

Научная статья

УДК 004.021

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181880>

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРАВЛЕННЫХ СВОЙСТВ ДВУМЕРНЫХ ИЗЛУЧАЮЩИХ СТРУКТУР**

**Елена Викторовна Овчинникова<sup>1</sup>, Павел Александрович Шмачилин<sup>2</sup>,  
Светлана Геннадьевна Кондратьева<sup>3</sup>, Эльчин Вахидович Гаджиев<sup>4</sup>✉,  
Степан Владимирович Павлов<sup>5</sup>**

<sup>1,2,3,4</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

<sup>4</sup>Акционерное общество «Научно-производственная корпорация «Космические системы мониторинга, информационно-управляющие и электромеханические комплексы» имени А.Г. Иосифьяна», Москва, Россия

<sup>5</sup>Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С. П. Королева  
Королев, Московская область, Россия

<sup>1</sup>[oea8888@gmail.com](mailto:oea8888@gmail.com)

<sup>2</sup>[shmachilin@gmail.com](mailto:shmachilin@gmail.com)

<sup>3</sup>[kondratieff89@ya.ru](mailto:kondratieff89@ya.ru)

<sup>4</sup>[gadzhiev\\_elchin@mail.ru](mailto:gadzhiev_elchin@mail.ru) ✉

<sup>5</sup>[pav00.00@mail.ru](mailto:pav00.00@mail.ru)

**Аннотация.** Объектом исследования является метод конечных разностей во временной области с алгоритмом пересчета поля ближней зоны в поле в дальней зоне. Цель работы – программно реализовать метод FDTD с граничными условиями

и с возможностью расчета направленных свойств двумерных излучающих структур. Программа направлена на то, чтобы внести свой вклад в область вычислительной электромагнетики и её практических приложений, предоставляя пользователям универсальный и доступный инструмент для анализа явлений распространения, отражения, пропускания и рассеяния волн в двумерном пространстве и расчёте диаграмм направленности различных структур. В процессе работы проводились реализация граничных условий, разработка методики расчёта коэффициента отражения от граничных условий, программная реализация метода конечных разностей во временной области (FDTD), разработка алгоритма пересчёта ближнего поля в поле в дальней зоне, моделирование и расчёт диаграмм направленности различных антенн. В результате исследования был реализован метод FDTD с возможностью расчёта диаграммы направленности излучающих структур. Разработанная программа имеет широкий спектр потенциальных применений. Она может быть использована для анализа поведения волноводов и линий передачи, проектирования и оптимизации антенн, расчёта диаграммы направленности антенн, а также служить учебным пособием для студентов и исследователей в области электромагнетизма.

**Ключевые слова:** численные методы, электродинамическое моделирование, электродинамика, FDTD, Python

**Для цитирования:** Овчинникова Е.В., Шмачилин П.А., Кондратьева С.Г., Гаджиев Э.В., Павлов С.В. Применение метода конечных разностей во временной области для расчета направленных свойств двумерных излучающих структур // Труды МАИ. 2024. № 137. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181880>

Original article

## APPLICATION OF THE FINITE-DIFFERENCE TIME-DOMAIN METHOD TO THE ANALYSIS OF THE DIRECTIONAL PROPERTIES OF TWO-DIMENSIONAL RADIATING STRUCTURES

Elena V. Ovchinnikova<sup>1</sup>, Pavel A. Shmachilin<sup>2</sup>, Svetlana G. Kondratyeva<sup>3</sup>,  
Elchin V. Gadzhiev<sup>4</sup>✉, Stepan V. Pavlov<sup>5</sup>

<sup>1,2,3,4</sup>National Research University Moscow Aviation Institute,  
Moscow, Russia

<sup>4</sup>Joint Company ‘Research and Production Corporation ‘Space Monitoring Systems, Information & Control and Electromechanical Complexes’ named after A.G. Iosifian’,  
Moscow, Russia

<sup>5</sup>S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia,  
Korolev, Moscow region, Russia

<sup>1</sup>[oea8888@gmail.com](mailto:oea8888@gmail.com)

<sup>2</sup>[shmachilin@gmail.com](mailto:shmachilin@gmail.com)

<sup>3</sup>[kondratieff89@ya.ru](mailto:kondratieff89@ya.ru)

<sup>4</sup>[gadzhiev\\_elchin@mail.ru](mailto:gadzhiev_elchin@mail.ru)✉

<sup>5</sup>[pav00.00@mail.ru](mailto:pav00.00@mail.ru)

**Abstract.** The subject of the research is the finite difference time domain method with an algorithm for recalculating the near-zone field into the far-zone field.

The Finite-Difference Time-Domain (FDTD) method is a numerical method used for the numerical modeling of electromagnetic fields. It is based on finite difference

approximations of Maxwell's equations, which describe the behavior of electromagnetic fields in space and time.

The aim of the work is to implement the FDTD method with boundary conditions in software and the ability to calculate the directional properties of two-dimensional radiating structures. The program is aimed at making its contribution to the field of computational electromagnetics and its practical applications by providing users with a universal and accessible tool for analyzing the phenomena of wave propagation, reflection, transmission, and scattering in two-dimensional space and calculating the radiation patterns of various structures.

During the work, the following tasks were carried out: implementation of boundary conditions, development of a method for calculating the reflection coefficient from boundary conditions, software implementation of the finite difference time domain (FDTD) method, development of an algorithm for recalculating the near-field into the far-field, modeling and calculation of radiation patterns of various antennas.

As a result of the research, the FDTD method was implemented with the possibility of calculating the radiation pattern of radiating structures. The developed program has a wide range of potential applications. It can be used to analyze the behavior of waveguides and transmission lines, to design and optimize antennas, to calculate the radiation pattern of antennas, and to serve as a teaching aid for students and researchers in the field of electromagnetism.

**Keywords:** Numerical methods, electrodynamic modeling, electrodynamics, FDTD, Python

**For citation:** Ovchinnikova E.V., Shmachilin P.A., Kondratyeva S.G., Gadzhiev E.V., Pavlov S.V. Application of the finite-difference time-domain method to the analysis of the directional properties of two-dimensional radiating structures. *Trudy MAI*, 2024, no. 137.

URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=181880>

## Введение

Разработка и проектирование современных антенных систем сопряжены с проблемой создания физических моделей для тестирования и оценки характеристик системы [1, 2]. Это обусловлено сложностью и дороговизной таких устройств. Решением этой проблемы является математическое моделирование, которое имеет то преимущество, что для проведения экспериментов нет необходимости в физическом устройстве [3]. Более того, математическое моделирование позволяет проводить многократные эксперименты с различными параметрами антенн [4, 5]. Использование электронных вычислительных машин (ЭВМ) в процессе производства стало ключевым фактором для создания программного обеспечения, в котором инженер взаимодействует с моделируемым объектом посредством численных методов и алгоритмов, которые заложены в работу систем автоматизированного проектирования (САПР). На сегодняшний день существует целый ряд САПР для моделирования антенн и устройств СВЧ [6]. В таблице 1 приведены основные САПР для решения задач электродинамики. Данные САПР описаны в [7].

Таблица 1 Основные САПР для решения задач электродинамики

Название ПО	Производитель ПО
CST Microwave Studio	CST
Ansoft High Frequency Structure Simulation (HFSS)	ANSYS
AWR Microwave Office	AWR Corporation
Agilent Advanced Design System (ADS)	Agilent Technologies
Agilent Electromagnetic Professional (EMPro)	Agilent Technologies
Remcom XFDTD	Remcom
Логос ЭМИ	Росатом

Существующие программные продукты в основном разработаны импортными организациями, и использование этих программ без лицензионного соглашения запрещено. В сложившихся в мире обстоятельствах есть ограничения на использование этих программ в нашей стране [8]. Относительно недавно был разработан новый модуль (Логос ЭМИ) пакета программ инженерного анализа и суперкомпьютерного моделирования Логос (разработан государственной корпорацией «Росатом»).

Численные методы — это универсальный и эффективный набор техник, созданный для решения сложных математических задач, которые невозможно или

трудно решить аналитическими методами. Такие задачи часто возникают в прикладной науке, инженерии, финансах и других областях, где поведение систем описывается математическими уравнениями. Ценность численных методов заключается в их способности находить приближенные решения математических задач, аналитическое решение которых является сложным или невозможным. На сегодняшний день существует целый ряд методов, используемых для решения задач электродинамики. В таблице 2 приведены основные численные методы для решения задач электродинамики. Данные методы описаны в [9].

Таблица 2 Основные численные методы для решения задач электродинамики

Метод конечных разностей во временной области
Метод конечных элементов
Метод моментов
Метод граничных элементов
Метод конечных объемов
Метод спектральной области
Метод матрицы линий электропередачи

Кроме того, благодаря стремительному развитию современных вычислительных технологий эти методы стали доступны для реализации в беспрецедентных масштабах.

## Метод конечных разностей во временной области (FDTD)

Метод *Finite-Difference Time-Domain (FDTD)* – это численный метод, используемый для численного моделирования электромагнитных полей. Он основан на разностных аппроксимациях уравнений Максвелла, которые описывают поведение электромагнитных полей в пространстве и времени.

Предложенный более 50 лет тому назад метод конечных разностей во временной области (*FDTD - Finite-Difference Time-Domain*) на сегодняшний день является самым популярным методом для численного решения задач электродинамики и реализован в некоторых коммерческих программах. Метод был недооценен в первые годы в связи с отсутствием машинных мощностей, позволяющих провести моделирование. С развитием техники (примерно 30 лет назад) метод набирает свою популярность, печатаются научные работы по исследованию метода, а в частности исследуются граничные условия метода FDTD. На данный момент в открытом доступе находятся различные реализации метода, граничных условий. Существуют специализированные библиографические базы данных, вышли монографии.

В основном работы принадлежат зарубежным авторам. Отечественные авторы публикуют свои работы, но они носят образовательный характер.

В своей классической постановке метод FDTD основан на простой и элегантной дискретизации уравнений Максвелла, записанных в дифференциальной пространственно-временной формулировке. Сетки для электрического и магнитного полей смещены по отношению друг к другу во времени и пространстве на половину



шага дискретизации по каждой из переменных. Конечно-разностные уравнения позволяют определить электрическое и магнитное поля в данный момент времени на основании известных значений полей в предыдущий момент времени, и при заданных начальных условиях вычислительная процедура разворачивает решение во времени от начала отсчета с заданным шагом [10].

Разностная схема метода конечных разностей выводится из системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме (1) и трёх материальных уравнений (2).

$$\operatorname{rot} H = \frac{dD}{dt} + j \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{dB}{dt}$$

$$\operatorname{div} D = p$$

$$\operatorname{div} B = 0$$

$$j = \sigma E + j_{cm} \quad (2)$$

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E$$

$$B = \mu \mu_0 H$$

Раскроем роторы полей по формуле 3 и подставим значения магнитной и электрической индукции в первых двух уравнениях системы (1). Получим (4).

$$\operatorname{rot} F = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Для поля } H: \quad (4)$$

$$\begin{cases} H_x[i, j, k]_+ = -\frac{\Delta t}{\mu\mu_0} \left( \frac{E_z[i, j+1, k] - E_z[i, j, k]}{\Delta y} - \frac{E_y[i, j, k+1] - E_y[i, j, k]}{\Delta z} \right) \\ H_y[i, j, k]_+ = -\frac{\Delta t}{\mu\mu_0} \left( \frac{E_x[i, j, k+1] - E_x[i, j, k]}{\Delta z} - \frac{E_z[i+1, j, k] - E_z[i, j, k]}{\Delta x} \right) \\ H_z[i, j, k]_+ = -\frac{\Delta t}{\mu\mu_0} \left( \frac{E_y[i+1, j, k] - E_y[i, j, k]}{\Delta x} - \frac{E_x[i, j+1, k] - E_x[i, j, k]}{\Delta y} \right) \end{cases}$$

Для поля E:

$$\begin{cases} E_x[i, j, k]_+ = +\frac{\Delta t}{\varepsilon\varepsilon_0} \left( \frac{H_z[i, j, k] - H_z[i, j-1, k]}{\Delta y} - \frac{H_y[i, j, k] - H_y[i, j, k-1]}{\Delta z} \right) \\ E_y[i, j, k]_+ = -\frac{\Delta t}{\varepsilon\varepsilon_0} \left( \frac{H_x[i, j, k] - H_x[i, j, k-1]}{\Delta z} - \frac{H_z[i, j, k] - H_z[i-1, j, k]}{\Delta x} \right) \\ E_z[i, j, k]_+ = +\frac{\Delta t}{\varepsilon\varepsilon_0} \left( \frac{H_y[i, j, k] - H_y[i-1, j, k]}{\Delta x} - \frac{H_x[i, j, k] - H_x[i, j-1, k]}{\Delta y} \right) \end{cases}$$

Системы уравнений (4) является разностной схемой метода. С помощью неё описывается поле в любой момент времени в любой точке пространства. Вывод разностной схемы описан в [11, 12].

Данная разностная схема описывает сетку для магнитного и электрического поля, показанную на рисунке 1.

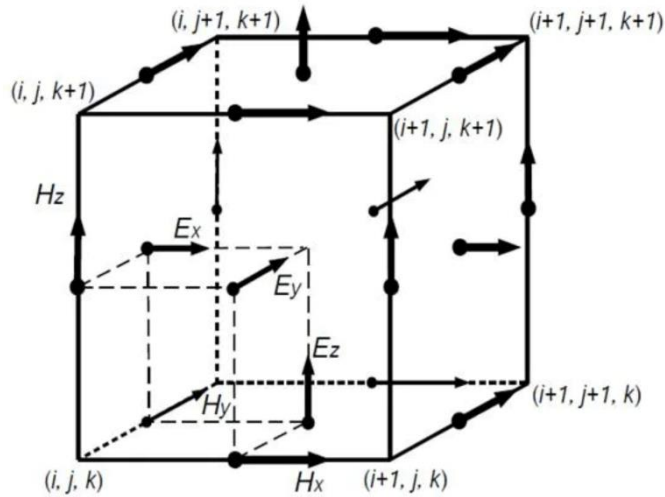


Рисунок 1. — Ячейка Yee

Метод можно использовать не только в трёхмерном пространстве, но и в двумерном и одномерном пространствах. Сетка для электрического и магнитного поля в двумерном пространстве показана на рисунке 2.

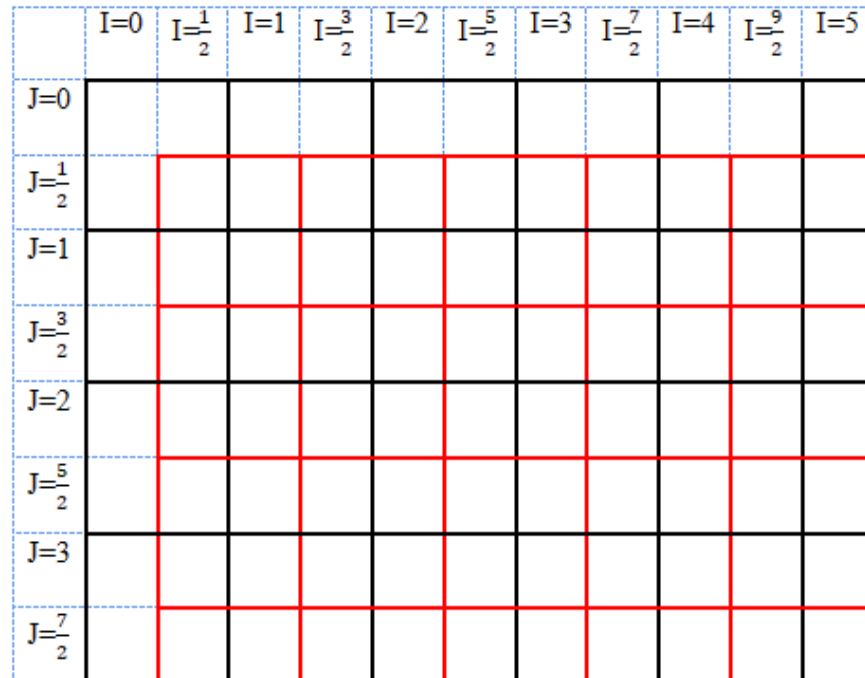


Рисунок 2. — Сетка для электрического и магнитного полей (черным цветом показаны границы ячеек электрического поля, красным – магнитного).

При таком расположении электрического и магнитного полей по умолчанию реализуются граничные условия типа *PEC* (*Perfect Electrical Conductor*) и *PMC* (*Perfect Magnetic Conductor*).

На рисунке 2 видно, что сетки для электрического и магнитного полей сдвинуты относительно друг друга на половину пространственного шага, но при классической реализации метода FDTD для упрощения задачи этот сдвиг считают равным нулю. Для работы конечно разностных схем нужно знать значения поле в соседних ячейках. Именно это и является проблемой, так как конечная счётная область словно “вырезана” из бесконечного двумерного пространства. Поэтому

принято не рассчитывать поле  $E$  на краях левой и верхней стенок, то есть значения поля  $E$  перпендикулярные граничным условиям и равны нулю. Так образуются граничные условия *PEC*, особенностью которых является инвертирование фазы сигнала, то есть изменение её на  $\pi$  радиан. Данные граничные условия не поглощают энергию волны, а отражают большую часть обратно в счётное пространство, что вызывает сложности при расчётах и моделировании.

Подобным образом, но в полной противоположности, обстоят дела и с граничными условиями *PMC*. Значение поля  $H$  не рассчитывается на правой и нижней стенке счётной области. И в отличие от граничных условий *PEC* в данном случае фаза волны не изменяется на  $\pi$  радиан. Граничные условия типа *PMC* так же не поглощают энергию.

Программная реализация метода описана в [13].

### **Программная реализация двумерного метода FDTD**

С развитием компьютерной техники появилась возможность применения численных методов для решения сложных задач [14, 15]. Одной, из которых является решение уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Решение уравнений Максвелла даёт возможность проектирования антенн и антенных систем с высокой точностью, позволяет существенно снизить стоимость разработки, проводить большое количество экспериментов [1, 2]. Все это облегчает работу конструкторов и уменьшает время на разработку.

Рассматриваемая в данной работе программа поддерживает расчёт численного моделирования FDTD в двумерном пространстве. Метод FDTD впервые был описан

в статье Yee «Численное решение начально-краевых задач с использованием уравнений Максвелла в изотропных средах» (1966) [16].

Для удобства программу необходимо разбить на функции. Функции, включенные в программу, приведены в таблице 3.

Таблица 3 Основные функции программы

Определение источника сигнала
Расчет передаточных коэффициентов
Функция обновления электрического поля
Функция обновления магнитного поля
Построение анимированного графика
Построение графиков

Рассмотрим каждую функцию подробнее.

#### 1. Определение источника сигнала (Source)

На вход функция источника принимает дискретное время ( $t$ ), рассчитываемое по формуле (5), и параметр сигнала ( $\tau$ ).

$$t = t + dt, \quad (5)$$

где  $dt$  – дискрет времени.

Шаг дискретизации выбирается по критерию устойчивости метода (критерий Куранта – Фридрихса - Леви) и определяется формулой (6).

$$dt \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} + \frac{1}{dz^2}}}, \quad (6)$$

где  $c$  – скорость света;

$dx, dy, dz$  – дискретности пространства.

В функции определения источника содержится внутренняя функция гауссова сигнала (*Gauss*), на вход которой подается текущее время, а возвращается экспонента в степени минус квадрат времени (формула (7)).

$$Gauss = e^{-t^2} \quad (7)$$

Функция *Source* возвращает значение функции *Gauss* в момент времени  $\frac{t-tau}{3}$ .

Такая форма задания функции позволяет управлять смещением импульса во времени, а также шириной импульса. Она рассчитывается по формуле (8).

$$Source = Gauss \left( \frac{t-tau}{3} \right) \quad (8)$$

На рисунке 3 показан график функции источника.

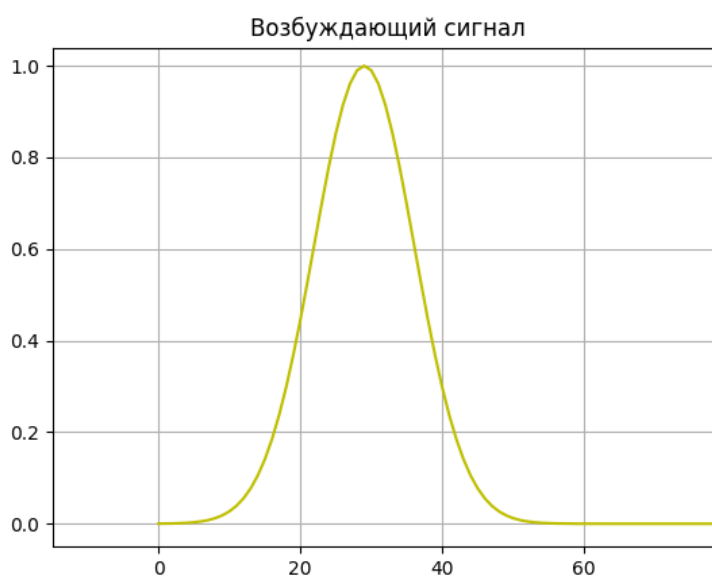


Рисунок 3 — График функции источника.

Возбуждающий сигнал на рисунке 3 имеет максимум при значении времени 30 отсчетов ( $tau = 30$ ).

## 2. Функция расчёта коэффициентов

На вход функции поступают размеры счетной области ( $size\_x$ ,  $size\_y$ ). Внутри функции используются физические константы:

- диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36 \pi}$ ;
- магнитная проницаемость  $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7}$ ;
- электрическая проводимость среды  $\sigma$ ;
- магнитная проводимость среды  $\sigma_m$ .

Для расчёта поля в счётной области используются разностные схемы, получаемые путём дискретизации уравнений Максвелла. Разностные схемы и формулы расчёта коэффициентов приводятся в [2]. Расчёт коэффициентов производится по формулам (9–20). Нумерация формул производится по строкам, слева на право.

$$\begin{aligned} chxh &= \frac{1 - \frac{\sigma_m dt}{2\mu_a}}{1 + \frac{\sigma_m dt}{2\mu_a}} & chyh &= \frac{1 - \frac{\sigma_m dt}{2\mu_a}}{1 + \frac{\sigma_m dt}{2\mu_a}} & chzh &= \frac{1 - \frac{\sigma_m dt}{2\mu_a}}{1 + \frac{\sigma_m dt}{2\mu_a}} & (9 - 20) \\ chxe &= \frac{\frac{dt}{d\mu_a}}{1 + \frac{\sigma_m dt}{2\mu_a}} & chye &= \frac{\frac{dt}{d\mu_a}}{1 + \frac{\sigma_m dt}{2\mu_a}} & chze &= \frac{\frac{dt}{d\mu_a}}{1 + \frac{\sigma_m dt}{2\mu_a}} \\ cexe &= \frac{1 - \frac{\sigma dt}{2\epsilon_a}}{1 + \frac{\sigma dt}{2\epsilon_a}} & ceye &= \frac{1 - \frac{\sigma dt}{2\epsilon_a}}{1 + \frac{\sigma dt}{2\epsilon_a}} & ceze &= \frac{1 - \frac{\sigma dt}{2\epsilon_a}}{1 + \frac{\sigma dt}{2\epsilon_a}} \end{aligned}$$

$$cexh = \frac{\frac{dt}{d\varepsilon_a}}{1 + \frac{\sigma dt}{2\varepsilon_a}} \quad ceyh = \frac{\frac{dt}{d\varepsilon_a}}{1 + \frac{\sigma dt}{2\varepsilon_a}} \quad cezh = \frac{\frac{dt}{d\varepsilon_a}}{1 + \frac{\sigma dt}{2\varepsilon_a}}$$

### 3. Функция обновления магнитного поля

Обновление магнитного поля происходит по прошлому значению магнитного поля в этой точке и по разности значений электрического поля в этой и соседней точке, умноженных на передающие коэффициенты. Расчёт ведётся по формуле (21). В данной формуле используются коэффициенты из (9 - 20).

$$\begin{aligned} H_x^n [i, j, k] &= chxh \square H_x^{n-1} [i, j, k] - chxe \square \left( (E_z^{n-1} [i, j+1, k] - E_z^{n-1} [i, j, k]) - (E_y^{n-1} [i, j, k+1] - E_y^{n-1} [i, j, k]) \right) \quad (21) \\ H_y^n [i, j, k] &= chyh \square H_y^{n-1} [i, j, k] - chye \square \left( (E_x^{n-1} [i, j, k+1] - E_x^{n-1} [i, j, k]) - (E_z^{n-1} [i+1, j, k] - E_z^{n-1} [i, j, k]) \right) \\ H_z^n [i, j, k] &= chzh \square H_z^{n-1} [i, j, k] - chze \square \left( (E_y^{n-1} [i+1, j, k] - E_y^{n-1} [i, j, k]) - (E_x^{n-1} [i, j+1, k] - E_x^{n-1} [i, j, k]) \right) \end{aligned}$$

На вход функции обновления магнитного поля подаются значения компонент магнитного и электрического полей и коэффициенты передачи. На выходе мы получаем новые значения магнитного поля.

### 4. Функция обновления электрического поля

Данная функция похожа на функцию обновления магнитного поля по принципу действия, только выходными параметрами являются значения компонент обновленного электрического поля. Расчёт ведётся по формуле (22). В данной формуле используются коэффициенты из (9 - 20).

$$\begin{aligned} E_x^n [i, j, k] &= cexe \square E_x^{n-1} [i, j, k] - cexh \square \left( (H_z^n [i, j, k] - H_z^n [i, j-1, k]) - (H_y^n [i, j, k] - H_y^n [i, j, k-1]) \right) \quad (22) \\ E_y^n [i, j, k] &= ceye \square E_y^{n-1} [i, j, k] - ceyh \square \left( (H_x^n [i, j, k] - H_x^n [i, j, k-1]) - (H_z^n [i, j, k] - H_z^n [i-1, j, k]) \right) \\ E_z^n [i, j, k] &= ceze \square E_z^{n-1} [i, j, k] - cezh \square \left( (H_y^n [i, j, k] - H_y^n [i-1, j, k]) - (H_x^n [i, j, k] - H_x^n [i, j-1, k]) \right) \end{aligned}$$



На вход функции обновления электрического поля подаются значения компонент магнитного и электрического полей и коэффициенты передачи. На выходе мы получаем новые значения электрического поля.

### 5. Функция построения анимационного графика

Вся функция основана на применении библиотеки `matplotlib.pyplot` для наглядного изображения  $E_z$  компоненты электрического поля в счётной области. Каждый кадр анимированного графика рассчитывается как поле, взятое в очередной момент времени. Для визуализации используется значение отдельной выбранной компоненты. Цвет точки графика определяется по линейной цветовой шкале. Где тёмно-красному цвету соответствует максимальное значение, тёмно-синему – минимальное. Результатом работы функции является меняющейся во времени двумерный график. На рисунке 4 показан двумерный график, выводимый функцией. На нём по осям отображены координаты ячеек.

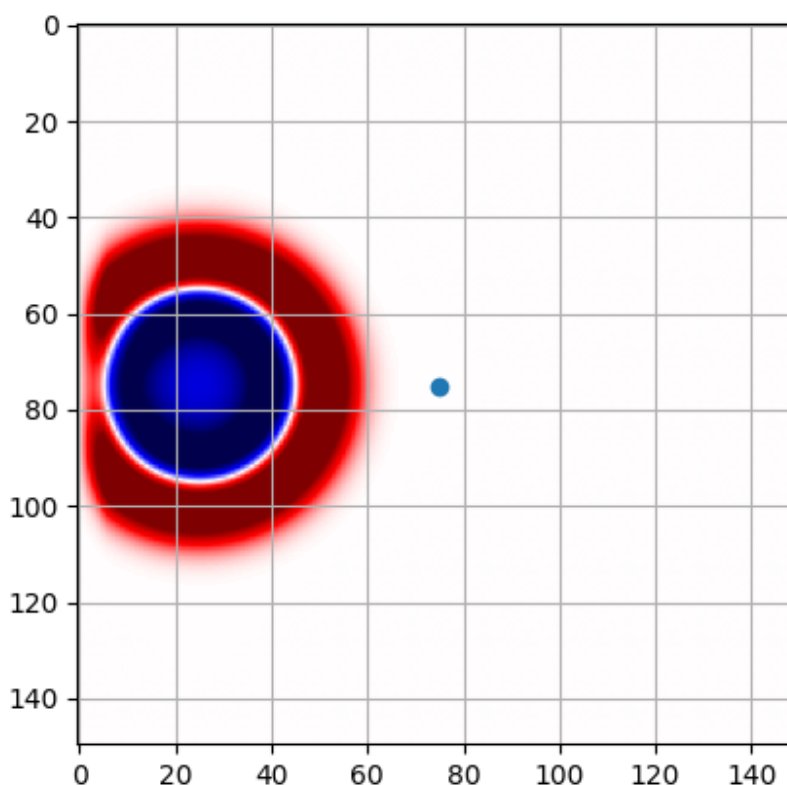


Рисунок 4 —Двумерный график, выводимый функцией.

На рисунке 4 показан пример вывода информации о распространении волны.

#### 6. Функция построения графиков

Данная функция применяет библиотеку *matplotlib.pyplot* для вывода в виде графиков.

Используя эти функции, мы получаем программу, работающую на основе метода FDTD. Для определения направленных свойств двумерных излучающих структур необходимо добавить метод пересчёта ближнего поля в поле в дальней зоне и установить поглощающие граничные условия на границе моделируемой области.

#### **Поглощающие граничные условия типа *PML***

Граничные условия типов *PEC* и *PMC* отражают энергию волны обратно в счётную область, что делает невозможным моделирование и расчёты методом FDTD, так как на полученные результаты сильное влияние будут иметь повторные переотражения. В идеале нужно получить такие условия, что бы вся энергия уходила из счётной области.

Метод конечных разностей во временной области был предложен в 1966 году Кейном Йи и не приобрёл популярности из-за проблем описанных ранее. Со временем исследователи реализовывали различные типы граничных условий, такие как согласованные слои, граничные условия Мура, граничные условия Лио и их производные. В 1996 году Беренджер опубликовал статью “Идеально согласованный слой для FDTD-решения задач взаимодействия волновых структур”,

где предложил новый тип граничных условий – идеально согласованные слои (PML) [17].

Основная идея двумерного *PML* заключается в том, что каждый вектор компонент поля делится на два перпендикулярных вектора и введения по границам нескольких слоев псевдоматериала (материала, не имеющего аналогов в реальном мире) с проводимостью для поглощения энергии. На рисунке 5 показано, как должны распределяться поглощения вдоль границ.



Рисунок 5 – Создание граничных условий PML

Рассмотрим, что будет происходить на правой границе при реализованных граничных условиях. Возможно два варианта падения волны на границу: перпендикулярно границе и под углом к ней.

В случае падения волны перпендикулярно к границе, вектора компонента поля будут иметь только перпендикулярный к границе вектор разбиения. Значение поля в этом векторе будет уменьшаться слой от слоя.

В случае падения волны под углом к границе будут уменьшаться значения векторов перпендикулярных к границе, а значение векторов параллельных границе не изменяются. На рисунке 6 показано падение плоской волны под углом к границе.

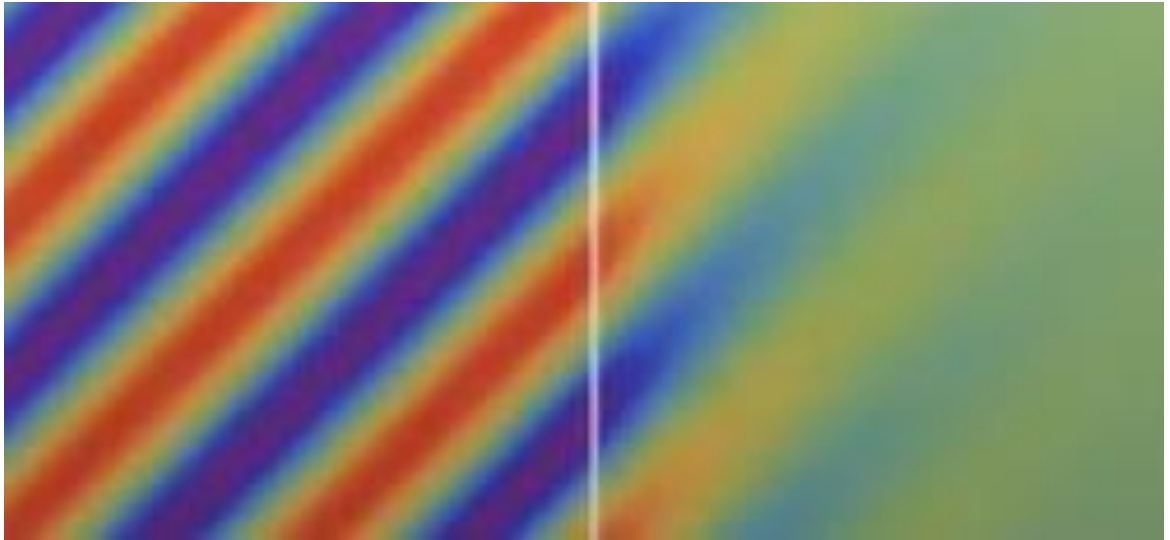


Рисунок 6 – Падение плоской волны под углом к границе

На рисунке 6 белая линия является границей разделения счётной области (слева) и начала слоёв граничных условий типа *PML* (справа). Интуитивно понятно, что горизонтальная компонента затухает быстрее, чем вертикальная.

Для примера расположим источник в середине слоёв *PML* с координатами 20;120 (40 слоёв *PML*). На рисунке 7 покажем излученную волну через некоторое время. На нем можно заметить, что амплитуда волны излученной вниз меньше, чем у волны излученной влево. Это объясняется тем, что волна, излученная вниз, поглотилась в половине слоёв *PML*, лежащих перпендикулярно её распространению.

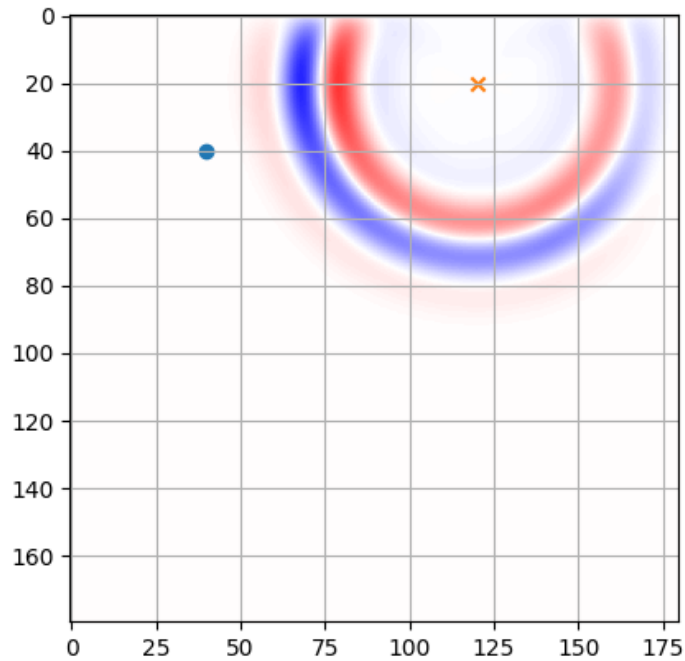


Рисунок 7 – Излучение волны в слоях PML

На рисунке 7 видно, что амплитуда волны, излученной вправо меньше, чем у волны излученной влево. Это объясняется тем, что в углах счётного пространства присутствуют проводимости для продольных и поперечных векторов компонент поля.

Профиль потерь в *PML* имеет параболическую форму. Проводимости в ней подбираются так, чтобы уменьшить отражение между границами слоев. К сожалению, достичь полного поглощения невозможно. Поэтому необходимо пользоваться характеристикой качества граничных условий. Такой характеристикой может быть коэффициент отражения от граничных условий.

Было рассчитано, что от граничных условий типа *PML* отражается примерно 3,4% энергии, а от граничных условий типов *PEC* и *PMC* 99,86% и 99,97% соответственно. Это говорит о том, что при моделировании следует использовать граничные условия типа *PML*.

### Пересчёт ближнего поля в поле в дальней зоне

Вся счётная область разделяется на ячейки  $Y_{ee}$ . В каждой ячейке идёт итерационный расчёт компонент электромагнитного поля. При использовании граничных условий типа *PML* с грубой условностью можно сказать, что вся энергия электромагнитной волны поглотилась, и не было отражений от границ. Следовательно, вся энергия излучилась за границы счётной области. Теперь предположим, что всю энергию, излученную в счётной области в разных направлениях, можно представить, как энергию, излученную антенной решёткой (АР), координаты излучателя которой соответствуют координатам приграничных ячеек  $Y_{ee}$  относительно центра счётной области и её амплитудно-фазовое распределение совпадает с амплитудой и фазой сигнала в приграничных ячейках счётной области на рассчитываемой частоте.

Расположение эквивалентной АР изображено на рисунке 8.



Рисунок 8 – Расположение эквивалентной АР в счётной области

На рисунке 8 видно, что эквивалентная АР расположена на границе счётной области в первом слое *PML*. АР состоит из 4 линейных АР, параллельных граням счётной области.

Каждая грань АР можно рассматривать как отдельную линейную АР (ЛАР). Каждая ЛАР излучает в одном из четырёх направлений (рисунок 8), поэтому следует умножить её диаграмму направленности на диаграмму направленности элемента Гюйгенса с максимумом по направлению АР. Диаграмма направленности элемента Гюйгенса в сферической системе координат изображена на рисунке 9.

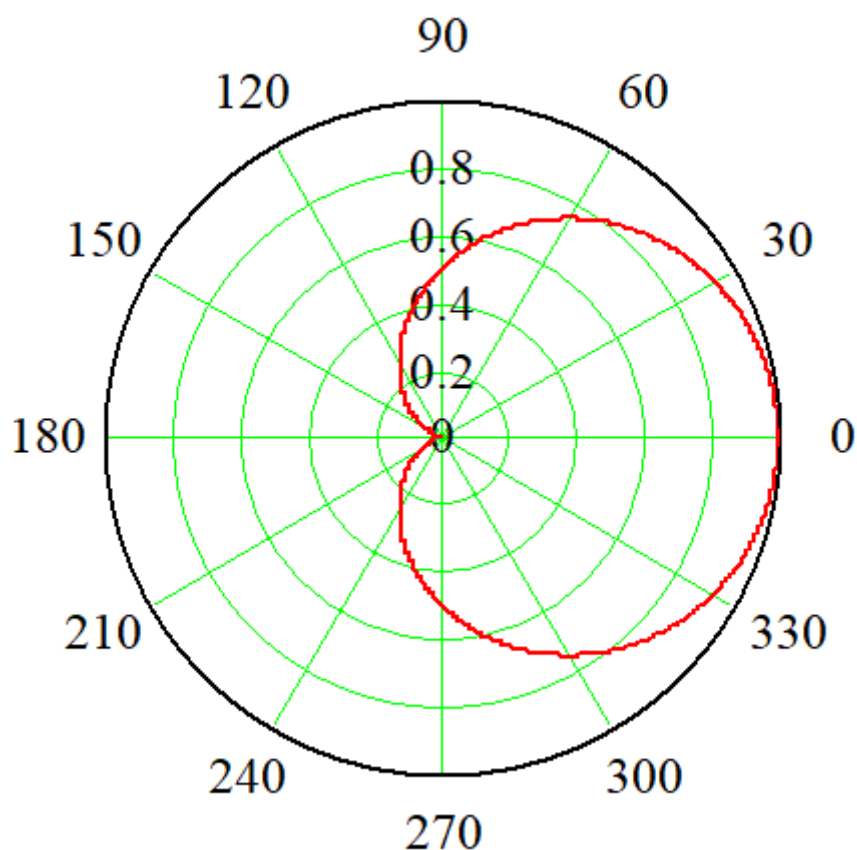


Рисунок 9 – ДН элемента Гюйгенса в сферической системе координат

Она задаётся формулой (23):

$$f(\theta) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2} \quad (23)$$

На рисунке 9 видно, что диаграмма элемента Гюйгенса имеет максимум излучения в направлении нуля и минимум в направлении 180 градусов.

Для каждой грани АР ДН элемента Гюйгенса будет направлена максимумом по нормали от центра счётной области. Диаграммы элементов Гюйгенса с ЛАР изображены на рисунке 10.

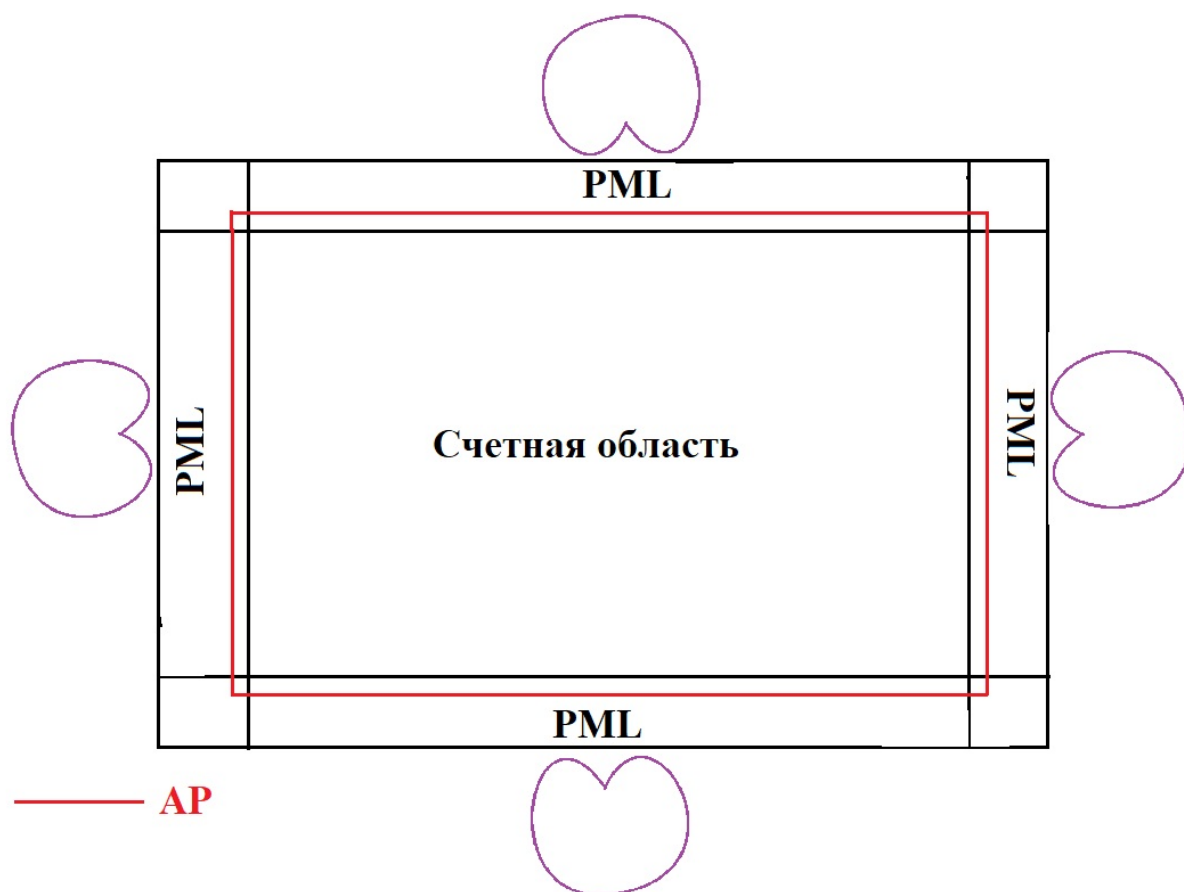


Рисунок 10 – Диаграммы элементов Гюйгенса с ЛАР

На рисунке 10 изображены ДН элементов Гюйгенса для каждой ЛАР (показаны фиолетовым цветом).



Данный подход лежит в основе пересчёта поля ближней зоны в поле в дальней зоне.

Как было сказано ранее, расчёты диаграммы направленности происходят на определенной частоте. Для этого необходимо использовать только ту частотную составляющую сигнала, на которой проходит расчет диаграммы направленности. Для нахождения определенной частотной составляющей воспользуемся формулой (24).

$$S(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{\left(\frac{-j2\pi ft}{N}\right)}, \quad (24)$$

где  $f$  – частота, на которой ведется расчет;

$s_n$  – значение сигнала в  $n$  – ый отсчет времени;

$t$  – значение времени в  $n$  – ый отсчет;

$N$  – количество отсчетов.

Это первое преобразование Фурье. Данную операцию необходимо проделать для каждой ячейки, составляющей АР.

Далее, на основе  $S(f)$  можно получить амплитудно-фазовое распределение (АФР) для решётки. Амплитудной распределение находится по формуле (25), фазовое распределение по формуле (26).

$$A_n = |S_n(f)| \quad (25)$$

$$\Psi_n = \arg(S_n(f)) \quad (26)$$

Амплитудное распределение на АР для случая распространения волны от всенаправленного источника в области 100 на 100 ячеек приведено на рисунке 11.

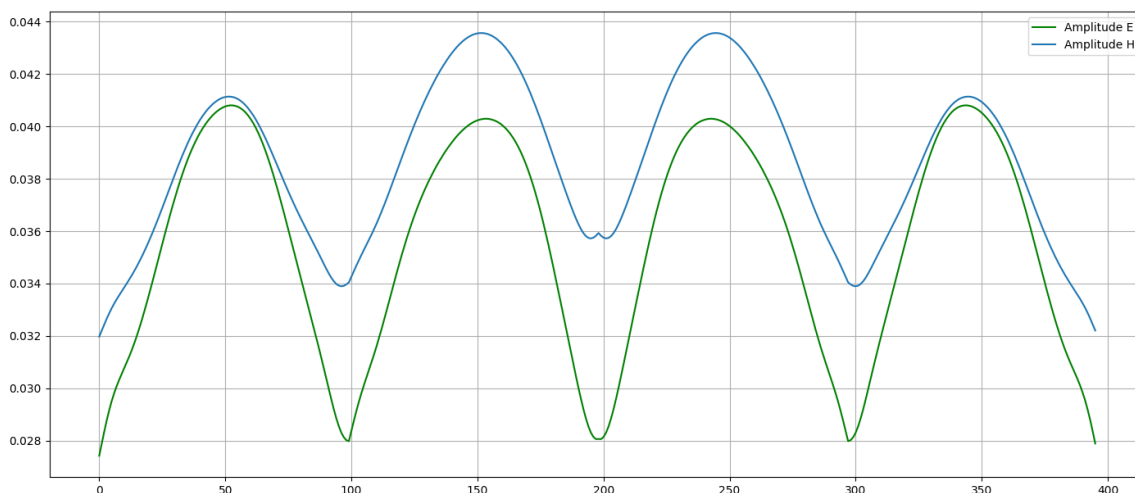


Рисунок 11 – Амплитудное распределение на антенной решетке

На рисунке 11 амплитуды полей  $H$  и  $E$  приведены к одной размерности путём умножения амплитуды магнитного поля на  $\sqrt{W} \approx \sqrt{377} \approx 19.41$  и деления амплитуды электрического поля на  $\sqrt{W}$ , где  $W$  – волновое сопротивление в вакууме.

Фазовое распределение на АР приведено на рисунке 12.

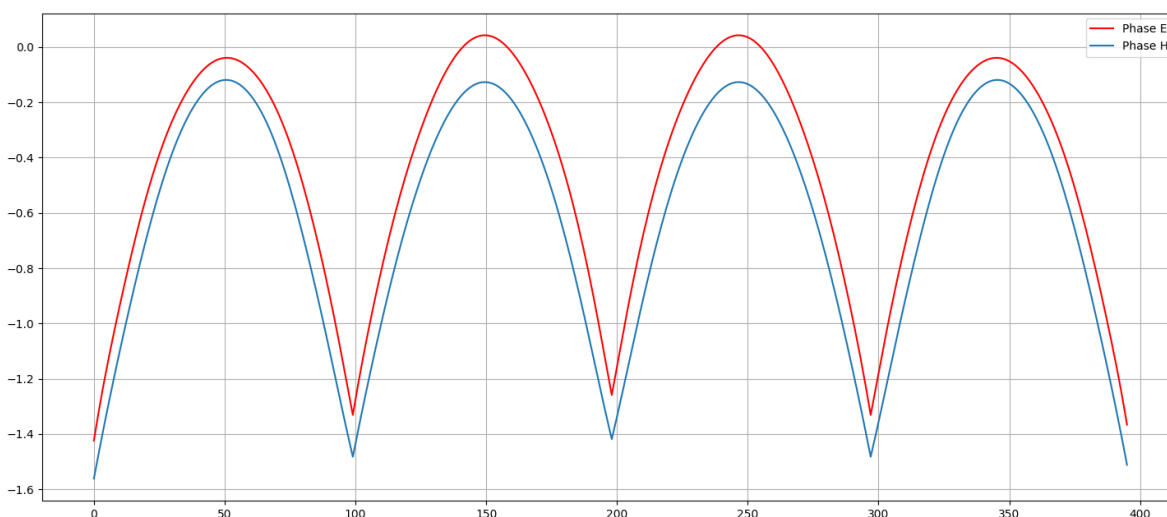


Рисунок 12 – Фазовое распределение на антенной решетке

На рисунке 12 красным цветом показана фаза электрического поля, а синим – магнитного поля. Максимумы фаз соответствуют центрам ЛАР. Вблизи центров ЛАР наблюдается квадратичный набег фазы, на краях – линейный набег фазы.

Следующим этапом в пересчёте ближнего поля в поле в дальней зоне является расчёт диаграммы направленности каждой ЛАР. Расчёт производится по формуле (27).

$$F_{\text{ЛАР}}(\theta) = \frac{\mu_0 f}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{H}_n \exp(-jk(X_n \cos \theta + Y_n \sin \theta)) - \frac{jf}{2c} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{E}_n \exp(-jk(X_n \cos \theta + Y_n \sin \theta)), \quad (27)$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость;

$f$  – частота, на которой ведется расчет;

$n$  – номер элемента ЛАР;

$\dot{H}$  – комплексная амплитуда магнитного поля;

$k$  – волновое число;

$X$  – координаты элементов ЛАР по направлению  $X$ ;

$Y$  – координаты элементов ЛАР по направлению  $Y$ ;

$\dot{E}$  – комплексная амплитуда электрического поля.

Данная формула выводится из формулы, приведенной в [18].

Общая диаграмма направленности двумерной излучающей структуры, расположенной в счётной области определяется как сумма произведений диаграммы направленности ЛАР с диаграммой направленности элемента Гюйгенса этой ЛАР и рассчитывается по формуле (28).

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^4 F_{\text{ЛАР}n}(\theta) F_{\text{ЭГн}}(\theta), \quad (28)$$

где  $n$  – номер ЛАР;

$F_{ЛАР}(\theta)$  – диаграмма направленности ЛАР;

$F_{ЭГn}(\theta)$  – диаграмма направленности элемента Гюйгенса для соответствующей ЛАР.

### Заключение

Результатом работы является программа, использующая метод конечных разностей во временной области в двумерном пространстве. В программе присутствует возможность добавить в счётную область произвольную структуру с параметрами: диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость и проводимость. Программа выводит пользователю анимированный двумерный график с изображением распространения электромагнитной волны, сведения о сигнале, возбуждаемом в источнике, данные о зависимости компонент магнитного и электрического полей от времени в датчике, поле в дальней зоне, амплитудные и фазовые распределения полей в АР и зависимости энергии в счётной области от времени.

В программе предусмотрена возможность задавать следующие условия расчета:

- размер счётной области (количество ячеек по направлениям  $X$  и  $Y$ );
- условие остановки расчёта (отношение текущей энергии в счётной области к максимальной энергии, выраженное в децибелах);
- частоту, на которой производится расчёт поля в дальней зоне;
- координаты расположения источника;

- координаты расположения датчика;
- количество слоев PML.

С развитием техники и машинных мощностей следующим этапом усовершенствования численных методов решения электродинамических задач является переход от линейных к распределенным численным методам [19, 20].

### Список источников

1. Гаджиев Э.В. Моделирование бортовых антенн СВЧ космических аппаратов // Антенны. 2013. № 9 (196). С. 065-068.
2. Овчинникова Е.В., Шмачилин П.А., Кондратьева С.Г., Гаджиев Э.В. Исследование характеристик направленности бортовых антенн космических аппаратов на ранней стадии разработки // Электросвязь. 2016. № 7. С. 56-59.
3. Чистяков В.А. Моноимпульсный радиопеленгатор с использованием цифровой антенной решетки // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=119921>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-07)
4. Азаров А.В., Караваев М.Н., Рожков С.С., Славянский А.О., Смолка К.А. Синтез малогабаритного фазового пеленгатора авиационного базирования // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165549>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-12)
5. Король Д.Г., Темченко В.С. Исследование цилиндрической конформной антенной решетки с печатным излучателем для БПЛА // Труды МАИ. 2023. № 129. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=173026>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-14](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-14)

6. Козлов К.В., Волков А.П., Старовойтов Е.И., Попов Е.В. Численное моделирование электромагнитного поля бортовой РЛС землеобзора для обеспечения электромагнитной совместимости // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164200>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-11](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-11)
7. Овчинникова Е.В., Шмачилин П.А., Кондратьева С.Г., Гаджиев Э.В., Павлов С.В., Чекулов В.Р. Обзор систем автоматизированного проектирования // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. 2024. Т. 198. № 1. С. 39-46.
8. Павлов С.В., Чекулов В.Р. Расчёт направленных свойств двумерных излучающих структур методом FDTD // 50-я Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения – 2024» (Москва, 9–12 апреля 2024): тезисы докладов. - М.: Издательство «Перо», 2024. С. 357.
9. Овчинникова Е.В., Шмачилин П.А., Кондратьева С.Г., Гаджиев Э.В., Павлов С.В., Чекулов В.Р. Обзор численных методов решения задач электродинамики // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. 2024. Т. 198. № 1. С. 17-25.
10. Гринев А.Ю., Гиголо А.И. Математические основы и методы решения задач электродинамики. – М.: Радиотехника, 2015. – 126 с.
11. Electronic Source. URL: <https://www.kaggle.com/code/shmachilin/fdtd-2d>
12. John B. Schneider. Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method. URL: [file:///C:/Users/lenovo/Downloads/ufdtd\(1\).pdf](file:///C:/Users/lenovo/Downloads/ufdtd(1).pdf)
13. GitHub - Jenyay/modelling. URL: <https://github.com/Jenyay/modelling/tree/master>
14. Гаджиев Э.В., Овчинникова Е.В., Шмачилин П.А. Исследование характеристик направленности бортовых антенн космических аппаратов на ранней стадии разработки путём компьютерного моделирования // XLII Международная

научная молодёжная конференция «Гагаринские чтения – 2016» (Москва, 12–15 апреля 2016): тезисы докладов. – М.: Изд-во МАИ, 2016. С. 509-510.

15. Гаджиев Э.В., Кондратьева С.Г., Овчинникова Е.В. Математическое моделирование бортовых антенн космических аппаратов с учётом дифракции // XLII Международная научная молодёжная конференция «Гагаринские чтения – 2016» (Москва, 12–15 апреля 2016): тезисы докладов. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – С. 499-500.

16. Kane Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1966, vol. 14, pp. 302-307. DOI: [10.1109/tap.1966.1138693](https://doi.org/10.1109/tap.1966.1138693)

17. Jean-Pierre Beranger. Perfectly Matched Layer for the FDTD Solution of Wave-Structure Interaction Problems // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, vol. 44, issue 1, pp. 110-117.

18. Воскресенский Д.И., Гостюхин В.Л., Максимов В.М., Пономарёв Л.И. Устройства СВЧ и антенны. – М.: Радиотехника, 2016. – 560 с.

19. Гаврилов К.Ю., Каменский К.В., Малютина О.А. Моделирование траекторного сигнала в радаре с синтезированием апертуры на основе оптических изображений земной поверхности // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=158252>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-12](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-12)

20. Шамакина А.В. Обзор технологий распределённых вычислений // Вестник южно-уральского государственного университета. Серия: вычислительная математика и информатика. 2014. № 3. С. 51–85.

## References

1. Gadzhiev E.V. *Antenny*, 2013, no. 9 (196), pp. 065-068.
2. Ovchinnikova E.V., Shmachilin P.A., Kondrat'eva S.G., Gadzhiev E.V. *Elektrosvyaz'*, 2016, no. 7, pp. 56-59.
3. Chistyakov V.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119921>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-07)
4. Azarov A.V., Karavaev M.N., Rozhkov S.S., Slavyanskii A.O., Smolka K.A. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165549>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-12)
5. Korol' D.G., Temchenko V.S. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=173026>. DOI: [10.34759/trd-2023-129-14](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-14)
6. Kozlov K.V., Volkov A.P., Starovoitov E.I., Popov E.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164200>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-11](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-11)
7. Ovchinnikova E.V., Shmachilin P.A., Kondrat'eva S.G., Gadzhiev E.V., Pavlov S.V., Chekulov V.R. *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIEM*, 2024, vol. 198, no. 1, pp. 39-46.
8. Pavlov S.V., Chekulov V.R. *50-ya Mezhdunarodnaya molodezhnaya nauchnaya konferentsiya «Gagarinskie chteniya – 2024»*: tezis dokladov, Moscow, Izdatel'stvo «Pero», 2024, pp. 357.
9. Ovchinnikova E.V., Shmachilin P.A., Kondrat'eva S.G., Gadzhiev E.V., Pavlov S.V., Chekulov V.R. *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIEM*, 2024, vol. 198, no. 1, pp. 17-25.



10. Grinev A.Yu., Gigolo A.I. *Matematicheskie osnovy i metody resheniya zadach elektrodinamiki* (Mathematical Basics and Solution Methods of Electrodynamics Problems), Moscow, Radiotekhnika, 2015, 126 p.
11. *Electronic Source*. URL: <https://www.kaggle.com/code/shmachilin/fdtd-2d>
12. John B. Schneider. *Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method*. URL: [file:///C:/Users/lenovo/Downloads/ufdtd\(1\).pdf](file:///C:/Users/lenovo/Downloads/ufdtd(1).pdf)
13. *GitHub - Jenyay/modelling*. URL: <https://github.com/Jenyay/modelling/tree/master>
14. Gadzhiev E.V., Ovchinnikova E.V., Shmachilin P.A. *XLII Mezhdunarodnaya nauchnaya molodezhnaya konferentsiya «Gagarinskie chteniya – 2016»*: tezisy dokladov. Moscow, Izd-vo MAI, 2016, pp. 509-510.
15. Gadzhiev E.V., Kondrat'eva S.G., Ovchinnikova E.V. *XLII Mezhdunarodnaya nauchnaya molodezhnaya konferentsiya «Gagarinskie chteniya – 2016»*: tezisy dokladov. Moscow, Izd-vo MAI, 2016, pp. 499-500.
16. Kane Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1966, vol. 14, pp. 302-307. DOI: [10.1109/tap.1966.1138693](https://doi.org/10.1109/tap.1966.1138693)
17. Jean-Pierre Beranger. Perfectly Matched Layer for the FDTD Solution of Wave-Structure Interaction Problems, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1996, vol. 44, issue 1, pp. 110-117.
18. Voskresenskii D.I., Gostyukhin V.L., Maksimov V.M., Ponomarev L.I. *Ustroistva SVCh i anteny* (Microwave Devices and Antennas), Moscow, Radiotekhnika, 2016, 560 p.

19. Gavrilov K.Yu., Kamenskii K.V., Malyutina O.A. *Trudy MAI*, 2021, no. 118. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158252>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-12](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-12)
20. Shamakina A.V. *Vestnik yuzhno-ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: vychislitel'naya matematika i informatika*, 2014, no. 3, pp. 51–85.

Статья поступила в редакцию 02.06.2024

Одобрена после рецензирования 15.06.2024

Принята к публикации 28.08.2024

The article was submitted on 02.06.2024; approved after reviewing on 15.06.2024; accepted for publication on 28.08.2024