

Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите

Бардин Б.С.*, Савин А.А.**

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет), МАИ,

Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: bardin@yandex.ru*

***e-mail: sashka_savin@mail.ru*

Аннотация

Рассматривается задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний намагниченного динамически симметричного спутника относительно центра масс под влиянием магнитного и приливного гравитационного моментов. Невозмущенное периодическое движение представляет собой плоские маятниковые колебания спутника, при которых его ось динамической симметрии лежит в плоскости круговой орбиты центра масс.

Анализ орбитальной устойчивости выполнен в рамках линейного приближения. На основе численного интегрирования линеаризованной системы в характерных сечениях трехмерного пространства параметров были построены области орбитальной неустойчивости и устойчивости в линейном приближении. В случае колебаний с малыми амплитудами применение метода малого параметра позволило получить выражения для границ указанных областей аналитически.

Ключевые слова: Гамильтонова система, периодические движения, нормальная форма, резонанс, переменные действие-угол, орбитальная устойчивость.

1. Постановка задачи. Гамильтониан задачи.

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Спутник моделируется динамически симметричным твердым телом, линейные размеры которого малы по сравнению с размерами орбиты центра масс. Последнее предположение позволяет рассматривать задачу в ограниченной постановке, т.е. считать, что движение спутника относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс [1]. Далее предполагается, что орбита центра масс является круговой.

Пусть $OXYZ$ – орбитальная система координат. Ось OX направим вдоль радиуса-вектора центра масс, ось OY – вдоль вектора скорости центра масс, а ось OZ – по нормали к плоскости орбиты. Оси связанной системы координат $Oxyz$ направим вдоль главных центральных осей инерции спутника так, что Oz является осью динамической симметрии спутника. Ориентацию связанной системы координат относительно орбитальной системы зададим при помощи углов Эйлера ψ, ϑ, φ .

Силовая функция гравитационных сил, действующих на спутник имеет вид [1,2]

$$U_g = -\frac{3}{2} \omega_0^2 (C - A) \sin^2 \psi \sin^2 \theta, \quad (1)$$

где A и C – экваториальный и полярный моменты инерции спутника, а ω_0 – угловая скорость орбитального движения центра масс.

На намагниченное тело, помещенное в магнитное поле действует момент сил, определяемый формулой [3]

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{H} \times \mathbf{I} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{M}_m – момент магнитных сил, \mathbf{H} – вектор магнитной напряженности магнитного поля Земли, \mathbf{I} – вектор собственного магнитного момента спутника.

Наличие магнитного момента на спутнике может быть вызвано множеством причин. В данной работе предполагается, что магнитный момент возникает из-за намагничивания материала оболочки спутника магнитным полем Земли. Для достаточно вытянутых тел возникающий при этом магнитный момент \mathbf{I} можно считать направленным вдоль оси Oz . В этом случае он определяется следующим образом [1, 4, 5]

$$\mathbf{I} = \frac{\mu_0 - 1}{4\pi} V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{z}) \mathbf{z}, \quad (3)$$

где V – объем спутника, μ_0 – магнитная проницаемость оболочки спутника, \mathbf{z} – орт оси Oz .

В качестве модели геомагнитного поля Земли примем дипольную модель, в рамках которой вектор \mathbf{H} магнитной напряженности с радиусом-вектором \mathbf{R} имеет вид [6]

$$\mathbf{H} = \frac{\mu_e}{R^5} [\mathbf{k}_e - 3(\mathbf{k}_e \mathbf{R})\mathbf{R}]. \quad (4)$$

Здесь $R = |\mathbf{R}|$ – радиус орбиты, \mathbf{k}_e – единичный вектор оси магнитного диполя Земли, μ_e – постоянная земного магнетизма.

Будем считать, что ось магнитного диполя Земли совпадает с осью ее вращения (прямой диполь), а орбита спутника лежит в плоскости экватора. В этом случае вектор \mathbf{H} во всех точках орбиты перпендикулярен к ее плоскости, а моменты сил, возникающих из-за взаимодействия оболочки спутника с магнитным полем Земли, задаются следующей силовой функцией

$$U_m = \frac{1}{2} \xi \cos^2 \theta, \quad (5)$$

где

$$\xi = \frac{(\mu_0 - 1) \mu_E^2 V}{4\pi R^6} \quad (6)$$

Кинетическая энергия движения спутника относительно центра масс имеет вид

$$T = \frac{1}{2} A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2, \quad (7)$$

а проекции абсолютной угловой скорости на оси связанной системы координат задаются формулами

$$\begin{aligned}
p &= (\dot{\psi} + \omega_0) \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\
q &= (\dot{\psi} + \omega_0) \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \\
r &= (\dot{\psi} + \omega_0) \cos \theta + \dot{\varphi}
\end{aligned} \tag{8}$$

При сделанных предположениях уравнения движения намагниченного спутника относительно центра масс можно записать в канонической форме с функцией Гамильтона $H = T - U_g - U_m$. Принимая за независимую переменную истинную аномалию $\nu = \omega_0 t$ и вводя безразмерные импульсы $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$, нормированные множителем $A\omega_0$, для функции Гамильтона имеем следующее выражение

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2 \sin^2 \theta} p_\psi^2 + \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg}^2 \theta + \frac{1}{\alpha} \right) p_\varphi^2 + \frac{1}{2} p_\theta^2 - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} p_\psi p_\varphi - p_\psi + \\
&+ \frac{3}{2} (\alpha - 1) \sin^2 \psi \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \xi \cos^2 \theta,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\alpha = C/A (0 \leq \alpha \leq 2)$.

Угол φ является циклической координатой, поэтому соответствующий импульс является первым интегралом движения $p_\varphi = \text{const}$. Плоские периодические движения возможны только при $p_\varphi = 0$. Далее предполагается, что возмущения также удовлетворяют последнему равенству. Поэтому полагая $p_\varphi = 0$ в (9) имеем следующее выражение для гамильтониана задачи

$$H = \frac{1}{2 \sin^2 \theta} (p_\psi + 1)^2 - p_\psi + \frac{1}{2} p_\theta^2 + \frac{3}{2} (\alpha - 1) \sin^2 \psi \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \xi \cos^2 \theta. \tag{10}$$

В (10) импульс p_ψ , соответствующий абсолютному движению, заменен на импульс $p_\psi - 1$, соответствующий относительному движению в орбитальной системе координат.

Произведем каноническую замену переменных

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{q_1}{2} - \frac{\pi}{4}(1 - \text{sign}(1 - \alpha)), & p_\psi &= 2p_1 + 1, \\ \theta &= \frac{\pi}{2} + q_2, & P_\theta &= p_2 \end{aligned} \quad (11)$$

и введем новую независимую переменную $\nu = 4\tau$.

В новых переменных гамильтониан примет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8} \left\{ (2p_1 + 1)^2 (1 + \text{tg}^2 q_2)^2 - 4p_1 - 1 + p_2^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2\beta^2} + 1 - \eta \right) \sin^2 q_2 - \frac{\cos q_1 \cos^2 q_2}{2\beta^2} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{3|\alpha - 1|}}, \quad \eta = \frac{1 + \text{sign}(1 - \alpha)}{2\beta^2} + 1 - \xi. \quad (13)$$

Заметим что, пара значений (β^*, η^*) инвариантна относительно замены относительно замены $(\alpha, \xi) \mapsto (2 - \alpha, \xi - 3(1 - \alpha))$, поэтому исследование орбитальной устойчивости в случае $\alpha > 1$ можно свести к случаю $\alpha < 1$. Далее, исключая из рассмотрения случай сферически симметричного спутника ($\alpha = 1$), без ограничения общности будем считать, что $1 < \alpha \leq 2$.

Система уравнений с функцией Гамильтона (12) допускает частное решение, при котором $q_2 = p_2 = 0$, а эволюция переменных описывается канонической системой с гамильтонианом

$$H^{(0)} = \frac{1}{2} p_1^2 - \frac{1}{16\beta^2} \cos q_1. \quad (14)$$

Данное частное решение описывает плоские движения спутника, при которых его ось динамической симметрии лежит в плоскости орбиты. В зависимости от значения константы h интеграла энергии $H^{(0)} = h$ в плоском движении спутник либо асимптотически ($h = 1/(16\beta^2)$) приближается к неустойчивому положению относительного равновесия, в котором его ось динамической симметрии направлена по касательной к орбите, либо совершает периодические движения: колебания ($|h| < 1/(16\beta^2)$) в окрестности устойчивого положения равновесия, при котором ось динамической симметрии направлена по радиусу-вектору центра масс, или вращения ($h > 1/(16\beta^2)$) относительно нормали к плоскости орбиты.

Плоские колебания и вращения являются неустойчивыми по отношению к возмущениям координат и скоростей, т.к. их периоды зависят от начальных условий. Поэтому представляет интерес рассмотреть задачу об орбитальной устойчивости, т.е. исследовать устойчивость плоских периодических колебаний по отношению к возмущениям, выводящим ось динамической симметрии из плоскости орбиты (пространственные возмущения) и возмущениям частоты колебаний.

Для ненамагниченного спутника, моделируемого динамически симметричным твердым телом, данная задача была рассмотрена А.П. Маркеевым в [2]. В указанной

работе им была разработана методика исследования орбитальной устойчивости плоских периодических движений и рассмотрен случай сплюснутого спутника, когда ось динамической симметрии меньше экваториальной оси. Результаты, полученные в указанной работе, были позже уточнены и дополнены в [7, 8].

Целью данной статьи является исследование орбитальной устойчивости плоских периодических колебаний спутника. Анализ устойчивости будем проводить в рамках линейного приближения.

2. Гамильтониан возмущенного движения. Изоэнергетическая редукция.

Введем переменные I, w , которые на невозмущенном движении являются переменными действие-угол. В случае колебаний каноническая унивалентная замена переменных $q_1, p_1 \rightarrow I, w$ имеет вид [9]

$$q_1 = 2\arcsin[k \operatorname{sn}(u, k)], \quad p_1 = \frac{2k}{\beta} \operatorname{cn}(u, k), \quad u = 2\pi^{-1}K(k)w \quad (15)$$

где $k = k(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = 8\pi^{-1}[E(k) - (1 - k^2)K(k)]. \quad (16)$$

В невозмущенном движении

$$I = I_0 = \text{const}, \quad w = \omega\tau + w(0), \quad (17)$$

где $\omega = \pi / (8\beta K(k))$ – частота периодического движения. При этом $k(I_0) = \sin(\Psi/2)$ (где $\Psi/2$ – амплитуда плоских колебаний; $0 < \Psi < \pi$). Совместно с (17)

формулы (15) определяют явную зависимость переменных q_1, p_1 от τ на невозмущенном движении.

Введем возмущение переменной действие $r_1 = I - I_0$ и разложим гамильтониан возмущенного движения $\Gamma(w, r_1, q_2, p_2)$ в ряд по q_2, p_2, r_1 :

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \dots + \Gamma_{2m} + \dots, \quad (18)$$

где Γ_{2m} – форма степени $2m$ относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ с 2π -периодическими коэффициентами относительно w . Несущественная аддитивная постоянная в (18) опущена.

Задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний эквивалентна задаче об устойчивости канонической системы с гамильтонианом (18) по отношению к переменным q_2, p_2, r_1 .

Исследование устойчивости будем проводить в линейном приближении. С этой целью рассмотрим каноническую систему с гамильтонианом Γ_2 , который имеет следующий явный вид

$$\Gamma_2 = \omega r_1 + \Gamma_2^{(0)}(q_2, p_2, w), \quad \Gamma_2^{(0)} = f_{20}q_2^2 + f_{02}p_2^2, \quad (19)$$

$$f_{20} = \frac{1}{16} \left(8 p_1^2 + 8 p_1 - \frac{1}{\beta^2} + 1 - \xi + \frac{1}{\beta^2} \cos q_1 \right), \quad f_{02} = \frac{1}{8}. \quad (20)$$

В (19) и (20) величины q_1 и p_1 отвечают невозмущенному движению и определяются по формулам (14).

Гамильтониан (19) зависит от трех параметров: инерционного параметра α , параметра ξ , характеризующего влияние магнитного поля Земли, и величины I_0 , которая является параметром семейства траекторий невозмущенного движения. Для дальнейшего анализа, однако, будет удобнее вместо I_0 использовать Ψ – удвоенную амплитуду плоского невозмущенного движения, а вместо параметра α параметр β .

Заметим, что в линейном приближении угловая переменная изменяется также как и на невозмущенном движении, т.е. $w = \omega\tau + w(0)$. Выбирая теперь w в качестве новой независимой переменной приходим к следующей канонической системе

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial K}{\partial q_2} \quad (21)$$

с гамильтонианом

$$K = \frac{1}{\omega} \Gamma_2^{(0)}(q_2, p_2, w), \quad (22)$$

описывающей изменение переменных q_2, p_2 .

Линейная задача об орбитальной устойчивости эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия $q_2 = p_2 = 0$ линейной неавтономной 2π -периодической системы (21).

3. Анализ устойчивости в случае малых колебаний

В случае колебаний с малыми амплитудами можно ввести малый параметр – удвоенную амплитуду колебаний Ψ . Это позволяет выполнить исследование орбитальной устойчивости в линейном приближении аналитически. Используя известные разложения [10] эллиптических функций и интегралов в степенные ряды по их модулю, а также используя явные формулы (20) для коэффициентов f_{ij} форм (19), имеем следующие выражения для членов второй степени разложения гамильтониана K системы (22) в ряд в окрестности положения равновесия $q_2=p_2=0$

$$K = K_0 + \Psi K_1 + O(\Psi^2), K_0 = 2\beta p_2^2 + \frac{\beta}{2} (1 - \xi) q_2^2, K_1 = q_2^2 \cos w \quad (23)$$

Далее будем считать, что $\xi \neq 1$. Выполним замену переменных по формулам

$$p_2 = \hat{P} \sqrt[4]{\frac{4}{|1-\xi|}}, q_2 = \hat{Q} \sqrt[4]{\frac{|1-\xi|}{4}}, \quad (24)$$

приводящую гамильтониан (23) к виду

$$\hat{K} = \widehat{K}_0 + O(\Psi), \quad \widehat{K}_0 = \frac{1}{2} \Omega_0 (\hat{P}^2 + \text{sign}(1 - \xi) \hat{Q}^2), \quad \Omega_0 = 2\beta \sqrt{|1 - \xi|} \quad (25)$$

При $\xi > 1$ с помощью близкого к тождественному, аналитического по Ψ линейного по \hat{P} , \hat{Q} , и 2π -периодического по w канонического преобразования $\hat{P}, \hat{Q} \rightarrow P, Q$ можно исключить зависимость \hat{K} от w . В новых переменных P, Q гамильтониан примет вид

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} \Omega (P^2 - Q^2), \Omega = \Omega_0 + O(\Psi) \quad (26)$$

Это каноническое преобразование можно получить явно в виде сходящихся по степеням малого параметра Ψ рядов. Коэффициенты при любой конечной степени k

в этих рядах можно определить, например, методом Биркгофа [11,12] или методом Дебри–Хори [13].

Среди характеристических показателей $\lambda_{1,2} = \pm\Omega$ системы с гамильтонианом (26) есть с положительной вещественной частью, что позволяет сделать вывод об орбитальной неустойчивости колебаний с достаточно малыми амплитудами в области $\xi > 1$. Эта область выделена штриховкой на рис.1.

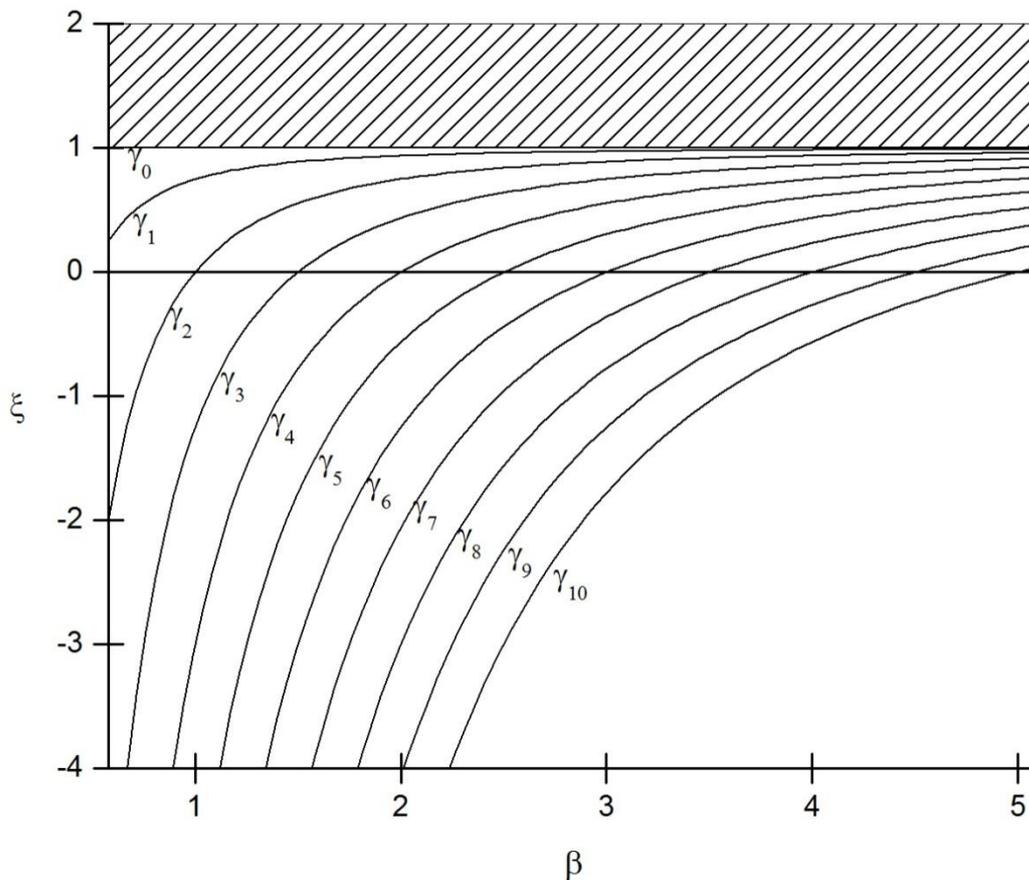


Рис. 1:Порождающие кривые для областей параметрического резонанса

При $\xi < 1$ и $\Psi = 0$ система с гамильтонианом (25) является автономной и описывает гармонические колебания с частотой Ω_0 . Если выполнено неравенство $\Omega_0 \neq n/2$ (n -натуральное число), то при малых амплитудах колебаний ($0 < \Psi \ll 1$)

имеет место орбитальная устойчивость колебаний спутника в линейном приближении [14].

Если же выполнено равенство $\Omega_0 = n/2$, то при сколь угодно малых Ψ в системе с гамильтонианом (25) возможно явление параметрического резонанса, приводящее к орбитальной неустойчивости исследуемых колебаний. На рис. 1 в плоскости параметров (β, ξ) при $\Psi = 0$ изображены кривые γ_n , на которых выполняется равенства $\Omega_0 = n/2$ ($n=1,2,\dots$). Из данных кривых при $\Psi \neq 0$ рождаются области параметрического резонанса. Обозначим через γ_n^\pm границы области параметрического резонанса, рождающейся из кривой γ_n . В пространстве параметров (β, ξ, Ψ) границы γ_n^\pm представляют собой двумерные поверхности, уравнения которых при малых амплитудах колебаний могут быть получены аналитически в виде сходящихся рядов по степеням Ψ . На основании методики, описанной в [10] были получены уравнения следующих границ областей параметрического резонанса:

границы γ_1^\mp

$\beta = \frac{1}{2\sqrt{1-\xi}} \mp \frac{1}{2(1-\xi)} \Psi + \frac{\xi}{8(1-\xi)^{3/2}} \Psi^2 \pm \frac{13\xi + 14}{96(1-\xi)^2} \Psi^3 -$ $- \frac{15\xi^2 + 72\xi + 28}{384(1-\xi)^{5/2}} \Psi^4 \pm \frac{509\xi^2 - 1088\xi + 44}{23040(1-\xi)^3} \Psi^5 +$ $+ \frac{824\xi^3 + 17977\xi^2 + 23364\xi + 3540}{184320(1-\xi)^{7/2}} \Psi^6 + O(\Psi^7);$	(27)
--	------

граница γ_2^-

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} + \frac{3\xi+2}{6(1-\xi)^{3/2}}\Psi^2 + \frac{18\xi^2-225\xi-106}{432(1-\xi)^{5/2}}\Psi^4 +$$

$$+ \frac{432\xi^3+23067\xi^2+111417\xi+30886}{311040(1-\xi)^{7/2}}\Psi^6 + O(\Psi^7);$$
(28)

граница γ_2^+

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} - \frac{1}{6(1-\xi)^{3/2}}\Psi^2 + \frac{15\xi+8}{432(1-\xi)^{5/2}}\Psi^4 -$$

$$- \frac{1971\xi^2+5601\xi-394}{311040(1-\xi)^{7/2}}\Psi^6 + O(\Psi^7);$$
(29)

границы γ_3^\mp

$$\beta = \frac{3}{2\sqrt{1-\xi}} + \frac{3(2\xi-1)}{16(1-\xi)^{3/2}}\Psi^2 \pm \frac{7\xi+2}{32(1-\xi)^2}\Psi^3 +$$

$$+ \frac{424\xi^2-72\xi+179}{5120(1-\xi)^{5/2}}\Psi^4 \pm \frac{64\xi^2-187\xi+6}{2048(1-\xi)^3}\Psi^5 -$$

$$- \frac{1600\xi^3+35832\xi^2+29232\xi+2717}{491520(1-\xi)^{7/2}}\Psi^6 + O(\Psi^7);$$
(30)

граница γ_4^-

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{1-\xi}} - \frac{15\xi-11}{30(1-\xi)^{3/2}}\Psi^2 + \frac{5625\xi^2+5850\xi+3821}{108000(1-\xi)^{5/2}}\Psi^4 -$$

$$- \frac{354375\xi^3+20608875\xi^2+15963675\xi+1754729}{680400000(1-\xi)^{7/2}}\Psi^6 + O(\Psi^7);$$
(31)

граница γ_4^+

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{1-\xi}} - \frac{15\xi - 11}{30(1-\xi)^{\frac{3}{2}}} \Psi^2 + \frac{5625\xi^2 - 15150\xi + 821}{108000(1-\xi)^{\frac{5}{2}}} \Psi^4 +$$

$$+ \frac{354375\xi^3 - 4276125\xi^2 + 25994325\xi - 1206271}{680400000(1-\xi)^{\frac{7}{2}}} \Psi^6 + O(\Psi^7)$$
(32)

границы γ_5^{\mp}

$$\beta = \frac{5}{2\sqrt{1-\xi}} + \frac{5(6\xi - 5)}{48(1-\xi)^{3/2}} \Psi^2 + \frac{5(1656\xi^2 - 1896\xi + 767)}{193536(1-\xi)^{5/2}} \Psi^4 \mp$$

$$\mp \frac{92\xi^2 - 659\xi - 58}{18432(1-\xi)^3} \Psi^5 +$$

$$+ \frac{139968\xi^3 - 232596\xi^2 + 428448\xi - 112495}{55738368(1-\xi)^{7/2}} \Psi^6 + O(\Psi^7);$$
(33)

граница γ_6^-

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{1-\xi}} + \frac{3(35\xi - 31)}{140(1-\xi)^{\frac{3}{2}}} \Psi^2 + \frac{214375\xi^2 - 286650\xi + 112631}{5488000(1-\xi)^{\frac{5}{2}}} \Psi^4 +$$

$$+ \frac{976906875\xi^3 - 3632412875\xi^2 + 5701050775\xi - 691042067}{242020800000(1-\xi)^{\frac{7}{2}}} \Psi^6 +$$

$$+ O(\Psi^7);$$
(34)

граница γ_6^+

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{1-\xi}} + \frac{3(35\xi - 31)}{140(1-\xi)^{\frac{3}{2}}} \Psi^2 + \frac{214375\xi^2 - 286650\xi + 112631}{5488000(1-\xi)^{\frac{5}{2}}} \Psi^4 +$$

$$+ \frac{976906875\xi^3 - 1489520375\xi^2 - 172995725\xi - 1043989067}{242020800000(1-\xi)^{\frac{7}{2}}} \Psi^6 +$$

$$+ O(\Psi^7);$$
(35)

4. Линейный анализ устойчивости при произвольных значениях амплитуды колебаний

При произвольных значениях амплитуды колебаний исследование орбитальной устойчивости в линейном приближении будем проводить на основе численного решения канонической системы линейных уравнений с гамильтонианом K , имеющей следующий явный вид

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{2f_{02}p_2}{\omega}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{2f_{20}q_2}{\omega} \quad (36)$$

Выводы об устойчивости системы (36) можно сделать на основании анализа корней ее характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2k\rho + 1 = 0; \quad 2k = x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi) \quad (37)$$

Величины $x_{11}(2\pi), x_{22}(2\pi)$ – диагональные элементы матрицы монодромии системы (36).

Если $|k| > 1$, то характеристическое уравнение имеет корень, модуль которого больше единицы. В этом случае линейная система (37) неустойчива [14]. Отсюда, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, следует неустойчивость исходной нелинейной системы, а следовательно, и орбитальная неустойчивость соответствующих плоских колебаний. Если же $|k| < 1$, то модули корней характеристического уравнения равны единице, поэтому линейная система (36) устойчива [14]. Из последнего, однако, не следует устойчивость соответствующей нелинейной системы.

При $|\kappa| = 1$ характеристическое уравнение (37) имеет кратный корень $\rho = 1$ или $\rho = -1$. В этом случае анализа устойчивости линейной системы (36) также недостаточно для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости плоских движений твердого тела. При $|\kappa| \leq 1$ вопрос об орбитальной устойчивости плоских периодических движений решается членами не ниже четвертого порядка в гамильтониане (22).

Линейный анализ устойчивости проводился при помощи численного интегрирования системы

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_{11}}{dw} &= \frac{2f_{02}x_{21}}{\omega} \\
 \frac{dx_{21}}{dw} &= -\frac{2f_{20}x_{11}}{\omega} \\
 \frac{dx_{12}}{dw} &= \frac{2f_{02}x_{22}}{\omega} \\
 \frac{dx_{22}}{dw} &= -\frac{2f_{20}x_{12}}{\omega} \\
 \frac{dq_1}{dw} &= \frac{p_1}{\omega} \\
 \frac{dp_1}{dw} &= -\frac{1}{16\beta^2\omega} \sin(q_1)
 \end{aligned} \tag{38}$$

со следующими начальными условиями $x_{ij}(0) = \delta_{ij}, q_1(0) = 0, p_1(0) = \sqrt{2(h+1)}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Допустимые значения параметров представляют собой трехмерную область $(\alpha, \xi, \Psi) \in \Lambda = (1; 2] \times (-\infty; \infty) \times [0; \pi)$. На рисунках 2, 3 и 4 приведены диаграммы устойчивости, полученные на основании численного интегрирования системы при $\xi = 0, \xi = 0,7$ и $\xi = 1,2$ соответственно.

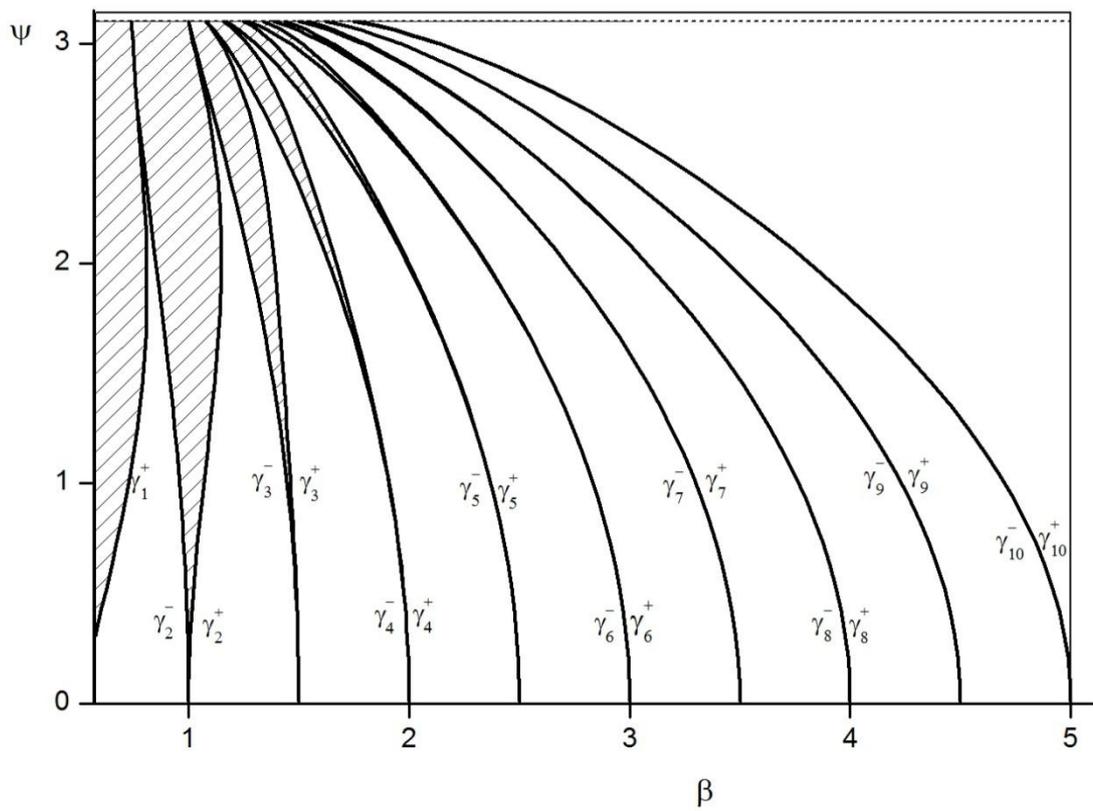


Рис. 2: Диаграмма устойчивости в случае $\xi=0$

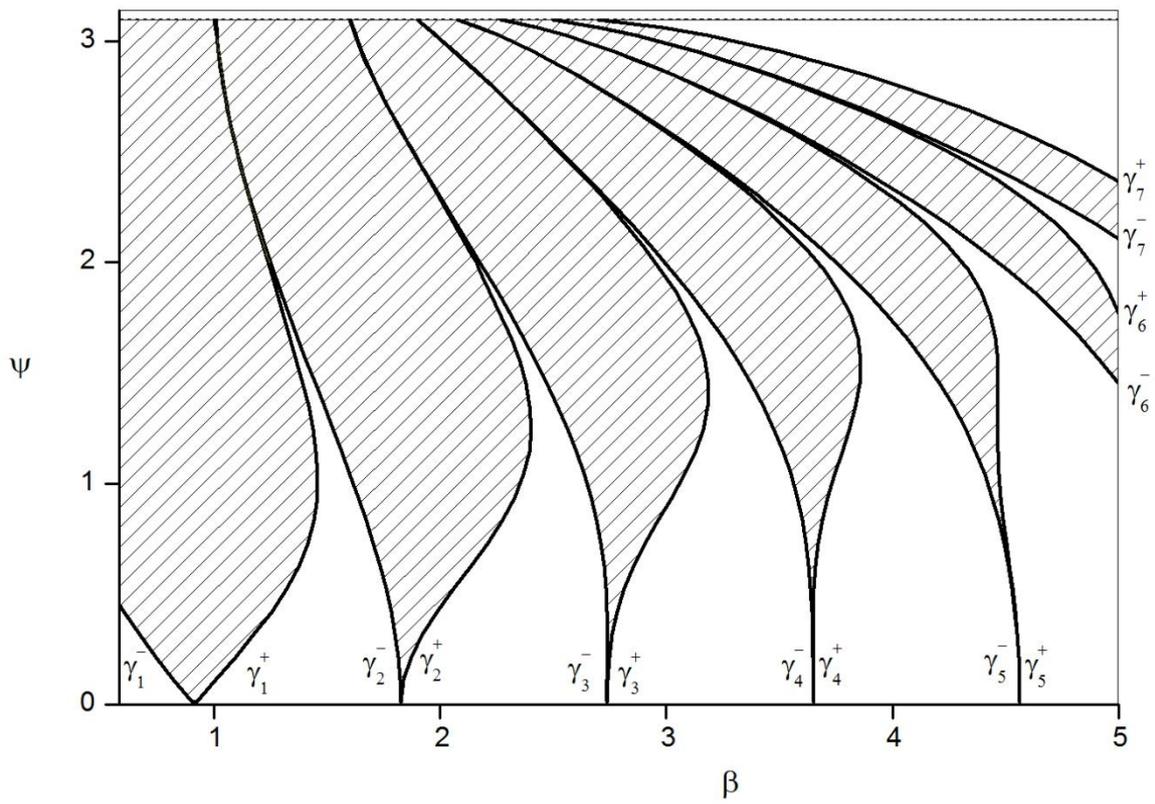


Рис. 3: Диаграмма устойчивости в случае $\xi=0,7$

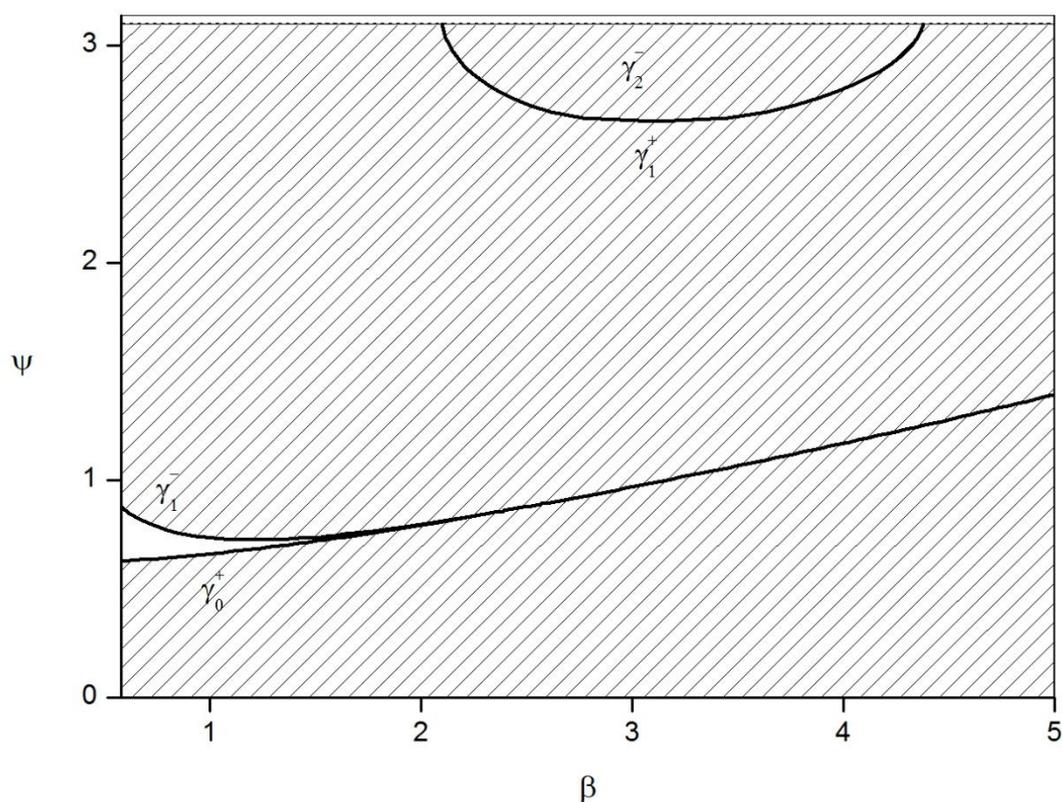


Рис. 4: Диаграмма устойчивости в случае $\xi=1,2$

Штриховкой показаны области орбитальной неустойчивости, в незаштрихованных областях периодические движения устойчивы в линейном приближении. Отметим, что рис. 2–3 из счётного количества областей неустойчивости (параметрического резонанса) изображено лишь конечное число.

Результаты проведённого численного анализа хорошо согласуются с аналитическим исследованием, выполненном в параграфе 3. В частности, уравнения границ γ_n^- и γ_n^+ (27–35) областей неустойчивости (параметрического резонанса) при малых Ψ хорошо аппроксимируют соответствующие границы, полученные численно.

Отметим, что в отсутствии магнитного момента ($\xi = 0$) диаграмма орбитальной устойчивости была получена в плоскости параметров $(\alpha, \Psi/2)$ ранее в работе [8]. Она полностью согласуется с полученной в данной работе диаграммой устойчивости, представленной на рис. 2 для $\xi = 0$.

При возрастании параметра ξ на интервале $[0,1)$ происходит «расширение» и «деформация» областей неустойчивости, но при этом характерный вид диаграммы устойчивости не изменяется (ср. рис. 2 и рис. 3). При переходе параметра ξ через значение $\xi = 1$ на диаграмме устойчивости происходит качественное изменение: вместо счётного числа областей орбитальной неустойчивости вблизи положения равновесия наблюдается появляются две области неустойчивости, разделенные узкой областью устойчивости в линейном приближении.

Данная работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14.01.00380) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ– 2363.2014.1).

Библиографический список

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. - М.: Наука, 1965. – 416 с.
2. Маркеев А.П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // Космические исследования. 1975. Т.13. Вып. 3. С. 322–336.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982. - 621 с.
4. Резонансные вращения спутника при взаимодействии магнитного и гравитационного полей: Препринт / Белецкий В.В., Шляхтин А.Н. – М: Препринт № 46. Институт Прикладной математики АН СССР, 1980. – 30 с.
5. Белецкий В.В.,Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. - М.: Наука, 1985. – 288 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1988. - 509 с.
7. Bardin B.S. On orbital stability of planar motions of symmetric satellites in cases of first and second order resonances. In Proceedings of the 6th Conference on Celestial Mechanics, Monogr. Real Acad. Ci. Exact. F s.-Qu m. Nat. Zaragoza, 25, pages 59–70, 2004.
8. Markeev A.P., Bardin B.S. On the stability of planar oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit. Celestial Mech. Dynam. Astronom, 2003, no.85(1) pp. 51–66.
9. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // Прикладная математика и механика. 2001. Вып. 65(1). С. 51–58.
10. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. - М. - Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2009. - 396 с.
- 11.Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М: Наука, 1978. - 313 с.

12. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. - Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет", 1999. - 408 с.
13. Giacaglia G.E.O. Perturbation methods in non-linear systems. N.Y.: Springer-Verlag, 1972. Перевод на русский: Джакалья Г.Е.О. Методы возмущений для нелинейных систем. - М.: Наука, 1979. 319 с.
14. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1966. - 532 с.