

**На правах рукописи**



**Нгуен Зуй Хунг**

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ПОЛОСТИ С ЖИДКОСТЬЮ И  
ЗАБОРНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

**АВТОРЕФЕРАТ**  
**диссертации на соискание учёной степени**  
**кандидата технических наук**

Москва – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования (ФГБОУ ВО) «Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана» на кафедре «Космические аппараты и ракеты-носители» СМ-1.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
доцент **Темнов Александр Николаевич**.

Официальные оппоненты: **Смыслов Всеволод Игоревич**,  
доктор технических наук,  
доцент, старший научный сотрудник,  
Центральный аэрогидродинамический  
институт им. Н. Е. Жуковского (ЦАГИ)

**Григорьев Валерий Георгиевич**,  
доктор технических наук,  
профессор, старший научный сотрудник,  
ФГБОУ ВО «Московский авиационный  
институт (Национальный  
Исследовательский Университет)» (МАИ)

Ведущая организация: НИИ прикладной математики и механики  
Томского государственного университета

Защита состоится «14» декабря 2016г. в 16<sup>00</sup> на заседании диссертационного совета Д 212.125.05, созданного на базе ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125871, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте

[http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=72880](http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=72880)

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2016г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета



**Г.В. Федотенков**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность проблемы.** Задача динамики твердых тел, имеющих полости наполненные жидкостью, является классической задачей механики. В настоящее время актуальность рассматриваемой задачи подчеркивается возросшими требованиями к транспортировке полезных грузов и вынуждает создателей ракетно-космической техники предлагать новые конструкции заборных устройств (ЗУ) ракет-носителей (РН), разгонных блоков и космических аппаратов (КА). Однако влияние новых конструкций топливных отсеков, наполненных жидкостью, на динамику механических систем «твердое тело-жидкость» является по существу мало изученным.

**Целью работы** является создание математических моделей динамики твердого тела с полостью, частично наполненной жидкостью, взаимодействующей с заборными устройствами и внутрибаковыми элементами (ВБЭ). Для достижения указанной цели:

- Разработаны упрощенные конструктивные схемы опорожнения топливных баков, учитывающих влияние ЗУ на динамику жидкого наполнителя.
- Поставлены новые краевые задачи о колебаниях идеальной жидкости в осесимметричных полостях произвольной формы, с производной по времени от потенциала скорости в граничных условиях как на свободной поверхности так и на поверхности слива.
- Разработана методика решения поставленных задач для баков сферической формы.
- Разработаны математические модели динамики твердого тела с полостью, частично наполненной жидкостью, взаимодействующей с заборными устройствами и внутрибаковыми элементами.
- Составлены вычислительные программы с использованием пакета Matlab для вычисления динамических характеристик жидкости и твердого тела с жидкостью для сосудов сферической формы.

**Метод исследования.** При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные вычислительные и математические методы: вариационный метод, метод конечных элементов, метод Рунге – Кутта, метод разделения переменных и метод обобщенных потенциалов.

**Научную новизну диссертационной работы** имеют следующие результаты:

- Разработана математическая модель малых движений тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей неподвижную осесимметричную полость с заборным устройством.
- Разработаны методики вычисления собственных частот и форм волн тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в сферических полостях при наличии внутрибаковых элементов.

- Разработана математическая модель малых движений жидкости, частично заполняющей неподвижную осесимметричную полость с заборным устройством, в условиях микрогравитации.
- Исследованы малые колебания жидкости, частично заполняющей подвижную осесимметричную полость с заборными устройствами, в условиях макро и микрогравитации.
- Исследованы динамические характеристики твердого тела с жидкостью и заборными устройствами в условиях макро и микрогравитации.

**Практическая ценность.** Результаты диссертации могут быть использованы при исследовании управляемого движения проектируемых разгонных блоков, КА и РН, а так же в учебных процессах студентов, обучающихся по направлениям ракетно-космической техники.

**Достоверность полученных результатов** следует из сравнения с известными аналитическими и численными решениями, полученными для идеальной жидкости.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы доложены на международных научных конференциях, в том числе: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 2015; 50-е научные чтения памяти К.Э. Циолковского, 2015; XL академические чтения по космонавтике «Королёвские чтения 2016»; Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, 2016.

**Публикации по теме работы.** Список научных трудов по диссертационной работе составляет 8 публикаций, в том числе 4 публикации, в рецензируемых научных изданиях и журналах из перечня ВАК.

**Личный вклад работы.** Постановка задачи была проведена совместно с научным руководителем. Все результаты работы получены автором лично. Программная реализация разработанных методов и алгоритмов выполнена автором лично.

**Объем работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, выводов, списка литературы (93 наименований), содержит 156 машинописных страниц, 75 рисунков и 16 таблиц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обсуждается актуальность проблемы, научная новизна, практическая ценность и достоверность полученных результатов, а также приведены данные о структуре и объеме диссертации.

**Первая глава** состоит из пяти пунктов.

В пункте 1 первой главы представлен литературный обзор современного состояния вопросов по проблеме динамики жидкого топлива и динамических характеристик твердого тела с жидкостью. Отмечается что, значительный вклад при решении различных проблем динамики жидкого топлива и динамических характеристик твердого тела с жидкостью был внесен К. С. Колесниковым, М.

С. Натанзоном, Г. Н. Микишевым, Б. И. Рабиновичем, М. А. Ильгамовым, И. М. Рапопортом, Л. И. Балабухом, Ю. Г. Балакиревым, И. Б. Богорядом, А. Д. Брусиловским, М. С. Галкиным, В. А. Грибковым, Р. Е. Лампером, А. А. Пожалостиним, Ф. Н. Шклярчуком и многими другими.

В пункте 2 первой главы обсуждены назначение и конструкции ЗУ и капиллярных систем отбора жидкости (КСОЖ). Далее в первой главе приведены конструкции и описание работы локальной и тотальной КСОЖ в условиях микрогравитации.

В конце первой главы введены понятия поверхности слива, средней скорости на поверхности слива и упрощённые модели ЗУ и КСОЖ.

**Во второй главе** приведена постановка задачи о малых движениях идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей неподвижную осесимметричную полость и вытекающей через ЗУ. Рассмотрены задачи об определении собственных частот колебаний жидкости в сферическом баке с внутритаковыми элементами (ВБЭ).

Сформулированная задача о малых движениях жидкости, частично заполняющей неподвижную осесимметричную полость и вытекающей через ЗУ, имеет вид

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}_s} = 0 \text{ на } S, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \nabla\Phi + g\vec{w}_\Gamma \cdot \vec{n}_\Gamma = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \nabla\Phi + \gamma \frac{\partial\vec{w}_\Sigma}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (2)$$

$$\vec{w}_\Gamma = \vec{w}_\Gamma^0, \quad \vec{w}_\Sigma = \vec{w}_\Sigma^0, \quad \frac{\partial\vec{w}_\Gamma}{\partial t} = \vec{V}_\Gamma^0, \quad \frac{\partial\vec{w}_\Sigma}{\partial t} = \vec{V}_\Sigma^0 \text{ при } t = 0, \quad (3)$$

где  $\Phi(x, y, z, t)$  – потенциал скорости частиц жидкости;  $\tau$  – объем, заполненной жидкостью;  $S$  – смачиваемая поверхность;  $\Gamma_0$  – свободная поверхность (СП);  $\Sigma$  – поверхность слива (ПС);  $\vec{V}_\Gamma^{(0)}$  и  $\vec{V}_\Sigma^{(0)}$  – средние скорости жидкости в невозмущенном состоянии на свободной поверхности и на поверхности слива;  $g$  – интенсивность внешнего поля массовых сил;  $\gamma$  – обобщенный коэффициент гидравлического сопротивления ЗУ  $\gamma = \xi_{zy} V_\Sigma^{(0)}$ ;  $\xi_{zy}$  – коэффициент гидравлического сопротивления ЗУ, отнесённый к скорости  $V_\Sigma^{(0)}$ ;  $\vec{w}_\Gamma$  и  $\vec{w}_\Sigma$  – смещения частиц жидкости в возмущенном состоянии на свободной поверхности и на поверхности слива;  $\vec{w}_\Gamma^0$ ,  $\vec{w}_\Sigma^0$ ,  $\vec{V}_\Gamma^0$  и  $\vec{V}_\Sigma^0$  – начальные значения смещений и скоростей частиц жидкости в возмущенном состоянии;  $\vec{n}_s$ ,  $\vec{n}_\Gamma$  и  $\vec{n}_\Sigma$  – внешние нормали к смачиваемой, свободной поверхностям и поверхности слива.

В граничных условиях (2), второе условие учитывает изменение давления при отклонениях скорости частиц жидкости от невозмущенных значений  $V_\Sigma^{(0)}$  на поверхности слива.

Далее введены безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{R_0}, \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{gR_0}}, \bar{V}_{0\Gamma} = \frac{V_{0\Gamma}}{\sqrt{gR_0}}, \bar{r}_0 = \frac{r_0}{R_0}, \bar{r}_\Sigma = \frac{r_\Sigma}{R_0},$$

$$\bar{t} = \frac{t}{\sqrt{R_0/g}}, \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{R_0\sqrt{gR_0}}, \bar{G} = \frac{V_{0\Gamma}r_0^2}{R_0^2\sqrt{gR_0}}, \quad (4)$$

( $V_{0\Gamma} = -V_{\Gamma}^{(0)}, V_{0\Sigma} = -V_{\Sigma}^{(0)}$ ,  $\bar{G}$  - безразмерный расход,  $r_0, r_\Sigma$  - радиус СП и ПС) и приведена постановка задачи о малых движениях жидкости, вытекающей через ЗУ из сферической полости радиусом  $R_0$  в цилиндрической системе координат  $(r, \eta, z)$ . Дальше знак «-» над безразмерными переменными будем опускать.

Искомый потенциал скорости  $\Phi(r, \eta, z, t)$  в этом случае был представлен суммой двух потенциалов  $\Phi^{(1)}(r, \eta, z, t)$  и  $\Phi^{(2)}(r, \eta, z, t)$

$$\Phi^{(1)}(r, \eta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^{(1)}(r, \eta, z) \cdot \dot{s}_m(t), \quad \Phi^{(2)}(r, \eta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^{(2)}(r, \eta, z) \cdot \dot{p}_m(t), \quad (5)$$

где пространственная часть  $\Phi_m^{(1)}(r, \eta, z)$  - решение спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости с свободной поверхностью  $\Gamma_0$  и смачиваемыми поверхностями S и  $\Sigma$

$$\Delta\Phi_m^{(1)} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi_m^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Sigma, \quad \frac{\partial\Phi_m^{(1)}}{\partial z} = \lambda_m^{(1)}\Phi_m^{(1)} \text{ на } \Gamma_0, \quad (6)$$

$\lambda_m^{(1)}$  - собственное значение задачи (6), а  $\Phi_m^{(2)}(r, \eta, z)$  есть решение спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости со свободной поверхности  $\Sigma$  и смачиваемыми поверхностями S и  $\Gamma_0$

$$\Delta\Phi_m^{(2)} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi_m^{(2)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Gamma_0, \quad \frac{\partial\Phi_m^{(2)}}{\partial n} = \lambda_m^{(2)}\Phi_m^{(2)} \text{ на } \Sigma, \quad (7)$$

$\lambda_m^{(2)}$  - собственное значение задачи (7),  $s_m(t), p_m(t)$  - неизвестные функции времени, имеющие смысл обобщенных координат, характеризующих волновые движения жидкости на СП и на ПС.

Уравнения для обобщенных координатах  $s_{mn}(t)$  и  $p_{mn}(t)$  ( $n$  - номер тона) получены из граничных условий (2) на СП и ПС после подстановки полученного потенциала скорости  $\Phi(r, \eta, z, t)$  в граничные условия, умножения

на  $\left(\frac{\partial\Phi_{mn}^{(1)}(r, \eta, z)}{\partial z}\right)$ ,  $\left(\frac{\partial\Phi_{mn}^{(2)}(r, \eta, z)}{\partial z}\right)$  и интегрирования по СП и ПС,

соответственно

$$\mu_{mn}^{(1s)}\ddot{s}_{mn} + \mu_{mn}^{(1p)}\ddot{p}_{mn} + V_{0\Gamma}\delta_{mn}^{(1)}\dot{s}_{mn} + V_{0\Gamma}\varepsilon_{mn}^{(1)}\dot{p}_{mn} + c_{mn}s_{mn} = 0,$$

$$\mu_{mn}^{(2p)}\ddot{p}_{mn} + \mu_{mn}^{(2s)}\ddot{s}_{mn} + V_{0\Gamma}\varepsilon_{mn}^{(2)}\dot{s}_{mn} + [V_{0\Gamma}\delta_{mn}^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma)\sigma_{mn}^{(2)}]\dot{p}_{mn} = 0, \quad (8)$$

$$(m = 0, 1, 2, n = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $\mu_{mn}^{(1s)}, \mu_{mn}^{(1p)}, \delta_{mn}^{(1)}, \varepsilon_{mn}^{(1)}, c_{mn}, \mu_{mn}^{(2p)}, \mu_{mn}^{(2s)}, \varepsilon_{mn}^{(2)}, \delta_{mn}^{(2)}, \sigma_{mn}^{(2)}$  - гидродинамические коэффициенты, полученные при интегрировании.

Для определения собственных частот жидкости предполагаем что обобщенные координаты зависят от времени следующим образом

$$s_{mn} = A_{(s)mn} e^{\Omega t}, p_{mn} = A_{(p)mn} e^{\Omega t}. \quad (9)$$

Здесь  $\Omega$  - комплексный коэффициент затухания волновых движений жидкости,  $A_{(s)mn}$  и  $A_{(p)mn}$  - амплитуды колебаний.

После подстановки выражений (9) в систему дифференциальных уравнений (8) получаем систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_{(s)mn}$  и  $A_{(p)mn}$ . Равенство нулю определителя полученной системы уравнений приводит к характеристическому уравнению третьего порядка относительно параметра  $\Omega$ . Это уравнение имеет две ветви решений: действительные корни  $\Omega_1$  и ветвь комплексно-сопряженных корней  $\Omega_2, \Omega_3$ . Результаты численного расчета характеристического уравнения при радиусе ПС  $r_2 = 0,5$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$  в зависимости от глубины жидкости  $h$ , коэффициента проводимости  $\beta = \gamma^{-1}$  и расхода топлива  $G$  представлены на рис. 1-2.

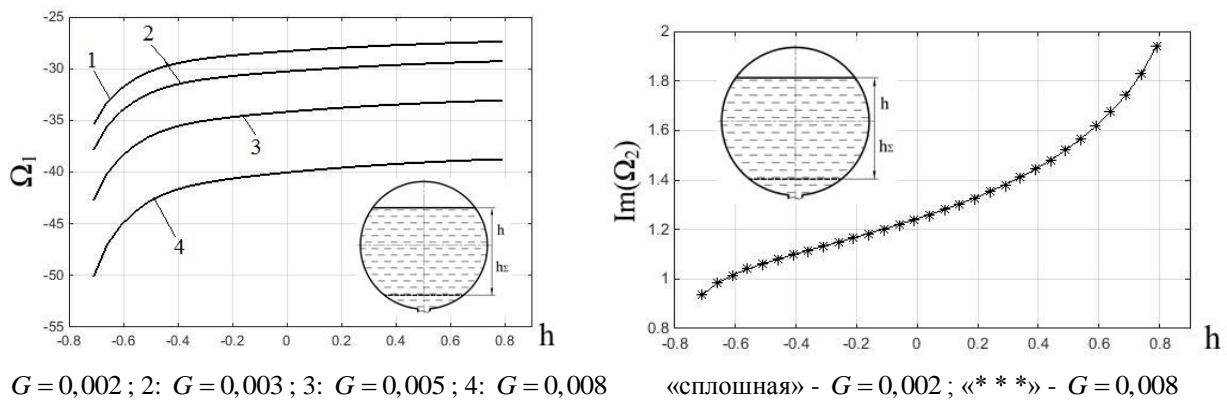


Рис. 1. Зависимости  $\Omega_1$  и мнимой части  $\Omega_2$  от глубины жидкости  $h$  при  $\beta = 0,2$

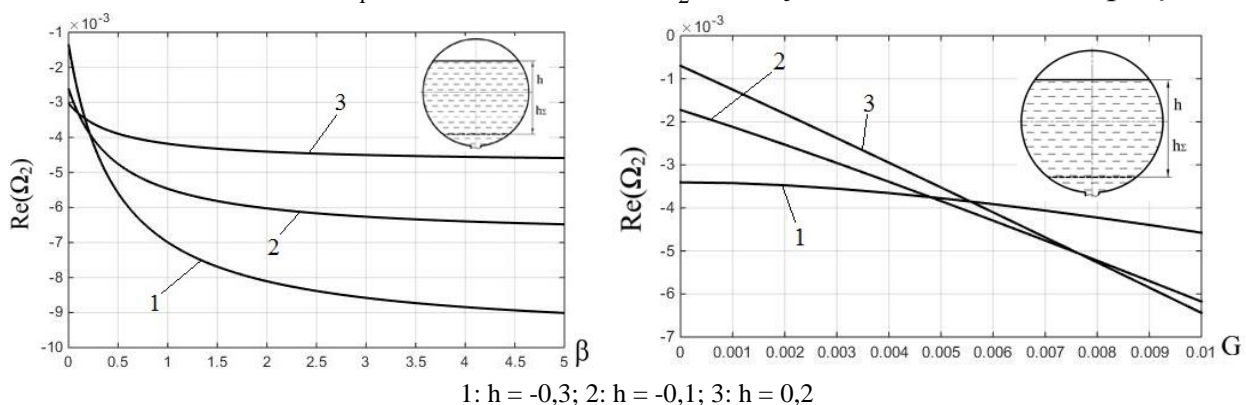
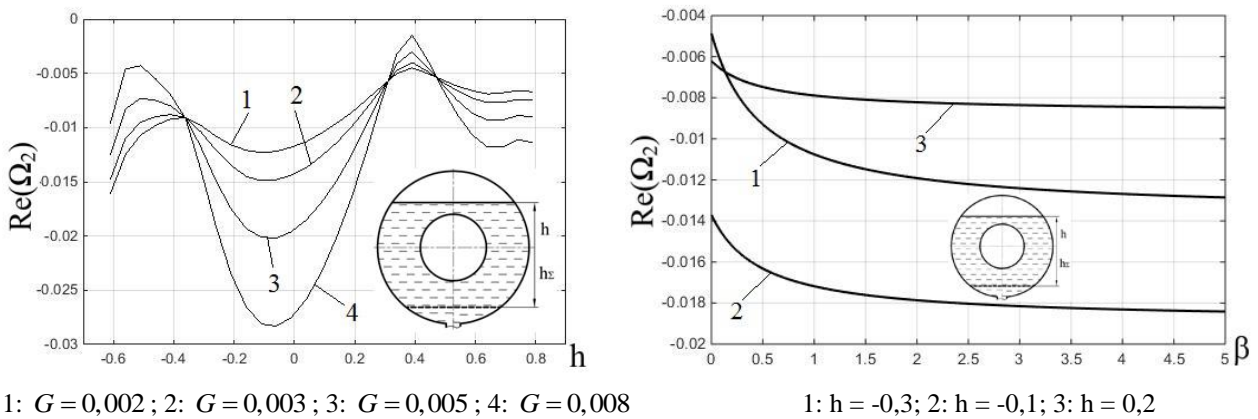


Рис. 2. Зависимости действительной части  $\Omega_2$  от  $\beta$  при  $G = 0,005$  и от  $G$  при  $\beta = 0,2$

В четвертом пункте так же приведена постановка задачи о малых движениях жидкости, вытекающей через ЗУ из полости между двумя концентрическими сферами с радиусами  $R_{01}$  и  $R_0$ . Результаты численного расчета характеристического уравнения в этом случае в зависимости от

глубины жидкости  $h$ , коэффициента проводимости  $\beta = \gamma^{-1}$  и расхода топлива  $G$  при радиусе  $r_{\Sigma} = 0,5$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$  и  $R_{01} / R_0 = 0,4$  представлены на рис. 3.

Приведённые расчеты по определению собственных чисел движений рассматриваемой механической системы позволили выполнить анализ расположения собственных чисел. Для лучшего понимания результатов расчёта модельных задач на рис.4 приведено расположение значений  $\Omega_k$ , ( $k=1,2,3$ ) при  $m = 1$ ,  $n = 1,2,3, \dots$  на комплексной плоскости и отвечающие  $m = 1$ ,  $n = 1$  формы колебаний.



1:  $G = 0,002$ ; 2:  $G = 0,003$ ; 3:  $G = 0,005$ ; 4:  $G = 0,008$

1:  $h = -0,3$ ; 2:  $h = -0,1$ ; 3:  $h = 0,2$

Рис.3. Зависимости действительной части  $\Omega_2$  от  $h$  при  $\beta = 0,2$ , от  $\beta$  при  $G = 0,005$

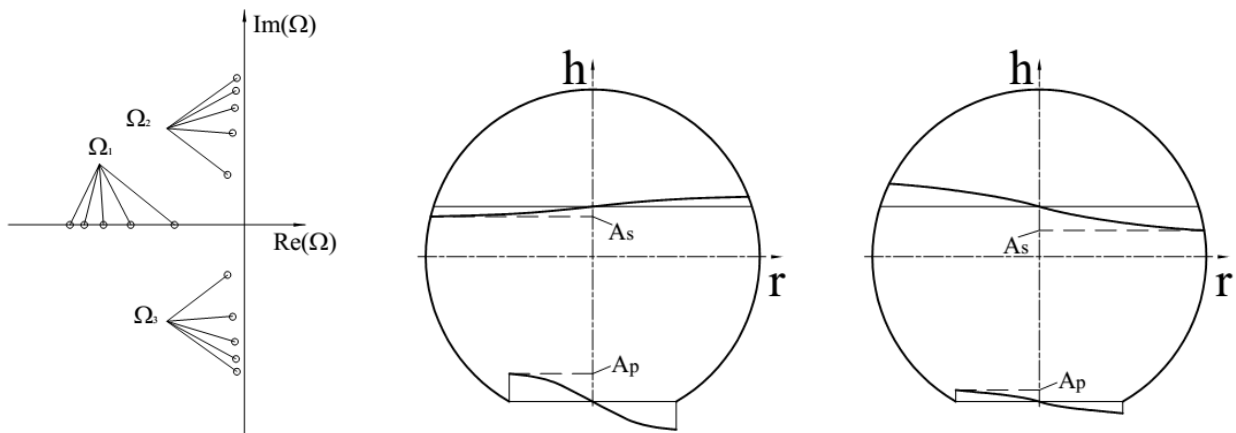


Рис. 4. Расположение собственных чисел на комплексной плоскости ( $m = 1$ ,  $n = 1,2,3, \dots$ ) и формы колебаний жидкости ( $m = 1$ ,  $n = 1$ ) при  $r_{\Sigma} = 0,5$ ,  $h = 0,2$

В последнем пункте второй главы приведены решения задач о собственных колебаниях жидкости в сферических полостях с ВБЭ. В данном пункте реализованы метод Рунца и метод конечных элементов на основании вариационной формулировки. Приведённые расчеты по определению собственных чисел позволили выполнить анализ влияния ВБЭ на колебания жидкости.



**В третьей главе** диссертации исследовались малые движения капиллярной идеальной жидкости в условиях микрогравитации в неподвижной осесимметричной полости с ЗУ.

В первом пункте представлена система уравнений свободной осесимметричной поверхности равновесия жидкости, частично заполняющей сферическую полость, в невозмущенном состоянии при действии слабой гравитационной силы и силы поверхностного натяжения жидкости. Эта система уравнений решена численным методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Во втором пункте приведена постановка задачи о малых движениях капиллярной жидкости в осесимметричной полости с ЗУ в условиях микрогравитации. Сформулированная задача для потенциала скоростей имеет вид

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_s} = 0 \text{ на } S, \quad (10)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \nabla\Phi + \frac{\sigma}{\rho}(aN - \Delta_\Gamma N) = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \nabla\Phi + \gamma \cdot \frac{\partial\vec{w}}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (12)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \nu} + \mu N = 0 \text{ на } l, \quad (13)$$

$$\vec{w}_\Gamma = \vec{w}_\Gamma^0, \quad \vec{w}_\Sigma = \vec{w}_\Sigma^0, \quad \frac{\partial\vec{w}_\Gamma}{\partial t} = \vec{V}_\Gamma^0, \quad \frac{\partial\vec{w}_\Sigma}{\partial t} = \vec{V}_\Sigma^0 \text{ при } t = 0, \quad (14)$$

где  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $\rho$  - плотность жидкости,  $a = \left( \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial\Pi}{\partial n_\Gamma} - k_1^2 - k_2^2 \right) N$ ,  $\Pi$  - потенциальная энергия,  $N$  - отклонение свободной поверхности по нормали,  $\Delta_\Gamma$  - оператор Лапласа – Бельтрами на  $\Gamma_0$ ,  $l$  - линия пересечения  $\Gamma_0$  с стенкой бака,  $\nu$  - внешняя нормаль к контуру  $l$  в плоскости, касательной к  $\Gamma_0$ ,  $\mu = \frac{k_1 \cos \gamma_0 - k}{\sin \gamma_0}$ ,  $k$  - кривизна меридионального сечения бака,  $k_1$  и  $k_2$  - главные кривизны поверхности  $\Gamma_0$ , причем  $k_1$  - кривизна линии пересечения  $\Gamma_0$  с вертикальной плоскостью,  $\gamma_0$  - угол смачивания.

В качестве примеров рассмотрены задачи о собственных движениях капиллярной жидкости, вытекающей через ЗУ из сферической полости с радиусом  $R_0$  при наличии СП, в условиях микрогравитации. ПС представляет собой полную смачиваемую сферическую, имитирующую тотальную КСОЖ, и плоскую поверхность, имитирующую локальную КСОЖ.

Введены безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{R_0}, \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{\sigma/\rho R_0}}, \bar{V}_{0\Gamma} = \frac{V_{0\Gamma}}{\sqrt{\sigma/\rho R_0}}, \bar{V} = \frac{V}{4\pi R_0^3/3},$$

$$\bar{t} = \frac{t}{\sqrt{\rho R_0^3/\sigma}}, \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{\sqrt{\sigma R_0/\rho}}, \bar{G} = \frac{V_{0\Gamma} r_A^2}{R_0^2 \sqrt{\sigma/\rho R_0}},$$
(15)

( $V$  – объем жидкости) и приведена постановка таких задач в цилиндрической системе координат. Дальше знак «-» над безразмерными переменными будем опускать.

Искомый потенциал скорости  $\Phi(r, \eta, z, t)$  в этих случаях так же был представлен суммой двух потенциалов (5), где пространственная часть  $\Phi_m^{(2)}(r, \eta, z)$  - решение спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости с СП  $\Sigma$  и смачиваемыми поверхностями  $S$  и  $\Gamma_0$  (7), а  $\Phi_m^{(1)}(r, \eta, z)$  есть решение спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости с СП  $\Gamma_0$  и смачиваемыми поверхностями  $S$  и  $\Sigma$

$$\Delta \Phi_m^{(1)} = 0 \text{ в } \tau, \frac{\partial \Phi_m^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Sigma,$$

$$\frac{\partial \Phi_m^{(1)}}{\partial n} = \lambda_m^{(1)} B_m^{-1} \Phi_m^{(1)} \text{ на } \Gamma_0, \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial \Phi_m^{(1)}}{\partial n} + \mu \frac{\partial \Phi_m^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } l. \quad (16)$$

Здесь  $B_m^{-1}$  - оператор, обратный к неограниченному самосопряженному оператору потенциальной энергии  $B_m$ ,  $\lambda_m^{(1)}$  - собственное значение задачи (16).

Характеристическое уравнение для собственных движений капиллярной жидкости также имеет вид уравнения третьего порядка. Результаты численного расчета этого уравнения для случая сферической поверхности слива при  $m = 1$ ,  $n = 1$ , угле смачивания  $\gamma_0 = 80^\circ$ , различных коэффициента  $\beta = \gamma^{-1}$ , расхода  $G$ , объемов  $V$ , числа Бонда  $Bo$  представлены на рис. 5 и 6 (кривая 1:  $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; кривая 2:  $V = 0,5659$ ,  $Bo = 0,1$ ; кривая 3:  $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; кривая 4:  $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$ ).

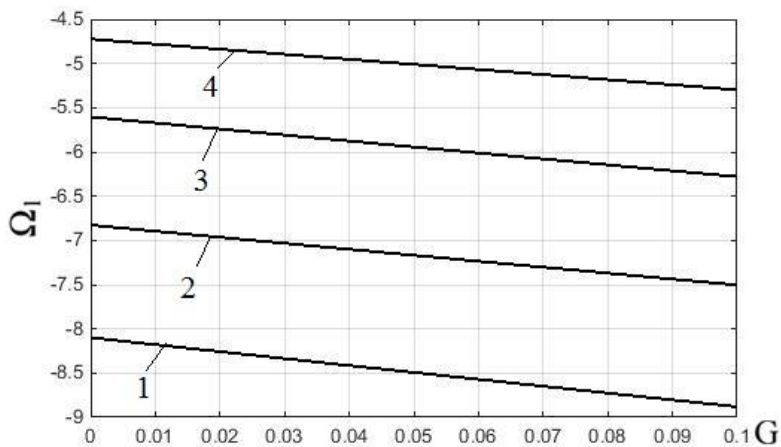


Рис.5. Зависимости  $\Omega_1$  от  $G$  при  $\beta = 0,2$

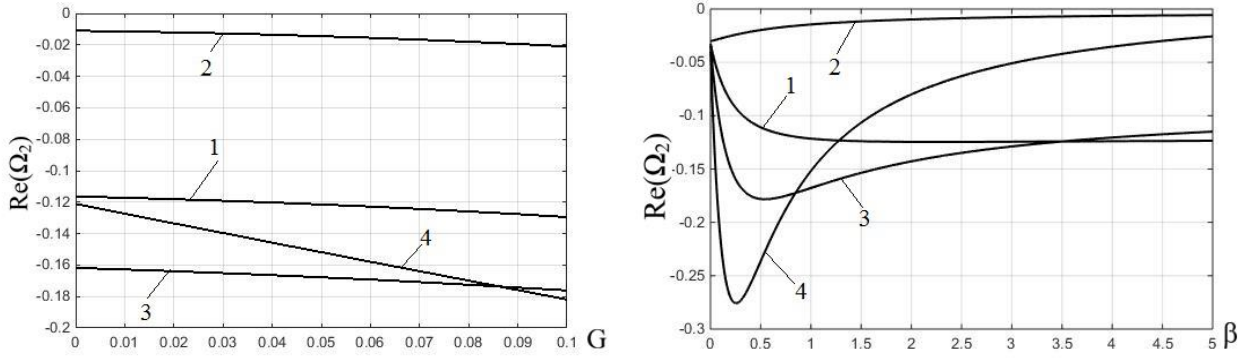


Рис.6. Зависимости действительной части  $\Omega_2$  от  $G$  при  $\beta = 0,2$  и от  $\beta$  при  $G = 0,05$

На рис. 7 приведены результаты численного расчета характеристического уравнения для случая плоской поверхности слива с радиусом  $r_{\Sigma} = 0,5$  при  $m = 1$ ,  $n = 1$ . (кривая 1:  $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; кривая 2:  $V = 0,5659$ ,  $Bo = 0,1$ ; кривая 3:  $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; кривая 4:  $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$ )

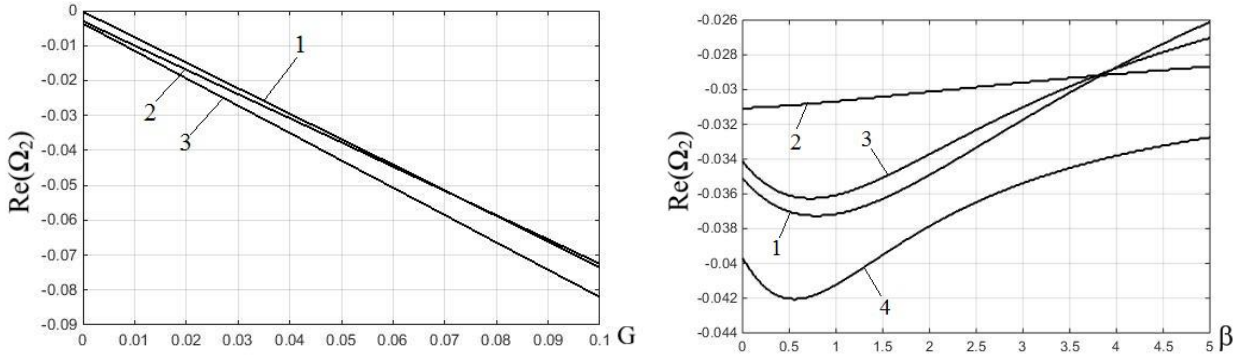


Рис.7. Зависимости действительной части  $\Omega_2$  от  $G$  при  $\beta = 0,2$  и от  $\beta$  при  $G = 0,05$

**В четвертой главе** исследованы динамические характеристики твердого тела, имеющего осесимметричную полость с вытекающей жидкостью и заборными устройствами.

Эволюционная задача о малых движениях жидкости, частично заполненной подвижной осесимметричную полость и вытекающей через заборное устройство, в подвижной системе координат имеет вид

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_s} = \left[ \dot{u} + (\dot{\mathcal{G}} \times \vec{r}) \right] \cdot \vec{n}_s \text{ на } S, \quad (17)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V}_{\Gamma}^{(0)} \cdot \nabla\Phi + g\vec{w}_{\Gamma} \cdot \vec{n}_{\Gamma} - \vec{V}_{\Gamma}^{(0)} \cdot \vec{V}_e = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V}_{\Sigma}^{(0)} \cdot \nabla\Phi + \gamma \cdot \frac{\partial\vec{w}_{\Sigma}}{\partial t} \cdot \vec{n}_{\Sigma} - \vec{V}_{\Sigma}^{(0)} \cdot \vec{V}_e = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (19)$$

$$\vec{w}_{\Gamma} = \vec{w}_{\Gamma}^0, \quad \vec{w}_{\Sigma} = \vec{w}_{\Sigma}^0, \quad \frac{\partial\vec{w}_{\Gamma}}{\partial t} = \vec{V}_{\Gamma}^0, \quad \frac{\partial\vec{w}_{\Sigma}}{\partial t} = \vec{V}_{\Sigma}^0 \text{ при } t = 0, \quad (20)$$

где  $\Phi(x, y, z, t)$  – потенциал абсолютной скорости частиц жидкости;  $\vec{V} = \nabla\Phi$  – вектор абсолютной скорости частиц жидкости;  $\vec{w}_\Gamma$  и  $\vec{w}_\Sigma$  – абсолютные смещения жидкости в возмущенном состоянии на СП и ПС;  $\vec{u}$  – поступательное смещение связанной системы (тела) относительно инерционной системы,  $\vec{\theta}$  – угол малого поворота связанной системы вокруг своего полюса,  $\vec{r}$  – вектор-радиус точки в подвижной системе,  $\vec{V}_e$  – переносная скорость.

Искомый потенциал абсолютной скорости  $\Phi(r, \eta, z, t)$  в этих случаях представлен суммой четырех слагаемых

$$\Phi(x, y, z, t) = \dot{\vec{u}} \cdot \vec{r} + \dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{\Psi}(x, y, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(1)}(x, y, z) \dot{s}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(2)}(x, y, z) \dot{p}_n(t) \quad (21)$$

где  $\vec{\Psi}(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \Psi_i(x, y, z) \vec{e}_i$  – неизвестная, подлежащая определению векторная функция,  $\Phi_n^{(1)}(x, y, z)$ ,  $\Phi_n^{(2)}(x, y, z)$  – собственные функции, определяемые из задач на собственные значения типа (6) и (7) при  $m = 1$ . Для случая определения  $\Psi_i(x, y, z)$  с использованием граничного условия типа «жесткой» («примороженной») крышки, имеем краевые задачи

$$\Delta \Psi_i = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = \vec{e}_i \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \quad (i=1,2,3) \text{ на } S \cup \Gamma_0 \cup \Sigma. \quad (22)$$

Используя граничные условия (18) и (19) с учетом потенциала абсолютной скорости в виде (21) получены уравнения движения жидкости в подвижной полости в обобщенных координатах  $s_n(t)$ ,  $p_n(t)$

$$\begin{aligned} \mu_n^{(1s)} \ddot{s}_n + V_\Gamma^{(0)} \delta_n^{(1)} \dot{s}_n + c_n s_n + \mu_n^{(1p)} \ddot{p}_n + V_\Gamma^{(0)} \varepsilon_n^{(1)} \dot{p}_n + \vec{\lambda}_n^{(1)} \cdot \ddot{\vec{u}} + \vec{\lambda}_{0n}^{(1)} \cdot \ddot{\vec{\theta}} + \vec{\lambda}_{1n}^{(1)} \cdot \dot{\vec{\theta}} = 0, \\ \mu_n^{(2p)} \ddot{p}_n + \left[ V_\Gamma^{(0)} \delta_n^{(2)} + (-V_\Sigma^{(0)} + \gamma) \sigma_n^{(2)} \right] \dot{p}_n + \mu_n^{(2s)} \ddot{s}_n + V_\Gamma^{(0)} \varepsilon_n^{(2)} \dot{s}_n + \vec{\lambda}_n^{(2)} \cdot \ddot{\vec{u}} + \\ + \gamma \vec{\lambda}_n^* \cdot \dot{\vec{u}} + \vec{\lambda}_{0n}^{(2)} \cdot \dot{\vec{\theta}} + \gamma \vec{\lambda}_{1n}^{(2)} \cdot \dot{\vec{\theta}} = 0, \quad n=1,2,3, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\mu_n^{(1s)}$ ,  $\mu_n^{(1p)}$ ,  $\delta_n^{(1)}$ ,  $\varepsilon_n^{(1)}$ ,  $c_n$ ,  $\vec{\lambda}_n^{(1)}$ ,  $\vec{\lambda}_{0n}^{(1)}$ ,  $\vec{\lambda}_{1n}^{(1)}$ ,  $\mu_n^{(2p)}$ ,  $\mu_n^{(2s)}$ ,  $\varepsilon_n^{(2)}$ ,  $\delta_n^{(2)}$ ,  $\sigma_n^{(2)}$ ,  $\vec{\lambda}_n^{(2)}$ ,  $\vec{\lambda}_n^*$ ,  $\vec{\lambda}_{0n}^{(2)}$ ,  $\vec{\lambda}_{1n}^{(2)}$  – гидродинамические коэффициенты, полученные при интегрировании.

Уравнения движения твердого тела с полостью, содержащей жидкость и ЗУ, получены при использовании теорем об изменении количества движения и об изменении момента количества относительного движения твердого тела и имеют вид

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{u}} + \gamma \rho \int_{\Sigma} \dot{\vec{u}} d\Sigma + m \ddot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_c + \gamma \rho \int_{\Sigma} \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r} d\Sigma + \rho \int_{\tau} \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} d\tau + \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{V}_{r\Sigma} d\Sigma = \vec{F}^{(e)}, \\ J_1 \ddot{\vec{\theta}} + \rho \int_{\tau} \vec{r} \times (\ddot{\vec{\theta}} \times \vec{r}) d\tau + \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \times (\dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}) d\Sigma - mg \vec{r}_c \times (\vec{\theta} \times \vec{e}_3) + m \vec{r}_c \times \ddot{\vec{u}} + \\ + \gamma \rho \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \dot{\vec{u}}) d\Sigma + \rho \int_{\tau} \vec{r} \times \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} d\tau + \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{V}_{r\Sigma} d\Sigma + \rho g \int_{\Gamma} (\vec{r} \times \vec{e}_3) \xi_r d\Gamma_0 = \vec{M}^{(e)}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $m$  – суммарная масса «тело + жидкость»,  $\vec{r}_c$  – радиус – вектор центра масс «тело + затвердевшая жидкость» в подвижной системе,  $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_e$  – относительная скорость частиц жидкости,  $J_1$  – тензор моментов инерции твердого тела относительно полюса,  $\vec{e}_3$  – норм оси  $Oz$ ,  $\xi_r$  – проекция относительного смещения свободной поверхности на оси  $Oz$ ,  $\vec{F}^{(e)}$  – главный вектор всех внешних сил приложенных к телу,  $\vec{M}^{(e)}$  – главный момент всех внешних сил относительно полюса.

Выразив вектор относительной скорости через вектор абсолютной скорости, из системы (24) после использования теоремы Гаусса-Остроградского, граничных условий (22) и интегрирования, получим уравнения малых движений твердого тела с жидкостью, вытекающей через ЗУ

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{u}} + \gamma\beta_0\dot{\vec{u}} + L \cdot \ddot{\vec{g}} + \gamma\lambda_0 \cdot \dot{\vec{g}} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^{(2)} \ddot{p}_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^* \dot{p}_n = \vec{F}^{(e)}, \\ (J_1 + J_2) \cdot \ddot{\vec{g}} + \gamma\beta \cdot \dot{\vec{g}} - L^* \cdot \vec{g} + \bar{L} \cdot \ddot{\vec{u}} + \gamma\bar{\lambda}_0 \cdot \dot{\vec{u}} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n}^{(1)} \dot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \\ + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n}^{(2)} \dot{p}_n = \vec{M}^{(e)}, \end{aligned} \quad (25)$$

где слагаемые тензора присоединенных моментов инерции жидкости  $J_2$ , тензоров  $L$ ,  $\lambda_0$ ,  $\beta$ ,  $L^*$  ( $\bar{L} = -L$ ,  $\bar{\lambda}_0 = -\lambda_0$ ) и коэффициенты демпфирования  $\beta_0$  получены при интегрировании.

В девятом пункте рассмотрена задача о малых колебаниях физического маятника, вращающегося вокруг оси  $O_1x_1$ , со сферической полостью, частично заполненной жидкостью, вытекающей через ЗУ. Используя безразмерные переменные (4) и цилиндрические координаты  $(r, \eta, z)$  и сферические координаты  $(R, \theta, \eta)$  с началом в центре сферы получена задача для определения потенциала абсолютных скоростей

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial R} = \dot{g}L \sin\theta \sin\eta \text{ на } S, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \int \frac{\partial\Phi}{\partial z} dt + V_{0\Gamma} \cdot V_{ez} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Sigma} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial z} + (\gamma + V_{0\Sigma}) \cdot V_{ez} = 0 \text{ на } \Sigma, \\ \Phi(r, \eta, z, t) = \Phi^{(0)} \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где потенциал абсолютных скоростей  $\Phi(r, \eta, z, t)$  находится в виде

$$\Phi(r, \eta, z, t) = \dot{g}(t) \cdot \Psi_1(r, \eta, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(1)}(r, \eta, z) \dot{s}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(2)}(r, \eta, z) \dot{p}_n(t), \quad (27)$$

$V_{ez}$  - проекция вектора  $\vec{V}_e$  на оси  $Oz$ ,  $L$  – безразмерное расстояние от полюса до центра бака.

После определения потенциала абсолютных скоростей с учетом следующих безразмерных величины

$$\bar{J} = \frac{J}{\rho R_0^5}, \bar{\beta} = \frac{\beta}{\rho R_0^4}, \bar{m} = \frac{m}{\rho R_0^3}, \bar{z}_c = \frac{z_c}{R_0}, \bar{M}^{(e)} = \frac{M^{(e)}}{\rho g R_0^4}, \quad (28)$$

уравнение вращения системы «тело – жидкость» вокруг оси  $O_1x_1$  будет

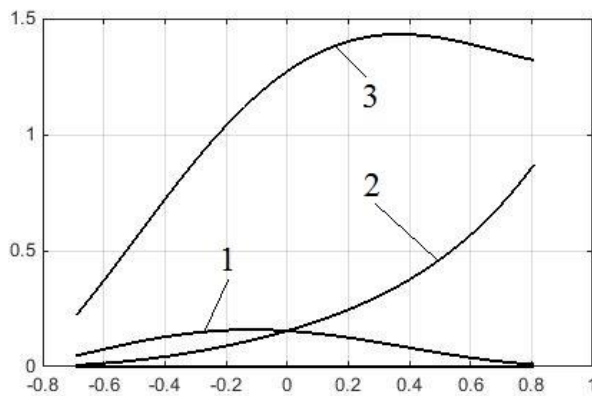
$$(J_1 + J_2)\ddot{\vartheta} + \gamma\beta\dot{\vartheta} - m z_{1c}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(1)}\ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(1)}s_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(2)}\ddot{p}_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(2)}\dot{p}_n = M^{(e)},$$

$$\mu_n^{(1s)}\ddot{s}_n + V_{0\Gamma}\delta_n^{(1)}\dot{s}_n + c_n s_n + \mu_n^{(1p)}\ddot{p}_n + V_{0\Gamma}\varepsilon_n^{(1)}\dot{p}_n + \lambda_{0n}^{(1)}\ddot{\vartheta} + \lambda_{1n}^{(1)}\dot{\vartheta} = 0, \quad (29)$$

$$\mu_n^{(2p)}\ddot{p}_n + [V_{0\Gamma}\delta_n^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma)\sigma_n^{(2)}]\dot{p}_n + \mu_n^{(2s)}\ddot{s}_n + V_{0\Gamma}\varepsilon_n^{(2)}\dot{s}_n + \lambda_{0n}^{(2)}\ddot{\vartheta} + \gamma\lambda_{1n}^{(2)}\dot{\vartheta} = 0.$$

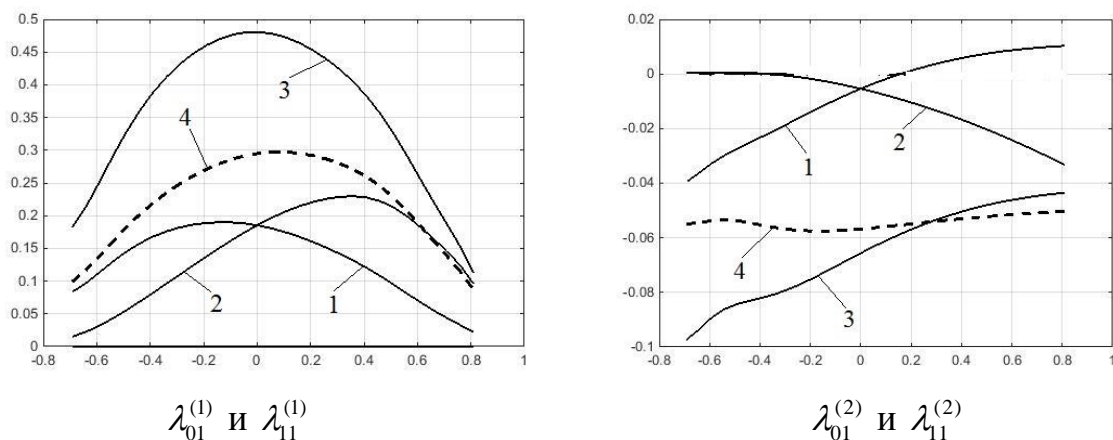
(Знак «-» над безразмерными коэффициентами уже опущены)

На рис.8 и рис.9 представлены изменения присоединенного момента инерции жидкости  $J_2$  и коэффициентов  $\lambda_{01}^{(1)}$  и  $\lambda_{11}^{(1)}$ ,  $\lambda_{01}^{(2)}$  и  $\lambda_{11}^{(2)}$  от глубины жидкости  $h$  при радиусе поверхности слива  $r_\Sigma = 0,5$ .



1 – относительно центра бака; 2 - относительно свободной поверхности; 3 – относительно полюса  $O_1$  при  $L = 1$

Рис. 8. Изменение момента инерции жидкости  $J_2$  от глубины жидкости  $h$



$\lambda_{01}^{(1)}$  и  $\lambda_{11}^{(1)}$

$\lambda_{01}^{(2)}$  и  $\lambda_{11}^{(2)}$

1 –  $\lambda_{01}^{(1)}(\lambda_{01}^{(2)})$  относительно центра бака; 2 -  $\lambda_{01}^{(1)}(\lambda_{01}^{(2)})$  относительно свободной поверхности; 3 –  $\lambda_{01}^{(1)}(\lambda_{01}^{(2)})$  относительно полюса  $O_1$  при  $L = 1$ ; 4 -  $\lambda_{11}^{(1)}(\lambda_{11}^{(2)})$

Рис. 9. Изменение коэффициентов  $\lambda_{01}^{(1)}(\lambda_{01}^{(2)})$  и  $\lambda_{11}^{(1)}(\lambda_{11}^{(2)})$  от глубины жидкости  $h$

Далее рассмотрено собственное движение рассматриваемой механической системы т.е.  $M^{(e)} = 0$ . С учетом только главного тона ( $n=1$ ), были приняты  $s_1 = s_1^0 e^{\Omega t}$ ,  $p_1 = p_1^0 e^{\Omega t}$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 e^{\Omega t}$ . Характеристическое уравнение системы (29) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} \mu_1^{(1s)}\Omega^2 + V_{0r}\delta_1^{(1)}\Omega + c_1 & \mu_1^{(1p)}\Omega^2 + V_{0r}\varepsilon_1^{(1)}\Omega & \lambda_{01}^{(1)}\Omega^2 + \lambda_{11}^{(1)} \\ \mu_1^{(2s)}\Omega^2 + V_{0r}\varepsilon_1^{(2)}\Omega & \mu_1^{(2p)}\Omega^2 + [V_{0r}\delta_1^{(2)} + (V_{0\sigma} + \gamma)\sigma_1^{(2)}]\Omega & \lambda_{0n}^{(2)}\Omega^2 + \gamma\lambda_{1n}^{(2)}\Omega \\ \lambda_{01}^{(1)}\Omega^2 + \lambda_{11}^{(1)} & \lambda_{01}^{(2)}\Omega^2 + \gamma\lambda_{11}^{(2)}\Omega & (J_1 + J_2)\Omega^2 + \gamma\beta\Omega - m_{z_{1c}} \end{vmatrix} = 0 \quad (30)$$

Уравнение (30) имеет три ветви решений: действительные корни  $\Omega_1$  и две ветви комплексно-сопряженных корней  $\Omega_{2,3}$  и  $\Omega_{4,5}$ .

При численном расчете считаем бак тонкостенным и следовательно его массой и моментом инерции будем пренебрегать ( $m_1 \approx 0$ ,  $J_1 \approx 0$ ). Результаты численного решения уравнения (30) при  $\kappa_2 = 0,5$ ,  $n=1$  представлены на рис. 10-12.

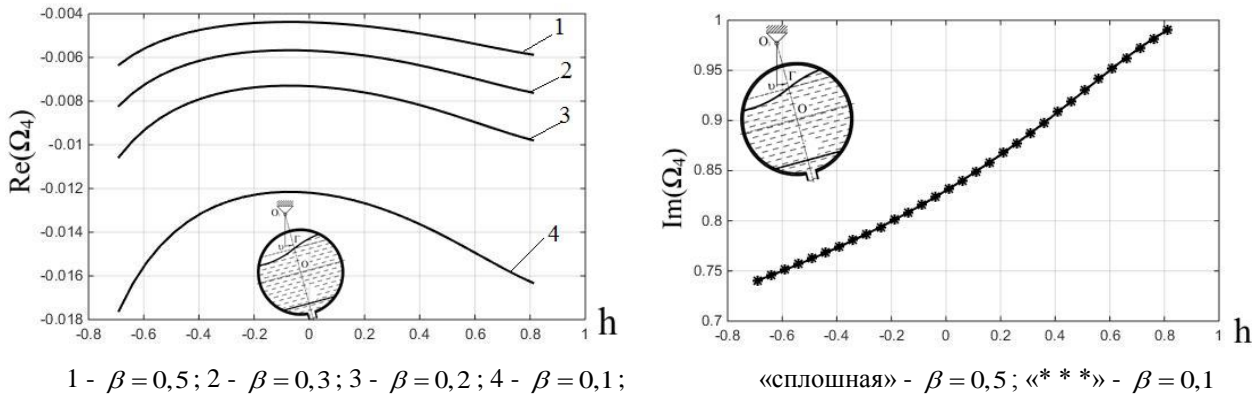


Рис. 10. Зависимости действительной части и мнимой части  $\Omega_4$ , от глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$

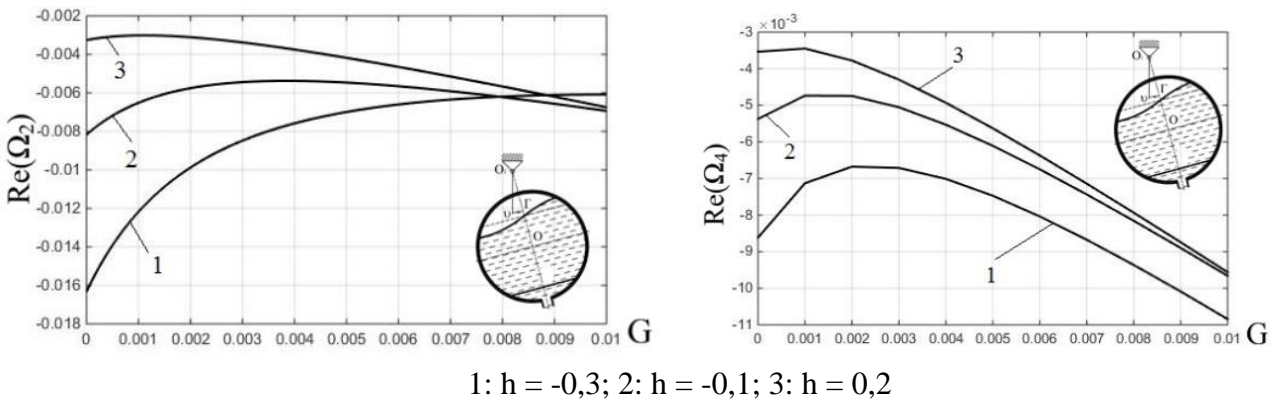


Рис. 11. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ ,  $\Omega_4$  от  $G$  при  $\beta = 1$

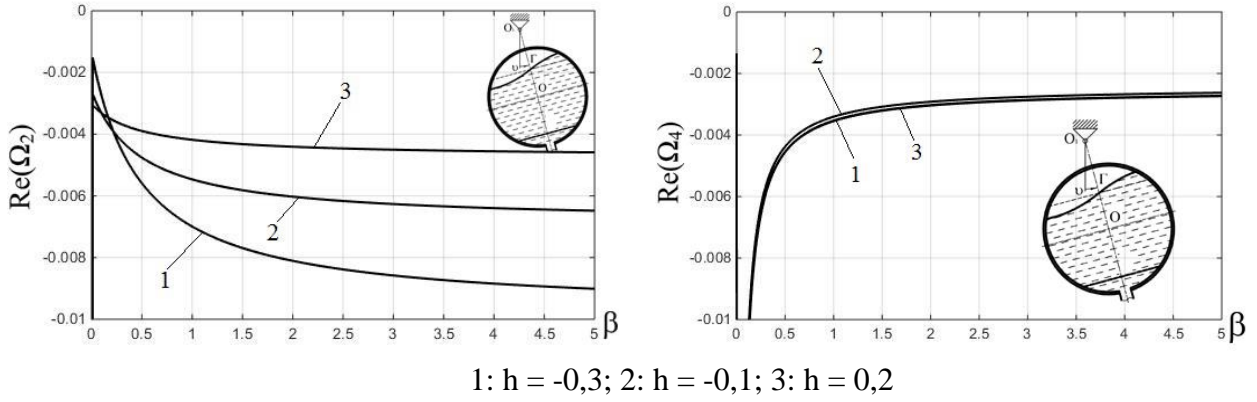


Рис. 12. Зависимости действительной части  $\Omega_2, \Omega_4$  от  $\gamma$  при  $G = 0,005$

В пункте 10 рассмотрена задача о движениях твердого тела, находящегося в условиях микрогравитации, с полостью осесимметричной конфигурации, частично заполненной капиллярной жидкостью, вытекающей через ЗУ.

Эволюционная задача о малых движениях капиллярной жидкости в подвижной осесимметричной полости имеет вид

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} = \left[ \dot{\vec{u}} + (\dot{\vec{g}} \times \vec{r}) \right] \cdot \vec{n} \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \nabla\Phi + \frac{\sigma}{\rho} (aN - \Delta_\Gamma N) - \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \vec{V}_e = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (31)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \nabla\Phi + \gamma \cdot \frac{\partial\vec{w}_\Sigma}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma - \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \vec{V}_e = 0 \text{ на } \Sigma,$$

$$\vec{w}_\Gamma = \vec{w}_\Gamma^0, \quad \vec{w}_\Sigma = \vec{w}_\Sigma^0, \quad \frac{\partial\vec{w}_\Gamma}{\partial t} = \vec{V}_\Gamma^0, \quad \frac{\partial\vec{w}_\Sigma}{\partial t} = \vec{V}_\Sigma^0 \text{ при } t = 0.$$

Потенциал абсолютной скорости так же разыскиваем в виде суммы трех функций (21), в которой функция  $\vec{\Psi}(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \Psi_i(x, y, z) \vec{e}_i$  определена краевой задачи (22),  $\Phi_n^{(1)}(x, y, z)$  - (16), а  $\Phi_n^{(2)}(x, y, z)$  - (7) при  $m = 1$ . Система уравнений возмущенного движения твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной капиллярной жидкостью, вытекающей через заборные устройства состоит из уравнений (23) и (25).

В качестве примера рассмотрены задачи о колебаниях физического маятника, вращающегося вокруг оси  $O_1x_1$ , со сферической полостью, частично заполненной капиллярной жидкостью с ЗУ. Используя безразмерные переменные (15) и (28), приведена постановка таких задач в цилиндрической системе координат.

В пункте 11 приведена постановка задачи в случае когда поверхность слива является плоской, имитирующей локальную КСОЖ. Результаты численного решения характеристического уравнения (30) в этом случае при  $r_\Sigma = 0,5$ ,  $n = 1$  угле смачивания  $\gamma_0 = 80^\circ$ , различных коэффициента  $\beta = \gamma^{-1}$ , расхода  $G$ , объемов  $V$ , числа Бонда  $Bo$  представлены на рис.13 и рис.14 (кривая



1:  $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; кривая 2:  $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; кривая 3:  $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$ ).

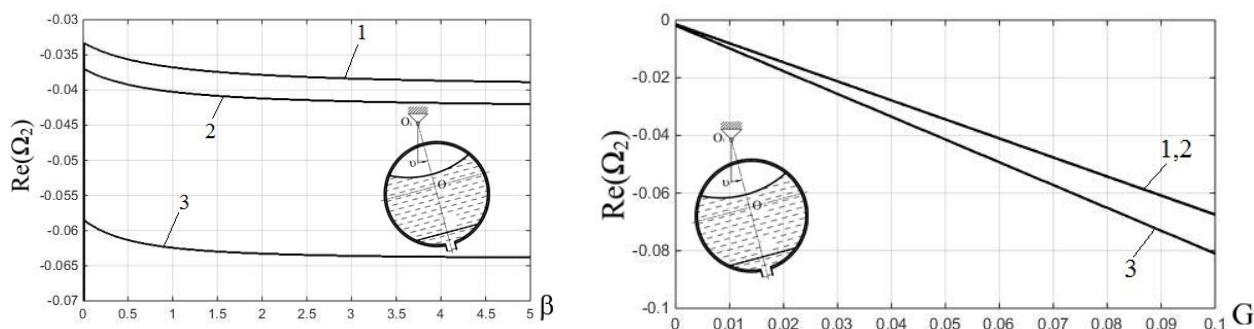


Рис. 13. Зависимости действительной части  $\Omega_2$  от  $\beta$  при  $G = 0,05$  и от  $G$  при  $\beta = 0,2$

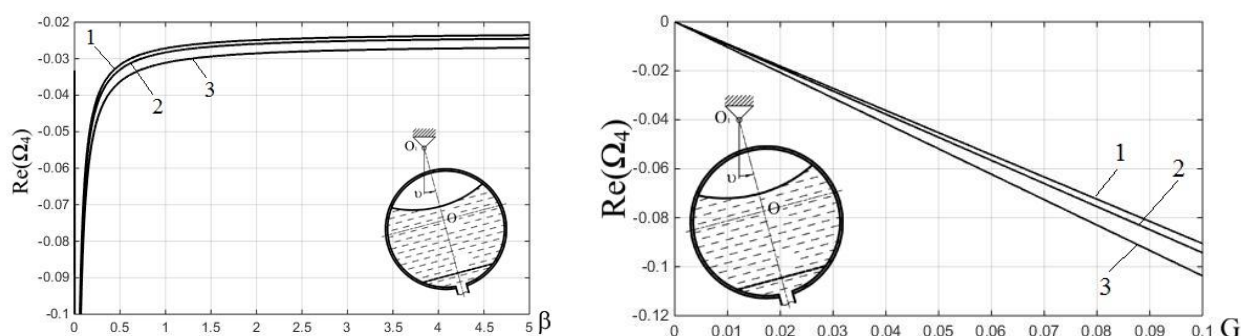


Рис. 14. Зависимости действительной части  $\Omega_4$  от  $\beta$  при  $G = 0,05$  и от  $G$  при  $\beta = 0,2$

В последнем пункте приведена постановка задачи в случае сферической поверхности слива, имитирующей тотальную КСОЖ. Результаты численного решения характеристического уравнения (30) в этом случае при  $n=1$  представлены на рис.15 (кривая 1:  $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; кривая 2:  $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; кривая 3:  $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$ ).

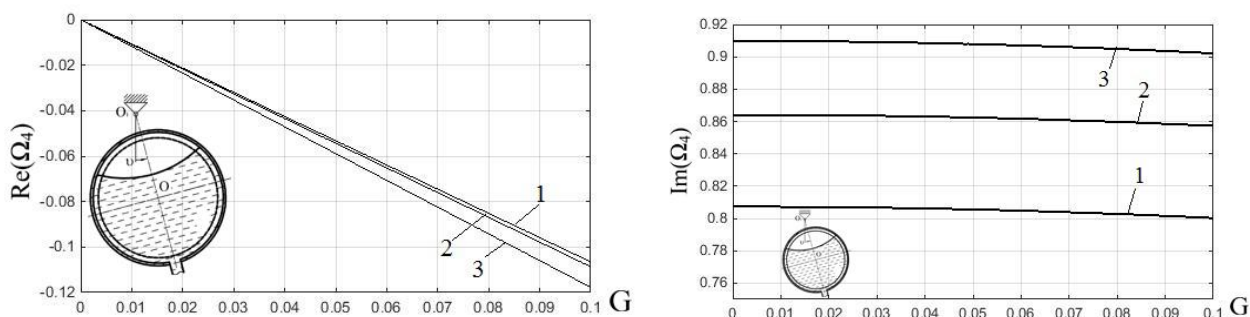


Рис. 15. Зависимости действительной и мнимой частей  $\Omega_4$  от  $G$  при  $\beta = 0,2$

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

- Разработанные математические модели малых движений идеальной жидкости, частично заполняющей неподвижную осесимметричную полость с ЗУ и математические модели малых движений твердого тела, имеющего

полость с ЗУ и жидкостью, показали качественное отличие от случая малых движений при отсутствии учета влияния ЗУ.

- Малым движениям жидкости в неподвижной осесимметричной полости, содержащей ЗУ и внутрибаковые элементы, отвечают две ветви собственных значений, соответствующих наличию двух множеств – дискретного множества действительных чисел меньше нуля и множества комплексно-сопряженных чисел.

- При увеличении расхода и постоянстве обобщенного коэффициента сопротивления коэффициент затухания монотонно увеличивается по модулю. При постоянстве расхода и уменьшении обобщенного коэффициента сопротивления коэффициент затухания стремится к некоторому постоянному значению.

- В условиях микрогравитации при увеличении расхода и постоянстве обобщенного коэффициента сопротивления собственные числа, характеризующие апериодические процессы и коэффициент затухания монотонно увеличиваются по модулю. При постоянстве расхода и уменьшении обобщенного коэффициента сопротивления коэффициент затухания не изменяется монотонно и имеет максимальное значение при некоторых значениях коэффициента сопротивления.

- Малым движениям твердого тела, имеющего полость с жидкостью и ЗУ, отвечают три ветви собственных значений, соответствующих наличию трех множеств – дискретного множества действительных чисел меньше нуля и двух множеств комплексно-сопряженных чисел.

- Случаю отрицательных вещественных чисел отвечают апериодические движения жидкого топлива и твердого тела. Случаю комплексно-сопряженных чисел с отрицательной вещественной частью отвечают затухающие колебания жидкого топлива и твердого тела.

- Коэффициенты инерции  $\lambda_{0n}^{(2)}$ ,  $\lambda_{1n}^{(2)}$ , учитывающие дополнительное влияние движений жидкости вблизи заборного устройства, имеют численные значения на порядок меньше соответствующих коэффициентов  $\lambda_{0n}^{(1)}$ ,  $\lambda_{1n}^{(1)}$ , учитывающих движений свободной поверхности жидкости.

- Уравнения движения твердого тела, имеющего полость с ЗУ и ВБЭ кроме инерционных гидродинамических составляющих, присущих классическим задачам твердого тела с жидкостью, содержат дополнительные гидродинамические коэффициенты, характеризующие демпфирование колебаний.

- Коэффициенты затухания при колебаниях твердого тела с жидкостью зависят монотонным образом от увеличения расхода или уменьшения коэффициенты гидродинамического сопротивления. Для воды при  $R_0 = 1\text{м}$ ,  $h = 0,3\text{м}$ ,  $G = 0,05\text{м}^3/\text{с}$ ,  $\gamma = 15\text{м}/\text{с}$ :  $\Omega_1 = 81,325\text{с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_2) = -0,051\text{с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_4) = -0,019\text{с}^{-1}$ . В условиях микрогравитации при  $Bo = 2$ ,  $V = 2,7259\text{м}^3$ ,  $R_0 = 1\text{м}$ ,  $G = 0,005\text{м}^3/\text{с}$ ,

$\gamma = 10\text{м/с}$ :  $\Omega_1 = 0,0923\text{с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_2) = -0,0013\text{с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_4) = -0,0016\text{с}^{-1}$ ; при  $G = 0,02\text{м}^3/\text{с}$ :  $\Omega_1 = 0,2136\text{с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_2) = -0,0440\text{с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_4) = -0,0561\text{с}^{-1}$ .

• Результаты диссертации могут быть использованы при исследовании управляемого движения проектируемых разгонных блоков, космических аппаратов и ракеты-носителей.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### *Статьи в журналах, рекомендуемых в ВАК*

1. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива непостоянного объема в сферической ёмкости // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. №12. С.426-439.  
<http://technomag.bmstu.ru/doc/744115.html>
2. Нгуен З.Х. Собственные колебания жидкости в сферических ёмкостях // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Машиностроение. 2015. № 2. С.84-90.
3. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Колебания физического маятника, имеющего сферическую полость с вытекающей жидкостью // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. №10. С.141-160.  
<http://technomag.bmstu.ru/doc/813746.html>
4. Нгуен Зуй Хунг, Темнов А.Н. Задачи динамики космических конструкций с жидким топливом, вытекающим из сферических емкостей // Инженерный журнал: наука и инновации. 2016. вып. 5.  
<http://engjournal.ru/catalog/mech/dsmi/1490.html>

### *Прочие публикации*

5. Нгуен З.Х. Колебания жидкости, вытекающей из сферических емкостей // Сборник тезисов. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2015. С. 2742-2744.
6. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Собственные колебания жидкого топлива непостоянного объема в сферической емкости // Сборник тезисов. 50-е научные чтения памяти К.Э. Циолковского. 2015. С. 167-168.
7. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Задачи динамики космических конструкций с жидким топливом, вытекающим из сферических емкостей // Сборник тезисов. XL академические чтения по космонавтике «Королёвские чтения 2016». 2016. С. 30-31.
8. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Задачи динамики космических конструкций при колебаниях жидкого топлива // Сборник тезисов. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. 2016. С. 169-171.