\begin{aligned} b_{11}(q, s) &= k_e^2 \left[(s + \gamma) k_2^2 + \alpha H_0 \eta^2 \gamma s (iq E_{30} + H_0 s) \right], \\ b_{12}(q, s) &= iq k_e^2 (s + \gamma) + \alpha H_0 \eta^2 \gamma s (E_{30} k_e^2 + \gamma H_0 iq), \\ b_{21}(q, s) &= -r^{-2} iq k_e^2, \quad b_{22}(q, s) = k_e^2 (\eta^2 k_1^2 + r^{-2}) + \alpha \gamma H_0^2 \eta^2 s (q^2 + \eta_e^2 s^2), \\ k_e &= \sqrt{q^2 + \eta_e^2 s_e^2}, \quad s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}, \quad \text{Re} \sqrt{\cdot} > 0. \end{aligned}$$

Ее решение системы записываем в следующем виде:

$$\begin{aligned} w^{FL} &= G_{wq}^{FL}(q, s)q^{FL} + G_{wm}^{FL}(q, s)m^{FL}, \\ \psi^{FL} &= G_{\psi q}^{FL}(q, s)q^{FL} + G_{\psi m}^{FL}(q, s)m^{FL}. \end{aligned} \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} G_{wq}^{FL}(q, s) &= \frac{\eta^2(s + \gamma)k_e^2 b_{22}(q, s)}{J(q, s)}, G_{wm}^{FL}(q, s) = -\frac{\eta^2 k_e^2 b_{12}(q, s)}{J(q, s)}, \\ G_{\psi q}^{FL}(q, s) &= -\frac{\eta^2(s + \gamma)k_e^2 b_{21}(q, s)}{J(q, s)}, G_{\psi m}^{FL}(q, s) = \frac{\eta^2 k_e^2 b_{11}(q, s)}{J(q, s)}, \\ J(q, s) &= b_{11}(q, s)b_{22}(q, s) - b_{12}(q, s)b_{21}(q, s). \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь $G_{wq}^{FL}(q, s)$, $G_{wm}^{FL}(q, s)$, $G_{\psi q}^{FL}(q, s)$ и $G_{\psi m}^{FL}(q, s)$ - изображения функций влияния. Аналогичным образом можно представить функции ϕ^{FL} , χ^{FL} , e^{FL} , y^{FL} , υ^{FL} , r_e^{FL} .

Изображения (58) являются рациональными функциями параметра s , что позволяет достаточно просто обратить преобразование Лапласа. Однако последующее вычисление оригиналов преобразования Фурье может быть выполнено только численно, что не дает удовлетворительного результата из-за наличия быстро осциллирующих функций. Поэтому далее используется упрощенная модель стержня – модель Бернулли-Эйлера, для перехода к которой полагается

$$\dot{\psi} = 0, \psi = -w'. \quad (59)$$

При этом соотношения (57) модифицируются так:

$$w^{FL} = \Gamma_{wp}^{FL}(q, s)p^{FL}, p = q_* + r^2 m'_1 \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{wp}^{FL}(q, s) &= \frac{k_e^2(s + \gamma)}{K(q, s)}, K(q, s) = K_0(q, s) + \alpha K_1(q, s), \\ K_0(q, s) &= k_e^2 s s_e^2 + q^2 r^2 (s + \gamma) k_e^2 q^2 = k_e^2 (s + \gamma) (s^2 + r^2 q^4), \end{aligned} \quad (61)$$

$$K_1(q, s) = H_0 \gamma s \left\{ (2iqE_{30} + H_0 s) k_e^2 + H_0 q^2 \left[r^2 (s + \gamma) (q^2 + \eta_e^2 s^2) - \gamma \right] \right\}.$$

Аналогичным образом можно представить функции ϕ^{FL} , χ^{FL} , e^{FL} , y^{FL} , υ^{FL} , r_e^{FL} .

Однако и в этом варианте остаются указанные выше сложности обращения преобразований. Поэтому используем метод малого параметра, в качестве которого принимаем коэффициент связи механического и электромагнитного полей α . Ограничиваясь линейным приближением, получаем

$$\Gamma_{wp}^{FL}(q, s) = \Gamma_{wp0}^{FL}(q, s) + \alpha \Gamma_{wp1}^{FL}(q, s), \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{wpn}^{FL}(q, s) &= (-1)^n \gamma^n H_0^n F_{wpn}^{FL}(q, s), F_{wp0}^{FL}(q, s) = \frac{1}{s^2 + r^2 q^4}, \\ F_{wp1}^{FL}(q, s) &= s \frac{(2iqE_{30} + H_0 s) k_e^2 + H_0 q^2 \left[r^2 (s + \gamma) (q^2 + \eta_e^2 s^2) - \gamma \right]}{k_e^2 (s + \gamma) (s^2 + r^2 q^4)^2}. \end{aligned}$$

Попытка аналитического построения оригиналов функции $F_{wp1}^{FL}(q, s)$ приводит к громоздким и малоинформативным результатам. Поэтому далее аналогично главе 3 строим квазистатическое решение, соответствующее гипотезе (43). При этом функции в (61) существенно упрощаются:

$$\Gamma_{wp}^{FL}(q, s) = \frac{s + \gamma}{K_c(q, s)}, \quad K_c(q, s) = K_{0c}(q, s) + \alpha K_{1c}(q, s),$$

$$K_{0c}(q, s) = (s + \gamma)(s^2 + r^2 q^4)$$

$$K_{1c}(q, s) = H_0 \gamma s \left\{ 2iqE_{30} + H_0 s + H_0 [r^2 (s + \gamma) q^2 - \gamma] \right\}.$$

Оригиналы $F_{wp0}^{FL}(q, s)$ и $F_{wp1}^{FL}(q, s)$ находим с помощью свойств преобразований и таблиц:

$$F_{wp0}(x, \tau) = Y(x, \tau; -1)H(\tau)$$

$$F_{wp1}(x, \tau) = H(\tau) \left\langle \frac{\tau}{2} H_0 [Y(x, \tau; -1) + rY(x, \tau; 0)] + \left(\gamma H_0 + E_{30} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ 2\gamma X(x; 2) * [e^{-\gamma\tau} - Z(x, \tau)] + \tau Z(x, \tau) * X(x; 1) + [2\gamma^2 X(x; 2) - (\tau\gamma + 1)X(x; 1)] * Y(x, \tau; -1) \right\} \right\rangle.$$

где

$$X(x; 1) = \frac{\cos ax + \sin a|x|}{2\gamma^{3/2} \sqrt{2r}} e^{-a|x|}, \quad a = \sqrt{\frac{\gamma}{2r}}, \quad X(x; 2) = \frac{3(\cos ax + \sin a|x|) + 2ax \sin ax}{8\gamma^{7/2} \sqrt{2r}} e^{-a|x|},$$

$$Y(x, \tau; -1) = \frac{|x|}{2r} \left[S_2(bx^2) - C_2(bx^2) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad b = \frac{1}{4r\tau},$$

$$Y(x, \tau; 0) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \cos\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right), \quad S_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad C_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt,$$

$$Z(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r \tau}} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sin\left(bx^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь $C_2(y)$ и $S_2(y)$ - косинус- и синус-интегралы Френеля.

В пространстве оригиналов формула (62) записывается в следующем виде:

$$\Gamma_{wp}(x, \tau) = \Gamma_{wp0}(x, \tau) + \alpha \Gamma_{wp1}(x, \tau).$$

Отметим, что функция $\Gamma_{wp0}(x, \tau)$ соответствует чисто упругому решению.

Полагаем, что в начальном поле отлична от нуля только напряженность магнитного поля:

$$E_{30} = 0, \quad H_0 = 1. \quad (63)$$

На рис. 7 и 8 представлены построенные зависимости функций влияния

$\Gamma_{wp}(x, \tau)$ от координаты x и времени τ .

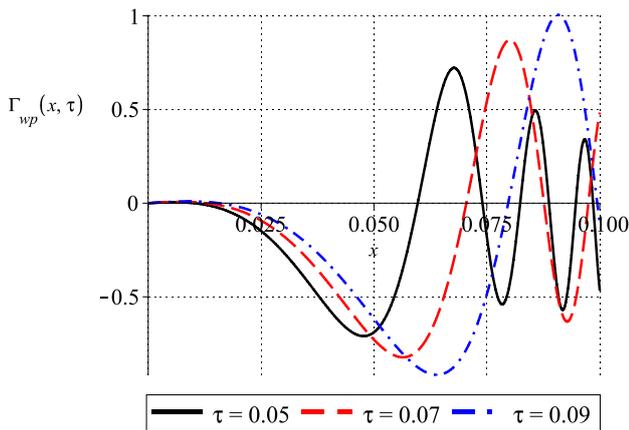


Рис.7. Зависимости $\Gamma_{wp}(x, \tau)$ от x

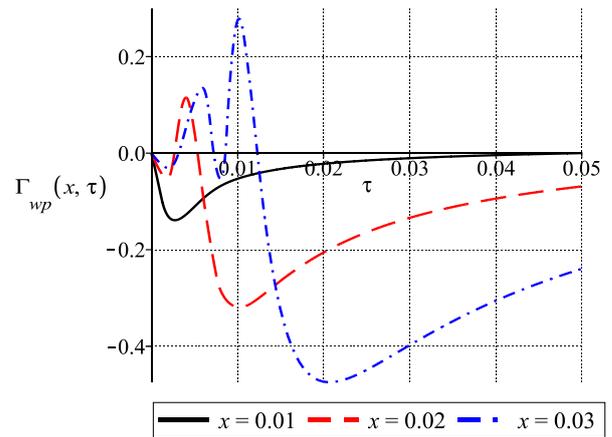


Рис. 8. Зависимости $\Gamma_{wp}(x, \tau)$ от τ

Теперь рассмотрим действие сосредоточенной в начале координат нагрузки следующего вида:

$$p(x, \tau) = \delta(x)H(\tau).$$

Отсюда с учетом (60) и (62) получаем

$$w(x, \tau) = \sum_{n=0}^1 (-1)^n \gamma^n \alpha^n F_{wpn}(x, \tau) * H(\tau)$$

Результаты расчетов для начального поля вида (63) представлены на рис.9-10

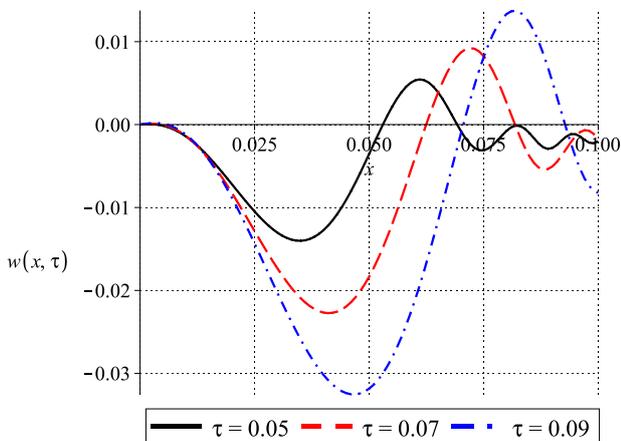


Рис.9. Зависимости $w(x, \tau)$ от x

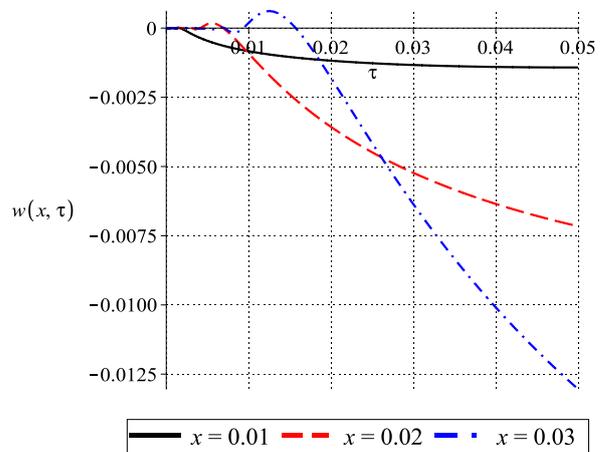


Рис. 10. Зависимости $w(x, \tau)$ от τ

Во втором варианте *конечного электромагнитоупругого стержня* аналогично главе 3 полагаем, что он имеет единичную длину и шарнирно закреплен в сечениях с координатами $x = 0$ и $x = 1$. При этом ограничиваемся использованной выше моделью Эйлера-Бернулли и квазистатическим приближением, соответствующим гипотезе (43).

Этот упрощенный вариант задачи записываем в пространстве преобразований Лапласа по времени. После некоторых преобразований получаем уравнение относительно изображения нормального перемещения

$$s^2 w^L + r^2 w^{(4)L} = p^L + p_e^L, p = q + r^2 m_1', \quad (64)$$

$$(s + \gamma) p_e^L = -\alpha H_0 \gamma s \left\{ 2E_{30} w'^L + H_0 \left[r^2 (s + \gamma) w''^L - (s - \gamma) w^L \right] \right\},$$

граничные условия

$$w|_{x=0} = w|_{x=1} = w''|_{x=0} = w''|_{x=1} = 0 \quad (65)$$

и следующие формулы для параметров электромагнитного поля:

$$e_1^L = \frac{2\gamma H_0 s}{s + \gamma} w^L, y_1^L = -\frac{H_0 s (s - \gamma)}{s + \gamma} w^L, v_3^L = -s H_0 w'^L, r_e^L = -\frac{2H_0 \gamma s}{s + \gamma} w'^L, \varphi = \chi_3 = 0. \quad (66)$$

Аналитически построить систему собственных функций для краевой задачи (64), (65) не представляется возможным. Поэтому далее положим, что начальное электрическое поле отсутствует:

$$E_{30} = 0. \quad (67)$$

При этом удовлетворяющее граничным условиям (59) решение задачи и внешнюю нагрузку можно представить в виде рядов Фурье:

$$w(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\tau) \sin \lambda_n x, p(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(\tau) \sin \lambda_n x, \lambda_n = \pi n. \quad (68)$$

Тогда согласно (59) и (64) угол поворота сечения и компоненты электромагнитного поля записываются так:

$$\psi(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(\tau) \cos \lambda_n x, e_1(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{1n}(\tau) \sin \lambda_n x, y_1(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{1n}(\tau) \sin \lambda_n x,$$

$$v_3(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{3n}(\tau) \cos \lambda_n x, r_e(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{en}(\tau) \cos \lambda_n x,$$

где

$$\psi_n = -\lambda_n w_n, e_{1n}^L = \frac{2\gamma H_0 s}{s + \gamma} w_n^L, y_{1n}^L = -\frac{H_0 s (s - \gamma)}{s + \gamma} w_n^L, v_{3n}^L = -H_0 \lambda_n s w_n^L, r_{en}^L = -\lambda_n e_{1n}^L.$$

Подставляя ряды (68) в (64), с учетом (67) приходим к следующим равенствам:

$$w_n^L = M_{wn}^L(s) p_n^L, M_{wn}^L(s) = \frac{s + \gamma}{L_n(s)}, N_{wn}(s) = s + \gamma, \quad (69)$$

$$L_n(s) = b_{n0} s^3 + b_{n1} s^2 + b_{n2} s + b_{n3},$$

$$b_{n0} = 1, b_{n1} = H_0^2 \gamma (r^2 \lambda_n^2 + 1) + \gamma, b_{n2} = H_0^2 \gamma^2 (r^2 \lambda_n^2 - 1) + r^2 \lambda_n^4, b_{n3} = \gamma r^2 \lambda_n^4.$$

Тогда из (66) получаем

$$a_n^L = M_{an}^L(s) p_n^L (a = \psi, e_1, y_1, v_3, r_e), \quad (70)$$

где

$$M_{\psi n}^L(s) = -\lambda_n M_{wn}^L(s), M_{r_n}^L(s) = -\lambda_n M_{e_n}^L(s),$$

$$M_{e_n}^L(s) = \frac{N_{e_n}(s)}{L_n(s)}, M_{\nu_3 n}^L(s) = \frac{N_{\nu_3 n}(s)}{L_n(s)}, M_{y_1 n}^L(s) = \frac{N_{y_1 n}(s)}{L_n(s)},$$

$$N_{e_n}(s) = 2\gamma H_0 s, N_{\nu_3 n}(s) = -H_0 \lambda_n s(s + \gamma), N_{y_1 n}(s) = -H_0 s(s - \gamma).$$

В пространстве оригиналов равенства (69) и (70) принимают следующий вид:

$$a_n(\tau) = M_{an}(\tau) * p(\tau) \quad (a = w, \psi, e_1, y_1, \nu_3, r_e).$$

Оригиналы функций $M_{wn}^L(s)$, $M_{e_n}^L(s)$, $M_{\nu_3 n}^L(s)$, и $M_{y_1 n}^L(s)$ достаточно просто находятся с помощью вычетов:

$$M_{an}(\tau) = H(\tau) \sum_{j=1}^3 A_{anj} e^{s_{nj}\tau} \quad (a = w, e_1, y_1, \nu_3), A_{anj} = \frac{N_{an}(s_{nj})}{L'_n(s_{nj})}, \quad (71)$$

$$M_{\psi n}(\tau) = -\lambda_n M_{wn}(\tau), M_{r_n}(\tau) = -\lambda_n M_{e_n}(\tau), L'_n(s) = 3b_{n0}s^2 + 2b_{n1}s + b_{n2},$$

Здесь s_{nj} нули многочлена $L_n(s)$. Предполагается, что они простые, что проверяется во время расчетов.

В качестве примера рассматриваем сосредоточенную нагрузку:

$$p(x, \tau) = f(\tau) \delta(x - x_0), \quad 0 < x_0 < 1,$$

где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Отсюда с использованием свойств дельта-функции получаем

$$p_n(\tau) = 2f(\tau) \int_0^1 \delta(x - x_0) \sin \lambda_n x dx = 2f(\tau) \sin \lambda_n x_0.$$

Тогда из (71) находим коэффициенты рядов (68):

$$w_n(\tau) = 2M_{wn}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \quad (72)$$

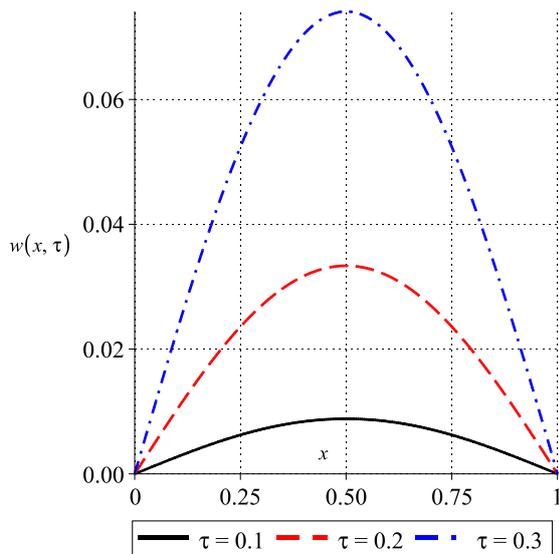
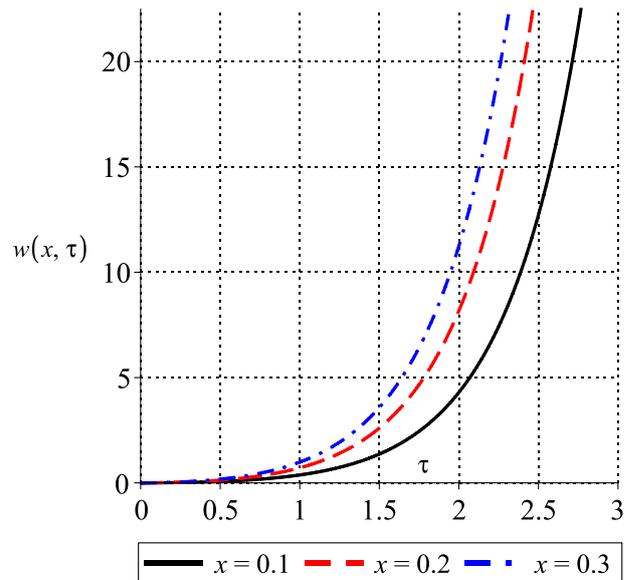
Подставляя эти равенства в (68) приходим к следующим рядам:

$$w(x, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_{wn}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n x_0 \sin \lambda_n x,$$

Положим, что нагрузка изменяется по закону $f(\tau) = H(\tau)$. При этом входящие в (72) свертки вычисляются так:

$$M_{wn}(\tau) * f(\tau) = \sum_{j=1}^3 A_{wnj} e^{s_{nj}\tau} H(\tau) * H(\tau) = H(\tau) \sum_{j=1}^3 \frac{A_{wnj}}{s_{nj}} (e^{s_{nj}\tau} - 1)$$

Результаты вычислений представлены на рис. 11 – 12 для нагрузки в центре стержня ($x_0 = 1/2$). Суммирование рядов проводится с точностью до 0.0001

Рис. 11. Зависимости $w(x, \tau)$ от x .Рис. 12. Зависимости $w(x, \tau)$ от τ .

В заключении приводятся основные результаты диссертации.

1. Построена связанная нестационарная модель, описывающая нестационарные процессы в тонких электромагнитных оболочках, пластинах и стержнях.
2. Дано решение задач о нестационарных продольных колебаниях бесконечного и конечного электромагнитоупругих стержней.
3. Проведено подробное исследование задач о нестационарном изгибе бесконечного и конечного электромагнитоупругих стержней.
4. Показано, что учет связанности задач приводит к качественному изменению напряженно-деформированного состояния тонкостенных упругих тел.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК.

1. Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д.В. Нестационарные продольные колебания электромагнитоупругого стержня // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2020. Т. 17. № 2. С. 57-65. <https://doi.org/10.31429/vestnik-17-2-57-65>.
2. Pham T.D., Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A. The Equations of Coupled Dynamics of Electromagnetoelastic Thin Shells // In: Altenbach H., Eremeyev V., Pavlov I., Porubov A. (eds) Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures. Advanced Structured Materials, vol 122. (2020) Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38708-2_17.
3. Pham T.D., Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A. Coupled Non-stationary Longitudinal Vibrations of an Infinite Electromagnetoelastic Rod // In: Gdoutos E., Konsta-Gdoutos M. (eds) Proceedings of the Third International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2020. Structural Integrity, vol 16. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_41.

Публикации в других изданиях

4. Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д.В. Взаимодействие нестационарного электромагнитного поля с тонкой упругой оболочкой // Сборник тез. докл. VI Междунар. научн. семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при взаимодействии полей различной физической природы», место издания Москва, тезисы, с. 116-117.

5. Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные колебания электромагнитоупругой пластины // Сборник тез. докл. VII Междунар. науч. сем. «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы», место издания ТРП Москва, тезисы, с. 123-124.

6. Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д.В. Связанная модель движения тонких электромагнитоупругих оболочек // Мат. XXIV Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова, место издания ООО "ТРП" М, том 1, с. 216-217.

7. Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д.В. Нестационарное движение электромагнитоупругой пластины под действием объемных сил. Лом.Чтен. Научная конференция Секция механики 16-25 апреля 2018 года. Тезисы докладов, серия Секция механики. 16-25 апреля 2018, издательство МГУ (Москва), тезисы, с. 181-181.

8. Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные колебания бесконечной электромагнитоупругой пластины. Лом.Чтен. Научная конференция Секция механики 15-25 апреля 2019 года. Тезисы докладов, серия Секция механики. 15-25 апреля 2019, издательство МГУ (Москва), тезисы, с. 201-201.

9. Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д.В. Нестационарный изгиб бесконечного электромагнитоупругого стержня // Мат. XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, место издания ООО "ТРП" Москва, том 2, тезисы, с. 139-139.

10. Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д.В. Нестационарный поперечный изгиб бесконечной электромагнитоупругой балки Бернулли-Эйлера // Мат. XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, место издания ООО "ТРП" Москва, том 2, тезисы, с. 113-114.