

«Утверждаю»

Проректор по научной работе  
федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего  
образования «Московский автомобильно-  
дорожный государственный технический  
университет (МАДИ)», д.т.н., профессор  
Ушаков Виктор Васильевич  
« 22 » ноября 2019 г.



### ОТЗЫВ

Ведущей организации на диссертацию Ковалева Николая Владиславовича на тему «Качественный и асимптотический анализ динамики некоторых квазиконсервативных систем», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика».

#### **Актуальность темы диссертации.**

Диссертационная работа Ковалева Н.В. посвящена исследованию динамики некоторых классов квазиконсервативных систем (консервативных систем с малыми неконсервативными возмущениями). Исследование основано на применении теории неавтономных интегралов.

Также в диссертационной работе исследуются механические системы, в которых действуют силы сухого трения Кулона. Такие задачи находят множество приложений в создании новых систем передвижения.

При анализе динамики консервативных механических систем часто необходимо учитывать малые неконсервативные возмущения. Поэтому тема диссертационной работы представляется актуальной.

#### **Характеристика диссертационной работы по главам.**

Диссертация изложена на 91 странице, состоит из введения, четырёх глав, заключения, приложения и списка литературы из 39 наименований.

**Во введении** сформулированы цели работы, аргументирована её актуальность, научная новизна и практическая ценность. Дано краткое описание используемых методов и подходов.

**В первой главе** рассмотрен класс автономных квазиконсервативных систем с одной степенью свободы. Невозмущённая система, соответствующая нулевому значению малого параметра, есть автономная система Гамильтона с одной степенью свободы. Правые части квазиконсервативной системы представляют собой сходящиеся ряды по степеням малого параметра.

Для данного класса квазиконсервативных систем разработан и обоснован эффективный метод построения семейства неавтономных интегралов в виде разложения в ряд по малому параметру. Для определения неизвестных

ОБЩИЙ ОТДЕЛ МАДИ  
Вх. № 11 / 12 2019

коэффициентов этого ряда получены уравнения в частных производных первого порядка. Свою эффективность метод получает в переменных действие-угол невозмущённой системы. Сформулирована и доказана теорема о сходимости рядов для неавтономных интегралов. Получен критерий существования периодических решений в терминах неавтономных интегралов. Разработанный метод построения неавтономных интегралов и критерий существования периодических решений продемонстрированы на примерах хорошо известных уравнения Дюффинга и уравнения Льенара.

**Во второй главе** разработанный метод построения семейства неавтономных интегралов и теорема о существовании периодических решений обобщены на класс некоторых автономных квазиконсервативных систем с числом степеней свободы, больше двух. Эти системы представляют собой несколько нелинейных осцилляторов, слабо связанных неконсервативными возмущениями. Поскольку в невозмущённой системе возможно разделение переменных, в них также можно эффективно ввести переменные действие-угол, следовательно, обобщить метод построения семейства неавтономных интегралов в виде разложения в ряд по малому параметру из первой главы.

**В третьей главе** рассматривается задача об исследовании двух механических систем, в которых действуют силы сухого трения. Силы трения удовлетворяют закону Кулона.

Первая система представляет собой ящик, закреплённый пружинами к неподвижным стенкам, находящийся на подвижной ленте конвейера. Между лентой и ящиком действует сила сухого трения. Найдена зона залипания ящика на ленте конвейера и показан выход на предельный цикл из внешней области.

Вторая система представляет собой ящик на горизонтально расположенной шероховатой плоскости, внутри которого на закреплённой горизонтальной спице совершает колебательные движения материальная точка под действием сил упругости от двух пружин. Исследована зона залипания ящика и выходы на предельные периодические режимы движения за конечное время и для любых начальных условий.

**В четвёртой главе** исследуется движение системы, состоящей из двух соединённых пружинами ящиков на ленточном конвейере. Кроме того, каждый из ящиков соединён пружиной с ближайшей неподвижной стеной. Между ящиками и лентой действует силы сухого трения, удовлетворяющая закону Кулона. Коэффициент трения считается малым.

Найдена область четырёхмерного фазового пространства, где фазовый поток расслаивается на двумерные инвариантные торы. С помощью метода усреднения доказано, что траектории в фазовом пространстве стремятся к границе множества инвариантных торов, если не принадлежали ему изначально. Найдены зоны залипания ящиков, когда они движутся вместе с лентой под действием сил трения покоя. Построено семейство неавтономных интегралов системы ящиков (с точностью до членов первого порядка) методом, разработанным во второй главе.



**В заключении** подведены основные итоги диссертационной работы, сформулированы результаты, представляемые к защите.

**В приложении** для системы из четвёртой главы приведены расчёты коэффициентов разложения семейства неавтономных интегралов в различных зонах фазового пространства.

### **Научная новизна результатов диссертации.**

1) Предложен метод разложения неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы. Обоснована сходимость ряда по степеням малого параметра, дающего разложение неавтономного интеграла.

2) Сформулирован и доказан критерий существования периодических решений квазиконсервативных систем в терминах неавтономных интегралов.

3) Метод разложения неавтономных интегралов по степеням малого параметра обоснован для систем нелинейных осцилляторов, слабо связанных неконсервативными возмущениями.

4) Исследованы движения двух ящиков на ленте конвейера, соединённых между собой и неподвижными стенками пружинами. Между ящиками и лентой действовали силы сухого трения Кулона с малым коэффициентом трения. Найдены инвариантные торы системы и зоны залипания. Анализом усреднённых уравнений движения доказано, что любая траектория системы, не принадлежащая множеству инвариантных торов, приближается к границе множества инвариантных торов.

5) На основании разработанного в диссертации метода разложения с точностью до членов первого порядка построены неавтономные интегралы системы ящиков на конвейерной ленте.

### **Практическая значимость результатов работы.**

В диссертационной работе создан метод обнаружения в квазиконсервативных системах периодических движений, основанных на построении семейства неавтономных интегралов. Эффективность метода продемонстрирована в задаче об оценке числа предельных циклов уравнения Льенара. Результаты исследования в диссертации механических систем с сухим трением могут служить отправной точки при создании новых систем передвижения.

### **Полнота опубликованных научных результатов и апробация.**

По тематике диссертации опубликовано 7 работ, из них 3 статьи в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий и рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертации. Все материалы диссертационного исследования достаточно полно отражены в опубликованных работах.

## Замечания по диссертационной работе.

1. В работе рассмотрены три задачи из области собственно теоретической механики: **задача 1** (п. 3.1, стр. 42) -одномерное движение груза на пружинах при взаимодействии с движущейся шероховатой лентой (груз в пружинах на конвейере) посредством сил сухого (кулонова) трения; **задача 2** (п. 3.2, стр. 45) - движение ящика по шероховатой горизонтальной плоскости при наличии движущейся внутри него материальной точкой на пружинках; **задача 3** (п. 4, стр. 51) - одномерное движение двух грузов на пружинах при взаимодействии с движущейся шероховатой лентой (грузы, соединенные пружинами на конвейере) посредством сил сухого (кулонова) трения. Отметим, что все эти рассмотренные в работе задачи несложно решаются обычными методами теоретической механики (методом припасовывания, в частности). Причем, их можно решить и без предположения о малости сил сухого трения (предположение о малости коэффициента сухого трения присутствует в работе при решении задачи 3, и это предположение существенно для корректного применения автором метода усреднения).
2. **Задача 1.** Эта задача классическая и рассматривалась в большом количестве источников большим количеством авторов. Отметим некоторые из них: 1) Андронов, Витт, Хайкин. Теория колебаний. 2) Каудерер. Нелинейная механика. 3) Журавлёв, Климов. Прикладные методы в теории нелинейных колебаний. Отметим, что в статье авторов Байков, Ковалев в журнале «Нелинейная динамика», 2017, т. 13, № 4 имеется ссылка на книгу Андронов, Витт, Хайкин. Теория колебаний, однако в тексте диссертации Ковалева такая ссылка уже отсутствует. Хотелось бы, чтобы автор указал, что нового он привнес в решение этой задачи, а также увидеть некоторый сравнительный анализ с соответствующими ссылками.
3. **Задача 2.** Без введения управления (влияющего на движение актюатора, т.е., внутренней массы на пружинке), которое обеспечивает управляемое движение (перемещение) ящика посредством сил сухого трения, эта задача теряет интерес для практического применения, а для теории она представляется тривиальной, хотя может быть использована в учебном процессе. Такие задачи управления являются актуальными и рассматривались в работах многих авторов, в частности, отметим Ф. Л. Черноусько, Н. Н. Болотника, Т. Ю. Фигурину, Б. С. Бардина и т. д.  
При решении этой задачи по теоретической механике автором диссертации делается переход к безразмерному времени. В результате такой замены частота движения внутренней массы на пружинке при



«залипанию» ящика становится зависящей от массы  $M$  внешнего покоящегося ящика:  $w_0 = \sqrt{1 - m}$ ,  $m = m / (m + M)$  (см. стр. 47 диссертации). В то же время ясно, что в реальном времени эта частота от массы  $M$  не зависит.

**Задача 3.** Эта задача представляет собой некоторое обобщение и усложнение *задачи 1*, хотя в принципиальном смысле её решение вполне аналогично решению *задачи 1*. Кроме того, для возможности применения методов усреднения автор вводит весьма ограничительное предположение о малости силы кулонова трения, что весьма сужает область её применения на практике.

**Общее заключение.** Диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявленным к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, а её автор, Ковалев Николай Владиславович, заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика».

Отзыв заслушан и одобрен на заседании кафедры «Высшая математика» Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета, протокол № 3 от 20.11.2019.

Доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры «Высшая математика»  
Московского автомобильно-дорожного  
государственного технического университета  
(специальность 01.02.01 – «Теоретическая механика»)



Г. М. Розенблат

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)».

Адрес: 125319, Москва, Ленинградский проспект, 64.

Телефон: 8 (499) 155-01-04.

E-mail: info@madi.ru