

Научная статья

УДК 528.852

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180685>

## ОЦЕНКА СНИЗУ ТОЧНОСТИ РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ЗАДАЧАХ ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРИВЯЗКИ

Андрей Сергеевич Бахарев<sup>1✉</sup>, Алексей Игоревич Месяц<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва (РКК «Энергия»), Королёв, Московская область, Россия

<sup>1</sup>[post@rsce.ru](mailto:post@rsce.ru) ✉

<sup>2</sup>[aleksey.mesyats@rsce.ru](mailto:aleksey.mesyats@rsce.ru)


**Аннотация.** В статье рассматриваются границы применимости модели географической привязки изображений на основе рациональных функций. Выводится оценка снизу точности равномерного приближения заданной функции нескольких аргументов, которая затем применяется для задачи геопривязки. Описан метод оценки влияния протяжённости сцены на качество аппроксимации. Рассматриваемые подходы иллюстрируются примерами анализа съёмки космического аппарата дистанционного зондирования Земли.

**Ключевые слова:** дистанционное зондирование Земли (ДЗЗ), географическая привязка, модель рациональных функций, оценка точности аппроксимации

*Для цитирования:* Бахарев А.С., Месяц А.И. Оценка снизу точности равномерного приближения рациональными функциями в задачах географической привязки // Труды МАИ. 2024. № 136. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180685>

Original article

## LOWER ACCURACY ESTIMATION OF UNIFORM RATIONAL APPROXIMATION IN GEOREFERENCING PROBLEMS

Andrei S. Bakharev<sup>1</sup>, Aleksei I. Mesyats<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>S.P. Korolev Rocket and Space Corporation «Energia», Korolev, Moscow region, Russia

<sup>1</sup>[post@rsce.ru](mailto:post@rsce.ru)

<sup>2</sup>[aleksey.mesyats@rsce.ru](mailto:aleksey.mesyats@rsce.ru)

**Abstract.** This paper discusses the problem of determining the limitations of rational function sensor model. Rational function model (RFM) is a generalized sensor model; it approximates the complex rigorous sensor model by utilizing a multitude of parameters (coefficients).

Various algorithms exist for calculating RFM parameters based on different approaches, such as solving the linearized approximation problem and integral method. In a best-case scenario most of the algorithms perform similarly, providing decent results. However, for more complex shooting parameters calculation algorithms are affected by

input data differently and provide varying approximation quality. Separating the model approximation limits from the algorithm constraints is not trivial.

For a polynomial fitting in the one-dimensional case the theorem of de la Vallée-Poussin can be used to obtain lower estimate on the accuracy of the best uniform approximation. This theorem was generalized to a wider class of functions including rational functions of a single argument. This paper proposes an approach of obtaining lower estimate of the accuracy of uniform approximation by rational functions of multiple arguments. This approach is based on the selection of a subset of the estimated region consisted of segments. For each of those segments the multiple argument problem can be substituted by a single argument problem. Next, the generalized theorem can be applied to find the lower estimate of the error of uniform approximation.

This approach is applied to the georeferencing problem. The method of estimating the influence of the scene extent on the approximation accuracy is described. The presented results are validated using the real remote sensing satellite data.

**Keywords:** remote sensing, georeferencing, rational function model, approximation accuracy estimation

**For citation:** Bakharev A.S., Mesyats A.I. Lower accuracy estimation of uniform rational approximation in georeferencing problems. *Trudy MAI*, 2024, no. 136. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=180685>

## Введение

Географическая привязка – процесс определения координат фиксируемых при дистанционном зондировании объектов на поверхности Земли. Это ключевая составляющая обработки целевой информации, превращающая визуальные данные в пространственную информацию, имеющую широкий спектр применений.

Задача геопривязки встречается при обработке данных, полученных в результате как орбитальной, так и аэрофотосъёмки. Существуют два основных подхода – привязка по контрольным точкам с известными координатами [1-3] и привязка по данным о положении камеры в момент съёмки [4, 5].

Моделью геопривязки называется конкретный способ установления соответствия между координатами изображения и географическими координатами. Расчёт географической привязки изображения заключается в получении параметров некоторой модели геопривязки этого изображения. Помимо строгих моделей, в которых привязка осуществляется на основе информации о фактическом движении космического аппарата (КА) по орбите в процессе съёмки, существуют обобщённые модели, не привязанные к параметрам конкретного КА.

В данной работе рассматривается обобщённая модель рациональных функций. Эта модель аппроксимирует соотношение между географическими координатами (долготой  $\lambda$ , широтой  $\varphi$ , высотой  $h$ ) и координатами на изображении (строкой  $r$ , столбцом  $c$ ) с помощью пары рациональных функций [6]:

$$r = \frac{p_1(\lambda, \varphi, h)}{p_2(\lambda, \varphi, h)}, c = \frac{p_3(\lambda, \varphi, h)}{p_4(\lambda, \varphi, h)}$$

где  $p_i$  – полиномы 3 степени от 3 переменных. Коэффициенты полиномов  $p_1, p_2, p_3, p_4$  составляют параметры модели, их принято обозначать как RPC (rational polynomial coefficients).

Существует ряд алгоритмов, реализующих разные методы расчёта параметров модели рациональных функций. Наиболее распространён дискретно-линейный метод [7, 8, 9] и его модификации, в том числе основанные на методе роя частиц [10, 12] или регуляризации в норме  $\ell^1$  [11]. Помимо дискретно-линейных методов, разработаны и интегральные методы расчёта.

Все алгоритмы имеют свои ограничения и особенности, они отличаются по объёму необходимых вычислений и точности аппроксимации. Параметры съёмки являются для алгоритмов расчёта явными и неявными входными данными и могут оказывать значительное влияние на их работу. Наиболее благоприятными для алгоритмов, как правило, являются съёмки одиночных сцен строго в надир. Практически все используемые на практике алгоритмы расчёта дадут на такой сцене приблизительно один и тот же результат. Однако при других параметрах съёмки (например, съёмки под большим углом к надиру) результаты могут уже заметно различаться. Возникает естественный вопрос – в каких случаях качество результата объясняется особенностями конкретного алгоритма, а в каких – исходными данными?

Любая модель аппроксимации имеет естественный класс функций, которые она хорошо в том или ином смысле приближает и при выходе, за который результаты могут быть неудовлетворительными. Так, полином небольшой степени на достаточно большом интервале будет плохо приближать, например, произвольную

трансцендентную функцию. Модель рациональных функций позволяет аппроксимировать достаточно сложное, однако, не любое, движение космического аппарата. Ввиду особенностей аппроксимируемой строгой модели и многомерности решаемой задачи приближения, формализовать ограничения модели рациональных функций оказывается довольно сложно.

Возможным подходом при оценке модели рациональных функций является анализ фактических значений ошибок аппроксимации относительно строгой модели [13, 14]. При таком подходе сложно отделить ограничения алгоритма от ограничений аппроксимируемых исходных данных.

Для оценки точности аппроксимации полиномами заданной степени в одномерном случае существует теорема Валле-Пуссена, позволяющая оценить снизу величину погрешности наилучшего приближения в равномерной (чебышевской) метрике [15]. Эта теорема была обобщена на более широкий класс функций, включающий рациональные функции одного аргумента [16]. В литературе встречаются адаптации идей Валле-Пуссена и Чебышёва для многомерных функций при различных наборах ограничений [17-19]. В настоящей статье предлагается специализированный способ применения результатов обобщённой теоремы Валле-Пуссена для задачи аппроксимации рациональной функцией нескольких аргументов.

Статья построена следующим образом. Сначала описывается применение результатов теоремы Валле-Пуссена к общей задаче многомерной равномерной рациональной аппроксимации. Затем излагается конкретный способ использования этого подхода применительно к конкретной задаче расчета коэффициентов модели

RPC. Наконец, полученные результаты иллюстрируются примерами из данных, полученных КА дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) EgyptSat-A.

### Построение оценки в общем случае

Опишем общий переход от задачи равномерной аппроксимации функции нескольких аргументов к семейству задач аппроксимаций функций одного аргумента.

Через  $C(A)$  обозначим множество всех непрерывных функций, определённых на некотором множестве  $A$ , а через  $\mathcal{R}(A)$  – множество всех непрерывных рациональных функций, определённых на  $A$ . Напомним, что рациональной функцией называется функция, представимая в виде отношения двух полиномов.

Рассмотрим задачу наилучшей равномерной аппроксимации функции  $f_0 \in C(\Omega)$  в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  рациональными функциями:

$$\max_{x \in \Omega} |f(x) - f_0(x)| \rightarrow \min_{f \in \mathcal{R}(\Omega)}.$$

Пусть минимум в этой задаче,  $J^*$ , достигается на некоторой функции  $f_* \in \mathcal{R}$ .

Построим подмножество  $\Omega_0 \subseteq \Omega$ , состоящее из отрезков:

$$\Omega_0 = \bigcup_{k=1}^m \{l_k(t)\}_{t=t_0}^{t_1} \subseteq \Omega, l_k(t) = c_k + a_k \cdot t, \text{ где } c_k, a_k \in \mathbb{R}^n.$$

Вектора  $c_k$  и  $a_k$  мы вправе выбирать любыми, лишь бы выполнялось соотношение  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  (другим возможным подходом здесь является введение конечного семейства гладких кривых в натуральной параметризации [20]). Тогда:

$$\begin{aligned} J^* &= \max_{x \in \Omega} |f_*(x) - f_0(x)| \geq \max_{x \in \Omega_0} |f_*(x) - f_0(x)| = \\ &= \max_{k=1, m} \max_{t \in [t_0, t_1]} |f_*(l_k(t)) - f_0(l_k(t))| \end{aligned} \quad (1)$$

Определим операторы  $G_k$ , сужающие функции, определённые на  $\Omega$ , в функции, определённые на  $[t_0, t_1]$ :  $(G_k f)(t) = f(l_k(t))$ . Заметим, что если  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ , то  $G_k f \in \mathcal{R}([t_0, t_1])$  (подстановка аффинной функции  $l_k(t)$  в рациональную сохраняет её рациональность, при этом не повышая степени числителя и знаменателя). Пусть  $G_k f_0 \equiv g_{k0}$ . Далее, продолжим равенство в (1):

$$\max_{k=1, m} \max_{t \in [t_0, t_1]} |(G_k f_*)(t) - g_{k0}| \geq \max_{k=1, m} \min_{g \in \mathcal{R}([t_0, t_1])} \max_{t \in [t_0, t_1]} |g(t) - g_{k0}|.$$

Иными словами, поскольку  $G_k f_*$  – рациональная функция, то норма её разницы с  $g_{k0}$  заведомо не меньше, чем у наилучшей рациональной аппроксимации  $g_{k0}$ .

Для дальнейшей оценки снизу воспользуемся обобщённой теоремой Валле-Пуссена [16].

**Теорема.** Пусть  $u \in C[a, b]$ . Пусть многочлены

$$A(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, B(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m, x \in [a, b],$$

таковы, что:

1.  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ ;
2. они не имеют общих делителей;
3.  $B(x) \neq 0$  при  $x \in [a, b]$ ;
4. разность  $u(x) - \frac{A(x)}{B(x)}$  принимает в некоторых точках  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_N < b$

ненулевые значения с чередующимися знаками  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ , где

$$N = n + m + 2.$$

Тогда для любой функции  $r \in \mathcal{R}([a, b])$  выполняется неравенство

$$\max_{x \in [a, b]} |u(x) - r(x)| \geq \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_N|\}.$$



Для произвольной функции  $u \in C[t_0, t_1]$  введём множество  $\mathcal{V}(u)$  рациональных функций, чьи полиномы удовлетворяют условиям 1-4 теоремы. Для функций  $r \in \mathcal{V}(u)$  обозначим

$$\mathcal{A}(u, r) = \max_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N} \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_N|\},$$

где максимум берётся по всем наборам, удовлетворяющим условию 4 теоремы. Заметим, что, поскольку здесь идёт речь о функциях одного аргумента, существует простой способ расчёта  $\mathcal{A}(u, r)$ : надо рассмотреть все интервалы знакопостоянства разницы  $u(x) - r(x)$ , на каждом из них найти максимальное по модулю значение, выбрать  $N$  наибольших значений с чередующимися знаками, а из них взять наименьшее.

Итак, если  $r \in \mathcal{R}(\Omega)$ , то мы можем получить следующую оценку:

$$J_* \geq \max_{k=1, m} \begin{cases} \mathcal{A}(G_k u, G_k r), & \text{если } G_k r \in \mathcal{V}(u); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

В этой оценке у нас есть две «степени свободы»: выбор подмножества  $\Omega_0$  в части выбора отрезков и выбор рациональной функции  $r$ .

Важным свойством оценки (2) является то, что она позволяет, имея на руках *какую-то* аппроксимацию целевой функции, получить оценку, справедливую для *произвольной* её аппроксимации.

### Применение оценки к задаче геопривязки

Рассмотрим конкретный набор коэффициентов RPC (способ их получения нам не важен), который задаёт пару рациональных функций, отображающих экстен

сцены в географических координатах в координаты на изображении. Оценку будем строить независимо для каждой функции из этой пары; обозначим оцениваемую функцию как  $r$ . Обозначим соответствующее отображение строгой модели через  $f$ .

Строгая модель позволяет установить соответствие между пикселями изображения и географическими координатами – то есть, обратное к оцениваемому. Отобразим каждый пиксел изображения на фиксированную высоту  $h$  (в её роли логично взять среднюю высоту рельефа на сцене). Так мы получим некоторый набор точек  $\Omega'$ , лежащих в одной плоскости.

Введём функцию знакового отклонения,  $d(x) = f^{-1}(x) - r(x), x \in \mathbb{R}^3$ . Нам известно значение  $d$  на  $\Omega'$ ; однако  $\Omega'$  не имеет структуры, предъявляемой оценкой (2) к подмножеству – оно не является набором отрезков. Для применения оценки выделим наборы точек, отвечающих каждой колонке изображения, и аппроксимируем каждый из них отрезком (см. рис. 1).

После этого проинтерполируем значение отклонения  $d$  вдоль каждого из этих отрезков и найдём интервалы его знакопостоянства (см. рис. 2). Если интервалов 8 (степень многочленов в RPC у числителя и знаменателя равна трём, теорема требует  $N = 3 + 3 + 2$ ) или больше, функция  $f$  на этом отрезке попадает под условия теоремы, и её можно использовать для получения оценки. Здесь может проявить себя протяжённость сцены: чем она длиннее, тем чаще могут встречаться смены знака.

Повторив эти шаги для каждого отрезка, мы получим некоторый набор оценок; в качестве итоговой мы вправе взять наибольшую из них.

Аналогично процесс повторяется для второй функции в паре.

Таким образом, имея на руках некоторое RPC, удовлетворяющее требованию на количество интервалов знакопостоянства, возможно получить оценку  $L$ . Смысл оценки заключается в следующем: какое бы приближение рациональной функцией мы бы не построили, найдётся точка, в которой оно будет отличаться от точной модели минимум на  $L$ .

Необходимым условием для построения оценки снизу является наличие у функции знакового отклонения не менее 8 интервалов знакопостоянства. Данное условие может выполняться не всегда. Для его выполнения, как правило, оказывается достаточным большая протяжённость снимка (длина по направлению съёмки кратно превышает ширину полосы захвата), или наличие нетривиальной динамики у КА во время съёмки (что, как правило, можно соотнести с большим отклонением угла съёмки КА от надира).

Оценка снизу позволяет анализировать качественные зависимости между параметрами съёмки и работой метода. Примером такого анализа может служить изучение влияния протяжённости снимка на оценку снизу точности аппроксимации. Исходные данные от КА с сенсором сканерного типа состоят из непрерывных маршрутов съёмки, которые при обработке разделяются на отдельные сцены, как правило, приблизительно квадратные. (Далее после первичной обработки сцены могут быть объединены в непрерывное изображение на этапе построения мозаик.) В некоторых случаях оказывается удобнее разбивать маршрут на неквадратные вытянутые сцены.

Для проведения такого анализа можно действовать следующим образом. Выбирается один маршрут съёмки, который несколько раз разбивается на сцены так, чтобы получить последовательность сцен с одинаковым временем начала съёмки сцены и возрастающей протяженностью сцены. После этого для каждой из этих сцен применяется процедура построения оценки. Любопытно при этом отметить, что оценка, полученная для более короткой сцены (отвечающей, скажем, временному интервалу  $[t_0, t_1]$ ), будет верной и для более протяженных сцен, (отвечающих интервалу  $[t_0, t_1 + \Delta]$ ). Рациональная функция, определённая на интервале  $[t_0, t_1 + \Delta]$ , является рациональной функцией и на меньшем интервале  $[t_0, t_1]$ , а потому оценка, полученная для более короткой сцены, будет справедлива и для неё. Таким образом, зависимость оценки от протяжённости сцены будет монотонно возрастать.

## Результаты

Приведём результаты построения зависимостей оценок от протяжённости снимка на данных от космического аппарата ДЗЗ EgyptSat-A. Для примера были выбраны три съёмки, выполненные при разных углах возвышения КА.

На рисунке 1 изображены результаты для съёмки, произведённой КА с углом возвышения  $74^\circ$ . На нём приведены оценки для двух алгоритмов расчёта параметров модели рациональных функций – для интегрального алгоритма (L1) и дискретно-линейного алгоритма (PSO). По оси абсцисс отложена длина съёмки (протяженность вдоль направления съёмки) в процентах от её ширины (поперёк направления). Так, значение 100% отвечает квадратной сцене. По оси ординат указана соответствующая

оценка относительно размера пиксела на фокальной плоскости. Из графиков видно, что зависимость оценки для строки и столбца у алгоритмов, основанных на разных вычислительных подходах, качественно схожа. Это подтверждает корректность полученных оценок. Разница в абсолютных значениях оценок объясняется шагом сетки и разным распределением ошибки аппроксимации по сетке.

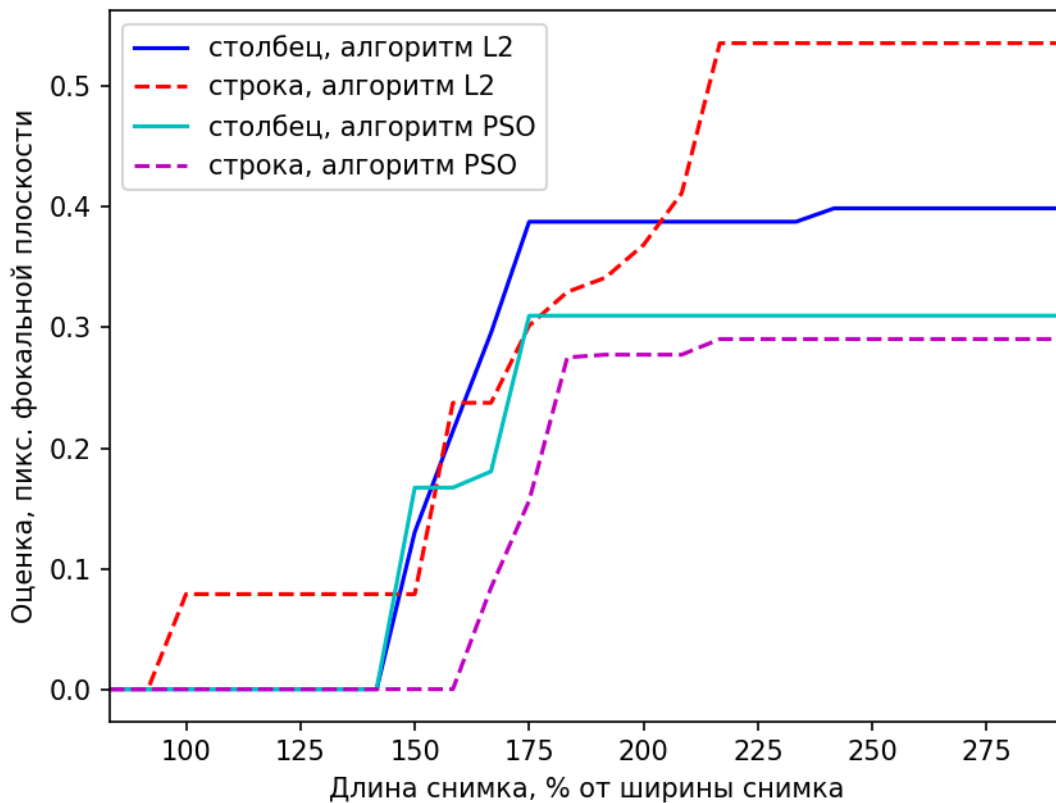


Рисунок 1 – Съёмка с углом возвышения КА  $74^\circ$

На рисунке 2 приведены оценки для съёмки практически в надир. Из графиков видно, что при таких углах достаточное число интервалов знакопостоянства для выполнения теоремы появляется при большей протяжённости, чем при съёмке с меньшим углом возвышения КА. Также видно, что в определённый момент рост оценок останавливается.

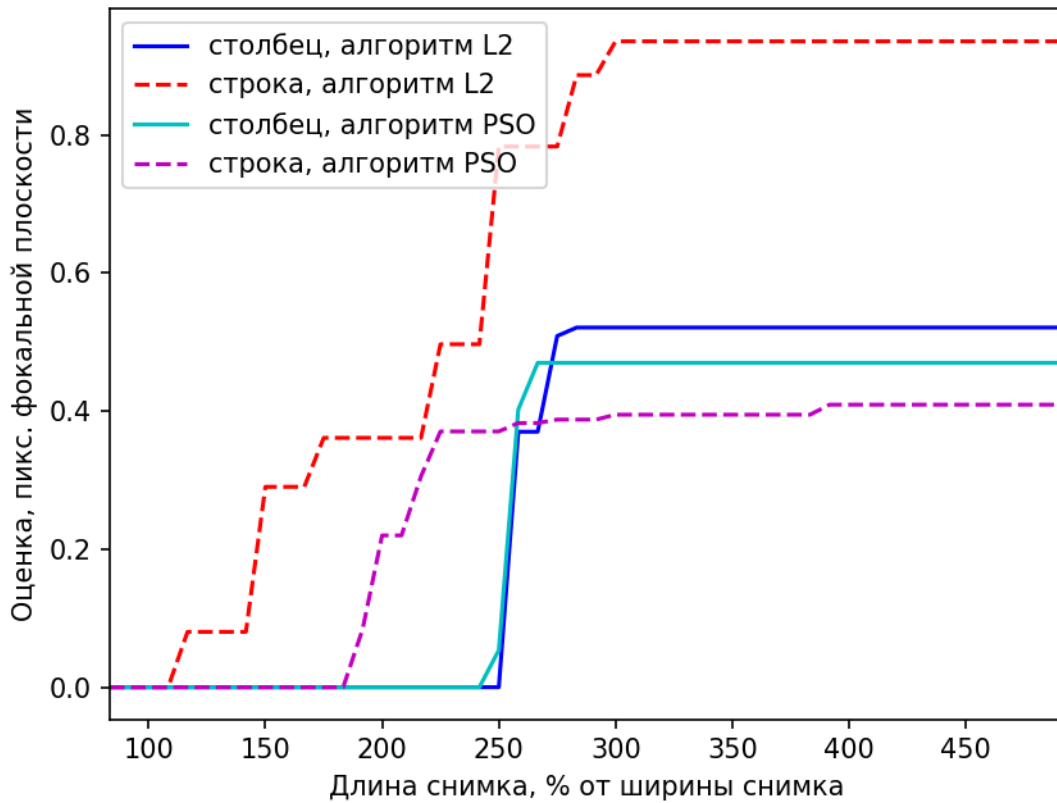


Рисунок 2 – Съёмка с углом возвышения КА  $87^\circ$

На рисунке 3 изображены результаты для съёмки при большом отклонении ( $23^\circ$ ) от надира. Графики показывают, что оценка ошибки на таких данных гораздо больше, чем на съёмках, близких к надиру. Также можно отметить, что на таких углах гораздо быстрее (на менее продолжительных сценах) набирается достаточно интервалов для соблюдения условий теоремы и построения оценки ошибки.

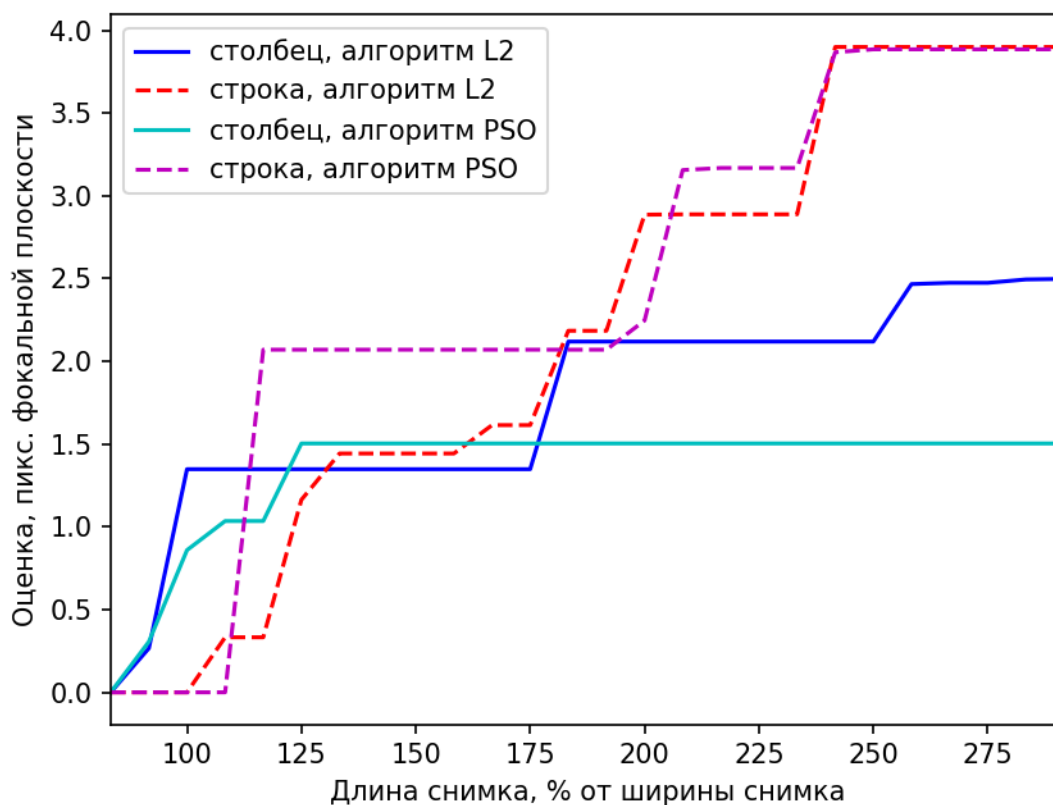


Рисунок 3 – Съёмка с углом возвышения КА 67°

### Заключение

В статье предложен способ получения оценки снизу точности равномерной аппроксимации рациональными функциями в задаче географической привязки. На основе этого способа был предложен метод оценки влияния протяженности сцены на качество аппроксимации. Описанные подходы были подтверждены примерами анализа съёмки КА ДЗЗ EgyptSat-A.

Интересным направлением для дальнейшей работы является получение аналогичных оценок для других функциональных норм, например, нормы  $\ell^2$ , а также построение нетривиальных верхних оценок.

## Список источников

1. Толченев А.А., Судоргин А.С. Комплекс автоматизированной привязки данных дистанционного зондирования Земли // Труды МАИ. 2015. № 81. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=57854>
2. Корнеев М.А., Максимов А.Н., Максимов Н.А. Методы выделения точек привязки для визуальной навигации беспилотных летательных аппаратов // Труды МАИ. 2012. № 58. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=33061>
3. Сенцов А.А., Ненашев В.А., Иванов С.А., Турнецкая Е.Л. Совмещение сформированных радиолокационных изображений с цифровой картой местности в бортовых системах оперативного мониторинга земной поверхности // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=156227>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-08)
4. Ye Jiang, Lin Xu, Xu Tao. Mathematical Modeling and Accuracy Testing of WorldView-2 Level-1B Stereo Pairs without Ground Control Points // Remote Sensing, 2017, no. 9 (7), pp. 737. DOI: [10.3390/rs9070737](https://doi.org/10.3390/rs9070737)
5. Занин К.А. Разработка модели основных параметров космического радиолокационного бистатического интерферометра // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=98988>
6. Tao C.V., Hu Y. Use of the Rational Function Model for Image Rectification // Canadian Journal of Remote Sensing, 2004, vol. 27, no. 6, pp. 593-602. DOI: [10.1080/07038992.2001.10854900](https://doi.org/10.1080/07038992.2001.10854900)



7. Tao C.V., Hu Y. A Comprehensive study of the rational function model for photogrammetric processing // Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 2001, vol. 67, no. 12, pp. 1347–1357.
8. Salazar Celis. Practical rational interpolation of exact and inexact data: theory and algorithms. PhD thesis, Department of Computer Science, University of Antwerp, 2008.
9. Austin A.P., Krishnamoorthy M., Leyffer S., Mrenna S., Müller J., Schulz H. Practical algorithms for multivariate rational approximation // Computer Physics Communications, 2021, vol. 261. DOI: [10.1016/j.cpc.2020.107663](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107663)
10. Gholinejad S., Naeini A.A., Amiri-Simkooei A. Robust Particle Swarm Optimization of RFMs for High-Resolution Satellite Images Based on K-Fold Cross-Validation // IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2019, vol. 12, no. 8, pp. 2594-2599. DOI: [10.1109/JSTARS.2018.2881382](https://doi.org/10.1109/JSTARS.2018.2881382)
11. Long T., Jiao W., He G. RPC Estimation via  $\ell_1$ -Norm-Regularized Least Squares (L1LS) // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2015, vol. 53, no. 8, pp. 4554-4567. DOI: [10.1109/TGRS.2015.2401602](https://doi.org/10.1109/TGRS.2015.2401602)
12. Бусарова Д.А., Месяц А.И., Прокопьев В.П. Применение математических методов для обработки целевой информации системы оптических телескопов РС МКС // XX научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов (Королёв, 10–14 ноября 2014): тезисы докладов. - Королёв: Изд-во РКК Энергия имени С.П. Королёва, 2014. С. 172.

13. Романов А.Я. Исследование точностных характеристик RPC-полиномов при обработке информации КА "Ресурс-ДК1" // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2008. Т. 5. № 1. С. 311-314.
14. Пошехонов В.И., Кузнецов А.Е., Егин М.М. Оценка точности аппроксимации строгой модели космической съёмки рациональными полиномами // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2023. № 83. С. 95-101. DOI: [10.21667/1995-4565-2023-83-95-101](https://doi.org/10.21667/1995-4565-2023-83-95-101)
15. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 511 с.
16. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
17. Sukhorukova N., Ugon J., Yost D. Chebyshev Multivariate Polynomial Approximation: Alternance Interpretation, 2018. DOI: [10.1007/978-3-319-72299-3\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-72299-3_8)
18. Sukhorukova N., Ugon J. A generalisation of de la Vallée-Poussin procedure to multivariate approximations // Advances in Computational Mathematics, 2022, vol. 48 (1). DOI: [10.1007/s10444-021-09919-x](https://doi.org/10.1007/s10444-021-09919-x)
19. Millán R., Peiris V., Sukhorukova N., Ugon J. Multivariate approximation by polynomial and generalized rational functions // Optimization, 2022, vol. 71, pp. 1-17. URL: <https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2044478>
20. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Физматлит, 2004. – 298 с.

## References

1. Tolchenov A.A., Sudorgin A.S. *Trudy MAI*, 2015, no. 81. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=57854>
2. Korneev M.A., Maksimov A.N., Maksimov N.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 58. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=33061>
3. Sentsov A.A., Nenashev V.A., Ivanov S.A., Turnetskaya E.L. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=156227>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-08)
4. Ye Jiang, Lin Xu, Xu Tao. Mathematical Modeling and Accuracy Testing of WorldView-2 Level-1B Stereo Pairs without Ground Control Points, *Remote Sensing*, 2017, no. 9 (7), pp. 737. DOI: [10.3390/rs9070737](https://doi.org/10.3390/rs9070737)
5. Zanin K.A. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98988>
6. Tao C.V., Hu Y. Use of the Rational Function Model for Image Rectification, *Canadian Journal of Remote Sensing*, 2004, vol. 27, no. 6, pp. 593-602. DOI: [10.1080/07038992.2001.10854900](https://doi.org/10.1080/07038992.2001.10854900)
7. Tao C.V., Hu Y. A Comprehensive study of the rational function model for photogrammetric processing, *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 2001, vol. 67, no. 12, pp. 1347–1357.
8. Salazar Celis. *Practical rational interpolation of exact and inexact data: theory and algorithms*. PhD thesis, Department of Computer Science, University of Antwerp, 2008.

9. Austin A.P., Krishnamoorthy M., Leyffer S., Mrenna S., Müller J., Schulz H. Practical algorithms for multivariate rational approximation, *Computer Physics Communications*, 2021, vol. 261. DOI: [10.1016/j.cpc.2020.107663](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107663)
10. Gholinejad S., Naeini A.A., Amiri-Simkooei A. Robust Particle Swarm Optimization of RFMs for High-Resolution Satellite Images Based on K-Fold Cross-Validation, *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2019, vol. 12, no. 8, pp. 2594-2599. DOI: [10.1109/JSTARS.2018.2881382](https://doi.org/10.1109/JSTARS.2018.2881382)
11. Long T., Jiao W., He G. RPC Estimation via  $\ell_1$ -Norm-Regularized Least Squares (L1LS), *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2015, vol. 53, no. 8, pp. 4554-4567. DOI: [10.1109/TGRS.2015.2401602](https://doi.org/10.1109/TGRS.2015.2401602)
12. Busarova D.A., Mesyats A.I., Prokop'ev V.P. *XX nauchno-tehnicheskaya konferentsiya molodykh uchenykh i spetsialistov: tezisy dokladov*. Korolev, Izd-vo RKK Energiya imeni S.P. Koroleva, 2014, pp. 172.
13. Romanov A.Ya. *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2008, vol. 5, no. 1, pp. 311-314.
14. Poshekhonov V.I., Kuznetsov A.E., Egin M.M. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*, 2023, no. 83, pp. 95-101. DOI: [10.21667/1995-4565-2023-83-95-101](https://doi.org/10.21667/1995-4565-2023-83-95-101)
15. Dzyadyk V.K. *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsii polinomami* (Introduction to the uniform approximation theory of functions with polynomials), Moscow, Nauka, 1977, 511 p.

16. Akhiezer N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii* (Lectures on approximation theory), Moscow, Nauka, 1965, 407 p.
17. Sukhorukova N., Ugon J., Yost D. *Chebyshev Multivariate Polynomial Approximation: Alternance Interpretation*, 2018. DOI: [10.1007/978-3-319-72299-3\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-72299-3_8)
18. Sukhorukova N., Ugon J. A generalisation of de la Vallée-Poussin procedure to multivariate approximations, *Advances in Computational Mathematics*, 2022, vol. 48 (1). DOI: [10.1007/s10444-021-09919-x](https://doi.org/10.1007/s10444-021-09919-x)
19. Millán R., Peiris V., Sukhorukova N., Ugon J. Multivariate approximation by polynomial and generalized rational functions, *Optimization*, 2022, vol. 71, pp. 1-17. URL: <https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2044478>
20. Mishchenko A.S., Fomenko A.T. *Kratkii kurs differentsial'noi geometrii i topologii* (A brief course of differential geometry and topology), Moscow, Fizmatlit, 2004, 298 p.

Статья поступила в редакцию 15.04.2024

Одобрена после рецензирования 02.05.2024

Принята к публикации 27.06.2024

The article was submitted on 15.04.2024; approved after reviewing on 02.05.2024; accepted for publication on 27.06.2024