

На правах рукописи



САФОНОВ АЛЕКСЕЙ ИГОРЕВИЧ

**Исследование частных движений механических систем при наличии возмущений**

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре 802 «Мехатроника и теоретическая механика» института №8 «Компьютерные науки и прикладная математика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

**Научный руководитель:** **Холостова Ольга Владимировна**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры 802 «Мехатроника и теоретическая механика» института №8 «Компьютерные науки и прикладная математика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

**Официальные оппоненты:** **Гутник Сергей Александрович**, доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Математика, эконометрика и информационные технологии» федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный институт международных отношений (университет) Министерства иностранных дел Российской Федерации».

**Кулешов Александр Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика и мехатроника» механико-математического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова».

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Защита состоится 25 апреля 2025 года в 10:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.08, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ и на сайте МАИ по ссылке: [https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=183998](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=183998).

Автореферат разослан «    » \_\_\_\_\_ 2025 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
д.ф.-м.н., с.н.с.



В.Ю. Гидасов

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы.

Исследование движений механических систем при наличии возмущений является актуальным направлением в теории устойчивости, теории нелинейных колебаний, в классической и небесной механике. Основа современных методов исследования нелинейных систем заложена в трудах А.М. Ляпунова по теории устойчивости и работах А. Пуанкаре о периодических движениях систем дифференциальных уравнений с малым параметром. Во второй половине 20 века была разработана теория возмущений условно-периодических движений гамильтоновых систем (КАМ-теория, работы А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда, Ю. Мозера), а также теория устойчивости гамильтоновых систем при резонансах, значительный вклад в которую внесли работы А.П. Маркеева. Удобным техническим аппаратом при исследовании гамильтоновых систем является метод нормальных форм, позволяющий максимально, с учетом характера задачи, упростить гамильтониан системы. Для гамильтоновых систем были разработаны конструктивные алгоритмы нормализации (метод Биркгофа, метод Депри-Хори и их модификации и др.). Позднее были подробно исследованы нелинейные колебания близких к автономным, периодическим по времени гамильтоновых систем с одной степенью свободы и автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при наличии резонансов и в случаях, близких к резонансным (работы А.П. Маркеева, О.В. Холостовой, Б.С. Бардина и др.).

Случаи кратных резонансов в периодических по времени гамильтоновых системах с двумя степенями свободы до недавнего времени оставались за рамками исследования. Такие случаи довольно часто встречаются в задачах классической и небесной механики, зависящих от нескольких параметров. Каждый случай кратного резонанса требует отдельного рассмотрения и разработки своего алгоритма исследования. Эти резонансные задачи являются многопараметрическими; параметрами являются коэффициенты нормальных форм. Их исследование стало возможным в значительной степени благодаря появлению мощных компьютерных систем аналитических вычислений. Случаи кратных параметрических резонансов в линейных гамильтоновых системах рассмотрены в работах А.П. Маркеева; нелинейные колебания гамильтоновых систем в случаях кратных параметрических резонансов, а также резонансов третьего и четвертого порядков и близких к ним исследованы в работах О.В. Холостовой.

В данной диссертации рассмотрен ряд не исследованных ранее случаев кратного резонанса в гамильтоновых системах с двумя степенями свободы. Изучены нелинейные колебания (периодические и условно-периодические движения) в автономной системе при резонансе 1:1 для значений параметров, близких к точке кратного резонанса пространства параметров. Для близкой к автономной, периодической по времени системы исследованы

периодические движения в случае точного двойного (основного и комбинационного) резонанса третьего порядка и при наличии резонансной расстройки по одной из частот. Для такой же системы изучен случай двойного комбинационного (сильного и слабого) резонанса третьего порядка, без учета и с учетом имеющегося резонанса четвертого порядка. Часть задач рассмотрена на примере изучения резонансных движений осесимметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в окрестности его стационарных вращений на круговой орбите. В частности, построены новые классы резонансных периодических движений спутника, проведен линейный и нелинейный анализ их устойчивости.

В диссертации также исследуется влияние малых диссипативных сил на устойчивость частного движения (положения равновесия) автономной системы на примере приближенной задачи о движении тяжелого твердого тела при наличии вертикальных высокочастотных вибраций одной из его точек. Влияние высокочастотных вибраций на изменение характера устойчивости маятниковых систем изучалось в работах А. Стефенсона, П.Л. Капицы и др. Динамика твердого тела с различной геометрией масс при наличии быстрых вибраций рассматривалась в работах А.П. Маркеева, О.В. Холостовой и др.

**Целью** данной диссертационной работы является исследование влияния малых возмущений различного вида на устойчивость частных движений и характер нелинейных колебаний системы в их окрестности в задачах динамики гамильтоновых систем при наличии кратных резонансов, а также в диссипативных системах.

### **Научная новизна.**

1. Разработан способ исследования автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия при резонансе 1:1 и вблизи него в случае, когда матрица коэффициентов линеаризованных уравнений приводится к диагональной форме; исследование проводится на примере задачи динамики симметричного спутника на круговой орбите в окрестности цилиндрической прецессии. Построен приближенный (модельный) гамильтониан, подробно исследованы движения модельной системы. Найдены периодические движения исходной полной системы, проведен анализ их орбитальной устойчивости в строгой нелинейной постановке. Методами КАМ-теории описаны двухчастотные условно-периодические движения полной системы для двух наборов параметров модельной системы.

2. Исследованы движения близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности неустойчивого тривиального равновесия в случае двойного (основного и комбинационного) резонанса третьего порядка. Построены приближенные (модельные) гамильтонианы, отвечающие автономным системам, решен вопрос о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении)

положений равновесия этих систем. Аналитически выявлены области параметров задачи, для которых выполняются достаточные условия устойчивости. При помощи аналитических и графических методов построены области необходимых условий устойчивости. Методом Пуанкаре построены периодические по времени решения исходной неавтономной системы, сделаны выводы об их устойчивости (в линейном приближении).

3. Для того же кратного резонанса третьего порядка рассмотрен случай, когда по одной из частот имеется малая резонансная расстройка. Решен вопрос о существовании и числе периодических движений системы. Выявлены области параметров, где выполняются условия устойчивости (в линейном приближении) и достаточные условия неустойчивости этих движений.

4. Проведено исследование близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности неустойчивого тривиального равновесия в случае двойного (сильного и слабого) комбинационного резонанса третьего порядка. Построен приближенный (модельный) гамильтониан. Аналитически и графически решен вопрос о существовании и числе положений равновесия модельной системы.

5. Для указанной системы при наличии кратного комбинационного резонанса третьего порядка проведено исследование, учитывающее имеющийся резонанс четвертого порядка, на примере задачи о движении динамически симметричного спутника (твёрдого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите. За невозмущенное движение принято одно из стационарных вращений спутника на круговой орбите (коническая или гиперболоидальная прецессия). Для ряда резонансных значений параметров построены периодические движения спутника, дана их графическая интерпретация, проведен полный, линейный и нелинейный, анализ их устойчивости.

6. Проведен анализ влияния малых диссипативных сил (сил вязкого трения) на характер устойчивости положения равновесия системы в приближенной задаче динамики твёрдого тела с вибрирующей вдоль вертикали точкой подвеса. Изучается устойчивость двух относительных равновесий тела, когда его центр масс и точка подвеса лежат на одной вертикали. Показано, что имеет место особенный (по терминологии И.Г. Малкина) случай нулевого корня, а положение равновесия, устойчивое при отсутствии вязкого трения, становится при его наличии асимптотически устойчивым по всем переменным, кроме одной (критической) переменной, по которой сохраняется обычная устойчивость.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** В диссертационной работе решен ряд новых актуальных задач, исследующих влияние возмущений различного характера на устойчивость и свойства нелинейных колебаний механических систем. Изучались нелинейные

колебания автономных или близких к автономным гамильтоновым систем с двумя степенями свободы в нескольких не исследованных ранее случаях кратных резонансов, а также в случаях, близких к резонансным. Полученные общетеоретические результаты развивают теорию нелинейных колебаний гамильтоновых систем при резонансах и, в частности, предлагают алгоритмы построения новых классов резонансных периодических движений систем. В диссертации найдены новые резонансные периодические движения симметричного спутника относительно центра масс в окрестности его стационарных вращений на круговой орбите и проведен линейный и нелинейный анализ их устойчивости. Исследовалось также влияние малых диссипативных сил на устойчивость двух относительных равновесий в приближенной задаче динамики твердого тела, при наличии высокочастотных вибраций одной из его точек. Полученные результаты могут быть полезны при разработке вибрационных систем, в том числе используемых в авиационной промышленности и ракетостроении.

**Методы исследования.** Для достижения цели диссертационной работы применялись методы теорий устойчивости линейных и нелинейных гамильтоновых систем, в том числе методы исследования устойчивости при резонансах и КАМ-теория, а также метод малого параметра Пуанкаре. При исследовании устойчивости в особенном случае одного нулевого корня использовались результаты И.Г. Малкина. Применялись методы нормальных форм, нормализация гамильтонианов проводилась методом Депри-Хори. Использовались компьютерные системы аналитических вычислений и численные расчеты.

### **Положения и результаты, выносимые на защиту.**

1. Методика исследования автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия при резонансе 1:1 и вблизи него в случае, когда матрица коэффициентов линеаризованных уравнений возмущенного движения приводится к диагональной форме, на примере задачи динамики симметричного спутника на круговой орбите в окрестности цилиндрической прецессии. Периодические движения системы, линейный и нелинейный анализ их орбитальной устойчивости. Анализ условно-периодических движений системы (для двух наборов параметров).

2. Решение задачи о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности неустойчивого тривиального равновесия в случае двойного (основного и комбинационного) резонанса третьего порядка. Для модельных автономных систем выявлены области (в пространстве параметров задачи) выполнения достаточных и только необходимых условий устойчивости порождающих положений равновесия.

3. Исследование того же резонансного случая в предположении, что по одной из частот имеется малая резонансная расстройка. Решение задачи о

существовании и числе периодических движений системы. Описание областей выполнения достаточных условий их устойчивости (в линейном приближении) и достаточных условий неустойчивости.

4. Решение задачи о существовании и числе положений равновесия приближенной системы при исследовании близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности неустойчивого тривиального равновесия в случае двойного комбинационного (сильного и слабого) резонанса третьего порядка.

5. Исследование указанного резонансного случая с учетом резонанса четвертого порядка на примере задачи о движении динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите в окрестности его стационарных вращений. Построение резонансных периодических движений спутника, линейный и нелинейный анализ их устойчивости.

6. Анализ влияния малых диссипативных сил на характер устойчивости положения равновесия системы на примере задачи динамики твердого тела с вибрирующей вдоль вертикали точкой подвеса. Результаты устойчивости для трех частных случаев геометрии масс тела.

**Степень достоверности.** Достоверность представленных в диссертации результатов обеспечивается применением строгих математических методов, а также методов исследования, принятых в теоретической механике, теории устойчивости и теории нелинейных колебаний, высокой точностью проведенных численных расчетов. Полученные результаты согласуются с уже известными результатами аналитического и численного анализа.

**Апробация результатов.** Результаты диссертации докладывались

- на научных семинарах кафедры «Мехатроника и теоретическая механика» Московского авиационного института (НИУ),
- на Юбилейной 50-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (НГУ, 2012, Новосибирск),
- на Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (РУДН, 2012, Москва),
- на 14-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика - 2015» (МАИ, 2015, Москва),
- на LI Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (РУДН, 2015, Москва),
- на XXVII Международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов «МИКМУС» (ИМАШ РАН, 2015, Москва),
- на LII Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (РУДН, 2016, Москва),

- на LIV Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (РУДН, 2018, Москва),
- на XVI Международной научной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (ИПУ РАН, 2022, Москва).

Работа поддержана грантом РФФИ (проект №14-01-00380).

**Публикации.** Основные положения диссертационного исследования опубликованы в 11 научных работах, из них 6 статей [1–6] в журналах, входящих в перечень ВАК, 8 публикаций в различных сборниках и материалах конференций.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки диссертационной работы, задавались научным руководителем. Автор выполнил подавляющее большинство аналитических исследований и численных расчетов, самостоятельно обрабатывал и интерпретировал полученные результаты.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы из 183 наименований. Работа содержит 32 иллюстрации, 6 таблиц. Общий объем диссертации составляет 205 страниц.

### Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы и приведен обзор литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель, описаны задачи, сформулированы научная новизна и практическая значимость работы.

**В первой главе** ставится задача об исследовании нелинейных колебаний автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия в случае резонанса 1:1. Предполагается, что матрица коэффициентов линеаризованных уравнений приводится к диагональной форме, и положение равновесия устойчиво в линейном приближении.

Исследование проводится на примере задачи о движении динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Ориентацию главных центральных осей инерции спутника в орбитальной системе координат зададим углами Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ . Задача зависит от параметров  $\alpha = C/A$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ) и  $\beta = r_0/\omega_0$ , где  $A$  и  $C$  — экваториальный и осевой моменты инерции спутника,  $\omega_0$  — среднее движение центра масс тела по орбите,  $r_0$  — проекция вектора угловой скорости тела в орбитальной системе координат на ось его динамической симметрии ( $r_0 = \text{const}$ ).

Гамильтониан, описывающий движение спутника, имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{\sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2} - \cot \theta \left( \cos \psi + \frac{\alpha \beta}{\sin \theta} \right) p_\psi - p_\theta \sin \psi + \frac{\alpha \beta \cos \psi}{\sin \theta} +$$

$$+ \frac{\cos^2 \theta}{2} \left( \frac{\alpha^2 \beta^2}{\sin^2 \theta} + 3(\alpha - 1) \right),$$

Здесь  $p_\psi, p_\theta$  — безразмерные обобщенные импульсы, сопряженные с углами  $\psi, \theta$ . За независимую переменную принято безразмерное время  $\tau = \omega_0 t$ .

Движения спутника рассматриваются в окрестности одного из стационарных вращений (цилиндрической прецессии), для которого  $\psi = \pi, \theta = \pi/2, p_\psi = 0, p_\theta = 0$ . Для значений  $\alpha = 1, \beta = 2$  частоты малых колебаний линеаризованных уравнений возмущенного движения равны  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  (резонанс 1:1).

Введем малый параметр  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) и положим  $\alpha = 1 + \varepsilon\alpha_1, \beta = 2 + \varepsilon\beta_1$ . Методами теории возмущений нормализуем гамильтониан возмущенного движения в слагаемых до четвертой степени включительно относительно возмущений и до порядка  $\varepsilon$  включительно. В симплектических полярных координатах  $\Phi_j, R_j$  ( $j = 1, 2$ ) нормализованный гамильтониан имеет вид

$$\Gamma = R_2 + \frac{1}{2} \varepsilon [R_2 (\beta_1 + 2\alpha_1) + \frac{1}{4} R_2^2] + \varepsilon [\frac{1}{2} R_1 (R_2 - R_1) \sin^2 \Phi_1 + \frac{3}{2} \alpha_1 R_1 + (\beta_1 + 2\alpha_1 + \frac{R_2}{2}) \sqrt{R_1} \sqrt{R_2 - R_1} \sin \Phi_1] + O(\varepsilon^2), \quad (1)$$

где в  $O(\varepsilon^2)$  входят слагаемые более второй степени по переменным  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ).

В приближенном гамильтониане, в котором отброшено слагаемое  $O(\varepsilon^2)$ , координата  $\Phi_2$  циклическая, и  $R_2 = c = \text{const} > 0$ . Полагая также  $R_1 = cr$  ( $0 \leq r \leq 1$ ), вводя новую независимую переменную  $\eta = \varepsilon\tau$  и параметры  $a = 3\alpha_1/c$  и  $b = (2\beta_1 + 4\alpha_1)/c + 1$ , получим приведенный (модельный) гамильтониан, отвечающий системе с одной степенью свободы. В декартовых координатах  $x = \sqrt{2r} \sin \Phi_1, y = \sqrt{2r} \cos \Phi_1$  он имеет вид

$$\gamma' = \frac{a}{4} (x^2 + y^2) + \frac{b}{4} \sqrt{2 - x^2 - y^2} x + \frac{x^2}{8} (2 - x^2 - y^2). \quad (2)$$

Проведено подробное исследование движений модельной системы (2). В общем случае,  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , система имеет два или четыре положения равновесия, для которых  $y = 0$ , а величина  $x$  удовлетворяет уравнению

$$b = \left[ \sqrt{2 - x^2} x (a + 1 - x^2) \right] / (x^2 - 1).$$

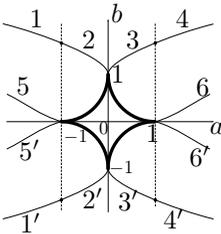


Рис. 1: Бифуркационная кривая и кривые вырождения.

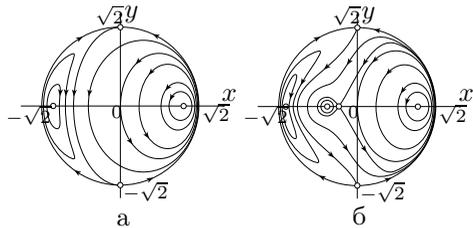


Рис. 2: Фазовый портрет модельной системы при  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

Переход от одного случая к другому происходит при условии  $|a|^{2/3} + |b|^{2/3} = 1$ , задающем бифуркационную кривую — астроиду в

плоскости параметров  $(a, b)$  (см. рис. 1, полужирная линия). Для точек  $a, b$ , лежащих внутри астроиды, число положений равновесия системы равно четырем, вне этой кривой — два положения равновесия. Показано, что в области существования двух положений равновесия оба они устойчивы; в области четырех положений равновесия одно из них неустойчиво и три устойчивы.

Другие движения модельной системы имеют колебательный характер или являются асимптотическими. Качественно различные фазовые портреты системы представлены на рис.2 а, б.

В полной системе с гамильтонианом (1) осуществлена изоэнергетическая редукция и при помощи метода Пуанкаре построено семейство периодических решений, рождающихся из положения равновесия  $x = x_0, y = 0$  модельной системы. Период этих решений отличается от  $2\pi$  на величину порядка  $\varepsilon$ . В исходных переменных эти решения имеют вид  $(q_1$  и  $q_2$  - возмущения величин  $\psi$  и  $\theta$  от их значений, отвечающих цилиндрической прецессии)

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \sqrt{\varepsilon c} x_0 \cos \Phi_2 + \\
 &+ \frac{(\varepsilon c)^{3/2}}{48} \left[ \left( (2 - x_0^2)^{1/2} (3 - 13x_0^2) + 3x_0 (x_0^2/2 - 4a - 2b - 1) \right) \cos \Phi_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 3(2 - x_0^2)^{1/2} (x_0^2 - 1) + x_0 (3 - x_0^2) \right) \cos 3\Phi_2 \right] + O(\varepsilon^{5/2}), \\
 q_2 &= (\varepsilon c (2 - x_0^2))^{1/2} \sin \Phi_2 + \\
 &+ \frac{(\varepsilon c)^{3/2}}{48} \left[ \left( 3(2 - x_0^2)^{1/2} (5x_0^2/2 - 2b) + x_0 (13x_0^2 - 15) \right) \sin \Phi_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left( (2 - x_0^2)^{1/2} (5x_0^2 - 1) + 3x_0 (x_0^2 - 1) \right) \sin 3\Phi_2 \right] + O(\varepsilon^{5/2}), \\
 \Phi_2 &= \Omega_2 (\tau + \tau_0), \\
 \Omega_2 &= 1 + \frac{\varepsilon c}{4} \left[ b + x_0^2 + x_0 (2 - x_0^2 + b) / (2 - x_0^2)^{1/2} \right] + O(\varepsilon^2). \tag{3}
 \end{aligned}$$

Периодическое движение, порождаемое неустойчивым положением равновесия модельной системы, орбитально неустойчиво. Для получения строгого вывода об орбитальной устойчивости периодических движений, порождаемых устойчивым положением равновесия модельной системы, проведена нормализация гамильтониана в их окрестности в слагаемых до четвертой степени включительно относительно возмущений. Гамильтониан возмущенного движения приведен к виду

$$\Gamma' = \Omega_1 r_1 + \Omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \dots$$

Здесь частота  $\Omega_1$  порядка  $\varepsilon$  и определяется частотой малых колебаний порождающего положения равновесия, частота  $\Omega_2$  определена в (3), величины  $c_{ij}$  порядка  $\varepsilon$ .

Если величина  $\Delta = c_{20}\Omega_2^2 - c_{11}\Omega_1\Omega_2 + c_{02}\Omega_1^2 \neq 0$ , то рассматриваемое периодическое решение орбитально устойчиво на основании теоремы Арнольда—Мозера. При достаточно малых  $\varepsilon$  условие орбитальной устойчивости может нарушиться, если обратится в нуль коэффициент  $c_{20}$ .

Получено уравнение кривой  $c_{20} = 0$  (кривой вырождения), ветви которой показаны на рис. 1 тонкими сплошными линиями.

Если значения параметров  $a$ ,  $b$  и  $h$  модельной системы с гамильтонианом (2) не соответствуют положениям равновесия и сепаратрисам, то движения системы носят колебательный характер. В этих случаях колебательными будут также и движения приближенной системы с двумя степенями свободы с гамильтонианом (1) (без последнего слагаемого). Для описания отвечающих им движений полной системы с гамильтонианом (1) рассмотрим два набора параметров:  $a = 0$ ,  $b = 1$  и  $a = 1$ ,  $b = 0$ .

В обоих случаях в областях колебаний проведено интегрирование модельной системы и найдены зависимости  $r = r(\eta, h)$ , где  $h$  — константа интеграла энергии  $\gamma' = h = \text{const}$  системы. В рассматриваемых областях введены переменные действие-угол. Переменные действие-угол  $I_j$ ,  $w_j$  ( $j = 1, 2$ ) введены также в приближенных системах с двумя степенями свободы.

В переменных действие-угол полный гамильтониан системы записывается в виде

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma^{(0)}(I_2) + \varepsilon \Gamma^{(1)}(I_1, I_2) + \varepsilon^2 \Gamma^{(2)}(I_1, I_2, w_1, w_2, \varepsilon), \quad (4)$$

где в случаях  $a = 0$ ,  $b = 1$  и  $a = 1$ ,  $b = 0$  имеем соответственно

$$\tilde{\Gamma} = I_2 + \varepsilon (I_2^2/8 + I_1^2/2) \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma} = I_2 + \varepsilon (-I_2^2/8 + I_2^2 \Phi(I_1/I_2)).$$

Здесь  $\Phi$  — функция, задающая равенство  $h = \Phi(I_1/I_2)$ .

Частоты нелинейных колебаний приближенной системы с гамильтонианом (4) (без последнего слагаемого) равны  $\omega_1 = \varepsilon I_1$ ,  $\omega_2 = 1 + \varepsilon I_2/4$  для случая  $a = 0$ ,  $b = 1$  и  $\omega_1 = \varepsilon I_2 \Phi'$ ,  $\omega_2 = 1 - \varepsilon (I_2 - 8I_2 \Phi + 4I_1 \Phi')/4$  для случая  $a = 1$ ,  $b = 0$ .

В системе имеет место случай собственного вырождения, так как главная часть гамильтониана зависит только от одной переменной действия  $I_1$ . Пусть в начальный момент времени отношение найденных частот не является рациональным числом. Показано, что для обоих наборов параметров выполнены условия

$$\partial \Gamma^{(0)} / \partial I_2 \neq 0, \quad \partial \Gamma^{(1)} / \partial I_1 \neq 0, \quad \partial^2 \Gamma^{(1)} / \partial I_1^2 \neq 0.$$

Отсюда, на основании результатов КАМ-теории, следует, что движения полной системы с функцией Гамильтона (1) для большинства начальных условий условно-периодические с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Доля фазового пространства, не заполненная этими траекториями, определяется величиной  $O(\exp(-d_1/\varepsilon))$ , где  $d_1 = \text{const} > 0$ . Кроме того, для всех начальных условий переменные  $I_j(\tau)$  ( $j = 1, 2$ ) при всех  $\tau$  остаются вблизи своих начальных значений, и справедлива оценка  $|I_j(\tau) - I_j(0)| < \varepsilon d_2$  ( $d_2 = \text{const} > 0$ ).

**Во второй главе** исследуются движения близкой к автономной,  $2\pi$ -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Предполагается, что система содержит малый параметр  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ), причем при  $\varepsilon = 0$  система автономна.

Пусть начало координат фазового пространства — положение равновесия системы, устойчивое в линейном приближении, и соответствующие характеристические показатели  $\pm i\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) линеаризованных уравнений возмущенного движения чисто мнимые. Пусть величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  связаны одним из соотношений

$$\lambda_1 = k_1 + 1/3, \quad \lambda_2 = k_2 + 5/6, \quad \lambda_1 = k_1 + 2/3, \quad \lambda_2 = k_2 + 1/6, \quad (5)$$

$$\lambda_1 = k_1 + 1/3, \quad \lambda_2 = k_2 + 1/6, \quad \lambda_1 = k_1 + 2/3, \quad \lambda_2 = k_2 + 5/6, \quad (6)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — целые числа. Тогда комбинации  $3\lambda_1$ ,  $\lambda_1 + 2\lambda_2$  и  $3\lambda_1$ ,  $\lambda_1 - 2\lambda_2$  в случаях (5) и (6) соответственно являются целыми числами, то есть в системе реализуется двойной резонанс третьего порядка.

Будем называть резонанс основным, если в резонансном соотношении присутствует только одна из величин  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ), и комбинационным, если в нем имеются обе величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Кроме того, назовем резонанс сильным, если он может привести к неустойчивости в системе, и слабым, если его наличие не приводит к неустойчивости. Ранее в работе (Холостова, 2012) было показано, что для всех случаев двойного резонанса третьего порядка тривиальное равновесие полной системы неустойчиво при всех соотношениях резонансных коэффициентов.

В диссертации решалась задача о существовании, числе и устойчивости периодических движений системы в малой окрестности тривиального равновесия. С этой целью на первом этапе проведена нормализация гамильтониана системы в слагаемых до четвертой степени включительно относительно возмущений. В симплектических полярных координатах гамильтониан приводится к виду

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \varepsilon \left\{ ar_1^{3/2} \cos(3\varphi_1 - 3\lambda_1 t + 3\varphi_1^*) + \right. \\ & \left. + br_1^{1/2} r_2 \cos[\varphi_1 + 2\sigma\varphi_2 - (\lambda_1 + 2\lambda_2)t + \varphi_1^* + 2\sigma\varphi_2^*] \right\} + \\ & + \varepsilon dr_1 r_2 \cos[2\varphi_1 - 2\sigma\varphi_2 - (2\lambda_1 + 2\lambda_2)t + 2\varphi_*] + O_{5/2}, \end{aligned}$$

где  $\sigma = 1$  или  $-1$ ,  $a, b, d, c_{kl}, \varphi_j^*, \varphi_*$  — константы, а слагаемое  $O_{5/2}$   $12\pi$ -периодично по  $t$ .

Перейдем в  $\varepsilon$ -окрестность начала координат по формулам  $r_j = \varepsilon^2 R_j$ ,  $\varphi_j = \tilde{\varphi}_j$ , ( $j = 1, 2$ ) и сделаем каноническую замену

$$\tilde{R}_j = R_j, \quad \tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t, \quad \tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t.$$

Положим еще

$$\alpha = a/b, \quad \gamma_{20} = c_{20}/c_{11}, \quad \gamma_{02} = c_{02}/c_{11}, \quad (7)$$

введем новую независимую переменную  $\tau$  по формуле  $\tau = (\varepsilon^2 b^2 / c_{11}) t$  и, придавая величине  $\sigma$  значения  $1$  и  $-1$ , получим два гамильтониана, характерных для данного резонансного случая:

$$G_1 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon), \quad (8)$$

$$G_2 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon). \quad (9)$$

Гамильтониан (8) отвечает случаю двух сильных (основного и

комбинационного) резонансов третьего порядка, а гамильтониан (9) — случаю сильного основного и слабого комбинационного резонансов. Эти гамильтонианы зависят от трех параметров  $\alpha$ ,  $\gamma_{20}$  и  $\gamma_{02}$ .

Проводился анализ положений равновесия приближенных (модельных) систем с гамильтонианами, получающимися из (8) и (9) при отбрасывании слагаемых  $O(\varepsilon)$ . Пусть  $\Psi_1 = 3\Phi_1$ ,  $\Psi_2 = \Phi_1 \pm 2\Phi_2$ . Равновесные значения переменных  $\Psi_j$ ,  $R_j$  ( $j = 1, 2$ ) задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \sin(\Psi_j) &= 0, & 2(4g - 1)R_1 + 3(2\alpha\delta_1\gamma_{02} - \delta_2)R_1^{1/2} - 1 &= 0, \\ R_2 &= -(\delta_2 + R_1^{1/2})/\gamma_{02}, \\ \delta_j &= \cos\Psi_j = \pm 1 \quad (j = 1, 2), & g &= \gamma_{02}\gamma_{20}. \end{aligned} \quad (10)$$

$g$	$\gamma_{02} < 0$	$\gamma_{02} > 0$
$(\frac{1}{4}, \infty)$	$R_{10}^+$ : $(-1, 1), \alpha > 0;$ $(1, 1), \alpha > 0;$ $(1, -1), \alpha > \alpha';$	$R_{10}^+$ : $(1, -1), \alpha > 0;$ $(-1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$
$(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$	$R_{10}^-$ : $(-1, -1), \alpha > 0;$ $P_3: (1, -1), 0 < \alpha < \alpha_1^{pm};$ $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$ $R_{10}^+$ : $(1, -1), \alpha' < \alpha < \alpha_1^{pm};$ $(-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$	$R_{10}^+$ : $(1, -1), \alpha > 0;$ $(-1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$
$(0, \frac{1}{8})$	$R_{10}^-$ : $(-1, -1), \alpha > 0;$ $P_5: (1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$ $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$ $R_{10}^+$ : $(-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$	$R_{10}^+$ : $(1, -1), \alpha > 0;$ $(-1, -1), 0 < \alpha < \alpha_2^{mm};$ $R_{10}^-$ : $(-1, -1), \alpha' < \alpha < \alpha_2^{mm};$
$(-\frac{1}{32}, 0)$	$R_{10}^-$ : $(-1, -1), \alpha > \alpha';$ $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$ $R_{10}^+$ : $(-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$	$R_{10}^+$ : $(1, -1), \alpha > \alpha';$ $(-1, -1), 0 < \alpha < \alpha_2^{mm};$ $(1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$ $R_{10}^-$ : $(-1, -1), 0 < \alpha < \alpha_2^{mm};$ $P_1: (1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$
$(-\infty, -\frac{1}{32})$	$R_{10}^-$ : $(-1, -1), \alpha > \alpha';$ $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$ $R_{10}^+$ : $(-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$	$R_{10}^+$ : $(1, -1), \alpha > \alpha';$ $P_2: (1, -1), \alpha_1^{pm} < \alpha < \alpha';$ $R_{10}^-$ : $(1, -1), \alpha_1^{pm} < \alpha < \alpha'$

Таблица 1: Положения равновесия.

В пространстве параметров  $g = \gamma_{02}\gamma_{20}$ ,  $\gamma_{02}$  и  $\alpha$  выявлены области с различным числом (от нуля до двух) действительных положительных решений системы (табл. 1). Для обеих модельных систем с гамильтонианами (8) и (9) наборы равновесных точек одинаковы. В таблице в круглых скобках заданы пары значений  $(\delta_1, \delta_2)$  и введены обозначения:

$$\alpha' = 4|\gamma_{20}|/3, \alpha_1^{pm} = \alpha_1 \big|_{\delta_1=1, \delta_2=-1}, \alpha_2^{mp} = \alpha_2 \big|_{\delta_1=-1, \delta_2=1},$$

$$\alpha_2^{mm} = \alpha_2 \big|_{\delta_1=-1, \delta_2=-1}, \alpha_{1,2} = \left( 3\delta_1\delta_2\gamma_{02} \pm 2\sqrt{2\gamma_{02}^2(1-4g)} \right) / (6\gamma_{02}^2).$$

В ячейках таблицы указаны одно или два соответствующих рассматриваемому случаю равновесных значения  $R_1 = R_{10}^\pm$ . Каждому значению  $R_{10}^+$  или  $R_{10}^-$  отвечает единственное равновесное значение  $R_2 = R_{20}$ . Здесь

$$R_{10}^\pm = \left( \frac{3(2\alpha\delta_1\gamma_{02} - \delta_2) \pm \sqrt{36\gamma_{02}^2\alpha^2 - 36\delta_1\delta_2\gamma_{02}\alpha + 32g + 1}}{4(1-4g)} \right)^2, R_{20} = -\frac{\delta_2 + R_{10}^{1/2}}{\gamma_{02}}. \quad (11)$$

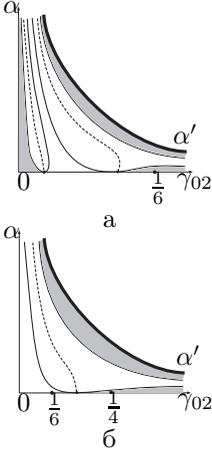


Рис. 3: Точка  $P_1$  системы второго типа.

Достаточные условия устойчивости положений равновесия рассматривались как условия знакоопределенности квадратичных форм  $\Gamma_{1,2}^*$  гамильтонианов возмущенного движения, проверяемые при помощи критерия Сильвестра. Для обеих систем условия положительной определенности форм сводятся к соотношениям  $\gamma_{02} > 0$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = -1$ , а условия отрицательной определенности — к соотношениям  $\gamma_{02} < 0$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ . Имеются четыре равновесные точки, удовлетворяющие приведенным условиям. Соответствующие им строчки выделены в табл. 1 жирным шрифтом и заключены в двойные рамки.

Для решения вопроса об устойчивости остальных равновесных точек рассматривалось характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения, имеющее вид  $\lambda^4 + p\lambda^2 + q = 0$ . Условию  $q > 0$  соответствуют пять положений равновесия  $P_i$  ( $i = 1 \dots 5$ ); в табл. 1 соответствующие им строчки заключены в рамки. Для остальных положений равновесия в таблице 1 выполняется условие  $q < 0$ , и имеет место неустойчивость.

Проанализированы условия  $p > 0$ ,  $\mathfrak{D} > 0$  для равновесных точек  $P_i$  ( $i = 1 \dots 5$ ) обеих модельных систем. В сечениях  $g = \text{const}$ , в плоскости параметров  $\gamma_{02}$ ,  $\alpha$ , численно и аналитически строились граничные кривые исследуемой области, а также кривые  $p = 0$  и  $\mathfrak{D} = 0$ . Выделялись подобласти, в которых выполнены условия  $p > 0$ ,  $\mathfrak{D} > 0$  устойчивости в линейном приближении, и подобласти неустойчивости.

Для систем первого и второго типов необходимые условия устойчивости для одних и тех же точек  $P_i$  ( $i = 1 \dots 5$ ) различаются. В качестве примера рассмотрим равновесную точку  $P_1$  системы второго типа. На рис. 3 представлены характерные случаи сечений пространства параметров плоскостью  $g = \text{const}$ . Кривая, соответствующая  $\mathfrak{D} = 0$ , обозначена жирной линией, а кривая  $p = 0$  — пунктирной. Заштрихована область выполнения необходимых условий устойчивости. Интервал изменения параметра  $g$  разбивается на подинтервалы  $g \in (-1/32, -1/36)$  и  $g \in (-1/36, 0)$ , для которых в сечениях имеются три и две области

устойчивости (в линейном приближении) соответственно (рис. 3а и 3б). Для остальных точек проведен аналогичный анализ.

Возвращаясь к полным системам и проводя в обратной последовательности замены переменных, найдем отвечающие ему периодические движения системы с исходным гамильтонианом, аналитические по  $\varepsilon$  и имеющие по  $t$  период  $12\pi$ . Они имеют следующий вид:

$$q_j = \varepsilon\sqrt{2\xi R_{j0}} \sin \varphi_j + O(\varepsilon^2), \quad p_j = \varepsilon\sqrt{2\xi R_{j0}} \cos \varphi_j + O(\varepsilon^2),$$

$$\varphi_1 = \lambda_1 t + \Psi_{10}/3 - \varphi_1^*, \quad \varphi_2 = \sigma \lambda_2 t \pm (\Psi_{20} - \Psi_{10}/3)/2 - \varphi_2^*,$$

где  $R_{j0}$  ( $j = 1, 2$ ) определены в (11),  $\Psi_{j0} = \arccos \delta_j$  ( $j = 1, 2$ ),  $\xi = b^2/c_{11}^2$  и  $\varphi_j^*$  ( $j = 1, 2$ ) — константы. Слагаемые  $O(\varepsilon^2)$  в выражениях для  $q_j, p_j$  ( $j = 1, 2$ ) содержат гармоники величин  $nt, n_1\lambda_1 t, n_2\lambda_2 t$ , где  $n, n_1, n_2$  — целые числа.

Неустойчивые положения равновесия модельных систем переходят в неустойчивые периодические движения полных систем. Положения равновесия, для которых выполнены достаточные или только необходимые условия устойчивости, переходят в периодические движения полных систем, устойчивые в линейном приближении.

**В третьей главе** продолжено исследование гамильтоновой системы, описанной в главе 2, в случае, близком к рассмотренному кратному резонансу третьего порядка. Приведем гамильтониан к нормальной форме, затем перейдем в  $\varepsilon$ -окрестность начала координат по формулам  $r_j = \varepsilon^2 R_j$ ,  $\varphi_j = \Phi_j$ , ( $j = 1, 2$ ). Введем резонансные расстройки  $\mu_j$  по формулам  $\lambda_j = \lambda_{j0} - \varepsilon^2 \mu_j$  ( $j = 1, 2$ ), где  $\lambda_{j0}$  — значение частоты собственных колебаний системы в случаях (5) и (6) точного резонанса. Величины  $\mu_j$  могут быть произвольного знака. Полагая  $\tilde{R}_j = R_j$ ,  $\tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t$ ,  $\tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t$ , получим гамильтониан вида:

$$H^* = \varepsilon^2 \left[ -\mu_1 \tilde{R}_1 - \mu_2 \sigma \tilde{R}_2 + a \tilde{R}_1^{3/2} \cos 3\tilde{\Phi}_1 + b \tilde{R}_1^{1/2} \tilde{R}_2 \cos(\tilde{\Phi}_1 + 2\sigma \tilde{\Phi}_2) + \right. \\ \left. + c_{20} \tilde{R}_1^2 + c_{11} \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 + c_{02} \tilde{R}_2^2 \right] + O(\varepsilon^3),$$

где  $\sigma = 1$  и  $\sigma = -1$  соответствуют случаям (5) и (6), слагаемое  $O(\varepsilon^3)$   $12\pi$ -периодично по  $t$ .

Положим еще  $\nu_1 = -\mu_1 c_{11}/b^2$ ,  $\nu_2 = -\mu_2 c_{11}/b^2$ , введем обозначения (7) и новую независимую переменную  $\tau$  по формуле  $\tau = (\varepsilon^2 b^2/c_{11}) t$ . Придавая величине  $\sigma$  значения 1 и  $-1$ , получим два гамильтониана, характерных для данного резонансного случая:

$$\Gamma_+ = \nu_1 R_1 + \nu_2 R_2 + \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \\ + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon), \quad (12)$$

$$\Gamma_- = \nu_1 R_1 - \nu_2 R_2 + \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + \\ + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon). \quad (13)$$

Эти гамильтонианы зависят от пяти параметров  $\nu_1, \nu_2, \alpha, \gamma_{20}$  и  $\gamma_{02}$ .

Ограничимся случаем, когда резонансная расстройка  $\nu_2$  равна нулю, а

$\nu_1 \neq 0$ . Проводился анализ положений равновесия приближенных (модельных) систем с гамильтонианами, получающимися из (12) и (13) при отбрасывании слагаемых  $O(\varepsilon)$ .

Пусть  $\Psi_1 = 3\Phi_1$ ,  $\Psi_2 = \Phi_1 \pm 2\Phi_2$ . Тогда равновесные значения  $\Psi_j$ ,  $R_j$  ( $j = 1, 2$ ) удовлетворяют уравнениям  $\sin(\Psi_j) = 0$  ( $j = 1, 2$ ) и

$$2(4g_1 - 1)R_1 + 3(2\delta_1 g_2 - \delta_2)R_1^{1/2} + (4g_3 - 1) = 0, \quad (14)$$

$$R_2 = -\alpha \left( R_1 + \delta_2 R_1^{1/2} \right) / 2g_2,$$

где  $g_1 = \gamma_{20}\gamma_{02}$ ,  $g_2 = \alpha\gamma_{02}$  и  $g_3 = \nu_1\gamma_{02}$ .

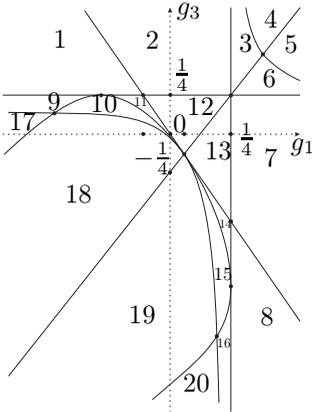


Рис. 4: Разбиение областей существования корней в плоскости параметров  $g_1, g_3$ .

Исследование этой системы зависит от трех параметров  $g_1, g_2, g_3$ , значение параметра  $\alpha$  не влияет на качественные выводы в силу его положительности. Первое уравнение (14) является квадратным относительно  $R_1^{1/2}$ . Искались условия, при которых это уравнение имеет положительные вещественные корни, и при этом соответствующее значение  $R_2$  также положительно.

Результаты представлены на рис. 4. Пространство параметров  $g_1, g_3$  разделяется на 20 областей, обозначенные цифрами 1-20. Для каждой занумерованной области на рис. 4 ось  $Og_2$  третьего параметра  $g_2$  разбивается на несколько интервалов (от четырех до шести) с различным числом (от нуля до четырех) положений равновесия, являющихся решением

первого уравнения (14). Результаты анализа представлены в диссертационной работе в виде таблицы.

Как и в случае точного резонанса  $\nu_1 = \nu_2 = 0$  (соответствующего оси  $Og_1$  на рис. 4), в зависимости от выбранных значений параметров, в системе может существовать от 0 до 4 равновесных точек. В областях, через которые проходит ось  $Og_1$ , имеем точно такое же разбиение оси третьего параметра на интервалы, как и в случае точного резонанса. Однако, при удалении от этой оси и переходе в соседние области разбиение на интервалы и число положений равновесия в них меняется.

Найдены десять положений равновесия  $D_i$  ( $i = 1 \dots 10$ ), удовлетворяющих достаточным условиям устойчивости. Для остальных равновесных точек рассматривались характеристические уравнения линеаризованных систем уравнений возмущенного движения вида  $\lambda^4 + p\lambda^2 + q = 0$ . Показано, что условию  $q > 0$  соответствует 21 положение равновесия. Для остальных 36 положений равновесия выполняется условие

$q < 0$ , и имеет место неустойчивость. В найденных областях пространства параметров, где выполнено условие  $q > 0$ , требуются дополнительные исследования системы неравенств  $p > 0$  и  $\mathfrak{D} > 0$  для получения вывода об устойчивости. Это исследование зависит от четырех параметров и в данной работе не проводилось.

Проводя в обратной последовательности замены переменных можно получить периодическое движение системы, аналитическое по  $\varepsilon$  и имеющее по  $t$  период, равный  $12\pi$ . Неустойчивые положения равновесия модельных систем переходят в неустойчивые периодические движения полных систем. Положения равновесия, рассмотренные для значений параметров из областей выполнения достаточных условий устойчивости или неустойчивости, переходят в периодические движения полных систем, устойчивые в линейном приближении или неустойчивые соответственно.

**В четвертой главе** продолжается исследование системы, описанной в главе 2. Пусть теперь величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  удовлетворяют одному из условий ( $k_1, k_2$  — целые):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= k_1 + 1/5, & \lambda_2 &= k_2 + 3/5, & \lambda_1 &= k_1 + 3/5, & \lambda_2 &= k_2 + 4/5, \\ \lambda_1 &= k_1 + 2/5, & \lambda_2 &= k_2 + 1/5, & \lambda_1 &= k_1 + 4/5, & \lambda_2 &= k_2 + 2/5. \end{aligned}$$

Тогда комбинации  $\lambda_1 - 2\lambda_2$  и  $2\lambda_1 + \lambda_2$  являются целыми числами, и в системе реализуется двойной комбинационный резонанс третьего порядка. Целыми являются также величины  $\lambda_1 + 3\lambda_2$  и  $3\lambda_1 - \lambda_2$  (двойной комбинационный резонанс четвертого порядка).

Дополнительно предполагаем, что выполнено соотношение  $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 = \ell$  (где  $\ell$  — целое число). Тогда для резонансных соотношений четвертого порядка имеем  $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ ,  $3\lambda_1 - \lambda_2 = 2\ell$ . Первый из этих резонансов проявляется уже в слагаемых автономной ( $\varepsilon = 0$ ) части гамильтониана возмущенного движения. Будем считать, что слагаемые, соответствующие резонансам третьего порядка, впервые проявляются в гамильтониане в членах  $\sim \varepsilon^\ell$ , а соответствующие второму случаю резонанса четвертого порядка — в членах  $\sim \varepsilon^{2\ell}$ .

Проводя серию канонических преобразований, аналогичных описанным в главе 2, получим гамильтониан вида

$$\begin{aligned} \hat{H} = \varepsilon^{2\ell} \left[ a\tilde{R}_1^{1/2}\tilde{R}_2 \cos\left(\tilde{\Phi}_1 - 2\sigma\tilde{\Phi}_2\right) + b\tilde{R}_1\tilde{R}_2^{1/2} \cos\left(2\tilde{\Phi}_1 + \sigma\tilde{\Phi}_2\right) + c_{20}\tilde{R}_1^2 + \right. \\ \left. + c_{11}\tilde{R}_1\tilde{R}_2 + c_{02}\tilde{R}_2^2 + d\tilde{R}_1^{1/2}\tilde{R}_2^{3/2} \cos\left(\tilde{\Phi}_1 + 3\sigma\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\varphi}_*\right) \right] + O\left(\varepsilon^{2\ell+1}\right). \quad (15) \end{aligned}$$

Слагаемое  $O\left(\varepsilon^{2\ell+1}\right)$  в (15) аналитично по переменным  $\tilde{\Phi}_j$ ,  $\tilde{R}_j$  и  $t$ ,  $2\pi$ -периодично по  $\tilde{\Phi}_j$  и  $10\pi$ -периодично по  $t$ .

Перейдем к новой независимой переменной  $\tau$  по формуле  $\tau = (\varepsilon^{2\ell}b^2/c_{11})t$ . Отбросим в преобразованном гамильтониане слагаемое  $O(\varepsilon)$ . В приближенном (модельном) гамильтониане на данном этапе исследования предполагаем малым коэффициент  $d$  в слагаемом, отвечающем резонансу четвертого порядка. Отбрасывая это слагаемое и

полагая  $\sigma = 1$  или  $\sigma = -1$ , получим характерный гамильтониан (16), отвечающий наличию в системе двух комбинационных (сильного и слабого) резонансов третьего порядка:

$$\Gamma = \alpha R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + R_1 R_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 + \Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2. \quad (16)$$

Он зависит от трех параметров  $\alpha$ ,  $\gamma_{20}$  и  $\gamma_{02}$ .

Исследовалась бифуркация положений равновесия системы с гамильтонианом (16).

Вводя обозначения  $\Psi_1 = \Phi_1 - 2\Phi_2$ ,  $\Psi_2 = 2\Phi_2 + \Phi_2$ ,  $u = R_1^{1/2}$ ,  $v = R_2^{1/2}$  ( $u \geq 0, v \geq 0$ ), найдем, что в положениях равновесия  $\sin \Psi_j = 0$  ( $j = 1, 2$ ), а  $u$  и  $v$  удовлетворяют уравнениям, в которых  $\delta_j = \cos(\Psi_j) = 1$  или  $-1$  ( $j = 1, 2$ )

$$f_1(u, v) = (u + \alpha\delta_1/2)v^2 + \delta_2 uv + 2\gamma_{20}u^3 = 0,$$

$$f_2(u, v) = (v + \delta_2/2)u^2 + \alpha\delta_1 uv + 2\gamma_{02}v^3 = 0.$$

В плоскости величин  $u, v$  искомым положениям равновесия отвечают точки пересечения кривых  $f_1(u, v) = 0$  и  $f_2(u, v) = 0$ . Число этих точек меняется при переходе через такие значения параметров  $\alpha, \gamma_{20}, \gamma_{02}$ , для которых рассматриваемые кривые имеют общие касательные, при этом должно выполняться равенство  $f_3(u, v) = f'_{1u}f'_{2v} - f'_{1v}f'_{2u} = 0$ .

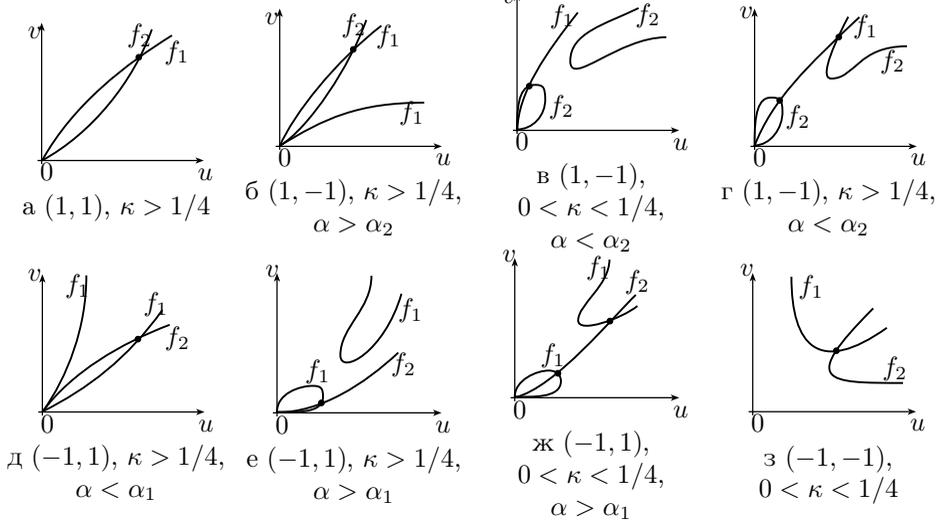


Рис. 5: Случай  $\gamma_{20} < 0, \gamma_{02} < 0$ .

Исключая из системы уравнений  $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$  величины  $u$  и  $v$ , найдем уравнение, связывающее бифуркационные значения параметров:

$$f = 128(32\kappa + 1)^2 s^2 + 2(154880\kappa^2 + 1544\kappa + 59)s + 8112\kappa^3 + 174296\kappa^2 - 4537\kappa - 4.$$

Здесь  $\kappa = \gamma_{20}\gamma_{02}$ ,  $s = (\gamma_{02} + \alpha^4\gamma_{20})/\alpha^2$ . При  $\kappa < 11/32$  ( $\kappa \neq -1/32$ ) квадратное относительно  $s$  уравнение  $f = 0$  имеет два вещественных корня

$s_{1,2}$  ( $s_1 > s_2$ ). Соотношения  $s_j = (\gamma_{02} + \alpha^4 \gamma_{20}) / \alpha^2$  ( $j = 1, 2$ ) приводят к биквадратному уравнению относительно  $\alpha$ . Обозначим их действительные положительные решения (в областях существования) через  $\alpha_{j\pm}$  ( $j = 1, 2$ ). Взаимное расположение величин  $\alpha_{j\pm}$ , а также величин  $\alpha_1 = \sqrt{2/|\gamma_{20}|}$  и  $\alpha_2 = \sqrt{|\gamma_{02}|/2}$  (полученных в процессе анализа уравнений  $f_1(u, v) = 0$  и  $f_2(u, v) = 0$  соответственно) меняется в точках  $\kappa = \kappa', \kappa''$ , где  $\kappa' = (-5291 - 435\sqrt{145}) / 4096$ ,  $\kappa'' = (-5291 + 435\sqrt{145}) / 4096$  ( $\kappa'' > \kappa'$ ).

На рис.5 представлены различные варианты взаимного расположения кривых  $f_1(u, v) = 0$  и  $f_2(u, v) = 0$  для случая  $\gamma_{20} < 0$ ,  $\gamma_{02} < 0$  (для остальных возможных случаев графические изображения не приводятся); изображены только случаи, для которых кривые имеют точки пересечения. В круглых скобках под рисунками приведены пары чисел  $(\delta_1, \delta_2)$  соответствующие рассматриваемому на рисунке случаю.

Анализируя результаты, получаем, что в зависимости от значений параметров имеется от нуля до четырех положений равновесия.

Объединяя число положений равновесия для разных пар  $(\delta_1, \delta_2)$ , получим, что в случае  $\gamma_{20} > 0$ ,  $\gamma_{02} > 0$  система имеет либо три, либо пять положений равновесия для разных интервалов значений параметров  $\alpha$  и  $\kappa$ .

Аналогичным образом исследуются случаи  $\gamma_{20} > 0$ ,  $\gamma_{02} < 0$  и  $\gamma_{20} < 0$ ,  $\gamma_{02} > 0$ .

**В пятой главе** на примере задачи о движении динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле проводится более точный анализ рассмотренного в главе 3 случая кратного комбинационного резонанса третьего порядка, с учетом имеющихся резонансов четвертого порядка. Предполагаем, что центр масс спутника движется по слабоэллиптической орбите с эксцентриситетом  $e$  ( $0 < e \ll 1$ ).

Гамильтониан приведенной системы с двумя степенями свободы, описывающей движение динамически симметричного спутника относительно центра масс на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета, зависит от двух параметров  $\alpha = C/A$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ) и  $\beta = r_0/\omega_0$ , где  $A$  и  $C$  - экваториальный и осевой момент инерции спутника,  $\omega_0$  - среднее движение центра масс по орбите. За независимую переменную берется истинная аномалия  $\nu$ .

В предельном случае  $e = 0$ , круговой орбиты центра масс, система имеет два частных решения, соответствующих стационарным вращениям спутника:

1.  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\psi = \psi_0$  ( $\cos \psi_0 = -\alpha\beta$ ),  $p_{\theta_0} = \sin \psi_0$ ,  $p_{\psi_0} = 0$   
(гиперболоидальная прецессия),
2.  $\theta = \theta_0$  ( $\sin \theta_0 = \alpha\beta / (3\alpha - 4)$ ),  $\psi_0 = 0$ ,  $p_{\theta_0} = 0$ ,  
 $p_{\psi_0} = 3(\alpha - 1) \sin \theta_0 \cos \theta_0$  (коническая прецессия).

Рассмотрим один из исследуемых в гл. 3 резонансных случаев, для которого  $\omega_1 = 6/5$ ,  $\omega_2 = 2/5$ . Тогда, помимо двух резонансов третьего порядка  $\omega_1 + 2\omega_2 = 2$ ,  $2\omega_1 - \omega_2 = 2$  имеется еще два соотношения резонанса

четвертого порядка  $\omega_1 - 3\omega_2 = 0$  и  $3\omega_1 + \omega_2 = 4$ .

Для гиперболоидальной прецессии этому случаю отвечают значения

$$\alpha = 6/5, \quad \psi_0 = \arcsin\left(4\sqrt{15}/25\right) \quad \left(\beta = -\sqrt{385}/30\right), \quad (17)$$

а для конической прецессии - два набора параметров

$$1) \alpha = 0.557571, \theta_0 = 1.294174 \text{ и } 2) \alpha = 1.459060, \theta_0 = 0.841967; \quad (18)$$

первый из них соответствует точке из области выполнения достаточных, а второй из области выполнения только необходимых условий устойчивости этого движения.

В случае слабоэллиптической орбиты для данных значений параметров из рассматриваемых частных решений рождаются  $2\pi$ -периодические по  $\nu$ , аналитические по  $e$  движения спутника:

$$\tilde{\theta}(\nu) = \theta_0 + \tilde{q}_1(\nu), \quad \tilde{\psi}(\nu) = \psi_0 + \tilde{q}_2(\nu). \quad (19)$$

В случае гиперболоидальной прецессии для точки (17) имеем

$$\tilde{q}_j(\nu) = \hat{q}_j(\nu) + O(e^3), \quad (j = 1, 2), \quad (20)$$

$$\hat{q}_1(\nu) = \frac{10575\sqrt{15}}{39424} e^2 \sin 2\nu, \quad \hat{q}_2(\nu) = -\frac{8\sqrt{231}}{77} e \cos \nu - \frac{\sqrt{231}}{77} e^2 \left(4 - \frac{3673}{1024} \cos 2\nu\right).$$

В случае конической прецессии для первой точки из (18) имеем

$$\begin{aligned} \hat{q}_1(\nu) &= 0.30878e \cos \nu - e^2 (11.44273 - 1.54384 \cos 2\nu), \\ \hat{q}_2(\nu) &= 2.04366e \sin \nu - 2.55558e^2 \sin 2\nu, \end{aligned} \quad (21)$$

а для второй точки (18)

$$\begin{aligned} \hat{q}_1(\nu) &= 4.40052e \cos \nu + e^2 (78.70319 + 8.13770 \cos 2\nu), \\ \hat{q}_2(\nu) &= 3.64937e \sin \nu + 5.33059e^2 \sin 2\nu. \end{aligned} \quad (22)$$

Заметим, что характеристические показатели  $\pm i\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) линеаризованных уравнений возмущенного движения, соответствующие выписанным решениям, равны  $\lambda_1 = 6/5 + O(e^2)$ ,  $\lambda_2 = 2/5 + O(e^2)$ , и для них точные резонансные соотношения выписанного выше вида не выполняются. Однако, в силу непрерывности по малому параметру характеристических показателей, в трехмерном пространстве параметров имеются точки из окрестностей порождающих точек (17) и (18), соответствующие точным резонансам, и этим точкам отвечают периодические движения, близкие к выписанным. Ищем указанные точки в виде ряда ( $\alpha_*$  и  $\beta_*$  - значения параметров в случае точного резонанса на круговой орбите)

$$\alpha = \alpha_* + \sum_{k=1}^5 e^k \alpha_k + O(e^6), \quad \beta = \beta_* + \sum_{k=1}^5 e^k \beta_k + O(e^6). \quad (23)$$

Постоянные коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) подбирались так, чтобы для характеристических показателей выполнялись соотношения  $\lambda_1 = 6/5 + O(e^6)$ ,  $\lambda_2 = 2/5 + O(e^6)$ . Одновременно получались поправки к соответствующим периодическим движениям.

Эти движения далее принимались за порождающие. Проводилась нормализация гамильтониана возмущенного движения в их окрестности в слагаемых до четвертой степени включительно относительно возмущений.

*Случай гиперболоидальной прецессии.* Расчеты показали, что в случае гиперболоидальной прецессии

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{128473}{255255}, \quad \alpha_3 = 0, \alpha_4 = \frac{41263286648313365643547}{2790247127279751659520}, \quad \alpha_5 = 0,$$

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = -\frac{82274957\sqrt{385}}{707566860}, \beta_3 = 0, \beta_4 = \frac{23717913273456618679013107\sqrt{385}}{7734565036819471600189440}, \beta_5 = 0,$$

соответствующее периодическое решение в слагаемых до порядка  $e^3$  включительно таково

$$\tilde{q}_1(\nu) = \hat{q}_1(\nu) - \sqrt{15}e^3 \left( \frac{255320525}{1097800704} \sin 3\nu + \frac{1829475}{6071296} \sin \nu \right) + O(e^4),$$

$$\tilde{q}_2(\nu) = \hat{q}_2(\nu) + \sqrt{231}e^3 \left( \frac{22327891}{431278848} \cos 3\nu - \frac{2066615401}{2012634624} \cos \nu \right) + O(e^4),$$

а нормализованный гамильтониан имеет вид

$$F = \rho_1^{1/2} \rho_2 \cos(2\Phi_2 + \Phi_1) + \frac{5544098698\sqrt{77}}{183538366011} \rho_1 \rho_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 - \Phi_2) -$$

$$- \frac{3479}{8124} \rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 - \frac{5641}{2708} \rho_2^2 - \frac{14\sqrt{77}}{677} \rho_1^{1/2} \rho_2^{3/2} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2) + O(e^2). \quad (25)$$

Слагаемое  $O(e^2)$  периодически по  $\tau$  с периодом порядка  $e^4$ .

Отметим, что слагаемое  $-0.181462\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2}\cos(\Phi_1 - 3\Phi_2)$ , соответствующее в (25) резонансу четвертого порядка, невелико, и на первом этапе исследования его можно отбросить. Получаем модельную систему, рассмотренную в главе 3. Для данного набора параметров эта система имеет три положения равновесия, удовлетворяющие условиям (см. рис.5а,б,е соответственно).

1.  $P_{3g}^1 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \rho_1 = 1.34108943, \rho_2 = 0.652672425\}$ ;
2.  $P_{3g}^2 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = -1, \rho_1 = 0.25022341, \rho_2 = 0.1602438\}$ ;
3.  $P_{3g}^3 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = 1, \rho_1 = 0.00102888, \rho_2 = 0.0000191907\}$ ,

причем положение равновесия  $P_{3g}^1$  устойчиво в линейном приближении, а положения равновесия  $P_{3g}^2$  и  $P_{3g}^3$  неустойчивы.

Восстановим теперь слагаемое, отвечающее резонансу четвертого порядка. Система уравнений для нахождения равновесных значений переменных имеет решения

1.  $P_{4g}^1 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \rho_1 = 1.044473, \rho_2 = 0.496149\}$ ;
2.  $P_{4g}^2 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = -1, \rho_1 = 0.346079, \rho_2 = 0.218707\}$ ;
3.  $P_{4g}^3 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = 1, \rho_1 = 0.001031, \rho_2 = 0.192837 \cdot 10^{-4}\}$ .

Первое из них устойчиво в линейном приближении, а второе и третье неустойчивы.

Таким образом, учет резонанса четвертого порядка не меняет числа положений равновесия модельной системы, значений пар  $(\delta_1, \delta_2)$  и характер их устойчивости, но сдвигает равновесные значения переменных  $\rho_j$  ( $j = 1, 2$ ).

В исходной системе полученным равновесиям отвечают аналитические по  $e$ ,  $10\pi$ -периодические по  $\nu$  резонансные движения оси симметрии спутника, происходящие в окрестности периодического движения описываемого соотношениями (19), (20), (24). Для порождающей точки  $P_{4g}^1$

в области  $0 \leq \Phi_{j0} < 2\pi$  ( $j = 1, 2$ ) существует пять пар точек  $(\Phi_{10}, \Phi_{20})$  удовлетворяющих условию  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ . Однако, решения, отвечающие разным парам, отличаются одно от другого на число, кратное  $2\pi$ . Полученные периодические решения соответствуют одному и тому же движению спутника, задаваемому формулами

$$\begin{aligned} q_1(\nu) &= (-33.234394 \sin \frac{6}{5}\nu + 18.272509 \sin \frac{2}{5}\nu) e^2 - (9.850013 \sin \frac{11}{5}\nu + \\ &\quad + 11.006196 \sin \frac{1}{5}\nu + 61.611152 \sin \frac{7}{5}\nu + 74.395215 \sin \frac{3}{5}\nu) e^3 + O(e^4), \\ q_2(\nu) &= (29.641178 \cos \frac{6}{5}\nu + 25.609465 \cos \frac{2}{5}\nu) e^2 + (5.709807 \cos \frac{11}{5}\nu - \\ &\quad - 84.689079 \cos \frac{1}{5}\nu - 9.551316 \cos \frac{7}{5}\nu - 60.531463 \cos \frac{3}{5}\nu) e^3 + O(e^4). \end{aligned}$$

Аналогичные выводы делаются для второй и третьей порождающих точек из (26).

Периодическое движение, рождающееся из устойчивого положения равновесия  $P_{4g}^1$  модельной системы, устойчиво в линейном приближении, а движения, рождающиеся из неустойчивых положений равновесия  $P_{4g}^2$  и  $P_{4g}^3$ , неустойчивы.

Чтобы решить вопрос об устойчивости первого периодического движения в строгой нелинейной постановке, рассмотрим гамильтониан возмущенного движения полной системы и осуществим его нормализацию в слагаемых до четвертой степени включительно относительно возмущений:

$$\begin{aligned} H_n &= -(\Omega_1 + O(e)) r_1 - (\Omega_2 + O(e)) r_2 + \\ &\quad + (c_{20} + O(e)) r_1^2 + (c_{11} + O(e)) r_1 r_2 + (c_{02} + O(e)) r_2^2 + O_5, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\Omega_1 = 2.370009$ ,  $\Omega_2 = 0.665026$ ,  $c_{20} = 2.157979$ ,  $c_{11} = 2.487900$ ,  $c_{02} = 0.511268$ . Поправки  $O(e)$  к частотам  $\Omega_j$  и коэффициентам  $c_{ij}$  — постоянные числа. Так как выполнено условие  $\Delta = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} = 1.776428 \neq 0$ , то для достаточно малых значений  $e$  рассматриваемое периодическое движение устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий. Кроме того, квадратичная форма  $c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$  положительно определена при  $r_1 \geq 0$ ,  $r_2 \geq 0$ , что означает формальную устойчивость данного движения.

*Случай конической прецессии.* Для порождающих точек (18), отвечающих конической прецессии, процедура построения и анализа аналогична.

В разложении (23) для первой резонансной точки из (18) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= 1.287951, & \alpha_3 &= 0, & \alpha_4 &= -361.154033, & \alpha_5 &= 0, \\ \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= -11.171548, & \beta_3 &= 0, & \beta_4 &= -5175.434916, & \beta_5 &= 0. \end{aligned}$$

Соответствующее периодическое решение в слагаемых порядка  $e^3$  включительно имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(\nu) &= \hat{q}_1(\nu) - e^3 (17.338297 \cos \nu + 2.170284 \cos 3\nu) + O(e^4), \\ \tilde{q}_2(\nu) &= \hat{q}_2(\nu) - e^3 (134.594004 \sin \nu - 3.113258 \sin 3\nu) + O(e^4). \end{aligned}$$

Нормализованный гамильтониан в окрестности этого движения таков

$$F = 0.316242\rho_1\rho_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 - \Phi_2) + \rho_1^{1/2}\rho_2 \cos(2\Phi_2 + \Phi_1) + \rho_1\rho_2 +$$

$$+ 0.14946\rho_1^2 + 3.057349\rho_2^2 + 0.919154\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2) + O(e^2). \quad (28)$$

Соответствующая модельная система имеет три положения равновесия, для которых

1.  $P_{4k1}^1 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = -1, \rho_1 = 0.012155, \rho_2 = 0.000250\}$ ;
2.  $P_{4k1}^2 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = 1, \rho_1 = 0.028392, \rho_2 = 0.024077\}$ ;
3.  $P_{4k1}^3 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = -1, \rho_1 = 0.206129, \rho_2 = 0.044312\}$ .

Положения равновесия  $P_{4k1}^1$  и  $P_{4k1}^2$  неустойчивы, а положение равновесия  $P_{4k1}^3$  устойчиво в линейном приближении. Решение  $P_{4k1}^3$  устойчиво также и в полной модельной системе в силу знакоопределенности квадратичной части соответствующего гамильтониана возмущенного движения. Отбрасывая слагаемое  $0.919154\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2)$  и проводя аналогичный анализ укороченной модельной системы, получим, что учет резонанса четвертого порядка не меняет числа положений равновесия модельной системы (сдвигая равновесные значения переменных  $\rho_j$  ( $j = 1, 2$ )), и не меняет характер их устойчивости.

Получены периодические движения исходной системы. Первые два из них неустойчивы, а третье устойчиво в линейном приближении. Для полного решения вопроса об устойчивости третьего решения  $P_{4k1}^3$  проведем нормализацию соответствующего гамильтониана возмущенного движения полной системы, представляя его в виде (27), где  $\Omega_1 = -0.729361$ ,  $\Omega_2 = -0.151934$ ,  $c_{20} = -6.227365$ ,  $c_{11} = -3.488544$ ,  $c_{02} = -0.460472$ . Применяя аналогичные критерии, заключаем, что при достаточно малых  $e$  исследуемое движение устойчиво для большинства начальных условий и формально устойчиво.

Для *второго резонансного случая* (второй набор из (18)) получено, что

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -89.652220, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = -4.264555 \cdot 10^5, \alpha_5 = 0,$$

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = -155.397990, \beta_3 = 0, \beta_4 = -6.560042 \cdot 10^5, \beta_5 = 0,$$

соответствующее периодическое решение в слагаемых порядка  $e^3$  включительно имеет вид

$$\tilde{q}_1(\nu) = \hat{q}_1(\nu) + e^3 (6931.161178 \cos \nu + 6.996445 \cos 3\nu) + O(e^4),$$

$$\tilde{q}_2(\nu) = \hat{q}_2(\nu) + e^3 (6700.976621 \sin \nu - 0.344129 \sin 3\nu) + O(e^4),$$

а нормализованный гамильтониан представляется в виде

$$F = 0.317201\rho_1\rho_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 + \Phi_2) + \rho_1^{1/2}\rho_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) - \rho_1\rho_2 +$$

$$- 4.830187\rho_1^2 + 0.476652\rho_2^2 - 9.452416\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2} \cos(3\Phi_2 + \Phi_1) + O(e^2).$$

Положения равновесия соответствующей модельной системы таковы:

1.  $P_{4k2}^1 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \rho_1 = 0.439450 \cdot 10^{-3}, \rho_2 = 0.014544\}$ ;
2.  $P_{4k2}^2 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \rho_1 = 0.472782 \cdot 10^{-2}, \rho_2 = 0.846698 \cdot 10^{-2}\}$ ;
3.  $P_{4k2}^3 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = 1, \rho_1 = 1.5671 \cdot 10^{-5}, \rho_2 = 4.047079 \cdot 10^{-7}\}$ ,

и все они неустойчивы. Отметим, что если не учитывать влияния резонанса

четвертого порядка, то модельная система имеет единственную (неустойчивую) равновесную точку. Таким образом, учет резонанса четвертого порядка качественно меняет свойства модельной системы.

Построены периодические движения, отвечающие найденным положениям равновесия. Все они неустойчивы.

**В шестой главе** на примере задачи динамики твердого тела с вибрирующим подвесом исследуется влияние малых диссипативных сил (сил вязкого трения) на характер устойчивости положения равновесия.

Пусть одна из точек тела  $O$  совершает вертикальные гармонические колебания по закону  $s \cos \Omega t$ . На тело действует сила вязкого трения, момент которой пропорционален угловой скорости вращения тела вокруг точки  $O$ :  $M_{\text{тр}} = -\chi \omega$ . В поступательно движущейся вместе с точкой  $O$  системе координат движение тела описывается неавтономными уравнениями Эйлера-Пуассона.

Пусть  $m$  - масса тела,  $A, B, C$  - главные моменты инерции тела для точки  $O$ ;  $x_G, y_G, z_G$  - соответственно проекции радиус-вектора  $\mathbf{OG}$  центра масс  $G$  тела на главные оси инерции  $Ox, Oy, Oz$  тела для точки  $O$ . Будем считать, что амплитуда  $s$  колебаний точки подвеса мала по сравнению с длиной  $r_G = OG = \sqrt{x_G^2 + y_G^2 + z_G^2}$ , а частота вибрации  $\Omega$  много больше характерной частоты  $\omega_0 = \sqrt{g/r_G}$ , и при этом  $s \cdot \Omega \sim \omega_0 \cdot r_G$  - конечная величина. Положим  $s = \varepsilon^2 r_G$ ,  $\Omega = \varepsilon^{-2} \sqrt{g/(r_G \omega_*)}$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ), где  $\omega_*$  - безразмерная частота ( $\omega_* \sim 1$ ). Пусть момент вязкого трения, действующий на тело, мал, и коэффициент  $\chi \sim \varepsilon$ . Положим  $\chi = ml^2 \Omega \varepsilon^3 \chi_1$  ( $\chi_1 \sim 1$ ).

В преобразованной обезразмеренной системе при помощи методов теории возмущений искалась замена, исключаяющая время в слагаемых до  $\varepsilon^3$  включительно. Отбросив члены  $O(\varepsilon^4)$ , получим приближенную автономную систему уравнений. Ранее аналогичная система без учета вязкого трения была получена в работе А.П. Маркеева 2011 года.

В размерных переменных приближенные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} A\omega'_x + (C-B)\omega_y\omega_z &= mg(\gamma_2 z_G - \gamma_3 y_G) + M_x^{(\nu)} - \chi\omega_x; & \gamma'_1 &= \gamma_2\omega_z - \gamma_3\omega_y; \\ B\omega'_y + (A-C)\omega_z\omega_x &= mg(\gamma_3 x_G - \gamma_1 z_G) + M_y^{(\nu)} - \chi\omega_y; & \gamma'_2 &= \gamma_3\omega_x - \gamma_1\omega_z; \\ C\omega'_z + (B-A)\omega_x\omega_y &= mg(\gamma_1 y_G - \gamma_2 x_G) + M_z^{(\nu)} - \chi\omega_z; & \gamma'_3 &= \gamma_1\omega_y - \gamma_2\omega_x; \end{aligned} \quad (29)$$

здесь  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ;  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  - проекции векторов угловой скорости  $\omega$ , орта  $\mathbf{n}$  восходящей вертикали;  $M_x^{(\nu)}, M_y^{(\nu)}$  и  $M_z^{(\nu)}$  - проекции вектора вибрационного момента на оси связанной системы координат, причем

$$M_x^{(\nu)} = \alpha \left[ -\frac{(\gamma_2 y_G + \gamma_3 z_G)(z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3)}{A} + \frac{x_G \gamma_2 (x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1)}{B} + \frac{x_G \gamma_3 (y_G \gamma_1 - x_G \gamma_2)}{C} \right],$$

где  $\alpha = m^2 s^2 \Omega^2 / 2$ , а остальные моменты получаются при проведении циклических перестановок в тройках величин  $(A, B, C)$ ,  $(x_G, y_G, z_G)$ ,  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ .

На интервале времени  $t$  порядка  $\varepsilon^{-1/2}$  решения приближенной системы (29) аппроксимируют решения исходной неавтономной системы

уравнений движения с погрешностью, порядка  $O(\varepsilon^{1/2})$  для компонент вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  и порядка  $O(\varepsilon^{3/2})$  для компонент вектора  $\mathbf{n}$ .

Исследование проводилось в рамках приближенной системы (29). Эта система имеет два частных решения  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ,  $\gamma_{10} = \delta \frac{x_G}{r_G}$ ;  $\gamma_{20} = \delta \frac{y_G}{r_G}$ ;  $\gamma_{30} = \delta \frac{z_G}{r_G}$ , соответствующих положениям относительного равновесия тела, при которых точка  $G$  лежит на одной вертикали с  $O$ , находясь выше или ниже ее (случай  $\delta = 1$  и  $\delta = -1$  соответственно).

Достаточные условия устойчивости для висящего и перевернутого тела при отсутствии вязкого трения были получены в работе А.П. Маркеева для общего и частного случаев геометрии масс. В случае  $\delta = -1$  при любом  $\alpha$  имеет место устойчивость относительных равновесий, а при  $\delta = 1$  условия их устойчивости сводятся к неравенству

$$\alpha > mg \left( \mu \pm \sqrt{d} \right) / (2r_G (Ax_G^2 + By_G^2 + Cz_G^2)), \quad (30)$$

$$d = [A(B-C)x_G^2 - B(A-C)y_G^2 - C(A-B)z_G^2]^2 + 4AB(B-C)(A-C)x_G^2y_G^2, \\ \mu = A(B+C)x_G^2 + B(A+C)y_G^2 + C(A+B)z_G^2.$$

При этом для обоих относительных равновесий характеристические уравнения линеаризованных уравнений возмущенного движения имеют двойные нулевые корни.

Для частных случаев геометрии масс, когда 1) центр масс тела лежит на главной оси инерции  $Oz$  ( $x_G = y_G = 0$ ,  $z_G \neq 0$ ), 2) тело динамически симметрично ( $A = B \neq C$ ), и центр масс лежит в экваториальной плоскости инерции так, что  $y_G = 0$ , 3) центр масс тела лежит в главной плоскости инерции  $Oxz$  ( $y_G = 0$ ), неравенства (30) переписутся в виде:

$$1) \quad \alpha > mgA/z_G \quad (\text{в предположении, что } A > B); \quad (31)$$

$$2) \quad \text{а) } A > C, \alpha > Amg/r_G, \text{ б) } A < C, \alpha > ACmgr_G / (Ax_G^2 + Cz_G^2); \quad (32)$$

$$3) \quad \text{а) } A(B-C)x_G^2 + C(B-A)z_G^2 > 0, \alpha > mgB/r_G, \\ \text{б) } A(B-C)x_G^2 + C(B-A)z_G^2 < 0, \alpha > ACmgr_G / (Ax_G^2 + Cz_G^2). \quad (33)$$

Рассмотрим влияние малого вязкого трения на устойчивость данных равновесий. Положим в (29)  $\omega_x = x_1$ ;  $\omega_y = x_2$ ;  $\omega_z = x_3$ ;  $\gamma_1 = \gamma_{10} + y_1$ ;  $\gamma_2 = \gamma_{20} + y_2$ ;  $\gamma_3 = \gamma_{30} + y_3$ .

У характеристического уравнения соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения остается один нулевой корень, причем имеет место так называемый особенный случай. Устойчивость исследовалась при помощи алгоритма И.Г. Малкина.

В случае 1 характеристическое уравнение линейной системы имеет вид  $\lambda(\chi + \lambda C)(A^2\lambda^2 + A\chi\lambda + z_G(z_G\alpha - \delta mgA))(B^2\lambda^2 + B\chi\lambda + z_G(z_G\alpha - \delta mgB)) = 0$ .

Кроме нулевого корня уравнение имеет отрицательный вещественный корень  $\lambda = -\chi/C$  и четыре корня, вещественные части которых при достаточно малых  $\chi$  и при  $\delta = -1$  отрицательны. Если же  $\delta = 1$ , то вещественные части корней отрицательны при выполнении

неравенства (31).

Согласно алгоритму И.Г. Малкина, уравнения возмущенного движения заменой переменных  $x_k, y_k \rightarrow \hat{x}_k, \hat{y}_k$  приводятся к специальному виду, в котором в одном из уравнений отсутствует линейная часть. Приравняем к нулю правые части полученных уравнений за исключением правой части последнего (критического) уравнения. Ищем решение в виде рядов по критической переменной  $\hat{y}_3$ . В случае 1 решение оказывается тривиальным  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{y}_1 = \hat{y}_2 = 0$ . Подставляя его в правую часть критического уравнения, получим тождественный нуль (этот случай и является особенным). Если (кроме имеющегося нулевого корня) все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то по всем переменным, кроме критической  $\hat{y}_3$ , имеет место асимптотическая устойчивость, а по критической переменной устойчивость обычная (не асимптотическая).

Таким образом, невозмущенное движение при  $\delta = -1$  устойчиво в указанном смысле при любых положительных значениях параметра  $\alpha$  (частоты вибрации). Если же  $\delta = 1$ , то устойчивость имеет место при выполнении условия (31).

В случае 2 характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид

$$\lambda (A^2 \lambda^2 + A\chi \lambda + r_G (r_G \alpha - \delta mg A)) (\Delta_3 \lambda^3 + \Delta_2 \lambda^2 + \Delta_1 \lambda + \Delta_0) = 0, \quad (34)$$

$$\Delta_0 = \chi r_G^2 [(Ax_G^2 + Cz_G^2) \alpha - \delta AC r_G mg]; \quad \Delta_2 = AC \chi r_G^2 (A + C);$$

$$\Delta_1 = AC r_G^2 \chi^2 + (Ax_G^2 + Cz_G^2)^2 \alpha - \delta AC mg r_G (Ax_G^2 + Cz_G^2), \quad \Delta_3 = A^2 C^2 r_G^2.$$

Корни кубического многочлена в (34) были представлены в виде ряда по степеням малого параметра  $\chi$ , и далее был проведен анализ их вещественных частей.

При  $\delta = -1$  корни характеристического уравнения (кроме нулевого корня) всегда имеют отрицательные вещественные части, а при  $\delta = 1$  это условие выполняется в случаях (32)а, б.

Применяя алгоритм Малкина, получаем

$$\hat{x}_1 = 0, \quad \hat{x}_2 = 0, \quad \hat{x}_3 = 0, \quad \hat{y}_1 = -p_2/p_{24} \hat{y}_3 + \dots, \quad \hat{y}_2 = 0, \quad (35)$$

$$p_2 = z_G h_A / A^2, \quad p_{24} = -r_G^2 h_A (A^3 z_G), \quad h_A = -\delta r_G \alpha + mg A,$$

а многоточие означает совокупность членов выше первой степени по критической переменной  $\hat{y}_3$ . Подставляя в  $\hat{Y}_3$ , получим тождественный нуль. Условия устойчивости совпадают с условиями отрицательности вещественных частей характеристического уравнения (кроме нулевого корня).

В случае 3 характеристическое уравнение линеаризованной системы сводится к виду

$$\lambda [B^2 \lambda^2 + B\chi \lambda + r_G (r_G \alpha - \delta mg B)] (\Delta_3 \lambda^3 + \Delta_2 \lambda^2 + \Delta_1 \lambda + \Delta_0) = 0,$$

$$\Delta_0 = \chi r_G^2 [(Ax_G^2 + Cz_G^2) \alpha - \delta AC r_G mg]; \quad \Delta_2 = AC \chi r_G^2 (A + C);$$

$$\Delta_1 = ACr_G^2\chi^2 + (Ax_G^2 + Cz_G^2)^2 \alpha - \delta ACmgr_G (Ax_G^2 + Cz_G^2); \Delta_3 = A^2 C^2 r_G^2.$$

Следуя описанной методике получим, что при  $\delta = -1$  корни характеристического уравнения всегда будут имеют отрицательные вещественные части, а для  $\delta = 1$  имеют место условия (33)а, б. Расчеты показывают, что искомое решение имеет вид (35) и случай также является особенным.

Таким образом, в рассмотренных случаях геометрии масс твердого тела добавление малого вязкого трения приводит к тому, что по всем переменным, кроме критической, устойчивость, имевшаяся при отсутствии трения, при тех же условиях, накладываемых на частоту вибраций точки подвеса, становится асимптотической. При этом по критической переменной остается обычная устойчивость (не асимптотическая).

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы диссертации.

### **Публикации в журналах из перечня ВАК и международных систем цитирования**

1. Сафонов А. И. О влиянии вязкого трения на устойчивость равновесий тела с вибрирующим подвесом // Вестник Московского Авиационного Института. — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 158–168.

2. Сафонов А. И., Холостова О. В. О периодических движениях гамильтоновой системы в окрестности неустойчивого равновесия в случае двойного резонанса третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2016. — Т. 26. Вып. 3. — С. 418–438.

3. Kholostova, O. V., Safonov, A. I., A Study of the Motions of an Autonomous Hamiltonian System at a 1:1 Resonance, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 7, pp. 792–807.

4. Сафонов А. И., Холостова О. В. О периодических движениях симметричного спутника на слабоэллиптической орбите в одном случае кратного комбинационного резонанса третьего и четвертого порядков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28. Вып. 3. — С. 373–394.

5. Холостова О. В., Сафонов А. И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. — 2018. — № 100. — URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=93297>

6. Сафонов А. И. О периодических движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности кратного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. — 2022. — № 126. — URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168988>