УДК 538.574.6

Распространение электромагнитной волны в плоскослоистом диэлектрике вблизи нуля диэлектрической проницаемости

И. С. Васильев, И. П. Козлов

Аннотация.

Рассматривается строгое решение задачи нормального падения плоской электромагнитной волны на плоскослоистый диэлектрик конечной толщины вблизи нуля диэлектрической проницаемости (ε). Приводятся результаты расчетов.

Ключевые слова: строгое решение; нормальное падение; плоская электромагнитная волна; плоскослоистый диэлектрик; ноль диэлектрической проницаемости.

Введение

Исследования задачи нормального падения электромагнитной волны на плоскослоистый диэлектрик представляют интерес из-за выявленной в нуле ε в случае среды без поглощения критической точки, вблизи которой решение качественно зависит от малых изменений параметров физической задачи [1]. При линейной зависимости $\varepsilon(z)$ в среде без поглощения средний (по времени) поток энергии $S_z = \left(\frac{c}{8\pi}\right) Re\left(E_x H_y^*\right) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где E_x и H_y напряженности электрического и магнитного полей двух ортогональных поляризаций. Вблизи нуля ε: имеет место аномалия коэффициента отражения, который почти мгновенно возрастает до единицы; поверхность $\varepsilon = const$ (при $\varepsilon \to 0$) сворачивается в точку; решение неустойчиво по направлению распространения волны θ, так возмущение $\Delta\theta_n$ при любом $\varepsilon = \varepsilon_n$ приводит к $\theta \to \pi/2$ при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_n sin^2(\Delta\theta_n) = const$ – инвариант на слое.

Введение поглощения делает математическую задачу устойчивой. Этот случай как раз и исследуется в настоящей статье, задача решается с использованием функций Эйри. В связи с выявленной критической точкой в нуле ε задача представляет как теоретический, так и практический интерес. Полученные результаты расчетов находятся в соответствии с классическими представлениями о поведении полей E_x вблизи нуля диэлектрической проницаемости [2]. Рассматривается длинноволновое приближение, которое может широко применяться на практике.

Решение задачи

Рассматривается нормальное падение плоской электромагнитной волны на изотропный неоднородный плоский слой диэлектрика с поглощением произвольной толщины от z_a до z_N при соответствующих значениях диэлектрической проницаемости ε_a и ε_N, $\varepsilon_N \sim 0$ (рис. 1). До слоя ($z < z_a$) и за слоем ($z > z_N$) среда однородная, причем за слоем имеется только проходящая волна. Слой состоит из двух частей. На первом участке от z_a до z_1 (ε_a, ε_1) диэлектрическая проницаемость зависит от координаты линейно $\varepsilon'(\mathrm{kz}) = \alpha k z + 1 - i\varepsilon''$, $\varepsilon'' = const$, $\alpha \equiv \frac{d\varepsilon}{d(kz)} = const < 0$, а на втором участке от z_1 до z_N (ε_1, ε_N) нелинейно $\varepsilon'(\mathrm{kz}) = \beta^2/[4(b+kz)^2]$, слой Рэлея [3], где $\beta = 4/gr(\varepsilon'_1)$, $|\beta| \ll 1$, $gr(\varepsilon) \equiv \frac{\alpha}{(\varepsilon')^{\frac{3}{2}}} = const$. На слое функция $\varepsilon'(z)$ непрерывна вместе с производной, где $k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны в свободном пространстве. Полученное решение позволяет при $\varepsilon_a \ll 1$ производить расчеты для малых α (при $\varepsilon_a = 1$ расчет функций Эйри ограничен по параметру kz_0).

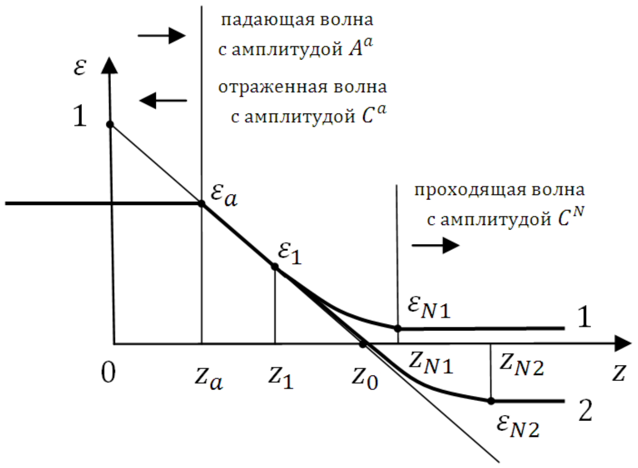

Рис. 1. Линейный слой сопряженный в окрестности нуля ε с нелинейным. Кривые 1-2 соответствуют различным аппроксимациям линейного слоя.

Будем искать решение стационарного волнового уравнения

$$\frac{d^2 E_x}{d k z^2} + \varepsilon'(\mathrm{kz}) E_x = 0, \tag{1}$$

на неоднородном слое от z_a до z_N (рис.1).

Поле на однородном полубесконечном слое при $\varepsilon = \varepsilon_a$ представим суперпозицией падающей (с амплитудой A^a) и отраженной (с амплитудой C^a) волн

$$E^{a} = A^{a} e^{-i\sqrt{\varepsilon_a'}\mathrm{k}z} + C^{a} e^{+i\sqrt{\varepsilon_a'}\mathrm{k}z}, \tag{2}$$

а поле справа от точки $z = z_N$ проходящей волной $E^N = A^N e^{-i\sqrt{\varepsilon_N'}\mathrm{k}z}$.

Пусть $z = z_0$ определяется пересечением продолжения линейного слоя с осью z. Тогда, производя замену переменных: $t' = t - i\varepsilon''(\mathrm{k}z_0)^{\frac{2}{3}}$, ($t = (\mathrm{k}z_0)^{\frac{2}{3}}\varepsilon(\mathrm{k}z)$), $\mathrm{k}z_0 = 1/\alpha$, волновое уравнение (1) при $t < t_a = (\mathrm{k}z_0 - \mathrm{k}z_a)/(\mathrm{k}z_0)^{1/3}$ принимает вид

$$\frac{d^2E_x}{dt^2} + t'E_x = 0. \tag{3}$$

Его решение будет

$$E = Gu(t') + Fv(t'), \tag{4}$$

где $u(t)$, $v(t)$ – функции Эйри в обозначениях работы [4, доп. 2], а F и G постоянные коэффициенты, причем

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(\frac{x^3}{3} - tx\right)dx, \qquad u'(t)v(t) - u(t)v'(t) = 1$$

Удовлетворение граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих полей (2), (4) и их производных справа (знак +) и слева (знак -) от точки $z = z_a$, $E|_{z_a-} = E|_{z_a+}$, $\left.\frac{dE}{dz}\right|_{z_a-} = \left.\frac{dE}{dz}\right|_{z_a+}$, приводит к неполной системе уравнений относительно коэффициента отражения R^{a0} и постоянных коэффициентов G и F:

$$1 + R^{a0} = Gu(t'_a) + Fv(t'_a), \tag{5}$$

$$-i\sqrt{\varepsilon'_a}(1 - R^{a0}) = -(\mathrm{k}z_0)^{-\frac{1}{3}}[Gu'(t'_a) + Fv'(t'_a)], \tag{6}$$

где принято $A^a e^{-i\sqrt{\varepsilon'_a}\mathrm{k}z_a} = 1$, а тогда $R^{a0} = R^a e^{2i\sqrt{\varepsilon'_a}\mathrm{k}z_a}$, $R^a = C^a/A^a$.

Исключая R^{a0} из уравнений (5), (6), получим уравнение относительно F и G

$$2i\sqrt{t'_a} = Gu_a + Fv_a,$$

где $u_a = i\sqrt{t'_a}u(t'_a) + u'(t'_a)$, $v_a = i\sqrt{t'_a}v(t_a) + v'(t'_a)$.

Для сшивания линейной и нелинейной частей слоя поле около точки $z = z_1$ справа при $\varepsilon = \varepsilon_1$ представим в виде

$$E|_{z_1+} = A^{10}(1 + R^{10}), \tag{7}$$

где A^{10}, R^{10} определяют поле в локальной системе координат с центром 01 , при $z_1 = 0$, (в системе координат с центром 0, где $z = 0$, $A^1 = A^{10} e^{+i\sqrt{\varepsilon'_1}kz}$ и $R^1 = R^{10} e^{-2i\sqrt{\varepsilon'_1}kz}$).

Аналогичным образом как в точке $z = z_a$, удовлетворение граничным условиям в точке $z = z_1$ после исключения A^{10} из полученной системы уравнений (R^{10} определяется ниже) и ряда преобразований приводит к следующим выражениям для F и G

$$G = -Bv_1,\ F = Bu_1, \tag{8}$$

где $B = \frac{2i\sqrt{t'_a}}{(u_1 v_a - u_a v_1)}$, $u_1 = fu(t'_1) - u'(t'_1)$, $v_1 = v'(t'_1) - fv(t'_1)$, $f = \frac{i\sqrt{t'_1}(1-R^{10})}{(1+R^{10})}$.

На этом заканчивается математическое решение задачи. Поле E на участке от z_a до z_1 определяется подстановкой (8) в (4), а коэффициент отражения R^{a0} находится из (5)

$$R^{a0} = Gu(t'_a) + Fv(t'_a) - 1.$$

В свою очередь поле $E|_{z_1+}$ определяется выражением (7), где

$$A^{10} = \frac{Gu(t'_1) + Fv(t'_1)}{(1+R^{10})}. \tag{9}$$

Решение для нелинейной части слоя, до слоя (при $\varepsilon' = \varepsilon'_1$) и за слоем (при $\varepsilon' = \varepsilon'_N$) среда однородная, в системе координат с центром 01, при $z_1 = 0$, через элементарные функции для коэффициента отражения R^{10} и поля $E(\varepsilon')$ на слое представляется в виде:

$$R^{01} = \frac{(h-1)[\gamma(h+1) - i\beta(h-1)]}{(h+1)^2 - 4h\beta^2},$$

$$E(\varepsilon') = A^{10}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon'}}\right)^{\beta/4}\left\{\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon}}[-1.5\beta^2 + \beta^3 + i\beta(1 - 1.5\beta^2)] + 2 - 0.5\beta^2 - i\beta\right\},$$

где $\beta = 4/gr(\varepsilon'_1)$, $|\beta| \ll 1$, $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$, $h = (\varepsilon'_1/\varepsilon'_N)^{\gamma/2}$

Отметим, что линейный слой при сдвиге фаз волны $\Delta\varphi \ll 1$ на слое в качестве длинноволнового приближения можно заменить нелинейным слоем.

Результаты расчетов

Результаты расчетов полей E(t) при $\varepsilon_a = 1$ и $\varepsilon'' = 0$ в области ε > 0 показываются на рис.2 в зависимости от толщины линейного слоя, определяемого величиной α ≡ dε/d(kz). Первый максимум поля $|E(t)|$ имеет резонансный характер. Резкое увеличение напряженности электрического поля в точке, где $\varepsilon = 0$, может привести к необходимости решения нелинейной задачи о распространении волн. Постепенное возрастание максимумов поля при увеличении толщины слоя объясняется свойством асимптотики поля [2]. Расчет показывает, что при $\varepsilon_1 = 10^{-30}$ – $|R^{10}| = 1$ (совпадение до 15 – го знака после запятой), что соответствует известной теории.

На рис. 3 дается зависимость $\varepsilon = \varepsilon(kz)$ на нелинейном участке слоя при разных значениях поглощения, определяемого мнимой частью $\varepsilon_1' = \varepsilon_1(1 - i\varepsilon'')$. Точка ε = 0 обходится как сверху при $\varepsilon > 0$, так и снизу при $\varepsilon < 0$. Проведено сравнение характеристик линейного и нелинейного слоев вблизи нуля ε при совпадении ε' в начале слоя (ε'_a и соответственно ε'_1) и Re(ε') в конце (ε_1 и соответственно ε_N). Расчеты показывают, что при $\alpha = -2.1 \times 10^{-5}$, $\varepsilon_a = 10^{-4}$, $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ в случае линейного и нелинейного слоев – $E \approx 2$, а $|R| = 0.82$. Время вычисления поля для линейного слоя на 1-2 порядка больше, чем для нелинейного слоя. Это объясняется тем, что решение для нелинейного слоя представляется через элементарные функции. На рис. 4 представлены результаты расчетов полей при изменении поглощения в линейном слое для $\varepsilon_1 = -3 \times 10^{-3}$ и менее. В области отрицательных значений ε поле E затухает по экспоненте, как это и следует из теории [4].

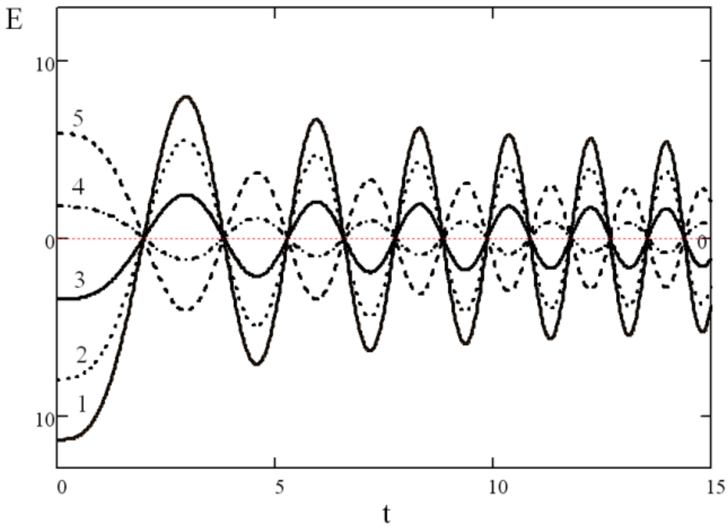

Рис. 2. Зависимость поля $E(t)$ стоячей волны, $\varepsilon'' = 0$, $\varepsilon_a = 1$, $\varepsilon_1 = 1.2\cdot10^{-5}$, от толщины линейного слоя при изменении $\alpha \equiv d\varepsilon/d(kz)$, кривые: 1 - $\alpha = -2.1\cdot10^{-5}$, 2 - $\alpha = -2.0\cdot10^{-4}$, 3 - $\alpha = -1.9\cdot10^{-2}$, 4 - $\alpha = -1.11\cdot10^{-1}$, 5 - $\alpha = -2.0\cdot10^{-3}$.

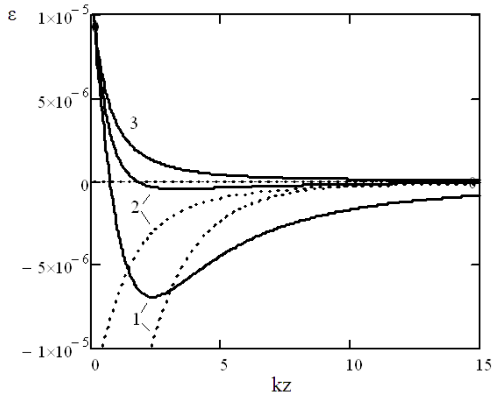

Рис. 3. Поведение функции ε(kz) при различных значениях Im(ε_1), кривые: 1 - Im(ε_1) = $2.4\cdot10^{-5}$, 2 - Im(ε_1) = $1.14\cdot10^{-5}$, 3 - Im(ε_1) = 0.

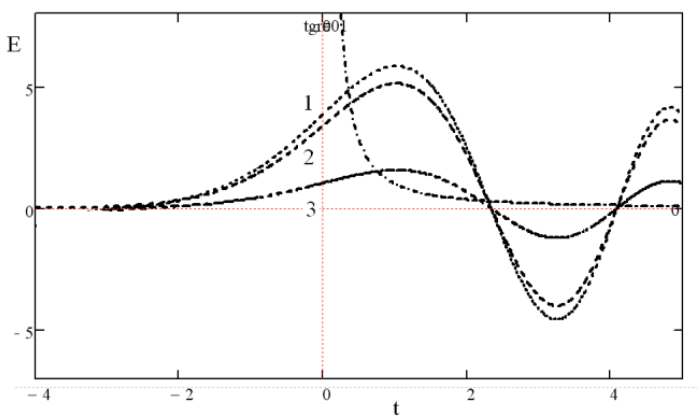

Рис. 4. Поля $E(t)$ при $\alpha = -2.1\cdot10^{-5}$, ε_a=0.12, $\varepsilon_1 = -3\cdot10^{-3}$ (t_1 = -3.9) и изменении поглощения в линейном слое: 1 - $\varepsilon'' = 0$, 2 - $\varepsilon''= -8i\cdot10^{-6}$, 3 - $\varepsilon''= -8i\cdot10^{-5}$.

Заключение

Решена задача о распространении волн в слое конечной толщины вблизи точки $\varepsilon = 0$. Расчетным путем показано, что для нормального падения волны на плоскослоистый диэлектрик с линейной функцией $\varepsilon(z)$ при малых величина $d\varepsilon/d(kz)$ напряженность поля E вблизи нуля ε может существенно возрастать. Задача о распространении волн в общем случае является нелинейной. Решение этой задачи возможно методом прогонок при использовании метода самосогласованных конечных разностей [1]. Полученное длинноволновое приближение для линейного слоя может иметь широкое применение.

Библиографический список

1. Козлов И.П. Исследование прохождения электромагнитной волной плоского слоя диэлектрика вблизи критической точки // Письма в ЖТФ. – 2000. – Т.26, Вып. 14. – С.28-35.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред // М.:Наука – 1973.
3. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука (1, 148 б) // М.:Гостехиздат – 1955.
4. В.А.Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн// М.: "Сов. радио". – 1970. – 560с.

Сведения об авторах.

Васильев Иван Сергеевич, аспирант Московского Государственного Университета Леса (государственного технического университета).Ул. Горького, 14Б, кв. 357, Королев, 141080; тел.: 762-17-31; e-mail: boy2k@list.ru

Козлов Игорь Петрович, д.т.н. Ул. Первомайская, 1, кв. 44, Мытищи-5, 141005, 516-5169.