

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
(МАИ)

На правах рукописи



Немыченков Григорий Игоревич

МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНЫХ
ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ
ДИСКРЕТНЫХ НЕТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

По специальностям:

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка
информации (авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, доцент

Бортаковский Александр Сергеевич

Москва – 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Список основных обозначений и сокращений	5
Введение	6
1. Субоптимальное в среднем управление переключаемыми системами.....	25
1.1. Постановки задач	25
1.1.1. Задача оптимального управления одной траекторией	27
1.1.2. Задача оптимального управления пучком траекторий.....	28
1.1.3. Задача субоптимального управления пучком траекторий	30
1.1.4. Задача субоптимального управления пучком траекторий с дискретными неточными измерениями	31
1.2. Оптимальное позиционное управление.....	33
1.2.1. Функция цены и ее образующие.....	33
1.2.2. Алгоритм синтеза оптимального позиционного управления	35
1.2.3. Нахождение оптимального программного управления.....	37
1.3. Субоптимальное управление пучком траекторий	38
1.3.1. Функция стоимости полуоптимального процесса и ее образующие	38
1.3.2. Алгоритм синтеза субоптимального управления	40
1.3.3. Нахождение субоптимального программного управления.....	41
1.4. Условное субоптимальное управление пучком траекторий.....	42
1.4.1. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления	42
1.4.2. Нахождение условного субоптимального программного управления	43
1.5. Условное субоптимальное управление пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений.....	44
1.5.1. Условное субоптимальное управление при наличии дискретных неточных измерений.....	44
1.5.2. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений.....	46
1.5.3. Нахождение условного субоптимального программного управления при наличии дискретных неточных измерений	47
1.6. Примеры	48
1.6.1. Система с переключением канала управления.....	48
1.6.2. Система управления при наличии дискретных неточных измерений	53
Выводы.....	61

2. Субоптимальное в среднем управление стационарными системами автоматного типа.....	62
2.1. Постановки задач	62
2.1.1. Задача оптимального управления одной траекторией	63
2.1.2. Задача оптимального управления пучком траекторий.....	65
2.1.3. Задача субоптимального управления пучком траекторий	65
2.1.4. Задача субоптимального управления пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений.....	66
2.2. Оптимальное позиционное управление.....	67
2.2.1. Функция цены и ее образующие.....	67
2.2.2. Алгоритм синтеза оптимального позиционного управления	68
2.2.3. Нахождение оптимального программного управления.....	69
2.3. Субоптимальное управление пучком траекторий	70
2.3.1. Функция стоимости полуоптимального процесса и ее образующие	70
2.3.2. Алгоритм синтеза субоптимального управления	72
2.3.3. Нахождение субоптимального программного управления.....	73
2.4. Условное субоптимальное управление пучком траекторий.....	73
2.4.1. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления	74
2.4.2. Нахождение условного субоптимального программного управления	74
2.5. Условное субоптимальное управление пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений.....	75
2.5.1. Условное субоптимальное управление при наличии дискретных неточных измерений.....	75
2.5.2. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений.....	78
2.5.3. Нахождение условного субоптимального программного управления при наличии дискретных неточных измерений	78
2.6. Линейно-квадратичная задача управления пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений.....	79
2.6.1. Алгоритм синтеза оптимального позиционного управления	79
2.6.2. Алгоритм синтеза субоптимального управления	80
2.6.3. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления	81
2.6.4. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений.....	82
2.7. Пример	81

Выводы.....	85
3. Субоптимальная в среднем стабилизация спутника при наличии дискретных неточных измерений	86
3.1. Постановки задач	86
3.1.1. Задача оптимальной стабилизации с минимальным расходом топлива.....	87
3.1.2. Задача оптимальной стабилизации с учетом неэффективного расхода топлива.....	87
3.1.3. Задача оптимальной в среднем стабилизации в условиях неопределенности.....	88
3.1.4. Задача оптимальной в среднем стабилизации при наличии дискретных неточных измерений	89
3.2. Оптимальное управление одной траекторией.....	90
3.3. Субоптимальное управление пучком траекторий без измерений.....	93
3.4. Субоптимальное управление пучком траекторий при дискретных неточных измерениях.....	94
Выводы.....	99
4. Реализация алгоритмов синтеза управления пучками траекторий	100
4.1. Моделирование пучков траекторий переключаемых систем.....	101
4.2. Численно-аналитические методы субоптимального управления пучками траекторий переключаемых систем	102
4.3. Программный комплекс синтеза оптимального в среднем управления стационарными системами автоматного типа	104
4.4. Программный комплекс субоптимальной в среднем стабилизации спутника.....	106
Выводы.....	107
Заключение	108
Список использованных источников	109

Список основных обозначений и сокращений

(ЛА) – летательный аппарат.

(КА) – космический аппарат.

(СУ) – система управления.

(ПС) – переключаемые системы.

(СПС) – система с переменной структурой.

(ЛДС) – логико-динамическая система.

(ДНС) – дискретно-непрерывные системы.

(НДС) – непрерывно-дискретные системы.

(САТ) – система автоматного типа.

(ЛКЗ) – линейно-квадратичная задача.

(ГЯБ) – уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана.

(АКОР) – аналитическое конструирование оптимальных регуляторов.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие математической теории оптимального управления обусловлено, главным образом, практическими задачами управления подвижными объектами. В первую очередь это задачи управления объектами авиационной и ракетно-космической техники [7, 43, 44, 47, 50, 58, 67, 68, 62, 72, 73, 75, 76, 114, 120]. Математическое моделирование является, как правило, единственным методом анализа таких систем управления, поскольку эксперименты с космическими аппаратами (КА) и проектируемыми летательными аппаратами (ЛА) невозможны. Применяемые в аэрокосмической области математические модели должны соответствовать жестким требованиям, предъявляемым к техническим изделиям. Международные и национальные стандарты надежности изделий авиационной техники, космических систем и комплексов устанавливают предельно допустимые значения по широкой номенклатуре показателей. Поэтому математические модели ЛА должны отличаться высокой точностью и достаточной полнотой для прогноза показателей качества и надежности.

Моделирование полета является сложной математической задачей. ЛА представляет собой, как правило, сложную конструкцию, с изменяемой геометрией, включающую устройства управления и средства связи. Моделирование полета в атмосфере осложняется ее неоднородностью и неопределенностью. Движение КА с длительными сроками активного существования подвержено влиянию малых возмущений таких, например, как притяжение далеких планет, солнечный ветер и т.п. Эти возмущения из-за продолжительности своего действия оказывают существенное влияние на траекторию полета.

Важной особенностью моделирования ЛА является неопределенность параметров и возмущений [75, 76]. Несмотря на проводимые эксперименты, аэродинамические, силовые, моментные и другие характеристики ЛА, как правило, точно не известны. Точность определения пространственного положения ЛА во время полета зависит от состава измерительной аппаратуры и ее погрешностей [95, 98]. Влияние неоднородности атмосферы, ветра и других воздействий на движение ЛА может оказаться существенным. Эти особенности необходимо учитывать при разработке адекватных моделей движения ЛА.

Вопросы моделирования и синтеза динамических систем управления связаны моделью движения, формой его математического описания. Технические постановки задач в аэрокосмической области делают неприемлемым применение классических методов вариационного исчисления. При проектировании систем управления (СУ) ЛА важным является поиск наилучшего (оптимального в том или ином смысле) управления движением. Это позволяет минимизировать затраты, тем самым, увеличивать эффективность эксплуатации летательных аппаратов. Процесс полета современных ЛА поддерживается системами автоматизированно-

го управления, либо осуществляется в автоматическом режиме. Качество управления оценивается критериями, выражающими разнообразные и многочисленные требования к функционированию СУ. Примерами таких требований являются требования безопасности, экономичности, точности, быстродействия и т.п. При этом технические возможности и ресурсы используемых устройств и механизмов не бесконечны, а условия полета ограничены. Как правило, ограничения точно указаны в технических характеристиках и правилах эксплуатации. Примерами могут служить ограничения тяги двигателя, отклонения воздушных рулей, угла атаки и т.п.

Постановка задачи оптимального управления, как правило, включает в себя: математическую модель управляемого объекта или процесса, описывающую его поведение с течением времени под влиянием управляющих воздействий; формулировку цели управления, выраженную через критерий качества управления; определение ограничений на переменные состояния и управляющие воздействия в виде уравнений или неравенств [93].

Математической моделью движения ЛА служит управляемый динамический процесс [15, 104, 106], описываемый, в большинстве случаев, при помощи совокупности дифференциальных и рекуррентных уравнений, включающих управляющие воздействия. Качество управления оценивается функционалом, подлежащим оптимизации. Выбор оптимального управления, минимизирующего функционал качества, ограничен требованиями, отражающими технические характеристики устройств и условия эксплуатации. Отличие задач оптимального управления непрерывными системами от задач вариационного исчисления [46, 132] заключается в наличии ограничения на значения управления (так называемые геометрические ограничения на управление). Это значительно усложняет поиск решения задач оптимального управления, делая их наиболее трудными задачами оптимизации. Нахождение оптимальных управлений приходится вести среди разрывных функций: измеримых, ограниченных, в частности, кусочно-непрерывных, при этом траектории движения оказываются абсолютно непрерывными, в частности, непрерывными и кусочно-гладкими. Напротив, решениями классической задачи вариационного исчисления являются дважды дифференцируемые функции. Таким образом, класс оптимальных траекторий в задачах оптимального управления значительно шире, чем в вариационном исчислении.

В современных исследованиях классы управляемых процессов становятся еще шире. Допускаются изменения (скачки) траектории движения. Эти изменения состояния динамической системы принято называть *переключениями*.

На рис. В.1 представлены основные классы систем управления [9, 11, 16, 17, 26, 27, 32, 39, 43, 44, 49, 52, 54, 55, 57, 63, 77, 78, 110, 118, 119, 121, 123, 139, 144, 146, 147], в работе которых происходят переключения. Все системы функционируют в непрерывном времени. Стрелки, связывающие блоки, отражают отношение включения: системы нижнего уровня являются частным случаем систем верхнего уровня.

Управляемые динамические системы с переключениями



Рис. В.1.

Опишем характер функционирования представленных систем, не приводя математических моделей.

Под *гибридной системой* [43, 44, 49, 110, 139, 144, 146] понимается система [44], в которой процессы имеют несколько уровней разнородного описания, а вектор-состояние содержит непрерывные и дискретные компоненты. Такие системы встречаются в прикладных задачах управления механическими, электроэнергетическими системами, в управлении летательными аппаратами, технологическими процессами, трафиком в компьютерных сетях и т.д. Структурные изменения в процессе функционирования, многорежимность, разнородность описания процессов – особенности многих технических систем. Методы интеллектуального, интеллектуального управления, основанные на событиях и логических правилах организации переключений между различными управляющими устройствами, интенсивно развиваются и применяются в различных областях благодаря достижениям в информатике

и компьютерной технике [43]. Кроме того, существует большой класс систем, которые могут быть стабилизированы с помощью переключения законов управления, но не могут быть стабилизированы никаким (одним непрерывным) статическим законом управления с обратной связью по состоянию. Именно этим и объясняется все возрастающий интерес к исследованию таких систем специалистов разного профиля. Поэтому гибридные системы стали областью исследований, относящейся к математике, теории управления, информатике и области, именуемой искусственным интеллектом.

Переключаемой системой (ПС) называют [44] многорежимную динамическую систему, состоящую из семейства непрерывных (или дискретных) по времени подсистем и устройства, которое управляет переключениями режимов. Работа устройства задается с помощью условий в виде ограничений по времени, по состоянию; в виде последовательности событий в логической форме с применением условия переключения на основе логического вывода. Процессы в таких системах имеют два уровня описания. На нижнем уровне они представляются дифференциальными или рекуррентными уравнениями (в каждом режиме), на верхнем уровне – дискретным процессом переключения режимов. Переключения производятся под влиянием внешней среды, сбоев, отказов элементов, подсистем (скачкообразное изменение параметров структуры, как объекта, так и обратной связи). В математических моделях такие переключения описываются изменением правых частей уравнений движения. У переключаемых систем, как правило, имеется конечный набор правых частей, каждой из которых соответствует своя типовая траектория [142]. Выполняя в процессе функционирования переключения, получаем траекторию, составленную из кусочков типовых траекторий. В этих системах переключения являются управлением. Например, в [142, 144] движение динамической части задается системой линейных дифференциальных уравнений, матрица коэффициентов которой зависит от дискретного параметра. Придавая различные значения этому параметру, в зависимости от текущего состояния объекта управления, получаем разные системы уравнений и, следовательно, разные траектории движения объекта. Более общие модели переключаемых систем описываются системами дифференциальных или рекуррентных уравнений с переключениями правых частей.

В **системах с переменной структурой** (СПС) в процессе функционирования происходят структурные изменения, в частности, переключения в контурах обратной связи [54, 119, 123]. В классе СПС эффективно решаются следующие актуальные задачи теории управления: задачи теории инвариантности, задачи управления при различного рода ограничениях, задачи стабилизации сильно неопределенной системы, задачи идентификации параметров динамических систем и другие.

Логико-динамическая система (ЛДС) представляет собой совокупность динамической части, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями, и логической части, описываемой при помощи рекуррентных включений или уравнений [11, 20, 39, 55, 56,

100]. Логическая (автоматная) часть ЛДС характеризует операционную ситуацию, в которой происходит управляемое движение динамической части ЛДС, и может меняться дискретным образом в рамках одной операционной ситуации либо изменять саму операционную ситуацию. Такими соотношениями описывается движение летательных аппаратов, управляемых с помощью бортовых вычислительных комплексов [121].

Частным случаем ЛДС являются **динамические системы с автоматной частью** [19, 43]. В этих системах управление динамикой осуществляется только автоматом с памятью, а каких-либо других управляющих воздействий нет.

Импульсные системы представляют собой динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями, в которых скачки траектории (переключения) обусловлены импульсными воздействиями, т.е. управляющими сигналами в виде δ - функции [52, 57, 78, 147]. Частным случаем импульсных систем служат **дискретно-непрерывные системы** (ДНС) [78].

Непрерывно-дискретная система (НДС) представляет собой совокупность динамической части, непрерывное изменение состояния которой описывается дифференциальными уравнениями, и дискретной части, мгновенные изменения состояния (переключения) которой происходят в заданные моменты времени согласно рекуррентным уравнениям [38].

Системы автоматного типа (САТ) моделируют управление переключениями режимов работы сложных динамических систем. Эти системы описываются рекуррентными уравнениями. САТ на непрерывном промежутке времени функционирования конечное число раз меняет свое состояние [27]. Траекториями САТ служат кусочно-постоянные функции.

В НДС и дискретных системах моменты мгновенных изменений состояния фиксированы и не меняются при выборе управления. При управлении ПС, СПС, ЛДС, импульсными системами и САТ моменты переключений заранее не заданы. Выбор количества переключений и моментов переключений являются ресурсом управления, и служит для достижения поставленной цели. Более того, в ЛДС, САТ, динамических системах с автоматной частью и ПС, рассматриваемых в диссертации, допускаются процессы с мгновенными многократными переключениями [32]. Процессы с такими переключениями, как показывают исследования переключаемых систем, не являются исключениями, встречающимися только в специальных системах. Наоборот, они возникают в совершенно обычных задачах, в частности, в задаче управления линейными переключаемыми системами с квадратичным критерием качества [18].

Все описанные выше классы детерминированных динамических систем относятся к гибридным системам.

Управляемые процессы с переключениями описываются и в стохастических системах, которые меняют свои свойства скачкообразно в случайные моменты времени. Такие системы относятся к **системам со случайной структурой**. Исследованию таких систем посвящено

большое количество работ, в частности [9, 16, 17, 63, 77, 91, 114, 118]. В диссертации стохастические процессы не рассматриваются.

Исследования задач оптимизации гибридных систем опирается на теорию оптимального управления непрерывными и дискретными системами. Классическими результатами теории оптимального управления для непрерывных систем являются принцип максимума Понтрягина [104], представляющий собой необходимые условия оптимальности, и достаточные условия оптимальности в форме уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана (ГЯБ) [42]. Для дискретных систем разные формы необходимых условий получены в работах [15, 106, 111], достаточные условия – в [14, 42]. Обобщению этих классических условий посвящено много работ [1, 48, 50, 68].

Распространение классических результатов на другие классы систем продолжается и в настоящее время. Необходимые и достаточные условия оптимальности для переключаемых систем получены в работах [21, 49, 51, 133, 134, 135, 138, 141, 148]; для ЛДС – [11, 20, 24, 116]; для динамических систем с автоматной частью – [19, 23]; для импульсных систем – [52, 57, 70, 78]; для ДНС – [78]; для НДС – [41]; для САТ и переключаемых систем [21, 27, 37].

Статья [116], видимо, была первой работой, в которой рассматривалась задача оптимального управления переключаемой системой. В этой работе объект управления описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. Логическая часть определяет правые части этих уравнений, причем выбор осуществляется из некоторого конечного набора правых частей. Другими словами, автомат управляет движением объекта, выбирая ту или иную траекторию из конечного множества допустимых типовых траекторий. При этом оптимальная траектория составляется по кусочкам из набора типовых траекторий. В работах [133, 134] получены необходимые условия оптимальности переключаемых систем. Для вычисления градиента функционала применялась вариация конечного числа моментов переключения, а затраты на переключение состояния не учитывались. В [141] написано «уравнение Беллмана для гибридных систем». Фактически это уравнение представляет собой достаточные условия оптимальности переключаемой системы, которая имеет конечное множество допустимых состояний автоматной части.

В теории оптимального управления важный класс образуют так называемые линейно-квадратичные задачи (ЛКЗ), т.е. задачи оптимального управления линейными системами с квадратичным критерием качества. В этих задачах отсутствуют геометрические ограничения на управления. Задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) Легова А.М. наиболее востребованная на практике Это задача синтеза оптимального позиционного управления, т.е. управления с обратной связью, для линейной системы с квадратичным критерием качества. Для непрерывных систем, описываемых дифференциальными уравнениями, решение проблемы АКОР приводится в [73], для дискретных – в [64]. Среди многочисленных обобщений проблемы АКОР выделим ее перенос в классы НДС, ЛДС, САТ

с мгновенными многократными переключениями дискретной части [18, 26, 27, 29, 37, 85]. В последних двух классах оптимальные регуляторы получаются кусочно-линейными, а функция цены – кусочно-квадратичная. Напомним, что оптимальным управлением в первоначальной постановке [73] и в большинстве обобщений [10] служат линейные регуляторы, а функция цены является квадратичной.

К сожалению, кроме ЛКЗ и некоторых задач быстрогодействия [122], синтез оптимального позиционного управления и функцию цены получить аналитически не удастся. Нахождение оптимального программного управления, как правило, сводится к некоторой задаче конечномерной минимизации параметров. Иначе говоря, точное решение можно получить для достаточно узкого круга задач оптимального управления. В основном это объекты управления, описываемые линейными дифференциальными уравнениями. Большинство же задач аналитически не решаются, поэтому для них применяются различные численные методы приближенного решения.

Проблемы управления детерминированными динамическими системами в условиях неопределенности и неполноты информации, как правило, сводятся к задачам управления пучками траекторий. В них, обычно, предполагается, что состояние системы в начальный момент времени точно не известно, а известно множество возможных состояний [5, 6, 71, 86, 93, 98, 117, 145]. На практике существует два наиболее распространенных подхода к решению задач управления в условиях неопределенности – это нахождение оптимального в среднем [5,6,90] и оптимального гарантирующего управления [65, 71, 131]. Главная цель управления, оптимального в среднем, является минимизация среднего значения показателя качества управления изолированной траекторией. Для гарантирующего – минимизация максимального показателя качества управления изолированной траекторией. Это управление минимизирует максимальное значение функционала качества, вычисленное на худшей траектории пучка. Минимаксное управление по сравнению с оптимальным в среднем управлением [90, 92] оказывается менее эффективным, но более «осторожным». Оно гарантирует, что функционал качества на каждой траектории пучка не превосходит найденного минимаксного значения, хотя это значение может быть гораздо больше среднего по пучку. Эти подходы к задачам управления пучками траекторий непрерывных систем являются наиболее исследованными и важными для практики. Задачи гарантирующего управления [71, 131], а также игровые задачи управления движением [4, 66, 102, 131] в диссертации не рассматриваются.

Задачи оптимального в среднем управления детерминированными системами в условиях параметрической неопределенности исследуются в работах [5,6,25-27, 35, 90]. Параметрическая неопределенность, как правило, сводится к неопределенности начальных данных. Действительно, параметр можно заменить координатой состояния, которая постоянна по времени. Добавляя к уравнениям движения равенство нулю производной этого параметра по времени и соответствующее неопределенное начальное условие, получаем модель уже без па-

раметра, но с неопределенностью в начальных данных. Для непрерывных систем необходимые условия оптимальности получены в работе [90]. Достаточные условия рассматривались в работах [31, 92].

Исследований задачи оптимального в среднем управления в стохастическом случае гораздо больше [8, 77, 96, 97, 98, 108, 113, 114, 125, 127, 130]. Для стохастических систем встречаются и другие постановки задач, например, задачи максимизации квантильных оценок [16, 17, 61, 75, 80]. Задачи оптимального в среднем управления стохастическими системами в диссертации не рассматриваются.

Задачи управления пучками траекторий можно отнести к задачам управления системами с распределенными параметрами. Действительно, позиция системы имеет функциональный характер, так как это множество возможных в текущий момент времени состояний системы, т.е. подмножество конечномерного пространства. Позиционное управление в рассматриваемом случае является управлением с обратной связью «по множеству возможных состояний системы». Алгоритмы управления строятся на основе информации о множестве возможных в данный момент времени состояний системы. Выбор пространства позиций определяется формой описания множеств возможных состояний системы. Для описания таких подмножеств конечномерного пространства состояния используются опорные функции [66, 71], а также различные аппроксимации: параллелепипедами [65] или эллипсоидами [128]. Другой подход к построению алгоритмов управления состоит в получении оценки действительного состояния системы по множеству возможных состояний методами минимаксной фильтрации [70, 75, 76]. Можно заимствовать приемы, применяемые в стохастических системах [118]. В этом случае состояние системы можно считать случайным вектором, имеющим равномерное распределение, плотность распределения которого меняется согласно уравнению Ливилля. Применение различных аппроксимаций или оценочных процедур приводит к формированию субоптимальных алгоритмов управления.

Для линейных систем описание множеств состояний при помощи многогранников или эллипсоидов весьма эффективно [108, 131]. Действительно, если в начальный момент времени множество возможных состояний является выпуклым многогранником или эллипсоидом, то в процессе движения оно останется множеством того же вида. Так как указанные множества задаются конечным числом параметров (например, системой линейных неравенств и квадратным неравенством соответственно), то и эволюцию множеств можно представить как изменение этих параметров с течением времени. В нелинейном случае можно использовать аппроксимацию многогранниками или эллипсоидами [5, 6, 124].

При полном отсутствии дополнительной информации о состоянии системы, получаемой в процессе движения, ставятся задачи оптимального в среднем программного управления. Необходимые условия оптимальности в среднем получены в работах [5, 6, 86].

На практике для управления пучками траекторий часто используется оптимальное управление с обратной связью, в котором вместо неизвестного состояния системы подставляется его оценка (оптимальная в среднем). Таким образом, для управления пучком траекторий применяется оптимальное управление для одной, специальным образом выбранной, траектории системы. Этот метод опирается на принцип разделения [149], который заключается в том, что *оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с оптимальным управлением одной траекторией, выбранной специальным образом*. Выбор этой опорной траектории осуществляется заданием виртуального начального состояния, которое принимается за оценку множества возможных начальных состояний системы. При этом задача управления фактически отделена от задачи наблюдения – нахождения оценки множества возможных состояний. Так как принцип разделения, справедлив не для всех задач управления пучками, то полученное управление будет субоптимальным. Однако оно может оказаться удовлетворительным для практики. Такой подход к синтезу оптимального управления аналогичен применяемому в стохастических системах [72, 95, 98, 99, 112, 125, 140]. В них для управления случайным процессом используют, как правило, оптимальное замкнутое управление для условного математического ожидания состояния системы. Обоснование этого метода опирается на теорему разделения [2, 74, 148], которая справедлива не для всех систем [62]. На практике такой подход часто применяется даже и без обоснования.

Для детерминированных непрерывных систем результат, аналогичный теореме разделения, излагается в работе [90]. Доказано, что в ЛКЗ оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с оптимальным управлением траекторией, исходящей из геометрического центра тяжести множества возможных состояний системы. Таким образом, для управления пучком траекторий детерминированных систем можно использовать оптимальное управление с обратной связью, подставляя вместо состояния системы, геометрический центр тяжести множества возможных в текущий момент времени состояний. В этом случае получаем управление, построенное по принципу разделения. Полученное управление будет субоптимальным в среднем.

Представляют интерес задачи, в которых субоптимальное управление пучком оказывается оптимальным. Достаточным условием такого совпадения является выполнение принципа разделения. На основании гипотезы об оптимальности эффективных управлений [30] доказано, что субоптимальное в среднем или субоптимальное гарантирующее управление пучком траекторий линейной непрерывной системой с квадратичным критерием качества совпадают с оптимальными управлениями некоторыми траекториями пучка. Причем оптимальное в среднем управление совпадает с оптимальным управлением для траектории, исходящей из центра тяжести множества возможных начальных состояний [90]. Этот результат распространен на непрерывно-дискретные системы [26].

Однако для ЛК задач оптимального в среднем управления пучками траекторий дискретных САТ и ПС принцип разделения не выполняется. В [27] приводятся контрпримеры, подтверждающие это для дискретных САТ. Контрпример для ПС приводится в диссертации.

Описываемые задачи аналитически нерешаемы, поэтому рассмотрим основные методы приближенного (численного) решения задач оптимального управления.

Задачи оптимального управления, возникающие в практической деятельности, и различные подходы к их исследованию привели к созданию различных численных методов, которые условно можно разбить на пять групп [12, 45, 103, 109].

Первую группу составляют методы градиентного типа [40, 66, 103, 113, 120, 127]. Ограничения на управление и фазовые переменные в градиентных методах первого порядка преодолевались путем соответствующей модификации алгоритмов. Некоторые модификации связаны с методом штрафных функций или барьерных функций [105], другие – это методы спуска в пространстве управлений, представляющие собой аналоги методов конечномерной оптимизации: условного градиента [127], проекции градиента [120], возможных направлений; сопряженных градиентов [41, 120].

Вторую группу составляют методы, основанные на применении известных алгоритмов нелинейного программирования к конечномерным представлениям задач оптимального управления [53, 79, 109]. К таким методам также относятся эвристические и биоинспирированные методы. К эвристическим методам относятся обобщенные стратегии поиска оптимума в пространстве решений. Достоинством таких методов является их относительно низкая вычислительная сложность, что позволяет применять их для решения задач повышенной трудности. В качестве примера можно привести «имитацию отжига» и генетические алгоритмы. Биоинспирированные методы глобальной оптимизации – группа метаэвристических методов, имитирующих процессы в природной среде и поведение некоторых видов животных и растений [92, 93]. К ним относятся методы, объединенные принципами, характерными для живой природы, например, имитирующие поведение лягушек, кукушек, светлячков, летучих мышей, стай рыб, распространение сорняков и др. Основной особенностью таких методов является возможность поиска глобального экстремума многоэкстремальных целевых функций с большим числом переменных.

Третью группу составляют методы вариаций в фазовом пространстве [79, 120] и его разновидности: метод локальных вариаций [69, 129] и метод блуждающей трубки [79].

В четвертой группе для построения вычислительных методов решения задач оптимального управления широко используется принцип максимума, предложенный [79, 120, 125, 130]. Одним из первых был предложен алгоритм, предусматривающий последовательное интегрирование исходной и сопряженной систем и выбор управления из условия максимума функции Понтрягина [69].

Пятая группа методов – это методы, основанные на принципе расширения [50] и сформулированных с помощью него достаточных условиях оптимальности [68]. Функция Кротова [68, 126], присутствующая в этих условиях, может определяться неединственным способом, что обусловило возможность создания целого ряда алгоритмов. Первые такие алгоритмы описаны в работах [42, 68].

Актуальность работы. Важными направлениями современной теории управления являются анализ и синтез систем управления в условиях параметрической неопределенности. Вопросы моделирования и оптимизации возникают в ходе проектирования систем управления летательными аппаратами при неполной информации о положении объекта управления и его конструктивных параметрах.

В диссертационной работе исследуются проблемы анализа и синтеза субоптимальных в среднем детерминированных ПС в условиях параметрической неопределенности. Главной проблемой моделирования детерминированных ПС является адекватное описание множеств возможных состояний. Здесь применяются способы, разработанные для моделирования пучков траекторий непрерывных и дискретных систем. Множества состояний линейных систем описываются, как правило, опорными функциями, неравенствами, эллипсоидами, вершинами многогранников и т.п. Для нелинейных систем используются – плотность, аппроксимации многогранниками или эллипсоидами, конечный набор точек границы и т.п.

Моделирование и синтез систем управления связаны моделью движения системы. В диссертации рассматриваются детерминированных ПС, непрерывное изменение состояния которых описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные дискретные изменения состояния (переключения) – рекуррентными уравнениями. Дискретные изменения процесса управления моделируют работу автомата с памятью, который осуществляет переключения режимов непрерывного движения объекта управления. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы. Качество управления характеризуется функционалом, в котором учитываются затраты на каждое переключение. При этом не исключаются многократные переключения в фиксированный момент времени [21]. Исследуемая модель ПС обобщает дискретные системы автоматного типа, непрерывно-дискретные и логико-динамические системы [28]. В свою очередь ПС являются частным случаем систем со сменной моделью движения [51, 137, 148].

Достаточные условия оптимальности управления динамическими системами, как правило, связаны с определением функции цены (функции ГЯБ). Для синтеза оптимальных ПС предлагается, как и в [137], искать вспомогательные функции – так называемые образующие функции цены, из которых потом можно построить функцию цены. Дифференциальные и рекуррентные уравнения для этих вспомогательных функций выводятся на основе метода динамического программирования [3, 42].

Вместе с задачей оптимального в среднем управления [5, 86] рассматривается задача субоптимального в среднем управления. Для их решения предлагается применить принцип разделения. Если принцип разделения выполняется, то для оптимального управления пучком траекторий можно использовать управление, оптимальное для одной специальным образом выбранной траектории пучка. Например, это может быть траектория, исходящая из геометрического центра тяжести множества возможных состояний. Если принцип разделения не выполняется, то получаемое таким способом управление пучком будет субоптимальным. В диссертации приводится пример линейно-квадратичной задачи, в которой субоптимальное управление совпадает с оптимальным, а также контрпример, в котором принцип разделения не выполняется и субоптимальное управление отличается от оптимального.

В то же время, в работе рассматривается задача оптимального управления детерминированными стационарными системами автоматного типа в условиях параметрической неопределенности. Дискретная система автоматного типа САТ описывается рекуррентными уравнениями и служит математической моделью устройств управления в форме автомата с памятью. На непрерывном промежутке времени функционирования САТ конечное число раз меняет свое состояние. В моменты переключений, когда происходят изменения состояния, траектория системы имеет скачки. Между переключениями система сохраняет свое состояние. В отличие от классических моделей дискретных систем [15, 106], изменения состояний которых происходят в заданные (*тактовые*) моменты времени, переключения САТ могут быть в произвольные, заранее не заданные моменты времени [28]. Такая модель переключений используется для управления многорежимными динамическими системами [46]. Поэтому САТ является одной из составляющих в динамических системах с автоматной частью, логико-динамических и гибридных системах [28]. Качество управления одной траекторией системы оценивается функционалом, в котором учитываются затраты на переключения. Выбор количества переключений и тактовых моментов является одним из ресурсов управления и подлежит оптимизации. При этом не исключаются многократные переключения в фиксированный момент времени [28]. Таким образом, задача синтеза оптимальной САТ обобщает задачу управления дискретной управляемой системой [15, 106].

В [27] была поставлена задача оптимального управления САТ в условиях параметрической неопределенности. Предполагается, что состояние САТ в каждый момент времени точно неизвестно, а известно множество возможных состояний, т.е. речь идет об управлении пучком траекторий [71, 86]. Синтез управления САТ производится с целью минимизации среднего значения функционала качества управления изолированной траекторией. Другими словами, синтезируется оптимальное в среднем [90] управление пучком траекторий.

В линейных системах автоматного типа принцип разделения выполняется только в стационарном случае [37]. Для линейно-квадратичных задач оптимального в среднем управления пучками траекторий систем автоматного типа принцип разделения не выполняется. Од-

нако для стационарных систем выполняется модифицированный принцип разделения [27], который используется для построения алгоритмов синтеза оптимального в среднем управления.

Вместе с задачей оптимального управления при полной информации рассматривается задача управления в условиях параметрической неопределенности. Предполагается, что в начальный момент времени состояние ПС точно не известно, а известно множество возможных начальных состояний.

Представляют интерес задачи, в которых принцип разделения выполняется. В этом случае субоптимальное управление пучком оказывается оптимальным. Известно, что в линейно-квадратичных задачах управления непрерывными [90], дискретными, непрерывно-дискретными системами [26] управления принцип разделения выполняется. Для линейно-квадратичных задач управления ПС принцип разделения заведомо не выполняется, так как они являются обобщением систем автоматного типа. Однако принцип разделения в системах с переключениями можно модифицировать: *«оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с условным оптимальным управлением одной траекторией»*, т.е. с управлением, оптимальным при фиксированном наборе моментов переключений, который определяется заранее. Такой условный принцип разделения для линейно-квадратичных задач оказывается справедливым.

Важной особенностью рассматриваемых в диссертации задач управления пучком траекторий ПС является наличие дискретных неточных измерений. Предполагается, что в результате каждого измерения определяется множество возможных в этот момент состояний системы. Моменты измерений задаются заранее. Накопление поступающей информации осуществляется естественным образом [131] – путем пересечения всех известных («измеренных») к настоящему времени множеств, а управление пучком траекторий, исходящих из найденного пересечения, выбирается оптимальным. Наличие неточных измерений и накопление информации о возможных состояниях системы существенно усложняют процесс моделирования пучков траекторий ПС.

Применение двух подходов – принципа разделения и учета дискретных измерений – сочетается следующим образом. Множество возможных состояний системы корректируется при каждом измерении путем его пересечения с «измеренным» в этот момент времени множеством. Для пучка траекторий, исходящих из этого пересечения, применяется программное управление, оптимальное для некоторой траектории этого пучка, например, для траектории, исходящей из геометрического центра тяжести этого пересечения. Такой способ позволяет синтезировать субоптимальное позиционное управление, т.е. управление с обратной связью по множеству возможных состояний системы. Этот метод применяется для решения задачи оптимальной в среднем стабилизации спутника при наличии неточных измерений.

Для ориентации спутника часто используется эффект собственной устойчивости, обусловленный слабым градиентом поля тяготения [13]. Для усиления этого эффекта конструкцию спутника дополняют так называемой гравитационной штангой, вертикальная ориентация которой соответствует положению равновесия спутника. При отклонении от вертикали возникают колебания относительно положения равновесия, которые можно погасить, используя реактивные двигатели. Для увеличения момента, создаваемого двигателями, их сопла располагают на гравитационной штанге, максимально удаляя от центра масс. Требуется минимизировать расход топлива, затрачиваемого на стабилизацию спутника.

Поставленная задача исследовалась в работах [7, 47, 58, 114]. Оптимальное управление представляет собой последовательность режимов торможения в окрестности положения равновесия, где угловая скорость максимальная. Торможение производится с максимальной тягой двигателя. Чем короче промежутки работы двигателя при каждом включении, тем больше таких включений необходимо сделать для гашения колебаний. Однако общие затраты топлива при этом уменьшаются. В пределе получаем бесконечную последовательность импульсных включений (на бесконечно малое время) двигателя с максимальной тягой, при этом общее время стабилизации неограниченно возрастает. Разумеется, что это управление, практически нереализуемое, является абстрактным, идеальным решением, показывающим предельные возможности (экономии топлива) данной математической модели.

Чтобы исключить минимизирующие последовательности, было предложено учитывать неэффективные затраты топлива [40]. Каждое включение реактивного двигателя от его запуска до достижения максимальной тяги представляет собой немгновенный переходный процесс и сопровождается дополнительным расходом топлива. При выключении двигательной установки часть не вступивших в реакцию компонентов топлива теряется. Добавляя в критерий качества соответствующие штрафные слагаемые за включение (и выключение) двигателя, получаем задачу, в которой определяется оптимальное (конечное) количество запусков двигателя, а процессы, требующие бесконечного числа включений, отбрасываются как неоптимальные. Такая постановка задачи ближе к практике, чем классический вариант, но и она не в полной мере учитывает технические особенности. Важным обстоятельством, которое нужно учитывать при решении, является технически реализуемая точность, с которой выполняются включение и выключение реактивного двигателя, т.е. выдерживается заданная продолжительность активного участка полета. Реализуемая точность исполнения команд является фактически шагом дискретности для релейных законов управления, а задача условной минимизации становится дискретной. Поскольку длительность каждого активного участка не может быть меньше этого шага дискретности, то получить импульсное управление, оптимальное, согласно [50], не представляется возможным. Поэтому «эффект Гурмана» [48], заключающийся в минимизации суммарного расхода топлива при импульсных включениях двигателя, в рассматриваемом варианте задачи не наблюдается.

Задача стабилизации спутника решается в условиях параметрической неопределенности. В начальный момент времени состояние управляемого объекта точно не известно, а известно множество возможных начальных состояний, т.е. речь идет об управлении пучком траекторий [71, 90]. Качество управления одной траекторией оценивается терминальным функционалом – интегралом энергии, а качество управления пучком – средним значением интеграла энергии по всем возможным состояниям в конечный момент времени. Для управления в условиях неопределенности предлагается использовать принцип разделения, а именно: для пучка траекторий применяется опорное управление, оптимальное для одной траектории, исходящей из геометрического центра тяжести множества возможных начальных состояний. Задача оптимальной в среднем стабилизации спутника при наличии неточных измерений решается на основе принципа разделения.

Таким образом, проблемы моделирования и синтеза субоптимальных в среднем переключаемых систем при наличии дискретных неточных измерений представляют теоретический интерес, поскольку рассматриваемые задачи отличаются от классических задач управления пучками траекторий детерминированных систем, а методы их решения не разработаны. Необходимость исследований определяется современными задачами проектирования сложных авиационных и ракетно-космических систем, а полученные результаты имеют практическую направленность и могут быть использованы при создании систем автоматического управления.

Целью работы является разработка методов моделирования и алгоритмов синтеза субоптимальных в среднем детерминированных ПС и стационарных САТ в условиях параметрической неопределенности и при наличии дискретных неточных измерений. В диссертации решаются следующие задачи:

- 1) разработать математические модели функционирования ПС и стационарных САТ в условиях параметрической неопределенности при разных способах описания множеств возможных состояний с учетом дискретных неточных измерений;
- 2) разработать численно-аналитические методы синтеза субоптимального в среднем управления пучками траекторий ПС и стационарных САТ на основе принципа разделения при наличии дискретных неточных измерений;
- 3) разработать комплекс программ, реализующий методы синтеза субоптимального управления пучком траекторий стационарных САТ при наличии дискретных неточных измерений;
- 4) разработать комплекс программ, реализующий методы синтеза оптимальной и субоптимальной в среднем стабилизации спутника при наличии дискретных неточных измерений.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались математическое моделирование, теория управления, математическая теория управления, теория диффе-

ренциальных уравнений, системный анализ, теория оптимизации, численные методы. Для разработки программного комплекса и проведения вычислительного эксперимента использовались современные компьютерные технологии.

Научная новизна. В диссертационной работе исследованы новые задачи управления пучками траекторий переключаемых систем при наличии дискретных неточных измерений. Получены новые научные результаты: разработаны модели функционирования ПС и стационарных САТ в условиях параметрической неопределенности при разных способах описания множеств возможных состояний с учетом дискретных неточных измерений; доказаны достаточные условия субоптимальности в среднем управления пучком траекторий переключаемых систем и стационарных систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измерений; разработаны алгоритмы субоптимального и оптимального в среднем управлений детерминированными переключаемыми системами в условиях параметрической неопределенности на основе принципа разделения при наличии дискретных неточных измерений; разработаны алгоритм и программное обеспечение для решения задачи синтеза оптимального управления детерминированными стационарными системами автоматного типа в условиях параметрической неопределенности; решена задача субоптимальной стабилизации колебаний спутника в классе переключаемых систем в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений.

Практическая значимость. В диссертационной работе разработаны алгоритмы решения задач анализа и синтеза управления пучками оптимального управления пучками траекторий переключаемых систем, которые применимы в области авиационной и ракетно-космической техники, в робототехнике и экономике. Созданы комплексы программ для решения прикладных задач поиска оптимального управления в условиях параметрической неопределенности, с помощью которых были решены прикладные задачи оптимизации технических систем и управления авиационно-космическими системами. Получены свидетельства о государственной регистрации (№ 2017618981 от 29 июня 2017 г. [34], № 2018616558 от 29 марта 2018 г. [36]).

Достоверность результатов. Разработанные алгоритмы имеют теоретическое обоснование. Диссертация содержит приближенные и аналитические решения академических примеров, демонстрирующих эффективность предлагаемых алгоритмов. Полученное приближенное решение прикладной задачи полностью отвечает физическим представлениям.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на семи научных конференциях: Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2016 год), XLII Международная молодежная научная конференция Гагаринские чтения (Москва 2017 год), Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2017 год), XLIV Международная молодежная научная конференция Гагаринские чтения (Москва 2018 год), Международная кон-

ференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2018 год), 17 Международная конференция «Авиация и космонавтика», (Москва 2018 год), XLV Международная молодежная научная конференция Гагаринские чтения (Москва 2019 год). На XLIV Международной молодежной научной конференции Гагаринские чтения в секции «Теория управления и оптимизация» представленная работа заняла I место в 2018 году.

Работа выполнялась и докладывалась на кафедре "Математическая кибернетика" Московского авиационного института (национального исследовательского университета). Представленные в диссертационной работе результаты использованы в научно-исследовательских работах, поддержанных грантами РФФИ №15-08-01902-а «Методы оценивания состояния и синтеза ПС управления подвижными объектами в конфликтной среде при ограниченных ресурсах», №18-08-00128-а «Методы синтеза переключаемых и дискретных систем управления подвижными объектами при ограниченных ресурсах».

Личный вклад. Все излагаемые в диссертации результаты получены лично автором. Научному руководителю принадлежат постановки исследуемых задач и уравнения для синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в пяти статьях [33, 35, 37, 83, 89] в журналах, входящих в Перечень ВАК, в том числе три статьи [33, 35, 37] опубликованы в журналах, цитируемых международными базами Web of Science и SCOPUS, а также в трудах научных конференций [81, 82, 84-88]. Получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ [34, 36]. Всего по теме диссертации опубликовано 14 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов основной части, заключения, списка использованных источников (149 наименований). Работа изложена на 119 страницах и содержит 15 иллюстраций и 4 таблицы.

В первом разделе рассматривается задача оптимального в среднем управления ПС. Получены достаточные условия субоптимальности в среднем управления пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений. На основе достаточных условий разработаны алгоритмы синтеза оптимального позиционного управления, субоптимального управления пучками траекторий и условного субоптимального управления пучками траекторий при наличии дискретных неточных измерений. Решены два академических примера линейно-квадратичных задач синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий ПС. В одном примере принцип разделения выполняется, а в другом – нет. Проведен сравнительный анализ разработанных алгоритмов управления.

Во втором разделе рассматривается задача оптимального управления детерминированными стационарными САТ в условиях параметрической неопределенности. Доказаны достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий стационарных САТ при наличии дискретных неточных измерений. На основе достаточных условий разработаны

алгоритмы синтеза оптимального позиционного управления, субоптимального управления пучками траекторий и условного субоптимального управления пучками траекторий при наличии дискретных неточных измерений. Для линейно-квадратичных задач управления стационарными САТ разработанные алгоритмы приводят к оптимальному в среднем управлению, так как принцип разделения выполняется. Решены линейно-квадратичные задачи синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий стационарной САТ второго порядка. Проведен сравнительный анализ разработанных алгоритмов управления.

В третьем разделе решена задача активной стабилизации колебаний искусственного спутника при помощи реактивных двигателей малой тяги. Спутник движется по круговой орбите и в плоскости орбиты совершает колебания вокруг центра масс. Для минимизации расхода топлива используется релейное управление. Состояние объекта управления точно неизвестно, однако оно уточняется в результате дискретных неточных измерений. Поэтому исследуется задача оптимального в среднем управления пучком траекторий. Погрешность стабилизации характеризуется средним значением интеграла энергии. Учитывая реализуемую точность исполнения команд включения и выключения двигателей, решаемая задача условной минимизации становится дискретной.

В четвертом разделе описан программный комплекс, реализующий алгоритмы синтеза оптимального управления пучком траекторий стационарной дискретной САТ при наличии дискретных неточных измерений, а также программный комплекс для решения задачи оптимальной в среднем стабилизации спутника при наличии дискретных неточных измерений.

В заключении сформулирован основной итог диссертации – разработка численно-аналитических методов синтеза оптимального и субоптимального управлений ПС, а также их применения в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

Разработаны методы моделирования пучков траекторий переключаемых систем и систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измерений (область исследования 1 специальности 05.13.18). Разработаны численно-аналитические алгоритмы синтеза оптимального в среднем управления пучками траекторий линейных стационарных систем автоматного с квадратичным критерием качества (область исследования 2 специальности 05.13.18). Для стационарных систем автоматного типа и системы стабилизации колебаний спутника разработаны программные комплексы синтеза оптимального в среднем управления пучками траекторий при наличии дискретных неточных измерений (область исследования 4 специальности 05.13.18).

Поставлены новые задачи оптимального в среднем управления пучками траекторий переключаемых систем и систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измере-

ний, на основе принципа разделения сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности в среднем управления системами автоматного типа и субоптимальности в среднем управления переключаемыми системами (области исследования 1 и 2 специальности 05.13.01). Разработаны методы и алгоритмы решения задач синтеза субоптимального в среднем управления пучками траекторий при наличии дискретных неточных измерений (область исследования 4 специальности 05.13.01).

Основные научные результаты, выносимые на защиту:

- 1) разработаны математические модели функционирования переключаемых систем и стационарных систем автоматного типа в условиях параметрической неопределенности при разных способах описания множеств возможных состояний с учетом дискретных неточных измерений;
- 2) доказаны достаточные условия субоптимальности в среднем управления пучком траекторий переключаемых систем и стационарных систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измерений;
- 3) на основе достаточных условий оптимальности разработаны численно-аналитические методы синтеза оптимального и субоптимального в среднем управления пучками траекторий переключаемых систем и стационарных систем автоматного типа с учетом дискретных неточных измерений;
- 4) для линейно-квадратичных задач управления стационарными системами автоматного типа разработаны алгоритм и численный метод синтеза оптимального в среднем управления пучками траекторий при наличии дискретных неточных измерений;
- 5) для задачи активной стабилизации колебаний искусственного спутника при помощи реактивных двигателей малой тяги разработаны алгоритм и численный метод синтеза оптимального в среднем управления в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений;
- 6) разработаны два проблемно-ориентированных программных комплекса, реализующих предложенные алгоритмы и численные методы синтеза оптимального в среднем управления стационарными системами автоматного типа и стабилизацией спутника в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений.

1. СУБОПТИМАЛЬНОЕ В СРЕДНЕМ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫМИ СИСТЕМАМИ

В разделе 1 доказаны достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий ПС при наличии дискретных неточных измерений. На основе достаточных условий разработаны алгоритмы синтеза субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений. Приведены два академических примера линейно-квадратичных задач синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий ПС. В одном примере принцип разделения выполняется, а в другом – нет.

1.1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений (скачков) в моменты времени $t_i, i = 1, \dots, N$, образующие неубывающую последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \doteq t_F. \quad (1.1)$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (1.2)$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением

$$x_i = g(t_i, x_{i-}, v_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

В соотношениях (1.2) обозначены: $\mathcal{N} \doteq \{i = 0, 1, \dots, N | t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i \doteq [t_i, t_{i+1})$ непрерывного движения системы; $x(t)$ – состояние системы в момент времени $t \in T_i, i \in \mathcal{N}, x(t) \in X \doteq \mathbf{R}^n$; $u(t)$ – управление непрерывным движением системы в момент времени $t \in T, u(t) \in U \subset \mathbf{R}^q, U$ – заданное множество допустимых значений управления. При $t_i = t_{i+1}$ дифференциальное уравнение (1.2) опускается ($i \notin \mathcal{N}$), а значение $u(t_i)$ управления в этой точке $T_i = \{t_i\}$ несущественно. В уравнении (1.3) $x_i \doteq x(t_i)$ – состояние системы сразу после i -го переключения, x_{i-} – состояние системы непосредственно перед i -м переключением:

$$x_{i-} \doteq \begin{cases} x(t_i - 0), & t_{i-1} < t_i, \\ x_{i-1}, & t_{i-1} = t_i; \end{cases} \quad (1.4)$$

v_i – управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}, v_i \in V \subset \mathbf{R}^q, V$ – заданное множество допустимых управлений переключениями. Функция $f: T \times X \times U \rightarrow \mathbf{R}^n$ непрерывна

на всей области определения вместе с производной $\partial f/\partial x$; функция $g: T \times X \times V \rightarrow \mathbf{R}^n$ ограничена.

Возможное равенство последовательных моментов в (1.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [21, 28]. Например, на рис. 1.1 изображена кусочно-гладкая траектория с семью моментами переключений t_1, \dots, t_7 , которые образуют неубывающую последовательность $t_0 < t_1 < t_2 = t_3 = t_4 < t_5 < t_6 = t_7$. В точках t_1 и t_5 траектория имеет обычные (однократные) переключения, например скачок $x_{i-} \rightarrow x_i$ из состояния $x_{i-} = x(t_i - 0)$ в состояние x_i в момент t_i . В точках t_4 и t_7 траектория имеет так называемые многозначные разрывы [19, 33], а система совершает мгновенные многократные переключения: тройное переключение $x_{2-} \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ в момент t_4 и двойное $x_{5-} \rightarrow x_6 \rightarrow x_7$ в момент t_7 . Между неравными моментами переключений – на четырех промежутках $T_0 = [t_0, t_1)$, $T_1 = [t_1, t_2)$, $T_4 = [t_4, t_5)$, $T_5 = [t_5, t_6)$ – изменение состояния системы является непрерывным, а траектории $x(t)$ – гладкими кривыми. Множество номеров ненулевых промежутков $\mathcal{N} = \{0, 1, 4, 5\}$. Точки $T_1 = \{t_2\}$, $T_3 = \{t_3\}$, $T_6 = \{t_6\}$ – «промежуточные» для мгновенных многократных переключений. Заметим, что характер переключения траектории (однократное или многократное) не влияет на ее непрерывное изменение между моментами переключений.

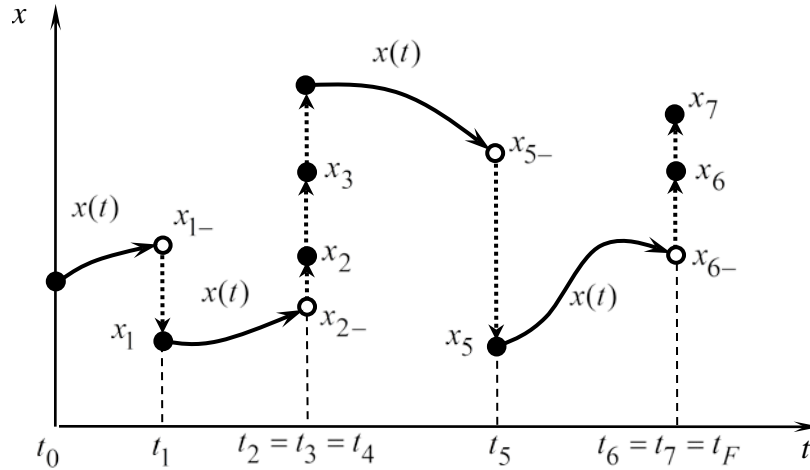


Рис. 1.1.

Начальное состояние системы задано

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.5)$$

Условие (1.5) не исключает одного или нескольких переключений в начальный момент времени t_0 , поскольку первые несколько моментов переключений (1.1) могут совпадать. Момент t_F окончания процесса управления задан, а конечное состояние свободно – терминальных ограничений нет.

Множество допустимых процессов $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ составляют тройки $d = (x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$, включающие последовательность $x(\cdot) = \{x_i(\cdot)\}_{i \in \mathcal{N}}$ абсолютно непрерывных на T_i функций $x_i(\cdot)$; ограниченную измеримую на T функцию $u: T \rightarrow U$; последовательность $\{v\} \doteq \{v_i\}_{i=1}^N$ векторов $v_i \in V$; причем пары $(x_i(\cdot), u(\cdot))$, $i \in \mathcal{N}$, удовлетворяют уравнению (1.2) почти всюду на промежутке T_i , тройки (x_{i-}, x_i, v_i) , $i = 1, \dots, N$, на \mathcal{T} – рекуррентному уравнению (1.3); в начальный момент времени выполняется условие (1.5). Подчеркнем, что количество $N = |\mathcal{T}(x(\cdot))|$ переключений и моменты $\mathcal{T}(x(\cdot)) = \{t_1, \dots, t_N\}$ переключений не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать. Предполагаем, что у допустимых процессов нет так называемых *фиктивных* переключений, при которых состояние системы не изменяется ($x_i = x_{i-}$) и фактического переключения нет.

На множестве $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ допустимых процессов задан функционал качества

$$I(t_0, x_0, d) = \int_{t_0}^{t_F} f^0(t, x(t), u(t)) dt + \sum_{i=1}^N g^+(t_i, x_{i-}, v_i) + F(x(t_F)), \quad (1.6)$$

где функции $f^0: T \times X \times U \rightarrow \mathbf{R}$ и $F: X \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывны и ограничены снизу, а функция $g^+: T \times X \times V \rightarrow \mathbf{R}_+$ неотрицательная. Последнее условие позволяет рассматривать каждое слагаемое $g^+(t_i, x_{i-}, v_i)$ в (1.6) как затраты (или «штраф») при переключении $x_{i-} \rightarrow x_i$. В силу непрерывности функции $f^0(t, x, u)$ по всем аргументам функция $f^0[t] = f^0(t, x(t), u(t))$ будет измеримой и ограниченной, т.е. суммируемой, для любого допустимого процесса $d = (x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$. Поэтому функционал (1.6) определен на $\mathcal{D}(t_0, x_0)$. Отметим, что в функционале (1.6) количество переключений N и моменты переключений не заданы.

1.1.1. Задача оптимального управления одной траекторией

Требуется найти наименьшее значение функционала (1.6) и оптимальный процесс $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot), \{v^*\}) \in \mathcal{D}(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, d). \quad (1.7)$$

Подчеркнем, что при минимизации вместе с оптимальным управлением определяются также количество переключений и моменты переключений. Если наименьшее значение (1.7) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [68]. Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Неограниченное возрастание количества переключений становится невозможным, если усилить условие неотрицательности функции g^+ в (1.6):

$$g^+(t, x, v) \geq \text{const} > 0. \quad (1.8)$$

Применение таких «штрафов» в функционале качества исключает последовательности процессов с неограниченным ростом числа переключений как неминимизирующие.

Условие $g^+(\cdot) \geq 0$ неотрицательности затрат на переключение позволяет при решении задачи (1.7) допускать процессы с фиктивными переключениями. Действительно, исключая у такого процесса фиктивное переключение $x_i = x_{i-1}$, в функционале (1.6) удаляется неотрицательное слагаемое $g^+(t_i, x_{i-}, v_i) \geq 0$. Поэтому значение функционала не увеличивается. Значит, если у процесса есть фиктивные переключения, то эти переключения можно исключить, при этом получим допустимый процесс без фиктивных переключений, на котором значение функционала будет не больше. Если же выполняется условие (1.8) положительности затрат, то фиктивных переключений у оптимальных процессов не может быть.

В прикладных задачах нередко возникают ограничения на количество переключений. Задача минимизации функционала (1.6) на множестве допустимых траекторий с заданным числом переключений формулируется следующим образом. Пусть $\mathcal{D}^N(t_0, x_0)$ – множество допустимых процессов из $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ с N переключениями, быть может, фиктивными. Задача с фиксированным количеством переключений проще, чем с ограниченным количеством переключений N_{max} . Решаем такие задачи при $N = 0, 1, \dots, N_{max}$ и выбираем из них лучшее. Подчеркнем, что количество переключений N у всех процессов из $\mathcal{D}^N(t_0, x_0)$ одинаковое (равное N), но моменты переключений (1.1) у разных процессов могут не совпадать. Обозначим через $I^N(t_0, x_0, d)$ функционал (1.6) при фиксированном количестве переключений N . Он определен на подмножестве $\mathcal{D}^N(t_0, x_0)$ множества $\mathcal{D}(t_0, x_0)$. Требуется найти минимальное значение функционала (1.6) на множестве $\mathcal{D}^N(t_0, x_0)$ и процесс $d^N \in \mathcal{D}^N(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I^N(t_0, x_0, d^N) = \min_{d \in \mathcal{D}^N(t_0, x_0)} I^N(t_0, x_0, d). \quad (1.9)$$

Такой процесс d^N будем называть *условно оптимальным*, имея в виду его оптимальность при дополнительном условии – заданном количестве переключений N .

Поставленные задачи (1.7), (1.9) представляют собой, так называемые задачи со свободным конечным состоянием и фиксированным временем. В более общей постановке [68] на правый конец траектории могут быть наложены терминальные ограничения. Например, в разд. 3 рассматривается задача с фиксированным конечным состоянием и свободным временем окончания. Оптимальное время окончания определяется в результате минимизации функционала. Отметим, что поставленные задачи являются частным случаем задачи оптимального управления со сменой модели движения [137].

1.1.2. Задача оптимального управления пучком траекторий

Обозначим через $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ множество допустимых программных управлений $w = (u(\cdot), v(\cdot))$. Программное управление $u(\cdot)$ непрерывным движением – это, как и ранее, ограниченная измеримая функция $u: T \rightarrow U$. Программное управление $v(\cdot)$ переключениями – это функция $v: \mathcal{T} \rightarrow V$, определенная на неубывающей последовательности $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\} \subset T$. Программное управление $v(\cdot) = \{(t_1, v_1), \dots, (t_N, v_N)\}$ фактически определяет моменты переключений t_1, \dots, t_N и значение управлений $v_i \in V$ в эти моменты. Предполагаем, что каждое допустимое программное управление $w = (u(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{W}(t_0, x_0)$ порождает в силу уравнений движения (1.2), (1.3) такую единственную траекторию $x(\cdot)$, исходящую из начального состояния (1.5), что процесс $d = (x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$ оказывается допустимым $d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)$. Функционал (1.6) при этом можно считать зависящим только от программного управления $I(t_0, x_0, w) \doteq I(t_0, x_0, d)$.

Пусть в отличие от задачи (1.7) начальное состояние $x_0 \in X$ точно не известно, а известно множество σ_0 возможных начальных состояний ($\sigma_0 \subset X$). Обозначим через $\mathcal{W}(t_0, \sigma_0)$ множество допустимых программных управлений $w = (u(\cdot), \{v\})$, каждое из которых порождает допустимую траекторию $x(\cdot)$ для любого начального состояния $x(t_0) \in \sigma_0$. Объединение этих траекторий образует пучок $t \rightarrow \sigma(t)$, исходящий из множества возможных начальных состояний $\sigma(t_0) = \sigma_0$.

Пусть, по-прежнему, качество управления одной траекторией характеризуется функционалом (1.6), который можно считать зависящим от программного управления $I = I(t_0, x_0, w)$. Предполагаем, что множество σ_0 возможных начальных состояний имеет положительную меру $\text{mes } \sigma_0 > 0$. Качество программного управления пучком траекторий, исходящих из множества σ_0 , оценивается средним значением функционала (1.6):

$$I^c(t_0, \sigma_0, w) = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) I(t_0, x_0, w) dx_0, \quad (1.10)$$

В (1.10) измеримую неотрицательную весовую функцию $\rho: X \rightarrow \mathbf{R}_+$ можно считать плотностью распределения начального состояния системы, предполагая при этом, что

$$\int_{\sigma_0} \rho(x) dx = 1.$$

В частности, в рассматриваемых ниже примерах $\rho(x) = 1/\text{mes } \sigma_0$.

Требуется найти оптимальное в среднем управление w^c , минимизирующее функционал (1.10):

$$I^c(t_0, \sigma_0, w^c) = \min_{w \in \mathcal{W}(t_0, \sigma_0)} I^c(t_0, \sigma_0, w). \quad (1.11)$$

Как и в случае управления одной траекторией (см. разд.1.1.1), минимизация в (1.11) может проводиться при дополнительном условии – заданном количестве N переключений. На рис. 1.2 представлен типовой пучок траекторий $\sigma(t)$, исходящий из множества начальных состояний σ_0 . Моменты переключений t_1, t_2, t_3 образуют неубывающую последовательность $t_0 < t_1 = t_2 < t_3 < t_F$.

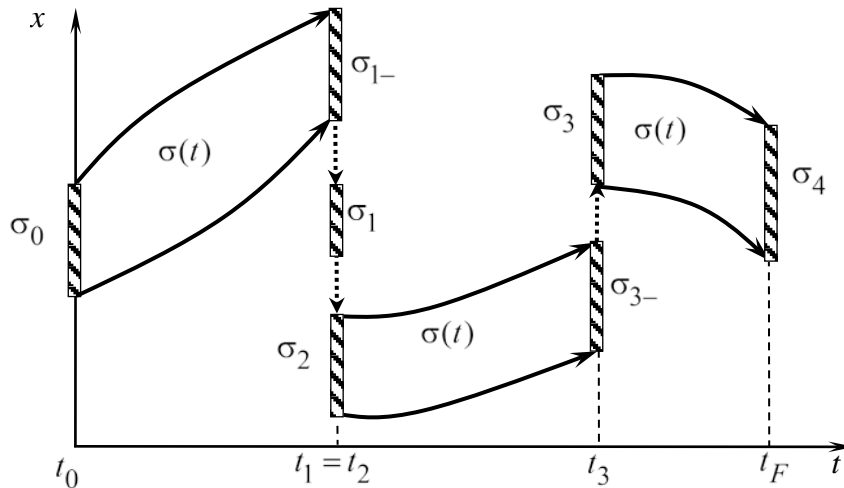


Рис. 1.2.

Заметим, что множество σ_0 допустимых состояний можно задавать разными способами. Требования к этому множеству в детерминированной постановке задачи гораздо меньше, чем в стохастической [77]. Достаточно обеспечить существование среднего значения функционала. Например, если некоторые координаты вектора состояния в начальный момент времени известны точно, то множество σ_0 будет отражать неопределенность остальных координат. При этом интегрирование в (1.10) ведется по части координат вектора состояния, а множество σ_0 должно иметь положительную меру в подпространстве неизменяемых координат. При моделировании часто ограничиваются конечным числом M траекторий системы. В этом случае множество σ_0 состоит из M начальных состояний $\sigma_0 = \{x_0^j \in X \mid j = 1, \dots, M\}$. Тогда среднее значение (1.10) заменяется средним арифметическим

$$I^c(t_0, \sigma_0, w) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M I(t_0, x_0^j, w).$$

Как правило, в прикладных задачах множество σ_0 представляется параллелепипедом или эллипсоидом [77, 128]. Это связано с характером погрешностей измерений начального состояния. Формы математического описания множеств возможных состояний системы для конкретных задач представлены в разд. 4.

1.1.3. Задача субоптимального управления пучком траекторий

Для управления пучком траекторий предлагается применять управление, оптимальное для одной траектории, возможно, не принадлежащей этому пучку. Среди оптимальных управлений изолированными траекториями выбирается наилучшее управление в смысле минимума функционала (1.10). Такое управление, вообще говоря, не является оптимальным в среднем для пучка траекторий, но оно может оказаться вполне приемлемым для практики. Будем называть его *субоптимальным* в среднем управлением пучком траекторий. Сформулируем задачу поиска такого управления.

Пусть $\widehat{\mathcal{W}}(t_0)$ – множество оптимальных программных управлений $\widehat{w} = (\widehat{u}(\cdot), \widehat{v}(\cdot))$ отдельными траекториями, т.е. каждое программное управление $\widehat{w} \in \widehat{\mathcal{W}}(t_0)$ хотя бы для одного начального состояния $\widehat{x}_0 \in X$ порождает в силу уравнений движения (1.2), (1.3) оптимальный процесс, минимизирующий функционал (1.6). Начальное состояние \widehat{x}_0 может не принадлежать множеству σ_0 . В рассматриваемой задаче любое управление, оптимальное для одной траектории, предполагаем допустимым для всех траекторий пучка, т.е. $\widehat{\mathcal{W}}(t_0) \subset \mathcal{W}(t_0, \sigma_0)$.

Требуется найти субоптимальное в среднем управление \widehat{w}^c , минимизирующее функционал (1.10) на множестве $\widehat{\mathcal{W}}(t_0)$:

$$I^c(t_0, \sigma_0, \widehat{w}^c) = \min_{w \in \widehat{\mathcal{W}}(t_0)} I^c(t_0, \sigma_0, w). \quad (1.12)$$

Наименьшее значение (1.12) не меньше минимального значения (1.11), так как $\widehat{\mathcal{W}}(t_0) \subset \mathcal{W}(t_0, \sigma_0)$.

Если для каждого начального состояния \widehat{x}_0 известно оптимальное программное управление $\widehat{w}(t_0, \widehat{x}_0) = (\widehat{u}(\cdot), \{\widehat{v}\}) \in \widehat{\mathcal{W}}(t_0)$, то минимизацию по управлению в (1.12) можно заменить минимизацией по состоянию \widehat{x}_0 :

$$I^c(t_0, \sigma_0, \widehat{w}^c) = \min_{\widehat{x}_0 \in X} I^c(t_0, \sigma_0, \widehat{w}(t_0, \widehat{x}_0)). \quad (1.13)$$

Наилучшее состояние \widehat{x}_0^c , для которого достигается минимум в (1.13) будем называть *субоптимальной в среднем* оценкой возможных начальных состояний системы. Такая оценка известна для некоторых задач управления пучками. Например, как показано в [90], для задач управления линейными непрерывными системами с квадратичным функционалом качества наилучшей (субоптимальной в среднем) оценкой \widehat{x}_0^c будет геометрический центр тяжести множества σ_0 . Для других линейно-квадратичных задач имеются аналогичные результаты [26, 27, 37].

1.1.4. Задача субоптимального управления пучком траекторий с дискретными неточными измерениями

Рассмотрим задачу оптимального в среднем управления детерминированной системой при наличии дискретных неточных измерений. В этой задаче модель измерений проще, чем в стохастических задачах [77]. Опишем математическую модель измерений.

Математическая модель измерений. Пусть в некоторые заданные моменты времени t^1, \dots, t^m , образующие возрастающую последовательность $t_0 < t^1 < \dots < t^m < t_F$ на промежутке $[t_0, t_F]$, производятся неточные измерения, в результате которых соответственно определяются «измеренные» множества $\sigma^1, \dots, \sigma^m$ возможных состояний системы, информацию о которых можно использовать при управлении.

Предполагаем, что моменты измерений не совпадают с моментами мгновенных многократных переключений из последовательности (1.1). Измерения позволяют «сузить» пучок траекторий [131], исключая траектории, не удовлетворяющие полученной дополнительной информации. Измерения должны удовлетворять условиям непротиворечивости информации, которые состоят в следующем. При первом измерении в момент времени t^1 непустое пересечение $\sigma_0^1 = \sigma^0(t^1) \cap \sigma^1$ множества $\sigma(t^1)$ возможных состояний и «измеренного» множества σ^1 должно обладать теми же свойствами, что и множество σ_0 (см. разд. 1.1.2). Аналогичные требования предъявляются к остальным измерениям.

Пусть $\sigma^i(t)$, $t^i < t < t^{i+1}$, – это пучок траекторий после i -го измерения, $i = 1, \dots, m - 1$, а σ_0^m – множество всех возможных состояний системы в момент времени t^m с учетом начального множества σ_0 и всех m измерений, проведенных до этого момента включительно. Это множество получается путем последовательного пересечения множества возможных состояний системы с «измеренными» множествами

$$\sigma_0^0 \doteq \sigma_0 = \sigma^0(t_0), \sigma_0^1 = \sigma^0(t^1) \cap \sigma^1, \dots, \sigma_0^m = \sigma^{m-1}(t^m) \cap \sigma^m. \quad (1.14)$$

Предполагаем, что все множества (1.14) обладают теми же свойствами, что и множество σ_0 возможных начальных состояний (см. разд. 1.1.2). В прикладных задачах управления «измеренные» множества σ^i считаются заданными. Они определяются в результате работы измерительной аппаратуры. Как правило, они представляют собой параллелепипеды или эллипсоиды [77, 128].

На рис. 1.3 изображены состояния пучка траекторий с учетом двух измерений в моменты t^1 и t^2 . «Измеренные» множества представлены прямоугольниками σ^1 и σ^2 , множество σ_0 начальных состояний – эллипсом, пересечение $\sigma_0^1 = \sigma^0(t^1) \cap \sigma^1$ отмечено штриховкой, а $\sigma_0^2 = \sigma^1(t^2) \cap \sigma^2$ – двойной штриховкой. Полушпирными точками отмечены геомет-

рические центры тяжести множеств $\sigma_0, \sigma_0^1, \sigma_0^2$, маленькими окружностями – центры тяжести множеств $\sigma^0(t^1), \sigma^1(t^2)$.

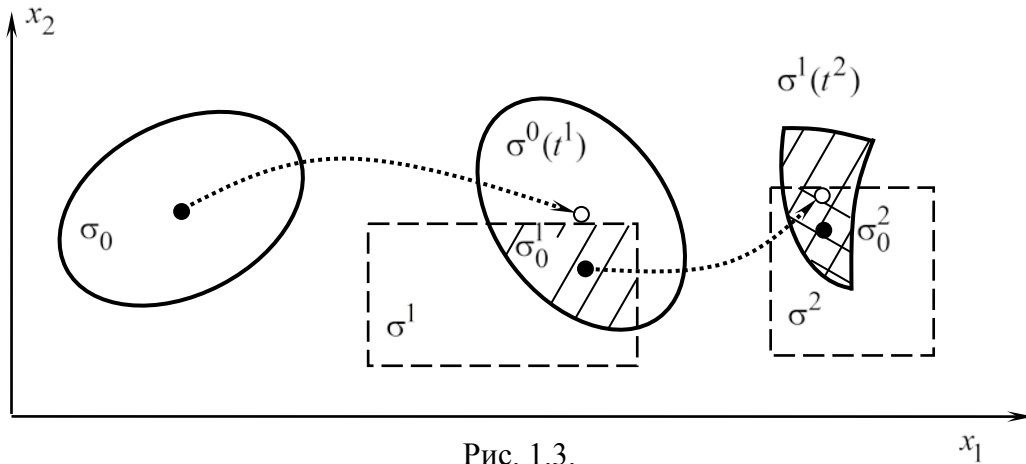


Рис. 1.3.

Задача субоптимального управления пучком траекторий с учетом измерений формулируется так же, как в разд.1.4, только процесс управления пучком происходит на промежутке времени $[t^m, t_F]$ и начинается из множества σ_0^m . Требуется найти субоптимальное в среднем управление w^c , минимизирующее функционал $I^c(t^m, \sigma_0^m, w)$ на множестве $\widehat{\mathcal{W}}(t^m)$:

$$I^c(t^m, \sigma_0^m, \widehat{\mathcal{W}}^m) = \min_{w \in \widehat{\mathcal{W}}(t^m)} I^c(t^m, \sigma_0^m, w).$$

Заметим, что задача управления фактически отделена от задачи наблюдения – нахождения оценки множества возможных состояний. Каждое измерение позволяет уточнить это множество, при этом субоптимальное управление заново формируется с учетом полученной информации. Например, если в качестве субоптимального в среднем состояния пучка выбирается геометрический центр тяжести, то при каждом измерении этот центр изменяется, возможно, скачком, при этом виртуальная траектория, проходящая через центры тяжести (пунктирные стрелки на рис. 1.3), может иметь разрывы в моменты измерений.

1.2. ОПТИМАЛЬНОЕ ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

1.2.1. Функция цены и ее образующие

Решение задачи синтеза оптимального позиционного управления будем искать, применяя метод динамического программирования, который связан с нахождением функции цены (функции Гамильтона – Якоби – Беллмана). Рассмотрим семейство задач оптимального управления с произвольной начальной позицией $(t, x) \in T \times X$. Первоначальная задача (1.7) включается в это семейство. Обозначим через $\mathcal{D}(t, x)$ множество допустимых процессов,

удовлетворяющих начальному условию $x(t) = x$, каждый из которых имеет конечное число переключений на $[t, t_F]$. Оставшиеся переключения происходят в моменты t_1, \dots, t_k , образующие неубывающую последовательность на промежутке $[t, t_F]$:

$$t \doteq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1} \doteq t_F.$$

Заметим, что количество k оставшихся переключений и сами моменты t_1, \dots, t_k переключений не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать.

На множестве $\mathcal{D}(t, x)$ допустимых процессов определим функционал оставшихся потерь, аналогичный (1.6):

$$I(t, x, d) = \int_t^{t_F} f^0(t, x(t), u(t)) dt + \sum_{i=1}^k g^+(t_i, x_{i-}, v_i) + F(x_k(t_F)). \quad (1.15)$$

Функция цены $\varphi(t, x)$, по определению, равна значению функционала оставшихся потерь (1.15), вычисленному на оптимальном процессе с начальным условием $x(t) = x$. Иначе говоря, функция цены равна минимальному значению функционала оставшихся потерь (1.15) на множестве допустимых процессов $\mathcal{D}(t, x)$:

$$\varphi(t, x) = \min_{d \in \mathcal{D}(t, x)} I(t, x, d). \quad (1.16)$$

Определим *образующую* функции цены с k переключениями, значение $\varphi^k(t, x)$ которой равно значению функционала оставшихся потерь (1.15), вычисленному на процессе, который оптимален среди всех допустимых процессов, исходящих из начальной позиции (t, x) и имеющих ровно k переключений, быть может, фиктивных. Если обозначить через $\mathcal{D}^k(t, x)$ множество допустимых процессов из $\mathcal{D}(t, x)$, имеющих ровно k переключений, быть может, фиктивных, а через $I^k(t, x, d)$ – функционал (1.15) при фиксированном количестве k оставшихся переключений, то

$$\varphi^k(t, x) = \min_{d \in \mathcal{D}^k(t, x)} I^k(t, x, d). \quad (1.17)$$

Согласно определению, функция цены (1.16) является нижней огибающей своих образующих

$$\varphi(t, x) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^k(t, x),$$

а наименьшее значение функционала (1.6) вычисляется по функции цены

$$\min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, d) = \varphi(t_0, x_0) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^k(t_0, x_0).$$

Вспомогательные функции (1.17) аналогичны функциям, введенным в [137]. Отличие заключается в том, что у образующих отсутствует нумерация моделей движения, так как при переключениях (1.3) модель движения не меняется. Это приводит к упрощению процедуры нахождения функции цены и достаточных условий оптимальности в сравнении с [137].

Ключевую роль при нахождении образующих играет так называемая [136] *двухпозиционная* функция цены $\phi(\theta, x_\theta | \tau, x_\tau)$. Она определяется как решение задачи Лагранжа для системы (1.2) с фиксированными концами траектории:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(\theta) = x_\theta, \quad x(\tau) = x_\tau, \quad \int_{\theta}^{\tau} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min. \quad (1.18)$$

Эта функция, как функция начальной позиции $(t, x) \rightarrow \phi(t, x | \tau, x_\tau)$, является функцией цены и удовлетворяет уравнению ГЯБ с нулевыми терминальными условиями

$$\min_{u \in U} [\phi_t(t, x | \tau, x_\tau) + \phi_x(t, x | \tau, x_\tau) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0, \quad \phi(\tau, x_\tau | \tau, x_\tau) = 0. \quad (1.19)$$

В результате минимизации в (1.19) определяется двухпозиционное управление

$$u(t, x | \tau, x_\tau) = \arg \min_{u \in U} [\phi_t(t, x | \tau, x_\tau) + \phi_x(t, x | \tau, x_\tau) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)]. \quad (1.20)$$

Двухпозиционная функция $\phi(\theta, x_\theta | \tau, x_\tau)$ определяется для всех пар позиций $(\theta, x_\theta) \in T \times X$, $(\tau, x_\tau) \in T \times X$, $\theta < \tau$. Если для некоторых позиций решение задачи (1.18) не существует, то можно доопределить функцию, полагая $\phi(\theta, x_\theta | \tau, x_\tau) = +\infty$, чтобы исключить при минимизации недопустимые процессы.

1.2.2. Алгоритм синтеза оптимального позиционного управления

В работах [33, 136] выведены уравнения для нахождения образующих функции цены. Нулевая образующая $\varphi^0(t, x)$ соответствует оптимальному процессу без переключений. Поэтому она удовлетворяет уравнению ГЯБ

$$\min_{u \in U} [\varphi_t^0(t, x) + \varphi_x^0(t, x) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0$$

с терминальным условием

$$\varphi^0(t_F, x) = F(x).$$

Остальные образующие находятся в результате рекуррентной процедуры

$$\varphi^k(t, x) = \min_{t \leq \tau \leq t_F} \min_{x_\tau \in X} \left\{ \phi(t, x | \tau, x_\tau) + \min_{v \in V} [\varphi^{k-1}(\tau, g(\tau, x_\tau, v)) + g^+(\tau, x_\tau, v)] \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В задаче с фиксированным конечным состоянием $x_F = x(t_F)$ и свободным временем окончания терминальное условие имеет вид $\varphi^0(t, x_F) = F(x_F)$, $t^0 \leq t < +\infty$.

Сформулируем следующий алгоритм синтеза оптимального позиционного управления. Предполагаем, что для всех позиций известны двухпозиционная функция цены $\phi(\theta, x_\theta | \tau, x_\tau)$ и соответствующее управление $u(t, x | \tau, x_\tau)$, а также позиционное управление $u^0(t, x)$.

- 1) Нулевую образующую $\varphi^0(t, x)$, соответствующую оптимальному процессу без переключений, находим, решая уравнение ГЯБ

$$\min_{u \in U} [\varphi_t^0(t, x) + \varphi_x^0(t, x) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0$$

с терминальным условием

$$\varphi^0(t_F, x) = F(x).$$

- 2) Решая уравнение ГЯБ (п.1)), определяем условное оптимальное позиционное управление

$$\mathbf{u}^0(t, x) = \arg \min_{u \in U} [\varphi_t^0(t, x) + \varphi_x^0(t, x) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] \quad (1.21)$$

непрерывным движением при отсутствии переключений. Полагаем $k = 1$.

- 3) Находим условное оптимальное позиционное управление первым из оставшихся k переключений системы

$$\mathbf{v}^k(\tau, x) = \arg \min_{v \in V} [\varphi^{k-1}(\tau, g(\tau, x, v)) + g^+(\tau, x, v)]. \quad (1.22)$$

- 4) Находим k -ю образующую функции цены

$$\varphi^k(t, x) = \min_{t \leq \tau \leq t_F} \min_{x_\tau \in X} \left\{ \phi(t, x | \tau, x_\tau) + \varphi^{k-1}(\tau, g(\tau, x_\tau, \mathbf{v}^k)) + g^+(\tau, x_\tau, \mathbf{v}^k) \right\}, \quad (1.23)$$

где $\mathbf{v}^k = \mathbf{v}^k(\tau, x_\tau)$.

- 5) Выполняя минимизацию в (1.23), определяем оптимальную позицию (τ^k, \mathbf{x}^k) первого из оставшихся k переключений, т.е. оптимальный момент переключения:

$$\tau^k(t, x) = \arg \min_{t \leq \tau \leq t_F} \min_{x_\tau \in X} \left\{ \phi(t, x | \tau, x_\tau) + \varphi^{k-1}(\tau, g(\tau, x_\tau, \mathbf{v}^k)) + g^+(\tau, x_\tau, \mathbf{v}^k) \right\} \quad (1.24)$$

и оптимальное состояние перед этим переключением:

$$\mathbf{x}^k(t, x) = \arg \min_{x_\tau \in X} \min_{t \leq \tau \leq t_F} \left\{ \phi(t, x | \tau, x_\tau) + \varphi^{k-1}(\tau, g(\tau, x_\tau, \mathbf{v}^k)) + g^+(\tau, x_\tau, \mathbf{v}^k) \right\}. \quad (1.25)$$

- 6) Проверяем условие окончания. Если неравенство

$$\min_{i=0,1,\dots,k} \varphi^i(t, x) \leq \min_{i=0,1,\dots,k+1} \varphi^i(t, x)$$

выполняется для всех позиций $(t, x) \in T \times X$, то процесс построения образующих заканчивается. Иначе полагаем $k := k + 1$ и переходим к пункту 3.

Условие окончания означает, что для всех позиций (t, x) процессы с $k + 1$ переключениями хуже, чем процессы с k переключениями. Отсюда следует, что все процессы с большим, чем k количеством переключений не будут оптимальными. К сожалению, это естественное условие окончания труднопроверяемое. Поэтому на практике обычно задается максимальное число переключений, которое ограничивает количество итераций.

Алгоритм позволяет получить образующие $\varphi^k(t, x)$ функции цены $\varphi(t, x)$, а также управляющий «комплекс», который включает условное оптимальное позиционное управление $\mathbf{u}^0(t, x)$ непрерывным движением без переключений, оптимальное позиционное управление переключениями $\mathbf{v}^k(\tau, x)$, оптимальный момент переключения $\tau^k(t, x)$ и оптимальное

состояние перед переключением $\mathbf{x}^k(t, x)$. Оптимальное позиционное управление $\mathbf{u}^k(t, x)$ непрерывным процессом до первого переключения определяется по двухпозиционному управлению $\mathbf{u}(t, x | \tau^k, \mathbf{x}^k)$. Оптимальное количество переключений для траектории, исходящей из позиции (t, x) , вычисляется по формуле

$$\mathbf{k}(t, x) = \arg \min_{k=0,1,\dots,N} \varphi^k(t, x), \quad (1.26)$$

а наименьшее значение функционала по формуле

$$\min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, d) = \min_{k=0,1,\dots,N} \varphi^k(t_0, x_0).$$

1.2.3. Нахождение оптимального программного управления

Опишем построение оптимального процесса, удовлетворяющего начальному условию (1.15), при помощи позиционных конструкций (1.20), (1.21)-(1.25), (1.26).

Для позиции (t_0, x_0) определяем оптимальное количество оставшихся переключений $N = \mathbf{k}(t_0, x_0)$, а также позицию (t_1, x_{1-}) первого переключения: $t_1 = \tau^N(t_0, x_0)$, $x_{1-} = \mathbf{x}^N(t_0, x_0)$. Если $t_1 = t_0$, то $\mathbf{x}^N(t_0, x_0) = x_0$, т.е. позиция перед первым переключением совпадает с начальной $x_{1-} = x_0$. Система сразу совершает скачок $x_0 \rightarrow x_1 = g(t_1, x_0, v_1)$ под действием управления $v_1 = \mathbf{v}^N(t_1, x_0)$. Если $t_1 > t_0$, то сначала на промежутке $[t_0, t_1]$ происходит непрерывное движение, согласно уравнению (1.2), с программным управлением $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t, x(t) | t_1, x_{1-})$, а в конце этого промежутка из состояния $x_{1-} = x(t_1 - 0)$ происходит скачок $x_{1-} \rightarrow x_1 = g(t_1, x_{1-}, v_1)$ под действием управления $v_1 = \mathbf{v}^N(t_1, x_{1-})$. И в том и в другом случае система приходит в позицию (t_1, x_1) , в которой выполняются те же действия, за исключением поиска оптимального количества переключений, так как оно равно $N - 1$. Если в начальной позиции (t_0, x_0) оптимальное количество переключений равно нулю: $\mathbf{k}(t_0, x_0) = 0$, то переключений нет и непрерывное движение системы совершается, согласно уравнению (1.2), под действием программного управления $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^0(t, x(t))$.

Оптимальное позиционное управление для рассматриваемых систем представляет собой цель *«управляющий комплекс»*, состоящий из шести функций: $\mathbf{u}^0(t, x)$ и $\mathbf{u}(t, x | \tau, \xi)$ – условные оптимальные управления (1.21), (1.20) непрерывным движением системы, $\mathbf{v}^k(t, x)$ – условное оптимальное управление (1.22) переключениями, $\tau^k(t, x)$ – оптимальный момент (1.24) первого из k оставшихся переключений, $\mathbf{x}^k(t, x)$ – оптимальное состояние (1.25) для этого переключения, $\mathbf{k}(t, x)$ – оптимальное количество (1.26) переключений процесса, исходящего из позиции (t, x) .

Таким образом, находится оптимальный процесс, т.е. оптимальная траектория и оптимальное программное управление. Наименьшее значение функционала качества вычисляем по функции цены

$$\min I = \varphi(t_0, x_0) = \varphi^k(t_0, x_0).$$

1.3. СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ

Управление пучком траекторий ПС будем искать на основе принципа разделения: «*оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с оптимальным управлением одной траекторией*». Эта траектория, будем ее называть *опорной*, может принадлежать пучку или не принадлежать ему. Оптимальное программное управление для опорной траектории можно получить, используя оптимальное позиционное управление (см. разд.1.2). Поэтому остается только выбрать наилучшую опорную траекторию. Для этого достаточно указать начальное состояние опорной траектории. Таким образом, если принцип разделения справедлив, то решение задачи оптимального управления пучком можно разделить на два этапа: синтез оптимального позиционного управления и нахождение начального состояния для опорной траектории. На втором этапе фактически строится оценка начального состояния, которая затем используется в оптимальном позиционном управлении.

1.3.1. Функция стоимости полуоптимального процесса и ее образующие

В [33] были получены достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий ПС. Эти условия связаны с так называемой функцией стоимости *полуоптимального процесса*, значение $\beta(t, x, \hat{x})$ которой по определению равно значению функционала оставшихся потерь (1.15):

$$\beta(t, x, \hat{x}) = I(t, x, \hat{w}), \quad (1.27)$$

вычисленному на траектории, исходящей из позиции (t, x) , при управлении $\hat{w} = (\hat{u}(\cdot), \{\hat{v}\})$, оптимальном для траектории, исходящей из позиции (t, \hat{x}) . Поскольку управление \hat{w} оптимальное для траектории $\hat{x}(\cdot)$, то значение $I(t, \hat{x}, \hat{w}) \doteq I(t, x, d)$ функционала (1.15) равно соответствующему значению функции цены: $\varphi(t, \hat{x}) = I(t, \hat{x}, \hat{w})$. Следовательно, при совпадении аргументов $x = \hat{x}$ функция (1.27) совпадает с функцией цены:

$$\beta(t, \hat{x}, \hat{x}) = \varphi(t, \hat{x}) = I(t, \hat{x}, \hat{w}).$$

Если же позиции разные $x \neq \hat{x}$, то значение $\beta(t, x, \hat{x})$ отличается от цены $\varphi(t, \hat{x})$. В любом случае справедливо неравенство

$$\varphi(t, \hat{x}) \leq \beta(t, x, \hat{x}),$$

которое показывает, что ошибочное использование оптимального программного управления для другой (неоптимальной) траектории приводит к увеличению цены процесса. Другими словами, если функция цены $\varphi(t, \hat{x})$ показывает стоимости оптимального процесса $(\hat{x}(\cdot), \hat{w})$, то функция $\beta(t, x, \hat{x})$ равна стоимости *полуоптимального* процесса $(x(\cdot), \hat{w})$, в котором управление \hat{w} оптимальное, а траектория $x(\cdot)$ нет.

Используя функцию $\beta(t, x, \hat{x})$, можно определить субоптимальные управления пучком траекторий. Действительно, для программного управления \hat{w} , оптимального для траектории, удовлетворяющей начальному условию $x(t_0) = \hat{x}$, имеем равенство

$$\beta(t_0, x_0, \hat{w}) = I(t_0, x_0, \hat{x}).$$

Качество управления \hat{w} пучком траекторий, исходящих из множества σ_0 , оценивается средним значением (1.10)

$$I^c(t_0, \sigma_0, \hat{w}) = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) I(t_0, x_0, \hat{w}) dx_0 = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) \beta(t_0, x_0, \hat{x}) dx_0. \quad (1.28)$$

Выбор наилучшего управления \hat{w} можно заменить, согласно (1.28) выбором наилучшего начального состояния \hat{x} опорной траектории:

$$\hat{x}^c \in \underset{\hat{x} \in X}{\text{Arg min}} \int_{\sigma_0} \rho(x_0) \beta(t_0, x_0, \hat{x}) dx_0. \quad (1.29)$$

Состояния (1.29) будем называть *субоптимальной в среднем оценкой* начального состояния. Если выполняется принцип разделения, то управление \hat{w}^c оптимальное для траекторий, исходящих из позиции (t_0, \hat{x}^c) , будет оптимальным в среднем управлением пучками траекторий.

Для нахождения функции стоимости $\beta(t, x, \hat{x})$ будем использовать, как и для функции цены, вспомогательные функции – образующие $\beta^k(t, x, \hat{x})$, $k \in \mathbf{Z}_+$, которые определим следующим образом. Обозначим, как и ранее, через $I^k(t, x, w)$ функционал (1.15) при фиксированном количестве k оставшихся переключений, быть может, фиктивных. Значение образующей $\beta^k(t, x, \hat{x})$ функции стоимости полагаем равным значению $I^k(t, x, \hat{w})$ функционала оставшихся потерь (1.15), вычисленному на траектории с k переключениями, исходящей из позиции (t, x) , при управлении \hat{w} , оптимальном для траектории, исходящей из позиции (t, \hat{x}) . Таким образом, образующая $\beta^k(t, x, \hat{x})$ отличается от функции $\beta(t, x, \hat{x})$ дополнительным ограничением на количество переключений.

Функция стоимости находится по своим образующим

$$\beta(t, x, \hat{x}) = \beta^{\hat{k}}(t, x, \hat{x}), \quad (1.30)$$

где $\hat{k} = \mathbf{k}(t, \hat{x})$ – оптимальное количество переключений (1.26). Образующие функции цены и стоимости связаны между собой, согласно определениям, равенством

$$\varphi^k(t, \hat{x}) = \beta^k(t, \hat{x}, \hat{x}), \quad k \in \mathbf{Z}_+.$$

1.3.2. Алгоритм синтеза субоптимального управления

В работах [33] выведены уравнения для нахождения образующих функции стоимости. При непрерывном движении изменение функции β^k происходит при управлении

$$\mathbf{u}^k(t, \hat{x}) = \mathbf{u}(t, \hat{x} | \boldsymbol{\tau}^k(t, \hat{x}), \mathbf{x}^k(t, \hat{x})), \quad k \in \mathbf{Z}_+.$$

Это оптимальное позиционное управление, согласно (1.20), переводит систему (1.2) из позиции (t, \hat{x}) в оптимальную позицию $(\boldsymbol{\tau}^k(t, \hat{x}), \mathbf{x}^k(t, \hat{x}))$ первого из k оставшихся переключений. При этом управлении функция β^k удовлетворяет уравнению

$$\beta_t^k(t, x, \hat{x}) + \beta_x^k(t, x, \hat{x})f(t, x, \mathbf{u}^k(t, \hat{x})) + \beta_{\hat{x}}^0(t, \hat{x}, \hat{x})f(t, \hat{x}, \mathbf{u}^k(t, \hat{x})) + f^0(t, x, \mathbf{u}^k(t, \hat{x})) = 0$$

с терминальным условием

$$\beta^0(t_F, x, \hat{x}) = F(x).$$

Дискретное изменение функции стоимости происходит под действием управления $\boldsymbol{\nu}^k(\tau, \hat{x})$:

$$\beta^k(\tau, x, \hat{x}) = \beta^{k-1}\left(\tau, g(\tau, x, \boldsymbol{\nu}^k(\tau, \hat{x})), g(\tau, \hat{x}, \boldsymbol{\nu}^k(\tau, \hat{x}))\right) + g^+(\tau, x, \boldsymbol{\nu}^k(\tau, \hat{x})).$$

В процедуре нахождения образующих функции стоимости используется оптимальное позиционное управление, получение которого описано в разд. 1.2.2.

Сформулируем следующий алгоритм синтеза субоптимального управления пучком траекторий. Предполагаем, что для всех позиций известны двухпозиционное управление $\mathbf{u}(t, x | \tau, x_\tau)$, а также позиционное управление $\mathbf{u}^0(t, x)$.

- 1) Нулевую образующую $\beta^0(t, x, \hat{x})$, соответствующую оптимальному процессу без переключений, находим, решая уравнение

$$\begin{aligned} & \beta_t^0(t, x, \hat{x}) + \beta_x^0(t, x, \hat{x})f(t, x, \mathbf{u}^0(t, \hat{x})) + \\ & + \beta_{\hat{x}}^0(t, \hat{x}, \hat{x})f(t, \hat{x}, \mathbf{u}^0(t, \hat{x})) + f^0(t, x, \mathbf{u}^0(t, \hat{x})) = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

с терминальным условием

$$\beta^0(t_F, x, \hat{x}) = F(x). \quad (1.32)$$

- 2) Остальные образующие $\beta^k(t, x, \hat{x})$, $k \in \mathbb{N}$, получаем, решая уравнение

$$\begin{aligned} & \beta_t^k(t, x, \hat{x}) + \beta_x^k(t, x, \hat{x})f(t, x, \mathbf{u}^k(t, \hat{x})) + \\ & + \beta_{\hat{x}}^k(t, x, \hat{x})f(t, \hat{x}, \mathbf{u}^k(t, \hat{x})) + f^0(t, x, \mathbf{u}^k(t, \hat{x})) = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

с терминальным условием

$$\beta^k(\tau, x, \hat{x}) = \beta^{k-1}\left(\tau, g(\tau, x, \mathbf{v}^k(\tau, \hat{x})), g(\tau, \hat{x}, \mathbf{v}^k(\tau, \hat{x}))\right) + g^+(\tau, x, \mathbf{v}^k(\tau, \hat{x})). \quad (1.34)$$

В уравнении (1.33) применяется управление $\mathbf{u}^k(t, \hat{x}) \doteq \mathbf{u}(t, \hat{x} | \boldsymbol{\tau}^k(t, \hat{x}), \mathbf{x}^k(t, \hat{x}))$, $k \in \mathbb{N}$.

3) Находим субоптимальную оценку множества возможных состояний системы по формуле

$$\hat{x}^c \in \underset{\hat{x} \in X}{\text{Arg min}} \int_{\sigma} \rho(t, x) \beta^{\hat{k}}(t, x, \hat{x}) dx, \quad (1.35)$$

где $\rho(t, x) = 1/\text{mes } \sigma$, $\hat{k} = \mathbf{k}(t, \hat{x}^c)$ – оптимальное количество оставшихся переключений в момент времени t .

4) Строим оптимальное программное управление для траектории, исходящей из позиции (t, \hat{x}^c) (см. разд. 1.2.3), которое используем для всех траекторий пучка.

Алгоритм позволяет получить образующие $\beta^k(t, x, \hat{x})$ функции $\beta(t, x, \hat{x})$ стоимости полуоптимального процесса и субоптимальную оценку начального состояния (1.35). Функция стоимости полуоптимального процесса находится по своим образующим

$$\beta(t, x, \hat{x}) = \beta^{\hat{k}}(t, x, \hat{x}), \quad \hat{k} = \arg \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^k(t, x).$$

Получаемое управление является замкнутым по множеству возможных состояний. Его можно представить в виде сложной функции $(t, \sigma) \rightarrow \hat{x}^c \rightarrow \hat{\mathbf{w}}(t, \hat{x}^c)$.

1.3.3. Нахождение субоптимального управления

Опишем построение субоптимального пучка траекторий, исходящего из множества σ_0 . Согласно (1.35), определяем субоптимальную оценку \hat{x} возможных начальных состояний, оптимальное количество $\hat{k} = \mathbf{k}(t_0, \hat{x}^c)$ переключений, а также позицию (t_1, \hat{x}_{1-}) первого переключения: $t_1 = \boldsymbol{\tau}^{\hat{k}}(t_0, \hat{x}^c)$, $\hat{x}_{1-} = \mathbf{x}^{\hat{k}}(t_0, \hat{x}^c)$ опорной траектории, исходящей из позиции (t_0, \hat{x}^c) .

Если $t_1 = t_0$, то траектории пучка имеют скачок $x_0 \rightarrow x_1 = g(t_1, x_0, \hat{v}_1)$, $x_0 \in \sigma_0$, под действием управления $\hat{v}_1 = \mathbf{v}^{\hat{k}}(t_1, \hat{x}^c)$.

Если $t_1 > t_0$, то сначала на промежутке $[t_0, t_1]$ происходит непрерывное движение. Каждая траектория пучка получается как решение задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \hat{u}(t))$, $x(t_0) = x_0 \in \sigma_0$ с программным управлением $\hat{u}(t) = \mathbf{u}(t, \hat{x}(t) | t_1, \hat{x}_{1-})$, оптимальным для опорной

траектории. В конце этого промежутка траектории пучка имеют скачок $x_0 \rightarrow x_1 = g(t_1, x_0, \hat{v}_1)$, $x_0 \in \sigma_0$, под действием управления $\hat{v}_1 = \nu^{\hat{k}}(t_1, \hat{x}_{1-})$.

И в том и в другом случае получаем множество σ_1 возможных состояний системы в момент времени t_1 . В позиции (t_1, σ_1) выполняются те же действия, за исключением поиска оптимального количества переключений, так как оно равно $\hat{k} - 1$.

Если в начальной позиции (t_0, \hat{x}^c) оптимальное количество переключений равно нулю: $\mathbf{k}(t_0, \hat{x}^c) = 0$, то переключений нет, и непрерывное движение пучка траекторий системы совершается, согласно уравнению (1.2), под действием программного управления $\hat{u}(t) = \mathbf{u}^0(t, \hat{x}(t))$.

Таким образом, находится субоптимальный пучок траекторий и субоптимальное программное управление. Наименьшее среднее значение функционала качества вычисляем по функции стоимости полуоптимального процесса

$$\min I = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) \beta^{\hat{k}}(t_0, x_0, \hat{x}^c) dx_0.$$

1.4. УСЛОВНОЕ СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ

Под условным оптимальным управлением одной траекторией понимается оптимальное программное управление при заданном количестве переключений. Субоптимальное управление пучком траекторий при заданном количестве переключений будем называть *условным субоптимальным управлением*.

1.4.1. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления

Как показано в [33] оценку (1.35) можно улучшить, если использовать не оптимальное управление опорной траекторией, а условно оптимальное, т.е. оптимальное управление с фиксированным числом переключений. Поэтому алгоритм синтеза условного субоптимального управления повторяет все пункты алгоритма синтеза субоптимального управления (см. разд. 1.3.2), но отличается выбором оценки (см. п. 3)).

3). Находим условную субоптимальную оценку текущего состояния системы

$$\hat{x}^* \in \text{Arg} \min_{\hat{x} \in X} \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \int_{\sigma} \rho(t, x) \beta^k(t, x, \hat{x}) dx, \quad (1.36)$$

где $\rho(t, x) = 1/\text{mes } \sigma$. Оптимальное количество переключений вычислить по формуле

$$k^* = \arg \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \min_{\hat{x} \in X} \int_{\sigma} \rho(t, x) \beta^k(t, x, \hat{x}) dx. \quad (1.37)$$

Получаемое управление является замкнутым по множеству возможных состояний. Его можно представить в виде сложной функции $(t, \sigma) \rightarrow \hat{x}^* \rightarrow \widehat{\mathbf{w}}(t, \hat{x}^*)$.

1.4.2. Нахождение условного субоптимального управления

Опишем построение условного субоптимального пучка траекторий, исходящего из множества σ_0 . Согласно (1.36), определяем субоптимальную оценку \hat{x}^* возможных начальных состояний, оптимальное количество k^* переключений по формуле (1.37), а также позицию (t_1, \hat{x}_{1-}) первого переключения: $t_1 = \tau^{k^*}(t_0, \hat{x}^*)$, $\hat{x}_{1-} = \mathbf{x}^{k^*}(t_0, \hat{x}^*)$ опорной траектории, исходящей из позиции (t_0, \hat{x}^*) .

Если $t_1 = t_0$, то траектории пучка имеют скачок $x_0 \rightarrow x_1 = g(t_1, x_0, \hat{v}_1)$, $x_0 \in \sigma_0$, под действием управления $\hat{v}_1 = \mathbf{v}^{k^*}(t_1, \hat{x}^*)$.

Если $t_1 > t_0$, то сначала на промежутке $[t_0, t_1]$ происходит непрерывное движение. Каждая траектория пучка получается как решение задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \hat{u}(t))$, $x(t_0) = x_0 \in \sigma_0$ с программным управлением $\hat{u}(t) = \mathbf{u}(t, \hat{x}(t) | t_1, \hat{x}_{1-})$, оптимальным для опорной траектории. В конце этого промежутка траектории пучка имеют скачок $x_0 \rightarrow x_1 = g(t_1, x_0, \hat{v}_1)$, $x_0 \in \sigma_0$, под действием управления $\hat{v}_1 = \mathbf{v}^{k^*}(t_1, \hat{x}_{1-})$.

И в том и в другом случае получаем множество σ_1 возможных состояний системы в момент времени t_1 . В позиции (t_1, σ_1) выполняются те же действия, за исключением поиска оптимального количества переключений, так как оно равно $k^* - 1$.

Если в начальной позиции (t_0, \hat{x}^*) оптимальное количество переключений равно нулю: $k^* = 0$, то переключений нет, и непрерывное движение пучка траекторий системы совершается, согласно уравнению (1.2), под действием программного управления $\hat{u}(t) = \mathbf{u}^0(t, \hat{x}(t))$.

Таким образом, находится субоптимальный пучок траекторий и субоптимальное программное управление. Наименьшее среднее значение функционала качества вычисляем по функции стоимости полуоптимального процесса

$$\min I = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) \beta^{k^*}(t_0, x_0, \hat{x}^*) dx_0.$$

1.5. УСЛОВНОЕ СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДИСКРЕТНЫХ НЕТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При наличии дискретных неточных измерений множество возможных состояний системы уточняется. После каждого измерения нужно находить новую условную субоптимальную оценку состояния системы, которую затем использовать для синтеза управления пучком.

1.5.1. Условное субоптимальное управление при наличии дискретных неточных измерений

Предполагается, что в результате m дискретных неточных измерений в моменты времени t^1, \dots, t^m получено множество σ_0^m возможных состояний (см. (1.14)) в момент t^m . Тогда оптимальное в среднем управление нужно формировать на промежутке $[t^m, t_F]$. Для этого надо использовать оценку состояния в момент t^m аналогичную (1.36)

$$\hat{x}^m \in \text{Arg} \min_{\hat{x} \in X} \min_{k \in \mathbf{Z}_+} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta^k(t^m, x, \hat{x}) dx, \quad (1.38)$$

где $\rho(t^m, x) = 1/(\text{mes} \sigma_0^m)$. Оптимальное количество переключений находится по формуле

$$k^m = \arg \min_{k \in \mathbf{Z}_+} \min_{\hat{x} \in X} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta^k(t^m, x, \hat{x}) dx. \quad (1.39)$$

Теорема 1.1 (достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий ПС при наличии дискретных неточных измерений). Если существует последовательность функций $\beta^k: [t^m, t_F] \times X \times X \rightarrow \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}_+$, удовлетворяющая на всей области определения уравнениям (1.31)–(1.34), то программное управление $(\hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$, оптимальное для траектории, исходящей в момент времени t^m из начального состояния (1.38) и имеющей k^m переключений (1.39), будет условным субоптимальным в среднем управлением пучком траекторий при наличии m дискретных неточных измерений в моменты времени t^1, \dots, t^m .

Действительно, после нахождения множества σ_0^m задача управления пучком после m измерений совпадает с задачей управления без измерений, но на меньшем промежутке времени $[t^m, t_F]$ функционирования системы управления после m измерений. Функции β^k , удовлетворяющие уравнениям (1.31)–(1.34) на $[t^m, t_F]$, являются образующими функции β стоимости полуоптимального процесса.

В самом деле, пусть после m измерений оптимальный процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$, удовлетворяющий начальному условию $\hat{x}(t^m) = \hat{x}^m$, имеет N переключений в моменты времени t_1, \dots, t_N , образующие неубывающую последовательность $\{t_1, \dots, t_N\}$: $t^m \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq$

$t_{N+1} \doteq t_F$. Траектория $x(\cdot)$ полуоптимального процесса $(x(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$ получается при оптимальном управлении $\hat{w} = (\hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$ и удовлетворяет начальному условию $x(t^m) = x^m$.

Вычислим значение функции $\beta^N(t^m, x^m, \hat{x}^m)$ на полуоптимальном процессе $(x(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$. До первого переключения производная этой функции по времени в силу системы (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \beta^N(t, x(t), \hat{x}(t)) &= \beta_t^N(t, x(t), \hat{x}(t)) + \beta_x^N(t, x(t), \hat{x}(t)) \cdot f(t, x(t), \hat{u}(t)) + \\ &+ \beta_{\hat{x}}^N(t, x(t), \hat{x}(t)) \cdot f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \end{aligned}$$

где $\hat{u}(t) = \mathbf{u}^N(t, \hat{x}(t))$ – оптимальное программное управление непрерывным движением на промежутке $[t^m, t_1]$. Согласно уравнению (1.33) получаем

$$\frac{d}{dt} \beta^N(t, x(t), \hat{x}(t)) + f^0(t, x(t), \hat{u}(t)) = 0.$$

Интегрируя на промежутке $[t^m, t_1]$, приходим к равенству

$$\beta^N(t^m, x^m, \hat{x}^m) = \beta^N(t_1, x_1, \hat{x}_{1-}) + \int_{t^m}^{t_1} f^0(t, x(t), \hat{x}(t)) dt.$$

Вычислим скачок функции β^N в момент первого переключения. Согласно уравнению (1.34),

$$\beta^N(t_1, x_{1-}, \hat{x}_{1-}) = \beta^{N-1}(t_1, g(t_1, x_{1-}, \hat{v}_1), g(t_1, \hat{x}_{1-}, \hat{v}_1)) + g^+(t_1, x_{1-}, \hat{v}_1),$$

где $\hat{v}_1 = \mathbf{v}^N(t_1, \hat{x}_{1-})$ – оптимальное управление первым переключением. Учитывая уравнение (1.3), получаем

$$\beta^N(t_1, x_{1-}, \hat{x}_{1-}) = \beta^{N-1}(t_1, x_{1-}, \hat{x}_{1-}) + g^+(t_1, x_{1-}, \hat{v}_1).$$

Таким образом, на $[t^m, t_1]$ функция β^N удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\beta^N(t^m, x^m, \hat{x}^m) = \int_{t^m}^{t_1} f^0(t, x(t), \hat{x}(t)) dt + g^+(t_1, x_{1-}, \hat{v}_1) + \beta^{N-1}(t_1, x_{1-}, \hat{x}_{1-}).$$

Отсюда последовательно получаем

$$\begin{aligned} \beta^N(t^m, x^m, \hat{x}^m) &= \int_{t^m}^{t_1} f^0(t, x(t), \hat{x}(t)) dt + g^+(t_1, x_{1-}, \hat{v}_1) + \beta^{N-1}(t_1, x_{1-}, \hat{x}_{1-}) = \dots = \\ &= \int_{t^m}^{t_N} f^0(t, x(t), \hat{x}(t)) dt + \sum_{i=1}^N g^+(t_i, x_{i-}, \hat{v}_i) + \beta^0(t_N, x_{N-}, \hat{x}_{N-}), \end{aligned}$$

где $\hat{v}_i = \mathbf{v}^{N-i+1}(t_i, \hat{x}_{i-})$ – оптимальное управление i -м переключением.

Для функции β^0 согласно уравнению (1.31) на $[t_N, t_F]$ выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} \beta^0(t, x(t), \hat{x}(t)) + f^0(t, x(t), \hat{u}(t)) = 0.$$

Интегрируя и учитывая терминальное условие (1.32), находим

$$\beta^0(t_N, x_N, \hat{x}_N) = \int_{t_N}^{t_F} f^0(t, x(t), \hat{x}(t)) dt + F(x(t_F)).$$

Тогда для функции β^N получаем

$$\beta^N(t^m, x^m, \hat{x}^m) = \int_{t^m}^{t_F} f^0(t, x(t), \hat{x}(t)) dt + \sum_{i=1}^N g^+(t_i, x_{i-}, \hat{v}_i) + F(x(t_F)) = I(t^m, x^m, \hat{w}).$$

Таким образом, функция β^N равна значению функционала $I(t^m, x^m, \hat{w})$, вычисленному на полуоптимальном процессе с N переключениями. Следовательно, β^N – это образующая функции стоимости.

Используем функцию стоимости для поиска субоптимального управления при решении задачи управления пучком без измерений так же как в разд. 1.4. Минимизацию функционала

$$I^c(t^m, \sigma_0^m, w) = \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) I(t^m, x, w) dx$$

по управлению w на множестве $\widehat{\mathcal{W}}(t^m)$ оптимальных программных управлений для разных траекторий можно заменить выбором лучшей (опорной) траектории. Иначе говоря, выполнить минимизацию

$$\min_{\hat{x} \in X} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta^{k(t^m, \hat{x})}(t^m, x, \hat{x}) dx.$$

Полученную в результате минимизации субоптимальную оценку \hat{x} , как и в случае управления без измерений лучше заменить условной субоптимальной оценкой (1.38), так как

$$\min_{\hat{x} \in X} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta^{k(t^m, \hat{x})}(t^m, x, \hat{x}) dx \geq \min_{\hat{x} \in X} \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta^k(t^m, x, \hat{x}) dx.$$

Теорема доказана.

1.5.2. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений

Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений повторяет все пункты алгоритма синтеза условного субоптимального управления (см. разд. 1.4.1), но отличается выбором оценки, которая находится с учетом m дискретных неточных измерений в моменты времени t^1, \dots, t^m .

- 3). Найти условную субоптимальную оценку состояния системы после m измерений по формуле (1.38), а оптимальное количество переключений – по формуле (1.39).

Получаемое управление является замкнутым по множеству возможных состояний. Его можно представить в виде сложной функции $(t, \sigma) \rightarrow \hat{x}^m \rightarrow \hat{w}(t, \hat{x}^m)$.

1.5.3. Нахождение условного субоптимального программного управления при наличии дискретных неточных измерений

Опишем построение условного субоптимального пучка траекторий, исходящего из множества σ_0^m после m дискретных неточных измерений в моменты времени t^1, \dots, t^m . Согласно (1.38), определяем субоптимальную оценку \hat{x}^m возможных начальных состояний, оптимальное количество k^m переключений по формуле (1.39), а также позицию (t_1, \hat{x}_{1-}) первого переключения: $t_1 = \tau^{k^m}(t_0, \hat{x}^m)$, $\hat{x}_{1-} = \chi^{k^m}(t_0, \hat{x}^m)$ опорной траектории, исходящей из позиции (t_0, \hat{x}^m) .

Если $t_1 = t^m$, то траектории пучка имеют скачок $x_0 \rightarrow x_1 = g(t_1, x_0, \hat{v}_1)$, $x_0 \in \sigma_0^m$, под действием управления $\hat{v}_1 = \nu^{k^m}(t_1, \hat{x}^m)$.

Если $t_1 > t^m$, то сначала на промежутке $[t^m, t_1]$ происходит непрерывное движение. Каждая траектория пучка получается как решение задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \hat{u}(t))$, $x(t^m) = x_0 \in \sigma_0^m$ с программным управлением $\hat{u}(t) = \mathbf{u}(t, \hat{x}(t)|t_1, \hat{x}_{1-})$, оптимальным для опорной траектории. В конце этого промежутка траектории пучка имеют скачок $x_0 \rightarrow x_1 = g(t_1, x_0, \hat{v}_1)$, $x_0 \in \sigma_0^m$, под действием управления $\hat{v}_1 = \nu^{k^m}(t_1, \hat{x}_{1-})$.

И в том и в другом случае получаем множество $\sigma^m(t_1)$ возможных состояний системы в момент времени t_1 . В позиции $(t_1, \sigma^m(t_1))$ выполняются те же действия, за исключением поиска оптимального количества переключений, так как оно равно $k^m - 1$.

Если в начальной позиции (t_0, \hat{x}^m) оптимальное количество переключений равно нулю: $k^m(t_0, \hat{x}^m) = 0$, то переключений нет и непрерывное движение пучка траекторий системы совершается, согласно уравнению (1.2), под действием программного управления $\hat{u}(t) = \mathbf{u}^0(t, \hat{x}(t))$.

Процедура построения условного субоптимального управления продолжается либо до следующего дискретного измерения, либо до конечного момента времени.

Таким образом, находится условный субоптимальный пучок траекторий и условное субоптимальное программное управление. Наименьшее среднее значение функционала качества вычисляем по функции стоимости полуоптимального процесса

$$\min I = \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta^{k^m}(t^m, x, \hat{x}^m) dx.$$

1.6. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим два академических примера оптимального управления пучками траекторий линейных ПС с квадратичным критерием качества. Первая линейно-квадратичная задача с обменом каналов управления служит контрпримером, в котором принцип разделения не выполняется. Оптимальное в среднем управление не совпадает с субоптимальным, и оба этих управления отличаются от оптимального управления для геометрического центра тяжести пучка траекторий. Во второй задаче принцип разделения выполняется и применяется для получения оптимального в среднем управления при наличии дискретных неточных измерений.

1.6.1. Система с переключением канала управления

Пусть на заданном промежутке времени $T = [0,3]$ динамическая система совершает N переключений (скачков) в моменты времени t_i , $i = 1, \dots, N$, которые образуют неубывающую последовательность:

$$0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \doteq 3.$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (1.40)$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентными уравнениями

$$x_{1i} = x_{2i-}, \quad x_{2i} = x_{1i-}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.41)$$

Здесь $\mathcal{N} = \{i = 0, 1, \dots, N | t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1})$ непрерывного движения системы; $x(t)$ – состояние системы в момент времени $t \in T$, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2$; $u(t)$ – значение управления непрерывным движением системы в момент времени $t \in T$, $u \in \mathbf{R}$. Дискретное управление (переключениями) отсутствует.

Качество процесса управления оценивается квадратичным функционалом

$$I(x_0, w) = \int_0^3 \frac{1}{2} [u^2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt + \lambda N, \quad (1.42)$$

где x_0 – начальное состояние системы, $w = (u(\cdot), \mathcal{J})$ – «управляющий комплекс», включающий управление $u(\cdot)$ непрерывным движением и моменты переключений $\mathcal{J} = \{t_1, \dots, t_N\}$. Коэффициент $\lambda = 100$ определяет затраты на каждое переключение. Количество N и моменты переключений t_1, \dots, t_N заранее не заданы и подлежат оптимизации.

Начальное состояние точно не известно, а известно множество (прямоугольник) $\sigma_0 = [7.8, 8.2] \times [2, 4]$ возможных начальных состояний. Качество управления пучком траекторий, исходящих из множества σ_0 , оценивается средним значением функционала (1.42):

$$I^c(\sigma_0, u(\cdot)) = \frac{1}{\text{mes } \sigma_0} \int_{\sigma_0} I(x_0, u(\cdot)) dx_0. \quad (1.43)$$

Требуется найти:

- 1) оптимальное программное управление $\bar{w} = (\bar{u}(\cdot), \bar{\mathcal{T}})$ для начального состояния $\bar{x}_0 = (8, 3)^T$ – центра прямоугольника σ_0 ;
- 2) среднее значение \bar{I}^c при управлении $\bar{w} = (\bar{u}(\cdot), \bar{\mathcal{T}})$, оптимальном для траектории, исходящей из центра \bar{x}_0 ;
- 3) субоптимальное в среднем состояние \hat{x}_0^c системы и среднее значение \hat{I}^c при управлении $\hat{w} = (\hat{u}(\cdot), \hat{\mathcal{T}})$, оптимальном для траектории, исходящей из \hat{x}_0^c ;
- 4) наименьшее среднее значение I^c и оптимальное в среднем управление $w^c = (u^c(\cdot), \mathcal{T}^c)$.

Рассматривается линейно-квадратичная задача. По сравнению с общей постановкой (1.1)–(1.3), (1.6), (1.10) имеем: $t_0 = 0$, $t_F = 3$, $X = \mathbf{R}^2$, $U = \mathbf{R}$, $f(t, x, u) = (u \ x_2)^T$, $g(t, x, v) = (x_2 \ x_1)^T$, $f^0(t, x, u) = (u^2 + x_1^2 + x_2^2)/2$, $g^+(t, x, v) = \lambda$, $F(x) = 0$. Дискретное управление отсутствует.

В системе (1.40), (1.41) один канал управления: первая координата управляема, а вторая – нет (она экспоненциально отклоняется от нуля). В момент переключения фактически происходит взаимная замена координат состояния – неуправляемая координата становится управляемой и наоборот. Таким образом, совершая переключения (т.е. меняя канал управления), можно попеременно управлять координатами системы. Положительные затраты λ на каждое переключение исключают из числа оптимальных процессов режимы с мгновенными многократными переключениями.

Найдем образующие функции цены. Сначала рассмотрим процессы без переключений (при $N = 0$). Составляем уравнение (1.19) для нулевой образующей функции цены:

$$\min_{u \in \mathbf{R}} [\varphi_t^0(t, x) + \varphi_{x_1}^0(t, x)u + \varphi_{x_2}^0(t, x)x_2 + \frac{1}{2}(u^2 + x_1^2 + x_2^2)] = 0.$$

Решая его с нулевым терминальным условием $\varphi^0(3, x) = 0$, получаем образующую

$$\varphi^0(t, x) = \frac{1}{2}x_1^2 \text{th}(3-t) + \frac{1}{4}x_2^2(e^{2(3-t)} - 1)$$

и нулевое оптимальное позиционное управление $u^0(t, x) = -x_1 \text{th}(3-t)$.

Для определения остальных образующих рассмотрим вспомогательную задачу Лагранжа с фиксированными концами траектории:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t), \quad u(t) \in \mathbf{R}, \quad t \in [\theta, \tau], \\ x(\theta) &= x_\theta, \quad x(\tau) = x_\tau, \\ I(x_0, x_1, u(\cdot)) &= \int_{\theta}^{\tau} \frac{1}{2} [u^2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Решением этой задачи служит двухпозиционная функция цены:

$$\phi(\theta, x_\theta | \tau, x_\tau) = \frac{(x_{1\theta}^2 + x_{1\tau}^2) \operatorname{ch}(\tau - \theta) - 2x_{1\theta}x_{1\tau}}{2 \operatorname{sh}(\tau - \theta)} + \frac{1}{2} x_{2\theta}x_{2\tau} \operatorname{sh}(\tau - \theta).$$

Она как функция первых двух аргументов $(t, x) \rightarrow \phi(t, x | \tau, x_\tau)$ удовлетворяет уравнению ГЯБ:

$$\min_{u \in \mathbf{R}} [\phi_t + \phi_{x_1} u + \phi_{x_2} x_2 + \frac{1}{2} (u^2 + x_1^2 + x_2^2)] = 0 \quad (1.44)$$

с нулевым терминальным условием $\phi(\tau, x_\tau | \tau, x_\tau) = 0$. При решении уравнения (1.44) находим позиционное оптимальное управление

$$u(\theta, x_\theta | \tau, x_\tau) = \frac{(x_{1\tau} + x_{1\theta}) \operatorname{ch}(\tau - \theta)}{\operatorname{sh}(\tau - \theta)}. \quad (1.45)$$

При помощи двухпозиционной функции цены составляем рекуррентное уравнение для образующих

$$\varphi^k(t, x) = \min_{t \leq \tau \leq 3} \min_{y \in \mathbf{R}^2} [\phi(t, x | \tau, y) + \varphi^{k-1}(\tau, y) + \varphi^{k-1}(\tau, y') + \lambda], \quad k \in \mathcal{N},$$

где $y' = (y_2, y_1)$ – точка фазовой плоскости, симметричная точке y относительно прямой $y_1 = y_2$.

1) Находим оптимальное управление $\bar{w} = (\bar{u}(\cdot), \bar{\mathcal{T}})$ для траектории, исходящей из центра тяжести $\bar{x}_0 = (8, 3)^T$ прямоугольника σ_0 . Вычисляем значения образующих в этой точке (все значения приближенные):

$$\varphi^0(0, \bar{x}_0) = 937.306554, \quad \varphi^1(0, \bar{x}_0) = 176.61338, \quad \varphi^2(0, \bar{x}_0) = 276.33175.$$

Как видим, при большом штрафе $\lambda = 100$ лучшим оказывается оптимальный процесс с одним переключением $\bar{x}_{1-} = (0.207, 6.0594) \rightarrow \bar{x}_1 = (6.0594, 0.207)$ в момент $\bar{t}_1 = 0.703$. Оптимальное программное управление вычисляется по двухпозиционному управлению (1.45):

$$\begin{aligned}\bar{u}(t) &= u(t, x(t) | \bar{t}_1, \bar{x}_1) = \frac{-\bar{x}_{10} \operatorname{ch}(\bar{t}_1 - t) + \bar{x}_{11} \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} \bar{t}_1}, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}_1; \\ \bar{u}(t) &= u^0(t, x(t)) = \bar{x}_{11} \frac{\operatorname{sh}(t - 3)}{\operatorname{ch}(3 - \bar{t}_1)}, \quad \bar{t}_1 \leq t \leq 3.\end{aligned} \quad (1.46)$$

Без учета затрат на переключение (т.е. при $\lambda = 0$) оптимальный процесс с двумя переключениями $(0.785, 5.7409) \rightarrow (5.7409, 0.785)$ в момент $t_1 = 0.649$ и $(0.649, 18.2035) \rightarrow (18.2035, 0.649)$ в момент $t_1 = 1.803$ был бы немного лучше $I^2 = 76.33175 < 76.61338 =$

I^1 . Но при большом штрафе ($\lambda = 100$) одно переключение выгоднее. Таким образом, оптимальный «управляющий комплекс» $\bar{w} = (\bar{u}(\cdot), \bar{\mathcal{T}})$ для начального состояния \bar{x}_0 включает оптимальное управление (1.46) непрерывным движением и один момент переключения $\bar{\mathcal{T}} = \{\bar{t}_1\}$. На рис. 1.4 показаны фазовые траектории, оптимальные при одном переключении (штриховая линия) и при двух (сплошная линия). Скачки траекторий обозначены стрелками.

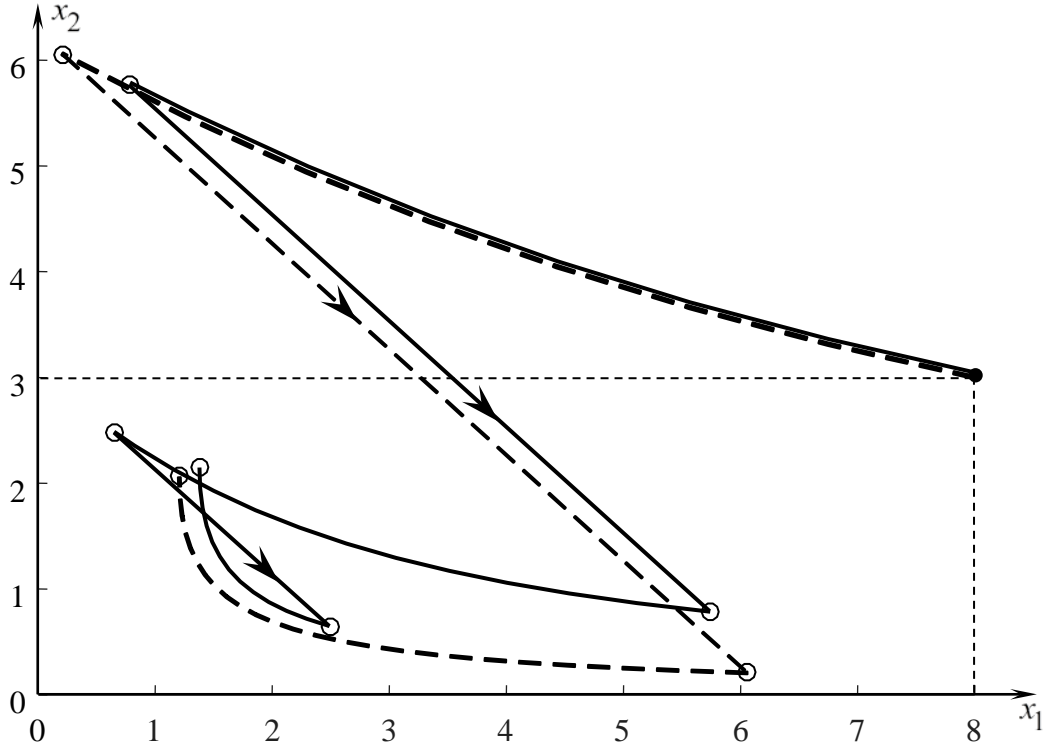


Рис. 1.4.

2) Множество σ_0 возможных начальных состояний представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. В процессе непрерывного движения ориентация сторон прямоугольника сохраняется, а при переключении – взаимно меняется. Таким образом, в процессе движения множество возможных состояний остается прямоугольником того же вида. Для его описания достаточно использовать координаты вершин.

Вычисляем среднее значение (1.43) при управлении $\bar{w} = (\bar{u}(\cdot), \bar{\mathcal{T}})$, оптимальном для траектории, исходящей из центра тяжести \bar{x}_0 . Условная функция стоимости полуоптимальных процессов для управления с одним переключением в позиции (t_1, \hat{x}_1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta^1(t_0, x_0, \hat{x}_0 | t_1, \hat{x}_1) = & \frac{1}{2\text{sh}\tau} [\hat{x}_{10}^2(2 + \tau\text{sh}\tau - \text{ch}\tau) - 2\hat{x}_{10}\hat{x}_{11} + \hat{x}_{11}^2\text{ch}\tau] + \frac{\tau}{2}x_{10}^2 + \\ & + \frac{1}{4}x_{20}^2(e^{2\tau} - 1) + \frac{x_{10}}{\text{sh}\tau} [\hat{x}_{10}(\text{ch}\tau - 1 - \tau\text{sh}\tau) + \hat{x}_{11}(\text{ch}\tau - 1)] + \frac{1}{2}(3 - t_1)x_{20}^2e^{2\tau} + \\ & + \frac{1}{4}(x_{10} + \hat{x}_{11} - \hat{x}_{10})^2(e^{2(3-t_1)} - 1) + \frac{1}{2}(3 - t_1 - \text{th}(3 - t_1))\hat{x}_{20}^2e^{2\tau}(\hat{x}_{20}^2 - 2x_{20}) + \lambda, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $\tau = t_1 - t_0$, $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$, $\hat{x}_0 = (\hat{x}_{10}, \hat{x}_{20})^T$, $\hat{x}_1 = (\hat{x}_{11}, \hat{x}_{21})^T$. Подставляем $t_0 = 0$, $\hat{x} = \bar{x}_0 = (8, 3)^T$, $t_1 = \bar{t}_1 = 0.703$, $\hat{x}_1 = \bar{x}_{1-} = (0.207, 6.0594)^T$ и вычисляем среднее значение $\bar{I}^c = I^c(\sigma_0, \bar{u}(\cdot)) = 178.762803$.

3) Находим субоптимальное управление. Для этого записываем среднее значение функции (1.47):

$$I^c(\sigma_0, \hat{w}) = \frac{1}{\text{mes } \sigma_0} \int_{\sigma_0} \beta^1(t_0, x_0, \hat{x}_0 | t_1, \hat{x}_1) dx_0 \quad (1.48)$$

для управления $\hat{w} = (\hat{u}(\cdot), \hat{t}_1)$, оптимального для траектории, исходящей из некоторого состояния \hat{x}_0 . Позиция после переключения (\hat{t}_1, \hat{x}_1) и управление $\hat{u}(\cdot)$ непрерывным движением полностью определяются состоянием \hat{x}_0 (см. п.1)). Поэтому среднее значение (1.47) также определяется только этим состоянием, т.е. $I^c(\sigma_0, \hat{u}(\cdot)) = I^c(\hat{x}_0)$. Минимизируя $I^c(\hat{x}_0)$ по \hat{x}_0 , находим субоптимальную оценку $\hat{x}_0^c = (8, 3.03)^T$ возможных начальных состояний и наименьшее среднее значение $\hat{I}^c = 178.75771$. Субоптимальное управление имеет переключение в момент $\hat{t}_1 = 0.699$ из состояния $\hat{x}_{1-} = (0.207, 6.0956)^T$ в состояние $\hat{x}_1 = (6.0956, 0.0207)^T$. Как видим, субоптимальное управление лучше, чем управление центром тяжести множества возможных состояний системы. Это важная особенность рассматриваемого примера. Для широкого круга линейно-квадратичных задач оптимального в среднем управления пучками траекторий детерминированных (да и стохастических) систем наилучшей оценкой начального состояния служит его среднее значение (соответственно математическое ожидание). Другими словами, субоптимальное управление пучком совпадает с оптимальным управлением для центра тяжести пучка. Это выполняется для непрерывных, дискретных, непрерывно-дискретных систем, в которых моменты переключений дискретной части фиксированы. В рассматриваемом примере это правило нарушается.

4) Находим теперь оптимальное в среднем управление $w^c = (u^c(\cdot), \mathcal{J}^c)$. Для этого будем минимизировать среднее значение (1.48) по управлению $u^c(\cdot)$ с одним переключением. При фиксированной позиции (t_1, x_1) переключения наилучшей оценкой начального состояния служит центр тяжести, поэтому $x_0^c = \bar{x}_0$. Оптимальное управление вида (1.45) определяется заданной начальной позицией (t_0, \bar{x}_0) и некоторой позицией (t_1^c, x_1^c) переключения. Поэтому функционал (1.48) оказывается функцией, зависящей только от позиции переключения, т.е. $I^c(\sigma_0, w^c) = I^c(t_1^c, x_1^c)$. Минимизируя по этим аргументам, получаем наименьшее среднее значение $I^c = 178.752432$. Оптимальное в среднем управление имеет переключение в момент $t_1^c = 0.695$ в позиции $\hat{x}_1^c = (0.207, 6.0111)^T$. Как видим, оптимальное в среднем управление не является субоптимальным. Значит, принцип разделения в этом примере не выполняется. На рис. 1.5 изображены начальное σ_0 и конечное σ_1 множества возможных

состояний системы сплошной и пунктирными линиями соответственно, а также траектория, исходящая из центра \bar{x}_0 при оптимальном в среднем управлении (непрерывные участки представлены сплошными линиями, а скачок – штриховой).

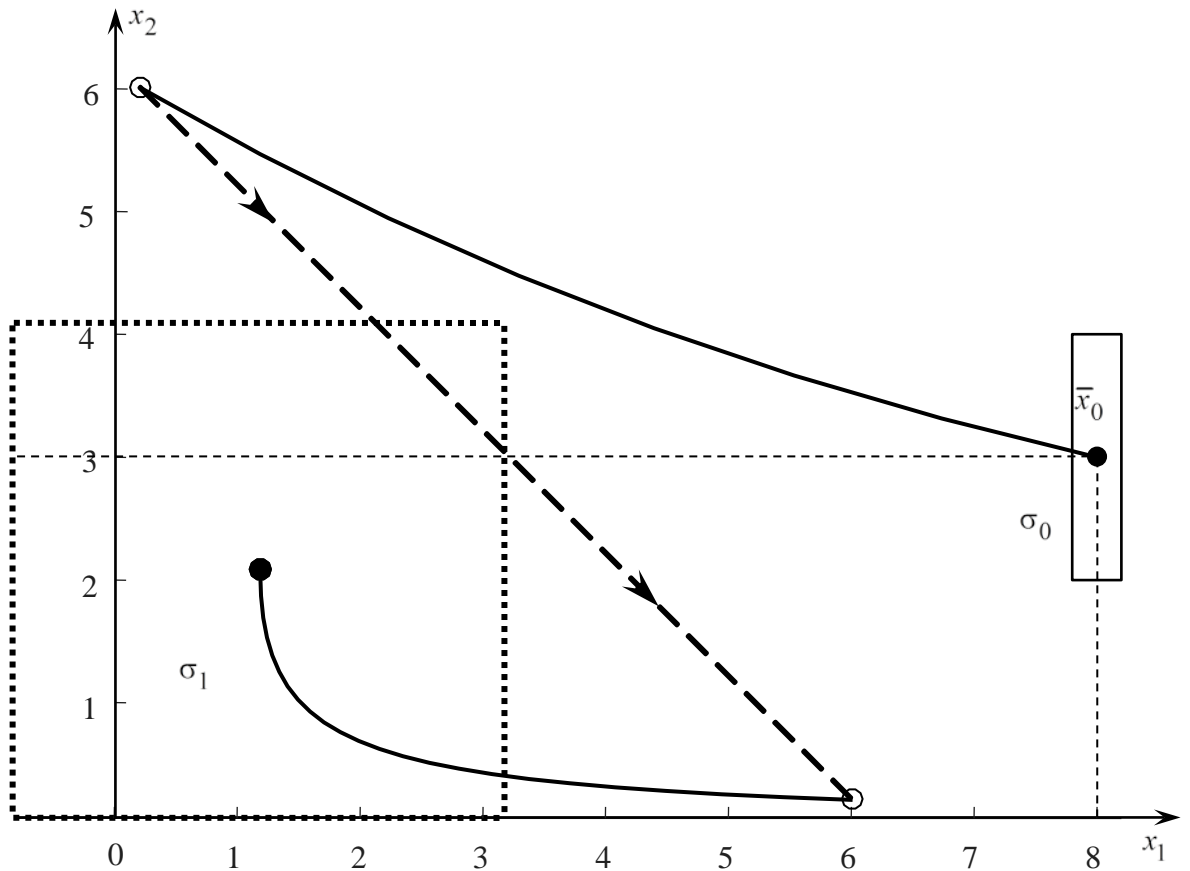


Рис. 1.5.

1.6.2. Система управления при наличии дискретных неточных измерений

Пусть на заданном промежутке времени $T = [0, 2]$ динамическая система совершает N переключений (скачков) в моменты времени $t_i, i = 1, \dots, N$, которые образуют неубывающую последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$:

$$0 \doteq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \doteq 2.$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N},$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентными уравнениями:

$$x_{1i} = x_{1i-}, \quad x_{2i} = x_{2i-} + v_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь $\mathcal{N} = \{i = 0, 1, \dots, N | t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1})$ непрерывного движения системы; $x(t)$ – состояние системы

в момент времени $t \in T$, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2$; $u(t)$ – значение управления непрерывным движением системы в момент времени $t \in T$, $u(t) \in \mathbf{R}$; x_{i-} – состояние системы перед переключением в момент t_i (см. (1.4)), $x_i \doteq x(t_i)$ – состояние после i -го переключения, v_i – дискретное управление в момент переключения t_i , $v_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, N$.

Качество процесса управления оценивается квадратичным функционалом

$$I(t_0, x_0, w) = \int_0^2 \frac{\mu}{2} u^2(t) dt + \sum_{i=1}^N \left[\lambda + \frac{\eta}{2} v_i^2 \right] + \frac{1}{2} x_1^2(2) + \frac{1}{2} x_2^2(2), \quad (1.49)$$

где x_0 – начальное состояние системы, $w = (u(\cdot), \{v\}, \mathcal{T})$ – «управляющий комплекс» – программное управление $u(\cdot)$ непрерывным движением и последовательность $\{v\} = \{v_1, \dots, v_N\}$ – дискретных управлений переключениями, а $\mu = 0.05$, $\eta = 0.1$, $\lambda = 0.02$ – коэффициенты, определяющие затраты на непрерывное управление и переключения. Количество переключений N и моменты переключений t_1, \dots, t_N заранее не заданы и подлежат оптимизации.

Начальное состояние точно не известно, а известно множество (квадрат) $\sigma_0 = [1,3] \times [0,2]$ возможных начальных состояний. Качество управления пучком траекторий, исходящих из множества σ_0 оценивается средним значением функционала (1.49):

$$I^c(t_0, \sigma_0, w) = \frac{1}{\text{mes } \sigma_0} \int_{\sigma_0} I(t_0, x_0, w) dx_0. \quad (1.50)$$

Предполагаем, что измерения скорости происходят в моменты времени $t^1 = 0.5$, $t^2 = 1.5$. В каждый момент t^j , $j = 1, 2$, известны среднее значение скорости \bar{x}_2^j и погрешность измерения $2\Delta^j$. Иначе говоря, в момент t^j определяется полоса $\sigma^j = \{x \in \mathbf{R}^2 | \bar{x}_2^j - \Delta^j \leq x_2 \leq \bar{x}_2^j + \Delta^j\}$ возможных («измеренных») состояний. Множество $\sigma_0^j \doteq \sigma^j(t^j)$ возможных состояний системы в момент времени t^j с учетом всех предыдущих измерений определяется пересечениями (1.14).

Требуется найти:

1) оптимальное программное управление $\bar{w} = (\bar{u}(\cdot), \{\bar{v}\})$ для траектории, исходящей из центра $\bar{x}_0 = (2, 1)^T$ квадрата σ_0 ;

2) наименьшее среднее значение \bar{I}^c при управлении \bar{w} , оптимальном для траектории, исходящей из центра \bar{x}_0 ;

3) наименьшее среднее значение \bar{I}_2^c функционала

$$\bar{I}_2^c = I_2^c(t^2, \sigma_0^2, \bar{w}^c) = \min_{w \in \bar{W}(t^2)} I^c(t^2, \sigma_0^2, w)$$

после двух неточных измерений скорости движения x_2 в моменты времени $t^1 = 0.5$, $t^2 = 1.5$.

Рассматривается линейно-квадратичная задача. По сравнению с общей постановкой (1.1)–(1.3), (1.6), (1.11) имеем: $t_0 = 0$, $t_F = 2$, $X = \mathbf{R}^2$, $U = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}$, $f(t, x, u) = (x_2, u)^T$, $g(t, x, v) = (x_1, x_2 + v)^T$, $f^0(t, x, u) = u^2/2$, $g^+(t, x, v) = \lambda + v^2/2$, $F(x) = x_1^2/2 + x_2^2/2$. Требуется привести систему в окрестность начала координат, чтобы уменьшить терминальные слагаемые функционала (1.49) с минимальными затратами на управление. При помощи переключения можно скачком улучшить состояние системы, после чего затраты на непрерывное управление, определяемые интегральным членом функционала, уменьшатся. Поэтому переключение нужно делать как можно раньше, а именно в начальный момент времени. В конечный момент времени скачки траектории могут привести к уменьшению терминальных членов функционала. Таким образом, у оптимального процесса переключения происходят только в начальный и/или конечный моменты времени. Этот вывод подтверждается расчетами.

1) Пусть процесс имеет j переключений в начальный момент времени и k – в конечный. Тогда моменты переключений образуют неубывающую последовательность:

$$0 = t_1 = \dots = t_j < t_{j+1} = \dots = t_{j+k} = 2.$$

Обозначим через $\varphi_{jk}(t, x)$ образующие функции цены, $j, k \in \mathbf{Z}_+$, полагая для уменьшения количества индексов $\varphi_k(t, x) \doteq \varphi_{0k}(t, x)$. Уравнения для образующих получаем из достаточных условий оптимальности. В конечный момент времени $t = 2$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(2, x) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \\ \varphi_k(2, x) &= \min_{v \in \mathbf{P}} \left\{ \varphi_{k-1}(2, x_1, x_2 + v) + \lambda + \frac{\eta}{2}v^2 \right\}, \quad k \in \mathbf{N}; \end{aligned} \quad (1.51)$$

на промежутке $t \in [0, 2]$:

$$\min_{u \in \mathbf{R}} \left\{ \frac{\partial \varphi_k(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_k(t, x)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \varphi_k(t, x)}{\partial x_2} u + \frac{\mu}{2}u^2 \right\} = 0; \quad (1.52)$$

в начальный момент времени $t = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_{0k}(0, x) &= \varphi_k(0, x), \quad k \in \mathbf{Z}_+, \\ \varphi_{jk}(0, x) &= \min_{v \in \mathbf{R}} \left\{ \varphi_{j-1k}(2, x_1, x_2 + v) + \lambda + \frac{\eta}{2}v^2 \right\}, \quad j \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Будем искать образующие в виде квадратичных функций:

$$\varphi_{jk}(t, x) = \frac{1}{2}\Phi_{jk}(t)x_1^2 + \Psi_{jk}(t)x_1x_2 + \frac{1}{2}\Gamma_{jk}(t)x_2^2 + (j+k)\lambda, \quad (1.54)$$

$$\varphi_k(t, x) = \frac{1}{2}\Phi_k(t)x_1^2 + \Psi_k(t)x_1x_2 + \frac{1}{2}\Gamma_k(t)x_2^2 + k\lambda. \quad (1.55)$$

Подставляя функции (1.54), (1.55) в уравнения (1.51)–(1.53), получаем соотношения для нахождения коэффициентов квадратичных функций. В конечный момент времени $t = 2$:

$$\Phi_k(2) = \Phi_{k-1} - \frac{\Psi_{k-1}^2}{\eta + \Gamma_{k-1}}, \quad \Psi_k(2) = \frac{\eta\Psi_{k-1}}{\eta + \Gamma_{k-1}}, \quad \Gamma_k(2) = \frac{\eta\Gamma_{k-1}}{\eta + \Gamma_{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.56)$$

$$\Phi_0(2) = 1, \quad \Psi_0(2) = 0, \quad \Gamma_0(2) = 1;$$

на промежутке $t \in [0, 2]$:

$$\dot{\Phi}_k - \frac{1}{\mu}\Psi_k^2 = 0, \quad \dot{\Psi}_k + \Phi_k - \frac{1}{\mu}\Psi_k\Gamma_k = 0, \quad \dot{\Gamma}_k + 2\Psi_k - \frac{1}{\mu}\Gamma_k^2 = 0; \quad (1.57)$$

в начальный момент времени $t = 0$:

$$\Phi_{jk}(0) = \Phi_{j-1k} - \frac{\Psi_{j-1k}^2}{\eta + \Gamma_{j-1k}}, \quad \Psi_{jk}(0) = \frac{\eta\Psi_{j-1k}}{\eta + \Gamma_{j-1k}}, \quad \Gamma_{jk}(0) = \frac{\eta\Gamma_{j-1k}}{\eta + \Gamma_{j-1k}}, \quad j \in \mathbb{N},$$

$$\Phi_{0k}(2) = \Phi_k(0), \quad \Psi_{0k}(2) = \Psi_k(0), \quad \Gamma_{0k}(0) = \Gamma_k(0).$$

Решая уравнения (1.55)–(1.57), находим

$$\Phi_k(2) = \Phi_0 - \frac{\Psi_0^2}{\eta + \Gamma_0}, \quad \Psi_k(2) = \frac{\eta\Psi_0}{\eta + \Gamma_0}, \quad \Gamma_k(2) = \frac{\eta\Gamma_0}{\eta + \Gamma_0}, \quad k \in \mathbf{Z}_+; \quad (1.58)$$

$$\Phi_k(t) = \mu \frac{\mu F_{11}^k + |F^k|\tau}{\Delta}, \quad \Psi_k(t) = \mu \frac{2\mu(F_{11}^k\tau + F_{12}^k) + |F^k|\tau^2}{2\Delta},$$

$$\Gamma_k(t) = \mu \frac{3\mu(F_{11}^k\tau^2 + F_{12}^k\tau + F_{22}^k) + |F^k|\tau^3}{3\Delta}, \quad 0 \leq t \leq t_F; \quad (1.59)$$

$$\Phi_{jk}(0) = \Phi_{0k_F} - \frac{j\Psi_{0k}^2}{\eta + j\Gamma_{0k}}, \quad \Psi_{jk}(0) = \frac{\eta\Psi_{0k}}{\eta + j\Gamma_{0k}}, \quad \Gamma_{jk}(0) = \frac{\eta\Gamma_{0k}}{\eta + j\Gamma_{0k}}, \quad j \in \mathbf{Z}_+, \quad (1.60)$$

где $\tau = 2 - t$, $\Delta = \mu^2 + \mu(F_{11}^k\tau^3/3 + F_{12}^k\tau^3 + F_{22}^k) + |F^k|\tau^4/12$, $F_{11}^k = \Phi_k(2)$, $F_{12}^k = \Psi_k(2)$, $F_{22}^k = \Gamma_k(2)$, $|F^k| = F_{11}^k F_{22}^k - (F_{12}^k)^2$. В правых частях уравнений (1.59), (1.60) у всех функций не указаны значения аргумента $t = 2$ и $t = 0$ соответственно.

Позиционные условные оптимальные управления определяем, выполняя операции минимизации в (1.51)–(1.53):

$$\mathbf{u}_k(t, x) = -\frac{1}{\mu}[\Psi_k(t)x_1 + \Gamma_k(t)x_2], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.61)$$

$$\mathbf{v}_k(2, x) = -\frac{\Psi_k(2)x_1 + \Gamma_k(2)x_2}{\eta + \Gamma_k(2)}, \quad \mathbf{v}_{jk}(0, x) = -\frac{\Psi_{jk}(0)x_1 + \Gamma_{jk}(0)x_2}{\eta + \Gamma_{jk}(0)}, \quad j \in \mathbf{Z}_+. \quad (1.62)$$

Оптимальное количество переключений $\mathbf{k}_0(0, x)$, $\mathbf{k}_F(0, x)$ находим по образующим (1.54), решая задачу дискретной оптимизации

$$(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1) = \min_{k_0 \in \mathbf{Z}_+} \min_{k_1 \in \mathbf{Z}_+} \varphi_{k_0 k_1}(0, x). \quad (1.63)$$

Для начального состояния $\bar{x}_0 = (2, 1)^T$ получаем: $k_0 = 2$, $k_1 = 1$, $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = -0.70859$, $\bar{v}_3 = 0.59173$, $\bar{u}(t) = 1.3003t - 1.4172$, $\bar{l}(t) = 0.16045$ (вычисления приближенные). На рис. 1.6 изображена оптимальная траектория, характерные состояния представлены полужирными квадратиками, скачки траектории – стрелками.

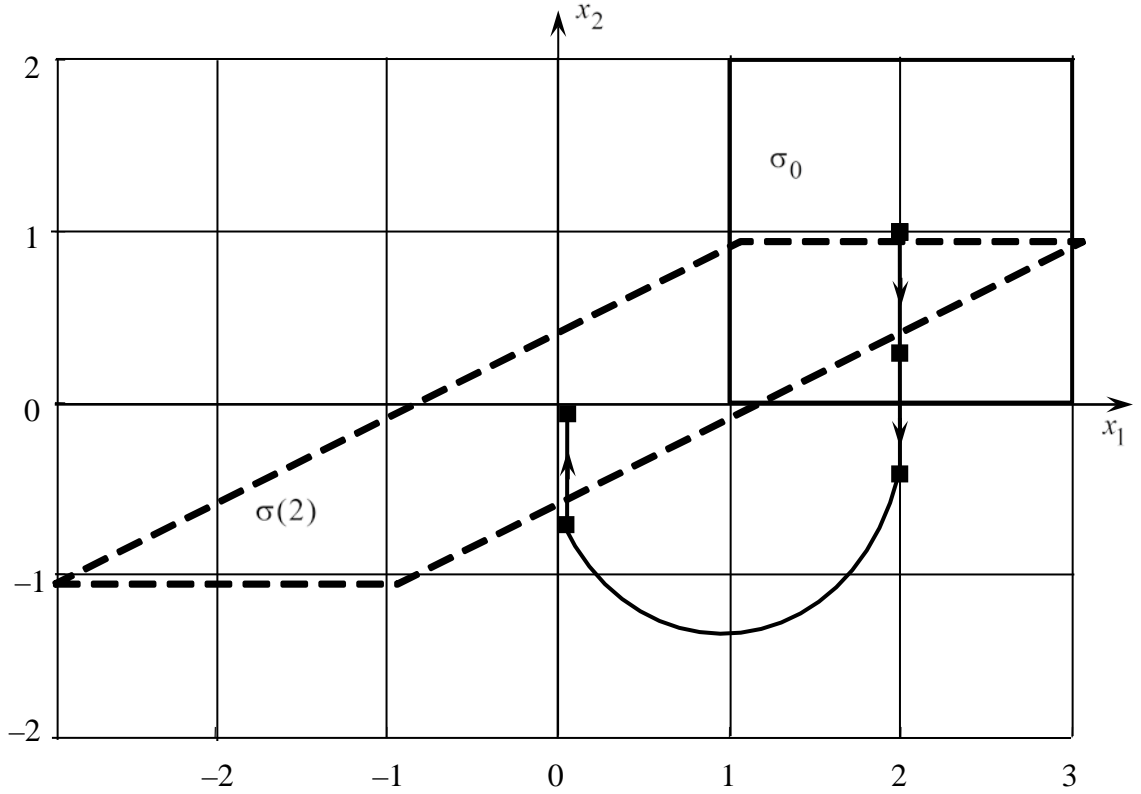


Рис. 1.6.

2) Множество σ_0 возможных начальных состояний представляет собой квадрат со сторонами, параллельными координатным осям. В процессе непрерывного движения квадрат преобразуется в параллелограмм $\sigma(t)$ с основаниями, параллельными оси абсцисс (x_1). При переключениях меняется только скорость движения x_2 , поэтому параллелограмм смещается вдоль оси ординат (x_2). Таким образом, в процессе движения множество возможных состояний остается параллелограммом того же вида. Для его описания достаточно использовать координаты вершин.

Обозначим через $\beta_{jk}(t, x, \hat{x})$ образующие функции стоимости полуоптимального процесса, $j, k \in \mathbf{Z}_+$, полагая, как и ранее, для уменьшения количества индексов $\beta_k(t, x, \hat{x}) \doteq \beta_{0k}(t, x, \hat{x})$. Уравнения для этих образующих получаем из достаточных условий оптимальности. В конечный момент времени $t = 2$:

$$\beta_0(2, x, \hat{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2,$$

$$\beta_k(2, x, \hat{x}) = \beta_{k-1}(2, x_1, x_2 + \hat{v}_k) + \lambda + \frac{\eta}{2}\hat{v}_k^2, \quad k \in \mathcal{N},$$

где $\hat{v}_k = v_k(2, \hat{x})$ – позиционное управление переключениями (1.62);

на промежутке $t \in [0, 2]$:

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial t} + \frac{\partial \beta_k}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial \beta_k}{\partial x_2}\hat{u}_k + \frac{\partial \beta_k}{\partial \hat{x}_1}\hat{x}_2 + \frac{\partial \beta_k(t, x, \hat{x})}{\partial \hat{x}_2}\hat{u}_k + \frac{\mu}{2}\hat{u}_k^2 = 0, \quad (1.64)$$

где $\hat{u}_k = u_k(t, \hat{x})$ – позиционное управление непрерывным движением (1.61);

в начальный момент времени $t = 0$:

$$\begin{aligned}\beta_{0k}(0, x, \hat{x}) &= \beta_k(0, x, \hat{x}), \quad j \in \mathbf{Z}_+, \\ \beta_{kj}(0, x, \hat{x}) &= \beta_{j-1k}(2, x_1, x_2 + \hat{\nu}_{jk}, \hat{x}_1, \hat{x}_2 + \hat{\nu}_{jk}) + \lambda + \frac{\eta}{2} \hat{\nu}_k^2, \quad j \in \mathbb{N},\end{aligned}\quad (1.65)$$

где $\hat{\nu}_{jk} = \nu_{jk}(2, \hat{x})$ – позиционное управление переключениями (1.62).

Будем искать образующие в виде квадратичных функций:

$$\beta_{jk}(t, x, \hat{x}) = \varphi_{jk}(t, x) + \frac{1}{2} \Delta \Phi_{jk}(t) \Delta x_1^2 + \Delta \Psi_{jk}(t) \Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{1}{2} \Delta \Gamma_{jk}(t) \Delta x_2^2, \quad (1.66)$$

$$\beta_k(t, x, \hat{x}) = \varphi_k(t, x) + \frac{1}{2} \Delta \Phi_k(t) \Delta x_1^2 + \Delta \Psi_k(t) \Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{1}{2} \Delta \Gamma_k(t) \Delta x_2^2, \quad (1.67)$$

где $\varphi_{jk}(t, x)$ и $\varphi_k(t, x)$ – образующие функции цены (1.54), (1.55), $\Delta x = x - \hat{x}$ – отклонение от состояния \hat{x} оптимальной траектории. Подставляя функции (1.66), (1.67) в уравнения (1.64), (1.65), определяем соотношения для нахождения коэффициентов квадратичных функций. В конечный момент времени $t = 2$:

$$\begin{aligned}\Delta \Phi_k(2) &= \Delta \Phi_{k-1} + \frac{\Psi_{k-1}^2}{\eta + \Gamma_{k-1}}, \quad \Delta \Psi_k(2) = \Delta \Psi_{k-1}(2) + \frac{\eta \Psi_{k-1}}{\eta + \Gamma_{k-1}}, \\ \Delta \Gamma_k(2) &= \Delta \Gamma_k(2) + \frac{\eta \Gamma_{k-1}}{\eta + \Gamma_{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \Delta \Phi_0(2) &= \Delta \Psi_0(2) = \Delta \Gamma_0(2);\end{aligned}\quad (1.68)$$

на промежутке $t \in [0, 2]$:

$$\Delta \dot{\Phi}_k + \frac{1}{\mu} \Psi_k^2 = 0, \quad \Delta \dot{\Psi}_k + \Delta \Phi_k + \frac{1}{\mu} \Psi_k \Gamma_k = 0, \quad \Delta \dot{\Gamma}_k + 2 \Delta \Psi_k + \frac{1}{\mu} \Gamma_k^2 = 0; \quad (1.69)$$

в начальный момент времени $t = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta \Phi_{jk}(0) &= \Delta \Phi_{j-1k} + \frac{\Psi_{j-1k}^2}{\eta + \Gamma_{j-1k}}, \quad \Delta \Psi_{jk}(0) = \Delta \Psi_{j-1k} + \frac{\eta \Psi_{j-1k}}{\eta + \Gamma_{j-1k}}, \\ \Delta \Gamma_{jk}(0) &= \Delta \Gamma_{j-1k} + \frac{\eta \Gamma_{j-1k}}{\eta + \Gamma_{j-1k}}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \Delta \Phi_{0k}(0) &= \Delta \Phi_k(0), \quad \Delta \Psi_{0k}(0) = \Delta \Psi_k(0), \quad \Delta \Gamma_{0k}(0) = \Delta \Gamma_k(0).\end{aligned}\quad (1.70)$$

В правых частях уравнений (1.68), (1.70) у всех функций не указаны значения аргумента $t = 2$ и $t = 0$ соответственно. Решения уравнений (1.68)–(1.70) выражаются через коэффициенты Φ, Ψ, Γ образующих функции цены (1.58)–(1.60):

$$\Delta \Phi_{jk}(t) = 1 - \Phi_{jk}(t), \quad \Delta \Psi_{jk}(t) = \tau - \Psi_{jk}(t), \quad \Delta \Gamma_{jk}(t) = 1 + \tau^2 - \Gamma_{jk}(t).$$

Здесь, как и ранее, $\tau = 2 - t$, $j \in \mathbf{Z}_+$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $0 \leq t \leq 2$.

Среднее значение (1.50) функционала (1.49) на программном управлении \hat{w} , оптимальном для траектории $\hat{x}(\cdot)$, исходящей из позиции (t_0, \hat{x}_0) , вычисляем по функции стоимости полуоптимального процесса:

$$I^c(t_0, \sigma_0, \hat{x}_0) \doteq \frac{1}{\text{mes } \sigma_0} \int_{\sigma_0} \beta_{\hat{\mathbf{k}}_0 \hat{\mathbf{k}}_F}(t_0, x_0, \hat{x}_0) dx_0, \quad (1.71)$$

где $\hat{\mathbf{k}}_0 = \mathbf{k}_0(0, \hat{x}_0)$, $\hat{\mathbf{k}}_F = \mathbf{k}_F(0, \hat{x}_0)$ – количество переключений (1.63) у оптимальной траектории $\hat{x}(\cdot)$ в начальный и конечный моменты времени соответственно. Подставляя $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$ в формулу (1.71), находим среднее значение $\bar{I}^c = I^c(t_0, \sigma_0, \bar{w}) = 1.160446$ при управлении \bar{w} , оптимальном для траектории, исходящей из центра \bar{x}_0 . На рис. 1.6 изображены множества возможных начальных и конечных состояний – квадрат σ_0 и параллелограмм $\sigma(2)$ соответственно, а также оптимальная траектория, исходящая из центра $\bar{x}_0 = (2,1)^T$ квадрата σ_0 .

3) При каждом неточном измерении скорости множество «измеренных состояний» представляет собой полосу, например, $\sigma^m = \{x \in \mathbf{R}^2 | \bar{x}_2^m - \Delta^m \leq x_2 \leq \bar{x}_2^m + \Delta^m\}$ в момент $t = t^m$. Пересечение этой полосы с параллелограммом $\sigma^{m-1}(t^m)$ дает новый параллелограмм σ_0^m , основания которого параллельны оси абсцисс. Таким образом, в процессе движения с учетом неточных измерений множество возможных состояний системы является параллелограммом. Для описания такого множества достаточно использовать его вершины. Моделируя движение вершин параллелограмма от начального момента времени $t_0 = 0$ до момента t^1 первого измерения, получаем параллелограмм $\sigma^0(t^1)$. По измеренному значению скорости \bar{x}_2^1 и погрешности измерения Δ^1 определяем полосу $\sigma^1 = \{x \in \mathbf{R}^2 | \bar{x}_2^1 - \Delta^1 \leq x_2 \leq \bar{x}_2^1 + \Delta^1\}$, которую пересекаем с $\sigma^0(t^1)$. В результате получаем параллелограмм σ_0^1 . Находим его центр \bar{x}_0^1 и вычисляем среднее значение $\bar{I}_1^c = I^c(t^1, \sigma_0^1, \bar{x}_0^1)$. Затем моделируем движение вершин параллелограмма от момента t^1 до момента t^2 второго измерения и вычисляем $\bar{I}_2^c = I^c(t^2, \sigma_0^2, \bar{x}_0^2)$. Далее процедура повторяется до последнего измерения. При моделировании используется оптимальное в среднем управление, которое совпадает с оптимальным управлением для центра параллелограмма. При каждом измерении $j = 1, \dots, m$ положение центра \bar{x}_0^j возможных состояний системы меняется, и оптимальное управление синтезируется заново.

Для пучка с двумя измерениями получаем:

- до первого измерения управление совпадает с найденным в п.1;
- в момент $t^1 = 0.5$ измерено среднее значение скорости $\bar{x}_2^1 = -0.22324$, погрешность измерения $\Delta_2^1 = 1$;
- после первого измерения в момент $t^1 = 0.5$ определяем центр $\bar{x}_0^1 = (1.8263, -0.59324)^T$ множества σ_0^1 , синтезируем для него оптимальное управление: $k_0 = 1$, $k_1 = 0$, $\bar{v}_1 = -0.45335$, $\bar{u}(t) = 1.4899t - 1.65171$, вычисляем наименьшее среднее значение функционала $\bar{I}_1^c = 0.64735$ с учетом затрат на промежутке $[0, 0.5]$;
- в момент $t^2 = 1.5$ измерено среднее значение скорости $\bar{x}_2^2 = -0.1373$, погрешность измерения $\Delta_2^2 = 1$;

– после второго измерения в момент $t^2 = 1.5$ имеем $\bar{x}_0^2 = (0.43318, -1.30027)^T$, $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $\bar{u}(t) = -0.82161t + 2.7861$, $\bar{I}_2^c = 0.54809$ с учетом затрат на промежутке $[0, 1.5]$.

На рис. 1.7 изображены: множество начальных состояний (квадрат σ_0), виртуальное (без учета измерений) множество конечных состояний – параллелограмм $\sigma(2)$ (представленный пунктирными линиями), фактическое (с учетом двух измерений) множество конечных состояний – параллелограмм $\sigma^2(2)$. Траектория центра множества состояний показана полужирными линиями, характерные состояния представлены квадратами, скачки траектории обозначены стрелками. Двойными стрелками отмечены изменения центра в результате измерений.

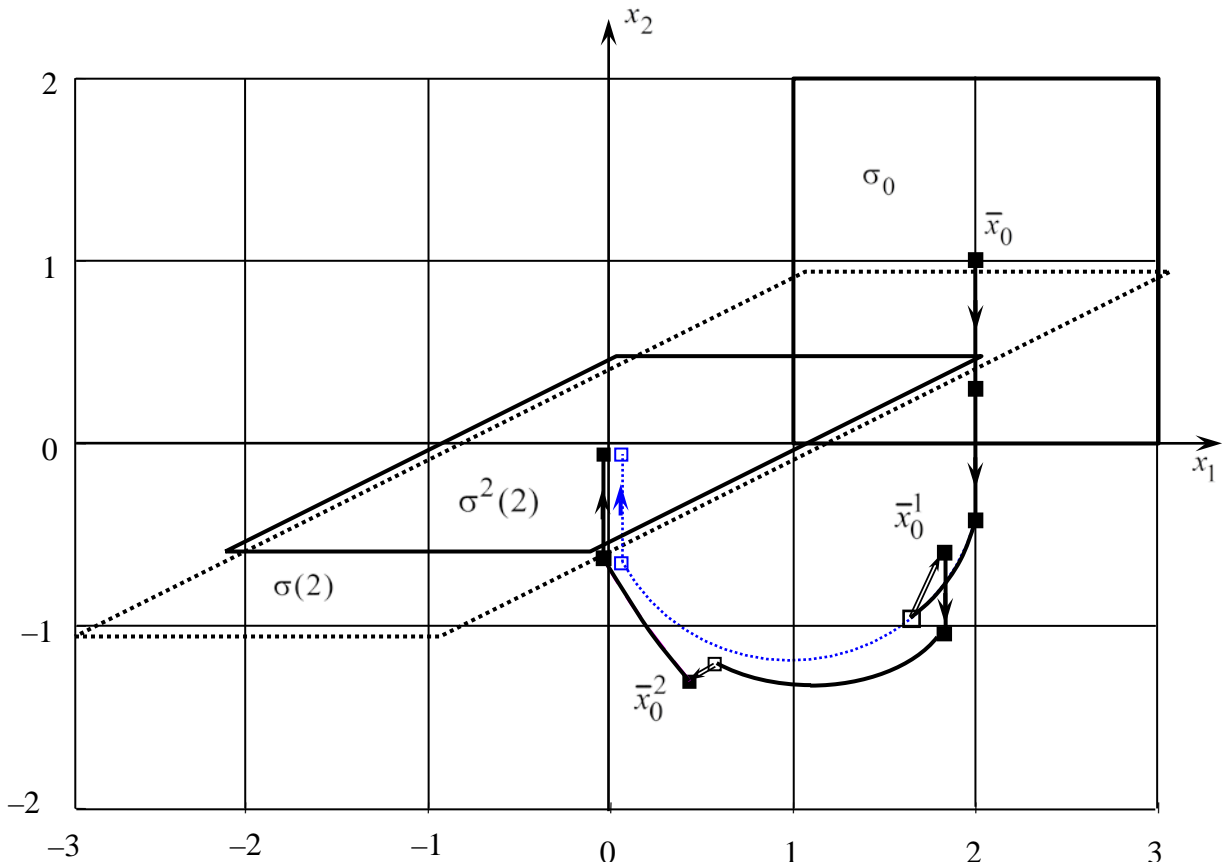


Рис. 1.7.

При моделировании измеренные значения скорости выбирались случайным образом, а погрешность измерений не менялась. Эффективность измерений можно оценить, сравнивая средние значения функционала без измерений и с измерениями: $\bar{I}^c = 1.160446 > \bar{I}_1^c = 0.64735 > \bar{I}_2^c = 0.54809$. Заметим, что при моделировании величины \bar{I}_1^c , \bar{I}_2^c случайные. Поэтому для объективной оценки нужно использовать статистические методы.

ВЫВОДЫ

1. Доказаны достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий ПС при наличии дискретных неточных измерений.
2. На основе достаточных условий оптимальности ПС разработаны:
 - алгоритм синтеза оптимального позиционного управления;
 - алгоритм синтеза субоптимального управления пучками траекторий;
 - алгоритм синтеза условного субоптимального управления пучками траекторий;
 - алгоритм синтеза условного субоптимального управления пучками траекторий при наличии дискретных неточных измерений.
- 7) Решены два академических примера линейно-квадратичных задач синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий ПС. В одном примере принцип разделения выполняется, а в другом – нет. Проведен сравнительный анализ разработанных алгоритмов управления.

2. СУБОПТИМАЛЬНОЕ В СРЕДНЕМ УПРАВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ АВТОМАТНОГО ТИПА

В главе 2 доказаны достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий стационарных САТ при наличии дискретных неточных измерений. На основе достаточных условий разработаны алгоритмы синтеза субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений. Приведен академический пример синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий стационарных САТ второго порядка.

2.1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ САТ совершает N переключений в моменты времени $t_i, i = 1, \dots, N$, образующие неубывающую последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$:

$$t_0 \leq t_1 \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \doteq t_F. \quad (2.1)$$

Между неравными последовательными моментами переключений система сохраняет свое состояние

$$x(t) = x(t_{i-1}), \quad t_{i-1} \leq t < t_i, \quad \text{если } t_{i-1} < t_i,$$

а в моменты переключений состояние меняется согласно рекуррентным соотношениям

$$x_i = g(x_{i-1}, v_i), \quad (2.2)$$

$$v_i \in V(x_{i-1}), \quad (2.3)$$

где $x_i = x(t_i)$ и $v_i = v(t_i)$ – состояние системы и управление в момент переключения t_i соответственно, причем $x_i \neq x_{i-1}$, $x_i \in X \subset \mathbf{R}^m$, $v_i \in V \subset \mathbf{R}^q$, $i = 1, \dots, N$. Равенство последовательных моментов в (2.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [27, 28]. Значение управления между тактовыми моментами времени не существенно. Будем считать, что оно *нейтральное*: $v(t) = o$, $t \in T \setminus \mathcal{T}$, где o – некоторый *нейтральный* элемент множества V . При нейтральном значении управления переключений нет, и система сохраняет свое состояние, т.е. $g(x, o) = x$, при всех $x \in X$.

Начальное состояние системы задано:

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.4)$$

Условие (2.4) не исключает одного или нескольких переключений в начальный момент времени t_0 , поскольку первые несколько моментов (2.1) могут совпадать.

Функция $g: X \times V \rightarrow X$ в уравнении (2.2) определяет состояние $x_i = x(t_i)$ системы в момент t_i в зависимости от предшествующего состояния $x_{i-1} = x(t_{i-1})$ и допустимого значения управления $v_i = v(t_i)$, которое ограничено включением (2.3). Многозначное отображение $x \rightarrow V(x): X \rightarrow 2^V$ считаем замкнутым [59]. Здесь 2^V – множество всех подмножеств V .

2.1.1. Задача оптимального управления одной траекторией

Программное управление $v: T \rightarrow V$ однозначно определяется множеством $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$ моментов переключений и значениями $v_i = v(t_i) \neq 0$ управления в эти моменты. Программное управление будем считать допустимым, если оно в силу рекуррентного уравнения (2.2) с начальным условием (2.4) порождает траектории $x: T \rightarrow X$, состояния $x_i = x(t_i)$ которой вместе со значениями управления $v_i = v(t_i)$ в моменты переключений удовлетворяют включению (2.3). Множество допустимых программных управлений обозначим $\mathcal{V}(t_0, x_0)$. Множества $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v(\cdot))$ моментов переключений у допустимых управлений $v \in \mathcal{V}(t_0, x_0)$ могут отличаться.

На множестве $\mathcal{V}(t_0, x_0)$ задан функционал качества управления

$$I(t_0, x_0, v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_F} f(x(t))dt + \sum_{i=1}^N g^+(x_{i-1}, v_i) + F(x(t_F)). \quad (2.5)$$

Скалярные функции $f(x)$, $g^+(x, v)$, $F(x)$ определены на множествах X , $X \times V$, X соответственно, причем функция $g^+(x, v)$ – неотрицательная. Предполагаем, что функционал (2.5) ограничен снизу. Количество N и моменты t_1, \dots, t_N переключений заранее не заданы и подлежат оптимизации. Заметим, что в стационарном случае моменты переключений не входят явно в функционал (2.5), но его интегральный член, разумеется, зависит от разбиения (2.1).

Требуется найти минимальное значение функционала (2.5) и оптимальное допустимое управление $v^*(\cdot)$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, v^*(\cdot)) = \min_{v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, v(\cdot)). \quad (2.6)$$

Если наименьшее значение (2.6) не существует, то ставится задача нахождения минимизирующей последовательности $v^n(\cdot) \in \mathcal{V}(t_0, x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, допустимых управлений [68]

$$I(t_0, x_0, v^n(\cdot)) \rightarrow \inf_{v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_0, x_0)} I(v) = I^* \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности v^n при $n \rightarrow \infty$ может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Бесконечное количество переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие неотрицательности функции g^+ :

$$g^+(x, v) \geq \lambda_+ > 0. \quad (2.7)$$

Применение таких «штрафов» в критерии качества необходимо в тех прикладных задачах, где решением служит минимизирующая последовательность релейных законов управления, приводящая к неограниченному росту числа переключений. Условие (2.7) отбрасывает такие последовательности как неоптимальные. Кроме того, условие (2.7) исключает у оптимальных процессов так называемые *фиктивные* переключения, при которых состояние системы не меняется, например, в случае $x_i = x_{i-1}$. В самом деле, при таком переключении функционал увеличивается на положительную величину $g^+(x_{i-1}, v_i)$ по сравнению с процессом без фиктивного переключения.

В прикладных задачах нередко возникают ограничения на количество переключений. Задача минимизации функционала (2.5) на множестве допустимых траекторий с заданным числом переключений формулируется следующим образом. Пусть $\mathcal{V}_N(t_0, x_0)$ – множество допустимых управлений из $\mathcal{V}(t_0, x_0)$ с N переключениями. Требуется найти минимальное значение функционала (2.5) на множестве $\mathcal{V}_N(t_0, x_0)$ и допустимое управление $v_N(\cdot)$ с N переключениями, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, v_N(\cdot)) = \min_{v(\cdot) \in \mathcal{V}_N(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, v(\cdot)). \quad (2.8)$$

Такое управление $v_N(\cdot)$ будем называть *условно оптимальным*, имея в виду его оптимальность при дополнительном условии – заданном числе переключений. В множестве $\mathcal{V}_N(t_0, x_0)$ допускаются управления, которым соответствуют фиктивные переключения, при которых состояние системы не меняется. При условии (2.7) положительности затрат на каждый скачок траектории фиктивные переключения исключаются при минимизации, поскольку траектории без фиктивных переключений лучше (в смысле минимума функционала).

Поставленные задачи (2.6), (2.8) – это задачи оптимального управления со свободным конечным состоянием и фиксированным временем. Оптимальное управление $v^*(\cdot)$ в силу уравнения движения (2.2) определяет единственную оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$, исходящую из начального состояния (2.4). Возможны другие постановки задачи, например, с подвижным или фиксированным правым концом траектории [68].

В линейно-квадратичной задаче пространство состояний системы $X = \mathbf{R}^m$, уравнение движения (2.2) линейное, ограничения (2.3) на управление отсутствуют, а функционал (2.5) квадратичный:

$$x_i = Ax_{i-1} + Bv_i, \quad v_i \in \mathbf{R}^q, \quad (2.9)$$

$$I(t_0, x_0, v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_F} \frac{1}{2} x^T(t) C x(t) dt + \sum_{i=1}^N \left[\lambda + \frac{1}{2} x_{i-1}^T D x_{i-1} + \frac{1}{2} v_i^T G v_i \right] + \frac{1}{2} x^T(t_F) F x(t_F). \quad (2.10)$$

Здесь A, B, C, D, F, G – матрицы соответствующих размеров, причем матрицы C, D, F квадратичных форм симметрически неотрицательно определенные, а матрица G – симметрическая положительно определенная, λ – положительное число. Линейно-квадратичная задача синтеза оптимальной системы (2.9) с функционалом (2.10) аналогична проблеме аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [73].

2.1.2. Задача оптимального управления пучком траекторий

Пусть в отличие от задачи (2.6) начальное состояние $x_0 \in X$ точно не известно, а известно множество σ_0 возможных начальных состояний ($\sigma_0 \subset X$). Обозначим через \mathcal{V} множество допустимых программных управлений $v(\cdot)$, каждое из которых для любого начального состояния (2.4) порождает в силу уравнения движения (2.2) траекторию $x(\cdot)$. Объединение этих траекторий образует пучок $t \rightarrow \sigma(t)$, исходящий из множества возможных начальных состояний $\sigma(t_0) = \sigma_0$. Пусть по-прежнему качество управления одной траекторией САТ, исходящей из позиции (t_0, x_0) , характеризуется функционалом (2.5), а качество управления пучком траекторий, исходящих из множества σ_0 , оценивается средним значением функционала (2.5)

$$I^c(t_0, \sigma_0, v(\cdot)) = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) I(t_0, \sigma_0, v(\cdot)) dx_0, \quad (2.11)$$

при этом считаем, что множество σ_0 имеет положительную меру $\text{mes } \sigma_0 > 0$. В (2.11) измеримую неотрицательную весовую функцию $\rho: X \rightarrow \mathbf{R}_+$, в частности, можно считать плотностью распределения начального состояния системы, предполагая при этом, что

$$\int_{\sigma_0} \rho(x) dx = 1. \quad (2.12)$$

Требуется найти оптимальное в среднем управление $v^c(\cdot)$, минимизирующее функционал (2.11):

$$I^c(t_0, \sigma_0, v^c(\cdot)) = \min_{v(\cdot) \in \mathcal{V}} I^c(t_0, \sigma_0, v(\cdot)). \quad (2.13)$$

Как и в случае управления одной траекторией (см. разд.2.1), минимизация в (2.13) может проводиться при дополнительном условии – заданном количестве N переключений.

2.1.3. Задача субоптимального управления пучком траекторий

Для управления пучком траекторий предлагается использовать управление, оптимальное для одной траектории, возможно не принадлежащей этому пучку. Такое управление для пуч-

ка траекторий необязательно будет оптимальным в среднем. Наилучшее для пучка траекторий управление, оптимальное хотя бы для одной траектории системы, будем называть *субоптимальным* управлением пучком траекторий. Субоптимальное управление, вообще говоря, не является оптимальным для пучка траекторий, но оно может оказаться вполне приемлемым на практике. Сформулируем задачу поиска такого управления.

Пусть $\mathcal{V}^{\text{опт}}$ – множество оптимальных программных управлений отдельными траекториями, т.е. каждое программное управление $\hat{v}(\cdot) \in \mathcal{V}^{\text{опт}}$ хотя бы для одного начального состояния $\hat{x}_0(\cdot) \in X$ порождает в силу уравнения движения (2.2) оптимальный процесс, минимизирующий функционал (2.5). Начальное состояние \hat{x}_0 может не принадлежать множеству σ_0 . В рассматриваемой задаче любое управление, оптимальное для одной траектории, считаем допустимым для всех траекторий пучка, т.е. $\mathcal{V}^{\text{опт}} \subset \mathcal{V}$.

Требуется найти субоптимальное в среднем управление $\hat{v}^c(\cdot)$, минимизирующие функционалы (2.11) на множестве $\mathcal{V}^{\text{опт}}$:

$$I^c(t_0, \sigma_0, \hat{v}^c(\cdot)) = \min_{v(\cdot) \in \mathcal{V}^{\text{опт}}} I^c(t_0, \sigma_0, v(\cdot)). \quad (2.14)$$

Наименьшее значение (2.14) не меньше минимального значения (2.13), так как $\mathcal{V}^{\text{опт}} \subset \mathcal{V}$.

2.1.4. Задача субоптимального управления пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений

Пусть в некоторые моменты времени t^1, \dots, t^m , образующие возрастающую последовательность $t_0 < t^1 < \dots < t^m < t_F$ на промежутке $[t_0, t_F]$, производятся неточные измерения, в результате которых соответственно определяются «измеренные» множества $\sigma^1, \dots, \sigma^m$ возможных состояний системы. Предполагаем, что моменты измерений не совпадают с моментами мгновенных многократных переключения из последовательности (2.1). Измерения позволяют «сузить» пучок траекторий [130]. В самом деле, пусть $\sigma^i(t)$ – пучок траекторий после i -го измерения, $t^i < t < t^{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, а σ_0^m – множество всех возможных состояний системы в момент времени t^m с учетом начального множества σ_0 и всех m измерений, проведенных до этого момента включительно. Это множество получается путем последовательного пересечения множества возможных состояний системы с «измеренными» множествами

$$\sigma_0^0 = \sigma_0 = \sigma^0(t_0), \quad \sigma_0^1 = \sigma^0(t^1) \cap \sigma^1, \dots, \sigma_0^m = \sigma^{m-1}(t^m) \cap \sigma^m. \quad (2.15)$$

Задача субоптимального управления пучком траекторий с учетом измерений формулируется так же, как в разд.2.1.3, только процесс управления пучком происходит на промежутке времени $[t^m, t_F]$, и начинается из множества в σ_0^m . Требуется найти субоптимальное

в среднем управление v^c , минимизирующее функционал $I^c(t^m, \sigma_0^m, v)$ на множестве $\mathcal{V}^{\text{опт}}(t^m)$ оптимальных программных управлений, определенных на $[t^m, t_F]$:

$$I^c(t^m, \sigma_0^m, v^c) = \min_{w \in \mathcal{V}^{\text{опт}}(t^m)} I^c(t^m, \sigma_0^m, w).$$

2.2. ОПТИМАЛЬНОЕ ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

2.2.1. Функция цены и ее образующие

Решение задачи синтеза оптимального позиционного управления связано с нахождением функции цены (функции Гамильтона – Якоби – Беллмана), значение $\varphi(t, x)$ которой по определению равно значению функционала оставшихся (будущих) потерь [42]:

$$I(t, x, v(\cdot)) = \int_t^{t_F} f(x(t))dt + \sum_{i=1}^N g^+(x_{i-1}, v_i) + F(x(t_F)), \quad (2.16)$$

вычисленному на оптимальной траектории, исходящей из начальной позиции (t, x) , т.е. удовлетворяющей начальному условию $x(t) = x$. Иначе говоря, функция цены равна минимальному значению функционала оставшихся потерь (2.16) на множестве допустимых управлений $\mathcal{V}(t, x)$:

$$\varphi(t, x) = \min_{v(\cdot) \in \mathcal{V}(t, x)} I(t, x, v(\cdot)).$$

В (2.16) моменты переключений t_1, \dots, t_N образуют неубывающую последовательность на промежутке $[t, t_F]$: $t \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$, а $x_i = x$. Количество N и моменты t_1, \dots, t_N переключений в (2.16) заранее не заданы и подлежат оптимизации. Согласно лемме в [22], оптимальные процессы не имеют переключений в промежуточные моменты времени (между t и t_F). Поэтому функционал (2.16) можно представить в виде

$$I(t, x, v(\cdot)) = f(x_s)(t_F - t) + \sum_{i=1}^N g^+(x_{i-1}, v_i) + F(x_N), \quad (2.17)$$

где s – количество переключений в стартовый момент времени t , $0 \leq s \leq N$.

Для рассматриваемой задачи (2.6) определим *образующую* функции цены, значение $\varphi_{sk}(t, x)$ которой равно значению функционала оставшихся потерь (2.17), вычисленному на процессе, оптимальном среди всех допустимых процессов, начинающихся в позиции (t, x) , и имеющих s переключений в стартовый момент времени t и k переключений в конечный момент времени t_F . Иначе говоря, образующая функции цены равна минимальному значению функционала оставшихся потерь (2.16) на множестве $\mathcal{V}_{sk}(t, x)$ допустимых управлений с $N = s + k$ переключениями (s переключений в момент t и k – в момент t_F):

$$\varphi_{sk}(t, x) = \min_{v(\cdot) \in \mathcal{V}_{sk}(t, x)} I(t, x, v(\cdot)).$$

Таким образом, образующая функции цены отличается от функции цены дополнительными предположениями о количестве переключений. Если известна последовательность $\varphi_{sk}(t, x)$, $s, k \in \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, образующих, то функция цены находится как нижняя огибающая семейства образующих

$$\varphi(t, x) = \min_{s \in \mathbf{Z}_+} \min_{k \in \mathbf{Z}_+} \varphi_{sk}(t, x) \quad (2.18)$$

для всех позиций $(t, x) \in T \times X$.

2.2.2. Алгоритм синтеза оптимального позиционного управления

На основании статьи [37] можно сформулировать следующий алгоритм синтеза оптимального позиционного управления. Предполагаем, что заданы максимальные количества S и K переключений в начальный и конечный моменты времени соответственно.

- 1). В конечный момент времени t_F находим образующие функции цены $\varphi_{0k}(t_F, x)$, $1 \leq k \leq K$, решая рекуррентное уравнение

$$\varphi_{0k}(t_F, x) = \min_{v \in V(x)} [\varphi_{0k-1}(t_F, g(x, v)) + g^+(x, v)]$$

с начальным условием

$$\varphi_{00}(t_F, x) = F(x).$$

- 2). Определяем условное оптимальное позиционное управление

$$\psi_{0k}(t_F, x) = \arg \min_{v \in V(x)} [\varphi_{0k-1}(t_F, g(x, v)) + g^+(x, v)]$$

при первом переключении из k оставшихся.

- 3). Для каждого момента $t \in [t_0, t_F]$ находим «нулевые» образующие по формуле

$$\varphi_{0k}(t, x) = f(x)(t_F - t) + \varphi_{0k}(t_F, x). \quad (2.19)$$

- 4). Остальные образующие $\varphi_{sk}(t, x)$, $1 \leq s \leq S$, $1 \leq k \leq K$, получаем, решая рекуррентное уравнение

$$\varphi_{sk}(t, x) = \min_{v \in V(x)} [\varphi_{s-1k}(t, g(x, v)) + g^+(x, v)]$$

с начальным условием (2.19).

- 5). Определяем условное оптимальное позиционное управление

$$\psi_{sk}(t, x) = \arg \min_{v \in V(x)} [\varphi_{s-1k}(t, g(x, v)) + g^+(x, v)]$$

при первом переключении из $s + k$ оставшихся.

Процесс заканчивается после построения заданного количества образующих $\varphi_{sk}(t, x)$, $s = 0, 1, \dots, S$; $k = 0, 1, \dots, K$. Естественным условием окончания служит неравенство

$$\min_{0 \leq s \leq S} \min_{0 \leq k \leq K} \varphi_{sk}(t, x) \leq \min_{0 \leq s \leq S+1} \min_{0 \leq k \leq K+1} \varphi_{sk}(t, x), \quad (t, x) \in T \times X.$$

К сожалению, это условие окончания труднопроверяемое. Поэтому на практике обычно задается максимальное число переключений, которое ограничивает количество итераций.

Алгоритм позволяет получить образующие $\varphi_{sk}(t, x)$ функции цены $\varphi(t, x)$ и условные оптимальные позиционные управления $\boldsymbol{v}_{sk}(t, x)$, т.е. оптимальные управления при заданном количестве оставшихся переключений. Функция цены находится по своим образующим

$$\varphi(t_0, x_0) = \min_{(s,k) \in \mathbb{Z}_+^2} \varphi_{sk}(t_0, x_0).$$

Оптимальное количество переключений вычисляется по формуле

$$(\mathbf{s}, \mathbf{k}) = \arg \min_{(s,k) \in \mathbb{Z}_+^2} \varphi_{sk}(t_0, x_0).$$

2.2.3. Нахождение оптимального программного управления

Опишем построение оптимального процесса, удовлетворяющего начальному условию (2.4). Для позиции (t_0, x_0) определяем, оптимальные количества $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t_0, x_0)$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t_0, x_0)$ переключений в начальный (стартовый) и конечный моменты соответственно:

$$(\mathbf{s}, \mathbf{k}) = \arg \min_{(s,k) \in \mathbb{Z}_+^2} \varphi_{sk}(t_0, x_0).$$

Если $\mathbf{s} = 0$, то переключений в начальный момент времени нет и оптимальная траектория постоянна: $x(t) = x_0$, $t_0 \leq t \leq t_F$. Если $\mathbf{s} > 0$, то последовательно для $i = 1, \dots, \mathbf{s}$ находим:

момент i -го переключения $t_i = t_0$;

оптимальное программное управление $v_i = \boldsymbol{v}_{\mathbf{s}-i+1\mathbf{k}}(t_i, x_{i-1})$;

состояние после i -го переключения $x_i = g(x_{i-1}, v_i)$.

На промежутке $t_0 \leq t \leq t_F$ траектория постоянна: $x(t) = y_s$, $t_0 \leq t \leq t_F$. В конечный момент времени система совершает \mathbf{k} переключений. При $\mathbf{k} > 0$ последовательно для $j = 1, \dots, \mathbf{k}$ находим:

момент $(\mathbf{s} + j)$ -го переключения $t_{\mathbf{s}+j} = t_F$;

оптимальное программное управление $v_{\mathbf{s}+j} = \boldsymbol{v}_{\mathbf{s}\mathbf{k}-j+1}(t_{\mathbf{s}+j}, x_{\mathbf{s}+j-1})$;

состояние после $(\mathbf{s} + j)$ -го переключения $x_{\mathbf{s}+j} = g(x_{\mathbf{s}+j-1}, v_{\mathbf{s}+j})$.

Таким образом, находится оптимальный процесс, т.е. оптимальная траектория и оптимальное программное управление. Наименьшее значение функционала качества вычисляем по функции цены

$$\min I = \varphi(t_0, x_0) = \varphi_{\mathbf{s}\mathbf{k}}(t_0, x_0).$$

2.3. СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ

Управление пучком траекторий САТ ищется на основе принципа разделения. Если принцип разделения справедлив, то решение задачи оптимального управления пучком сводится к синтезу оптимального управления с обратной связью и нахождению начального состояния для опорной траектории. На втором этапе фактически строится оценка начального состояния, которая затем используется в оптимальном управлении с обратной связью.

2.3.1. Функция стоимости полуоптимального процесса и ее образующие

В [27] были получены достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий САТ. Эти условия связаны с так называемой функцией стоимости *полуоптимального процесса*, значение $\beta(t, x, \hat{x})$ которой по определению равно значению функционала оставшихся потерь (2.16):

$$\beta(t, x, \hat{x}) = I(t, x, \hat{v}(\cdot)), \quad (2.20)$$

вычисленному на траектории, исходящей из позиции (t, x) , при управлении $\hat{v}(\cdot)$, оптимальном для траектории, исходящей из позиции (t, \hat{x}) . Поскольку управление $\hat{v}(\cdot)$ оптимальное для траектории $\hat{x}(\cdot)$, то значение $I(t, \hat{x}, \hat{v}(\cdot))$ функционала (2.16) равно соответствующему значению функции цены: $\varphi(t, \hat{x}) = I(t, \hat{x}, \hat{v}(\cdot))$. Следовательно, при совпадении аргументов $x = \hat{x}$ функция (2.20) совпадает с функцией цены:

$$\beta(t, \hat{x}, \hat{x}) = \varphi(t, \hat{x}) = I(t, \hat{x}, \hat{v}(\cdot)). \quad (2.21)$$

Если же позиции разные $x \neq \hat{x}$, то значение $\beta(t, x, \hat{x})$ отличается от цены $\varphi(t, \hat{x})$. В любом случае справедливо неравенство

$$\varphi(t, \hat{x}) \leq \beta(t, x, \hat{x}), \quad (2.22)$$

которое показывает, что ошибочное использование оптимального программного управления для неоптимальной траектории приводит к увеличению цены процесса. Другими словами, если функция цены $\varphi(t, \hat{x})$ показывает стоимости оптимального процесса $(\hat{x}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$, то функция $\beta(t, x, \hat{x})$ равна стоимости *полуоптимального* процесса $(x(\cdot), \hat{v}(\cdot))$, в котором управление $\hat{v}(\cdot)$ оптимальное, а траектория $x(\cdot)$ нет.

Используя функцию $\beta(t, x, \hat{x})$, можно определить субоптимальные управления пучком траекторий. Действительно, для программного управления $\hat{v}(\cdot)$, оптимального для траектории, удовлетворяющей начальному условию $x(t_0) = \hat{x}$, имеем равенство

$$\beta(t_0, x_0, \hat{v}(\cdot)) = I(t_0, x_0, \hat{x}).$$

Качество управления $\hat{v}(\cdot)$ пучком траекторий, исходящих из множества σ_0 , средним значением (2.11)

$$I^c(t_0, \sigma_0, \hat{v}(\cdot)) = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) I(t_0, x_0, \hat{x}) dx_0 = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) \beta(t_0, x_0, \hat{x}) dx_0. \quad (2.23)$$

Выбор наилучшего управления $\hat{v}(\cdot)$ можно заменить, согласно (2.23) выбором наилучшего начального состояния \hat{x} опорной траектории:

$$\hat{x}^c \in \text{Arg min}_{\hat{x} \in X} \int_{\sigma_0} \rho(x_0) \beta(t_0, x_0, \hat{x}) dx_0. \quad (2.24)$$

Состояние (2.24) будем называть *субоптимальной оценкой* начального состояния в среднем. Если выполняется принцип разделения, то управление $\hat{v}^c(\cdot)$, оптимальное для траекторий, исходящих из позиции (t_0, \hat{x}^c) , будет оптимальным в среднем управлением пучками траекторий.

Для нахождения функции $\beta(t, x, \hat{x})$ в стационарном случае будем использовать, как и для функции цены, вспомогательные функции – образующие $\beta_{sk}(t, x, \hat{x})$, $s, k \in \mathbf{Z}_+$, которые определим следующим образом. Значение $\beta_{sk}(t, x, \hat{x})$ полагаем равным значению $I(t, x, \hat{v}(\cdot))$ функционала оставшихся потерь (2.17), вычисленному на траектории, исходящей из позиции (t, x) , при управлении, оптимальном среди всех допустимых управлений для траекторий, исходящих из позиции (t, \hat{x}) , и имеющих s переключений в стартовый момент времени t и k переключений в конечный момент времени t_F . Таким образом, образующая $\beta_{sk}(t, x, \hat{x})$ отличается от функции $\beta(t, x, \hat{x})$ дополнительным ограничением на количество переключений. Если известна последовательность $\beta_{sk}(t, x, \hat{x})$, $s, k \in \mathbf{Z}_+$, образующих, то функция $\beta(t, x, \hat{x})$ находится по формуле

$$\beta(t, x, \hat{x}) = \beta_{\hat{s}\hat{k}}(t, x, \hat{x}),$$

где $\hat{s} = \mathbf{s}(t, \hat{x})$, $\hat{k} = \mathbf{k}(t, \hat{x})$ – оптимальные количества переключений в момент t и t_F соответственно:

$$(\hat{s}, \hat{k}) = \arg \min_{(s, k) \in \mathbf{Z}_+^2} \varphi_{sk}(t, x).$$

Образующие функции цены $\varphi(t, x)$ и функции $\beta(t, x, \hat{x})$ связаны между собой, согласно (2.21), (2.22), соотношениями

$$\varphi_{sk}(t, \hat{x}) \leq \beta_{sk}(t, x, \hat{x}), \quad \varphi_{sk}(t, \hat{x}) = \beta_{sk}(t, \hat{x}, \hat{x})$$

для всех $(s, k) \in \mathbf{Z}_+$ и всех $(t, x, \hat{x}) \in T \times X \times X$.

2.3.2. Алгоритм синтеза субоптимального управления

На основании статьи [37] можно сформулировать следующий алгоритм синтеза субоптимального управления пучком траекторий. Предполагаем, что заданы максимальные количества S и K переключений в начальный и конечный моменты времени соответственно.

- 1). В конечный момент времени t_F находим образующие функции стоимости полуоптимального процесса $\beta_{0k}(t_F, x, \hat{x})$, $1 \leq k \leq K$, решая рекуррентное уравнение

$$\beta_{0k}(t_F, x, \hat{x}) = \beta_{0k-1}(t_F, g(x, \mathbf{v}_{0k}(t_F, \hat{x})), g(\hat{x}, \mathbf{v}_{0k}(t_F, \hat{x}))) + g^+(x, \mathbf{v}_{0k}(t_F, \hat{x})) \quad (2.25)$$

с начальным условием

$$\beta_{00}(t_F, x, \hat{x}) = F(x). \quad (2.26)$$

- 2). Для каждого момента $t \in [t_0, t_F]$ находим «нулевые» образующие по формуле

$$\beta_{0k}(t, x, \hat{x}) = f(x)(t_F - t) + \beta_{0k}(t_F, x, \hat{x}), \quad 0 \leq k \leq K. \quad (2.27)$$

- 3). Остальные образующие $\beta_{sk}(t, x, \hat{x})$, $1 \leq s \leq S, 0 \leq k \leq K$, получаем, решая рекуррентное уравнение

$$\beta_{sk}(t, x, \hat{x}) = \beta_{s-1k}(t, g(x, \mathbf{v}_{sk}(t, \hat{x})), g(\hat{x}, \mathbf{v}_{sk}(t, \hat{x}))) + g^+(x, \mathbf{v}_{sk}(t, \hat{x})) \quad (2.28)$$

с начальным условием (2.26).

- 4). Находим субоптимальную оценку текущего состояния системы по формуле

$$\hat{x}^c \in \underset{\hat{x} \in X}{\text{Arg min}} \int_{\sigma} \rho(t, x) \beta_{\hat{s}\hat{k}}(t, x, \hat{x}) dx, \quad (2.29)$$

где $\rho(t, x) = 1/\text{mes } \sigma$, $\hat{s} = \mathbf{s}(t, \hat{x}^c)$, $\hat{k} = \mathbf{k}(t, \hat{x}^c)$ – оптимальные количества оставшихся переключений в текущий t и конечный t_F моменты времени соответственно.

- 5). Находим субоптимальное в среднем позиционное управление $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{\hat{s}\hat{k}}(t, \hat{x}^c)$ для множества σ возможных в момент времени t состояний системы.

Алгоритм позволяет получить образующие $\beta_{sk}(t, x, \hat{x})$ функции $\beta(t, x, \hat{x})$ стоимости полуоптимального процесса и субоптимальную оценку начального состояния (2.29). Функция стоимости полуоптимального процесса находится по своим образующим

$$\beta(t, x, \hat{x}) = \beta_{\hat{s}\hat{k}}(t, x, \hat{x}), \quad (\hat{s}, \hat{k}) = \arg \min_{(s,k) \in \mathbb{Z}_+^2} \varphi_{sk}(t, x).$$

Получаемое управление является замкнутым по множеству возможных состояний. Его можно представить в виде сложной функции $(t, \sigma) \rightarrow \hat{x}^c \rightarrow \mathbf{v}_{\hat{s}\hat{k}}(t, \hat{x}^c)$.

2.3.3. Нахождение субоптимального программного управления

Опишем построение субоптимального пучка траекторий, исходящего из множества σ_0 . Согласно (2.29), определяем субоптимальную оценку \hat{x} возможных начальных состояний, а также оптимальные количества $\hat{s} = \mathbf{s}(t_0, \hat{x})$, $\hat{k} = \mathbf{k}(t_0, \hat{x})$ переключений в начальный и конечный моменты времени соответственно:

$$(\mathbf{s}, \mathbf{k}) = \arg \min_{(s, k) \in \mathbb{Z}_+^2} \varphi_{sk}(t_0, \hat{x}). \quad (2.30)$$

Строим траектории пучка. Для траектории, удовлетворяющей начальному условию $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in \sigma_0$ выполняем следующие действия.

1. В начальный момент времени t_0 : если $\hat{s} = 0$, то переключений в начальный момент времени нет и траектория постоянна: $x(t) = x_0$, $t_0 \leq t \leq t_F$;
если $\hat{s} > 0$, то последовательно для $i = 1, \dots, \hat{s}$ находим:

момент i -го переключения $t_i = t_0$;

оптимальное программное управление $\hat{v}_i = \mathbf{v}_{\hat{s}-i+1, \hat{k}}(t_i, \hat{x}_{i-1})$;

состояние после i -го переключения $x_i = g(x_{i-1}, \hat{v}_i)$;

2. На промежутке $t_0 \leq t \leq t_F$ траектория постоянна: $x(t) = x_s$, $t_0 \leq t \leq t_F$.

3. В конечный момент времени система совершает \hat{k} переключений. При $\hat{k} > 0$ последовательно для $j = 1, \dots, \hat{k}$ находим:

момент $(\hat{s} + j)$ -го переключения $t_{\hat{s}+j} = t_F$;

оптимальное программное управление $v_{\hat{s}+j} = \mathbf{v}_{\hat{s}\hat{k}-j+1}(t_{\hat{s}+j}, x_{\hat{s}+j-1})$;

состояние после $(\hat{s} + j)$ -го переключения $x_{\hat{s}+j} = g(x_{\hat{s}+j-1}, v_{\hat{s}+j})$.

Таким образом, находится субоптимальный пучок траекторий и субоптимальное программное управление. Наименьшее среднее значение функционала качества вычисляем по функции стоимости полуоптимального процесса

$$\min I = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) \beta_{\hat{s}\hat{k}}(t_0, x_0, \hat{x}) dx_0.$$

2.4. УСЛОВНОЕ СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ

Под условным оптимальным управлением одной траекторией понимается оптимальное программное управление при заданном количестве переключений в начальный и конечный моменты времени. Субоптимальное управление пучком траекторий при заданном количестве переключений будем называть *условным субоптимальным управлением*.

2.4.1. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления

Как показано в [37] оценку (2.29) можно улучшить, если использовать не оптимальное управление опорной траекторией, а условно оптимальное, т.е. оптимальное управление с фиксированным числом переключений. Поэтому алгоритм синтеза условного субоптимального управления повторяет пункты 1) – 3) алгоритма синтеза субоптимального управления (см. разд. 2.3.2), но отличается выбором оценки.

4). Определяем условную субоптимальную оценку текущего состояния системы

$$\hat{x}^* \in \operatorname{Argmin}_{\hat{x} \in X} \min_{(s,k) \in Z_+^2} \int_{\sigma} \rho(t, x) \beta_{sk}(t, x, \hat{x}) dx, \quad (2.31)$$

где $\rho(t, x) = 1/\operatorname{mes} \sigma$. Оптимальное количество переключений находится по формуле

$$(s^*, k^*) = \operatorname{arg} \min_{(s,k) \in Z_+^2} \int_{\sigma} \rho(t, x) \beta_{sk}(t, x, \hat{x}^*) dx. \quad (2.32)$$

5). Находим субоптимальное в среднем позиционное управление $\hat{v} = \nu_{s^*k^*}(t, \hat{x}^*)$ для множества σ возможных в момент времени t состояний системы.

Получаемое управление является замкнутым по множеству возможных состояний. Его можно представить в виде сложной функции $(t, \sigma) \rightarrow \hat{x}^* \rightarrow \nu_{s^*k^*}(t, \hat{x}^*)$.

2.4.2. Нахождение условного субоптимального программного управления

Опишем построение условного субоптимального пучка траекторий, исходящего из множества σ_0 . Согласно (2.31), определяем условную субоптимальную оценку \hat{x}_0^* возможных начальных состояний, а также оптимальные количества s^* , k^* переключений в начальный и конечный моменты времени по формуле (2.32). Алгоритм построения условного субоптимального пучка траекторий повторяет алгоритм построения субоптимального пучка, рассмотренного в разд. 2.3.3 и отличается оптимальными количествами s^* , k^* переключений и оценкой \hat{x}_0^* .

Таким способом находится условный субоптимальный пучок траекторий и условное субоптимальное программное управление. Наименьшее среднее значение функционала качества вычисляем по функции стоимости полуоптимального процесса

$$\min I = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) \beta_{s^*k^*}(t_0, x_0, \hat{x}_0^*) dx_0.$$

Если выполняется модифицированный (условный) принцип разделения [37]: «оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с условным оптимальным управлением одной траекторией», то условное субоптимальное управление совпадает с оптимальным в среднем управлением пучком траекторий.

2.5. УСЛОВНОЕ СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДИСКРЕТНЫХ НЕТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При наличии дискретных неточных измерений в результате каждого измерения определяется множество возможных в этот момент состояний системы. Поэтому после каждого измерения нужно находить новую условную субоптимальную оценку состояния системы, которую затем использовать для синтеза управления пучком.

2.5.1. Условное субоптимальное управление при наличии дискретных неточных измерений

Предполагается, что в результате m дискретных неточных измерений в моменты времени t^1, \dots, t^m получено множество σ_0^m возможных состояний (см. (2.15)) в момент t^m . Тогда оптимальное в среднем управление нужно формировать на промежутке $[t^m, t_F]$. Для этого надо использовать оценку состояния в момент t^m аналогичную (2.31)

$$\hat{x}^m \in \operatorname{Argmin}_{\hat{x} \in X} \min_{(s,k) \in Z_+^2} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta_{sk}(t^m, x, \hat{x}) dx, \quad (2.33)$$

где $\rho(t^m, x) = 1/(\operatorname{mes} \sigma_0^m)$. Оптимальное количество переключений находится по формуле

$$(s^m, k^m) = \arg \min_{(s,k) \in Z_+^2} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta_{sk}(t^m, x, \hat{x}) dx. \quad (2.34)$$

Теорема 2.1 (достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий стационарных САТ при наличии дискретных неточных измерений). Если существует последовательность функций $\beta_{sk}: T \times X \times X \rightarrow \mathbf{R}$, $s, k \in \mathbf{Z}_+$, удовлетворяющая на всей области определения уравнениям (2.25)–(2.28), то программное управление $\hat{v}(\cdot)$, оптимальное для траектории, исходящей в момент времени t^m из начального состояния (2.33) и имеющей (s^m, k^m) переключений (2.34), будет условным субоптимальным в среднем управлением пучком траекторий при наличии m дискретных неточных измерений в моменты времени t^1, \dots, t^m .

Действительно, после нахождения множества σ_0^m задача управления пучком после m измерений совпадает и задачей управления без измерений, но на меньшем промежутке времени $[t^m, t_F]$ функционирования системы управления после m измерений. Функции β_{sk} , удовлетворяющие уравнениям (2.25)–(2.28) на $[t^m, t_F]$, являются образующими функции β стоимости полуоптимального процесса.

В самом деле, пусть после m измерений оптимальный процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$, удовлетворяющий начальному условию $\hat{x}(t^m) = \hat{x}^m$, имеет S переключений в начальный момент времени t^m и K переключений в конечный момент времени t_F . Моменты переключений образуют неубывающую последовательность $\{t_1, \dots, t_N\}$: $t^m = t_1 = \dots = t_S < t_{S+1} = \dots = t_{S+K} = t_F$. Траектория $x(\cdot)$ полуоптимального процесса $(x(\cdot), \hat{v}(\cdot))$ получается при оптимальном управлении $\hat{v}(\cdot)$ и удовлетворяет начальному условию $x(t^m) = x^m$.

Вычислим значение функции $\beta_{SK}(t^m, x^m, \hat{x}^m)$ на полуоптимальном процессе $(x(\cdot), \hat{v}(\cdot))$. В начальный момент времени, согласно уравнению (2.28)

$$\beta_{SK}(t^m, x^m, \hat{x}^m) = \beta_{S-1K}(t_1, g(x^m, \hat{v}_1), g(\hat{x}^m, \hat{v}_1)) + g^+(x^m, \hat{v}_1),$$

где $\hat{v}_1 = \mathbf{v}_{SK}(t^m, \hat{x}^m)$ – оптимальное управление первым переключением. Учитывая уравнение (2.2), получаем

$$\beta_{SK}(t^m, x^m, \hat{x}^m) = \beta_{S-1K}(t_1, x_1, \hat{x}_1) + g^+(x^m, \hat{v}_1).$$

Отсюда последовательно находим

$$\begin{aligned} \beta_{SK}(t^m, x^m, \hat{x}^m) &= \beta_{S-1K}(t_1, x_1, \hat{x}_1) + g^+(x^m, \hat{v}_{1K}) = \dots = \\ &= \sum_{i=1}^S g^+(x_{i-1}, \hat{v}_i) + \beta_{0K}(t_S, x_S, \hat{x}_S), \end{aligned}$$

где $\hat{v}_i = \mathbf{v}_{S-i+1K}(t_i, \hat{x}_{i-1})$ – оптимальное управление i -м переключением.

На промежутке $[t^m, t_F]$, согласно уравнению (2.27), получаем

$$\beta_{0K}(t^m, x_S, \hat{x}_S) = f(x_S)(t_F - t^m) + \beta_{0K}(t_F, x_S, \hat{x}_S).$$

В конечный момент времени, согласно уравнению (2.25), находим

$$\beta_{0K}(t_F, x_S, \hat{x}_S) = \beta_{0K-1}(t_F, g(x_S, \hat{v}_{S+1}), g(\hat{x}_S, \hat{v}_{S+1})) + g^+(x_S, \hat{v}_{S+1}),$$

где $\hat{v}_{S+1} = \mathbf{v}_{0K}(t_F, \hat{x}_S)$ – оптимальное управление $(S+1)$ -м переключением. Учитывая уравнение (2.2), приходим к равенству

$$\beta_{0K}(t_F, x_S, \hat{x}_S) = \beta_{0K-1}(t_F, x_{S+1}, \hat{x}_{S+1}) + g^+(x_S, \hat{v}_{S+1}).$$

Решая это рекуррентное уравнение с терминальным условием (2.26), последовательно получаем

$$\begin{aligned}\beta_{0K}(t_F, x_S, \hat{x}_S) &= \beta_{0K-1}(t_F, x_{S+1}, \hat{x}_{S+1}) + g^+(x_S, \hat{v}_{S+1}) = \dots = \\ &= \sum_{i=1}^K g^+(x_{S+i-1}, \hat{v}_{S+i}) + F(x(t_F)),\end{aligned}$$

где $\hat{v}_{S+i} = v_{0K-i}(t_F, \hat{x}_{S+i})$ – оптимальное управление $(S+i)$ -м переключением, а $x(t_F) = x_{S+K}$ – терминальное состояние системы.

Таким образом, значение функции β^N , соответствующее промежутку $[t^m, t_F]$, находится по формуле

$$\beta_{SK}(t^m, x^m, \hat{x}^m) = \int_{t^m}^{t_F} f^0(x(t)) dt + \sum_{i=1}^{S+K} g^+(x_{i-1}, \hat{v}_i) + F(x(t_F)) = I(t^m, x^m, \hat{v}).$$

Следовательно, функция β_{SK} равна значению функционала $I(t^m, x^m, \hat{v})$, вычисленному на полуоптимальном процессе с S переключениями в начальный момент времени и K переключениями в конечный момент времени. Значит β_{SK} – это образующая функции стоимости.

Используем функцию стоимости для поиска субоптимального управления так же как в разд. 2.4 при решении задачи управления пучком без измерений. Минимизацию функционала по управлению v на множестве $\mathcal{V}^{\text{опт}}(t^m)$ оптимальных программных управлений для разных траекторий можно заменить выбором лучшей (опорной) траектории

$$I^c(t^m, \sigma_0^m, v) = \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) I(t^m, x, v) dx.$$

Иначе говоря, выполнить минимизацию

$$\min_{\hat{x} \in X} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta_{\mathbf{s}\mathbf{k}}(t^m, x, \hat{x}) dx,$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t^m, \hat{x})$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t^m, \hat{x})$. Полученную в результате минимизации субоптимальную оценку \hat{x} , как и в случае управления без измерений лучше заменить условной субоптимальной оценкой (2.33), так как

$$\min_{\hat{x} \in X} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta_{\mathbf{s}\mathbf{k}}(t^m, x, \hat{x}) dx \geq \min_{\hat{x} \in X} \min_{s \in \mathbb{Z}_+} \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta_{sk}(t^m, x, \hat{x}) dx.$$

Теорема доказана.

2.5.2. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений

Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений повторяет пункты 1 – 3 алгоритма синтеза условного субоптимального управления (см. разд. 2.4.1), но отличается выбором оценки, которая находится с учетом m дискретных неточных измерений в моменты времени t^1, \dots, t^m .

- 4). Определяем условную субоптимальную оценку состояния системы после m измерений по формуле (2.33).

Оптимальное количество переключений находится по формуле (2.34).

- 5). Находим условное субоптимальное в среднем позиционное управление $\hat{v} = \mathbf{v}_{s^m k^m}(t, \hat{x}^m)$ для множества σ возможных в момент времени t состояний системы.

Получаемое управление является замкнутым по множеству возможных состояний. Его можно представить в виде сложной функции $(t, \sigma) \rightarrow \hat{x}^m \rightarrow \mathbf{v}_{s^m k^m}(t, \hat{x}^m)$.

2.5.3. Нахождение условного субоптимального программного управления при наличии дискретных неточных измерений

Опишем построение условного субоптимального пучка траекторий, исходящего из множества σ_0^m после m дискретных неточных измерений в моменты времени t^1, \dots, t^m . Согласно (2.33), определяем субоптимальную оценку \hat{x}_0^m возможных начальных состояний, а также оптимальные количества s^m, k^m переключений в момент времени t^m и конечный момент времени t_F по формуле (2.34).

Строим траектории пучка. Для траектории, удовлетворяющей начальному условию $x(t^m) = x_0^m, x_0^m \in \sigma_0^m$ выполняем следующие действия.

1. В момент времени t^m : если $s^m = 0$, то переключений в начальный момент времени нет и траектория постоянна: $x(t) = x_0^m, t^m \leq t \leq t_F$;
если $s^m > 0$, то последовательно для $i = 1, \dots, s^m$ находим:
момент i -го переключения $t_i = t^m$;
оптимальное программное управление $\hat{v}_i = \mathbf{v}_{s^{m-i+1} k^m}(t_i, \hat{x}_{i-1}^m)$;
состояние после i -го переключения $x_i^m = g(x_{i-1}^m, \hat{v}_i)$;
2. На промежутке $t^m \leq t \leq t_F$ траектория постоянна: $x(t) = x_s^m, t^m \leq t \leq t_F$.
3. В конечный момент времени система совершает k^m переключений. При $k^m > 0$ последовательно для $j = 1, \dots, k^m$ находим:

момент $(s^m + j)$ -го переключения $t_{s^m + j} = t_F$;

оптимальное программное управление $v_{s^m + j} = v_{s^m k^{m-j+1}}(t_{s^m + j}, \hat{x}_{s^m + j-1}^m)$;

состояние после $(s^m + j)$ -го переключения $x_{s^m + j}^m = g(x_{s^m + j-1}^m, v_{s^m + j})$.

Таким образом, находится условный субоптимальный пучок траекторий и условное субоптимальное программное управление. Наименьшее среднее значение функционала качества вычисляем по функции стоимости полуоптимального процесса

$$\min I = \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x) \beta_{s^m k^m}(t^m, x, \hat{x}^m) dx. \quad (2.35)$$

Если выполняется модифицированный (условный) принцип разделения [37]: «оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с условным оптимальным управлением одной траекторией», то условное субоптимальное управление совпадает с оптимальным в среднем управлением пучком траекторий.

2.6. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДИСКРЕТНЫХ НЕТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В [37] показано, что в задаче оптимального управления пучком траекторий линейной стационарной САТ (2.9) с квадратичным функционалом качества (2.10) справедлив сформулированный выше условный принцип разделения. Напомним, что для нестационарной линейно-квадратичной задачи [27] этот принцип не выполняется.

2.6.1. Алгоритм синтеза оптимального позиционного управления

В линейно-квадратичной задаче управления САТ образующие φ_{sk} функции цены имеют вид [27]

$$\varphi_{sk}(t, x) = \frac{1}{2} x^T \Phi_{sk}(t) x + \gamma_{sk}(t), \quad (2.36)$$

где Φ_{sk} – симметрическая неотрицательно определенная матрица порядка n , γ_{sk} – скалярная функция, $s, k \in \mathbf{Z}_+$; $x \in \mathbf{R}^m$, $v_i \in \mathbf{R}^q$. Поэтому алгоритм синтеза оптимального позиционного управления (см. разд. 2.2.2) меняется следующим образом.

1). В конечный момент времени t_F решаем матричное и скалярное уравнения

$$\Phi_{0k-1}(t_F) = A^T \Phi_{0k-1} A + D - A^T \Phi_{0k-1} A, \quad \gamma_{0k}(t_F) = \gamma_{0k-1} + \lambda, \quad k \in \mathbf{N},$$

с начальными условиями

$$\Phi_{00}(t_F) = F, \quad \gamma_{00}(t_F) = 0. \quad (2.37)$$

- 2). Определяем условное оптимальное позиционное управление при первом переключении из k оставшихся

$$v_{0k}(t_F, x) = -P_{0k-1}B^T\Phi_{0k-1}, \quad (2.38)$$

где $P_{0k-1}(t_F) = [G + B^T\Phi_{0k-1}(t_F)B]^{-1}$.

- 3). Для каждого момента $t \in [t_0, t_F]$ находим «нулевые» матрицы и свободные члены образующих по формуле

$$\Phi_{0k}(t) = (t_F - t)C + \Phi_{0k}(t_F), \quad \gamma_{0k}(t) = \gamma_{0k}(t_F). \quad (2.39)$$

- 4). Остальные матрицы Φ_{sk} и свободные члены γ_{sk} , $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbf{Z}_+$, получаем, решая рекуррентные уравнения

$$\Phi_{sk}(t) = A^T\Phi_{s-1k}A + D - A^T\Phi_{s-1k}BP_{s-1k}B^T\Phi_{s-1k}A, \quad \gamma_{sk}(t) = \gamma_{s-1k} + \lambda$$

с начальными условиями (2.39).

- 5). Определяем условное оптимальное позиционное управление при первом переключении из $s + k$ оставшихся

$$v_{sk}(t, x) = -P_{s-1k}B^T\Phi_{s-1k}Ax,$$

где $P_{s-1k}(t) = [G + B^T\Phi_{s-1k}(t)B]^{-1}$.

Алгоритм позволяет получить образующие $\varphi_{sk}(t, x)$ функции цены $\varphi(t, x)$ и условные оптимальные позиционные управления $v_{sk}(t, x)$, т.е. оптимальные управления при заданном количестве оставшихся переключений. Функция цены находится по своим образующим

$$\varphi(t, x) = \min_{(s,k) \in \mathbf{Z}_+^2} \left(\frac{1}{2}x^T\Phi_{sk}(t)x + \gamma_{sk}(t) \right).$$

Оптимальное количество переключений вычисляется по формуле

$$(\mathbf{s}, \mathbf{k}) = \arg \min_{(s,k) \in \mathbf{Z}_+^2} \left(\frac{1}{2}x^T\Phi_{sk}(t)x + \gamma_{sk}(t) \right).$$

2.6.2. Алгоритм синтеза субоптимального управления

В линейно-квадратичной задаче управления САТ образующие β_{sk} функции β стоимости полуоптимального процесса имеют вид [27]

$$\beta_{sk}(t, x, \hat{x}) = \frac{1}{2}x^T\Phi_{sk}(t)x + \frac{1}{2}(x - \hat{x})^T\Psi_{sk}(t)(x - \hat{x}) + \gamma_{sk}(t), \quad (2.40)$$

где Ψ_{sk} – симметрическая неотрицательно определенная матрица порядка n , $s, k \in \mathbf{Z}_+$; Матрица Φ_{sk} и скалярная функция γ_{sk} в (2.40) такие же, как в (2.36). Это обеспечивает равенство $\varphi_{sk}(t, x) = \beta_{sk}(t, x, x)$. Поэтому нужно искать только матрицы Ψ_{sk} и алгоритм синтеза субоптимального управления (см. разд. 2.3.2) меняется следующим образом.

1). В конечный момент времени t_F решаем матричное рекуррентное уравнение

$$\Psi_{0k}(t_F) = A^T \Psi_{0k-1} A + A^T \Phi_{0k-1} B P_{0k-1} B^T \Phi_{0k-1} A, \quad k \in \mathbb{N},$$

с начальным условием

$$\Psi_{00}(t_F) = 0.$$

2). Для каждого момента $t \in [t_0, t_F]$ находим «нулевые» матрицы образующих

$$\Psi_{0k}(t) = \Psi_{0k}(t_F), \quad k \in \mathbf{Z}_+. \quad (2.41)$$

3). Остальные матрицы Ψ_{sk} , $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbf{Z}_+$, получаем, решая рекуррентное уравнение

$$\Psi_{sk}(t) = A^T \Psi_{s-1k} A + A^T \Phi_{s-1k} B P_{s-1k} B^T \Phi_{s-1k} A, \quad s \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbf{Z}_+,$$

с начальным условием (2.41).

4). Находим субоптимальную оценку текущего состояния системы по формуле

$$\hat{x}^c \in \underset{\hat{x} \in X}{\text{Arg min}} \int_{\sigma} \rho(t, x) \beta_{\hat{s}\hat{k}}(t, x, \hat{x}) dx, \quad (2.42)$$

где $\rho(t, x) = 1/\text{mes } \sigma$, $\hat{s} = \mathbf{s}(t, \hat{x}^c)$, $\hat{k} = \mathbf{k}(t, \hat{x}^c)$ – оптимальные количества оставшихся переключений в текущий t и конечный t_F моменты времени соответственно.

5). Находим субоптимальное в среднем позиционное управление $\hat{v} = \mathbf{v}_{\hat{s}\hat{k}}(t, \hat{x}^c)$ для множества σ возможных в момент времени t состояний системы, которая совпадает с оптимальным управлением (2.62.) для траектории, исходящей из состояния (2.42).

Получаемое управление является замкнутым по множеству возможных состояний. Его можно представить в виде сложной функции $(t, \sigma) \rightarrow \hat{x}^c \rightarrow \mathbf{v}_{\hat{s}\hat{k}}(t, \hat{x}^c)$.

2.6.3. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления

Как показано в [37] оценку (2.29) можно улучшить, если использовать не оптимальное управление опорной траекторией, а условно оптимальное, т.е. оптимальное управление с фиксированным числом переключений. Поэтому алгоритм синтеза условного субоптимального управления повторяет пункты 1) – 3) алгоритма синтеза субоптимального управления (см. разд. 2.6.2), но отличается выбором оценки.

4). Определяем условную субоптимальную оценку текущего состояния системы по формуле (2.31), где функция $\beta_{sk}(t, x, \hat{x})$ имеет вид (2.40). Оптимальное количество переключений находится по формуле (2.32).

5). Находим субоптимальное в среднем позиционное управление $\hat{v} = \mathbf{v}_{s^*k^*}(t, \hat{x}^*)$ для множества σ возможных в момент времени t состояний системы.

Получаемое управление является замкнутым по множеству возможных состояний. Его можно представить в виде сложной функции $(t, \sigma) \rightarrow \hat{x}^* \rightarrow \boldsymbol{v}_{s^*k^*}(t, \hat{x}^*)$.

2.6.4. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений

Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений повторяет пункты 1 – 3 алгоритма синтеза условного субоптимального управления (см. разд. 2.6.3), но отличается выбором оценки, которая находится с учетом m дискретных неточных измерений в моменты времени t^1, \dots, t^m .

- 4). Определяем условную субоптимальную оценку состояния системы после m измерений по формуле (2.33), где функция $\beta_{sk}(t, x, \hat{x})$ имеет вид (2.40).

Оптимальное количество переключений находится по формуле (2.34).

- 5). Находим условное субоптимальное в среднем позиционное управление $\hat{v} = \boldsymbol{v}_{s^*k^*}^m(t, \hat{x}^m)$ для множества σ возможных в момент времени t состояний системы.

Получаемое управление является замкнутым по множеству возможных состояний. Его можно представить в виде сложной функции $(t, \sigma) \rightarrow \hat{x}^m \rightarrow \boldsymbol{v}_{s^*k^*}^m(t, \hat{x}^m)$.

Процедура нахождения условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений проводится аналогично процедуре, описанной в разд. 2.5.3.

2.7. ПРИМЕР

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимального управления пучком траекторий стационарной САТ:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i^1 &= \hat{x}_{i-1}^1 + h\hat{x}_{i-1}^2, \\ \hat{x}_i^2 &= \hat{x}_{i-1}^2 + v_i, \\ I &= \int_0^1 \frac{1}{2}[x^2(t)]^2 dt + \sum_{i=1}^N \left(\lambda + \frac{\mu}{2} v_i^2 \right) + \frac{1}{2}[x^1(1)]^2 + \frac{1}{2}[x^2(1)]^2,\end{aligned}$$

где $x_i = (x_i^1, x_i^2)^T = x(t_i)$ – вектор состояния системы, $v_i = v(t_i)$ – управление в момент переключения t_i соответственно, причем $x_i \neq x_{i-1}$, $x_i \in R^2$, $v_i \in R$, $i = 1, \dots, N$; параметр $h = 0.5$. Тактовые моменты времени, в которые система совершает переключения, образуют неубывающую конечную последовательность: $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq 1$. Параметры $\lambda = 0.05$ и $\mu = 1$ определяют затраты на каждое переключение. Количество N переключений и сами

моменты переключений заранее не заданы и находятся в результате оптимизации. Начальное состояние системы x_0 точно не известно, а известно множество

$$\sigma_0 = \{(x^1, x^2) | 0.75 \leq x^1 \leq 1.25; 1.5 \leq x^2 \leq 2.5\}$$

возможных начальных состояний. Требуется найти:

- а) условное субоптимальное в среднем (с постоянной весовой функцией $\rho(x^1, x^2) \equiv 0.25$) управление пучком траекторий, исходящих из множества σ_0 ;
- б) оптимальное в среднем управление при одном неточном измерении момент времени $t^1 = 0$ координаты $x_2 \in [0, 1]$. Координата x_1 не измеряется, т.е. «измеренное» множество представляет собой полосу $\sigma^1 = \{(x^1, x^2) | 0 \leq x^2 \leq 1\}$;

По сравнению с общей постановкой задачи (2.8), (2.9) имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \mu.$$

Образующие $\beta_{sk}(t, x, \hat{x})$ позиционного отклонения цены находятся в виде квадратичной функции (2.31) с матрицами Φ_{sk} , Ψ_{sk} и скалярной величиной γ_{sk} , удовлетворяющими уравнениям (2.35), (2.34), (2.36), (2.38).

Если множество возможных состояний представляет собой параллелограмм с основаниями, параллельными оси абсцисс, то при переключениях множество возможных состояний остается параллелограммом того же вида, причем его высота не меняется. Для его описания достаточно использовать координаты вершин.

Условное субоптимальное в среднем управление (а)) совпадает с условным оптимальным управлением траекторией, исходящей из центра $\hat{x}^* = \hat{x}_{sk}^* = (1 \ 1)^T$ квадрата σ_0 . Наилучшее количество переключений при этом находится по формуле (2.32) (при $\rho_0(x) \equiv 1$). В результате целочисленной минимизации получаем $\hat{s}^* = 2$, $\hat{k}^* = 6$, т.е. условное субоптимальное в среднем управление имеет два переключения в начальный момент времени и шесть – в конечный. Это программное управление находится при помощи позиционного управления (2.33), (2.37): $v_1 = -1.055$, $v_2 = -0.858$, $v_3 = -0.574$, $v_4 = -0.378$, $v_5 = -0.181$, $v_6 = 0.016$, $v_7 = 0.212$, $v_8 = 0.409$. Минимальное среднее значение функционала $\min I^c = 2.6085$. На рис. 2.1 представлены оптимальная траектория и условная субоптимального в среднем траектория, исходящие из центра \hat{x}^* , а также множества возможных начальных и конечных состояний системы соответственно. Оптимальная траектория, исходящая из центра σ_0 , имеет пять переключений в начальный момент времени (показаны синими круглыми маркерами) и одиннадцать переключений в конечный момент времени (отмечены голубыми квадратными маркерами). Траектория, соответствующая условному субоптимальному в среднем управлению, имеет 2 переключения в начальный момент времени (сиреневые

круглые маркеры) и 6 переключений в конечный момент времени (отмечены красными квадратными маркерами).

Согласно теореме 3, оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с найденным условным субоптимальным управлением. Подчеркнем, что это совпадение именно с условным субоптимальным управлением, а не с оптимальным управлением изолированной траекторией. Условная субоптимальная траектория (красно-сиреневая линия на рис. 2.1) не совпадает с оптимальной траекторией (сине-голубая линия), исходящими из одного начального состояния. Это показывает, что обычный (а не условный) принцип разделения не выполняется для рассматриваемых линейно-квадратичных задач.

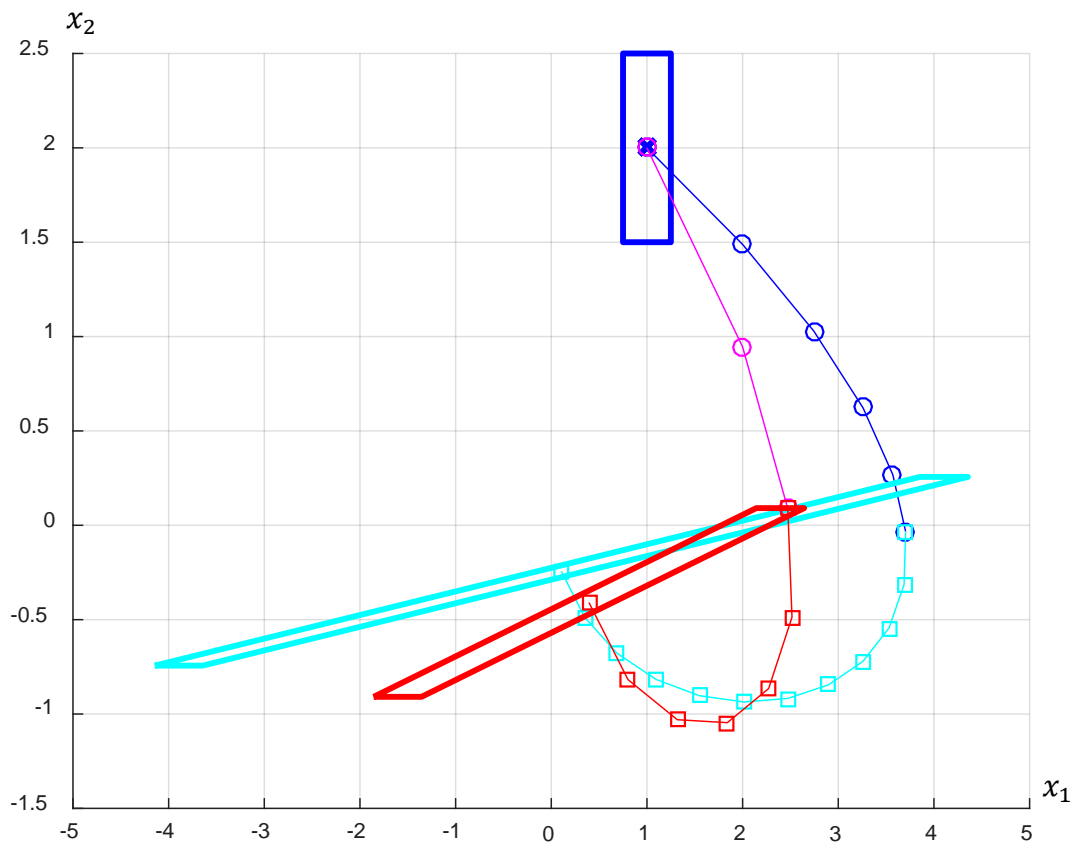


Рис. 2.1.

В момент $t = 0.5$ производится неточное измерение скорости x_2 (б). Координата x_1 не измеряется. Расчеты выполнялись для «измеренного» промежутка $x_2 \in [0,1]$. Этот промежуток выделен сиреневыми прямыми на рис. 2.2. В этом случае оптимальное в среднем управление после измерения имеет одно переключение в момент измерения и семь переключений в конечный момент ($s^1 = 1$; $k^1 = 7$), а управление: $v_1 = -0.449$, $v_2 = -0.402$, $v_4 = -0.152$, $v_5 = -0.027$, $v_6 = 0.097$, $v_7 = 0.222$, $v_8 = 0.347$. Значение функционала с учетом измерения $\min I^c = 2.2565$. По сравнению с управлением без измерения значение функционала уменьшилось на 12.35%.

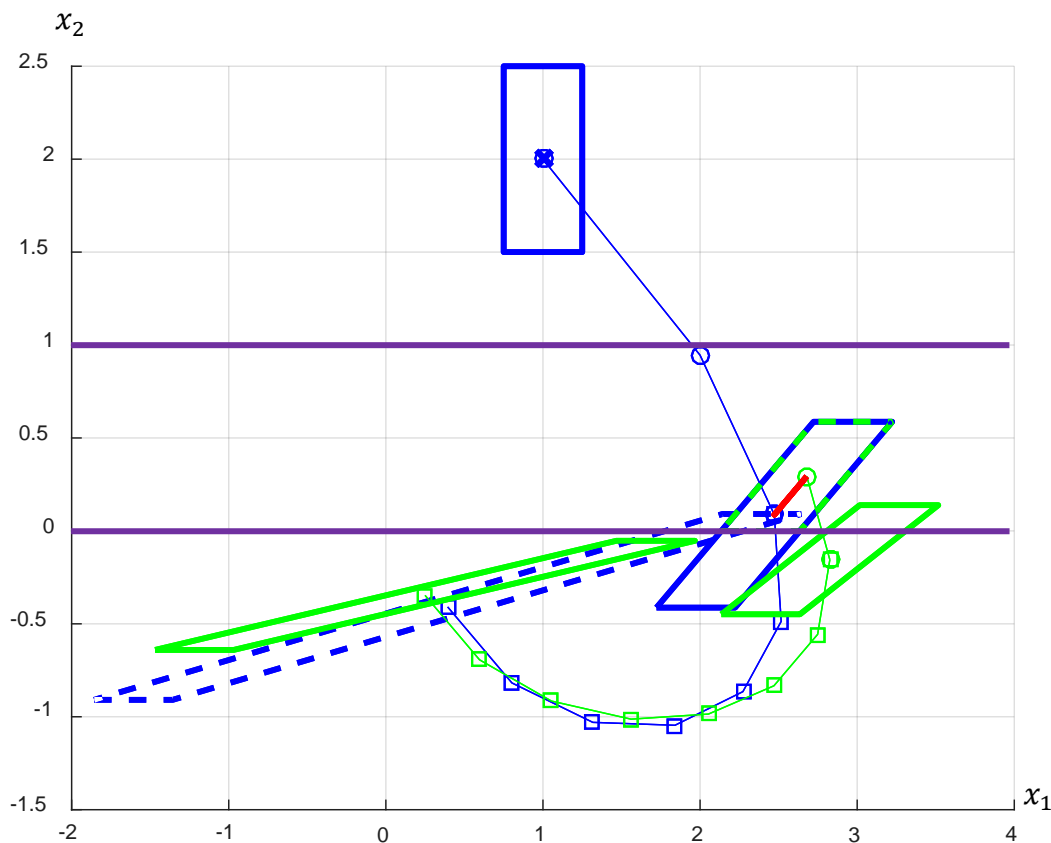


Рис. 2.2.

ВЫВОДЫ

1. Доказаны достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий стационарных САТ при наличии дискретных неточных измерений.
2. На основе достаточных условий оптимальности стационарных САТ разработаны:
 - алгоритм синтеза оптимального позиционного управления;
 - алгоритм синтеза субоптимального управления пучками траекторий;
 - алгоритм синтеза условного субоптимального управления пучками траекторий;
 - алгоритм синтеза условного субоптимального управления пучками траекторий при наличии дискретных неточных измерений.
3. Для линейно-квадратичных задач управления стационарными САТ разработаны:
 - алгоритм синтеза оптимального позиционного управления;
 - алгоритм синтеза оптимального в среднем управления пучками траекторий;
 - алгоритм синтеза оптимального в среднем управления пучками траекторий при наличии дискретных неточных измерений.
4. Решена линейно-квадратичная задача синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий стационарных САТ второго порядка. Проведен сравнительный анализ разработанных алгоритмов управления.

3. СУБОПТИМАЛЬНАЯ В СРЕДНЕМ СТАБИЛИЗАЦИЯ СПУТНИКА ПРИ НАЛИЧИИ ДИСКРЕТНЫХ НЕТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассматривается задача активной стабилизации колебаний искусственного спутника при помощи реактивных двигателей малой тяги. Спутник движется по круговой орбите и в плоскости орбиты совершает колебания вокруг центра масс. Для минимизации расхода топлива используется релейное управление. Состояние объекта управления точно неизвестно, однако оно уточняется в результате дискретных неточных измерений. Поэтому задача стабилизации спутника рассматривается как задача оптимального в среднем управления пучком траекторий. Погрешность стабилизации характеризуется средним значением интеграла энергии. С учетом реализуемой точности исполнения команд включения и выключения двигателей, решаемая задача условной минимизации становится дискретной. Для управления пучком применяется оптимальное управление одной траекторией. Такой подход основан на принципе разделения, что приводит к субоптимальному управлению пучком, которое оказывается приемлемым для практики.

3.1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Движение спутника вокруг Земли происходит по круговой орбите. В плоскости орбиты он совершает вращения вокруг центра масс. Для гашения этих колебаний используются реактивные двигатели, расположенные на штанге (рис.3.1).

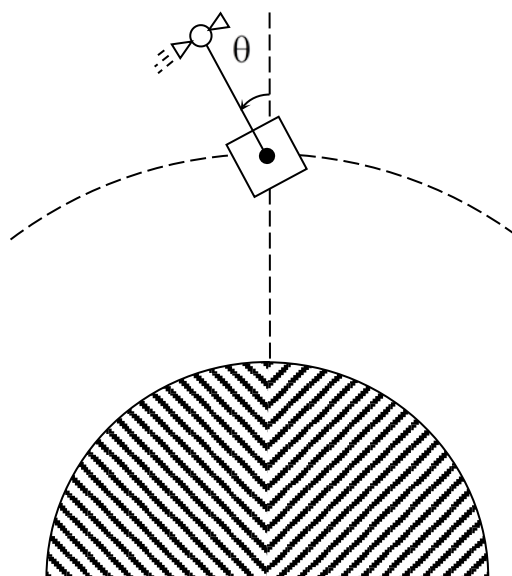


Рис.3.1.

Математическая модель колебаний спутника в плоскости круговой орбиты имеет вид [13 с. 64]:

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t), \quad \dot{\omega}(t) = -K \sin 2\theta + Lu(t), \quad (3.1)$$

где θ – угол отклонения штанги от местной вертикали; ω – угловая скорость вращения спутника; время $t \in [0, T]$, T – момент окончания процесса управления. Тяга двигателя u направлена перпендикулярно штанге в плоскости орбиты и ограничена максимальным значением U : $|u| \leq U$. Коэффициенты K и L определяются параметрами орбиты и конструкцией аппарата:

$$K = \frac{3(A - C)}{2B} \Omega^2, \quad L = \frac{l}{B}.$$

Здесь A, B, C – моменты инерции спутника (причем $A = B$, т.е. спутник осесимметрический), l – длина штанги, $\Omega = \sqrt{GMR^{-3}}$ – угловая скорость движения спутника по круговой орбите, G – гравитационная постоянная, M – масса Земли, R – радиус круговой орбиты. Кусочно-непрерывная функция $u: [0, T] \rightarrow [-U, U]$ определяет режим работы двигателя (при $u = 0$ двигатель выключен, а при $u \neq 0$ – включен), а также направление тяги (в одном из двух противоположных направлений $u > 0$, в другом $u < 0$).

3.1.1. Задача оптимальной стабилизации с минимальным расходом топлива

Начальное и конечное состояния системы (3.1) заданы:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \theta(T) = 0, \quad \omega(T) = 0. \quad (3.2)$$

Момент T окончания процесса стабилизации определяется достижением положения равновесия (3.2). Предполагаем, что секундный расход топлива пропорционален тяге двигателя, т.е. затраты топлива вычисляются по формуле

$$I = \int_0^T \mu |u(t)| dt, \quad (3.3)$$

где μ – положительный коэффициент пропорциональности. Требуется найти оптимальное управление, минимизирующее этот функционал.

3.1.2. Задача оптимальной стабилизации с учетом неэффективного расхода топлива

Будем учитывать перерасход топлива при включении и выключении двигателя. При запуске реактивного двигателя максимальная тяга достигается не сразу, часть топлива тратится на переходной процесс. В некоторых конструкциях топливо используется также для запуска и работы турбонасосного агрегата. Кроме того, при выключении двигателя часть топлива

дожигается менее эффективно, чем при номинальном режиме. В газовых двигателях происходят аналогичные затраты рабочего тела.

Чтобы учесть перерасход топлива при включении и выключении двигателя, в [5] предлагается управление представить в виде кусочно-постоянной функции $u(t) = Uy(t)$, $y(t) \in \{-1, 0, 1\}$, $0 \leq t \leq T$. Новое управление $y(t) = \text{sign } u(t)$, $0 \leq t \leq T$, принимает три значения: при $y = 0$ двигатель выключен, при $y = \pm 1$ – включен на максимальную тягу (в одном из двух противоположных направлений). Качество процесса управления предлагается оценивать следующим функционалом [40]:

$$I = \int_0^T \mu U |y(t)| dt + \sum_{\tau} \lambda, \quad (3.4)$$

где $\lambda > 0$ – величина затрат топлива при включении и выключении двигателя. Суммирование в (3.4) происходит по всем моментам τ включения и выключения двигателя, т.е. по всем точкам разрыва функции $y(\cdot)$. Параметры λ , μ в [4,11] выбирались равными единице. При этом получается, что примерно 2.25% топлива при каждом включении или выключении расходуется неэффективно.

Сформулированная задача минимизации (3.4) при $\lambda = 0$ фактически совпадает с задачей минимизации (3.3). Отличие заключается в том, что класс кусочно-постоянных управлений в поставленной задаче уже класса кусочно-непрерывных управлений в задаче, рассматриваемой в разд. 3.1.1. Однако в [40, 49] при помощи принципа максимума доказано, что оптимальное управление кусочно-постоянное. Поэтому сужение класса допустимых управлений в разд. 3.1.2 не влияет на решение задачи, так как оптимальное управление содержится в этом классе.

3.1.3. Задача оптимальной в среднем стабилизации в условиях неопределенности

Рассмотрим задачу оптимального управления спутником в условиях параметрической неопределенности. Предполагается, что начальное состояние (θ_0, ω_0) системы (3.1) точно не известно, а известно множество возможных начальных состояний

$$\sigma_0 = [\bar{\theta}_0 - \Delta\theta, \bar{\theta}_0 + \Delta\theta] \times [\bar{\omega}_0 - \Delta\omega, \bar{\omega}_0 + \Delta\omega]. \quad (3.5)$$

Центр $\bar{s} = (\bar{\theta}, \bar{\omega})$ и длины $2\Delta\theta$, $2\Delta\omega$ сторон прямоугольника (3.5) заданы. Траектории системы (3.1), исходящие из множества (3.5), образуют пучок. Обозначим через $\sigma(t)$ сечение этого пучка в момент времени t , т.е. $\sigma(t)$ – множество возможных в момент t состояний системы. Качество управления пучком оценивается терминальным функционалом

$$I_0 = \frac{1}{\text{mes } \sigma(T)} \iint_{\sigma(T)} h(\theta, \omega) d\theta d\omega, \quad (3.6)$$

где $\text{mes } \sigma$ – мера множества σ , а h – интеграл энергии [1]:

$$h(\theta, \omega) = 0.5k_B(\omega^2 + K \sin^2 \theta).$$

Постоянная k служит масштабным коэффициентом. Функционал (3.6) представляет собой среднее значение интеграла энергии на множестве $\sigma(T)$ возможных состояний системы в конечный момент времени T . Момент окончания процесса управления заранее не задан и определяется в ходе минимизации. Требуется найти оптимальное в среднем управление $u(\cdot)$ и оптимальный конечный момент времени T , минимизирующие функционал (3.6).

Поставленная задача является новой. В [101] рассматривалась задача, в которой качество управления пучком траекторий оценивалось средним значением функционала

$$I = \int_0^{t_1} \mu U|y(t)| dt + \sum_{\tau} \lambda + \lambda_1 \theta^2(t_1) + \lambda_2 \omega^2(t_1), \quad (3.7)$$

где t_1 – заданный момент окончания процесса управления, μ – некоторый весовой коэффициент, а $\lambda_1 = 9 \cdot 10^4$, $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{10}$ – заданные коэффициенты штрафных слагаемых. Для пучка траекторий учет терминальных ограничений при помощи штрафных слагаемых кажется не оправданным. Все траектории пучка, за исключением, быть может, одной, не удовлетворяют терминальным ограничениям. Поэтому штрафные слагаемые в (3.7) при любом управлении оказываются значительно больше, чем расход топлива и количество включения двигателя. Значит, выбором управления фактически минимизируются штрафы, а не расход топлива.

3.1.4. Задача оптимальной в среднем стабилизации при наличии дискретных неточных измерений

Пусть в заданные моменты времени t_1, \dots, t_N , $t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_F$, производятся неточные измерения состояния системы (3.1), т.е. в каждый момент t_i , $i = 1, \dots, N$, известно множество

$$\sigma_0 = [\bar{\theta}_i - \Delta\theta, \bar{\theta}_i + \Delta\theta] \times [\bar{\omega}_i - \Delta\omega, \bar{\omega}_i + \Delta\omega], \quad (3.8)$$

«измеренных» состояний системы. Величины $\Delta\theta$, $\Delta\omega$ определяют погрешности измерений, при этом не исключается случай точных измерений. Например, если $\Delta\theta = 0$, то величина угла отклонения штанги известна точно: $\theta(t_i) = \bar{\theta}_i$. После каждого измерения множество возможных состояний системы необходимо уточнить. Пересекая «измеренное» в момент t_i множество (3.8) и множество $\sigma(t_i)$ возможных состояний, получаем новое апостериорное

множество состояний системы $\sigma_{i-1}(t_i) \cap \sigma_i$. Дальнейшая эволюция пучка траекторий происходит из этого пересечения. Обозначим через $\sigma_i(t)$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, сечение пучка траекторий на указанном промежутке (после i -го измерения). Тогда учет измерений можно представить последовательностью пересечений:

$$\sigma_0(0) = \sigma_0, \quad \sigma_1(t_1) = \sigma_0(t_1) \cap \sigma_1, \dots, \sigma_N(t_N) = \sigma_{N-1}(t_N) \cap \sigma_N. \quad (3.9)$$

Качество управления пучком оценивается функционалом (3.6)

$$I_N = \frac{1}{\text{mes } \sigma_N(T)} \iint_{\sigma_N(T)} h(\theta, \omega) d\theta d\omega, \quad (3.10)$$

записанным для пучка с измерениями (3.9).

Принятая модель измерений вполне естественная – каждая координата определяется с некоторой погрешностью, а множество (3.8) «измеренных» состояний является прямоугольником. На практике используются и другие модели измерений, приводящие, например, к эллипсоидам [128] или эллипсам в плоском случае. В стохастических системах модели измерений более сложные.

3.2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ

Применение принципа максимума к задаче (3.3) минимизации расхода топлива [40, 50] приводит к оптимальному релейному управлению: на активных участках тяга двигателя максимальная, на пассивных участках тяга нулевая. Активные участки располагаются в окрестности вертикального положения штанги, когда угол отклонения от местной вертикали близок к нулю, а модуль скорости вращения максимальный. В окрестности этого положения торможение происходит наиболее эффективно.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров:

$$A = B = 20000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad C = 6000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad R = 6871300 \text{ м}; \quad K = 1.29006 \cdot 10^{-6} \text{ Н}(\text{кг} \cdot \text{м})^{-1}; \\ L = 5 \cdot 10^{-5} (\text{кг} \cdot \text{м})^{-1}; \quad L = 0.1 \text{ Н}; \quad \mu = 10; \quad k = 10^5; \quad \theta_0 = -0.5 \text{ рад}; \quad \omega_0 = 0 \text{ рад/с}. \quad (3.11)$$

Интегрирование уравнений движения выполнялось методом Рунге – Кутты 4-го порядка с шагом 1 с. Для учета терминальных ограничений были синтезированы траектории последнего активного участка активного при $y = 1$ или $y = -1$, попадающие в положение равновесия. Эти траектории являются линиями переключения – на них происходит последнее включение двигателя при оптимальном управлении. Последнее выключение двигателя выполняется в конечный момент времени при достижении положения равновесия (3.2).

Рассматривались пять схем стабилизации – по количеству активных участков от одного до пяти. Расчеты показали, что оптимальное суммарное время работы двигателя одно и то же

для всех схем и составляет 154 с. Минимальное значение функционала (3.3) при этом $\min I = 154$ (у.е. массы топлива). Таким образом, эффект экономии топлива при увеличении количества активных участков с одновременным уменьшением их продолжительности в решаемой задаче не наблюдается. Заметим, что «эффект Гурмана» [48], заключающийся в минимизации суммарного расхода топлива при импульсных включениях двигателя, в рассматриваемом варианте невозможно воспроизвести. Из-за ограниченной точности включения и выключения двигателя получить импульсный режим нельзя, а его грубое приближение (с точностью до 1 с) не дает желаемого эффекта.

Для обнаружения «эффекта Гурмана» были проведены расчеты с шагом интегрирования и точностью включения и выключения двигателя, равными 0.1 с. В табл.1 представлены результаты расчетов для траекторий с разным количеством активных участков. Как видим, при увеличении числа активных участков от одного до четырех суммарное время работы двигателя уменьшается на 0.4 с. После этого время работы перестает уменьшаться и остается постоянным от четырех до семи активных участков включительно. Видимо, для получения эффекта при большем числе активных участков погрешность выполнения команд включения и выключения двигателя нужно еще уменьшать. Однако заметного с практической точки зрения влияния на экономию топлива это не окажет. Экономия топлива в результате такого повышения точности составляет примерно 0.25% от общих затрат. Возможно, эффект усилится, если провести оптимизацию представленных в табл.1 траекторий. Отметим еще, что рост количества активных участков приводит к увеличению продолжительности времени стабилизации от 1020 с до 13046 с (см. табл.1), что может быть неприемлемо с практической точки зрения. Точность стабилизации характеризуется значениями интеграла энергии в конечный момент времени, приведенными в табл.1.

Таблица 1. Характеристики управления одной траекторией

Количество активных участков	Суммарное время работы двигателя, с	Значение интеграла энергии, 10^{-5} Нм	Время стабилизации, с
1	154.4	2.66089	1120.1
2	154.1	4.71501	3040.0
3	154.1	0.17377	4997.9
4	154.0	4.73010	7026.1
5	154.0	3.12561	9032.5
6	154.0	4.36145	11094.9
7	154.0	1.96481	13046.2

Все дальнейшие расчеты выполнялись с ограничением точности и шагом интегрирования равными 1 с, так как повышение точности работы двигателя мало влияет на экономию топлива. На рис. 3.2 изображена оптимальная траектория с одним активным участком, а на рис. 3.3 показана оптимальная траектория с двумя активными участками соответственно (шаг интегрирования 1 с). Таким образом, минимальный расход топлива может быть получен на траекториях с разным количеством активных участков, но с одинаковой суммарной продолжительностью работы двигателя, которая составляет 154 с. Схема полета с одним активным участком предпочтительнее других, так как дает наименьшее время стабилизации.

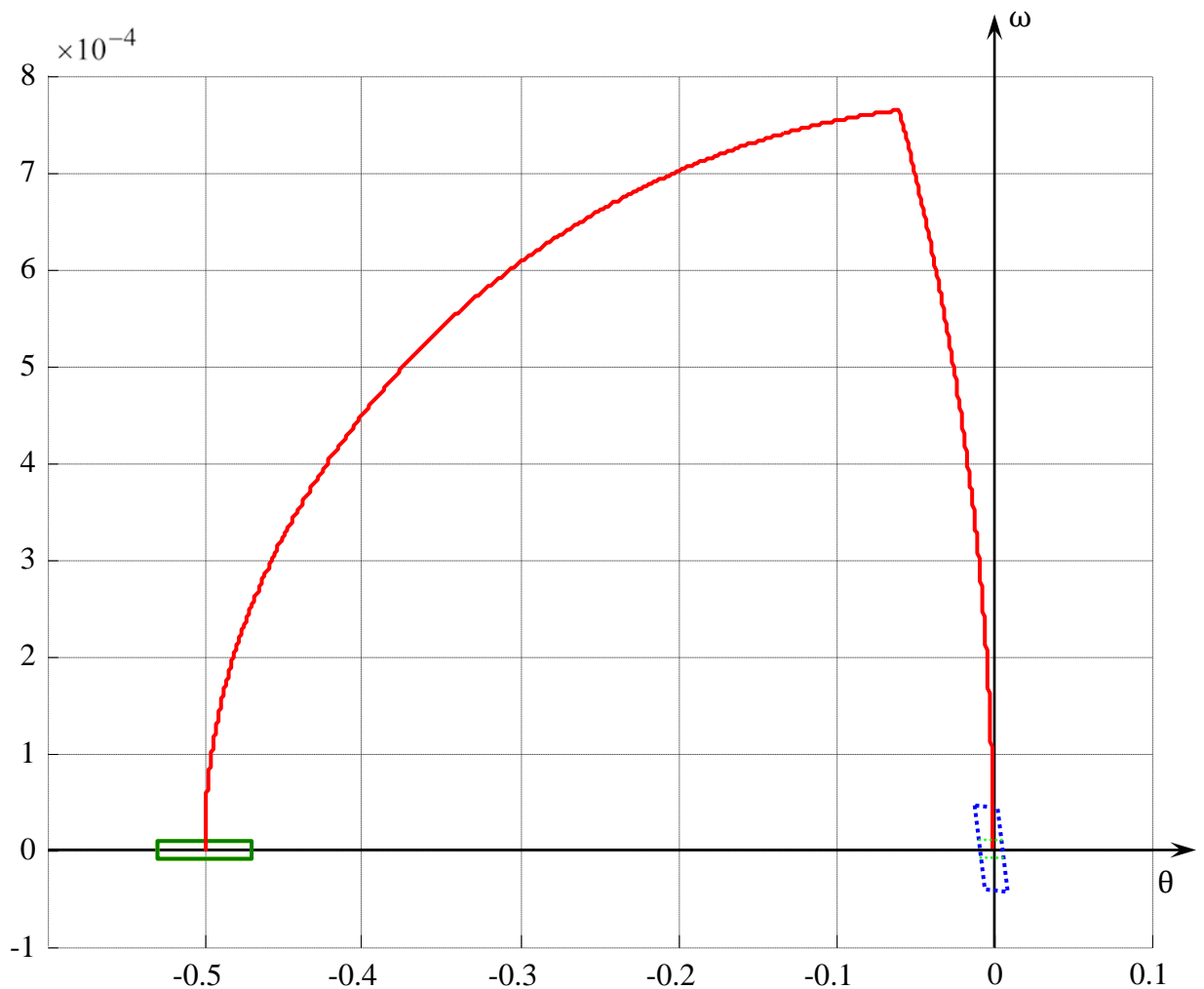


Рис. 3.2.

Если учитывать неэффективные затраты топлива (см. задачу разд. 3.1.2), то схема с одним активным участком также будет оптимальной. При однократном включении и выключении двигателя неэффективные затраты топлива, учитываемые в функционале (3.4), минимальны.

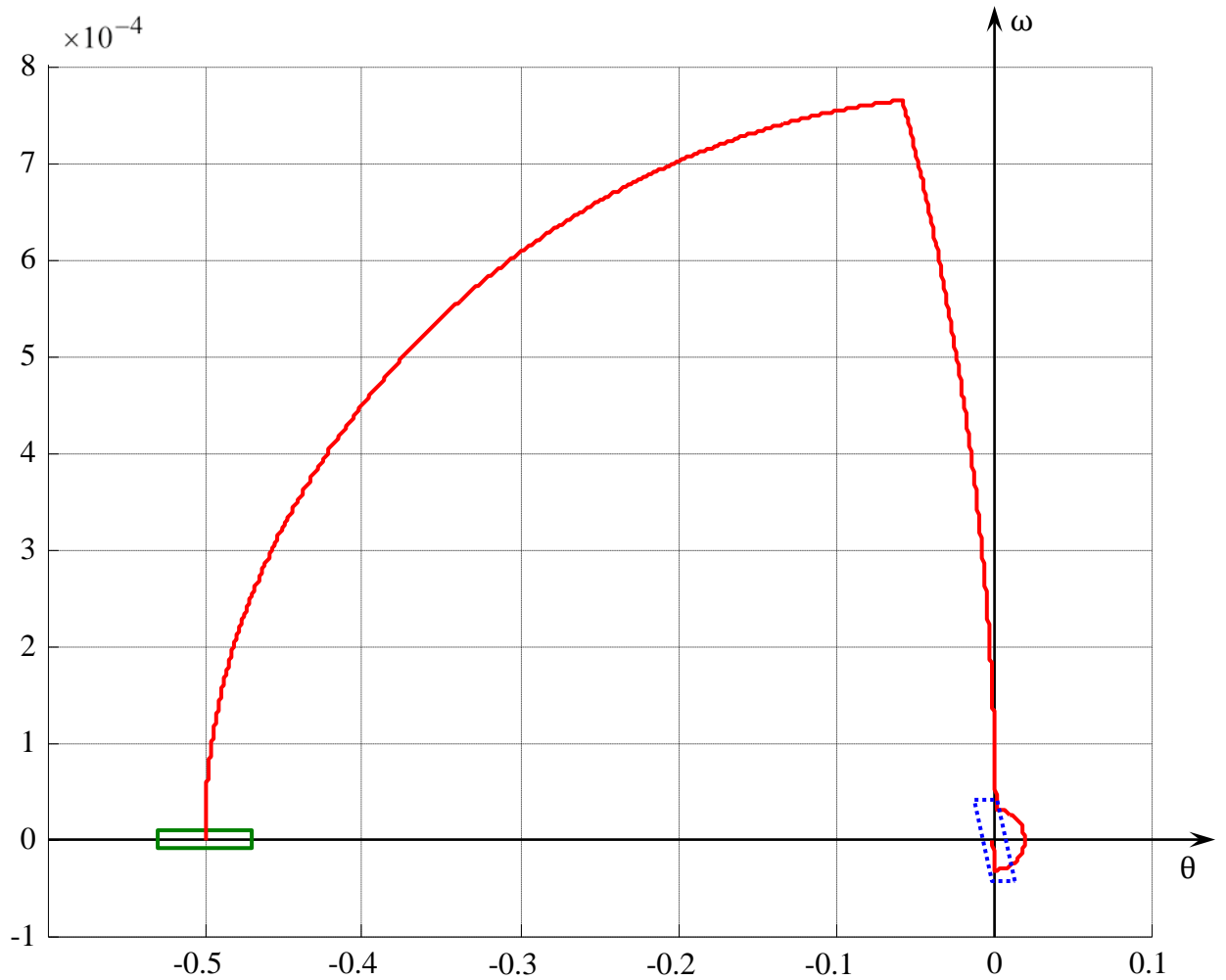


Рис. 3.3.

3.3. СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ БЕЗ ИЗМЕРЕНИЙ

Для управления пучком траекторий, исходящих из прямоугольника (3.5) возможных начальных состояний, применяется управление, оптимальное для траектории, исходящей из центра $(\bar{\theta}_0, \bar{\omega}_0)$ этого прямоугольника. Нельзя утверждать, что такое управление является оптимальным в среднем, так как выполнение принципа разделения в рассматриваемой задаче не доказано. Однако выбор такого субоптимального управления оправдан с прикладной точки зрения, поскольку получаемые результаты приемлемы для практики.

Расчеты проводились для множества (3.5) при следующих значениях параметров:

$$\bar{\theta}_0 = -0.5 \text{ рад}; \quad \bar{\omega}_0 = 0 \text{ рад/с}; \quad \Delta\theta = 0.03 \text{ рад}; \quad \Delta\omega = 0.00001 \text{ рад/с}. \quad (3.12)$$

Остальные параметры модели такие же, как в (3.11). При моделировании пучка выбирались траектории, исходящие из центра прямоугольника и его вершин. При контрольных расчетах учитывались также траектории, исходящие из середин сторон прямоугольника.

Наилучшей оказалась схема стабилизации с двумя активными участками. При оптимизации движения с тремя или четырьмя активными участками продолжительность первого активного участка стремится к нулю. Поэтому четыре активных участка сводятся к трем, а три участка – к двум. Результаты расчетов приведены в табл.2. Заметим, что различие по функционалу (3.6) между схемами с одним или двумя активными участками небольшое и составляет примерно 0.16%. На рис. 3.2, рис. 3.3 представлены: множества возможных начальных состояний – прямоугольники с центром в точке $(-0.5,0)$, приближенные множества возможных конечных состояний – параллелограммы с центром в начале координат, а также оптимальные траектории, исходящие из центра начального прямоугольника, с одним (см. рис. 3.2) или двумя (см. рис. 3.3) активными участками соответственно.

Таблица 2. Характеристики субоптимального управления пучком траекторий без учета дискретных неточных измерений

Количество активных участков	Работа двигателя, с		Среднее значение интеграла энергии, Нм	Время стабилизации, с
	включение	выключение		
1	966	1120	1.620890	1120
2	969 3007	1117 3013	1.620343	3024

3.4. СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ ДИСКРЕТНЫХ НЕТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Предполагается, что измерения состояний системы производятся в моменты t_i , $i = 1, \dots, N$, наибольшего отклонения оси спутника от местной вертикали (при этом угловая скорость равна нулю). Для пучка траекторий этот момент t_i определяется по оптимальной траектории $(\bar{\theta}(\cdot), \bar{\omega}(\cdot))$, исходящей из центра $(\bar{\theta}_0, \bar{\omega}_0)$ прямоугольника (3.5) возможных начальных состояний. А именно, измерения выполняются при условии $\bar{\omega}(t_i) = 0$. В результате измерений получается прямоугольник вида (3.8) с центром $(\bar{\theta}(t_i), 0)$. Стороны прямоугольника определяются погрешностями измерений $\Delta\theta$, $\Delta\omega$, которые считаем равными погрешностям (3.12) в начальном момент времени. Иначе говоря, точность измерений со временем не меняется. В момент i -го измерения находится пересечение множества $\sigma_{i-1}(t_i)$ возможных

в момент t_i состояний системы с учетом всех предыдущих измерений и «измеренного» в момент t_i прямоугольника σ_i вида (3.8). В результате находится множество $\sigma_i(t_i) = \sigma_{i-1}(t_i) \cap \sigma_i$ возможных состояний после i - го измерения. Такая процедура повторяется при каждом измерении. В конечный момент измерение также производится. Хотя оно уже не влияет на управление, но позволяет вычислить среднее значение (3.10), отбрасывая невозможные, согласно измерениям, состояния пучка.

Рассматривались разные схемы, отличающиеся числом активных участков и количеством измерений. Поскольку активное торможение наиболее эффективно при максимальной (по модулю) угловой скорости, а измерения производятся на пассивном участке при нулевой скорости, то количество измерений совпадает с числом активных участков.

При оптимизации схем с тремя и четырьмя активными участками, как и в случае движения без измерений, продолжительность первого активного участка стремилась к нулю. В результате оптимальными оказались схемы с двумя активными участками, которым предшествуют продолжительный пассивный участок с измерениями. Оптимизация схемы с тремя активными участками привела к процессу с двумя активными участками и тремя измерениями. Сначала идет пассивный участок, продолжительность которого составляет более полупериода колебаний. На этом участке выполняется первое измерение. Далее движение продолжается по схеме с двумя активными участками и двумя измерениями. Схема с четырьмя активными участками при оптимизации сводится к схеме движения с тремя активными участками, которым предшествует пассивный участок продолжительностью более полупериода колебаний с одним измерением. Продолжая оптимизацию, получаем схему движения с двумя активными участками, которым предшествует пассивный участок продолжительностью более периода с двумя измерениями. Иначе говоря, как и в случае управления без измерений, оптимальной оказывается схема с двумя активными участками. Если количество измерений более двух, то движению по схеме с двумя активными участками предшествует продолжительный пассивный участок, на котором производятся дополнительные измерения.

На рис. 3.4 представлены траектории движения по этим схемам геометрического центра тяжести. Траектория с четырьмя измерениями изображена сплошной синей линией **4**, с тремя измерениями – штриховой зеленой линией **3**, а с двумя измерениями – штрихпунктирной синеватой линией **2**. Первые пассивные участки траекторий совпадают (отмечены стрелками 2,3,4 или 3,4). Моменты измерений отмечены круглыми маркерами.

На рис. 3.5 изображены множества возможных состояний в конечный момент времени для пучков траекторий с двумя активными участками и разным количеством измерений: пунктирной линией отмечен многоугольник, соответствующий одному неточному измерению, штриховой линией – двум измерениям, штрихпунктирной – трем измерениям, сплош-

ной линией – четырем измерениям. Многоугольники дают приближенное представление указанных множеств. На самом деле, как показывают расчеты с бóльшим числом траекторий, эти многоугольники криволинейные, хотя кривизны сторон небольшие. Вследствие неточных вычислений центры многоугольников не совпадают с началом координат.

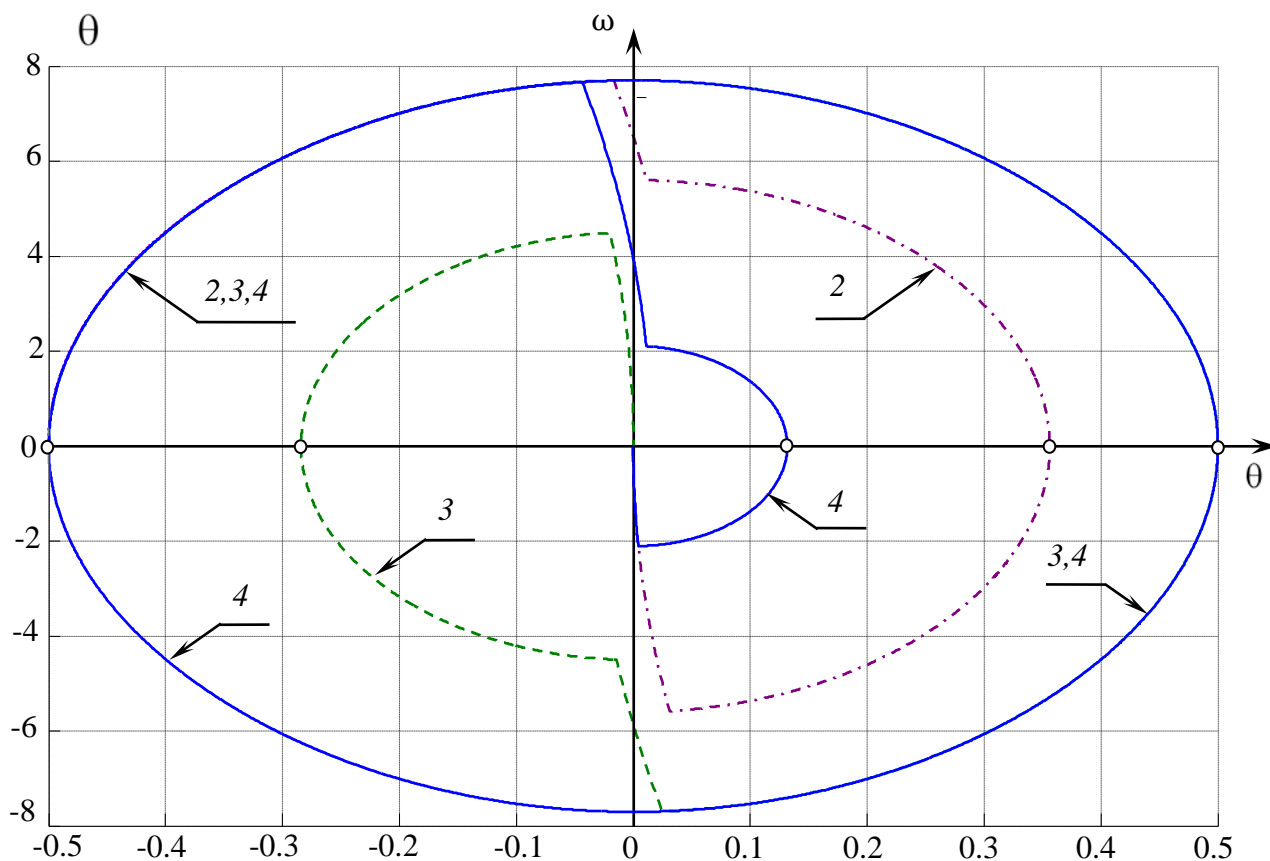


Рис. 3.4.

Учитывая полученные результаты, были оптимизированы схемы с продолжительным (более полупериода) пассивным участком с измерениями, предшествующим активной фазе полета.

В табл.3 приведены результаты для пучков траекторий с одним активным участком и с разным числом измерений.

В табл.4 представлены аналогичные результаты в случае двух активных участков. Схемы с наибольшим числом измерений (см. табл.3,4) оказываются наилучшими по точности, но самыми продолжительными. Лучшая по точности стабилизация по схеме двумя активными участками и четырьмя измерениями (см. табл.4) реализуется в течение 7207 с.

Таблица 3. Характеристики субоптимального управления пучком траекторий с одним активным участком

Количество измерений	Моменты измерений	Активный участок	Время стабилизации	Среднее значение интеграла энергии, Нм	Относительное улучшение, %
0	–	966 – 1120	1120	1.620890	–
1	1120	966 – 1120	1120	0.184904	88.5
2	2085 3206	3052 – 3206	3206	0.149182	19.3
3	2085 4170 5292	5138 – 5292	5292	0.132630	11.1
4	2085 4170 6255 7379	7225 – 7379	7379	0.128077	3.4

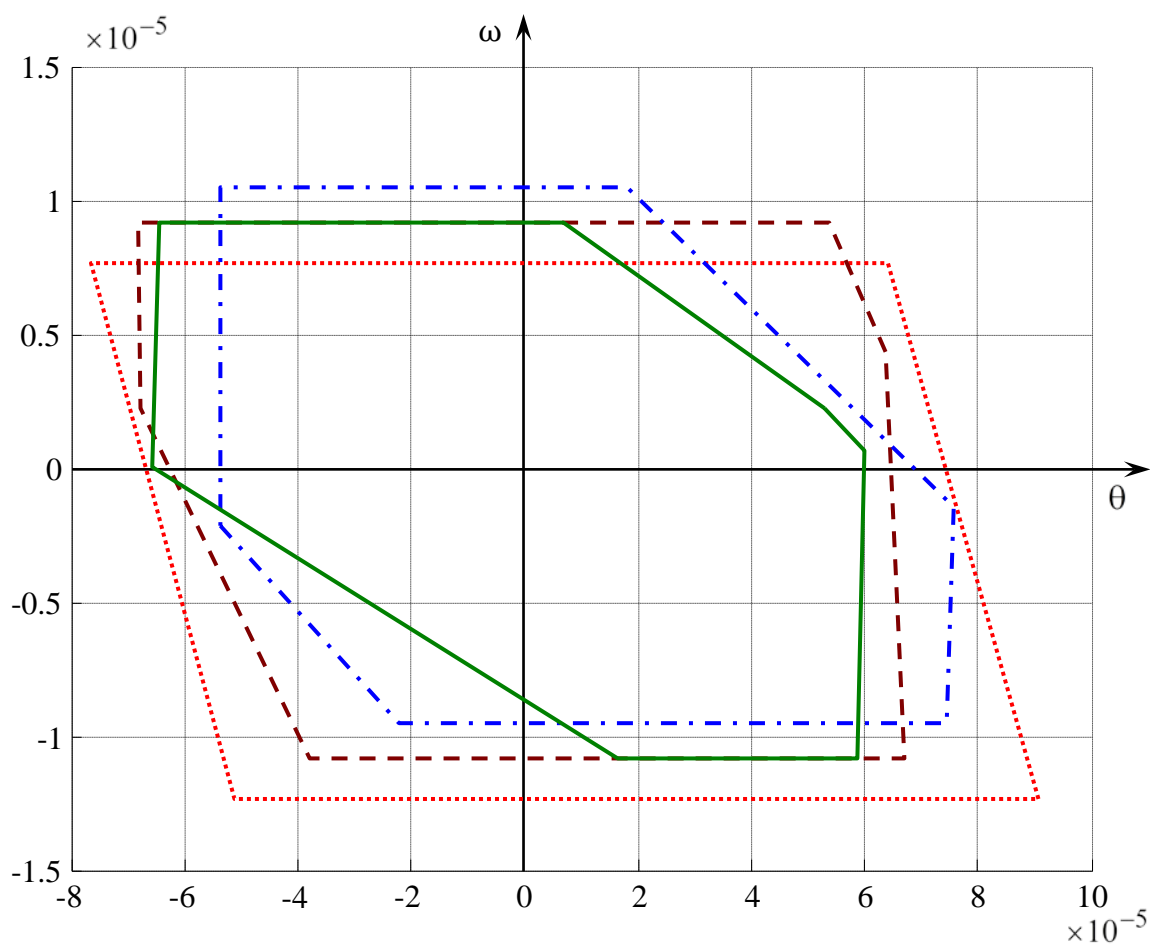


Рис. 3.5.

Таким образом, наиболее эффективными оказываются измерения, проведенные до активной фазы стабилизации. Это, видимо, объясняется тем, что после торможения множество возможных состояний «сжимается» и меньшее количество состояний можно исключить по результатам измерений. Иначе говоря, измерения становятся менее эффективными.

В целом, увеличение числа измерений, конечно, уменьшает значение функционала (3.10), так как позволяет сузить множество возможных состояний, но увеличивает время стабилизации. Отметим, что эффективность каждого последующего измерения заметно падает. Например, для схемы полета с одним активным участком добавление третьего измерения приводит к уменьшению функционала на 11.1%, а при добавлении четвертого – только на 3.4% (см. последний столбец табл.3). Такая же картина наблюдается при управлении с двумя активными участками (см. последний столбец табл.4).

Таблица 4. Характеристики субоптимального управления пучком траекторий с двумя активными участками

Количество измерений	Моменты измерений	Активные участки	Продолжительность активных участков	Время стабилизации	Среднее значение интеграла энергии, Нм	Относительное улучшение, %
0	–	969 – 1117 3007 – 3013	148 6	3024	1.6203436062	–
1	3070	970 – 1090 3036 – 3070	120 34	3070	0.1845994834	88.6
2	2044 3110	1045 – 1087 2998 – 3110	42 112	3110	0.1418101332	24.0
3	2085 4106 5151	3126 – 3190 5061 – 5151	64 90	5151	0.1181433814	16.7
4	2085 4170 6204 7212	5155 – 5267 7170 – 7212	112 42	7212	0.1092374846	7.5

ВЫВОДЫ

1. Решена задача активной стабилизации колебаний искусственного спутника при помощи реактивных двигателей малой тяги в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений. Получен оптимальный в среднем режим стабилизации с двумя активными участками.
2. Показано, что при ограниченной точности выполнения команд включения и выключения двигателя не возникает «эффекта Гурмана», который состоит в минимизации суммарного расхода топлива при импульсных включениях двигателя.
3. Исследовано влияние дискретных неточных измерений на качество управления пучком траекторий. Показано, что наиболее эффективными оказываются измерения, проведенные до активной фазы стабилизации.
4. Разработан программный комплекс для решения задачи оптимальной в среднем стабилизации колебаний спутника при наличии дискретных неточных измерений.

4. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ

В разд. 4.1 рассматриваются особенности моделирования пучков траекторий ПС при разных способах описания множества возможных состояний. В задачах управления линейными ПС множество возможных состояний представляется многогранниками или эллипсоидами (многоугольниками или эллипсами на плоскости). Использование таких множеств при моделировании пучков линейных систем не имеет методических ошибок (см. разд. 1, 2). В прикладных задачах применяется задание границы множества возможных состояний конечным числом точек (см. разд. 3). Такой способ является приближенным. Его точность зависит от количества и расположения заданных точек.

В разд. 4.2 анализируется процедура приближенного решения задачи синтеза субоптимального в среднем управления пучками траекторий ПС и применяемые для этого численно-аналитические методы. Алгоритмы синтеза включают ряд вспомогательных задач (интегрирование уравнений движения, конечномерная минимизация, вычисление двойных интегралов), которые решаются известными численными методами. Задачи нахождения образующих функции цены и функции стоимости полуоптимального процесса, синтеза двухпозиционного оптимального управления и поиска субоптимального управления стабилизацией спутника при наличии дискретных неточных измерений являются новыми. Для их решения разработаны соответствующие численно-аналитические методы и программные комплексы. Программы реализованы в среде MATLAB. Они предназначены для решения задач оптимального управления переключаемыми системами в условиях параметрической неопределенности.

В разд. 4.3 решаются задачи оптимального управления одной траекторией стационарной дискретной САТ, оптимального в среднем управления пучком траекторий и оптимального в среднем управления пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений [34]. В разд. 4.4 решаются задачи стабилизации спутника двигателями малой тяги, а именно задача оптимального управления одной траекторией, задача субоптимального в среднем управления пучком траекторий и субоптимального управления пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений [36]. Программные комплексы обеспечивают моделирование пучков траекторий переключаемых систем, учет дискретных неточных измерений, а также визуализацию численных расчетов. Параметры работы программ задаются пользователем.

4.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПУЧКОВ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ

При реализации алгоритмов (разд. 1, 2) необходимо моделировать пучки траекторий. В прикладных задачах обычно выбирается конечное число M точек границы множества возможных начальных состояний σ_0 и находятся траектории, исходящие из этих начальных состояний. Для моделирования непрерывного движения используются численные методы решения систем дифференциальных уравнений. Моделирование переключений выполняется проще, так как все траектории пучка переключаются одновременно. Скачки траектории вычисляются по рекуррентным уравнениям. Трудоемкость моделирования и объем требуемой памяти линейно возрастают с увеличением числа траекторий M . При больших значениях M необходимо использовать распараллеливание вычислений.

При вычислении показателя качества применяются численные методы интегрирования функций. Если пучок задается большим числом траекторий, то интегрирование заменяется нахождением среднего арифметического значений функционала качества.

В линейных системах можно использовать точное описание множеств возможных начальных состояний многогранниками или эллипсоидами. В первом случае достаточно моделировать траектории, исходящие из вершин множества возможных начальных состояний. Во втором – требуется моделировать траекторию, исходящую из центра эллипсоида, и интегрировать уравнения для матрицы квадратичной формы.

В частности, в примерах 1.6.1, 1.6.2, 2.7 переключаемых систем второго порядка для описания множеств возможных состояний использовались многоугольники: в примере 1.6.1 – прямоугольники (со сторонами параллельными координатным осям), в примерах 1.6.2 и 2.7 – параллелограммы с основаниями, параллельными оси абсцисс. Выбор такой формы описания основан на том, что в процессе непрерывного движения и при переключениях указанные многоугольники сохраняют тот же вид. Поэтому для получения точного описания множества возможных состояний достаточно использовать вершины этих многоугольников. Таким образом, при моделировании пучка можно учитывать только 4 траектории.

В примерах 1.6.2 и 2.7 учитывались неточные измерения одной координаты. Такие измерения не меняют тип множества возможных состояний, поскольку пересечение многоугольника с «измеренным» множеством (полосой) является многоугольником того же вида.

В нелинейном случае описание динамики множеств возможных состояний гораздо сложнее. Можно использовать аппроксимации множеств возможных состояний многогранниками или эллипсоидами [124, 128]. Иногда применяют «характеристическую» функцию, которая больше нуля для возможного состояния и меньше нуля для невозможного [90]. Если

эта функция гладкая, то ее изменение в силу движения системы описывается уравнением Лиувилля, которое решается численно. Разумеется, это порождает методические погрешности.

В разд. 3 рассматривалась нелинейная модель движения спутника (3.1), описываемая уравнениями второго порядка. Множество возможных состояний на плоскости θ, ω описывалось многоугольниками, при этом учитывались только вершины многоугольников. При моделировании многоугольники из-за нелинейности модели движения становятся криволинейными. Однако эта кривизна, как показывают расчеты, небольшая. Среднее значение функционала качества на криволинейном многоугольнике мало отличается от средних значений на «обычном» многоугольнике.

Учет дискретных неточных измерений угловой скорости может изменить количество вершин многоугольника, так как пересечение многоугольника с «измеренным» множеством (полосой) может привести к увеличению или уменьшению количества вершин получаемого многоугольника. В расчетах (см. разд. 3.4) учитывались не более пяти измерений, при этом количество вершин многоугольников не превосходило десяти.

4.2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ

Алгоритм синтеза оптимального управления ПС заключается в численном поиске «управляющего комплекса», включающего оптимальные управления непрерывным и дискретным движениями и оптимальные моменты переключений. Согласно алгоритму, представленному в разд. 1.2.2, оптимальное позиционное управление непрерывным движением без переключений (1.21) находится при решении уравнения ГЯБ, оптимальное двухпозиционное управление (1.20) – при решении задачи Лагранжа (1.18). Оптимальное позиционное управление переключениями (1.22) определяется при решении рекуррентного уравнения, аналогичного дискретному уравнению Беллмана. Оптимальные позиции переключений (1.24), (1.25) находятся в результате конечномерной минимизации, а оптимальное количество переключений (1.26) – целочисленной минимизации по образующим функции цены.

Наибольшую сложность при численной реализации алгоритма представляет поиск оптимального позиционного управления непрерывным движением. Надежных и эффективных методов решения уравнения ГЯБ в общем случае не существует. Как правило, применяются методы, связанные с аппроксимацией функции цены или функции Кротова [42, 67, 126]. Эти же методы можно использовать для нахождения образующих функции цены. Двухпозиционное управление определяется в результате решения задачи Лагранжа. Эта задача

при помощи принципа максимума сводится к двухточечной краевой задаче, которая решается разными методами [53, 79]. Остальные элементы «управляющего комплекса»: оптимальное позиционное управление переключениями, моменты переключений и их количества находятся проще – в результате конечномерной минимизации, которая может быть осуществлена разными способами (см. введение).

В диссертации решались ЛКЗ управления ПС, в которых матрицы квадратичных образующих функции цены удовлетворяют матричному уравнению Риккати. Численное интегрирование этого дифференциального уравнения можно выполнить многими методами [60]. В примерах (разд. 1.6) интегрирование не производилось, так как матрицы двухпозиционной функции цены и образующей функции цены были найдены аналитически. Это позволило получить точные выражения для позиционных управлений непрерывным и дискретным движениями. Поиск оптимальных моментов переключений можно было выполнять многими методами конечномерной минимизации (см. введение). Для решения примеров использовалась специальная разработанная модификация метода спуска в наилучшем направлении на заданной дискретной сетке. Оптимальное количество переключений выполнялось целочисленным перебором.

Синтез субоптимального управления ПС проще синтеза оптимального управления, так как оптимальные позиционные управления непрерывным и дискретным движениями уже найдены. Однако приходится дополнительно находить оценку множества возможных состояний. Для этого нужно интегрировать функцию стоимости полуоптимального процесса по множеству возможных начальных состояний системы. Имеются разные численные методы интегрирования функции нескольких переменных [60]. Их эффективность во многом зависит от области интегрирования.

В примерах (разд. 1.6) образующая функции стоимости полуоптимального процесса отличается от соответствующей образующей функции цены квадратичной формой. Матрица этой квадратичной формы удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, точное решение которого находится просто. Множество возможных состояний в этих примерах является параллелограммом. Для вычисления двойных интегралов от квадратичной функции стоимости для параллелограммов были выведены аналитические формулы при помощи программной среды Maple.

«Управляющим комплексом» в задачах синтеза оптимального и субоптимального управлений пучками траекторий стационарных САТ являются оптимальное позиционное управление переключениями и количества переключений в начальный и конечный моменты времени. Здесь нет управлений непрерывным движением, поэтому эти задачи являются конечномерными и могут быть решены разными методами оптимизации [103]. Оптимальные

количества переключений находятся в результате целочисленной минимизации. Интегрирование по множеству возможных начальных состояний функции стоимости полуоптимального процесса можно выполнить разными способами [60].

В примере (разд. 2.7) квадратичные образующие функции цены и функции стоимости были найдены аналитически, а оптимизация по количеству переключений выполнялась целочисленным перебором. Множество возможных состояний в этих примерах является параллелограммом. Вычисление двойных интегралов от квадратичной функции стоимости для параллелограммов выполнялось по аналитическим формулам, выведенным при помощи программной среды Maple.

Синтез оптимального и субоптимального управлений стабилизацией спутника сводился к конечномерной задаче оптимизации моментов включения и выключения двигателя. С учетом допустимой точности исполнения команд минимизация становится целочисленной. Первоначально минимизация проводилась на сгущающихся сетках. Однако из-за большой овражности минимизируемого функционала сходимость была плохая. Метод «застревал» в точках локального минимума. Поэтому окончательные результаты для фиксированного количества активных участков получались при помощи полного перебора. Множество возможных состояний задавалось конечным числом точек – вершинами виртуального многоугольника. Среднее значение функционала качества на этом многоугольнике вычислялось как среднее арифметическое значение функционала в его вершинах. Для интегрирования уравнений движений использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Таким образом, были разработаны численно-аналитические методы синтеза оптимального и субоптимального управлений пучками траекторий ПС и САТ, которые были реализованы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

4.3. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО В СРЕДНЕМ УПРАВЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ АВТОМАТНОГО ТИПА

Программа [36] реализует алгоритм, описанный в разд. 2.1. Она позволяет синтезировать оптимальное позиционное управление, находить оптимальную в среднем оценку неопределенного состояния системы, моделировать пучок траекторий при найденном программном управлении вычислять характеристики движения в условиях параметрической неопределенности, а также представлять результаты моделирования в удобном для анализа виде. . Входные данные – математическая модель системы, показатель качества управления, множество возможных начальных состояний системы, модель измерений. Выходные данные – оптимальное и субоптимальное в среднем управления, оценка множества возможных состояний

системы при наличии дискретных неточных измерений, минимальное среднее значение функционала качества, фазовые траектории и множество возможных конечных состояний.

В программе применяются: целочисленная оптимизация для определения количества переключений, решение рекуррентных матричных уравнений для нахождения образующих функции цены и функций стоимости полуоптимальных процессов, а также моделирование движения САТ в условиях параметрической неопределенности.

Порядок работы программы (алгоритм решения задачи):

- строятся образующие функции цены (φ);
- строятся образующие функции стоимости полуоптимального процесса (β);
- находится оптимальное позиционное управление одной траекторией;
- находится оптимальная оценка множества возможных состояний – центра тяжести;
- определяется программное управление для найденного центра тяжести;
- используя программное управление, моделируется пучок траекторий.
- дискретные неточные измерения учитываются для множества возможных состояний.

Пример работы программы для вычисления оптимальной траектории представлен на рис. 4.1, где показано множество возможных начальных состояний и оптимальная траектория для центра множества начальных состояний. Синими круглыми маркерами показаны переключения в начальный, а голубыми квадратными маркерами переключения в конечный момент времени. Также примером работы программы являются рис. 2.1 и рис. 2.2 в разд. 2.7.

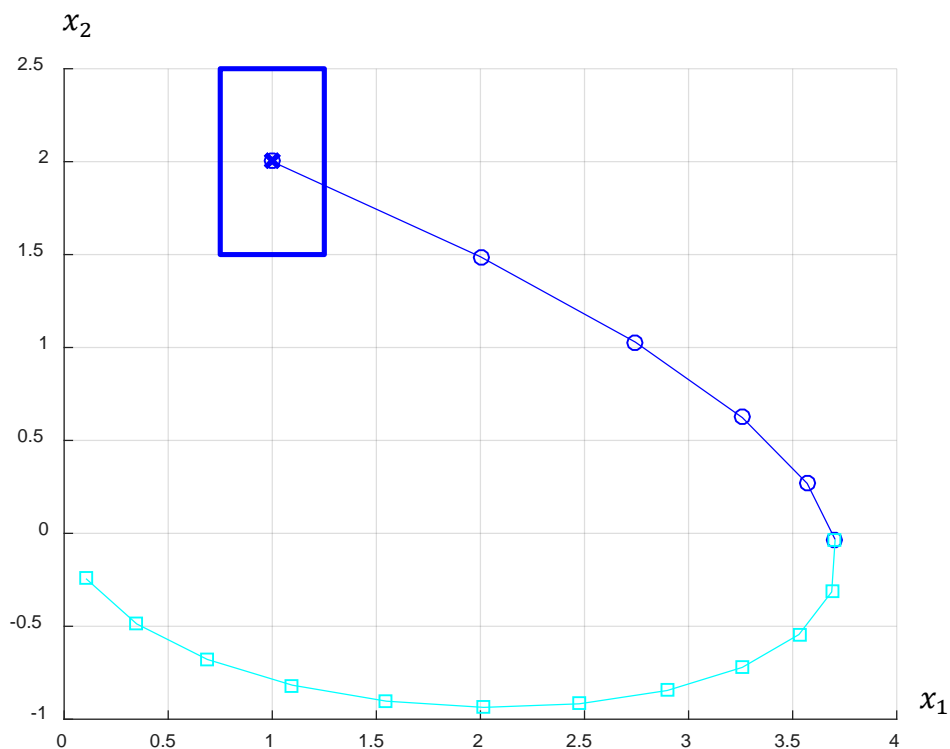


Рис. 4.1.

4.4. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС СУБОПТИМАЛЬНОЙ В СРЕДНЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ СПУТНИКА

Программа [34] позволяет решать следующие задачи: нахождение оптимального управления стабилизацией колебаний спутника; моделирование пучка траекторий при заданном программном управлении в условиях параметрической неопределенности, вычисление характеристик движения пучка траекторий.

Входные данные – математическая модель системы, показатель качества управления, множество возможных начальных состояний системы, модель измерений. Выходные данные – оптимальное и субоптимальное в среднем управления, оценка множества возможных состояний системы при наличии дискретных неточных измерений, минимальное среднее значение функционала качества, фазовые траектории и множество возможных конечных состояний системы.

В программе применяются: интегрирование дифференциальных уравнений движения (метод Рунге-Кутты 4 порядка), целочисленная оптимизация на сгущающихся сетках для нахождения оптимальных моментов включения и выключения двигателей, пересечение выпуклых многоугольных множеств на плоскости для учета дискретных неточных измерений. При оптимизации учитывается большая овражность функции, которая не позволяет использовать градиентные методы.

Порядок работы программы (алгоритм решения задачи):

- строится (подготавливается) линия последнего включения двигателя с высокой точностью при помощи метода Рунге-Кутты 4 порядка с шагом 0.01 с;
- выполняется оптимизация моментов переключения при заданном количестве активных участков;
- моделируется пучок траекторий и вычисляется среднее значение интеграла энергии;
- изменяется множество возможных состояний с учетом дискретных неточных измерений угловой скорости вращения спутника.

Результаты работы программы для режима с двумя активными участками при наличии дискретных неточных измерений показаны в разд. 3.4 на рис. 3.4, где показаны траектории движения с двумя, тремя и четырьмя активными участками сиреневого, зеленого и синего цвета соответственно.

Множество конечных состояний пучков траекторий показано на рис. 3.5 разд. 3.4. Лучший пучок выделен зеленым цветом и соответствует 4 измерениям. Худший результат – пучок без измерений представлен красной пунктирной линией.

ВЫВОДЫ

1. Разработаны методы моделирования движения ПС и стационарных САТ в условиях параметрической неопределенности с учетом дискретных неточных измерений при разных способах описания множеств возможных состояний.
2. На основе достаточных условий оптимальности разработаны численно-аналитические методы синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий ПС и стационарных САТ с учетом дискретных неточных измерений.
3. Разработан программный комплекс, реализующий алгоритмы синтеза оптимального в среднем управления пучком траекторий стационарной дискретной САТ при наличии дискретных неточных измерений. Эффективность работы комплекса была продемонстрирована при решении линейно-квадратичной задачи синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий стационарной САТ второго порядка.
4. Разработан программный комплекс для решения задачи оптимальной стабилизации колебаний искусственного спутника при помощи реактивных двигателей малой тяги, а также решения задачи синтеза субоптимальной в среднем стабилизации в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений.
5. Получены свидетельства о государственной регистрации (№ 2017618981 от 29 июня 2017 г., № 2018616558 от 29 марта 2018 г.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным итогом диссертационной работы является создание численно-аналитических методов моделирования и синтеза оптимального и субоптимального управлений переключаемыми системами и стационарными системами автоматного типа, а также их применения в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники, выразившееся в следующих научных результатах:

- 1) Разработаны математические модели функционирования переключаемых систем и стационарных систем автоматного типа в условиях параметрической неопределенности при разных способах описания множеств возможных состояний с учетом дискретных неточных измерений.
- 2) Доказаны достаточные условия субоптимальности в среднем управления пучком траекторий переключаемых систем и стационарных систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измерений.
- 3) На основе достаточных условий оптимальности разработаны численно-аналитические методы синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий переключаемых систем и стационарных систем автоматного типа с учетом дискретных неточных измерений.
- 4) Для линейно-квадратичных задач управления стационарными системами автоматного типа разработаны алгоритм и численный метод синтеза оптимального в среднем управления пучками траекторий при наличии дискретных неточных измерений.
- 5) Для задачи активной стабилизации колебаний искусственного спутника при помощи реактивных двигателей малой тяги разработаны алгоритм и численный метод синтеза оптимального в среднем управления в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений.
- 6) Разработаны два проблемно-ориентированных программных комплекса, реализующих предложенные алгоритмы и численные методы синтеза оптимального в среднем управления стационарными системами автоматного типа и стабилизацией спутника в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. // М.: Физматлит, 2005. 391 с.
2. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. // М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.
3. *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С. и др.* Оптимальное управление движением. // М.: Физматлит, 2005. 376 с.
4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. – 480 с.
5. *Ананьина Т.Ф.* Задача управления по неполным данным. // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т.12. – №4. – С.612-620.
6. *Ананьина Т.Ф.* К задаче управления по неполным данным. // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т.13. – №10. – С.1744-1748.
7. *Андрейченко Д.К. Андрейченко К.П.* К теории стабилизации спутников с упругими стержнями. // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2004. - №6. - С. 150-163.
8. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. // М.: Наука, 1971. – 424 с.
9. *Артемов В. М.* Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. // Минск: Высшэйшая школа, 1979. 160 с.
10. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. // М.: Физматлит, 2007. 281 с.
11. *Батурин В.А., Гончарова Е.В., Малтугуева Н.С.* Итеративные методы решения задач оптимального управления логико-динамическими системами. // Известия РАН. Теория и системы управления, 2010. №5. С.53-61.
12. *Батурин В.А. Черемных С.В.* Управление выбором параметров в алгоритмах слабого улучшения второго порядка для задач оптимального управления. // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2006. - №2. - С. 54-60.
13. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. // М.: Наука, 1975. 416 с.
14. *Болтянский В.Г.* Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. // Известия АН СССР. Сер. Математика. – 1964. – Т.28. – №3. – С.418-514.
15. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. // М.: Наука, 1973. 448 с.

16. *Борисов А.В., Босов А.В., Кибзун А.И., Миллер Г. Б., Семенихин К.В.* Метод условно-минимаксной нелинейной фильтрации и современные подходы к оцениванию состояний нелинейных стохастических систем. // Автомат. и телемех., 2018, № 1, 3–17.
17. *Борисов А.В., Панков А.Р.,* Минимаксное линейное оценивание в обобщенных неопределенно-стохастических системах II. Минимаксная фильтрация в динамических системах, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями с мерой. // Автомат. и телемех., 1998, № 6, 139–152.
18. *Бортаковский А.С.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в классе логико-динамических (гибридных) систем. // Автоматика и телемеханика. 2011. № 12. С.3-23.
19. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. №6. С.77-92.
20. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами. // Информатика. Сер. Автоматизация проектирования. М.: ВНИИМИ, 1992. Вып. 2-3. С.72-79.
21. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности управления переключаемыми системами. // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. № 4. С. 86-103.
22. *Бортаковский А.С.* Необходимые и достаточные условия оптимальности стационарных дискретных систем автоматного типа. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. №6. С.53-70.
23. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы. // Тр. МИАН. 2008. Т.262. С.50–63.
24. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности управления логико-динамическими системами. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. №6. С.16–33.
25. *Бортаковский А.С.* Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных логико-динамических систем. // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №6. – С.27–45.
26. *Бортаковский А.С.* Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных непрерывно-дискретных систем. // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №1. – С.18–33.

27. *Бортаковский А.С.* Оптимальное и субоптимальное управление пучками траекторий детерминированных систем автоматного типа. // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2016. – №1. – С.5–26.
28. *Бортаковский А.С.* Оптимизация переключающих систем. // М.: Изд-во МАИ, 2016. 120 с.
29. *Бортаковский А.С.* Синтез логико-динамических систем на основе достаточных условий оптимальности. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. №2. С.41-55.
30. *Бортаковский А.С.* Субоптимальное управление логико-динамическими системами в условиях параметрической неопределенности. // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №11. – С.105-121.
31. *Бортаковский А.С.* Управление детерминированными системами в условиях неопределенности при оптимальности эффективных управлений / Управление и навигация ЛА в условиях параметрической неопределенности. // М.: Изд-во МАИ, 1991. – С.18-23.
32. *Бортаковский А.С., Коновалова А.А.* Синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа при мгновенных многократных переключениях. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 5. С. 38.
33. *Бортаковский А.С., Немыченков Г.И.* Оптимальное в среднем управление детерминированными переключаемыми системами при наличии дискретных неточных измерений. // Известия РАН. Теория и системы управления, 2019, № 1. С. 52-77.
34. *Бортаковский А.С., Немыченков Г.И.* Субоптимальная в среднем стабилизация спутника в условиях параметрической неопределенности. // Федеральная служба по интелект. собственности. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2017618981. 2017.
35. *Бортаковский А.С., Немыченков Г.И.* Субоптимальная в среднем стабилизация спутника при наличии дискретных неточных измерений. // Известия РАН. Теория и системы управления, 2018, № 4. С. 197-207.
36. *Бортаковский А.С., Немыченков Г.И.* Субоптимальное управление детерминированными стационарными системами автоматного типа в условиях параметрической неопределенности. // Федеральная служба по интелект. собственности. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018616558. 2018.
37. *Бортаковский А.С., Немыченков Г.И.* Субоптимальное управление пучками траекторий детерминированных стационарных систем автоматного типа. // Известия РАН. Теория и системы управления, 2017, № 6, с. 20-34.

38. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами. // *АиТ.* 1987. №7. С.57–66.
39. *Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.* Синтез оптимального управления линейными логико-динамическими системами при мгновенных многократных переключениях автоматной части. // *Современная математика. Фундаментальные направления.* 2011, № 42, – С.36-47.
40. *Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.* Синтез управления активной стабилизацией спутника на основе необходимых условий оптимальности логико-динамических систем. // *Вестник МАИ.* 2008. Т.15. № 2. С.28-35.
41. *Брайсон А., Хо-Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. // М.: Мир, 1972. – 544 с.
42. *Беллман Р.* Динамическое программирование. // Издательство иностранной литературы. 1960. 400 с.
43. *Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунев Б.Е.* Интеллектуальное управление динамическими системами. // М.: Физматлит, 2000. 352 с.
44. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. // Казань: Фолиант, 2011. Т.1, 2. С.23-81.
45. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. // М.: Наука, 1980. - 520 с.
46. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. // Государственное издательство физико-математической литературы. 1961. 228 с.
47. *Григорьев К.Г.* Синтез оптимальных управлений в задаче стабилизации космического аппарата с переменными моментами инерции. // *Космич. исслед.* 1974. Т. XXII. № 4.
48. *Гурман В.И., Ни Минь Кань.* Вырожденные задачи оптимального управления. I. // *Автоматика и телемеханика.* 2011. № 3. С. 36-50.
49. *Гурман В.И.* Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем. // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2004. №4. С.70–75.
50. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. 288 с.
51. *Дмитрук А.В., Каганович А.М.* Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями. В сб. «Нелинейная динамика и управление». Вып.6. // М: Физматлит, 2008. – С. 101-136.
52. *Дыхта В.А., Самсонок О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. // М.: Физматлит, 2000. 256 с.

53. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. // М.: Наука, 1982. 432 с.
54. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. // М.: Наука, 1967. – 336 с.
55. *Жук К.Д., Тимченко А.А., Даленко Т.И.* Исследование структур и моделирование логико-динамических систем. // Киев: Наукова думка, 1975. 199 с.
56. *Жук К.Д., Тимченко А.А.* Автоматизированное проектирование логико-динамических систем. // Киев: Наукова думка, 1981. 320 с.
57. *Завалицин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы: модели и приложения. // М.: Наука, 1991. 256 с.
58. *Иослович И.В.* Оптимальная стабилизация осесимметричного спутника с помощью системы из n реактивных двигателей. // Искусственные спутники Земли. 1966. № 4.
59. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
60. *Калиткин Н.Н.* Численные методы // Учеб. пособие. -2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
61. *Кан Ю.С., Сысуев А.В.* Сравнение квантильного и гарантирующего подходов при анализе систем. // Автоматика и телемеханика. 2007. № 1. С. 57-67.
62. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. №5. С. 51–64
63. *Казаков И.Е., Артемьев В. М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. // М.: Физматлит, 1993. 272 с.
64. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. // М.: Мир, 1977. 656 с.
65. *Кейн В.М.* Оптимизация управления по минимаксному критерию. // М.: Наука, 1985. – 248 с.
66. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. // М.: Наука, 1974. – 456 с.
67. *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. // М.: Машиностроение 1969г. – 288 с.
68. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. // М.: Наука, 1973. – 446 с.

69. *Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.* Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления. // Ж. вычисл. математики и математ. физики. 1972. №1. – С.14-34.
70. *Куржанский А.Б.* Оптимальные системы с импульсными управлениями. // Дифференциальные игры и задачи управления. // УНЦ АН СССР. – 1975. – С.131-156.
71. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. // М.: Наука, 1977. – 392 с.
72. *Лебедев А.А., Красильщиков М.Н., Малышев В.В.* Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. // М.: Машиностроение, 1974. – 292 с.
73. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. // М.: Наука, 1973. 390 с.
74. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. // М.: Наука, 1974. – 696 с.
75. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. // М.: Машиностроение, 1987. – 302 с.
76. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдений и управления летательных аппаратов. // М.: Машиностроение, 1989. – 311 с.
77. *Малышев В.В., Пакшин П.В.* Прикладная теория стохастической устойчивости и оптимального стационарного управления (обзор). Ч. I. М.: Техническая кибернетика, 1990. № 1. С. 42-66;). Ч. II. // М.: Техническая кибернетика, 1990. № 2. С. 97-120.
78. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. // М.: Наука, 2005. 429 с.
79. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. // М.: Наука. 1971. – 424 с.
80. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. С. 142-158.
81. *Немыченков Г.И.* Оптимальное управление линейными стационарными системами автоматного типа в условиях параметрической неопределенности. // Международная молодежная научная конференция Гагаринские чтения, 17-20 апреля 2018 года. Москва. Тезисы. С. 341-342.
82. *Немыченков Г.И.* Оптимальное управление пучками траекторий стационарных систем автоматного типа. // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 6-11 июля, 2018 года. Суздаль. Тезисы. С. 151-152.

83. *Немыченков Г.И.* Приближенный синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа. // Труды МАИ, 2016, выпуск 89, 14 с. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=73376>.
84. *Немыченков Г.И.* Приближенный синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа. // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 8-12 июля 2016 года. Суздаль. Тезисы. С. 145-146.
85. *Немыченков Г.И.* Субоптимальная в среднем стабилизация спутника в условиях параметрической неопределенности. // Международная конференция по математической теории управления и механике, 7-11 июля, 2017 года. Суздаль. Тезисы. С. 45-46.
86. *Немыченков Г.И.* Субоптимальная стабилизация спутника в условиях параметрической неопределенности. // XLII Международная молодежная научная конференция Гагаринские чтения, 5-20 апреля 2017 года. Москва. Тезисы. С. 1061.
87. *Немыченков Г.И.* Субоптимальное в среднем управление переключаемыми системами. // XLV Международная молодежная научная конференция Гагаринские чтения, 16-19 апреля 2019 года. Москва. Тезисы. С. 707-708.
88. *Немыченков Г.И.* Субоптимальное управление пучками детерминированных систем автоматного типа при неточных дискретных измерениях. // 17 Международная конференция «Авиация и космонавтика», 19-23 ноября, 2018 года. Москва. Тезисы. С. 189.
89. *Немыченков Г.И.* Управление пучками траекторий стационарных систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измерений. // Труды МАИ, 2019, выпуск 104, 24 с. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102203>.
90. *Овсянников Д.А.* Математические методы управления пучками. // Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 223 с.
91. *Пакишин П.В.* Устойчивость дискретных систем со случайной структурой при постоянно действующих возмущениях. // Автоматика и телемеханика. 1983. № 6. С. 74-84.
92. *Пановский В.Н., Пантелеев А.В.* Метаэвристические интервальные методы поиска оптимального в среднем управления нелинейными детерминированными системами при неполной информации о ее параметрах. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 53-64.
93. *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. // М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.

94. *Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алешина Е.А.* Методы глобальной оптимизации. Метаэвристические стратегии и алгоритмы. // М.: Вузовская книга, 2013, 244 с.
95. *Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортакровский А.С.* Нелинейные системы управления. // М.: Вузовская книга, 2008. – 312 с.
96. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Приближенный синтез оптимальных непрерывных стохастических систем управления с неполной обратной связью. // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 130-146.
97. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом. // Информ. и ее примен., 5.2, 2011, С.69–81.
98. *Пантелеев А.В., Семенов В.В.* Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. // М.: Изд-во МАИ, 1992. – 192 с.
99. *Параев Ю.И.* Введение в стохастическую динамику процессов управления и фильтрации. // М.: Сов. радио, 1976. – 184 с.
100. *Пегачкова Е.А.* Методика приближенного синтеза оптимальных линейных логико-динамических систем. // Вестник Московского авиационного института, 2010 г., т. 17, № 3 – С.222-225.
101. *Пегачкова Е.А., Кузнецова Е.Л., Зинченко А.С.* Субоптимальное «в среднем» управление гашением колебаний спутника с гравитационной штангой в условиях неопределенности. // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2015. Вып. 4. С. 103-111.
102. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Дифференциальные игры с неполной информацией. // Иркутск, Изд-во Иркутского ун-та, 1984. – 187 с.
103. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход. // М.: Мир, 1974.-376 с. 62.
104. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. // М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
105. *Попов Л.Д.* Поиск обобщенных решений несобственных задач линейного и выпуклого программирования с помощью барьерных функций. // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2011. Т. 4. № 2. С. 135.
106. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных систем. // М.: Наука, 1973. 255 с.
107. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. // М.: Наука, 1990. – 632 с.

108. *Пиеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. // М.: Наука, 1980. – 320 с.
109. *Пиеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. // М.: Наука, 1975. - 320с.
110. *Расина И.В.* Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов. // Программные системы: теория и приложения, 2012. №5 (9). С.49-72.
111. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. II. // Автоматика и телемеханика. 20:11 (1959). С. 1441–1458.
112. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. // М.: Наука, 1977. – 552 с.
113. *Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М., Царьков К.А.* Алгоритм поиска субоптимальных стратегий управления квазилинейными динамическими стохастическими системами диффузионного типа. // Изв. Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 74.
114. *Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Метод оптимизации квазилинейных стохастических систем в приложении к задаче оптимальной стабилизации спутника с упругой штангой. // Программные системы: теория и приложения. 2015. № 2. С. 3-17.
115. *Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Оптимальное управление нелинейными стохастическими системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния. // Автоматика и телемеханика. 2006. № 7. С.62-75.
116. *Семенов В.В., Репин В.М., Журина Н.Э.* Алгоритмизация процессов управления ЛА в классе логико-динамических систем. // М.: Изд-во МАИ. 1987. 49 с.
117. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. // М.: Наука, 1981. – 288 с.
118. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. // М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
119. *Уткин В.И.* Системы с переменной структурой: состояние проблемы, перспективы. // Автоматика и телемеханика. 1983, № 9, с. 5–25.
120. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. // М.: Наука, 1978. – 488 с.
121. *Федунов Б.Е.* Проблемы разработки бортовых оперативно-советующих систем для антропоцентрических объектов. // Известия РАН. Теория и системы управления. 1996. №5. С.147-160.
122. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. // Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. — 553 с.

123. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. // М.: Наука, 1985. – 223 с.
124. *Филиппова Т.Ф.* Оценки множеств достижимости систем с импульсным управлением, неопределенностью и нелинейностью. // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2017. Т. 19. С. 205-216.
125. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. // М.: Мир, 1978. – 318 с.
126. *Хрусталева М.М.* Необходимые и достаточные условия в форме уравнения Беллмана. // Докл. АН СССР. 1978. Т.242. №5. – С.1023-1026.
127. *Хрусталева М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению. // Автоматика и телемеханика. 2017. № 6. С. 84-105.
128. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. // М.: Наука, 1988. – 320 с.
129. *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. // М.: Наука, 1973. – 238 с.
130. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. // М.: Наука, 1978. – 351 с.
131. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. // М.: Наука, 1978. – 270 с.
132. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. // М.: Наука, 1969 – 424 с.
133. *Axelsson H., Boccadoro M., Egerstedt M., Valigi P., Wardi Y.* Optimal Mode-Switching for Hybrid Systems with Varying Initial States. // Journal of Nonlinear Analysis: Hybrid Systems and Applications, 2008. Vol.2. No.3. pp.765-772.
134. *Axelsson H., Wardi Y., Egerstedt M., Verriest E.* Gradient Descent Approach to Optimal Mode Scheduling in Hybrid Dynamical Systems. // Journal of Optimization Theory and Applications, 2008. Vol.136. No.2. pp.167-186.
135. *Boltyanski V.G.* The maximum principle for variable structure systems. // Int. J. on Control, 2004, v. 77, no. 17, p. 1445–1451.
136. *Bortakovskii A.S.* Optimization of processes with switchings of models of control systems. // Оптимальное управление и дифференциальные игры: Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Москва, 12–14 декабря 2018 г. – М.: МИАН; МАКС Пресс, 2018. С. 55-58.

137. *Bortakovskii A.S.* Synthesis of Optimal Control-Systems with a Change of the Models of Motion. // *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2018, Vol. 57, No. 4, pp. 543-560.
138. *Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.K.* A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory. *IEEE Trans. Automatic Control.* 1998. V. 43 № 1. P.31-45.
139. *Cassandras C.G., Pepyne D.L., Wardi Y.* Optimal control of a class of hybrid systems. // *IEEE Trans. Aut. Con.*, 2001. V.46. № 3. pp. 398-415.
140. *Fleming W.H.* Optimal control of partially observable diffusions. // *SIAM. J. Control.* – 1968. – v.6. –№2. – p.194-214.
141. *Hedlund S., Rantzer A.* Optimal control of hybrid systems. // *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Phoenix, AZ)*, 1999. pp.3972-3977.
142. *Li Z., Soh Y., Wen C.* Switched and impulsive systems: Analysis, design and applications. Berlin: Springer, 2005.
143. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Berlin: Springer, 2003.
144. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Qualitative theory of hybrid dynamical systems. Boston: Birkhäuser, 2000.
145. *Ovsyannikov D.A., Ovsyannikov A.D., Vorogushin M.F., Svistunov Yu.A., Durkin A.P.* Beam dynamics optimization: models, methods and applications *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment.* 2006. T. 558. № 1. C. 11-19.
146. *Savkin A.V., Evans R.J.* Hybrid dynamical systems: Controller and sensor switching problems. Boston: Birkhäuser, 2002.
147. *Silva G.N., Vinter R.V.* Necessary conditions for optimal impulsive control problems. // *SIAM. J. Control and Optim.* – 1997. – v.35. – No. 6. – p.1829-1846.
148. *Sussmann H.J.* A maximum principle for hybrid optimal control problems. // *Proc. of 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix*, 1999.
149. *Wonham W.M.* On the separation theorem of stochastic control. *J. SIAM Control.* – 1968. – v.6. – p.312-326.