На правах рукописи

Чернобровов Алексей Игоревич

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ VaR-КРИТЕРИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С CVaR-КРИТЕРИЕМ

Специальность 05.13.01
Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2012

Работа выполнена на кафедре «Теория вероятностей» Московского авиационного института (национального исследовательского университета, МАИ).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Кибзун Андрей Иванович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, **Щербаков Павел Сергеевич,** ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, главный научный сотрудник. кандидат физико-математических наук, доцент **Рыбаков Константин Александрович,** Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), доцент.
Ведущая организация:	ФГБУН Институт проблем информатики РАН

Защита состоится “21” декабря 2012 г. в 10 ч. 30 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., 4, аудитория 301 ГАК.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Автореферат разослан “___” ______________ 2012 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета Д 212.125.04,
кандидат физико-математических наук Н.С. Северина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования. В диссертационной работе изучаются задачи стохастического программирования с критерием в форме интегральной квантили. Интегральную квантиль также называют Conditional-Value-at-Risk (CVaR), Average-Value-at-Risk (AVaR), Expected Shortfall, Tail Value-at-Risk (TVaR), Tail Conditional Expectation (TCE).

Актуальность темы. В технике, экономике, биологии часто приходится иметь дело с математическими моделями, где часть исходных данных является случайными. Такие модели удобно описывать с помощью задач стохастического программирования. Такие задачи, в отличие от детерминированных, учитывают случайную природу происхожения событий, оказывающих важное влияние на саму модель. Поэтому результаты, полученные на основе стохастических моделей, как правило, более адекватны. Задачам стохастического программирования посвящены работы Дж. Бёржа, Р. Ветса, С. Волласа, Ю.М. Ермольева, П. Калла, Ю.С. Кана, А.И. Кибзуна, В. Купера, Р. Леппа, К. Марти, А.В. Назина, Н.М. Новиковой, Б.Т. Поляка, А. Прекопы, Э. Райка, С.П. Урясьева, А. Чарнса, Д.Б. Юдина и многих других авторов.

К прикладным задачам стохастического линейного программирования относятся, например, задача управления воздушным движением и планирования полетов с учетом погодных условий, задача планирования добычи угля, задача планирования перевозок и многие другие. На практике значительно чаще встречаются задачи, описанные в терминах нелинейного стохастического программирования. К таком классу принадлежат экономические задачи, например, задачи, связанные с построением инвестиционного портфеля, изучавшиеся в работах В.В. Домбровского, Ю.С. Кана, Дж. Келли, А.И. Кибзуна, Е.А. Кузнецова, Г. Марковица, А.Р. Панкова, К.В. Семенихина, Дж. Тобина, С.П. Урясьева; организационно-технические задачи планирования добычи, обработки и хранения нефти, оптимизации деятельности железнодорожного узла, прогноза скорости ветра и многие другие задачи. В авиационной сфере в последние годы при синтезе и анализе алгоритмов управления объектами, например, летательными аппаратами или ракетами, используются задачи стохастического управления, которые в некоторых случаях удается свести к задачам стохастического программирования. Задачи стохастического управления рассматриваются, например, в работах Б.И. Ананьева, Б.Ц. Бахшияна, Р. Беллмана, А. Брайсона, Р. Калмана, И.Я. Каца, В.Б. Колмановского, М.Н. Красильщикова, Н.Н. Красовского, В.В. Малышева, А.И. Матасова, Б.М. Миллера, А.В. Наумова, П.В. Пакшина, А.В. Пантелеева, Ю.П. Пытьева, Г.А. Тимофеевой, В.М. Хаметова, Ф.Л. Черноусько.

В задачах стохастического программированния от выбора критерия напрямую зависит адекватность полученных стратегий, поэтому выбор критерия сам по себе является нетривиальной задачей. Неправильный выбор критерия может привести к непредсказуемым или неудачным результатам.

Можно привести пример из современной теории инвестирования. В классической постановке Марковица средний доход фиксируется, и минимизируется дисперсия дохода как мера риска получить доход, отличный от среднего. Во многих случаях такая постановка не оправдана, так как слабо учитывает субъективные желания игрока. Более того, при тяжелых "хвостах" распределения постановка Марковица может быть и вовсе лишена смысла. Если в качестве критерия выбрать максимизацию среднего дохода, возникает эффект, называемый эффектом "биржевого парадокса". Данный эффект заключается в том, что доход лица, принимающего решения, может стремиться к бесконечности, но вероятность разориться при этом стремится к единице. Квантильная постановка задачи (или постановка с VaR-критерием) заключается в поиске стратегии, которая гарантирует максимальный доход с заданной вероятностью. Такая постановка гораздо лучше учитывает интересы инвестора, чем описанные выше, однако и ее легко раскритиковать. Например, можно получить стратегию, которая с заданной вероятностью гарантирует доход в 1 рубль, но при этом во всех остальных случаях сулит миллионные убытки. Такую стратегию можно легко получить с помощью VaR-критерия, поскольку он не учитывает все неблагоприятные случаи за уровнем заданной вероятности (на "хвосте" распределения). В частности, чтобы избежать получения таких стратегий, был предложен CVaR-критерий (интегральная квантиль), который характерезует усредненное значение в неблагоприятных случаях.

Задачам с VaR-критерием посвящены работы Б.В. Вишнякова, Р. Леппа, А.В Наумова, В.И. Норкина, Ю.С. Кана, А.И. Кибзуна, В.В. Малышева, Е.Л. Матвеева, К. Марти и других. Задачи с CVaR-критерием рассматриваются например, в работах Ф. Арцнера, Д. Дентчевой, Е.А. Кузнецова, А.И. Кибзуна, Е.А. Нурминского, Дж. Пфлюга, Р. Рокафеллара, А. Ручинского, С.В. Стоянова, С. Урясьева, А. Шапиро.

Первые работы по CVaR-критерию были сделаны в самом конце XX-века. Они тесно связаны с понятием когерентной меры риска. VaR, в отличие от CVaR-критерия, не является когерентной мерой риска.

CVaR также является выпуклой мерой риска. Из-за этих свойств CVaR-критерию в последние годы стало уделяться большое внимание в научных работах.

У CVaR критерия также есть недостатки. CVaR нельзя определить для случайных величин с "тяжелыми" хвостами, что является существенным недостатком по сравнению с VaR. На практике задачи часто формулируются в виде требований по надежности (ограничение на вероятности). Такие задачи можно свести к задаче с VaR критерием, но не с CVaR.

Помимо этого CVaR и VaR критерии обладают тесной связью между собой. Они могут быть связаны непосредственно через определение, причем разными способами. Поэтому некоторые результаты, справедливые для VaR, также можно использовать при решении задач с CVaR-критерием. Хотя сами критерии разные, представляют интерес случаи, когда множества решений задач VaR и CVaR будут совпадать.

Стоит отметить, что применение стандартных численных методов к решению задач стохастического программирования затруднено тем, что целевая функция имеет случайную структуру. Для преодоления данной трудности были разработаны алгоритмы, использующие стохастический квазиградиент. Ему посвящены работы Ю.М. Ермольева, А.М. Гупала, В.С. Михалевича, В.И. Норкина, С. Урясьева и других. Применение таких алгоритмов достаточно полно исследованно для задач с VaR-критерием, некоторые эти результаты можно использовать для CVaR-критерия. Поэтому представляет интерес построение стохастического квазиградиентного алгоритма для решения задач с CVaR-критерием.

Таким образом, проблема разработки эффективных методов поиска оптимальных стратегий в задачах стохастического программирования с CVaR-критерием, ипользующих свойства VaR-критерия, является актуальной.

Цель работы. Целью работы является построение алгоритмов решения задач стохастического программирования с CVaR-критерием, использующих свойства и информацию о значении VaR-критерия.

<u>Для достижения поставленной цели предполагается:</u>

1) построение детерминированных эквивалентов для задач с CVaR-критерием;

2) описание условий эквивалентности задач с критериями VaR и CVaR;

3) разработка стохастического квазиградиентного алгоритма миними-

зации CVaR-критерия;

4) разработка алгоритма для решения комбинированной задачи с VaR-критерием и ограничением на CVaR.

Методы исследования. Для исследования теоретических проблем использовались современные методы стохастического программирования, теории вероятностей, математической статистики, нелинейного программирования, выпуклого анализа и стохастической оптимизации. Для исследования прикладных задач использовались методы компьютерного статистического моделирования.

Достоверность результатов. Достоверность результатов обеспечивается:

1) строгостью постановок и доказательств утверждений;

2) подтверждением аналитических результатов результатами численного моделирования при решении ряда тестовых примеров.

Научная новизна. В работе получены новые результаты для эффективного решения задач вероятностной оптимизации, среди которых можно выделить следующие:

1) Получены детерминированные эквиваленты для широкого круга задач с CVaR-критерием;

2) Получено аналитическое решение для задач с VaR и CVaR критериями для билинейной целевой функции при симметричном распределении случайного вектора;

3) Сформулированы условия, при которых задачи с критериями VaR и CVaR эквиваленты для разных классов функции потерь;

4) Разработан стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации CVaR-критерия, использующий выборочные оценки, сходящийся почти наверное;

5) Предложены алгоритмы решения задач с VaR-критерием и ограничением на CVaR для кусочно-линейной и билинейной функций потерь.

Практическая значимость. Диссертация обладает практической значимостью, поскольку полученные результаты позволяют эффективно решать прикладные задачи с CVAR-критерием, в частности:

в области экономики при построении рациональной стратегии распределения ресурсов;

в области техники – рассмотрена задача об оптимизации взлетно-посадочной полосы: найдена её верхняя оценка с использованием CVaR-критерия.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и симпозиумах: Международная конференция “Авиация и космонавтика” (Москва, 2011, 2012гг.), Международная студенческая олимпиада по автоматическому управлению “BOAC” (Санкт-Петербург, 2011г.), Международная (43-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики», (Екатеринбург, 2012г.), молодежная школа “Информация, управление, оптимизация” (Ярополец, 2011г., Звенигород, 2012г.) а также на научном семинаре в МАИ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в трех статьях [1-3] в журналах, входящих в Перечень ВАК, в научном журнале [4] и в трудах и тезисах международных научных конференций [5-12].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы (99 источников). Объем диссертации включает 105 машинописных страниц, включая 2 рисунка, 1 таблицу.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулированы цель и задачи диссертации, описана структура работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты.

В первой главе приводятся основные понятия и определения, относящиеся к стохастическому программированию, а также к математическому и выпуклому анализу, рассматриваются различные варианты постановок задач с вероятностными критериями.

Рассмотрим $\Phi(u, X)$ – функцию потерь, которую необходимо минимизировать. Вектор u размерности m имеет смысл управления, $u \in U \subset \subset \mathbb{R}^m$, U – область допустимых управлений, а X – вектор случайных параметров размерности n.

Определим для $\Phi(u, X)$ функцию вероятности, VaR-критерий (функцию квантили) и CVaR-критерий (функцию интегральной квантили):

$$P_\varphi(u) \stackrel{def}{=} \mathcal{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\}, \tag{1}$$

где φ – некоторый допустимый уровень потерь,

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{def}{=} [\Phi(u, X)]_\alpha \stackrel{def}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}, \tag{2}$$

$$\psi_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \{\Phi(u, X)\}_\alpha \stackrel{def}{=} \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \varphi_\beta(u) d\beta. \tag{3}$$

VaR-критерий показывает, что потери при выбранной стратегии u с вероятностью не меньше α не превысят значения $\varphi_\alpha(u)$. CVaR-критерий – усредненное значение функции квантили на отрезке $[\alpha, 1]$. Физический смысл данной функции есть усредненные потери на "хвосте" распределения.

В технических задачах VaR может характеризовать гарантированную с заданной вероятностью точность попадания объекта в заданную область. Тогда CVaR характеризует среднее значение точности за уровнем VaR.

Как видно из (3) VaR и CVaR связаны между собой через определение. Между ними также установлена другая связь.

Т е о р е м а 1.1. [Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.] Если для некоторого $u \in U$ выполнено условие $|\psi_\alpha(u)| < \infty$, то функция $\psi_\alpha(u)$ представима в виде

$$\psi_\alpha(u) = \lambda_\alpha(u)\varphi_\alpha(u) + (1 - \lambda_\alpha(u))\psi_\alpha^+(u), \tag{4}$$

где

$$\lambda_\alpha(u) \overset{def}{=} \frac{P_{\varphi_\alpha(u)}(u) - \alpha}{1 - \alpha}, \quad \psi_\alpha^+(u) \overset{def}{=} \mathbf{M}[\Phi(u, X)|\Phi(u, X) > \varphi_\alpha(u)]. \tag{5}$$

CVaR-критерий также можно представить как решение задачи оптимизации.

Т е о р е м а 1.2. [Rockafellar R.T., Uryasev S.] Если для некоторого $u \in$ $\in U$ выполнено условие $\mathbf{M}[\Phi(u, X)] < \infty$, то функция $\psi_\alpha(u)$ представима в виде

$$\psi_\alpha(u) = \min_{\varphi \in \mathbb{R}} F_\alpha(u, \varphi), \tag{6}$$

где

$$F_\alpha(u, \varphi) \overset{def}{=} \varphi + \frac{1}{1 - \alpha}\mathbf{M}[\max\{0, \Phi(u, X) - \varphi\}]. \tag{7}$$

В первой главе приведены основные свойства VaR и CVaR критериев, которые используются в работе. Рассматриваются задачи стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания, VaR-критерием, CVaR-критерием. Данные постановки рассмотрены как в терминах потерь, так и в терминах точности (доходов).

Задача стохастического программирования с VaR-критерем

$$\varphi_\alpha(u) \to \min_{u \in U}. \tag{8}$$

Задачи с VaR-критерием возникают в случае, когда необходимо найти такую стратегию u, которая бы минимизировала потери с заданной вероятностью α.

Задача стохастического программирования с CVaR-критерием

$$\psi_\alpha(u) \to \min_{u \in U}. \tag{9}$$

Задачи с CVaR-критерием возникают в случае, когда необходимо минимизировать усредненные потери, наступающие в неблагоприятных случаях (вероятность наступления таких случаев $1-\alpha$).

Во второй главе рассматриваются задачи с VaR и CVaR-критериями, найдены условия, при которых данные задачи эквиваленты. Установлена эквивалентность между формулировками задач в терминах точности (дохода) и терминах потерь, приведенными в первой главе работы.

Для множества решений задачи квантильной оптимизации используется обозначение

$$U_\alpha^\varphi = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \quad u_\alpha^\varphi = \arg\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \tag{10}$$

для множества решений задачи оптимизации интегральной квантили

$$U_\alpha^\psi = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \psi_\alpha(u), \quad u_\alpha^\psi = \arg\min_{u \in U} \psi_\alpha(u). \tag{11}$$

Множество решений задачи с критерием в виде математического ожидания обозначено как

$$U^{\mathbf{M}} = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \mathbf{M}[\Phi(u, X)], \quad u^{\mathbf{M}} = \arg\min_{u \in U} \mathbf{M}[\Phi(u, X)]. \tag{12}$$

В работе Б.В. Вишнякова и А.И. Кибзуна получены детерминированные эквиваленты для задачи оптимизации VaR-критерия (10) для различных функций потерь. Во второй главе диссертации получены детерминированные эквиваленты задачи (11) для разных целевых функций.

Для различных видов целевых функций приведены условия, когда задачи с CVaR-критерием и VaR-критерием имеют общий детерминированный эквивалент.

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что решение одной из задач (10),(11),(12) частично эквивалентно решению другой задачи, если множество решений первой не пусто и оно является подмножеством решений второй.

О п р е д е л е н и е 2.2. Будем говорить, что одна из задач (10),(11),(12) эквивалентна другой тогда, когда множества их решений совпадают.

1. Функция потерь, линейная относительно случайной величины.

Л е м м а 2.5. Пусть $\Phi(u,X) = s_1(u) + s_2(u)f_1(X)$, где

$f_1(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, $\mathbf{M}[f_1(X)] < \infty$,

$s_1(u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $s_2(u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ — неотрицательная функция,

$$U_* \stackrel{def}{=} \operatorname{Arg}\min_{u\in U} s_1(u) \cap \operatorname{Arg}\min_{u\in U} s_2(u) \neq \varnothing.$$

Тогда

(i) если $\mathbf{M}[f_1(X)] > 0$, то для всех $\alpha \in (0,1)$ $U_\alpha^\psi = U^{\mathbf{M}} = U_*$;

(ii) если $[f_1(X)]_\beta > 0$ для некоторого $\beta \in (0,1)$, то для всех $\alpha \in [\beta, 1)$ $U_\alpha^\varphi = U_\alpha^\psi = U_*$.

2. Функция потерь со скалярной билинейной структурой.

Билинейной функцией будем называть функцию вида $\Phi(u,X) = u^T X$. В работе доказана следующая теорема. *Т е о р е м а* 2.1. Пусть $\Phi(u,X) = r(s_1(u) + s_2(u)f_1(X) + f_2(X))$,

$r(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая непрерывная слева функция,

$s_1(u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $s_2(u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ — неотрицательная на U функция,

$f_1(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f_2(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — измеримые функции,

$f_1(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{M}[\Phi(u,X)] < \infty$ для всех $u \in U$,

$$U_* \stackrel{def}{=} \operatorname{Arg}\min_{u\in U} s_1(u) \cap \operatorname{Arg}\min_{u\in U} s_2(u) \neq \varnothing. \tag{13}$$

Тогда для всех $\alpha \in (0,1)$ задача (13) будет частично эквивалентна задачам (10), (11) и эквивалентна задаче (12).

3. Функция потерь обладает билинейной структурой при сферически симметричном распределении случайного вектора.

Будем говорить, что распределение случайного вектора X сферически симметрично, если его плотность можно представить в виде

$$p_X(x) \stackrel{def}{=} f(||x||^2) = f(x^T x), \tag{14}$$

где функция $f(t)$ определена для $t \in [0,\infty)$ и является неотрицательной.

В работе доказана следующая теорема об эквивалентности.

Т е о р е м а 2.3. Пусть функция потерь имеет вид $\Phi(u,X) = r(u^T AX)$, где $||A^T u|| > 0$, а распределение X имеет вид (14), $[X_1]_\beta > 0$ для некоторого $\beta \in (0,1)$, причем $\mathbf{M}[\Phi(u,X)] < \infty$ для всех $u \in U$. Тогда для всех $\alpha \in [\beta, 1)$ задачи (10), (11) эквивалентны, т.е.

$$U_\alpha^\varphi = U_\alpha^\psi = U_* \stackrel{def}{=} \operatorname{Arg}\min_{u\in U} ||A^T u||.$$

4. Функция потерь обладает билинейной структурой при симметричном распределении случайного вектора.

О п р е д е л е н и е 2.3. Будем говорить, что распределение n-мерного случайного вектора $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$ симметрично, если его функция распределения $F_X(x_1, x_2, ..., x_n)$ не изменяется при всех перестановках входящих в нее переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

В работе доказана следующая теорема об эквивалентности.

Т е о р е м а 2.4. Пусть $\Phi(u, X) = -\sum_{i=1}^{m} u_i X_i$, X обладает симметричным распределением таким, что α-ядро является регулярным и $[-X_i]_\alpha < 0$, $\mathbf{M}[X_i] = \mu < \infty$ для всех $i = \overline{1, m}$, множество допустимых стратегий $U = \{u : \sum_{i=1}^{m} u_i = 1, u_i \geqslant 0, i = \overline{1, m}\}$. Тогда задачи (10), (11) частично эквивалентны задаче (12) и их решением является

$$u_\alpha^\varphi = u_\alpha^\psi = (1/m, ..., 1/m)^T,$$

$$\varphi_\alpha(u_\alpha^\varphi) = \frac{1}{m}\left[-\sum\nolimits_{i=1}^{m} X_i\right]_\alpha, \psi_\alpha(u_\alpha^\psi) = \frac{1}{m}\left\{-\sum\nolimits_{i=1}^{m} X_i\right\}_\alpha.$$

Третья глава посвящена стохастическому квазиградиентному алгоритму (СКА) минимизации CVaR-критерия (11).

Для построения алгоритма используются выборочные оценки CVaR.

Пусть для любого $u \in U$ есть возможность получить выборку $\{\Phi(u, X_i)\}_{i=1}^{n_k}$ объёма n_k функции $\Phi(u, X)$. Обозначим через $\{\Phi_{(i)}(u)\}_{i=1}^{n_k}$ вариационный ряд выборки, т.е. расположенные в порядке возрастания порядковые статистики

$$\Phi_{(1)}(u) \leqslant \Phi_{(2)}(u) \leqslant ... \leqslant \Phi_{(n_k)}(u).$$

На основе данного вариационного ряда сконструируем оценку

$$\widehat{\psi}_k(u) \overset{def}{=} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{l_k}{n_k} - \alpha\right)\Phi_{(l_k)}(u) + \frac{1}{n_k - l_k}\sum_{j=l_k+1}^{n_k} \Phi_{(j)}(u), \qquad (15)$$

где

$$l_k \overset{def}{=} \begin{cases} \alpha n_k, & \alpha n_k \in \mathbb{N}^+, \\ [\alpha n_k] + 1, & \alpha n_k \notin \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Пусть $\delta_k > 0$ — числовая последовательность $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Назовем стохастическим квазиградиентом CVaR случайный вектор

$$\xi_k(u, \delta_k) \overset{def}{=} \frac{1}{2\delta_k}\sum_{i=1}^{m}[\widehat{\psi}_k(\tilde{u}_1, \dots, u_i+\delta_k, \dots, \tilde{u}_m) - \widehat{\psi}_k(\tilde{u}_1, \dots, u_i-\delta_k, \dots, \tilde{u}_m)]e_i, \qquad (16)$$

где $\tilde{u}_i$ имеют равномерные распределения на отрезках $[u_i-\delta_k, u_i+\delta_k], i = \overline{1,m}$, и независимы.

А л г о р и т м 1.

1) $k = 0$. Выбрать стартовую точку $u^{(0)} \sim \mathcal{R}(U)$. Выбрать $\varepsilon > 0$, константу L таким образом, что почти наверное выполняется соотношение $u_\alpha \in \{u : ||\xi(u^{(k)}, \delta_k)|| \leqslant L\}$.

2) Вычислим следующую точку последовательности

$$u^{(k+1)} = \begin{cases} \Pi_U^k \left[u^{(k)} - \rho_k \xi_k(u^{(k)}, \delta_k)\right], & ||\xi_k(u^{(k)}, \delta_k)|| \leqslant L, \\ \tilde{u}^{(k)}, \quad ||\xi_k(u^{(k)}, \delta_k)|| > L, \end{cases} \tag{17}$$

где $\tilde{u}^{(k)}$ имеет равномерное распределение на множестве U, и все $\tilde{u}^{(k)}$ независимы, $L > 0$ — достаточно большое число, ρ_k — длина шага алгоритма. Π_U^k – оператор рандомизированного проецирования на область U_1 на k-ом шаге, т.е. отображение $\Pi_U^k : \mathbb{R}^m \to U_1$, задаваемое соотношением

$$\Pi_U^k(u) \stackrel{def}{=} \begin{cases} u, u \in U, \\ \widehat{u}^{(k)}, u \notin U, \end{cases} \tag{18}$$

где случайная величина $\widehat{u}^{(k)}$ имеет равномерное распределение на шаре

$$B_\varepsilon \stackrel{def}{=} \left\{u_1 \in U_1 : \left|\left|u_1 - \arg\min_{v \in U} ||u - v||\right|\right| \leqslant \varepsilon\right\},$$

все $\widehat{u}^{(k)}$ независимы.

3) Если не выполены условия остановки, то $k = k + 1$ и переходим к шагу 2.

В главе сформулирована теорема о сходимости данного алгоритма почти наверное при $k \to \infty$.

Т е о р е м а 3.6. Пусть выполнены следующие условия:

(i) Функция $\Phi(u, x)$ является выпуклой по u на компакте U_1 для всех $x \in \mathbb{R}^s$;

(ii) $\psi_\alpha(u)$ имеет ограниченные непрерывные вторые производные для всех $u \in U_1$;

(iii) для каждого $u \in \operatorname{int}(U_1)$ функция вероятности $P_\varphi(u)$ дважды дифференцируема по φ и эти производные ограничены, $\frac{\partial}{\partial\varphi} P_\varphi(u) > 0$ для всех $\varphi \in V_\varepsilon(u)$ для каждого $u \in U_1$;

(iv) для всех $u \in \operatorname{int}(U_1)$ функция квантили $\varphi_\beta(u)$ непрерывна по $\beta \in$ $\in [\alpha, 1)$ и $f_\Phi(\varphi_\beta(u)) = O(1 - \beta)$ при $\beta \to 1$;

(v) последовательность ρ_k удовлетворяет условиям

$$\rho_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < \infty;$$

(vi) последовательности δ_k и n_k удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_k}} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k \delta_k^2} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{\delta_k \sqrt{n_k}} < \infty;$$

(vii) существует $\gamma > 1$, удовлетворяющее условию
$\gamma > \max\left\{\frac{1}{n_k - [n_k\alpha]}, \frac{1}{[n_k\alpha]+1}\right\}$, такое, что

$$\mathbf{M}[|\Phi(u, X)|^\gamma] < \infty \text{ для всех } u \in U_1;$$

(viii) $\mathrm{mes}\,\{(u, x) \in U_1 \times \mathbb{R}^s : \Phi(u, x) = \varphi\} = 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

Тогда $u^{(k)} \xrightarrow{\text{п.н.}} u_\alpha$, где последовательность u_k образована алгоритмом (17), а u_α – решение задачи (11).

Примерами последовательностей, удовлетворяющих условиям *(v)-(vi)* теоремы, являются, например, последовательности

$$\rho_k = \frac{\rho_0}{k}, \quad \delta_k = \frac{\delta_0}{k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}, \quad n_k = [n_0 k^{2+3\varepsilon}].$$

В четвертой главе рассмотрена задача с VaR-критерием и ограничением на CVaR. Данная постановка модифицирует известную задачу Марковица: необходимо найти стратегии, дающие максимальный доход, гарантированный с заданной вероятностью $\alpha \in (0, 1)$, при этом доход в среднем в $1 - \alpha$ неблагоприятных случаях должен быть не меньше наперед заданного значения $\tilde{C}$.

Благодаря утверждениям из главы 2, данную задачу можно сформулировать в терминах потерь в следующем виде

$$u_\alpha = \arg\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u) \tag{19}$$

при условии

$$\psi_\alpha(u) \leqslant C. \tag{20}$$

Такая постановка, в отличие от обычной задачи квантильной оптимизации, учитывает возможный эффект в неблагоприятных случаях (вероятность которых $1 - \alpha$), когда ограничение (20) активно.

Рассмотрен пример для скалярного билинейного случая, где удается построить аналитическое решение. Приводится сравнение данного решения с решением задачи (10). Однако поиск аналитических решений в многомерном случае представляется затруднительным, поскольку не удается получить явный вид ограничения (20).

В работе предложен алгоритм приближенного решения задачи (19)-(20) для кусочно-линейной функции потерь.

В качестве выборочной оценки функции квантили используется оценка, основанная на экстремальных порядковых статистиках. Пусть $N = N(\alpha) \stackrel{def}{=} [1/(1-\alpha)]$. Рассмотрим выборку X_{i_k} объема KN, где $i_k = (k-1)N, (k-1)N+1, ..., kN$, $k = \overline{1,K}$. Данная выборка состоит из K подвыборок, каждая из которых имеет объем N. Сформируем K экстремальных порядковых статистик и K предпоследних порядковых статистик

$$\hat{\Phi}_{N,k}(u) = \max_{(k-1)N \leqslant i_k \leqslant kN} \Phi(u, X_{i_k}), \quad k = \overline{1,K}. \tag{21}$$

$$\hat{\Phi}_{(N-1),k}(u) = \max_{(k-1)(N-1) \leqslant i_k \leqslant k(N-1)} \Phi(u, X_{i_k}), \quad k = \overline{1,K}. \tag{22}$$

В качестве оценки VaR-критерия используется

$$\hat{\varphi}_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \frac{(1-\mu)}{K} \sum_{k=1}^{K} \hat{\Phi}_{N,k}(u) + \frac{\mu}{K} \sum_{k=1}^{K} \hat{\Phi}_{(N-1),k}(u), \tag{23}$$

где $\mu \approx 0,5772$ – константа Эйлера.

Введем обозначение для множества

$$\bar{U}_t \stackrel{def}{=} \{(u,\varphi) : \hat{F}_\alpha(u,\varphi) \leqslant t\},$$

где $\hat{F}_\alpha(u,\varphi)$ – выборочная оценка функции $F_\alpha(u,\varphi)$, определенной в (7).

$$\hat{F}_\alpha(u,\varphi) = \varphi + \frac{1}{(1-\alpha)KN} \sum_{l=1}^{KN} [\max(0, \Phi(u, X_l) - \varphi)], \tag{24}$$

где X_l, $l = \overline{1,KN}$, — это элементы выборки $\{X_1, X_2, ..., X_{KN}\}$.

А л г о р и т м 2.

1) $k = 0$. Решается задача (19) без учета ограничения (20) любым известным методом. Например, можно (19) заменить оценкой (23) и использовать стандартные методы выпуклой оптимизации, поскольку если функция потерь кусочно-линейная, то (23) является выпуклой кусочно-линейной функцией, которую можно записать в явном виде.

Если найденное решение u^* удовлетворяет ограничению (20), то счет окончен. Иначе решение исходной задачи находится на границе множества ограничений и в (20) должно выполняться равенство. Полагаем $v^{(0)} = \hat{\varphi}_\alpha(u^*)$ и переходим к шагу 2.

2) Решается задача линейного программирования

$$\hat{\psi}_\alpha(v^{(k)}) = \min_{t \in \mathbb{R}^1, \bar{u} \in (U_v \times \mathbb{R}^1) \cap \bar{U}_t} t, \tag{25}$$

решение которой зависит от параметра $v^{(k)} \in \mathbb{R}^1$.

$$U_v \stackrel{def}{=} \{u \in U : \hat{\varphi}_\alpha(u) \leqslant v^{(k)}\}$$

является выпуклым многогранным множеством, так как функция $\hat{\varphi}_\alpha(u)$ кусочно-линейна и имеет явное выражение. Так как $U_{v_2} \subseteq U_{v_1}$ при $v_2 < v_1$, то функция $\hat{\psi}_\alpha(v)$ монотонно возрастает по v. Кроме того, по свойствам задач линейного программирования решение, в данном случае $\hat{\psi}_\alpha(v)$, непрерывно зависит от начального параметра v. Переходим к шагу 3.

3) Если выполнены условия остановки алгоритма или условие

$$\hat{\psi}_\alpha(v^{(k)}) = C, \tag{26}$$

где константа C взята из ограничения (20) модифицированной задачи Марковица, то переходим к шагу 4.

Иначе $k = k + 1$. Так как функция $\hat{\psi}_\alpha(v)$ является монотонной и непрерывной по параметру v, то корень v_* уравнения (26) можно найти, например, методом дихотомии. Выбираем следующую точку $v^{(k+1)}$ методом дихотомии и переходим к шагу 2.

4) В качестве приближенного решения модифицированной задачи Марковица выбираются $\hat{u}_\alpha(v_*)$ и $\hat{\varphi}_\alpha(v_*)$, которые являются решениями задачи (25) для параметра v_*. Если уравнение (26) не имеет решения, то в качестве приближенного решения модифицированной задачи Марковица принимается задача

$$\hat{u}_\alpha = \arg \min_{v \in \mathbb{R}^1, u \in U_v} v$$

которая также является задачей линейного программирования.

В четвертой главе также предложен алгоритм решения задачи для (19)-(20) в случае, когда функция потерь имеет билинейный вид

$$\Phi(u, X) = -bu_0 - X^T \bar{u} = -bu_0 - \sum_{i=1}^{n} X_i u_i,$$

а X имеет многомерное нормальное распределение $X = \mathrm{col}(X_{(1)}, ..., X_{(n)}) \sim \mathcal{N}\left(m, \bar{K}\right)$, где $m = \mathrm{col}(m_1, ..., m_n)$ – вектор математических ожиданий, а $\bar{K}$ – ковариационная матрица. Используется обозначение $\bar{u} \overset{def}{=} \mathrm{col}(u_1, ..., u_n)$.

А л г о р и т м 3.

1) Вычислим $\gamma \overset{def}{=} \sqrt{(m-be)^T \bar{K}^{-1} (m-be)}$, где $e = \mathrm{col}(1,1,...,1)$ – вектор, составленный из единиц соответствующей размерности. Если $\gamma_\alpha \geqslant \gamma$, то задача имеет тривиальное решение $u_{\alpha,0} = 1$, $\bar{u}_\alpha = \mathrm{col}(0,0,...,0)$.

2) Если $\gamma_\alpha < \gamma$, то зафиксируем средний доход, т.е $\mu_\Phi(u) = v$, и добавим это ограничение в (19)-(20). Получим задачу

$$u_\alpha(v) = \arg\min_{u \in U} (\gamma_\alpha \sigma_\Phi(\bar{u}) - v) \tag{27}$$

при условии

$$\frac{\sigma_\Phi(\bar{u})}{1-\alpha} \int\limits_\alpha^1 \gamma_\beta d\beta - v \leqslant C, \tag{28}$$

$$\mu_\Phi(u) = v. \tag{29}$$

3) Можно воспользоваться аналитическим способом нахождения v_*, при котором в ограничении (28) будет выполняться равенство

$$v_* = b \int\limits_\alpha^1 \gamma_\beta d\beta \left[\gamma + \int\limits_\alpha^1 \gamma_\beta d\beta \right]^{-1}.$$

Таким образом, разрешено ограничение (28).

В случае, если решение находится не на границе $\psi_\alpha(u) = C$, то модифицированная задача Марковица эквивалентна задаче максимизации VaR-критерия без ограничений.

4) Решение задачи (27)-(29) будет совпадать с решением следующей задачи квадратичного программирования.

$$u_\alpha(v_*) = \arg\min_{\bar{u} \in U} \left(\bar{u}^T \bar{K} \bar{u} \right) \tag{30}$$

при условии

$$\mu_\Phi(u) = v_*. \tag{31}$$

Данная задача может быть легко решена одним из методов квадратичного программирования. Минимум в (30) обусловлен тем, что $\gamma_\alpha > 0$. Следовательно, минимизируя $\bar{u}^T \bar{K} \bar{u}$, будем максимизировать VaR-критерий.

В пятой главе рассматриваются две задачи из авиационной отрасли.

Первой задачей является оптимизация площади взлётно-посадочной полосы (ВПП), необходимой для гарантированной посадки самолета.

В работе Ю.С. Кана показано, что задачу оптимизации ВПП можно свести к задаче с VaR-критерием:

$$\varphi_\alpha(u_1, u_2) \to \min_{u_1, u_2 > 0}, \tag{32}$$

где $\varphi_\alpha(u_1, u_2)$ — функция квантили уровня α для функции потерь $\Phi(u_1, u_2, X, Z)$. Значением $\varphi_\alpha(u_1, u_2)$ является корнень из минимальной площади ВПП, которая гарантирует посадку самолета с вероятность α.

$$\Phi(u_1, u_2, X, Z) \stackrel{def}{=} \max\left\{\Phi_1(u_1, u_2, X), \Phi(u_1, u_2, X), \Phi_3(u_2, Z)\right\}, \tag{33}$$

$$\Phi_1(u_1, u_2, X) \stackrel{def}{=} \frac{-X(1+u_1)/u_1 + l_0}{\sqrt{u_2}}, \tag{34}$$

$$\Phi_2(u_1, u_2, X) \stackrel{def}{=} \frac{X(1+u_1) + l_0}{\sqrt{u_2}}, \Phi_3(u_2, Z) \stackrel{def}{=} 2|Z|\sqrt{u_2}. \tag{35}$$

$$X = a_{11}W_x + a_{12}|W_z|, \quad Z = a_{22}W_z, \tag{36}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, l_0 — известные коэффициенты. Такая модель влияния ветра используется в случае, когда посадка ЛА управляется лишь путем изменения угла крена. Предположим, что W_x, W_z — независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами $\mathbf{M}[W_x] = m_x, \mathbf{M}[W_z] = m_z, \mathbf{D}[W_x] = \sigma_x^2, \mathbf{D}[W_z] = \sigma_z^2$.

Для решения данной задачи используется CVaR как оценка сверху для VaR-критерия.

$$\psi_\alpha(u_1, u_2) \to \min_{u_1, u_2 > 0}, \tag{37}$$

где $\psi_\alpha(u_1, u_2)$ — CVaR-критерий уровня α для $\Phi(u_1, u_2, X, Z)$.

Задача решается с помощью стохастического квазиградиентного алгоритма, рассмотренного в третьей главе данной работы. Полученный результат сравнивается с уже известными решениями данной задачи.

К сожалению, $\Phi(u_1, u_2, X, Z)$ не является выпуклой функцией по переменным u_1, u_2, поэтому проверить выпуклость функции $\psi_\alpha(u_1, u_2)$ представляется затруднительным.

Вычисления были проведены для следующих значений параметров: $m_x = m_z = 0, \sigma_x = \sigma_z = 5, a_{11} = a_{12} = -20, a_{22} = 3,\ l_0 = 1500$.

Результаты решения для разных уровней α приведены в таблице ниже. Первая строчка – это решения задачи (32), они взяты из работы Е.Л. Матвеева, вторая строчка – это решения задачи (37) СКА, предложенным в третьей главе диссертации.

α	Метод	u_1	u_2	Площадь, км^2
0.99	VaR	1,9189	27,014	0,173
	CVaR	1,9210	27,108	0,189
0.999	VaR	1,424	22,043	0,2348
	CVaR	1,426	22,142	0,2461

Как видно из таблицы, оценка CVaR-критерия оказывается между VaR-оценкой и аналитической оценкой. Таким образом, CVaR-критерий можно применять как верхнюю оценку для данной задачи.

Второй пример относится к области инвестирования в высокорисковые активы авиационной промышленности.

Решена задача оптимального распределения инвестиций в развитие отраслей наземно-космического комплекса (НКК) с CVaR-критерием на тестовых данных. Данная задача имеет билинейную целевую функцию и для решения применен СКА, предложенный в третьей главе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1) Получены детерминированные эквиваленты для задач с CVaR-критерием [3, 10].

2) Найдено аналитическое решение для задач с VaR и CVaR критериями для билинейной целевой функции при симметричном распределении случайного вектора [9].

3) Найдены условия, при которых задачи с критериями VaR и CVaR эквиваленты для разных классов функции потерь [3, 11].

4) Разработан стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации CVaR-критерия, сходящийся почти наверное [2, 6, 8, 12].

5) Предложен вычислительный алгоритм решения задачи с VaR-критерием и ограничением на CVaR для кусочно-линейной функции потерь и для билинейной функции потерь при многомерном нормальном распределении случайного вектора [1,5].

6) Решены две задачи из авиационной области. Задача оптимизации распределения инвестиций в развитие отраслей наземно-космического комплекса [4] и задача оптимизации площади взлетно-посадочной полосы [6, 7].

Публикации в журналах из перечня ВАК

1) *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Алгоритм решения обобщенной задачи Марковица // Автоматика и Телемеханика, 2011, № 2, С. 41-60.

2) *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции интегральной квантили // Автоматика

и Телемеханика, 2012, № 2, С. 77 — 92.

3) *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Эквивалентность задач с критериями в форме квантили и интегральной квантили // Автоматика и Телемеханика, 2013, № 2, С. 75 — 93.

Публикации в других изданиях

4) *Кибзун А. И., Чернобровов А.И.* Задача оптимизации производства для наземных космических комплексов с критериями в форме квантили и интегральной квантили // Труды МАИ, 2012, №52.

5) *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Алгоритмы решения задач стохастического программирования с критериями VaR и CVaR // XIV-я Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения», Екатеринбург, 2011, С. 254 — 256.

6) *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Применение стохастического квазиградиентного алгоритма минимизации интегральной квантили для оценки сверху квантильного критерия // 10-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2011», Москва, С. 285 — 286.

7) *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Оптимизация площади взлетно-посадочной полосы с помощью CVaR-критерия // 11-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2012», Москва, С. 399 — 400.

8) *Чернобровов А.И.* Доказательство сходимости алгоритма минимизации функции интегральной квантили с вероятностью единица. //16-я международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», 2011, С. 134 – 135.

9) *Чернобровов А.И.* Об эквивалентности задач с критериями в форме квантили и интегральной квантили с билинейной целевой функцией // Сборник тезисов докладов «Инновации в авиации и космонавтике – 2012», 2012, С. 259.

10) *Чернобровов А.И.* Об эквивалентности некоторого класса задач с критериями в форме квантили и интегральной квантили // Научные труды Международной молодежной научной конференции «XXXVIII Гагаринские чтения». М: МАТИ, 2012, Т. 5., С. 129 – 130.

11) *Чернобровов А.И.* Параллельный и рекуррентный способ решения семейства задач минимизации CVaR-критерия // Тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики», 2012, С. 299 – 301.

12) *Chernobrovov A.I.* Optimization of the CVaR by a Stochastic Quasigradient Algorithm // 14th International Student Olympiad on Automatic Control, Russia, 21-23 September, 2011. P. 100 – 104.