

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи



Чекина Евгения Алексеевна

**Исследование устойчивости резонансных
вращений спутника на эллиптической орбите**

01.02.01 – Теоретическая механика

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доц.

Бардин Борис Сабирович

Москва – 2016

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Резонансные вращения спутника на эллиптической орбите	11
1.1. Уравнения движения спутника относительно центра масс на эллиптической орбите.	11
1.2. Постановки задачи об устойчивости резонансных вращений . . .	15
1.3. Гамильтониан возмущенного движения	18
Глава 2. Исследование устойчивости резонансных вращений с учетом плоских возмущений	24
2.1. Гамильтониан задачи	24
2.2. Исследование устойчивости в линейном приближении	25
2.3. О методе нелинейного анализа устойчивости периодических гамильтоновых систем с одной степенью свободы	28
2.4. Результаты нелинейного анализа устойчивости	34
2.5. Исследование устойчивости в особом случае вырождения	36
Глава 3. Исследование устойчивости резонансных вращений несимметричного спутника при наличии пространственных возмущений	42
3.1. Линейный анализ устойчивости по отношению к пространственным возмущениям	42
3.2. Линейный анализ устойчивости при малых значениях эксцентриситета	44
3.3. Результаты линейного анализа устойчивости при произвольных значениях эксцентриситета	53

Глава 4. О методе исследования устойчивости периодических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в критических случаях	57
4.1. Метод исследования устойчивости при отсутствии в системе резонансов первого и второго порядков	58
4.2. Метод исследования устойчивости в случае резонанса основного типа	65
Глава 5. Анализ устойчивости резонансных вращений в случае динамически симметричного спутника	82
5.1. Гамильтониан возмущенного движения	82
5.2. Анализ устойчивости в линейном приближении	83
5.3. Результаты нелинейного анализа устойчивости резонансного вращения типа 1:2 с учетом пространственных возмущений	88
5.4. Результаты нелинейного анализа устойчивости резонансного вращения 3:2 с учетом пространственных возмущений	92
Заключение	95
Приложение А. Приложение	98
А.1. Приложение1	98
Приложение Б. Приложение	101
Б.1. Приложение2	101
Список литературы	102

Введение

Актуальность задачи. В последние десятилетия наблюдается значительный прогресс в исследовании и освоении космического пространства. Открываются новые планетные системы, реализуются масштабные и комплексные космические проекты, планируются новые амбициозные космические миссии. Все это было бы невозможно без использования и интенсивного развития аналитических и численных методов небесной механики и динамики спутников. Современная динамика космических аппаратов (КА) является динамично развивающейся предметной областью, которая характеризуется очень широким спектром задач, охватывающих как прикладные вопросы, связанные с проектированием новой космической техники и развитием методов математического моделирования движения КА, так и вопросы развития теории и методов качественного анализа динамики спутников. В частности, несмотря на усложнение конструкций КА и повышение требований к их системам управления, актуальными остаются задачи исследования общих закономерностей движения спутников, моделируемых твердым телом. Одной из таких задач является задача о движении спутника относительно центра масс на эллиптической орбите. Изучению данной задачи в различных аспектах посвящено большое количество публикаций. Постановки задач и описание полученных в этой области результатов содержатся в следующих монографиях [8, 9, 35, 49].

Движение спутника относительно центра масс описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, которые не интегрируются в квадратурах, поэтому актуальной является задача о нахождении и исследовании свойств определенных классов их частных решений. При этом особый интерес представляют решения, которые играют определяющую роль в общей динамике спутника. К таким решениям, в частности, относятся периодические решения. Нередко исследование их свойств, позволяет получать важные качественные выводы об

общих закономерностях движения спутника, которые могут быть затем использованы для решения задач проектирования и моделирования движения КА, а также для разработки эффективной системы управления КА.

Исследованию периодических движений спутника на эллиптической орбите посвящено много работ. Наиболее детально изучены плоские периодические движения, при которых одна из главных центральных осей инерции спутника направлена по нормали к плоскости орбиты. Подробную библиографию по их исследованию можно найти в [17, 48].

В небесной механике и динамике спутников особую роль играют устойчивые плоские резонансные периодические движения, при которых периоды орбитального обращения и вращения спутника относительно центра масс находятся в рациональном соотношении. На таких движениях спутник (или планета) попадают в область особой динамической устойчивости, которая возникает благодаря наличию указанной резонансной связи [1, 2, 9, 11, 12, 13, 18, 19, 53].

Одним из наиболее важных типов резонанса является резонанс 1:1, когда периоды орбитального движения и осевого вращения совпадают. Астрономические наблюдения показали, что такой резонанс чаще всего встречается в движении естественных небесных тел (планет и их спутников) в Солнечной системе и за ее пределами. В частности, движение Луны удовлетворяет указанному резонансному соотношению. Такой же резонанс имеет место в движении спутников Марса, а также ряда спутников Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона.

В предельном случае, когда орбита центра масс круговая, резонансному вращению типа 1:1 соответствуют положения равновесия в орбитальной системе координат, когда главные центральные оси инерции спутника направлены по радиусу-вектору центра масс, по вектору его скорости и по нормали к плоскости орбиты. При малых эксцентриситетах орбиты из указанных положений равновесия рождаются так называемые эксцентриситетные колебания спутника, которые также являются резонансными движениями типа 1:1. Аналитическое и

численное построение эксцентриситетных колебаний, а также исследование их бифуркаций и устойчивости было выполнено в [3, 8, 20, 39, 35, 50, 55, 70, 62]. Исследование нечетных периодических движений, имеющих период равный периоду орбитального движения выполнялось в [20, 51, 70]. Резонансные вращения, возникающие из эксцентриситетных колебаний в результате бифуркации удвоения периода исследовались в работах [40, 41, 42].

Другим важным случаем плоского периодического движения спутника, при котором имеет место равенство периодов орбитального движения и осевого вращения, являются его колебания относительно направления, неподвижного в абсолютном пространстве. Задача о существовании и построении таких движений исследовалась аналитически и численно в работах [14, 15, 16, 20, 44, 45], исследование устойчивости было выполнено в [20, 30, 31].

Если спутник является динамически симметричным твердым телом, а в плоском движении его ось динамической симметрии направлена по нормали к орбите, то он может совершать лишь равномерные вращения вокруг этой оси (цилиндрическая прецессия). Задача об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите рассматривалась в [24, 25, 32, 38, 56, 59, 60].

Если же эллипсоид инерции спутника близок к эллипсоиду вращения, то существуют плоские резонансные вращения, рождающиеся из цилиндрической прецессии симметричного спутника [57]. В этом случае можно ввести малый параметр, характеризующий несимметричность распределения массы спутника, что позволяет изучать указанные резонансные вращения при произвольных значениях эксцентриситета аналитическими методами [43, 44, 45, 46, 47, 66, 67].

Помимо резонансных вращений типа 1:1 отдельный интерес представляет также исследование резонансных движений при которых периоды вращательного и орбитального движений относятся как 3:2. Такому резонансному соотношению удовлетворяет движение Меркурия, поэтому резонансные вращения типа

3:2 часто называют меркурианскими. Исследованию существования и устойчивости меркурианских движений посвящены работы [10, 33, 34, 60].

В двух особых случаях, когда параметры задачи о движении спутника относительно центра масс связаны соотношениями $2e = (C - A)/B$ или $-2e = 3(C - A)/B$, где A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника, а e – эксцентриситет орбиты, уравнение В.В. Белецкого, описывающее плоские движения спутника относительно центра масс, допускает точные частные решения, отвечающие резонансным вращениям типа 1:2 или 3:2 соответственно [7, 8, 11]. Для определенных значений параметров устойчивость указанных вращений исследовалась в [28, 36, 37, 52, 54, 58].

Целью данной диссертационной работы является исследование устойчивости вращений типа 1:2 или 3:2, определяемых точными решениями уравнения В.В. Белецкого, для неисследованных ранее значений параметров, а также разработка конструктивного алгоритма решения задачи об устойчивости периодической гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансах первого и второго порядков.

В первой главе сформулированы основные предположения используемой математической модели движения спутника относительно его центра масс на эллиптической орбите. Введены канонические переменные и дан вывод функции Гамильтона системы уравнений, описывающих движение спутника. Выписаны семейства частных периодических решений, описывающих плоские резонансные вращения типа 1:2 и 3:2. Даны постановки задач об устойчивости данных вращений с учетом как плоских, так и пространственных возмущений, а также сформулирована постановка задачи об устойчивости резонансных вращений динамически симметричного спутника. Выписано разложение функции Гамильтона системы уравнений возмущенного движения до членов четвертого порядка включительно.

Во второй главе исследуется устойчивость резонансного вращения типа 1:2

с учетом только плоских возмущений при неисследованных ранее значениях эксцентриситета. Получено разложение гамильтониана возмущенного движения в ряд по каноническим переменным до шестой степени включительно. Проведен анализ устойчивости линеаризованной в окрестности данного вращения системы и найдены три новые интервала устойчивости в линейном приближении. В указанных интервалах выполнен нелинейный анализ устойчивости и получены строгие выводы об устойчивости по Ляпунову. В частности, показано, что неустойчивость может иметь место лишь в конечном числе резонансных точек. Исследована устойчивость в вырожденных случаях, когда для решения вопроса об устойчивости необходимо проводить нелинейный анализ с учетом членов до шестой степени включительно. Показано, что в вырожденных случаях имеет место устойчивость по Ляпунову.

В третьей главе исследуется устойчивость в линейном приближении резонансного вращения типа 1:2. Спутник моделируется несимметричным твердым телом при этом учитываются как плоские, так и пространственные возмущения. В этом случае в задаче имеется два параметра: эксцентриситет орбиты центра масс и параметр, характеризующий геометрию масс спутника. Исследование устойчивости проводилось как аналитически, при малых значениях эксцентриситета, так и численно при произвольных значениях данного параметра. В плоскости параметров были построены области устойчивости в линейном приближении. При малых значениях эксцентриситета были получены аналитические выражения для границ указанных областей. Результаты численного и аналитического исследования хорошо согласуются.

В четвертой главе приведена методика исследования устойчивости периодических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в нерезонансных случаях и в случаях резонансов третьего и четвертого порядков. Разработана конструктивный алгоритм нормализации указанных гамильтоновых систем в случаях резонансов первого, второго порядков. Данный алгоритм позволяет

выполнять нелинейный анализ устойчивости на границах областей параметрического резонанса.

В пятой главе проводится строгое исследование устойчивости резонансных вращений типа 1:2 и 3:2 в случае динамически симметричного спутника с учетом пространственных возмущений. Для данной цели используются методики, разработанные и приведенные в предыдущей главе.

Основные результаты данной диссертационной работы докладывались на научных семинарах, российских и международных конференциях, а также были опубликованы в научных журналах, рекомендованных ВАК [5, 6, 63, 64].

Глава 1

Резонансные вращения спутника на эллиптической орбите

1.1. Уравнения движения спутника относительно центра масс на эллиптической орбите.

Рассмотрим спутник, движущийся в центральном ньютоновском гравитационном поле сил. Спутник моделируется твердым телом, центр масс которого движется по кеплеровской эллиптической орбите, т.е задача рассматривается в классической ограниченной постановке, когда предполагается, что движение спутника относительно центра масс не влияет на его орбиту [8]. Для описания движения спутника относительно центра масс введем следующие системы координат (Рис. 1)

- Орбитальную систему координат $OXYZ$, оси OX , OY , OZ которой направлены по радиус-вектору центра масс относительно притягивающего центра, по трансверсали и по нормали к орбите соответственно.
- Жестко связанную со спутником систему координат $Oxyz$, оси которой направлены вдоль его главных центральных осей инерции.

Ориентацию связанной системы координат относительно орбитальной будем задавать углами Эйлера ψ , θ , ϕ (Рис. 1). Уравнения движения спутника относительно центра масс можно записать в гамильтоновой форме. Следуя [35], получим функцию Гамильтона.

Обозначим через A , B и C главные моменты инерции спутника относительно осей Ox , Oy и Oz , а через p , q и r - проекции вектора угловой скорости на

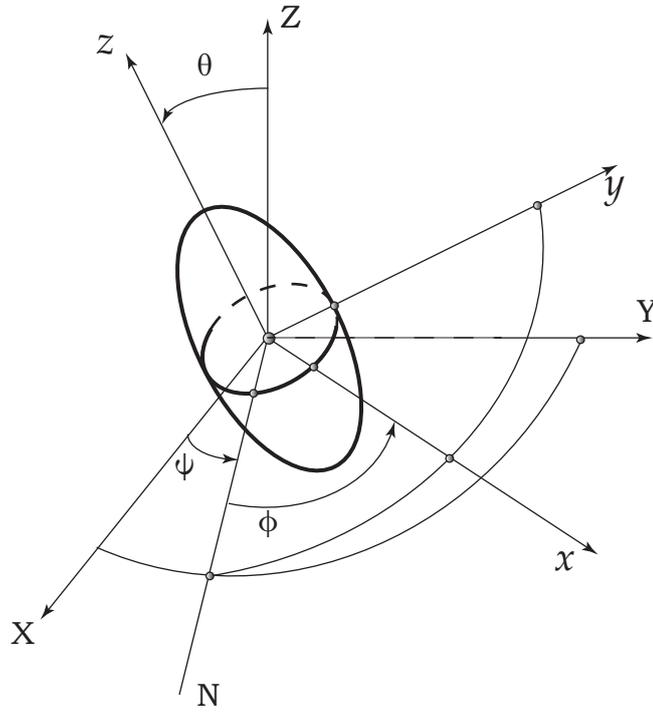


Рис. 1.

эти оси, тогда кинетическая энергия движения спутника относительно центра масс будет иметь следующий вид

$$T = \frac{1}{2} Ap^2 + \frac{1}{2} Bq^2 + \frac{1}{2} Cr^2, \quad (1.1)$$

где p , q и r выражаются через углы Эйлера и истинную аномалию ν следующим образом

$$\begin{aligned} p &= (\omega + \dot{\psi}) \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ q &= (\omega + \dot{\psi}) \cos \phi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \phi, \quad \omega = \frac{d\nu}{dt} \\ r &= (\omega + \dot{\psi}) \cos \theta + \dot{\phi} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Учитывая, что центр масс спутника движется по заданной кеплеровской орбите, потенциальную энергию движения спутника относительно центра масс можно записать в виде [9]

$$\Pi = \frac{3\omega_0^2}{2(1-e^2)^3} (1 + e \cos \nu)^3 (Aa_{11}^2 + Ba_{12}^2 + Ca_{13}^2), \quad (1.3)$$

где ω_0 – средняя угловая скорость вращения радиуса-вектора центра масс, а a_{11} , a_{12} , a_{13} – направляющие косинусы радиуса-вектора центра масс в орбитальной

системе координат $Oxyz$; они выражаются через углы Эйлера по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \cos \theta, \\ a_{12} &= -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \cos \theta, \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \theta. \end{aligned}$$

Введем обобщенные импульсы, соответствующие углам Эйлера

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}, \quad P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, \quad P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}, \quad (1.4)$$

где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа.

Гамильтониан задачи имеет вид

$$H = T_2 - T_0 + \Pi. \quad (1.5)$$

При помощи канонической замены переменных

$$p_\psi = \frac{A\omega_0}{(1-e^2)^{3/2}} P_\psi, \quad p_\theta = \frac{A\omega_0}{(1-e^2)^{3/2}} P_\theta, \quad p_\phi = \frac{A\omega_0}{(1-e^2)^{3/2}} P_\phi, \quad (1.6)$$

с валентностью $\frac{(1-e^2)^{3/2}}{A\omega_0}$ введем безразмерные импульсы p_ψ, p_θ, p_ϕ .

Таким образом, в переменных $\psi, \theta, \phi, p_\psi, p_\theta, p_\phi$ уравнения движения записываются в следующей канонической форме

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\psi}, & \frac{d\theta}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, & \frac{d\phi}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi}, \\ \frac{dp_\psi}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \psi}, & \frac{dp_\theta}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}, & \frac{dp_\phi}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (1.7)$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2} \frac{(\Theta_A \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) p_\psi^2}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\Theta_A \cos^2 \phi \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{\Theta_A}{\Theta_C (1 + e \cos \nu)^2} + \left. \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} \right) p_\phi^2 + \\
& + \frac{1}{2} \frac{(\Theta_A \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) p_\theta^2}{(1 + e \cos \nu)^2} - \frac{\cos \theta (\Theta_A \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) p_\psi p_\phi}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} - \\
& - \frac{\cos \phi \sin \phi (\Theta_A - 1) p_\psi p_\theta}{\sin \theta (1 + e \cos \nu)^2} + \frac{\cos \theta \sin \phi \cos \phi (\Theta_A - 1) p_\phi p_\theta}{\sin \theta (1 + e \cos \nu)^2} - p_\psi + \\
& + \frac{3}{2} (1 + e \cos \nu) \left(\frac{(\Theta_A - 1) (\cos \phi \cos \phi - \sin \phi \sin \phi \cos \theta)^2}{\Theta_A} + \right. \\
& \left. + \frac{(\Theta_C - 1) \sin^2 \phi \sin^2 \theta}{\Theta_A} \right), \tag{1.8}
\end{aligned}$$

где $\Theta_A = A/B$, $\Theta_C = C/B$.

При определенных ограничениях на параметры задачи уравнения движения допускают точные частные решения, отвечающие так называемым резонансным движениям спутника.

Если параметры Θ_A , Θ_C и e удовлетворяют соотношению

$$3(\Theta_C - \Theta_A) = -2e, \tag{1.9}$$

то канонические уравнения с гамильтонианом (1.8) имеют частное решение [11]

$$\psi^* = -\frac{1}{2} \nu, \quad p_\psi^* = \frac{1}{2} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\Theta_A}, \quad \theta^* = \frac{1}{2} \pi, \quad p_\theta^* = 0, \quad \phi^* = 0, \quad p_\phi^* = 0. \tag{1.10}$$

Решение (1.10) описывает резонансное вращение спутника, при котором его главная центральная ось инерции Oy направлена по нормали к плоскости орбиты, а сам спутник совершает один оборот в абсолютном пространстве за два оборота центра масс по орбите.

Если же параметры Θ_A , Θ_C и e удовлетворяют соотношению

$$\Theta_C - \Theta_A = 2e, \tag{1.11}$$

то каноническая система с гамильтонианом (1.8) имеет частное решение [7, 8]

$$\psi^* = \frac{1}{2} \nu, \quad p_\psi^* = \frac{3}{2} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\Theta_A}, \quad \theta^* = \frac{1}{2} \pi, \quad p_\theta^* = 0, \quad \phi^* = 0, \quad p_\phi^* = 0. \quad (1.12)$$

Решение (1.12) представляет собой резонансное вращение спутника, при котором его ось динамической симметрии лежит в плоскости орбиты, а сам спутник совершает в абсолютном пространстве три полных поворота относительно нормали к плоскости орбиты за два оборота его центра масс по орбите.

1.2. Постановки задачи об устойчивости резонансных вращений

Уравнения движения с гамильтонианом (1.8) допускают семейство частных решений, описывающих плоские движения спутника, при которых главная центральная ось инерции Oy направлена по нормали к плоскости орбиты. На решениях этого семейства

$$\theta^* = \frac{1}{2} \pi, \quad p_\theta^* = 0, \quad \phi^* = 0, \quad p_\phi^* = 0, \quad (1.13)$$

а изменение переменных ψ^* и p_ψ^* описываются канонической системой

$$\frac{d\psi}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi}, \quad \frac{dp_\psi}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} \quad (1.14)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \frac{\Theta_A p_\psi^2}{(1 + e \cos \nu)^2} - p_\psi + \frac{3}{2\Theta_A} (1 + e \cos \nu) \left((\Theta_A - 1) (\cos \psi)^2 + (\Theta_C - 1) (\sin \psi)^2 \right). \quad (1.15)$$

Поскольку резонансные вращения являются плоскими движениями, то при выполнении равенства (1.9) система (1.14) имеет частное решение

$$\psi^* = -\frac{1}{2} \nu, \quad p_\psi^* = \frac{1}{2} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\Theta_A}, \quad (1.16)$$

а при выполнении равенства (1.11) – частное решение

$$\psi^* = \frac{1}{2} \nu, \quad p_{\psi}^* = \frac{3}{2} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\Theta_A}, \quad (1.17)$$

описывающее упомянутые выше резонансные вращения спутника.

Таким образом, возникает задача об устойчивости резонансных вращений спутника с учетом только плоских возмущений, т.е. таких возмущений, при которых ось инерции Oy сохраняет неизменным свое направление по нормали к плоскости орбиты. Другими словами, это задача об устойчивости частных решений (1.16) и (1.17) системы (1.14).

В работах [37, 54] исследовалась задача об устойчивости решения (1.16). В частности, в [37] для значений эксцентриситета из интервала $[0, 0.91791]$, за исключением лишь двух особых точек, были получены строгие выводы об устойчивости по Ляпунову решения (1.16). В главе 2 данной диссертационной работы выполнен анализ устойчивости данного решения для неисследованного ранее интервала значений эксцентриситета, а также в особых точках. В работах [28, 36, 52] был проведен исчерпывающий анализ устойчивости по Ляпунову решения (1.16).

Если учитывать не только плоские, но и пространственные возмущения, то для решения вопроса об устойчивости резонансных вращений необходимо рассматривать полную систему уравнений движения с гамильтонианом (1.8), т.е. решать задачу об устойчивости решений (1.10) и (1.12) системы (1.7).

Для спутника с неравными моментами инерции устойчивость резонансного вращения (1.12) при наличии пространственных возмущений исследовалась в [58].

Устойчивость резонансного вращения (1.10) с учетом как плоских, так и пространственных возмущений исследуется в главе 3 данной диссертационной работы.

Отдельный интерес представляет исследование устойчивости резонансных

вращений динамически симметричного спутника ($A = B$), когда в невозмущенном движении (резонансном вращении) ось динамической симметрии находится в плоскости орбиты центра масс. В этом случае постановка задачи об устойчивости резонансных вращений имеет некоторые отличия от общего случая несимметричного спутника. Это связано с тем, что при динамической симметрии угол собственного вращения ϕ является циклической координатой, а соответствующий импульс p_ϕ является первым интегралом уравнений движения (1.7). Очевидно, что при $p_\phi \neq 0$ резонансные вращения неустойчивы по отношению к возмущениям угла ϕ , но можно исследовать их устойчивость по отношению к возмущениям, удовлетворяющим условию $p_\phi = 0$.

Если положить $p_\phi = 0$, то движение спутника описывается следующей системой канонических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\psi}, & \frac{dp_\psi}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \\ \frac{d\theta}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, & \frac{dp_\theta}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.18)$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{(1 + e \cos \nu)^2} - p_\psi + \\ &+ \frac{3}{2} (1 + e \cos \nu) (\Theta_C - 1) \sin^2 \psi \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Частные решения этой системы, отвечающие резонансным вращениям, при выполнении условий (1.10) или (1.12) принимают соответственно вид

$$\psi^* = -\frac{1}{2} \nu, \quad p_\psi^* = \frac{1}{2} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\Theta_A}, \quad \theta^* = \frac{1}{2} \pi, \quad p_\theta^* = 0 \quad (1.20)$$

или

$$\psi^* = \frac{1}{2} \nu, \quad p_\psi^* = \frac{3}{2} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\Theta_A}, \quad \theta^* = \frac{1}{2} \pi, \quad p_\theta^* = 0. \quad (1.21)$$

Таким образом, задача об устойчивости резонансных вращений динамически симметричного спутника состоит в исследовании устойчивости решений

(1.20) и (1.21) системы (1.18). В такой постановке эта задача ранее не рассматривалась, ее решению посвящена глава 5 данной диссертационной работы.

1.3. Гамильтониан возмущенного движения

В силу равенства (1.9) в задаче об устойчивости резонансного вращения (1.10) имеется два независимых параметра. В качестве таких параметров выберем эксцентриситет орбиты и новый инерционный параметр $\mu = 1/\Theta_A = B/A$. Введение параметра μ обусловлено тем, что, в отличие от параметров Θ_A и Θ_C , он имеет ограниченную область значений, определяемую неравенством

$$0 < \mu \leq \frac{6}{3 + 2e}, \quad (1.22)$$

которое является простым следствием неравенства треугольника для моментов инерции A, B, C .

Аналогично, в задаче об устойчивости резонансного вращения (1.12) в качестве параметров задачи выберем e и μ . В этом случае область их значений также ограничена. С учетом равенства (1.11) и неравенства треугольника для моментов инерции A, B, C она задается неравенствами

$$0 < \mu \leq \frac{2}{1 + 2e}, \quad 0 < e \leq \frac{1}{2}. \quad (1.23)$$

Для описания движения в окрестности резонансных вращений (1.10) и (1.12) введем новые канонические переменные q_i, p_i ($i = 1, 2, 3$) по формулам

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^* + \frac{q_1}{1 + e \cos \nu}, & p_\psi &= p_\psi^* + \mu(1 + e \cos \nu) p_1 + e \mu \sin \nu q_1, \\ \theta &= \theta^* + \frac{q_2}{1 + e \cos \nu}, & p_\theta &= p_\theta^* + \mu(1 + e \cos \nu) p_2 + e \mu \sin \nu q_2, \\ \phi &= \phi^* + \frac{q_3}{1 + e \cos \nu}, & p_\phi &= p_\phi^* + \mu(1 + e \cos \nu) p_3 + e \mu \sin \nu q_3. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Замена переменных (1.24) является канонической, с валентностью μ^{-1} , поэтому уравнения движения в переменных q_i, p_i , ($i = 1, 2, 3$) имеют гамильтоно-

ву форму

$$\frac{dq_i}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.25)$$

Переменные q_1, p_1 определяют плоские возмущения, а переменные q_2, p_2, q_3, p_3 – пространственные возмущения, т.е. возмущения при которых главная ось инерции Oy отклоняется от нормали к плоскости орбиты. Таким образом, в переменных q_i, p_i ($i = 1, 2, 3$) задача об устойчивости резонансного вращения сводится к задаче об устойчивости положения равновесия $q_i = p_i = 0$ системы (1.25).

Разложим функцию Гамильтона в ряд в окрестности $q_i = p_i = 0$

$$H = H_2 + H_3 + \dots \quad (1.26)$$

Квадратичная часть разложения (1.26) имеет следующую структуру

$$H_2 = H_{21}(q_1, p_1, \nu) + H_{22}(q_2, q_3, p_2, p_3, \nu), \quad (1.27)$$

Выпишем необходимые в дальнейшем члены разложения гамильтониана (1.26) системы уравнений возмущенного движения в окрестности резонансного вращения (1.9). Квадратичные члены этого разложения имеют следующий вид

$$H_{21} = \frac{1}{2} p_1^2 - \frac{1}{2} \frac{e \cos \nu q_1^2}{1 + e \cos \nu}, \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned}
H_{22} = & \frac{1}{8\mu(1+e\cos\nu)^2} (6(\cos\nu-1)(1+e\cos\nu) + (e(5e-6)\cos^2\nu + \\
& + (4e^2+8e-6)\cos\nu - 4e^2+4e+7)\mu - 4e^2(\cos^2\nu-1)\mu^2) q_2^2 + \\
& + \frac{1}{2} p_2^2 \mu + \frac{1}{8\mu(1+e\cos\nu)^2(2e\mu-3)} (18(\cos\nu+1)(1+e\cos\nu) - \\
& - (3e(11e+6)\cos^2\nu + 6(2e^2+6e+3)\cos\nu - 12e^2+12e+15)\mu + \\
& + (7e^2(2e+3)\cos^2\nu + 2e(8e+3)\cos\nu - 8e^3 - 12e^2+10e-3)\mu^2 + \\
& + 2e(1+e\cos\nu)^2\mu^3) q_3^2 - 3\frac{p_3^2\mu}{4e\mu-6} + \frac{e\sin\nu(\mu-1)q_2p_2}{1+e\cos\nu} + \\
& + \frac{1}{2}(\mu-1)q_3p_2 + \frac{1}{2}\frac{\sin\nu(e\mu^2+3\mu-3)q_2q_3}{\mu(1+e\cos\nu)} + \frac{1}{2}p_3q_2 - \\
& - \frac{\sin\nu e(2e\mu+3\mu-3)q_3p_3}{(1+e\cos\nu)(2e\mu-3)}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Члены третьей и четвертой степеней в разложении (1.26) имеют, соответственно, следующий вид

$$\begin{aligned}
H_3 = & \frac{(\mu-1)q_3p_1p_2}{1+e\cos\nu} + \frac{1}{2}\frac{(\mu-1)q_3^2p_1}{1+e\cos\nu} + \frac{p_3p_1q_2}{1+e\cos\nu} + \frac{e\sin\nu q_2q_3p_1\mu}{(1+e\cos\nu)^2} + \\
& + \frac{1}{2}\frac{q_2^2p_1}{1+e\cos\nu} + \frac{(\mu-1)e\sin\nu p_2q_1q_3}{(1+e\cos\nu)^2} + \frac{1}{2}\frac{(\mu-1)\sin\nu(e\mu+3)q_1q_3^2}{\mu(1+e\cos\nu)^2} + \\
& + \frac{e\sin\nu p_3q_1q_2}{(1+e\cos\nu)^2} - \frac{1}{2}\frac{\sin\nu(e\mu+3\mu-3)q_1q_2^2}{\mu(1+e\cos\nu)^2} - \frac{2}{3}\frac{e\sin\nu q_1^3}{(1+e\cos\nu)^2} - \\
& - \frac{(e^2(\cos^2\nu-1)\mu^2+3\cos\nu(\mu-1)(1+e\cos\nu))q_1q_2q_3}{\mu(1+e\cos\nu)^3},
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
H_4 = & -\frac{1}{2} \frac{(\mu-1) q_3^2 p_2^2}{(1+e \cos \nu)^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mu-1) q_3^2 p_1^2}{(1+e \cos \nu)^2} - \frac{1}{3} \frac{(\mu-1) p_2 q_3^3}{(1+e \cos \nu)^2} - \\
& - \frac{1}{24} \frac{((e\mu+6) \cos \nu + \mu+6) q_3^4 (\mu-1)}{\mu (1+e \cos \nu)^3} + \frac{(\mu-1) q_2 q_3 p_2 p_3}{(1+e \cos \nu)^2} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{(\mu-1) q_2 q_3^2 p_3}{(1+e \cos \nu)^2} + \frac{1}{6} \frac{(\mu-1) \sin \nu (e\mu-6) q_2 q_3^3}{\mu (1+e \cos \nu)^3} + \frac{1}{2} \frac{p_3^2 q_2^2}{(1+e \cos \nu)^2} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{q_2^2 p_1^2}{(1+e \cos \nu)^2} + \frac{e \sin \nu q_2^2 q_3 p_3 \mu}{(1+e \cos \nu)^3} + \frac{1}{4} \frac{(\mu-1) q_2^2 q_3 p_2}{(1+e \cos \nu)^2} - \\
& - \frac{q_2^2 q_3^2}{8\mu (1+e \cos \nu)^4} (e (3e\mu^2 + e\mu - 6\mu + 6) \cos^2 \nu - \\
& - 2(\mu-1)(e\mu - 3e + 3) \cos \nu - (4e^2 + 1)\mu^2 + 7\mu - 6) + \\
& + \frac{5}{12} \frac{p_3 q_2^3}{(1+e \cos \nu)^2} + \frac{1}{12} \frac{\sin \nu (3e\mu^2 + 2e\mu - 3\mu + 3) q_2^3 q_3}{\mu (1+e \cos \nu)^3} + \\
& + \frac{1}{12} \frac{((e+1)(3 \cos \nu - 2)\mu - 3 \cos \nu + 3) q_2^4}{\mu (1+e \cos \nu)^3} + \frac{(\mu-1) e \sin \nu q_1 q_3^2 p_1}{(1+e \cos \nu)^3} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{(\mu-1) (e^2 (\cos^2 \nu - 1)\mu + 3 \cos \nu (1+e \cos \nu)) q_1^2 q_3^2}{\mu (1+e \cos \nu)^4} + \\
& + \frac{e \sin \nu p_1 q_1 q_2^2}{(1+e \cos \nu)^3} - 3 \frac{(\mu-1) \sin \nu q_1^2 q_2 q_3}{\mu (1+e \cos \nu)^3} + \frac{1}{3} \frac{e \cos \nu q_1^4}{(1+e \cos \nu)^3} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{(e(e\mu + 3\mu - 3) \cos^2 \nu + (2e\mu + 3\mu - 3) \cos \nu + e^2 \mu) q_1^2 q_2^2}{\mu (1+e \cos \nu)^4}.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Приведем также явный вид разложения гамильтониана (1.26) системы уравнений возмущенного движения в окрестности резонансного вращения (1.11) до членов четвертой степени включительно.

В этом случае квадратичные члены разложения (1.26) имеют вид

$$H_{21} = \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{7}{2} \frac{e \cos \nu q_1^2}{1+e \cos \nu}, \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
H_{22} = & \frac{1}{2} p_2^2 \mu + \frac{1}{2} \frac{p_3^2 \mu}{2 e \mu + 1} - \frac{\sin \nu e (2 e \mu - \mu + 1) q_3 p_3}{(1 + e \cos \nu) (2 e \mu + 1)} + \\
& + \frac{3}{2} (\mu - 1) q_3 p_2 - \frac{1}{8 \mu (1 + e \cos \nu)^2 (2 e \mu + 1)} (e (6 - 18 e^2 \mu^3 + \\
& + e (2 e - 17) \mu^2 + (13 e - 6) \mu) \cos^2 \nu - 2 (2 e \mu + 1) (9 e \mu^2 - (4 e - 3) \mu - \\
& - 3 e - 3) \cos \nu + 6 - 18 e \mu^3 + (8 e^3 - 4 e^2 + 6 e - 9) \mu^2 + \\
& + (4 e^2 + 12 e + 3) \mu) q_3^2 + \frac{3}{2} p_3 q_2 + \frac{\sin \nu e (\mu - 1) q_2 p_2}{1 + e \cos \nu} + \\
& + \frac{3 (e \mu^2 - \mu + 1) \sin \nu q_2 q_3}{\mu (1 + e \cos \nu)} + \frac{1}{8 \mu (1 + e \cos \nu)^2} (e (6 - 4 e \mu^2 + \\
& + (29 e - 6) \mu) \cos^2 \nu - ((12 e^2 - 40 e + 6) \mu + 6 e - 6) \cos \nu - 6 + \\
& + 4 e^2 \mu^2 - (4 e^2 + 12 e - 15) \mu) q_2^2,
\end{aligned} \tag{1.33}$$

а члены третьей и четвертой степеней запишутся в виде

$$\begin{aligned}
H_3 = & \frac{(\mu - 1) q_3 p_1 p_2}{1 + e \cos \nu} + \frac{3 (\mu - 1) q_3^2 p_1}{2 (1 + e \cos \nu)} + \frac{p_3 p_1 q_2}{1 + e \cos \nu} + \frac{e \sin \nu q_2 q_3 p_1 \mu}{(1 + e \cos \nu)^2} + \\
& + \frac{3 q_2^2 p_1}{2 (1 + e \cos \nu)} + \frac{(\mu - 1) e \sin \nu p_2 q_1 q_3}{(1 + e \cos \nu)^2} + \frac{3 (\mu - 1) \sin \nu (e \mu - 1) q_1 q_3^2}{2 \mu (1 + e \cos \nu)^2} - \\
& - \frac{(e^2 (\cos^2 \nu - 1) \mu^2 + 3 \cos \nu (\mu - 1) (1 + e \cos \nu)) q_1 q_2 q_3}{\mu (1 + e \cos \nu)^3} - \\
& - \frac{3 (e \mu - \mu + 1) \sin \nu q_1 q_2^2}{2 \mu (1 + e \cos \nu)^2} - 2 \frac{e \sin \nu q_1^3}{(1 + e \cos \nu)^2} + \frac{e \sin \nu p_3 q_1 q_2}{(1 + e \cos \nu)^2},
\end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}
H_4 = & -\frac{1}{2} \frac{(\mu-1)q_3^2 p_2^2}{(1+e\cos\nu)^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mu-1)q_3^2 p_1^2}{(1+e\cos\nu)^2} - \frac{(\mu-1)p_2 q_3^3}{(1+e\cos\nu)^2} - \\
& -\frac{1}{8} \frac{(\mu-1)((3e\mu+2)\cos\nu+3\mu+2)q_3^4}{\mu(1+e\cos\nu)^3} + \frac{(\mu-1)q_2 q_3 p_2 p_3}{(1+e\cos\nu)^2} + \\
& + \frac{3}{2} \frac{(\mu-1)q_2 q_3^2 p_3}{(1+e\cos\nu)^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mu-1)\sin\nu(e\mu+2)q_2 q_3^3}{\mu(1+e\cos\nu)^3} + \frac{1}{2} \frac{p_3^2 q_2^2}{(1+e\cos\nu)^2} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{q_2^2 p_1^2}{(1+e\cos\nu)^2} + \frac{e\sin\nu q_2^2 q_3 p_3 \mu}{(1+e\cos\nu)^3} + \frac{3}{4} \frac{(\mu-1)q_2^2 q_3 p_2}{(1+e\cos\nu)^2} + \\
& + \frac{q_2^2 q_3^2}{8\mu(1+e\cos\nu)^4} (e(5e\mu^2-9e\mu+6\mu-6)\cos^2\nu + \\
& + 6(\mu-1)(3e\mu-e+1)\cos\nu + 4e^2\mu^2 + 9\mu^2 - 15\mu + 6) + \\
& + \frac{5}{4} \frac{p_3 q_2^3}{(1+e\cos\nu)^2} + \frac{1}{4} \frac{\sin\nu(3e\mu^2+2e\mu+\mu-1)q_2^3 q_3}{\mu(1+e\cos\nu)^3} + \\
& + \frac{1}{4} \frac{((e+1)(\cos\nu+2)\mu-\cos\nu+1)q_2^4}{\mu(1+e\cos\nu)^3} + \frac{(\mu-1)e\sin\nu q_1 q_3^2 p_1}{(1+e\cos\nu)^3} + \\
& - \frac{1}{2} \frac{(\mu-1)(e(e\mu+3)(\cos\nu)^2+3\cos\nu-e^2\mu)q_1^2 q_3^2}{\mu(1+e\cos\nu)^4} + \\
& + \frac{e\sin\nu p_1 q_1 q_2^2}{(1+e\cos\nu)^3} + 3 \frac{(\mu-1)\sin\nu q_1^2 q_2 q_3}{\mu(1+e\cos\nu)^3} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{(e(7e\mu-3\mu+3)(\cos\nu)^2+(6e\mu-3\mu+3)\cos\nu-e^2\mu)q_1^2 q_2^2}{\mu(1+e\cos\nu)^4} - \\
& - \frac{e\cos\nu q_1^4}{(1+e\cos\nu)^3}.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Глава 2

Исследование устойчивости резонансных вращений с учетом плоских возмущений

В данной главе решается задача об устойчивости по Ляпунову резонансного вращения спутника, при котором он совершает один оборот в абсолютном пространстве за два оборота центра масс по орбите. Исследование проводится для неисследованных ранее значений эксцентриситета. Основные результаты данной главы были опубликованы автором в [64].

2.1. Гамильтониан задачи

Пусть выполнено соотношение (1.9). Будем рассматривать задачу об устойчивости резонансного вращения спутника в ограниченной постановке, учитывая только плоские возмущения, сохраняющие направление оси Oy связанной системы координат по нормали к плоскости орбиты центра масс. Таким образом, далее рассматривается задача об устойчивости решения (1.16) канонической системы (1.14).

Выполним следующую каноническую замену переменных с валентностью μ^{-1} по формулам

$$\psi = \psi^* + \frac{q}{1 + e \cos \nu}, \quad p_\psi = p_\psi^* + \mu(1 + e \cos \nu)p + e \mu \sin \nu q. \quad (2.1)$$

В новых переменных задача об устойчивости рассматриваемого резонансного вращения свелась к задаче об устойчивости тривиального положения равновесия $q = p = 0$ гамильтоновой системы

$$\frac{dq}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (2.2)$$

Необходимое для дальнейшего анализа разложение функции Гамильтона H в ряд Тейлора в окрестности $q = p = 0$ имеет следующий вид

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \frac{e \cos \nu}{2(1 + e \cos \nu)} q^2 - \frac{2e \sin \nu}{3(1 + e \cos \nu)^2} q^3 + \frac{e \cos \nu}{3(1 + e \cos \nu)^3} q^4 + \frac{2e \sin \nu}{15(1 + e \cos \nu)^4} q^5 - \frac{2e \cos \nu}{45(1 + e \cos \nu)^5} q^6 + O(q^7). \quad (2.3)$$

Разложение (2.3), полученное с учетом соотношения (1.9), содержит только один параметр – эксцентриситет орбиты e .

2.2. Исследование устойчивости в линейном приближении

Исследование устойчивости резонансного вращения начнем с анализа линейного приближения. С этой целью рассмотрим линеаризованную в окрестности $q = p = 0$ каноническую систему

$$\frac{dq}{d\nu} = p, \quad \frac{dp}{d\nu} = \frac{e \cos \nu}{(1 + e \cos \nu)} q. \quad (2.4)$$

Выводы об устойчивости линейной системы (2.4) получаются на основании анализа корней ее характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \quad (2.5)$$

где $A = [x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi)]/2$. Функции $x_{11}(\nu)$, $x_{22}(\nu)$ являются элементами матрицы фундаментальных решений $\mathbf{X}(\nu)$ системы (2.4), удовлетворяющей начальным условиям $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_2$, где \mathbf{E}_2 – единичная матрица второго порядка.

Если коэффициент $|A| > 1$, то характеристическое уравнение (2.5) имеет корень с модулем большим единицы, а соответствующий ему характеристический показатель – положительную вещественную часть. В этом случае на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [23] имеет место неустойчивость не только рассматриваемой линейной, но и исходной

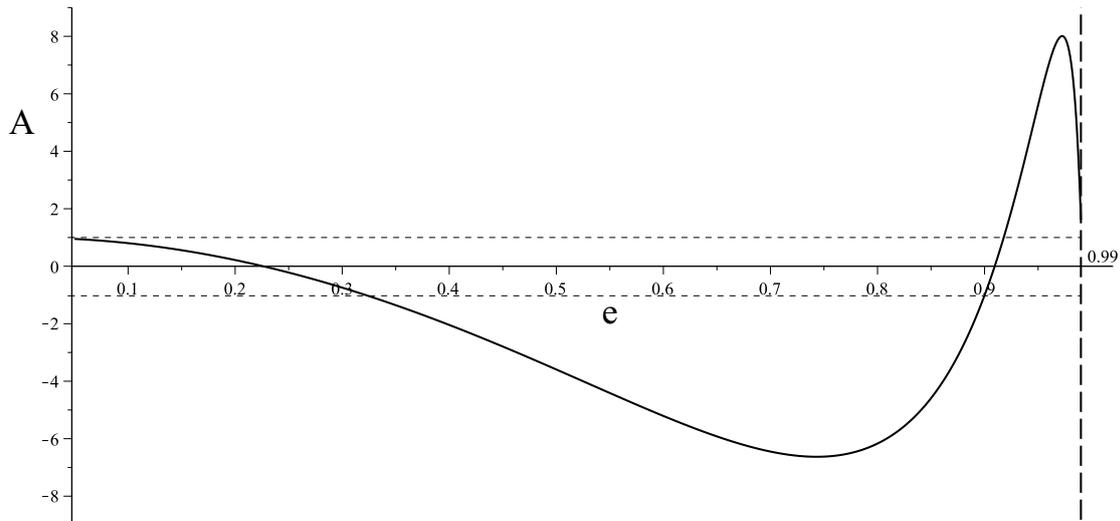


Рис. 1. Зависимость коэффициента A от эксцентриситета на интервале $[0; 0.99]$

нелинейной системы уравнений возмущенного движения (1.14), что означает неустойчивость по Ляпунову рассматриваемого резонансного движения.

Если же $|A| < 1$, то все корни характеристического уравнения (2.5) имеют модули равные единице, а соответствующие им характеристические показатели являются чисто мнимыми. В этом случае линейная система с гамильтонианом (2.4) устойчива [23]. Последнее, однако, еще не означает, что по отношению к плоским возмущениям резонансное вращение устойчиво по Ляпунову. Для получения строгих выводов об устойчивости необходимо проведение нелинейного анализа с учетом членов третьей, четвертой, а иногда и более высокой степени в разложении гамильтониана (2.3).

При $|A| = 1$ характеристическое уравнение имеет кратный корень, равный $+1$ или -1 , а линейная система может быть как устойчива, так и неустойчива. В этом случае для строгого решения задачи об устойчивости также необходим нелинейный анализ.

В общем случае, для нахождения значения коэффициента A необходимо

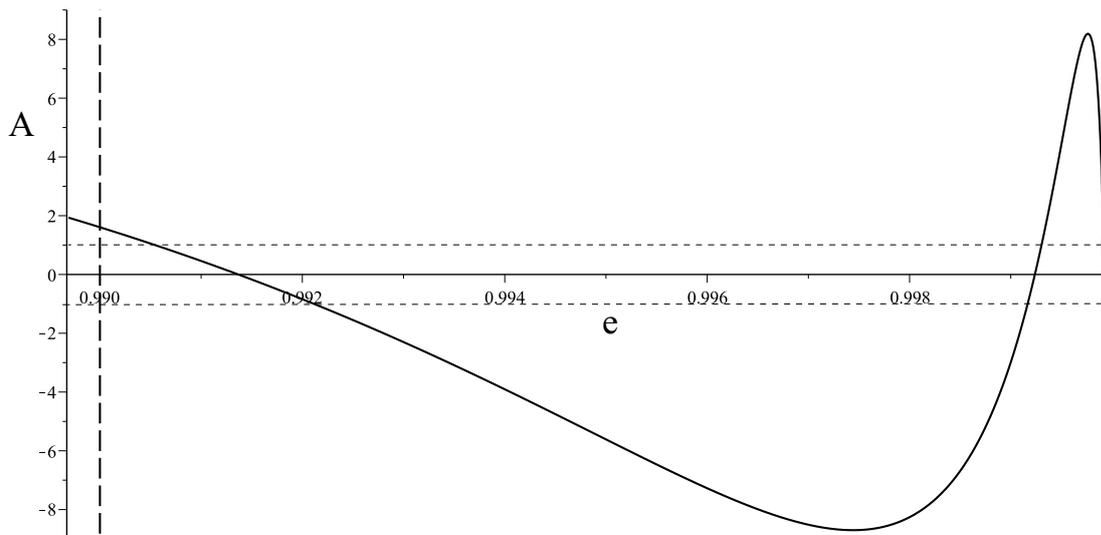


Рис. 2. Зависимость коэффициента A от эксцентриситета на интервале $[0.99; 0.99994]$

провести численное интегрирование линейной системы от 0 до 2π . Следует отметить, что при $e = 1$ в правых частях системы (2.4) присутствует точка разрыва второго рода при $\nu = \pi$. Численные расчеты показали, что при приближении e к единице, коэффициент A многократно меняет знак, более того, после каждой смены знака A возрастает или уменьшается до некоторой величины, модуль которой превосходит единицу. Это приводит к чередованию областей устойчивости и неустойчивости вблизи $e = 1$. При приближении эксцентриситета к единице упомянутые интервалы сужаются. На Рис. 1 и Рис. 2 представлен график зависимости коэффициента A от эксцентриситета e . Численное интегрирование системы (2.4) для значений эксцентриситета близких к единице требует очень большой точности и становится затруднительным. Поэтому численные расчеты производились для значений эксцентриситета $0 < e < 0.999933$. Оказалось, что

в интервалах

$$\mathbb{U}_1 = [0.32173093; 0.90010166] ,$$

$$\mathbb{U}_2 = [0.9179098746; 0.9905450175] ,$$

$$\mathbb{U}_3 = [0.9921141694; 0.99916659849] ,$$

$$\mathbb{U}_4 = [0.99930356235; 0.999918785804]$$

резонансное вращение (1.10) неустойчиво, а в интервалах

$$\mathbb{S}_1 = [0; 0.32173093] ,$$

$$\mathbb{S}_2 = [0.90010166; 0.9179098746] ,$$

$$\mathbb{S}_3 = [0.9905450175; 0.9921141694] ,$$

$$\mathbb{S}_4 = [0.99916659849; 0.99930356235] ,$$

$$\mathbb{S}_5 = [0.999918785804; 0.999932116844]$$

резонансное вращение (1.10) устойчиво в линейном приближении.

Отметим еще что интервалы U_1, U_2, S_1, S_2 впервые были обнаружены в работе [54], а их границы были уточнены в работе [37].

2.3. О методе нелинейного анализа устойчивости периодических гамильтоновых систем с одной степеню свободы

Для строгого решения вопроса об устойчивости резонансного вращения в областях S_i ($i = 1, \dots, 5$), необходимо выполнить дополнительное исследование устойчивости с учетом нелинейных членов в правых частях уравнений (1.14). В данной диссертационной работе нелинейный анализ устойчивости выполняется на основе метода, разработанного А.П.Маркеевым [28, 36]. Основная идея указанного метода состоит в построении симплектического отображения,

генерируемого периодической гамильтоновой системой с одной степенью свободы, и дальнейшем исследовании устойчивости неподвижной точки этого отображения. Задача об устойчивости неподвижной точки эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия исходной гамильтоновой системы. В данном параграфе дается краткое описание указанного метода.

Рассмотрим каноническую систему с одной степенью свободы, гамильтониан $H(q, p, \nu)$ которой является 2π -периодической функцией независимой переменной ν . Разложение функции Гамильтона в ряд в окрестности положения равновесия $q = p = 0$ имеет вид

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (2.6)$$

где H_m – форма степени m по каноническим переменным q и p с 2π -периодическими по ν коэффициентами.

Характеристическое уравнение линейной канонической системы, гамильтонианом H_2 которой является квадратичная часть функции Гамильтона (2.3), имеет вид (2.5). Далее мы предполагаем, что коэффициент A в этом уравнении удовлетворяет неравенству $|A| \leq 1$, т.е. в задаче об устойчивости канонической системы с гамильтонианом имеет место критический случай, когда для решения вопроса об устойчивости необходим нелинейный анализ.

Пусть q_0, p_0 – начальные значения переменных q, p , а q_1, p_1 их значения при $\nu = 2\pi$. Тогда, согласно [28], искомое симплектическое отображение можно построить в следующем виде

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}(2\pi) \begin{pmatrix} q_0 - \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial^2 S_3}{\partial p_0 \partial q_0} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} - \frac{\partial S_4}{\partial p_0} + O_4 \\ p_0 + \frac{\partial S_3}{\partial q_0} - \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_0^2} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial S_4}{\partial q_0} + O_4 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где $S_k = \Phi_k(q_0, p_0, 2\pi)$, а $\Phi_k(q_0, p_0, \nu)$ – формы степени k ($k = 3, 4$) удовлетворя-

ющие следующим уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_3(q_0, p_0, \nu)}{\partial \nu} &= -M_3(q_0, p_0, \nu), \\ \frac{\partial \Phi_4(q_0, p_0, \nu)}{\partial \nu} &= -M_4(q_0, p_0, \nu) - \frac{\partial M_3(q_0, p_0, \nu)}{\partial p_0} \frac{\partial \Phi_3(q_0, p_0, \nu)}{\partial q_0},\end{aligned}\quad (2.8)$$

где $M_k(q_0, p_0, \nu)$ – формы, полученные из $H_k(q, p, \nu)$ путем замены переменных

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{X}(\nu) \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{X}(\nu)$ – матрица фундаментальных решений линейной канонической системы, гамильтонианом H_2 которой является квадратичная часть функции Гамильтона (2.3).

Приравнявая коэффициенты в обеих частях уравнения (2.8), получим девять обыкновенных дифференциальных уравнений на коэффициенты форм $\Phi_k(q_0, p_0, \nu)$ ($k = 3, 4$). Правые части этих уравнений содержат значения $x_{ij}(\nu)$, которые являются элементами матрицы $\mathbf{X}(\nu)$ и определяются путем решения линеаризованной системы. Таким образом, интегрируя систему из 13 уравнений, получим коэффициенты формы S_k . В общем случае, интегрирование должно проводиться численно.

Выполним следующую каноническую замену переменных

$$q = n_{11}Q + n_{12}P, \quad p = n_{21}Q + n_{22}P, \quad (2.10)$$

нормализующую линейную часть отображения (2.7). В областях устойчивости в линейном приближении, т.е. когда $|A| < 1$, коэффициенты n_{ij} могут быть вычислены по формулам [28]

$$\begin{aligned}n_{11} &= -\delta \kappa x_{12}(2\pi), \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = \delta \kappa [x_{11}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda)], \quad n_{22} = -\kappa \sin(2\pi\lambda), \\ \kappa &= \sqrt{|x_{12}(2\pi) \sin(2\pi\lambda)|^{-1}}, \quad \delta = \text{sign}[x_{12}(2\pi) \sin(2\pi\lambda)].\end{aligned}\quad (2.11)$$

В переменных Q, P отображение принимает следующий вид

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q_0 - \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial P_0 \partial Q_0} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} - \frac{\partial F_4}{\partial P_0} + O_4 \\ P_0 + \frac{\partial F_3}{\partial Q_0} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_0^2} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_0} + O_4 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где

$$F_3(Q_0, P_0) = cS_3(n_{11}Q_0 + n_{12}P_0, n_{21}Q_0 + n_{22}P_0),$$

$$F_4(Q_0, P_0) = cS_4(n_{11}Q_0 + n_{12}P_0, n_{21}Q_0 + n_{22}P_0) + \Delta,$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \left[n_{12}n_{22} \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_0} \right)^2 - 2n_{12}n_{21} \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_0} \right) \left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0} \right) + n_{11}n_{21} \left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0} \right)^2 \right],$$

а c - валентность канонической замены переменных (2.10), вычисленная по формуле $c = (n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12})^{-1}$.

Нормализованная линейная часть отображения (2.12) задается матрицей

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\sigma) & \sin(2\pi\sigma) \\ -\sin(2\pi\sigma) & \cos(2\pi\sigma) \end{pmatrix}, \quad \sigma = \delta\lambda \quad (2.13)$$

и представляет собой поворот на угол $2\pi\sigma$.

При $A = 1$, характеристическое уравнение (2.5) имеет кратный корень $\rho = 1$ (случай резонанса первого порядка). Предположим, что по крайней мере одна из величин $x_{12}(2\pi)$ или $x_{21}(2\pi)$ не равна нулю, тогда в формулах (2.10) коэффициенты могут быть выбраны следующим образом:

если $x_{12}(2\pi) \neq 0, x_{21}(2\pi) = 0$, то

$$n_{11} = \sqrt{|x_{12}(2\pi)|}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = 0, \quad n_{22} = \sqrt{|x_{12}(2\pi)|}/x_{12}(2\pi); \quad (2.14)$$

если $x_{12}(2\pi) = 0, x_{21}(2\pi) \neq 0$, то

$$n_{11} = 0, \quad n_{12} = \sqrt{|x_{21}(2\pi)|}/x_{21}(2\pi), \quad n_{21} = \sqrt{|x_{21}(2\pi)|}, \quad n_{22} = 0; \quad (2.15)$$

если $x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi) \neq 0$, то

$$n_{11} = x_{12}(2\pi), \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = 1 - x_{11}(2\pi), \quad n_{22} = 1. \quad (2.16)$$

В этом случае матрица линейной части отображения (2.12) имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

При $A = -1$, характеристическое уравнение (2.5) имеет кратный корень $\rho_1 = \rho_2 = -1$ (случай резонанса второго порядка). В этом случае коэффициенты в (2.10) могут быть вычислены по формулам (2.14) если $x_{12}(2\pi) \neq 0$, $x_{21}(2\pi) = 0$ и по формулам (2.15) если $x_{12}(2\pi) = 0$, $x_{21}(2\pi) \neq 0$. Если же $x_{12}(2\pi) x_{21}(2\pi) \neq 0$, то коэффициенты следует выбрать такими:

$$n_{11} = x_{12}(2\pi), \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = -1 - x_{11}(2\pi), \quad n_{22} = 1. \quad (2.18)$$

После выполнения замены переменных (2.10) матрица нормализованной линейной части отображения (2.12) примет вид

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (2.19)$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= f_{30} - f_{12}, & a_2 &= f_{12} + 3f_{30}, & a_3 &= f_{22} - f_{40} - f_{04}, \\ b_1 &= f_{21} - f_{03}, & b_2 &= f_{21} + 3f_{03}, & b_3 &= f_{13} - f_{31}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \varkappa &= 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) + 6(a_1b_2 - a_2b_1) - 8a_2b_2 + \\ & 9 \cot(3\pi\sigma)(a_1^2 + b_1^2) + 3 \cot(\pi\sigma)(a_2^2 + b_2^2), \\ \varkappa_1 &= 2[4a_3 + 9a_1b_1 - a_2b_2 + 3 \cot(\pi\sigma)(a_1a_2 - b_1b_2)], \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\varkappa_2 = 8b_3 - 9(a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + 6 \cot(\pi\sigma)(a_1b_2 + a_2b_1),$$

$$g_1 = 2f_{40} + f_{21}^2, \quad g_2 = f_{40} - 12f_{30}f_{21} + 9f_{30}^2,$$

где f_{ij} ($i + j = k$) – коэффициенты форм F_k ($k = 3, 4$).

В работах [27, 28] были получены следующие критерии устойчивости неподвижной точки отображения (2.12).

- Если в системе с гамильтонианом (2.3) отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно, и если $\varkappa \neq 0$, то неподвижная точка отображения (2.12) устойчива.
- Пусть в системе с гамильтонианом (2.3) присутствует резонанс первого порядка ($\rho_1 = \rho_2 = 1$), и хотя бы одна из величин $x_{12}(2\pi)$ или $x_{21}(2\pi)$ не равна нулю. Если $f_{30} \neq 0$, то неподвижная точка отображения (2.12) неустойчива. Если $f_{30} = 0$, то неподвижная точка отображения (2.12) устойчива при $g_1 < 0$, и неустойчива при $g_1 > 0$.
- Пусть в системе с гамильтонианом (2.3) присутствует резонанс второго порядка ($\rho_1 = \rho_2 = -1$), и хотя бы одна из величин $x_{12}(2\pi)$ или $x_{21}(2\pi)$ не равна нулю. Неподвижная точка отображения (2.12) устойчива, если $g_2 > 0$, и неустойчива, если $g_2 < 0$.
- Предположим, что в системе с гамильтонианом (2.3) имеет место резонанс третьего порядка, т.е. $\rho_i^3 = 1$ ($i = 1, 2$). Если хотя бы одна из величин a_1 или b_1 не равна нулю, то неподвижная точка отображения (2.12) неустойчива. Если $a_1 = b_1 = 0$ и $\varkappa \neq 0$, то неподвижная точка отображения (2.12) устойчива.
- Пусть в системе с гамильтонианом (2.3) возникает резонанс четвертого порядка, т.е. $\rho_i^4 = 1$ ($i = 1, 2$). Если выполняется неравенство $|\varkappa| > \sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}$, то неподвижная точка отображения (2.12) устойчива; если $|\varkappa| < \sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}$, то неподвижная точка неустойчива.

Если $\varkappa = 0$, то первый критерий не дает ответа на вопрос об устойчивости. В этом особом случае необходим дополнительный анализ с учетом членов до членов выше третьей степени в правых частях симплектического отображения (2.12). Методика такого анализа изложена в параграфе 2.5 данной главы.

2.4. Результаты нелинейного анализа устойчивости

Используя подход, описанный в разделе 2.3 было проведено строгое нелинейное исследование резонансного вращения (1.10) с учетом плоских возмущений в областях \mathbb{S}_i ($i = 1, \dots, 5$). А именно, для значений эксцентриситета из указанных областей были вычислены коэффициенты f_{ij} ($i + j = k; k = 3, 4$) отображения (2.12) и применены упомянутые выше критерии.

Проведенные расчеты показали, что в областях \mathbb{S}_i ($i = 1, \dots, 5$) за исключением резонансных и особых точек $e_* = 0.23340371$ и $e_{**} = 0.907502979$, в которых $\varkappa = 0$, резонансное вращение (1.10) устойчиво по Ляпунову.

Приведем результаты исследования в резонансных точках. Резонансы первого и второго порядков возникают в граничных точках областей \mathbb{S}_i ($i = 1, \dots, 5$). Выводы об устойчивости в этих точках приведены в таблицах 2.1 и 2.2 соответственно.

Таблица 2.1: Результаты анализа устойчивости в случаях резонансов первого порядка.

Область	Значение эксцентриситета	f_{30}	g_1	Выводы об устойчивости
\mathbb{S}_2	0.9179098745	-202.3925301		неустойчивость
\mathbb{S}_3	0.990545017	0	$1.696113987 \cdot 10^5$	неустойчивость
\mathbb{S}_4	0.9993035623	229.6449258		неустойчивость
\mathbb{S}_5	0.9999187858	0	$1.901744809 \cdot 10^8$	неустойчивость

Таблица 2.2: Результаты анализа устойчивости в случаях резонансов второго порядка.

Область	Значение эксцентриситета	g_2	Выводы об устойчивости
S_1	0.321731	12.82071918	устойчивость
S_2	0.90010157	$1.000669754 \cdot 10^6$	устойчивость
S_3	0.992114169	$1.106038355 \cdot 10^5$	устойчивость
S_4	0.9991665985	$-1.531048806 \cdot 10^6$	неустойчивость
S_5	0.99993211684	$1.262886788 \cdot 10^8$	устойчивость

Внутри каждой из областей S_i ($i = 1, \dots, 5$) присутствуют точки, отвечающие резонансам третьего и четвертого порядков. Для проверки критериев устойчивости в случае резонанса третьего порядка для каждого соответствующего значения эксцентриситета была вычислена величина $a_1^2 + b_1^2$. Эта величина, а также соответствующие выводы об устойчивости представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.3: Результаты анализа устойчивости в случаях резонансов третьего порядка.

Область	Значение эксцентриситета	$a_1^2 + b_1^2$	Выводы об устойчивости
S_1	0.2777452	13.71215993	неустойчивость
S_2	0.9049395	62378.55146	неустойчивость
S_3	0.991748982	85.14411248	неустойчивость
S_4	0.9992031462	71039.37430	неустойчивость
S_5	0.999929008032	1905.700852	неустойчивость

Для резонансов четвертого порядка в соответствующих значениях эксцентриситета были вычислены величины $|\varkappa|$ и $\sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}$. Их значения и выводы об устойчивости представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4: Результаты анализа устойчивости в случаях резонансов четвертого порядка.

Область	Значение эксцентриситета	$ \varkappa $	$\sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}$	Выводы об устойчивости
S_1	0.2261418	10.26041834	75.18084153	неустойчивость
S_2	0.9094951	$6.143888257 \cdot 10^5$	$7.826940827 \cdot 10^5$	неустойчивость
S_3	0.991367255	$2.345075583 \cdot 10^6$	$7.752249460 \cdot 10^5$	устойчивость
S_4	0.9992380312	$7.071483608 \cdot 10^7$	$2.450001142 \cdot 10^7$	устойчивость
S_5	0.99992576233	$2.655202464 \cdot 10^9$	$8.772761051 \cdot 10^8$	устойчивость

2.5. Исследование устойчивости в особом случае вырождения

Для решения вопроса об устойчивости в особых точках $e_* = 0.23340371$ и $e_{**} = 0.907502979$, где имеет место вырождение ($\varkappa = 0$), необходимо получить явный вид симплектического отображения (2.7) до членов пятой степени включительно и выполнить его нормализацию. Это можно сделать используя идею подхода, описанного в работе [36]. Она заключается в том, что замена переменных (2.10) проводится в исходной гамильтоновой системе, а симплектическое отображение (2.12) строится уже в системе с преобразованным гамильтонианом. Этот подход несколько упрощает вычисления, так как позволяет сразу перейти к системе дифференциальных уравнений, решениями которых на интервале $[0, 2\pi]$ являются коэффициенты f_{ij} ($i + j = k$) форм F_k ($k = 3, 4, 5, 6$).

Получив явное выражение для симплектического отображения (2.12) вплоть до членов нужного нам порядка, проведем каноническую замену переменных $Q, P \rightarrow \xi, \eta$, приводящую отображение к нормальной форме. Выводы об устойчивости могут быть получены путем анализа коэффициентов данной нормальной формы. Расчеты показали, что в точках $e = e_*$ и $e = e_{**}$ корни ρ_i ($i = 1, 2$) характеристического уравнения (2.5) удовлетворяют условию $\rho_i^m \neq 1$ ($m = 1, \dots, 6$), то есть в исходной гамильтоновой системе отсутствуют резонансы до шестого порядка включительно. В этом случае нормализованное отображение имеет следующую форму:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \xi_0 + \frac{3\gamma}{4}\eta_0 (\xi_0^2 + \eta_0^2)^2 + O_6 \\ \eta_0 - \frac{3\gamma}{4}\xi_0 (\xi_0^2 + \eta_0^2)^2 + O_6 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Каноническая замена переменных, приводящая отображение к нормальной форме, может быть построена, например, с помощью метода Биркгофа [65, 68, 69].

Введем симплектические полярные координаты по формулам:

$$\xi = \sqrt{2R} \sin \psi, \quad \eta = \sqrt{2R} \cos \psi, \quad (2.23)$$

тогда отображение (2.22) принимает следующую форму

$$R_1 = R_0 + O(R_0^{\frac{7}{2}}), \quad \psi_1 = 2\pi\sigma + \psi_0 + 3\gamma R_0^2 + O(R_0^{\frac{5}{2}}). \quad (2.24)$$

Если $\gamma \neq 0$, то по теореме Мозера [68] следует, что в любой сколь угодно малой области точки $R = 0$ существует закрытая инвариантная поверхность охватывающая эту точку. Из последнего следует устойчивость неподвижной точки $\xi = \eta = 0$ отображения (2.22).

Когда величина σ , а также величины f_{ij} ($i + j = k$, где $k = 3, 4, 5, 6$) найдены, коэффициент γ может быть вычислен по явной формуле. К сожалению, вид данной формулы слишком громоздкий.

Приведем алгоритм, позволяющий упростить явное выражение для нахождения γ .

Для начала, отметим, что если в системе с гамильтонианом (2.3) отсутствуют резонансы третьего порядка, то с помощью нелинейной, близкой к тождественной замены переменных $Q, P \rightarrow u, v$ отображение (2.12) может быть приведено к нормальной форме, не содержащей членов второй степени. Такая замена переменных имеет следующий вид:

$$Q = u - \frac{\partial W_3}{\partial v} + \alpha(u, v), \quad P = v + \frac{\partial W_3}{\partial u} + \beta(u, v), \quad (2.25)$$

где W_3 – форма третьей степени, коэффициенты которой имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{30} &= -\frac{1}{2}f_{30} + \frac{1}{4\Delta} [2f_{03} \sin 2\pi\sigma + (f_{03} + f_{21}) \sin 4\pi\sigma], \\ w_{21} &= -\frac{1}{2}f_{21} - \frac{1}{4\Delta} [2f_{12} \sin 2\pi\sigma + (3f_{30} - f_{12}) \sin 4\pi\sigma], \\ w_{12} &= -\frac{1}{2}f_{12} + \frac{1}{4\Delta} [2f_{21} \sin 2\pi\sigma + (3f_{03} - f_{21}) \sin 4\pi\sigma], \\ w_{30} &= -\frac{1}{2}f_{03} - \frac{1}{4\Delta} [2f_{30} \sin 2\pi\sigma + (f_{30} + f_{12}) \sin 4\pi\sigma], \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\Delta = \cos(2\pi\sigma) - \cos(4\pi\sigma)$.

Через $\alpha(u, v)$ и $\beta(u, v)$ обозначены ряды, содержащие члены третьей и выше степени. Коэффициенты в данных рядах выбираются наиболее простыми, но таким образом, чтобы замена переменных (2.25) удовлетворяла условиям каноничности. В частности, можно положить $\beta(u, v) \equiv 0$, тогда для того, чтобы замена (2.25) была канонической, выберем $\alpha(u, v)$ следующим образом:

$$\alpha = u \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_{ij} u^i v^j. \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned}
a_{02} &= -12w_{03}w_{21} + 4w_{12}^2, & a_{11} &= -18w_{03}w_{30} + 2w_{12}w_{21}, \\
a_{20} &= -4w_{30}w_{12} + \frac{4}{3}w_{21}^2, & a_{03} &= -2a_{02}w_{12}, & a_{12} &= a_{02}w_{21} - 2a_{11}w_{12}, \\
a_{21} &= 4a_{02}w_{30} - \frac{2}{3}a_{11}w_{21} - 2a_{20}w_{12}, & a_{30} &= -\frac{3}{2}a_{11}w_{30} - \frac{3}{2}a_{20}w_{21}, & & (2.28) \\
a_{04} &= -2a_{03}w_{12}, & a_{13} &= 2a_{03}w_{21} - 2a_{12}w_{12}, & a_{22} &= 6a_{03}w_{30} - 2a_{21}w_{12}, \\
a_{31} &= 3a_{12}w_{30} - a_{21}w_{21} - 2a_{30}w_{12}, & a_{40} &= -\frac{6}{5}a_{21}w_{30} - \frac{8}{5}a_{30}w_{21}.
\end{aligned}$$

Теперь опишем процедуру вычисления коэффициента γ .

Вернемся к исходной системе с гамильтонианом (2.3) и выполним два канонических преобразования. Первое из которых – линейная замена $q, p \rightarrow Q, P$ по формулам (2.10), и второе – нелинейное преобразование $Q, P \rightarrow u, v$ по формулам (2.25). В переменных u, v гамильтониан принимает следующую форму

$$\Gamma(u, v, \nu) = H(n_{11}Q(u, v) + n_{12}P(u, v), n_{21}Q(u, v) + n_{22}P(u, v), \nu), \quad (2.29)$$

где функции $Q(u, v)$ и $P(u, v)$ задаются формулами (2.25).

Затем строится симплектическое отображение $u_0, v_0 \rightarrow u_1, v_1$, соответствующее канонической системе с гамильтонианом (2.29). Данное отображение представляет собой композицию двух отображений [36] :

1. Линейное симплектическое отображение $u_*, v_* \rightarrow u_1, v_1$ задаваемое матрицей (2.13).

2. Нелинейное симплектическое отображение $u_0, v_0 \rightarrow u_*, v_*$ задаваемое явно с помощью производящей функции $G(u_*, v_0)$

$$u_0 = \frac{\partial G}{\partial v_0}, \quad v_* = \frac{\partial G}{\partial u_*}, \quad (2.30)$$

где

$$G(u_*, v_0) = u_*v_0 + G_4(u_*, v_0) + \dots, \quad G_k(u_*, v_0) = \sum_{i+j=k} g_{ij}u_*^i v_0^j. \quad (2.31)$$

Явные формулы, приведенные в [36], позволяют получить систему дифференциальных уравнений, решение которых дает нам коэффициенты g_{ij} форм $G_k(u_*, v_0)$.

В конце, с помощью нелинейной, близкой к тождественной замене переменных $u, v \rightarrow \xi, \eta$, построенной по методу Биркгофа, симплектическое отображение $u_0, v_0 \rightarrow u_1, v_1$ может быть приведено к нормальной форме (2.22).

Стоит отметить, что из-за проведенного канонического преобразования (2.25) производящая функция $G(u_*, v_0)$ не содержит членов третьей степени. Таким образом, симплектическое отображение $u_0, v_0 \rightarrow u_1, v_1$, соответствующее канонической системе с гамильтонианом (2.29), не включает в себя квадратичных членов. Это обстоятельство приводит к значительному упрощению процедуры нормализации. И в результате, выражение для γ , выписанное с помощью коэффициентов g_{ij} , может быть записано в следующей простой форме:

$$\begin{aligned} \gamma = & -\frac{5}{2}g_{06} - \frac{1}{2}g_{24} - \frac{5}{2}g_{60} - \frac{1}{2}g_{42} + g_{31}(3g_{04} + 2g_{22} + 5g_{40}) + \\ & + g_{13}(3g_{40} + 2g_{22} + 5g_{04}) - \frac{1}{2} \left[(g_{04} - g_{22} + g_{40})^2 + (g_{13} - g_{31})^2 \right] \cot 4\pi\sigma - \\ & - \left[(g_{13} + g_{31})^2 + 4(g_{04} - g_{40})^2 \right] \cot 2\pi\sigma . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Вычисления показали, что при $e = e_*$ величина $\sigma = 0.2602763116$, а коэф-

коэффициенты производящей функции (2.31) имеют вид

$$\begin{aligned}
g_{04} &= -1.39164453519674, & g_{05} &= 1.13049541865365, & g_{06} &= 23.0270131944171, \\
g_{13} &= -0.649389629305511, & g_{14} &= -22.9102219648364, & g_{15} &= -97.0663839548672, \\
g_{22} &= 8.00264323022938, & g_{23} &= 12.3797617234779, & g_{24} &= -0.680110459331499, \\
g_{31} &= -2.04052756046703, & g_{32} &= -7.79715422609757, & g_{33} &= -115.430653837797, \\
g_{40} &= -1.27569798734149, & g_{41} &= 23.5247742520580, & g_{42} &= -18.5328762641862, \\
g_{50} &= -2.62561828060514, & g_{51} &= -79.9340447925700, & g_{60} &= 29.6927439871871.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

В этом случае коэффициент $\gamma = -582.30138$.

Если $e = e_{**}$, то $\sigma = -0.28565780477076522874$, а коэффициенты производящей функции (2.31) принимают следующие значения

$$\begin{aligned}
g_{04} &= -22461.6682275286, & g_{05} &= -10486039.62, & g_{06} &= 4765789901, \\
g_{13} &= -76969.7167479434, & g_{14} &= 59076252.30, & g_{15} &= -3973561412, \\
g_{22} &= 153712.7495, & g_{23} &= -29881179.57, & g_{24} &= -66846255710, \\
g_{31} &= 21550.0216278781, & g_{32} &= -131531674.7, & g_{33} &= 97291000740, \\
g_{40} &= -28775.9149832872, & g_{41} &= 24274342.28, & g_{42} &= 50568162680, \\
g_{50} &= -58846.6402456501, & g_{51} &= -16047708160, & g_{60} &= -75025608.38.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

В этом случае $\gamma = 43161599830$.

Поскольку при $\gamma \neq 0$ неподвижная точка симплектического отображения устойчива, то резонансное вращение (1.10) в рассматриваемых случаях при $e = e_*$ и $e = e_{**}$ устойчиво по Ляпунову.

Глава 3

Исследование устойчивости резонансных вращений несимметричного спутника при наличии пространственных возмущений

В данной главе мы продолжаем исследование устойчивости по Ляпунову резонансного вращения спутника, при котором он совершает один оборот в абсолютном пространстве за два оборота центра масс по орбите. Анализ устойчивости проводится в рамках линейного приближения с учетом как плоских, так и пространственных возмущений. Основные результаты данной главы были опубликованы автором в [6].

3.1. Линейный анализ устойчивости по отношению к пространственным возмущениям

В рамках линейного приближения плоские и пространственные возмущения независимы. Действительно, структура гамильтониана (1.27) такова, что соответствующая ему линеаризованная система распадается на две независимые линейные канонические системы: систему с гамильтонианом (1.28), описывающую изменение переменных q_1, p_1 (плоские возмущения) и систему с гамильтонианом (1.29), описывающую изменение переменных q_2, p_2, q_3, p_3 (пространственные возмущения). Таким образом, задача об устойчивости резонансных вращений в линейном приближении сводится к исследованию устойчивости тривиальных положений равновесия этих двух линейных систем.

Анализ устойчивости системы с гамильтонианом (1.28) был выполнен в параграфе 2.2, ниже мы воспользуемся результатами этого анализа.

Рассмотрим систему с гамильтонианом (1.29), описывающую пространственные возмущения. Обозначим через $\mathbf{X}_2(\nu)$ ее фундаментальную матрицу решений, удовлетворяющую начальными условиями $\mathbf{X}_2(0) = \mathbf{E}_4$, где \mathbf{E}_4 единичная матрица четвертого порядка. Характеристическое уравнение этой системы с имеет следующий вид

$$\rho^4 - a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 - a_1 \rho + 1 = 0, \quad (3.1)$$

где коэффициент a_1 – след матрицы монодромии $\mathbf{X}_2(2\pi)$, а коэффициент a_2 – сумма главных миноров второго порядка этой матрицы.

Если выполнены неравенства [22]

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < (a_2 + 2)^2/4, \quad (3.2)$$

то характеристическое уравнение (3.1) имеет две пары комплексно-сопряженных корней, модули которых равны единице. В этом случае рассматриваемая линейная система устойчива. Если при тех же значениях параметров задачи имеет место устойчивость линейной системы с гамильтонианом (1.28), то исследуемое резонансное вращение устойчиво в линейном приближении по отношению как к плоским, так и к пространственным возмущениям.

Неравенства (3.2) задают в плоскости коэффициентов a_1 и a_2 ограниченную область (криволинейный треугольник). Если значения коэффициентов не удовлетворяют неравенствам (3.2) и при этом точка (a_1, a_2) не принадлежит границе указанной области, то характеристическое уравнение (3.1) имеет по крайней мере один корень, модуль которого больше единицы и линейная система с гамильтонианом (1.29) неустойчива. Более того, в этом случае из теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению следует неустойчивость и полной нелинейной системы с гамильтонианом (1.26). Последнее, очевидно, означает неустойчивость по Ляпунову резонансного вращения (1.10).

В общем случае (при произвольных значениях параметров задачи) матри-

ца монодромии $\mathbf{X}_2(2\pi)$ может быть получена только в результате численного интегрирования линейной системы с гамильтонианом (1.29). Результаты линейного анализа устойчивости, полученные на основании численного интегрирования, представлены в параграфе 3.3, но сначала мы рассмотрим один предельный случай, когда возможно аналитическое исследование устойчивости.

3.2. Линейный анализ устойчивости при малых значениях эксцентриситета

Пусть орбита центра масс спутника является слабоэллиптической, т.е. ее эксцентриситет $e \ll 1$. В этом случае e можно считать малым параметром задачи.

В [37] было показано, что при малых значениях эксцентриситета резонансное вращение (1.10) устойчиво по отношению к плоским возмущениям. Исследуем его устойчивость по отношению к пространственным возмущениям. Для этого при помощи канонических преобразований переменных приведем функцию Гамильтона (1.29) к более простому виду, удобному для анализа устойчивости.

Выполним сначала следующую унивалентную каноническую замену переменных

$$\begin{aligned} q_2 &= x_2 \cos \frac{\nu}{2} + x_1 \sin \frac{\nu}{2}, & p_2 &= \left(y_1 + \frac{1}{4} x_2 \right) \sin \frac{\nu}{2} + \left(y_2 - \frac{1}{4} x_1 \right) \cos \frac{\nu}{2}, \\ q_3 &= -x_2 \sin \frac{\nu}{2} + x_1 \cos \frac{\nu}{2}, & p_3 &= -\left(y_2 + \frac{1}{4} x_1 \right) \sin \frac{\nu}{2} + \left(y_1 - \frac{1}{4} x_2 \right) \cos \frac{\nu}{2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Новые переменные x_1, x_2, y_1, y_2 выбраны так, что при $e = 0$ функция Гамильтона (1.29) явно от ν не зависит. Ее разложение в ряд по степеням e имеет вид

$$H_{22} = H_{22}^{(0)} + e H_{22}^{(1)} + e^2 H_{22}^{(2)} + \dots, \quad (3.4)$$

где

$$H_{22}^{(0)} = \frac{1}{32\mu} (\mu^2 + 48\mu - 48) x_1^2 + \frac{1}{32} \mu x_2^2 + \frac{1}{4} (x_1 y_2 - x_2 y_1) (\mu - 4) + \frac{1}{2} \mu (y_1^2 + y_2^2), \quad (3.5)$$

$$H_{22}^{(1)} = \frac{1}{6} \mu^2 ((y_1^2 - y_2^2) \cos \nu + y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{12} \sin \nu (\mu^2 (x_1 y_1 - x_2 y_2) - 12 (x_1 y_1 + x_2 y_2) (\mu - 1)) - \frac{1}{12} \mu^2 (\cos \nu (x_1 y_2 + x_2 y_1) - x_1 y_2 + x_2 y_1) + \frac{1}{48} (\mu^2 + 24) \sin \nu x_1 x_2 - \frac{1}{3} \mu^2 \sin \nu y_1 y_2 - \frac{1}{96\mu} ((\mu^3 + 144\mu - 144) \cos \nu - \mu^3 - 48\mu) x_1^2 + \frac{1}{96} ((\mu^2 + 48) \cos \nu + \mu^2) x_2^2, \quad (3.6)$$

$$H_{22}^{(2)} = -\frac{1}{144\mu} [(\cos \nu - 1) \mu^4 + 12 \sin^2 \nu \mu^3 - 72 \sin^2 \nu \mu^2 - 72 (4 \cos^2 \nu - \cos \nu - 1) \mu + 216 \cos^2 \nu] x_1^2 - \frac{1}{72} [\sin \nu (12 (\mu^2 + 3) \cos \nu - \mu^3) x_2 - 4 \sin \nu (6 \mu^2 - \mu^3 + 6 (\mu^2 - 3\mu + 3) \cos \nu) y_1 - 4 \mu^2 (\cos \nu - 1) (6 \cos \nu + 6 - \mu) y_2] x_1 - \frac{1}{144} (72 + \mu (\cos \nu + 1) (12 (\mu + 6) (\cos \nu - 1) - \mu^2)) x_2^2 + \frac{1}{18} [\mu^2 (\cos \nu + 1) (6 \cos \nu - 6 - \mu) y_1 - \sin \nu (6 (\mu^2 + 3\mu - 3) \cos \nu - \mu^3 - 6 \mu^2) y_2] x_2 + \frac{1}{9} (\cos \nu + 1) \mu^3 y_1^2 - \frac{2}{9} \mu^3 \sin \nu y_2 y_1 - \frac{1}{9} \mu^3 (\cos \nu - 1) y_2^2. \quad (3.7)$$

В предельном случае, когда орбита центра масс круговая ($e = 0$), резонансное вращение представляет собой цилиндрическую прецессию динамически симметричного спутника, а соответствующие пространственные возмущения в линейном приближении описываются канонической системой с гамильтонианом (3.5). Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\lambda^4 + \left(\frac{1}{4} \mu^2 + 2\mu - 1 \right) \lambda^2 + \frac{1}{4} (7\mu - 8) (\mu - 2) = 0. \quad (3.8)$$

Результаты исследования линейной задачи об устойчивости цилиндрической прецессии динамически симметричного спутника изложены в [35], там же можно найти подробную библиографию по этому вопросу.

Отметим, что в силу неравенства (1.22) при $e = 0$ допустимые значения параметра μ лежат в интервале $(0; 2]$. Для значений параметра $\mu \in (0, \mu_*) \cup (8/7; 2)$ (где $\mu_* = 0.9605453476890599$) уравнение (3.8) имеет корень с положительной вещественной частью. Поэтому для указанных значений μ резонансное вращение неустойчиво [23], причем неустойчивость будет иметь место как при $e = 0$, так и при достаточно малых, но отличных от нуля значениях e . Последнее следует из непрерывной зависимости правых частей линейной системы с гамильтонианом (3.4) от эксцентриситета e .

Если же $\mu \in (\mu_*; 8/7)$, то уравнение (3.8) имеет чисто мнимые корни и при $e = 0$ система с гамильтонианом (3.4) устойчива в линейном приближении [23]. В этом случае линейной канонической заменой переменных $x_i, y_i \rightarrow \xi_i, \eta_i$, ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, & x_2 &= b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2, \\ y_1 &= b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2, & y_2 &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

гамильтониан (3.4) можно привести к виду

$$\tilde{H}_{22} = \frac{1}{2}\omega_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + e\tilde{H}_{22}^{(1)} + e^2\tilde{H}_{22}^{(2)} + O(e^3), \quad (3.10)$$

где

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{|a - \sqrt{d}|}}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{|a + \sqrt{d}|}}{2}, \quad (3.11)$$

$$d = a^2 - 4b, \quad a = \left(\frac{1}{4}\mu^2 + 2\mu - 1\right), \quad b = \frac{1}{4}(7\mu - 8)(\mu - 2),$$

а коэффициенты замены переменных (3.9) имеют вид

$$\begin{aligned} a_{1i} &= \frac{1}{2} \frac{\kappa_i \mu}{\omega_i} (\mu - 2\omega_i^2 - 2), & a_{2i} &= -\frac{1}{8} \frac{\kappa_i}{8\omega_i} (\mu - 4) (2\mu + \omega_i^2 - 2), \\ b_{1i} &= \frac{1}{2} (-1)^i \kappa_i \mu (\mu - 4), & b_{2i} &= \frac{1}{8} (-1)^i \kappa_i (\mu (\mu - 4) + 8 - 8\omega_i^2), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\kappa_i = \frac{\mu}{8\omega_i} (8\omega_i^4 + (\mu - 2)(\mu^2 - 8\omega_i^2 - 6\mu + 12)), \quad i = 1, 2. \quad (3.13)$$

Квадратичные формы $\tilde{H}_{22}^{(1)}$ и $\tilde{H}_{22}^{(2)}$ получаются подстановкой выражений (3.9) в (3.6) и (3.7) соответственно, их явный вид здесь не приводится из-за громоздкости.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости резонансного вращения при $\mu \in [\mu_*; 8/7]$ и достаточно малых, но отличных от нуля значениях e . Если выполнено хотя бы одно из резонансных соотношений: $2\omega_1 = n_1$, $2\omega_2 = n_2$ или $\omega_1 - \omega_2 = k$ (где n_1, n_2, k – некоторые целые числа), то при $e \neq 0$ в системе с гамильтонианом (3.4) возможно явление параметрического резонанса, приводящее к неустойчивости (теорема Крейна-Гельфанда-Лидского [61]). Указанные резонансные соотношения выполняются в двух внутренних точках интервала $(\mu_*; 8/7)$, а именно: в точке $\mu = 1$ реализуется кратный резонанс $2\omega_1 = 2$, $2\omega_2 = 1$, а в точке $\mu = \mu_{**} = 1.1019093218554929$ – комбинационный резонанс $\omega_1 - \omega_2 = -1$. Кроме того, на левой границе данного интервала ($\mu = \mu_*$) имеет место резонансное соотношение $\omega_1 = \omega_2$, а на его правой границе ($\mu = 8/7$) – соотношение $\omega_1 = 0$.

В плоскости параметров e, μ из точек с координатами $(0, \mu_*)$, $(0, 1)$, $(0, \mu_{**})$, $(0, 8/7)$ исходят области неустойчивости. Если значение эксцентриситета мало, то границы указанных областей можно получить аналитически в виде сходящихся рядов по степеням e

$$\mu = \mu_0 + e\mu_1 + e^2\mu_2 + \dots, \quad (3.14)$$

где в качестве μ_0 следует положить одно из указанных выше резонансных значений: μ_* , 1 , μ_{**} или $8/7$. Коэффициенты μ_j ($j = 1, 2, \dots$) можно вычислить, например, методом, изложенным в [35]. Для этого необходимо подставить (3.14) в (3.10) и выполнить каноническую линейную 2π -периодическую замену переменных, приводящую функцию Гамильтона (3.10) к нормальной форме, независимой от ν . Такая нормализующая замена строится в виде сходящихся рядов по

степеням e , коэффициенты которых можно последовательно находить, например, методом Депри-Хори [35]. Задача об устойчивости канонической системы с гамильтонианом (3.10) эквивалентна задаче об устойчивости нормализованной системы. Поскольку нормализованная система является автономной, то не представляет затруднений исследовать ее устойчивость и определить коэффициенты μ_j ($j = 1, 2, \dots$).

Вид нормализованной функции Гамильтона зависит от типа резонанса, поэтому каждый резонансный случай необходимо рассмотреть отдельно.

Для построения границы области неустойчивости, исходящей из точки $(0, 1)$ положим в (3.14) $\mu_0 = 1$ и выполним 4π -периодическую замену переменных

$$\begin{aligned} \xi_1 &= X_1 \cos \nu - Y_1 \sin \nu, & \xi_2 &= X_2 \cos \frac{1}{2}\nu + Y_2 \sin \frac{1}{2}\nu, \\ \eta_1 &= X_1 \sin \nu + Y_1 \cos \nu, & \eta_2 &= -X_2 \sin \frac{1}{2}\nu + Y_2 \cos \frac{1}{2}\nu, \end{aligned} \quad (3.15)$$

которая уничтожит в гамильтониане (3.10) члены независимые от e . Теперь канонической, близкой к тождественной заменой переменных $\xi_i, \eta_i \rightarrow X_i, Y_i$ функцию Гамильтона можно привести к следующему виду

$$K_{22} = k_{2000}X_1^2 + k_{1010}X_1Y_1 + k_{0020}Y_1^2 + k_{0200}X_2^2 + k_{0101}X_2Y_2 + k_{0002}Y_2^2 + O(e). \quad (3.16)$$

Коэффициенты нового гамильтониана (3.16) зависят только от параметров задачи и не зависят от ν , они представляются в виде сходящихся рядов по степеням

е. Методом Депри-Хори были получены следующие выражения

$$\begin{aligned}
k_{0020} &= e \left(\frac{7}{4} \mu_1 + \frac{7}{6} \right) - e^2 \left(18 \mu_1^2 + \frac{125}{6} \mu_1 - \frac{7}{2} \mu_2 + \frac{67}{9} \right) + O(e^3), \\
k_{2000} &= e \frac{7}{4} \mu_1 - e^2 \left(18 \mu_1^2 - \frac{3}{2} \mu_1 - \frac{7}{2} \mu_2 \right) + O(e^3), \\
k_{0200} &= e \left(\frac{3}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \right) - e^2 \left(\frac{57}{2} \mu_1^2 + 17 \mu_1 - 3 \mu_2 + \frac{5}{2} \right) + O(e^3), \\
k_{0002} &= e \left(\frac{3}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \right) - e^2 \left(\frac{21}{2} \mu_1^2 + 5 \mu_1 - 3 \mu_2 - \frac{1}{2} \right) + O(e^3), \\
k_{1010} &= O(e^3), \quad k_{0101} = O(e^3).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Нетрудно показать, что на границе области неустойчивости характеристическое уравнение линейной системы с гамильтонианом (3.16) имеет по крайней мере два нулевых корня. Из этого условия последовательно определяются величины μ_i . В итоге, получаем следующие уравнения границ области неустойчивости (параметрического резонанса)

$$\mu_+ = 1 + O(e^3), \quad \mu_- = 1 - \frac{2}{3} e + \frac{4}{9} e^2 + O(e^3). \tag{3.18}$$

Здесь и далее через μ_+ обозначается верхняя (по параметру μ) граница области неустойчивости, а через μ_- – нижняя.

Заметим, что полученные выше формулы для границ области неустойчивости можно уточнить, если заметить, что данные границы соответствуют случаю динамически симметричного спутника. При этом динамической симметрии $A = B$ соответствует верхняя граница, а динамической симметрии $B = C$ – нижняя. Поэтому асимптотические выражения (3.18) можно заменить точными

$$\mu_+ = 1, \quad \mu_- = \frac{3}{(3 + 2e)}. \tag{3.19}$$

Для построения границы области неустойчивости, исходящей из точки $(0, \mu_{**})$ нужно в (3.14) положить $\mu_0 = \mu_{**}$ и выполнить 2π -периодическую заме-

ну переменных

$$\begin{aligned}\xi_1 &= X_1, & \xi_2 &= \cos \nu X_2 + \sin \nu Y_2, \\ \eta_1 &= Y_1, & \eta_2 &= -\sin \nu X_2 + \cos \nu Y_2,\end{aligned}\tag{3.20}$$

приводящую гамильтониан (3.10) к виду

$$\Gamma_{22} = -\frac{1}{2}\omega_{**} (X_1^2 - X_2^2 + Y_1^2 - Y_2^2) + O(e), \quad \omega_{**} = 0.2097075743251561, \tag{3.21}$$

а затем линейной близкой к тождественной 2π -периодической по ν канонической заменой переменных (построенной методом Депри-Хори) гамильтониан приводится к нормальной форме, независимой явно от ν . Не приводя промежуточных вычислений, выпишем уравнения границ областей неустойчивости, полученные на основании анализа корней характеристического уравнения канонической системы с нормализованной функцией Гамильтона

$$\begin{aligned}\mu_+ &= \mu_{**} - 0.39564820916 e + 0.51865636783 e^2 - 0.38818378378 e^3 + \\ &+ 0.40846785827 e^4 + O(e^5), \\ \mu_- &= \mu_{**} - 0.41382122657 e + 0.53200637935 e^2 - 0.27448784825 e^3 + \\ &+ 0.32770854616 e^4 + O(e^5).\end{aligned}\tag{3.22}$$

Вблизи граничных точек интервала $(\mu_*, 8/7)$ функция Гамильтона уже не приводится к виду (3.10), но использованная выше методика построения границ областей неустойчивости, применима и в этих случаях.

Для построения границы области неустойчивости, исходящей из точки $(0, \mu_*)$ положим в (3.14) $\mu_0 = \mu_*$ и выполним замену переменных

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.95588593618915477223 \xi_2 - 0.032277479617649743 \eta_1, \\ x_2 &= 1.0061966961098455678 \xi_1 - 0.033976327216937882 \eta_2, \\ y_1 &= -0.040793298297696656017 \xi_1 + 1.0475273952102542624 \eta_2, \\ y_2 &= -0.038753595876725391652 \xi_2 + 0.99515006233436072407 \eta_1,\end{aligned}\tag{3.23}$$

нормализующую в гамильтониане (3.4) члены, независящие от e . В переменных ξ_i, η_i ($i = 1, 2$) функция Гамильтона принимает вид

$$\tilde{H}_{22} = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \omega_* (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) + e \tilde{H}_{22}^{(1)} + O(e^2), \quad (3.24)$$

где $\omega_* = 0.7588651186541301966$.

Линейной близкой к тождественной 2π -периодической канонической заменой переменных $\xi_i, \eta_i \rightarrow X_i, Y_i$ ($i = 1, 2$) функция Гамильтона (3.33) приводится к виду

$$\begin{aligned} K_{22} = & \frac{1}{2}(1 + 2k_{2000})(X_1^2 + X_2^2) + k_{0020}(Y_1^2 + Y_2^2) + \omega_*(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) + \\ & + k_{1010} X_1 Y_1 + k_{0110} X_2 Y_1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Гамильтониан (3.25) не зависит явно от ν и является аналитической функцией параметра e . Методом Депри-Хори можно вычислить разложения коэффициентов $k_{2000}, k_{0020}, k_{1010}, k_{0110}$ в ряды по e до сколь угодно высокого порядка. В первом приближении по e имеем следующие выражения для коэффициентов

$$k_{2000} = e \frac{1}{4\pi} \int_0^\nu \left(u + h_{2000}^{(1)} + h_{0200}^{(1)} \right) d\tau + O(e^2), \quad (3.26)$$

$$k_{0020} = e \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(h_{0020}^{(1)} + h_{0002}^{(1)} \right) d\tau + O(e^2), \quad (3.27)$$

$$k_{1010} = e \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2z + h_{0101}^{(1)} + h_{1010}^{(1)} \right) d\tau + O(e^2), \quad (3.28)$$

$$k_{0110} = e \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(h_{0110}^{(1)} - h_{1001}^{(1)} \right) d\tau + O(e^2), \quad (3.29)$$

где

$$z = \int_0^\nu \left(h_{0020}^{(1)} - h_{0002}^{(1)} \right) d\tau - \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(h_{0020}^{(1)} + h_{0002}^{(1)} \right) d\tau, \quad (3.30)$$

$$u = \int_0^\nu \left(2z + h_{0101}^{(1)} + h_{1010}^{(1)} \right) d\tau - \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2z + h_{0101}^{(1)} + h_{1010}^{(1)} \right) d\tau.$$

Уравнение границы области неустойчивости получается на основании анализа корней характеристического уравнения канонической системы с нормализованной функцией Гамильтона (3.24). Не приводя промежуточных вычислений, выпишем его явный вид с точностью до членов пятой степени по e

$$\mu = \mu_* - 0.307549121658 e - 0.516112650718 e^2 + 0.362028557898 e^3 - 0.0223315330946 e^4 - 0.148718160532 e^5 + O(e^6). \quad (3.31)$$

Действуя аналогично, можно получить границу области неустойчивости, исходящую из точки $(0, 8/7)$. Для этого нужно положить в (3.14) $\mu_0 = 8/7$ и выполнить замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{79} \sqrt{3} \sqrt{158} \xi_2 - \frac{20}{79} 79^{1/4} \sqrt{2} \eta_1, \\ x_2 &= \frac{2}{79} 79^{3/4} \sqrt{2} \xi_1 - \frac{20}{237} \sqrt{3} \sqrt{158} \eta_2, \\ y_1 &= \frac{5}{316} 79^{3/4} \sqrt{2} \xi_1 + \frac{29}{948} \sqrt{3} \sqrt{158} \eta_2, \\ y_2 &= \frac{5}{316} \sqrt{3} \sqrt{158} \xi_2 + \frac{29}{316} 79^{1/4} \sqrt{2} \eta_1, \end{aligned} \quad (3.32)$$

приводящую гамильтониан (3.4) к виду

$$\tilde{H}_{22} = \frac{1}{14} \sqrt{79} (\xi_1^2 + \eta_1^2) - \frac{1}{2} \eta_2^2 + e \tilde{H}_{22}^{(1)} + O(e^2). \quad (3.33)$$

Далее, аналогично рассмотренным выше резонансным случаям, вычисляется нормальная форма Гамильтониана, которая явно от ν не зависит. В результате анализа корней характеристического уравнения канонической системы с

нормализованной функцией Гамильтона было получено следующее уравнение границы области неустойчивости

$$\begin{aligned} \mu = & \frac{8}{7} - \frac{64}{147} e + \frac{9196}{15435} e^2 - \frac{126656}{324135} e^3 - \frac{266721795196877}{700920220455000} e^4 + \\ & + \frac{524416524132554}{1839915578694375} e^5 + O(e^6). \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.3. Результаты линейного анализа устойчивости при произвольных значениях эксцентриситета

Пусть теперь параметры задачи принимают любые (не обязательно малые) допустимые значения. Для решения вопроса об устойчивости в этом случае задавались конкретные значения параметров e и μ и путем численного интегрирования линейной системы с гамильтонианом (1.29) определялась матрица монодромии $\mathbf{X}(2\pi)$, затем вычислялись коэффициенты a_1 и a_2 и на основании неравенств (3.2) делались выводы об устойчивости или неустойчивости. При этом параметры выбирались из области их допустимых значений с шагом 0.001.

Результаты проведенного анализа устойчивости представлены на Рис. 1. В областях, закрашенных серым цветом, имеет место неустойчивость рассматриваемой линейной системы и, как следствие, неустойчивость резонансного вращения (1.10). В областях, обозначенных белым цветом, линейная система с гамильтонианом (1.29) устойчива. Отметим, что на Рис. 1 изображена не вся область допустимых значений параметров, а только ее часть, соответствующая значениям μ из интервала $[0.85, 1.15]$, где расположены области устойчивости. Расчеты показали, что для значений μ вне указанного интервала неравенства (3.2) не выполняются и линейная система с гамильтонианом (1.29) неустойчива.

Представленные на Рис. 1 результаты численного анализа устойчивости хорошо согласуются с результатами анализа устойчивости, полученными ана-

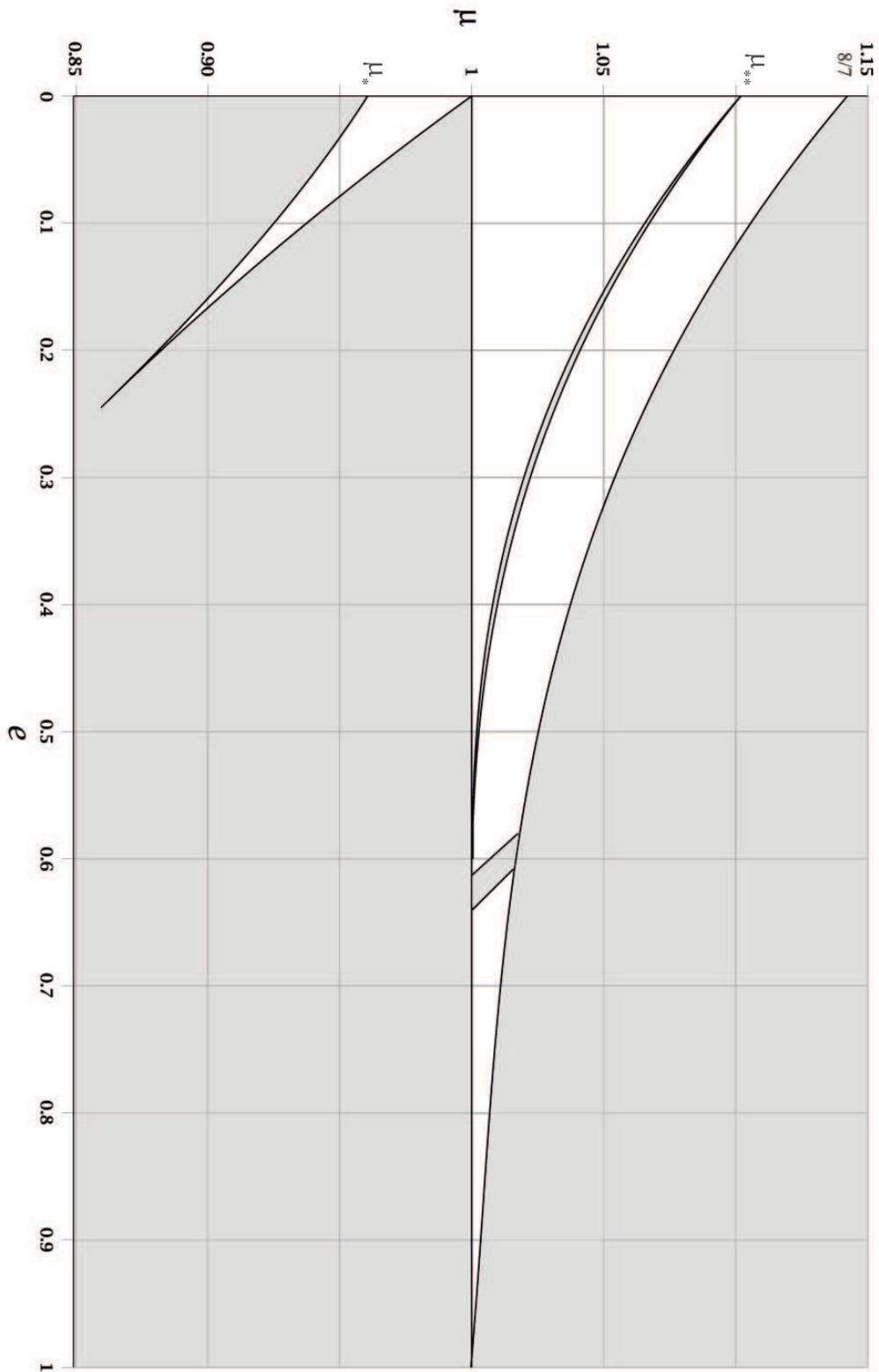
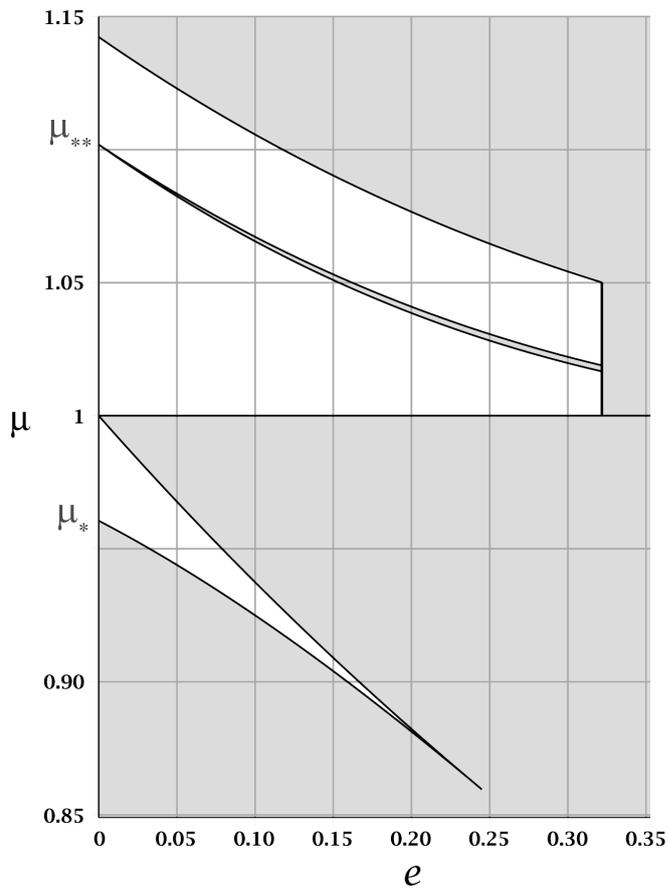


Рис. 1. Области неустойчивости и области устойчивости в линейном приближении системы с гамильтонианом (1.29)

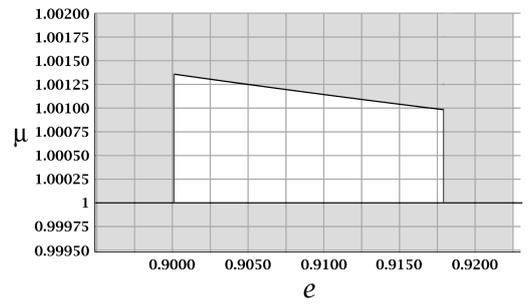
литически в разделе 3.2 для малых значений ϵ . В частности, сравнение этих результатов показало, что, в рамках полученного приближения, формулы (3.18), (3.22), (3.31) и (3.34) позволяют аппроксимировать границы областей неустойчивости при всех, а не только при малых значениях ϵ . Другими словами, анализ полученных результатов показал, что для любого фиксированного значения ϵ из интервала $(0, 1)$ разность между значением μ , вычисленным на границе области неустойчивости численно, и значением μ , полученным по приближенной формуле, не превосходит величины остаточного члена этой приближенной формулы.

Совместив результаты, описанные в данном разделе с результатами, представленными в разделе 2.2 можно построить области устойчивости резонансного вращения (1.10) в линейном приближении с учетом как плоских, так и пространственных возмущений. Эти области изображены на Рис. 2.

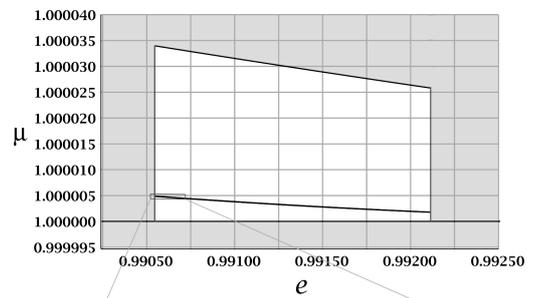
Все области устойчивости, за исключением одной из двух, изображенных на Рис. 2 а), представляют собой криволинейные трапеции, основания которых лежат на прямой $\mu = 1$, а их боковые стороны – вертикальные отрезки, проходящие через граничные точки соответствующих интервалов устойчивости Рис. 2. При приближении эксцентриситета ϵ к единице размер областей устойчивости уменьшается. Две области устойчивости, изображенные на Рис. 2 а) и Рис. 2 с), пересекаются узкими областями неустойчивости.



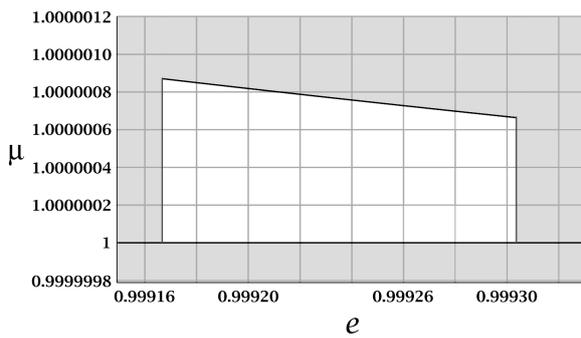
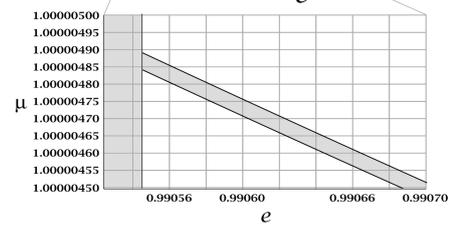
a)



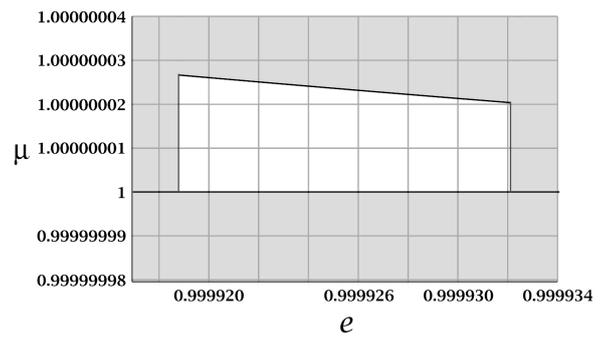
b)



c)



d)



e)

Рис. 2. Области устойчивости в линейном приближении

Глава 4

О методе исследования устойчивости периодических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в критических случаях

В данной главе излагается метод исследования устойчивости периодических движений гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в случаях когда требуется нелинейный анализ. Основная идея данного метода была предложена А.П.Маркеевым. Она состоит в построении и нормализации симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком этой системы. По нормализованному отображению уже нетрудно получить нормальную форму функции Гамильтона, зная которую на основании известных критериев можно сделать строгие выводы об устойчивости исходной системы. А.П. Маркеевым был предложен конструктивный алгоритм построения и нормализации симплектического отображения для нерезонансных случаев и случаев резонансов третьего и четвертого порядков [29], в параграфе 4.1 дается его краткое описание. Автором данной диссертационной работы был разработан аналогичный алгоритм, позволяющий строить симплектическое отображение и проводить его нормализацию в случае резонанса основного типа, его изложению посвящен параграф 4.2 .

Методы и алгоритмы, описанные в данной главе, применяются затем в главе 5 для решения задачи об устойчивости резонансных вращений симметричного спутника.

4.1. Метод исследования устойчивости при отсутствии в системе резонансов первого и второго порядков

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, движение которой описывается неавтономной канонической системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2). \quad (4.1)$$

Предполагается, что функция Гамильтона 2π -периодически зависит от времени t , а ее разложение в ряд в окрестности начала координат $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$, которое является положением равновесия, имеет вид

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (4.2)$$

Рассмотрим линейную систему, гамильтонианом H_2 которой является квадратичная часть разложения (4.2). Ее характеристическое уравнение имеет вид (3.1). Будем считать, что коэффициенты этого уравнения удовлетворяют неравенствам (3.2), т.е. оно имеет две пары комплексно-сопряженных корней, модули которых равны единице, а рассматриваемая линейная система устойчива.

Для строгого решения задачи об устойчивости положения равновесия $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ исходной нелинейной системы необходимо построить нормальную форму функции Гамильтона (4.2) до членов не ниже четвертой степени включительно.

Воспользуемся идеей работы [36] и выполним сначала линейную каноническую замену переменных, позволяющую упростить алгоритм нелинейной нормализации, предложенный А.П.Маркеевым в работе [29] и описанный ниже.

С целью построения указанной линейной замены переменных рассмотрим следующее симплектическое отображение, генерируемое линейной системой с гамильтонианом H_2

$$\begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{X}(2\pi) \begin{pmatrix} q_1^{(0)} \\ q_2^{(0)} \\ p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где через $q_j^{(0)}, p_j^{(0)}$ ($j = 1, 2$) обозначены начальные значения переменных q_j, p_j , а через $q_j^{(1)}, p_j^{(1)}$ – их значения при $t = 2\pi$; $\mathbf{X}(t)$ матрицы фундаментальных решений рассматриваемой линейной системы, удовлетворяющая начальным условиям $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_4$, где \mathbf{E}_4 – единичная матрица четвертого порядка.

Линейной унивалентной канонической заменой переменных

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

симплектическое отображение (4.3) можно привести к следующей более простой (нормальной) форме

$$\begin{pmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q_1^{(0)} \\ Q_2^{(0)} \\ P_1^{(0)} \\ P_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\sigma_1 & 0 & \sin 2\pi\sigma_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi\sigma_2 & 0 & \sin 2\pi\sigma_2 \\ -\sin 2\pi\sigma_1 & 0 & \cos 2\pi\sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sin 2\pi\sigma_2 & 0 & \cos 2\pi\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_j = \delta_j \lambda_j \quad (j = 1, 2) \quad (4.6)$$

Величины $\pm i\lambda_j$ ($j = 1, 2$) являются характеристическими показателями линеаризованной системы с гамильтонианом (1.27).

Алгоритм построения матрицы N линейной замены переменных (4.4) изложен в [29]. В работе [4] были получены формулы, позволяющие в общем случае явно вычислять элементы данной матрицы. Здесь, однако, мы их не приводим, т.к. в исследуемой ниже задаче об устойчивости резонансных вращений симметричного спутника линеаризованная система разделяется на две независимые подсистемы. Поэтому линейную нормализацию можно выполнить отдельно по каждой паре канонических переменных, а сама матрица N имеет достаточно простую структуру. В параграфе 2.3 приведены явные формулы для вычисления ее элементов в указанном случае.

Теперь перейдем к нелинейной нормализации гамильтониана. Как уже было сказано ранее, она может быть выполнена при помощи методики, описанной [29], которая основана на построении симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком соответствующей канонической системы. Здесь мы коротко остановимся на его основных моментах и выпишем формулы, необходимые для дальнейшего исследования.

Сначала, с помощью линейной канонической замены (4.4) перейдем к переменным Q_i, P_i ($i=1,2$). Новый гамильтониан будет иметь вид:

$$H^* = H_2^* + H_3^* + H_4^* + \dots, \quad (4.7)$$

где

$$H_i^* = H_i(n_{11}^{(1)}Q_1 + n_{12}^{(1)}P_1, n_{11}^{(2)}Q_2 + n_{12}^{(2)}P_2, n_{21}^{(1)}Q_1 + n_{22}^{(1)}P_1, n_{21}^{(2)}Q_2 + n_{22}^{(2)}P_2, t). \quad (4.8)$$

Теперь построим симплектическое отображение, генерируемое канонической системой с гамильтонианом (4.7).

$$\begin{pmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q_1^{(0)} - \frac{\partial F_3}{\partial P_1^{(0)}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_3}{\partial P_1^{(0)} \partial Q_i^{(0)}} \frac{\partial F_3}{\partial P_i^{(0)}} - \frac{\partial F_4}{\partial P_1^{(0)}} + O_4 \\ Q_2^{(0)} - \frac{\partial F_3}{\partial P_2^{(0)}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_3}{\partial P_2^{(0)} \partial Q_i^{(0)}} \frac{\partial F_3}{\partial P_i^{(0)}} - \frac{\partial F_4}{\partial P_2^{(0)}} + O_4 \\ P_1^{(0)} + \frac{\partial F_3}{\partial Q_1^{(0)}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_1^{(0)} \partial Q_i^{(0)}} \frac{\partial F_3}{\partial P_i^{(0)}} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_1^{(0)}} + O_4 \\ P_2^{(0)} + \frac{\partial F_3}{\partial Q_2^{(0)}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_2^{(0)} \partial Q_i^{(0)}} \frac{\partial F_3}{\partial P_i^{(0)}} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_2^{(0)}} + O_4 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

Формы F_k ($k = 3, 4$) имеют вид

$$F_k(Q_1^{(0)}, Q_2^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}) = \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2=k} f_{i_1 i_2 j_1 j_2} Q_1^{(0) i_1} Q_2^{(0) i_2} P_1^{(0) j_1} P_2^{(0) j_2} \quad (k = 3, 4) \quad (4.10)$$

где $f_{i_1 i_2 j_1 j_2} = \phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(2\pi)$. Функции $\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(t)$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{d\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}}{dt} = g_{i_1 i_2 j_1 j_2} \quad (i_1 + i_2 + j_1 + j_2 = 3, 4) \quad (4.11)$$

с начальными условиями $\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(0) = 0$.

Величины $g_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ в правых частях уравнений (4.11) являются коэффициентами форм

$$G_k(U_1, U_2, V_1, V_2, t) = \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2=k} g_{i_1 i_2 j_1 j_2} U_1^{i_1} U_2^{i_2} V_1^{j_1} V_2^{j_2} \quad (k = 3, 4) \quad (4.12)$$

Явные выражения для коэффициентов $g_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ форм G_k ($k = 3, 4$) получаются из следующих соотношений

$$\begin{aligned} G_3 &= -\Gamma_3, \\ G_4 &= -\Gamma_4 - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial V_i} \frac{\partial \Phi_3}{\partial U_i}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\Phi_3(U_1, U_2, V_1, V_2, t)$ – форма третьей степени с коэффициентами $\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(t)$, то есть

$$\Phi_3(U_1, U_2, V_1, V_2, t) = \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2=3} \phi_{i_1 i_2 j_1 j_2} U_1^{i_1} U_2^{i_2} V_1^{j_1} V_2^{j_2}. \quad (4.14)$$

Формы $\Gamma_k(U_1, U_2, V_1, V_2, t)$ получены подстановкой

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}(t) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

в формы $H_k^*(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ ($k = 3, 4$). Элементы матрицы $Y(t)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{dy_{ij}}{dt} &= \frac{\partial H_2^{(j)}}{\partial y_{i+2,j}}, & \frac{dy_{i+2,j}}{dt} &= -\frac{\partial H_2^{(j)}}{\partial y_{ij}}, \\ H_2^{(j)} &= H_2^*(y_{1j}, y_{2j}, y_{3j}, y_{4j}, t), \\ &(i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (4.16)$$

с начальным условием $Y(0) = E_4$, где E_4 – единичная матрица четвертого порядка.

Таким образом, интегрируя систему из 71 уравнения (55 уравнений (4.11) для $\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ и 16 уравнений (4.16) для y_{ij}) на интервале $[0, 2\pi]$, мы получим коэффициенты форм F_3 и F_4 . В общем случае, интегрирование может быть проведено только численно.

Отметим, что в (4.9) матрица \mathbf{G} имеет вид (4.6). Таким образом, в переменных Q_i, P_i , мы получили симплектическое отображение с уже нормализованными линейными членами. Нелинейная нормализация может быть проведена при помощи канонического, близкого к тождественному преобразования $Q_j, P_j \rightarrow \xi_j, \eta_j$

$$P_j = \eta_j + \frac{\partial R}{\partial Q_j}, \quad \xi_j = Q_j + \frac{\partial R}{\partial \eta_j} \quad (j = 1, 2) \quad (4.17)$$

где функция R является полиномом переменных Q_j, η_j ($j = 1, 2$), а ее коэффициенты выбираются таким образом, чтобы симплектическое отображение (4.9) в новых переменных ξ_j, η_j имело наиболее простую форму. Метод нелинейной

нормализации отображения (4.9) подробно описан в [29]. Там же были получены явные выражения для коэффициентов нормализованного отображения через коэффициенты $f_{i_1 i_2 j_1 j_2}$. Зная нормализованное отображение, можно построить соответствующую ему гамильтонову систему (см., например, [26]) и, таким образом, получить нормальную форму исходного гамильтониана задачи.

При нелинейном анализе устойчивости приходится отдельно рассматривать нерезонансный и резонансные случаи. Обычно, бывает достаточно принять во внимание лишь резонансы до четвертого порядка включительно. В данной работе мы исследуем устойчивость в нерезонансном случае и случаях резонансов третьего и четвертого порядков.

Перейдем к полярным координатам ϕ_j, r_j ($j = 1, 2$)

$$\xi_j = \sqrt{2r_j} \sin \phi_j, \quad \eta_j = \sqrt{2r_j} \cos \phi_j$$

и выпишем вид нормальной формы гамильтониана для всех выше упомянутых случаев [26].

1. Если отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно, т.е. $k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 \neq n$, ($n \in \mathbb{Z}$) для $0 < |k_1| + |k_2| \leq 4$, то нормализованный гамильтониан имеет следующий вид:

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right). \quad (4.18)$$

2. При резонансе третьего порядка, т.е. при $k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 = n$ ($n \in \mathbb{Z}$) и $|k_1| + |k_2| = 3$, нормальная форма записывается так

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + \frac{\sqrt{2}}{4\pi} r_1^{k_1/2} r_2^{k_2/2} (a_{k_1 k_2} \sin \gamma + b_{k_1 k_2} \cos \gamma) + O\left((r_1 + r_2)^2\right). \quad (4.19)$$

3. При резонансе четвертого порядка, т.е. при $k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 = n$ ($n \in \mathbb{Z}$) и

$|k_1| + |k_2| = 4$, имеем

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + r_1^{k_1/2} r_2^{k_2/2} (a_{k_1 k_2} \sin \gamma + b_{k_1 k_2} \cos \gamma) + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right), \quad (4.20)$$

где $\gamma = k_1 \phi_{(1)} + k_2 \phi_2 - nt$.

В [29] были получены явные выражения для коэффициентов $c_{20}, c_{11}, c_{02}, a_{k_1 k_2}, b_{k_1 k_2}$ через коэффициенты $f_{i_1 i_2 j_1 j_2}$. В общем случае эти выражения довольно громоздки, однако для рассматриваемой ниже задачи об устойчивости резонансных вращений симметричного спутника они упрощаются, благодаря особой структуре гамильтониана (4.2). Действительно, можно заметить, что гамильтониан (4.2) не содержит членов нечетных степеней относительно переменных q_2, p_2 . Более того, он имеет ту же самую структуру в переменных Q_2, P_2 . Поэтому значительная часть коэффициентов $f_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ в правой части симплектического отображения (4.9) обращаются в ноль. В частности,

$$\begin{aligned} f_{0003} &= f_{0021} = f_{0102} = f_{0120} = f_{0201} = f_{0300} = f_{1011} = f_{1110} = f_{2001} = f_{2100} = 0 \\ f_{0013} &= f_{0031} = f_{0112} = f_{0130} = f_{0211} = f_{0310} = f_{1003} = f_{1021} = 0 \\ f_{1102} &= f_{1120} = f_{1201} = f_{1300} = f_{2011} = f_{2110} = f_{3001} = f_{3100} = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

В приложении приведены формулы для коэффициентов $c_{20}, c_{11}, c_{02}, a_{k_1 k_2}, b_{k_1 k_2}$, полученные с учетом (4.21).

4.2. Метод исследования устойчивости в случае резонанса основного типа

4.2.1. Нормализация линейной части

Рассмотрим теперь ситуацию, которая возникает на границе области устойчивости в линейном приближении.

Пусть выполняется соотношение $a_2 = 2a_1 - 2$, тогда характеристическое уравнение линейной системы с гамильтонианом H_2 представляется в виде

$$(\rho - 1)^2 (\rho^2 - 2a\rho + 1) = 0, \quad (4.22)$$

где $a = \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}$; здесь как и раньше через a_1 и a_2 обозначены соответственно след и сумма главных миноров второго порядка матрицы монодромии.

Будем считать, что $|a| < 1$, тогда, помимо кратного корня равного 1, уравнение (4.22) имеет пару комплексно сопряженных корней с модулями равными единице, т.е. в системе имеет место резонанс первого порядка. Будем также предполагать, что элементарные делители матрицы монодромии непросты. В этом случае линейная система неустойчива, а вопрос об устойчивости исходной нелинейной системы решается членами выше второй степени в разложении функции Гамильтона (4.2). Если же выполняется соотношение $a_2 = -2a_1 - 2$, то характеристическое уравнение линейной системы примет вид

$$(\rho + 1)^2 (\rho^2 + 2a\rho + 1) = 0, \quad (4.23)$$

Здесь также положим $|a| < 1$ и будем считать, что элементарные делители матрицы монодромии непросты. В этом случае уравнение (4.23) имеет кратный корень равный -1 и пару комплексно сопряженных корней с модулями равными единице, т.е. в системе имеет место резонанс второго порядка, для решения вопроса об устойчивости исходной нелинейной системы необходим нелинейный анализ.

Данные резонансные случаи относят к резонансу основного типа [21].

Пусть имеет место резонанс первого порядка. Рассмотрим симплектическое отображение (4.3), генерируемое фазовым потоком линейной системы H_2 . Покажем, как в этом случае можно построить линейную каноническую замену переменных (4.4), приводящую отображение (4.3) к наиболее простому виду. Матрицу \mathbf{N} этой линейной замены будем искать в виде $\mathbf{N} = \mathbf{A} \mathbf{C}$.

Матрица \mathbf{A} определяет промежуточное линейное преобразование канонических переменных $q_i, p_i \rightarrow \xi_i, \eta_i$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

приводящее отображение (4.3) к виду

$$\begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \\ \eta_1^{(1)} \\ \eta_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} \xi_1^{(0)} \\ \xi_2^{(0)} \\ \eta_1^{(0)} \\ \eta_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Здесь ρ и $\bar{\rho}$ – корни уравнения (4.22), при этом $\rho = e^{i2\pi\lambda} = \sin 2\pi\lambda + i \cos 2\pi\lambda$, а величина λ находится из соотношения $\cos 2\pi\lambda = a$.

Отображение (4.25) имеет комплексную форму. Замена переменных

$\xi_i, \eta_i \rightarrow Q_i, P_i$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\delta_2 & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\delta_2 & 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

позволяет получить нормализованное отображение в следующей вещественной форме

$$\begin{pmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q_1^{(0)} \\ Q_2^{(0)} \\ P_1^{(0)} \\ P_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi \sigma & 0 & \sin 2\pi \sigma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin 2\pi \sigma & 0 & \cos 2\pi \sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma = \delta_2 \lambda \quad (4.30)$$

Величины $\delta_1 \pm 1$ и $\delta_2 \pm 1$ определяются в процессе линейной нормализации из условия симплектичности матрицы \mathbf{N} .

Из курса линейной алгебры известно, что матрицу \mathbf{A} линейной замены (4.24) можно построить в виде

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{e}^{(0)}, \mathbf{e}, \mathbf{e}^{(1)}, \bar{\mathbf{e}} \right),$$

где $\mathbf{e}^{(0)}$ и $\mathbf{e}^{(1)}$ – собственный и присоединенный векторы, отвечающие корню $\rho = 1$ уравнения (4.22), а \mathbf{e} и $\bar{\mathbf{e}}$ комплексно сопряженные собственные век-

торы, отвечающие корням ρ и $\bar{\rho}$ соответственно. Эти векторы определяются неоднозначно. Покажем как их нужно выбрать, чтобы удовлетворить условию симплектичности матрицы \mathbf{N} , то есть условию

$$\mathbf{N}^T \mathbf{I} \mathbf{N} = \mathbf{I}. \quad (4.31)$$

С этой целью положим

$$\mathbf{e}^{(0)} = c_1 \mathbf{u}, \quad \mathbf{e}^{(1)} = c_1 \mathbf{v}, \quad \mathbf{e} = c_2(\mathbf{r} + i\mathbf{s}), \quad \bar{\mathbf{e}} = c_2(\mathbf{r} - i\mathbf{s}) \quad (4.32)$$

Величины c_1 и c_2 – неопределенные пока действительные числа ($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$).

Учитывая введенные обозначения и перемножая матрицы \mathbf{A} и \mathbf{C} имеем следующее выражение для матрицы \mathbf{N}

$$\mathbf{N} = (\delta_1 c_1 \mathbf{u}, \delta_2 c_2 \mathbf{r}, c_1 \mathbf{v}, c_2 \mathbf{s}) \quad (4.33)$$

Вычислим теперь матрицу

$$\mathbf{N}^T \mathbf{I} \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \delta_1^2 c_1^2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{u} & \delta_1 \delta_2 c_1 c_2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{r} & \delta_1 c_1^2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v} & \delta_1 c_1 c_2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{s} \\ \delta_1 \delta_2 c_1 c_2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{u} & \delta_2^2 c_2^2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{r} & \delta_2 c_1 c_2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{v} & \delta_2 c_2^2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{s} \\ \delta_1 c_1^2 \mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{u} & \delta_2 c_1 c_2 \mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{r} & c_1^2 \mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{v} & c_1 c_2 \mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{s} \\ \delta_1 c_1 c_2 \mathbf{s}^T \mathbf{I} \mathbf{u} & \delta_2 c_2^2 \mathbf{s}^T \mathbf{I} \mathbf{r} & c_1 c_2 \mathbf{s}^T \mathbf{I} \mathbf{v} & c_2^2 \mathbf{s}^T \mathbf{I} \mathbf{s} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Заметим, что для любых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} выполняется равенство $\mathbf{a}^T \mathbf{I} \mathbf{b} = -\mathbf{b}^T \mathbf{I} \mathbf{a}$. В силу этого равенства матрица (4.34) является кососимметрической и может быть записана в виде

$$\mathbf{N}^T \mathbf{I} \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 \delta_2 c_1 c_2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{r} & \delta_1 c_1^2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v} & \delta_1 c_1 c_2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{s} \\ -\delta_1 \delta_2 c_1 c_2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{r} & 0 & \delta_2 c_1 c_2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{v} & \delta_2 c_2^2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{s} \\ -\delta_1 c_1^2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v} & -\delta_2 c_1 c_2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{v} & 0 & c_1 c_2 \mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{s} \\ -\delta_1 c_1 c_2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{s} & -\delta_2 c_2^2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{s} & -c_1 c_2 \mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Вид матрицы (4.35) можно уточнить. Действительно, учитывая тождества $(\mathbf{X}(2\pi))^T \mathbf{I} \mathbf{X}(2\pi) = \mathbf{I}$ и $\mathbf{I} = -\mathbf{I}^T$ нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\mathbf{e}^{(0)T} \mathbf{I} \mathbf{e} = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}^{(0)T} \mathbf{I} \mathbf{e}$$

которое можно переписать в виде

$$\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \mathbf{e}^{(0)T} \mathbf{I} \mathbf{e} = 0.$$

Поскольку мы предполагаем, что $\rho \neq 1$, то последнее равенство возможно лишь при условии $\mathbf{e}^{(0)T} \mathbf{I} \mathbf{e} = 0$. Аналогично, можно показать, что $\mathbf{e}^{(0)T} \mathbf{I} \bar{\mathbf{e}} = 0$.

Кроме того, учитывая тождества $\mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{X}(2\pi)\mathbf{e}^{(1)} - \mathbf{E}_4\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{I} = -\mathbf{I}^T$, а также, принимая во внимание только что доказанное равенство $\mathbf{e}^{(0)T} \mathbf{I} \mathbf{e} = 0$, можно показать, что выполняется соотношение

$$\mathbf{e}^T \mathbf{I} \mathbf{e}^{(1)} = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}^T \mathbf{I} \mathbf{e}^{(1)}$$

или

$$\mathbf{e}^T \mathbf{I} \mathbf{e}^{(1)} \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) = 0.$$

Поскольку, по предположению $\rho \neq 1$, то последнее равенство возможно лишь при условии $\mathbf{e}^T \mathbf{I} \mathbf{e}^{(1)} = 0$. Аналогично, можно показать, что $\mathbf{e}^{(1)T} \mathbf{I} \bar{\mathbf{e}} = 0$.

Подставляя выражения (4.32) в тождество $\mathbf{e}^{(0)T} \mathbf{I} \mathbf{e} = 0$ имеем

$$c_1 c_2 [\mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{r} + i \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{s}] = 0,$$

откуда получим $\mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{r} = 0$ и $\mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{s} = 0$.

Аналогично, подставляя выражения (4.32) в тождество $\mathbf{e}^T \mathbf{I} \mathbf{e}^{(1)} = 0$ имеем

$$c_1 c_2 [\mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{v} + i \mathbf{s}^T \mathbf{I} \mathbf{v}] = 0,$$

откуда приходим к равенствам $\mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{v} = 0$ и $\mathbf{s}^T \mathbf{I} \mathbf{v} = 0$. Последнее равенство эквивалентно $\mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{s} = 0$. В итоге, матрицу (4.35) можно переписать в виде

$$\mathbf{N}^T \mathbf{I} \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_1 c_1^2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 c_2^2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{s} \\ -\delta_1 c_1^2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2 c_2^2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{s} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Условию симплектичности матрицы N можно удовлетворить выбрав величины $\delta_1, \delta_2, c_1, c_2$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned}\delta_1 c_1^2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v} &= 1, \\ \delta_2 c_2^2 \mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{s} &= 1,\end{aligned}$$

то есть следует положить

$$\delta_1 = \text{sign}(\mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v}), \quad \delta_2 = \text{sign}(\mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{s}), \quad (4.37)$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v}|}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{s}|}}. \quad (4.38)$$

Итак, матрица \mathbf{N} однозначно определяется по формулам (4.33) и (4.37).

Линейная замена переменных (4.4) с построенной таким образом матрицей \mathbf{N} приводит линейное отображение (4.3) к нормальной форме (4.29) с матрицей \mathbf{G} вида (4.30). По нормальной форме линейного отображения можно построить нормализованную квадратичную часть функции Гамильтона (4.2), которая в рассматриваемом случае резонанса первого порядка будет иметь вид

$$\Gamma_2 = \frac{\delta_1}{4\pi} P_1^2 + \frac{\sigma}{2} (Q_1^2 + P_1^2) \quad (4.39)$$

Покажем теперь как в случае резонанса первого порядка, используя нелинейное симплектическое отображение, генерируемое фазовым потоком исходной канонической системы, получить нормальную форму гамильтониана (4.2) до членов четвертой степени включительно.

Сначала в системе с исходным гамильтонианом (4.2) выполним линейную каноническую замену переменных с построенной выше матрицей \mathbf{N} . Новый гамильтониан H^* получается путем подстановки формул линейной замены переменных в старую функцию Гамильтона (4.2).

$$\begin{aligned}H^* &= H(n_{11}Q_1 + n_{12}Q_2 + n_{13}P_1 + n_{14}P_2, n_{21}Q_1 + n_{22}Q_2 + n_{23}P_1 + n_{24}P_2, \\ &\quad n_{31}Q_1 + n_{32}Q_2 + n_{33}P_1 + n_{34}P_2, n_{41}Q_1 + n_{42}Q_2 + n_{43}P_1 + n_{44}P_2, t),\end{aligned} \quad (4.40)$$

Здесь n_{ij} – элементы матрицы (4.33). Симплектическое отображение, генерируемое канонической системой с гамильтонианом (4.40), будет иметь вид (4.9), в котором матрица \mathbf{G} определяется выражением (4.30).

Выполним теперь линейную унивалентную замену переменных по формулам

$$Q_1 = x_1, Q_2 = \frac{i+1}{2}(x_2 + y_2), P_1 = y_1, P_2 = \frac{i-1}{2}(x_2 - y_2) \quad (4.41)$$

В новых переменных $x_i, y_i, (i = 1, 2)$ отображение принимает вид:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_1^{(0)} - \frac{\partial Z_3}{\partial y_1^{(0)}} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z_3}{\partial y_1^{(0)} \partial x_i^{(0)}} \frac{\partial Z_3}{\partial y_i^{(0)}} - \frac{\partial Z_4}{\partial y_1^{(0)}} + \\ &+ \delta_1 \left(y_1^{(0)} + \frac{\partial Z_3}{\partial x_1^{(0)}} - \frac{\partial^2 Z_3}{\partial x_1^{(0)2}} \frac{\partial Z_3}{\partial y_1^{(0)}} + \frac{\partial^2 Z_3}{\partial x_2^{(0)} \partial x_1^{(0)}} \frac{\partial Z_3}{\partial y_2^{(0)}} + \frac{\partial Z_4}{\partial x_1^{(0)}} \right) + O_4 \\ x_2^{(1)} &= \rho \left(x_2^{(0)} - \frac{\partial Z_3}{\partial y_2^{(0)}} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z_3}{\partial y_2^{(0)} \partial x_i^{(0)}} \frac{\partial Z_3}{\partial y_i^{(0)}} - \frac{\partial Z_4}{\partial y_2^{(0)}} + O_4 \right) \\ y_1^{(1)} &= y_1^{(0)} + \frac{\partial Z_3}{\partial x_1^{(0)}} - \frac{\partial^2 Z_3}{\partial x_1^{(0)2}} \frac{\partial Z_3}{\partial y_1^{(0)}} + \frac{\partial^2 Z_3}{\partial x_2^{(0)} \partial x_1^{(0)}} \frac{\partial Z_3}{\partial y_2^{(0)}} + \frac{\partial Z_4}{\partial x_1^{(0)}} + O_4 \\ y_2^{(0)} &= \frac{1}{\rho} \left(y_2^{(0)} + \frac{\partial Z_3}{\partial x_2^{(0)}} - \frac{\partial^2 Z_3}{\partial x_2^{(0)} \partial x_1^{(0)}} \frac{\partial Z_3}{\partial y_1^{(0)}} + \frac{\partial^2 Z_3}{\partial x_2^{(0)2}} \frac{\partial Z_3}{\partial y_2^{(0)}} + \frac{\partial Z_4}{\partial x_2^{(0)}} + O_4 \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

где

$$Z_3 = F_3^*, \quad Z_4 = F_4^* + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_3^*}{\partial x_2^{(0)}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_3^*}{\partial y_2^{(0)}} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_3^*}{\partial x_2^{(0)}} \frac{\partial F_3^*}{\partial y_2^{(0)}}. \quad (4.43)$$

Здесь F_i^* – это формы F_k , в которых Q_i, P_i выражены через x_i, y_i по формулам (4.41).

Будем искать близкую к тождественной нелинейную каноническую замену переменных $x_i, y_i \rightarrow \xi_i, \eta_i$, приводящую симплектическое отображение (4.42) к наиболее простому виду. Эту замену переменных зададим при помощи производящей функции $R(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2)$ по формулам

$$y_i = \frac{\partial R}{\partial x_i}, \quad \xi_i = \frac{\partial R}{\partial \eta_i} \quad (4.44)$$

где

$$R(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + R_3 + R_4 + \dots, \quad (4.45)$$

$$R_n = \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2=n} r_{i_1i_2j_1j_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \eta_1^{j_1} \eta_2^{j_2}. \quad (4.46)$$

Из (4.44) можно получить явные формулы преобразования

$$\begin{aligned} x_j &= \xi_j - \frac{\partial R_3}{\partial \eta_j} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 R_3}{\partial \eta_j \partial \xi_i} \frac{\partial R_3}{\partial \eta_i} - \frac{\partial R_4}{\partial \eta_j} + O_4, \\ y_j &= \eta_j + \frac{\partial R_3}{\partial \xi_j} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 R_3}{\partial \xi_j \partial \xi_i} \frac{\partial R_3}{\partial \eta_i} + \frac{\partial R_4}{\partial \xi_j} + O_4. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Подставляя (4.47) в отображение (4.42), получим

$$\begin{cases} \xi_1^{(1)} = \xi_1^{(0)} + \delta_1 \eta_1^{(0)} - \frac{\partial W_3}{\partial \eta_1^{(0)}} + \delta_1 \frac{\partial W_3}{\partial \xi_1^{(0)}} + O_3, \\ \xi_2^{(1)} = \rho \left(\xi_2^{(0)} - \frac{\partial W_3}{\partial \eta_2^{(0)}} + O_3 \right), \\ \eta_1^{(1)} = \eta_1^{(0)} + \frac{\partial W_3}{\partial \xi_1^{(0)}} + O_3, \\ \eta_2^{(1)} = \frac{1}{\rho} \left(\eta_2^{(0)} + \frac{\partial W_3}{\partial \xi_2^{(0)}} + O_3 \right), \end{cases} \quad (4.48)$$

где

$$\begin{aligned} W_3 &= R_3 \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)} \right) + Z_3 \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)} \right) - \\ &- R_3 \left(\delta_1 \eta_1^{(0)} + \xi_1^{(0)}, \rho \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \frac{\eta_2^{(0)}}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Неопределенные пока еще коэффициенты $r_{i_1i_2j_1j_2}$ формы R_3 будем подбирать таким образом, чтобы максимальное число коэффициентов формы W_3 , определяемой равенством (4.49), обращались в ноль. Вычисления показывают,

что если положить

$$\begin{aligned}
r_{0003} &= -\frac{z_{0003}\rho^3}{\rho^3-1}, & r_{0012} &= -\frac{\rho^2(z_{0012}(\rho^2-1)\delta_1 - z_{1002})}{(\rho^2-1)^2}, \\
r_{0021} &= -\frac{\rho\left((\rho+1)z_{2001} + \delta_1(\rho-1)z_{1011} + (\rho-1)^2z_{0021}\right)}{(\rho-1)^3}, \\
r_{0102} &= -\frac{z_{0102}\rho}{\rho-1}, & r_{0120} &= \frac{\rho(\rho+1)z_{2100} - \delta_1\rho(\rho-1)z_{1110} + (\rho-1)^2z_{0120}}{(\rho-1)^3}, \\
r_{0201} &= \frac{z_{0201}}{\rho-1}, & r_{0210} &= -\frac{\delta_1\rho^2z_{1200} - (\rho^2-1)z_{0210}}{(\rho^2-1)^2}, & r_{0300} &= \frac{z_{0300}}{\rho^3-1}, \\
r_{1002} &= -\frac{z_{1002}\rho^2}{\rho^2-1}, & r_{1011} &= -\frac{\rho(2\delta_1z_{2001} + z_{1011}(\rho-1))}{(\rho-1)^2}, \\
r_{1020} &= -\frac{1}{6}\frac{3\delta_1z_{1020} - 6z_{0030} - z_{2010}}{\delta_1}, & r_{1101} &= \frac{z_{0111}}{\delta_1}, \\
r_{1110} &= -\frac{2\delta_1\rho z_{2100} - z_{1110}(\rho-1)}{(\rho-1)^2}, & r_{1200} &= \frac{z_{1200}}{\rho^2-1}, & r_{2001} &= -\frac{z_{2001}\rho}{\rho-1}, \\
r_{2010} &= -\frac{1}{2}\frac{\delta_1z_{2,0,1,0} - z_{1020}}{\delta_1}, & r_{2100} &= \frac{z_{2100}}{\rho-1}, & r_{3000} &= \frac{1}{3}\frac{z_{2010}}{\delta_1}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

то форма W_3 будет иметь следующий наиболее простой вид.

$$W_3 = w_{1101}\eta_2^{(0)}\xi_1^{(0)}\xi_2^{(0)} + w_{3000}\left(\xi_1^{(0)}\right)^3 \tag{4.51}$$

где

$$w_{1101} = i f_{1002} + i f_{1200}, \quad w_{3000} = f_{3000}. \tag{4.52}$$

Таким образом, мы получили отображение, нормализованное до членов второго порядка включительно.

Теперь по полученному нормализованному отображению для решения вопроса об устойчивости необходимо восстановить нормальную форму гамильтониана.

Пусть $H(\xi, \eta, \nu)$ – искомый гамильтониан, а

$$\xi_i = \xi_i\left(\xi_i^{(0)}, \eta_i^{(0)}, \nu\right), \quad \eta_i = \eta_i\left(\xi_i^{(0)}, \eta_i^{(0)}, \nu\right) \tag{4.53}$$

решение системы с гамильтонианом $H(\xi, \eta, \nu)$, отвечающее начальным условиям $\xi_i(0) = \xi_i^{(0)}$, $\eta_i(0) = \eta_i^{(0)}$. Решение (4.53) задает каноническое преобразование, которое можно представить через его производящую функцию $\Phi(\xi_i, \eta_i^{(0)}, \nu)$

$$\xi_i^{(0)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i^{(0)}}, \quad \eta_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}, \quad (4.54)$$

Функция Φ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + H\left(\xi_1, \xi_2, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}, \nu\right) = 0. \quad (4.55)$$

Если в формулах (4.53) положить $\nu = 2\pi$, то они будут задавать отображение (4.48). Тогда производящую функцию отображения (4.48) можно представить в виде $\Psi(\xi_i, \eta_i^{(0)}) = \Phi(\xi_i, \eta_i^{(0)}, 2\pi)$. А само отображение (4.48) будет иметь вид

$$\xi_i^{(0)} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_i^{(0)}}, \quad \eta_i = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_i} \quad (4.56)$$

Выражение для $\Psi(\xi_i, \eta_i^{(0)})$ будем искать в виде ряда $\Psi(\xi_i, \eta_i^{(0)}) = \Psi_2(\xi_i, \eta_i^{(0)}) + \Psi_3(\xi_i, \eta_i^{(0)}) + \dots$

Из (4.48) и (4.56) следует, что

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi_1} + \dots = \eta_1^{(0)} + \frac{\partial W_3}{\partial \xi_1^{(0)}} + O_3 \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi_2} + \dots = \frac{1}{\rho} \eta_2^{(0)} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_3}{\partial \xi_2^{(0)}} + O_3.$$

Приравнивая линейные члены, имеем $\frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_1} = \eta_1^{(0)}$, откуда $\Psi_2 = \eta_1^{(0)} \xi_1 + \dots$ и $\frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\rho} \eta_2^{(0)}$, откуда $\Psi_2 = \frac{1}{\rho} \eta_2^{(0)} \xi_2 + \dots$

Тогда

$$\Psi_2 = \xi_1 \eta_1^{(0)} + \frac{1}{\rho} \xi_2 \eta_2^{(0)} + a_{20} \eta_1^{(0)2} + a_{11} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)} + a_{02} \eta_2^{(0)2}.$$

где a_{20}, a_{11}, a_{02} – пока неопределенные постоянные величины. Подставим Ψ_2 в первое уравнение (4.56). Получим

$$\xi_1^{(0)} = \xi_1 + 2 a_{20} \eta_1^{(0)} + a_{11} \eta_2^{(0)} + O_2$$

$$\xi_2^{(0)} = \frac{1}{\rho} \xi_2 + 2 a_{02} \eta_2^{(0)} + a_{11} \eta_1^{(0)} + O_2.$$

Подставим полученные выражения в (4.48). Для ξ_1 получим

$$\xi_1 = \xi_1 + 2 a_{20} \eta_1^{(0)} + a_{11} \eta_2^{(0)} + \delta_1 \eta_1^{(0)} + O_2;$$

$$(2 a_{20} + \delta_1) \eta_1^{(0)} + a_{11} \eta_2^{(0)} = 0;$$

$$a_{20} = -\frac{\delta_1}{2}, \quad a_{11} = 0.$$

Для ξ_2 получим

$$\xi_2 = \rho \left(\frac{1}{\rho} \xi_2 + 2 a_{02} + a_{11} \eta_1^{(0)} \right) + O_2;$$

$$a_{02} = 0, \quad a_{11} = 0.$$

Итак,

$$\Psi_2 \left(\xi_i, \eta_i^{(0)} \right) = \xi_1 \eta_1^{(0)} + \frac{1}{\rho} \xi_2 \eta_2^{(0)} - \frac{\delta_1}{2} \eta_1^{(0)2}. \quad (4.58)$$

Получим аналогичное выражение для Ψ_3 . Подставим (4.58) в (4.57), а также, учитывая явный вид W_3 (4.51), получим

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi_1} + \dots = 3w_{3000} \xi_1^{(0)2} + w_{1101} \xi_2^{(0)} \eta_2^{(0)} + O_3 \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi_2} + \dots = w_{1101} \xi_1^{(0)} \eta_2^{(0)} + O_3.$$

Подставляя из (4.48) выражения для $\xi_1^{(0)}$ и $\xi_2^{(0)}$ в (4.59), приравнявая квадратичные члены, получаем

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi_1} = 3w_{3000} \left(\xi_1 - \delta_1 \eta_1^{(0)} \right)^2 + w_{1101} \frac{1}{\rho} \xi_2 \eta_2^{(0)}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi_2} = w_{1101} \left(\xi_1 - \delta_1 \eta_1^{(0)} \right) \eta_2^{(0)}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Psi_3 = & w_{3000} \left(3 \xi_1 \eta_1^{(0)2} - 3 \delta_1 \xi_1^2 \eta_1^{(0)} + \xi_1^3 \right) - \\ & \frac{1}{\rho} w_{1101} \left(\xi_2 \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)} \delta_1 - \xi_1 \xi_2 \eta_2^{(0)} \right) + \\ & b_{30} \eta_1^{(0)3} + b_{21} \eta_1^{(0)2} \eta_2^{(0)} + b_{03} \eta_2^{(0)3} + b_{12} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)2}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Подставим (4.60) в (4.56) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\eta_i^{(0)}$ и $\xi_i^{(0)}$. Получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \eta_1^{(0)} \xi_1^{(0)} : & 6w_{3000} - 6w_{3000} = 0 \\ \eta_1^{(0)2} : & b_{30} = -w_{3000} \delta_1 \\ \xi_1^{(0)2} : & -3 \delta_1 w_{3000} + 3 \delta_1 w_{3000} = 0 \\ \eta_2^{(0)} \xi_2^{(0)} : & -\delta_1 w_{1101} + \delta_1 w_{1101} = 0 \\ \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)} : & b_{21} = 0 \\ \eta_2^{(0)2} : & b_{12} = 0. \end{aligned}$$

Теперь подставляя из (4.48) выражения для $\eta_1^{(0)}$ и $\eta_2^{(0)}$ в (4.59) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\eta_i^{(0)}$ и $\xi_i^{(0)}$, получим

$$\begin{aligned} \eta_2^{(0)} \xi_2^{(0)} : & -w_{1101} \delta_1 \rho + w_{1101} \delta_1 \rho = 0 \\ \eta_1^{(0)2} : & b_{21} = 0 \\ \xi_1^{(0)} \xi_2^{(0)} : & w_{1101} \rho - w_{1101} \rho = 0 \\ \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)} : & b_{12} = 0 \\ \eta_2^{(0)2} : & b_{03} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \Psi_3 = & w_{3000} \left(3 \xi_1 \eta_1^{(0)2} - 3 \delta_1 \xi_1^2 \eta_1^{(0)} + \xi_1^3 \right) - \\ & \frac{1}{\rho} w_{1101} \left(\xi_2 \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)} \delta_1 - \xi_1 \xi_2 \eta_2^{(0)} \right) - w_{3000} \delta_1 \eta_1^{(0)3}. \end{aligned}$$

Теперь из уравнения Гамильтона-Якоби (4.55) найдем производящую функцию $\Phi(\xi_i, \eta_i^{(0)}, \nu)$ и $H(\xi_i, \eta_i, \nu)$.

$$\begin{aligned} \Phi(\xi_i, \eta_i, \nu) = & \left(\phi_{1010} \xi_1 \eta_1^{(0)} + \phi_{0101} \xi_2 \eta_2^{(0)} + \phi_{0020} \eta_1^{(0)2} \right) + \\ & \left(\phi_{3000} \xi_1^{(0)3} + \phi_{2010} \xi_1^2 \eta_1^{(0)} + \phi_{1101} \xi_1 \xi_2 \eta_2^{(0)} + \right. \\ & \left. \phi_{1020} \xi_1 \eta_1^{(0)2} + \phi_{0111} \xi_2 \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)} + \phi_{0030} \eta_1^{(0)3} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.61)$$

Здесь $\phi_{1010}(0) = \phi_{0101}(0) = 1$, а для всех остальных $\phi_{i_1, i_2, i_3, i_4}(0) = 0$, включая $\phi_{0020}(0)$, а $\phi_{i_1, i_2, i_3, i_4}(2\pi) = \Psi_{i_1, i_2, i_3, i_4}$.

Подставляя (4.61) в (4.55) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{1010}}{d\nu} \xi_1 \eta_1^{(0)} + \frac{d\phi_{0101}}{d\nu} \xi_2 \eta_2^{(0)} + \frac{d\phi_{0020}}{d\nu} \eta_1^{(0)2} + \dots \\ + H_2(\xi_i, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}, \nu) + H_3(\xi_i, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}, \nu) = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} &= \phi_{1010} \eta_1^{(0)} + 3 \phi_{3000} \xi_1^2 + 2 \phi_{2010} \xi_1 \eta_1^{(0)} + \phi_{1101} \xi_2 \eta_2^{(0)} + \phi_{1020} \eta_1^{(0)2}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} &= \phi_{0101} \eta_2^{(0)} + \phi_{1101} \xi_1 \eta_2^{(0)} + \phi_{0111} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)}. \end{aligned}$$

Теперь приравняем коэффициенты в (4.62). Для H_2 получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_{1010}}{d\nu} + h_{1010} \phi_{1010} = 0 \\ \frac{d\phi_{0101}}{d\nu} + h_{0101} \phi_{0101} = 0 \\ \frac{d\phi_{0020}}{d\nu} + h_{0020} \phi_{1010}^2 = 0 \end{array} \right.$$

Решив данную систему с начальными условиями, представленными выше, по-

лучим:

$$\begin{aligned} h_{0020}(\nu) &= \frac{1}{4} \frac{\delta_1}{\pi}, & h_{0101}(\nu) &= i\sigma, & h_{1010}(\nu) &= 0, \\ \phi_{0020}(\nu) &= -\frac{\delta_1}{4\pi} \nu, & \phi_{0101}(\nu) &= e^{-i\sigma\nu}, & \phi_{1010}(\nu) &= 1. \end{aligned}$$

Для H_3 получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{3000}}{d\nu} + h_{3000} &= 0 \\ \frac{d\phi_{1101}}{d\nu} + i\sigma\phi_{1101} + h_{1101}e^{-i\sigma\nu} &= 0 \\ \frac{d\phi_{0030}}{d\nu} + \frac{\delta_1}{2\pi}\phi_{1020} + h_{0030} &= 0 \\ \frac{d\phi_{1020}}{d\nu} + \frac{\delta_1}{\pi}\phi_{2010} + h_{1020} &= 0 \\ \frac{d\phi_{2010}}{d\nu} + \frac{3\delta_1}{2\pi}\phi_{3000} + h_{2010} &= 0 \\ \frac{d\phi_{0111}}{d\nu} + \frac{\delta_1}{2\pi}\phi_{1101} + i\sigma\phi_{0111} + h_{0111} &= 0 \end{aligned}$$

Решив эту систему, найдем значения h_{i_1, i_2, i_3, i_4} и $\phi_{i_1, i_2, i_3, i_4}$. Запишем выражение для искомого гамильтониана:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\delta_1}{4\pi} \eta_1^2 + i\sigma \xi_2 \eta_2 + \frac{\delta_1}{4\pi} w_{1101} \xi_1 \eta_1 \eta_2 - \frac{1}{4\pi} w_{3000} \xi_1 \eta_1^2 - \\ &- \frac{1}{2\pi} w_{1101} \xi_1 \xi_2 \eta_2 + \frac{3\delta_1}{4\pi} w_{3000} \xi_1^2 \eta_1 - \frac{1}{2\pi} w_{3000} \xi_1^3 + O_4, \end{aligned} \quad (4.63)$$

где O_4 - совокупность членов четвертого порядка и выше. Получившийся гамильтониан можно упростить, если провести каноническую унивалентную, близкую к тождественной замену $\xi_i, \eta_i \rightarrow u_i, v_i$, ($i = 1, 2$) с помощью производящей функции S

$$S = \xi_1 v_1 + \xi_1 v_2 - \frac{1}{2} w_{1101} \xi_1 \xi_2 v_2 + \frac{1}{4\delta_1} w_{3000} \xi_1^2 v_1 - \frac{1}{2} w_{3000} \xi_1^3. \quad (4.64)$$

После замены функция Гамильтона имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{4\pi} \delta_1 v_1^2 + i\sigma u_2 v_2 - \frac{1}{2\pi} w_{1101} u_1 u_2 v_2 - \frac{1}{2\pi} w_{3000} u_1^3 + O_4 \quad (4.65)$$

Задача об устойчивости положения равновесия системы с гамильтонианом (4.65) была подробно исследована в работе [21], где было показано, что если $w_{3000} \neq 0$, то резонансное вращение неустойчиво. Если $w_{3000} = 0$, то вопрос об устойчивости решается рассмотрением членов более высокого порядка в разложении гамильтониана.

Предположим, в рассматриваемой задаче $w_{3000} = 0$, тогда с целью получения нормальной формы функции Гамильтона до членов четвертого порядка включительно, проведем нормализацию отображения (4.42) в членах третьей степени. Подставляя (4.47) в (4.42) и учитывая, что коэффициенты R_3 уже определены по формулам (4.50), имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1^{(1)} = \xi_1^{(0)} + \delta_1 \left(\eta_1^{(0)} + w_{1101} \eta_2^{(0)} \xi_2^{(0)} \right) - \frac{\partial W_4}{\partial \eta_1^{(0)}} + \delta_1 \frac{\partial W_4}{\partial \xi_1^{(0)}} + O_4, \\ \xi_2^{(1)} = \rho \left(\xi_2^{(0)} - w_{1101} \xi_1^{(0)} \xi_2^{(0)} - \frac{\partial W_4}{\partial \eta_2^{(0)}} + O_4 \right), \\ \eta_1^{(1)} = \eta_1^{(0)} + w_{1101} \eta_2^{(0)} \xi_2^{(0)} + \frac{\partial W_4}{\partial \xi_1^{(0)}} + O_4, \\ \eta_2^{(1)} = \frac{1}{\rho} \left(\eta_2^{(0)} + w_{1101} \eta_2^{(0)} \xi_1^{(0)} + \frac{\partial W_4}{\partial \xi_2^{(0)}} + O_4 \right), \end{array} \right. \quad (4.66)$$

где

$$\begin{aligned} W_4 = & R_4 \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)} \right) + Z_4 \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)} \right) - \\ & - R_4 \left(\delta_1 \eta_1^{(0)} + \xi_1^{(0)}, \rho \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \frac{\eta_2^{(0)}}{\rho} \right) + \\ & + \frac{\partial R_3 \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)} \right)}{\partial \xi_1^{(0)}} \frac{\partial Z_3 \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)} \right)}{\partial \eta_1^{(0)}} + \\ & + \frac{\partial R_3 \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)} \right)}{\partial \xi_2^{(0)}} \frac{\partial Z_3 \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)} \right)}{\partial \eta_2^{(0)}} - \\ & - \frac{1}{2} \delta_1 \left(\frac{\partial R_3 \left(\delta_1 \eta_1^{(0)} + \xi_1^{(0)}, \rho \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \frac{\eta_2^{(0)}}{\rho} \right)}{\partial \xi_1^{(0)}} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.67)$$

Как и ранее, коэффициенты функции R_4 подбираются таким образом, чтобы W_4 имела самый простой вид, а именно:

$$W_4 = \eta_2^{(0)2} \xi_2^{(0)2} w_{0202} + \eta_2^{(0)} \xi_1^{(0)2} \xi_2^{(0)} w_{2101} + \xi_1^{(0)4} w_{4000} \quad (4.68)$$

Поскольку формулы для коэффициентов w_{0202} , w_{2101} и w_{4000} довольно громоздки, то они приводятся в приложении.

По нормализованному до членов третьей степени отображению можно получить нормальную форму гамильтониана до членов четвертой степени включительно. Соответствующий отображению (4.66) гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{4\pi} \delta_1 \eta_1^2 + i\sigma \xi_2 \eta_2 + \frac{\delta_1}{4\pi} w_{1101} \xi_1 \eta_1 \eta_2 - \\ & - \frac{1}{2\pi} w_{1101} \xi_1 \xi_2 \eta_2 + \frac{1}{60\pi} w_{4000} \eta_1^4 - \frac{1}{12\pi} w_{2100} \xi_2 \eta_1^2 \eta_2 - \\ & - \frac{1}{2\pi} w_{0202} \xi_2^2 \eta_2^2 + \frac{1}{2\pi} \delta_1 w_{2100} \xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2 - \frac{1}{2\pi} w_{4000} \xi_1^2 \eta_1^2 - \\ & - \frac{1}{2\pi} w_{2100} \xi_1^2 \xi_2 \eta_2 + \frac{1}{\pi} \delta_1 w_{4000} \xi_1^3 \eta_1 - \frac{1}{2\pi} w_{4000} \xi_1^4. \end{aligned} \quad (4.69)$$

При помощи канонической унивалентной, близкой к тождественной замены переменных $\xi_i, \eta_i \rightarrow u_i, v_i$, ($i = 1, 2$), которая задается производящей функцией S

$$\begin{aligned} S = & -\frac{1}{30\delta_1} w_{4000} \xi_1 v_1^3 + \frac{1}{6\delta_1} w_{2101} \xi_1 \xi_2 v_1 v_2 - \frac{1}{2} w_{2101} \xi_1^2 \xi_2 v_2 + \\ & + \frac{1}{3\delta_1} w_{4000} \xi_1^3 v_1 - \frac{1}{2} w_{4000} \xi_1^4 \end{aligned} \quad (4.70)$$

гамильтониан приводится к виду

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{4\pi} \delta_1 v_1^2 + i\sigma u_2 v_2 - \frac{1}{2\pi} w_{1101} u_1 u_2 v_2 - \frac{1}{2\pi} w_{0202} u_2^2 v_2^2 - \\ & - \frac{1}{2\pi} w_{2101} u_1^2 u_2 v_2 - \frac{1}{2\pi} w_{4000} u_1^4 \end{aligned} \quad (4.71)$$

В работе [21] было показано, что если $\delta_1 w_{4000} < 0$ имеет место устойчивость в третьем приближении, если $\delta_1 w_{4000} > 0$, то резонансное вращение неустойчиво. Если $w_{4000} = 0$, то вопрос об устойчивости решается рассмотрением членов более высокого порядка в разложении гамильтониана.

Случай резонанса второго порядка можно не рассматривать отдельно, так как если с самого начала считать функцию Гамильтона 4π -периодической, то резонансным точкам второго порядка будут соответствовать кратные мультипликаторы, равные единице [21], то есть в этом случае в 4π -периодической по времени системе реализуется резонанс первого порядка. Дальнейшее исследование устойчивости полностью совпадает с предыдущим, что делает ненужным дополнительное исследование.

Глава 5

Анализ устойчивости резонансных вращений в случае динамически симметричного спутника

В данной главе проводится строгий нелинейный анализ устойчивости резонансных вращений динамически симметричного спутника. Основные результаты данной главы были опубликованы в работах [63, 5].

5.1. Гамильтониан возмущенного движения

Рассмотрим динамически симметричный спутник, т.е. такой спутник, два главных центральных момента инерции которого равны между собой ($A = B$). В этом случае, как было отмечено в разделе 1.2 координата ϕ становится циклической, а соответствующий ей обобщенный индекс p_ϕ считаем равным нулю.

Гамильтониан возмущенного движения в случае динамически симметричного спутника для каждого из исследуемых резонансных вращений получается из соответствующего гамильтониана для спутника с неравными моментами инерции (1.26), если положить параметр μ равным единице, а переменные q_3 и p_3 равными нулю. Таким образом, мы переходим к системе с двумя степенями свободы.

Уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму

$$\frac{dq_i}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2). \quad (5.1)$$

Для резонансного вращения (1.10) необходимые в дальнейшем члены разложения функции Гамильтона в ряд в окрестности $q_i = p_i = 0$, ($i = 1, 2$) имеют

вид

$$\begin{aligned}
H_2 &= \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 - \frac{1}{2} \frac{e \cos \nu q_1^2}{1 + e \cos \nu} + \frac{1}{8} \frac{(e \cos \nu + 4e + 1) q_2^2}{1 + e \cos \nu} \\
H_3 &= \frac{1}{2} \frac{p_1 q_2^2}{1 + e \cos \nu} - \frac{1}{2} \frac{e \sin \nu q_1 q_2^2}{(1 + e \cos \nu)^2} - \frac{2}{3} \frac{e \sin \nu q_1^3}{(1 + e \cos \nu)^2} \\
H_4 &= \frac{1}{2} \frac{q_2^2 p_1^2}{(1 + e \cos \nu)^2} + \frac{1}{12} \frac{(3e \cos \nu - 2e + 1) q_2^4}{(1 + e \cos \nu)^3} + \frac{e \sin \nu q_1 q_2^2 p_1}{(1 + e \cos \nu)^3} + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{e (e \cos^2 \nu + 2 \cos \nu + e) q_1^2 q_2^2}{(1 + e \cos \nu)^4} + \frac{1}{3} \frac{e \cos \nu q_1^4}{(1 + e \cos \nu)^3}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Для резонансного вращения (1.12) данные члены разложения принимают

вид

$$\begin{aligned}
H_2 &= \frac{7}{2} \frac{e \cos \nu q_1^2}{1 + e \cos \nu} + \frac{1}{8} \frac{(25e \cos \nu - 12e + 9) q_2^2}{1 + e \cos \nu} + \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 \\
H_3 &= -2 \frac{e \sin \nu q_1^3}{(1 + e \cos \nu)^2} - \frac{3}{2} \frac{e \sin \nu q_1 q_2^2}{(1 + e \cos \nu)^2} + \frac{3}{2} \frac{q_2^2 p_1}{1 + e \cos \nu} \\
H_4 &= -\frac{e \cos \nu q_1^4}{(1 + e \cos \nu)^3} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2 p_1^2}{(1 + e \cos \nu)^2} + \frac{1}{4} \frac{(e \cos \nu + 2e + 3) q_2^4}{(1 + e \cos \nu)^3} - \\
&- \frac{1}{2} \frac{e (7e (\cos \nu)^2 + 6 \cos \nu - e) q_1^2 q_2^2}{(1 + e \cos \nu)^4} + \frac{e \sin(\nu) q_2^2 q_1 p_1}{(1 + e \cos \nu)^3}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

5.2. Анализ устойчивости в линейном приближении

Рассмотрим линеаризованную в окрестности положения равновесия $q_i = p_i = 0$ ($i = 1, 2$) систему с гамильтонианом H_2

$$\frac{dq_i}{d\nu} = \frac{\partial H_2}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\nu} = -\frac{\partial H_2}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2) \tag{5.4}$$

Вопрос об устойчивости системы (5.4) решается на основе анализа корней ее характеристического уравнения. В случае резонансного вращения (1.10) линейная система (5.4) распадается на две следующие независимые подсистемы

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{d\nu} = \frac{p_1}{(1 + e \cos \nu)^2} \\ \frac{dp_1}{d\nu} = 2 q_1 e (1 + e \cos \nu) \cos \nu \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\begin{cases} \frac{dq_2}{d\nu} = \frac{p_2}{(1 + e \cos \nu)^2} \\ \frac{dp_2}{d\nu} = \frac{1}{4} q_2 (1 + e \cos \nu) (3 e \cos \nu - 4 e - 1) \end{cases} \quad (5.6)$$

первая из которых описывает изменение переменных q_1, p_1 , а вторая – переменных q_2, p_2 .

Обозначим через $\mathbf{X}_1(\nu)$ и $\mathbf{X}_2(\nu)$ фундаментальные матрицы решений систем (5.8) и (5.9) соответственно, с начальными условиями $\mathbf{X}_i(0) = \mathbf{E}_2$ ($i = 1, 2$), где \mathbf{E}_2 – единичная матрица второго порядка. Тогда характеристическое уравнение системы (5.4) будет иметь вид:

$$(\rho^2 - 2a_1\rho + 1)(\rho^2 - 2a_2\rho + 1) = 0, \quad (a_i = x_{11}^{(i)} + x_{22}^{(i)}, \quad i = 1, 2) \quad (5.7)$$

где $x_{11}^{(i)}, x_{22}^{(i)}$ – диагональные элементы матриц $\mathbf{X}_i(2\pi)$.

Если $|a_1| > 1$ или $|a_2| > 1$, то у характеристического уравнения (5.7) есть корень, превышающий по модулю единицу. В этом случае линеаризованная система (5.4) неустойчива. Из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению следует [23], что нелинейная система (5.1) также неустойчива, что, в свою очередь, означает неустойчивость соответствующего периодического движения (1.10).

Если $|a_1| < 1$ и $|a_2| < 1$, то все корни характеристического уравнения комплексные с модулем равным единице. В этом случае система (5.4) устойчива [23], что не означает, однако, устойчивости соответствующей нелинейной системы (5.1). Для получения строгих выводов об устойчивости резонансного вращения (1.10) необходимо проведение нелинейного анализа с учетом членов третьей, четвертой, а иногда и более высокой степени в разложении гамильтониана.

Путем численного интегрирования систем (5.8) и (5.9) были получены коэффициенты a_1 и a_2 . Графики их зависимости от e для резонансного вращения

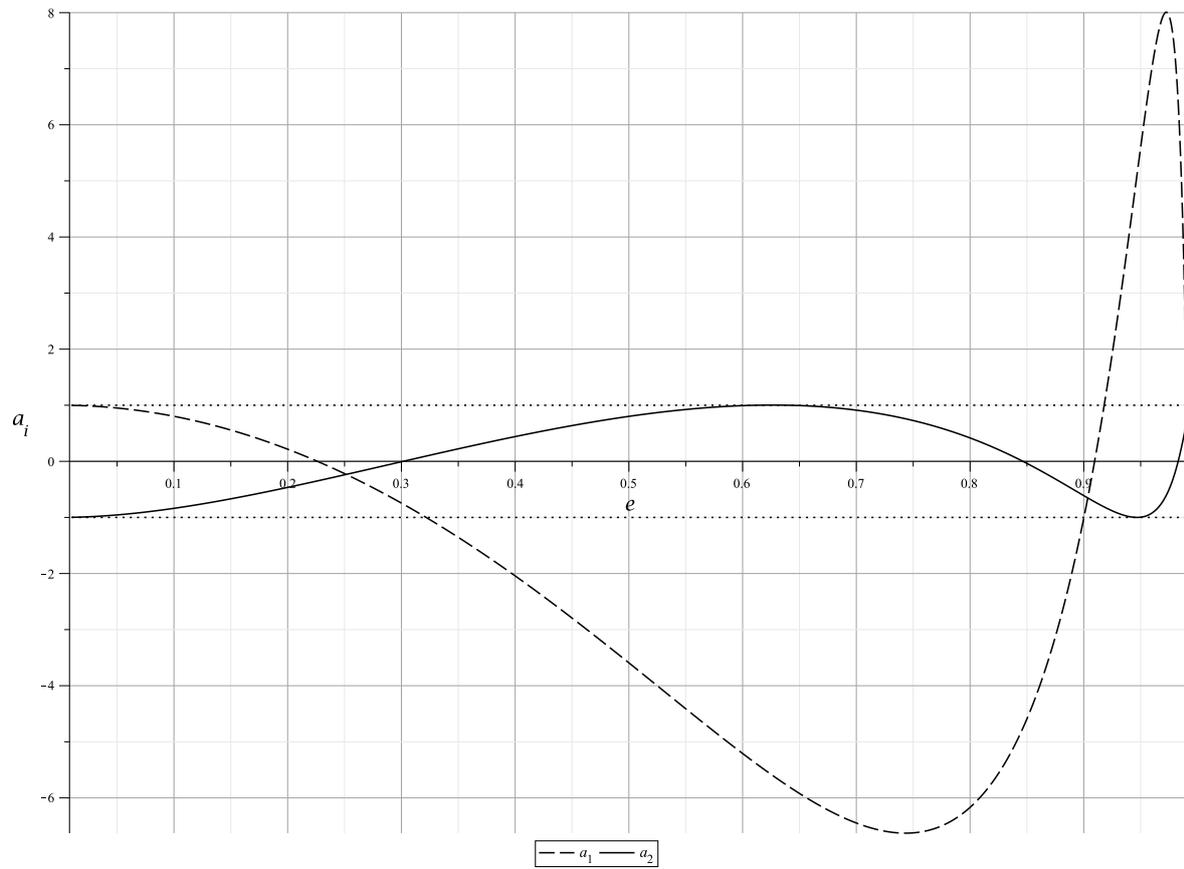


Рис. 1. 12

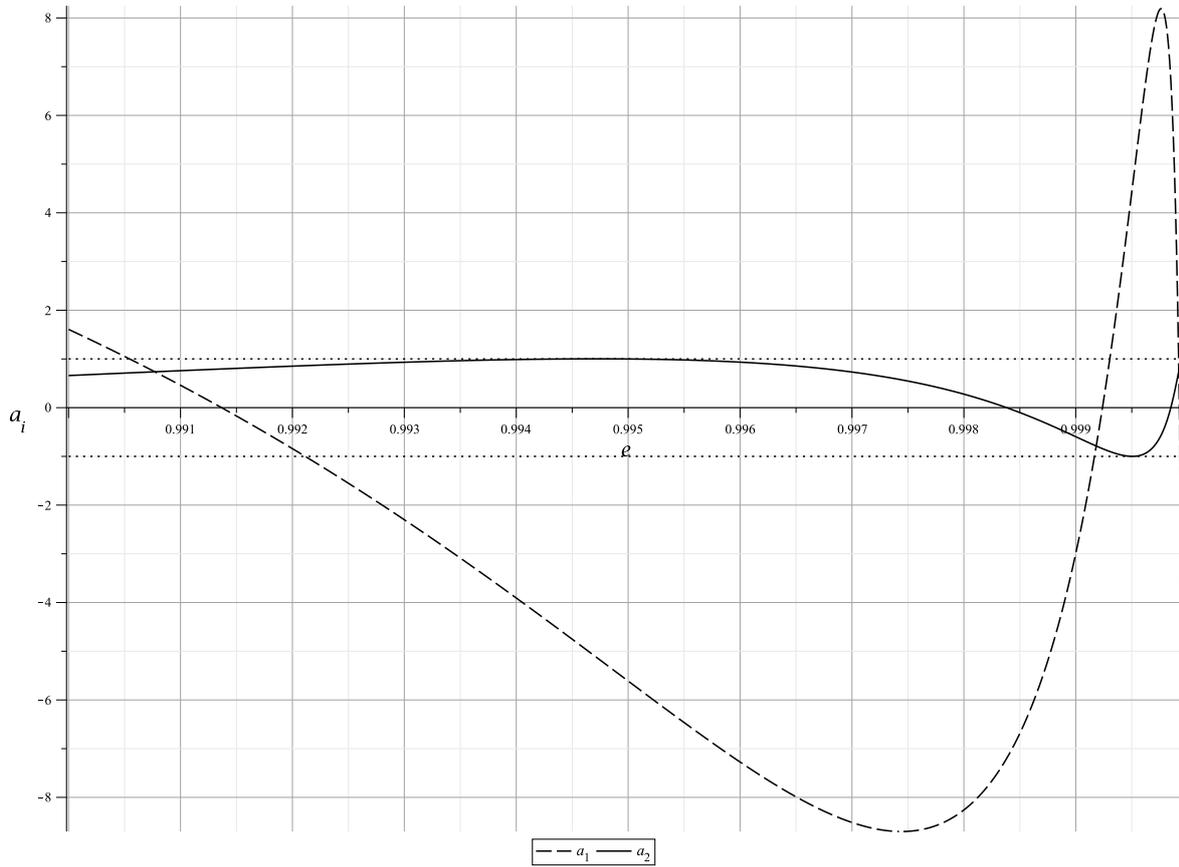


Рис. 2. 34

(1.10) представлены на рисунках 1 и 2 .

Полученные области устойчивости и неустойчивости в линейном приближении совпадают с областями \mathbb{S}_j ($j = 1, \dots, 5$) и \mathbb{U}_i ($i = 1, \dots, 4$), которые были найдены в разделе 2.2. Таким образом, в линейном приближении пространственные колебания не влияют на устойчивость резонансного вращения (1.10).

Перейдем к резонансному вращению (1.12). Линейная система (5.4) распадается на две следующие подсистемы:

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{d\nu} = p_1 \\ \frac{dp_1}{d\nu} = -7 \frac{e \cos \nu q_1}{1 + e \cos \nu}, \end{cases} \quad (5.8)$$

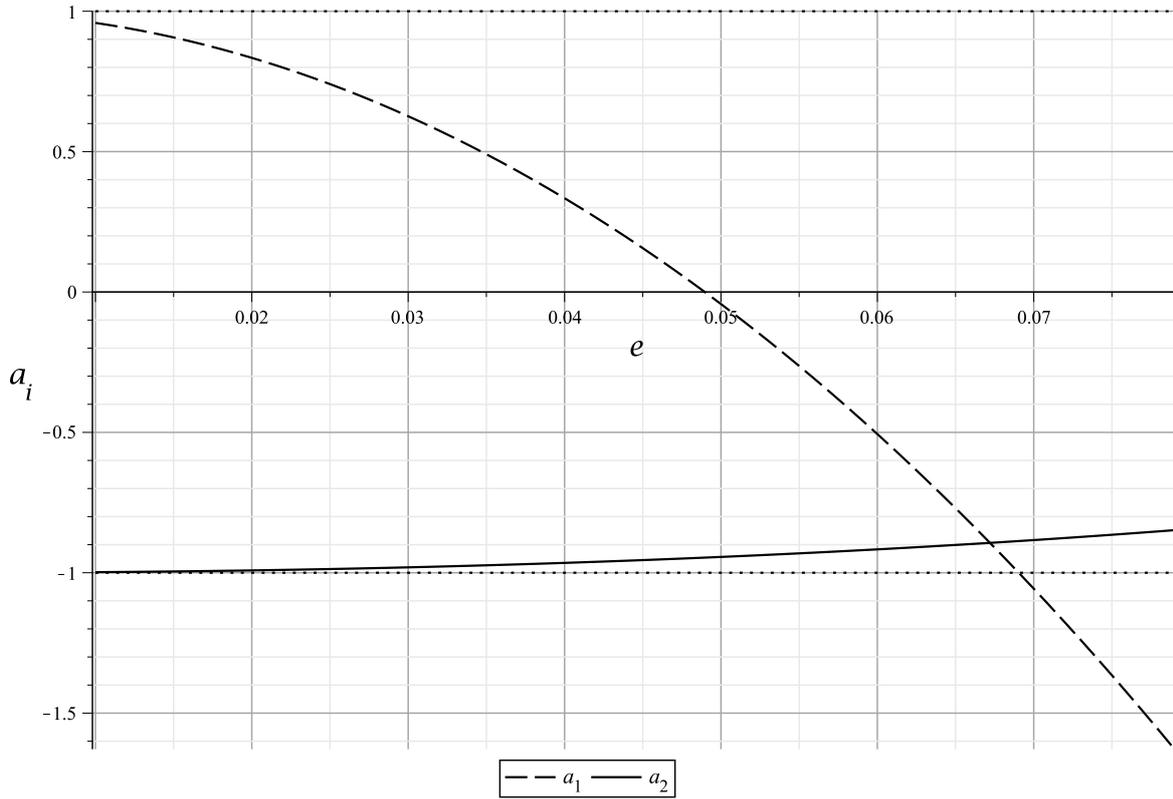


Рис. 3. График коэффициентов a_1, a_2

$$\begin{cases} \frac{dq_2}{d\nu} = p_2 \\ \frac{dp_2}{d\nu} = -\frac{1}{4} \frac{(25e \cos \nu - 12e + 9) q_2}{1 + e \cos \nu} \end{cases} \quad (5.9)$$

Путем численного интегрирования систем (5.8) и (5.9) были получены коэффициенты a_1 и a_2 . Графики их зависимости от e представлены на Рис. 3.

Поскольку для главных центральных моментов инерции A, B и C выполняются неравенства треугольника, то значения эксцентриситета удовлетворяющие соотношению (1.11) принадлежат интервалу $[0, 1/2]$. В этом интервале существует только одна область, удовлетворяющая условиям $|a_1| < 1, |a_2| < 1$, а именно: $0 < e < 0.06904107039$.

Данная область соответствует области, полученной в [36], где исследование устойчивости резонансного вращения (1.12) проводилось с учетом только плоских возмущений. Таким образом, и в этом случае, в линейном приближении

пространственные колебания не влияют на устойчивость резонансного вращения.

5.3. Результаты нелинейного анализа устойчивости резонансного вращения типа 1:2 с учетом пространственных возмущений

Нелинейный анализ устойчивости в областях \mathbb{S}_j был проведен следующим образом. Сначала, для значений эксцентриситета из данного интервала, используя алгоритм, приведенный в разделе 4.1, было построено симплектическое отображение (4.9), затем были рассчитаны коэффициенты нормальных форм (4.18), (4.19), (4.20), и, наконец, на основании достаточных условий были получены выводы об устойчивости вращения (1.10).

Для нерезонансного случая результаты анализа устойчивости приведены в таблице 5.1. За исключением нескольких резонансных и особых точек, решение (1.10) формально устойчиво в подобластях $\mathbb{F}_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, 3; i = 1, 2, 3$) и устойчиво для большинства начальных условий в подобластях $\mathbb{I}_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, 3; i = 1, 2$). Для особых значений эксцентриситета, приведенных в 5.1 достаточное условие не выполнено. Это означает, что при данных значениях эксцентриситета для решения вопроса об устойчивости вращения (1.10) требуется проведение нелинейного анализа с учетом членов выше четвертой степени в разложении гамильтониана.

Таблица 5.1: Результаты исследования устойчивости в нерезонансных случаях

	Подобласть	Выводы об устойчивости (исключая резонансные и особые точки)	Особые точки
\mathbb{S}_1	$\mathbb{F}_1^{(1)} = (0, 0.233403708695)$	форм. уст.	0.230633410628
	$\mathbb{I}_1^{(1)} = [0.233403708695, 0.277745200267)$	уст. для БНУ	
	$\mathbb{F}_2^{(1)} = (0.2777452002667, 0.319208905863)$	форм. уст.	0.319189567102
	$\mathbb{I}_2^{(1)} = [0.319208905863, 0.320454576027)$	уст. для БНУ	
	$\mathbb{F}_3^{(1)} = (0.320454576027, 0.321730933612)$	форм. уст.	0.320464118710
\mathbb{S}_2	$\mathbb{F}_1^{(2)} = (0.90010166, 0.904939507752)$	форм. уст.	0.903009941422
	$\mathbb{I}_1^{(2)} = (0.904939507752, 0.907502978981]$	уст. для БНУ	
	$\mathbb{F}_2^{(2)} = (0.907502978981, 0.910006114426)$	форм. уст.	0.909658485038
	$\mathbb{I}_2^{(2)} = (0.910006114426, 0.910612130546]$	уст. для БНУ	0.910006114426
	$\mathbb{F}_3^{(2)} = (0.910612130546, 0.9179098746)$	форм. уст.	
\mathbb{S}_3	$\mathbb{F}_1^{(3)} = (0.9905450175, 0.991195569585)$	форм. уст.	0.991195455828
	$\mathbb{I}_1^{(3)} = [0.991195569585, 0.991200641049)$	уст. для БНУ	
	$\mathbb{F}_2^{(3)} = (0.991200641049, 0.991748883717)$	форм. уст.	0.991200815683
			0.991748871834
	$\mathbb{I}_2^{(3)} = [0.991748883717, 0.991748982745)$	уст. для БНУ	
	$\mathbb{F}_3^{(3)} = (0.991748982745, 0.9921141694)$	форм. уст.	
\mathbb{S}_4	$\mathbb{F}_1^{(4)} = (0.99916659849, 0.999202847433)$	форм. уст.	0.999202833847
	$\mathbb{I}_1^{(4)} = [0.999202847433, 0.999203146262)$	уст. для БНУ	
	$\mathbb{F}_2^{(4)} = (0.999203146262, 0.999273038606)$	форм. уст.	0.999273031677
	$\mathbb{I}_2^{(4)} = [0.999273038606, 0.999273087492)$	уст. для БНУ	
	$\mathbb{F}_3^{(4)} = (0.999273087492, 0.999302309869)$	форм. уст.	0.999302309869

	$\mathbb{I}_3^{(4)} = (0.999302309869, 0.999303460061]$	уст. для БНУ	0.999302309869
	$\mathbb{F}_4^{(4)} = (0.999303460061, 0.999303562350)$	форм. уст.	
\mathbb{S}_5	$\mathbb{F}_1^{(5)} = (0.999918785804, 0.999924064238)$	форм. уст.	0.999924064235
	$\mathbb{I}_1^{(5)} = [0.999924064238, 0.999924064476)$	уст. для БНУ	
	$\mathbb{F}_2^{(5)} = (0.999924064476, 0.999929008016)$	форм. уст.	0.999929008015
	$\mathbb{I}_2^{(5)} = [0.999929008016, 0.999929008033)$	уст. для БНУ	
	$\mathbb{F}_3^{(5)} = (0.999929008033, 0.999932116844)$	форм. уст.	

Поскольку для рассматриваемой гамильтоновой системы выполняются равенства (4.21), то нетрудно показать, что в случае резонанса третьего порядка $2\sigma_1 + \sigma_2 = n$, $n \in \mathbb{Z}$ коэффициенты a_{21} и b_{21} гамильтониана (4.19) будут равны нулю, т.е. резонансная часть в нормализованном гамильтониане исчезает. Похожая ситуация имеет место для резонансов $3\sigma_2 = n$, $3\sigma_1 + \sigma_2 = n$, $\sigma_1 + 3\sigma_2 = n$. Поэтому данные резонансы не потребовали отдельного исследования и были рассмотрены в рамках анализа устойчивости в нерезонансном случае. В других резонансных случаях устойчивость исследовалась отдельно. Результаты этого исследования представлены в таблице 5.2.

Таблица 5.2: Результаты исследования устойчивости в случаях резонансов 3 и 4 порядков

Тип резонанса	Значение эксцентриситета	Подобласть	Выводы об устойчивости
$3\sigma_1 = 1$	0.277745200267	$\mathbb{I}_1^{(1)}$	неустойчивость
$3\sigma_1 = -1$	0.904939507752	$\mathbb{I}_1^{(2)}$	неустойчивость
$3\sigma_1 = 1$	0.991748982745	$\mathbb{I}_2^{(3)}$	неустойчивость
$3\sigma_1 = -1$	0.999203146262	$\mathbb{I}_1^{(4)}$	неустойчивость

$3\sigma_1 = 1$	0.999929008033	$\mathbb{I}_2^{(5)}$	неустойчивость
$\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$	0.320454576027	$\mathbb{I}_2^{(1)}$	неустойчивость
	0.991200641049	$\mathbb{I}_1^{(3)}$	неустойчивость
	0.999924064476	$\mathbb{I}_1^{(5)}$	неустойчивость
$4\sigma_1 = 1$	0.226141792962	$\mathbb{F}_1^{(1)}$	неустойчивость
$4\sigma_1 = -1$	0.909495075503	$\mathbb{F}_2^{(2)}$	неустойчивость
$4\sigma_1 = 1$	0.991367255033	$\mathbb{F}_2^{(3)}$	уст. в 3-м прибл.
$4\sigma_1 = -1$	0.999238031230	$\mathbb{F}_2^{(4)}$	уст. в 3-м прибл.
$4\sigma_1 = 1$	0.999925762334	$\mathbb{F}_2^{(5)}$	уст. в 3-м прибл.
$2\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$	0.251462187613	$\mathbb{I}_1^{(1)}$	неустойчивость
	0.903494665111	$\mathbb{F}_1^{(2)}$	уст. в 3-м прибл.
	0.990770332423	$\mathbb{F}_1^{(3)}$	уст. в 3-м прибл.
	0.999182382819	$\mathbb{F}_1^{(4)}$	уст. в 3-м прибл.
	0.999920572120	$\mathbb{F}_1^{(5)}$	уст. в 3-м прибл.
$4\sigma_2 = -1$	0.301563110193	$\mathbb{F}_2^{(1)}$	уст. в 3-м прибл.

В таблице 5.2 среди резонансов четвертого порядка приведен результат исследования устойчивости для комбинационного резонанса $2\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$, который на самом деле является резонансом второго порядка. В общем случае нормальная форма гамильтониана вычисленная в случае комбинационного резонанса имеет некоторые добавочные члены по сравнению с нормальной формой (4.20). Однако, в данной задаче, благодаря соотношениям (4.21) такие члены равны нулю, что позволило для получения выводов об устойчивости применить к исследованию данного резонанса критерий для резонанса четвертого порядка.

Для случаев резонансов первого и второго порядка результаты анализа устойчивости приведены в таблице 5.3. Данные результаты полностью совпа-

дают с результатами, полученными при исследовании устойчивости с учетом только плоских колебаний в главе 2

Таблица 5.3: Результаты исследования устойчивости в случаях резонансов 1 и 2 порядков

Область	Тип резонанса	Значение эксцентриситета	Выводы об устойчивости
\mathbb{S}_1	$2\sigma_1 = 1$	0.321730933612	устойчивость
\mathbb{S}_2	$2\sigma_1 = -1$	0.900101661162	устойчивость
	$\sigma_1 = 0$	0.917909874691	неустойчивость
\mathbb{S}_3	$\sigma_1 = 0$	0.990545017507	неустойчивость
	$2\sigma_1 = 1$	0.992114169442	устойчивость
\mathbb{S}_4	$2\sigma_1 = 1$	0.999166598484	неустойчивость
	$\sigma_1 = 0$	0.999303562350	неустойчивость
\mathbb{S}_5	$\sigma_1 = 0$	0.999918785804	неустойчивость
	$2\sigma_1 = 1$	0.999932116844	устойчивость

5.4. Результаты нелинейного анализа устойчивости резонансного вращения 3:2 с учетом пространственных возмущений

Нелинейный анализ устойчивости на интервале $0 < e < 0.06904107039$ был проведен аналогичным с предыдущим случаем образом.

Для нерезонансного случая результаты анализа устойчивости приведены в таблице 5.4. За исключением нескольких резонансных и одной особой точки, решение (1.12) формально устойчиво в подобласти \mathbb{F}_1 и устойчиво для

большинства начальных условий в подобластях \mathbb{I}_1 и \mathbb{I}_2 . Для особой точки $e = 0.05665469653139$ достаточное условие не выполнено. Это означает, что при данном значении эксцентриситета для решения вопроса об устойчивости вращения (1.12) требуется проведение нелинейного анализа с учетом членов выше четвертой степени в разложении гамильтониана.

Таблица 5.4: Результаты анализа устойчивости в нерезонансных случаях

Подобласть	Выводы об устойчивости (кроме резонансных и особых точек)	Особые точки
$\mathbb{I}_1 = (0, 0.05665469653139)$	уст. для БНУ	0.05665469653139
$\mathbb{F}_1 = (0.05665469653139, 0.0598813516814)$	форм. уст.	
$\mathbb{I}_2 = (0.0598813516814, 0.06904107039)$	уст. для БНУ	

Как и ранее, в случае резонанса третьего порядка $2\sigma_1 + \sigma_2 = n$, $n \in \mathbb{Z}$ коэффициенты a_{21} и b_{21} гамильтониана (4.19) будут равны нулю. Поэтому данный резонанс не потребовал отдельного исследования и был рассмотрен в рамках анализа устойчивости в нерезонансном случае. В других резонансных случаях устойчивость исследовалась отдельно. Результаты этого исследования представлены в таблице 5.5.

Таблица 5.5: Результаты исследования устойчивости в случаях резонансов третьего и четвертого порядков

Тип резонанса	Значение эксцентриситета	Подобласть	Выводы об устойчивости
$3\sigma_1 = 1$	0.059881351681	$\mathbb{F}_1, \mathbb{I}_2$	неустойчивость
$4\sigma_1 = 1$	0.048966897164	\mathbb{I}_1	неустойчивость
$3\sigma_1 + \sigma_2 = -1$	0.037096796907	\mathbb{I}_1	уст. в третьем приближении
$4\sigma_2 = 1$	0.068824624602	$\mathbb{F}_2^{(1)}$	уст. в третьем приближении

Исследование, проведенное на границе области, в точке резонанса второго порядка $e = 0.06904107039101$ показало, что при данном значении эксцентриситета, резонансное вращение (1.12) устойчиво.

Заключение

В заключении сформулируем основные результаты диссертационной работы.

1. Проведен полный нелинейный анализ устойчивости резонансного вращения типа $1:2$ с учетом только плоских возмущений в неисследованных ранее значениях эксцентриситета. В частности, была исследована устойчивость указанного резонансного вращения при значениях эксцентриситета, близких к единице. Были найдены три новых интервала, в которых имеет место устойчивость по Ляпунову за исключением лишь конечного числа точек, отвечающих резонансам третьего и четвертого порядков, где была установлена неустойчивость. Кроме того, в двух исследованных ранее интервалах устойчивости по Ляпунову проведен анализ в особых точках, где для решения вопроса об устойчивости потребовался учет членов до шестой степени включительно в разложении функции Гамильтона. Было показано, что в указанных точках имеет место устойчивость по Ляпунову.
2. Проведен анализ устойчивости в линейном приближении резонансного вращения типа $1:2$ для спутника с неравными моментами инерции при наличии пространственных возмущений. При малых значениях эксцентриситета получены аналитические выражения для границ областей неустойчивости (параметрического резонанса). При произвольных значениях эксцентриситета в плоскости параметров задачи численно построены диаграммы устойчивости. Полученные результаты численного анализа устойчивости хорошо согласуются с результатами анализа устойчивости, полученными аналитически для малых значений параметра эксцентриситета. Результаты численного анализа данного исследования были объединены с результатами исследования устойчивости с учетом плоских возмущений

и в плоскости параметров e и μ были построены области устойчивости в линейном приближении с учетом как плоских, так и пространственных возмущений. Вне данных областей, резонансное вращение неустойчиво по Ляпунову.

3. Проведен строгий анализ устойчивости резонансных вращений типа 1:2 и 3:2 в случае динамически симметричного спутника с учетом пространственных возмущений. Анализируя линеаризованные уравнения возмущенного движения, найдены интервалы значений параметра e , в которых имеет место устойчивость в линейном приближении. Данные интервалы полностью совпадают с соответствующими областями устойчивости, найденными при исследовании устойчивости резонансных вращений с учетом плоских возмущений. Был сделан вывод о том, что в линейном приближении пространственные возмущения не приводят к неустойчивости. В интервалах устойчивости в линейном приближении был проведен строгий нелинейный анализ устойчивости и найдены интервалы значений эксцентриситета в которых имеет место формальная устойчивость и интервалы, в которых резонансное вращение устойчиво для большинства начальных условий. Также было обнаружено, что хотя в линейном приближении пространственные возмущения не влияют на выводы об устойчивости, учет нелинейных членов в правых частях уравнений возмущенного движения может привести к неустойчивости в случае резонансов третьего и четвертого порядков.
4. Был разработан конструктивный алгоритм исследования устойчивости периодических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в случае резонанса первого порядка. Данный алгоритм позволяет строить симплектическое отображение, генерируемое фазовым потоком гамильтоновой системы, нормализовывать указанное отображение и находить по норма-

лизированному отображению нормальную форму функции Гамильтона, соответствующую случаю резонанса первого порядка. Для коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона были получены явные выражения через коэффициенты нормализованного отображения.

Приложение А

Приложение

А.1. Приложение 1

$$\begin{aligned}\alpha_{3000} = \beta_{0030} &= \frac{1}{4\pi} [(f_{1020} - f_{3000}) + (f_{0030} - f_{2010})] \\ \alpha_{0030} = \beta_{3000} &= \frac{1}{4\pi} [(f_{1020} - f_{3000}) - (f_{0030} - f_{2010})]\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{1200} = \beta_{0012} &= \frac{1}{4\pi} [(f_{0111} + f_{1002} - f_{1200}) - (f_{0012} - f_{0210} - f_{1101})] \\ \alpha_{0012} = \beta_{1200} &= \frac{1}{4\pi} [(f_{0111} + f_{1002} - f_{1200}) + (f_{0012} - f_{0210} - f_{1101})]\end{aligned}\tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}c_{11} = &-\frac{1}{8\pi} [2 ((f_{1020} + 3 f_{3000}) (f_{1002} + f_{1200}) + (3 f_{0030} + f_{2010}) (f_{0012} + f_{0210})) \cot(\pi \sigma_1) \\ &+ ((f_{0012} - f_{0210}) (f_{0012} - f_{0210} - 2 f_{1101}) + (f_{1002} - f_{1200}) (f_{1002} + 2 f_{0111} - f_{1200}) + \\ &+ f_{1101}^2 + f_{0111}^2) \cot \pi (\sigma_1 + 2 \sigma_2) - ((f_{0012} - f_{0210}) (f_{0012} - f_{0210} + 2 f_{1101}) + \\ &+ (f_{1002} - f_{1200}) (f_{1002} - 2 f_{0111} - f_{1200}) + f_{1101}^2 + f_{0111}^2) \cot \pi (\sigma_1 - 2 \sigma_2) - \\ &- 2 (2 f_{0111} + f_{1020} + 3 f_{3000}) (f_{0012} + f_{0210}) + 4 f_{0022} + 4 f_{2002} - \\ &- 2 (f_{1002} + f_{1200}) (3 f_{0030} + 2 f_{1101} + f_{2010}) + 4 f_{0220} + 4 f_{2200}]\end{aligned}\tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}c_{20} = &-\frac{1}{32\pi} \left[3 \left((3 f_{0030} + f_{2010})^2 + (f_{1020} + 3 f_{3000})^2 \right) \cot(\pi \sigma_1) + \right. \\ &+ 9 \left((f_{0030} - f_{2010})^2 + (f_{1020} - f_{3000})^2 \right) \cot(3 \pi \sigma_1) - \\ &\left. - 36 (f_{1020} + f_{3000}) (f_{0030} + f_{2010}) + 16 f_{2010} f_{1020} + 8 f_{2020} + 24 f_{0040} + 24 f_{4000} \right]\end{aligned}\tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
c_{02} = & -\frac{1}{32\pi} \left[4 \left((f_{1002} + f_{1200})^2 + (f_{0012} + f_{0210})^2 \right) \cot(\pi \sigma_1) + \right. \\
& + ((f_{0012} - f_{0210})(f_{0012} - f_{0210} - 2f_{1101}) + \\
& + (f_{1002} - f_{1200})(f_{1002} + 2f_{0111} - f_{1200}) + f_{1101}^2 + f_{0111}^2) \cot \pi (\sigma_1 + 2\sigma_2) + \\
& + ((f_{0012} - f_{0210})(f_{0012} - f_{0210} + 2f_{1101}) + \\
& + (f_{1002} - f_{1200})(f_{1002} - 2f_{0111} - f_{1200}) + f_{1101}^2 + f_{0111}^2) \cot \pi (\sigma_1 - 2\sigma_2) - \\
& - 4(f_{1200} + 3f_{1002})f_{0012} - 4(3f_{1200} + f_{1002})f_{0210} - 4f_{0111}f_{1101} + \\
& \left. + 24f_{0004} + 24f_{0400} + 8f_{0202} \right]
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
a_{40} = & \frac{1}{4\pi} [(f_{0030}f_{1020} - f_{2010}f_{3000}) 3 \cot(\pi \sigma_1) + f_{1020}(f_{1020} - 3f_{3000}) - \\
& - f_{2010}(f_{2010} - 3f_{0030}) - f_{1030} + f_{3010}] \\
b_{40} = & \frac{1}{16\pi} \left[\left((f_{1020} - 3f_{3000})^2 + (f_{2010} - 3f_{0030})^2 - 4f_{1020}^2 - \right. \right. \\
& - 4f_{2010}^2) \cot(\pi \sigma_1) - 2(f_{1020} - 3f_{3000})(f_{2010} - 3f_{0030}) - \\
& \left. \left. - 8f_{2010}f_{1020} - 4f_{4000} - 4f_{0040} + 4f_{2020} \right]
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
a_{04} = & \frac{1}{8\pi} [((f_{1200} - f_{1002})f_{1101} - (f_{0012} - f_{0210})f_{0111}) \cot \pi (\sigma_1 - 2\sigma_2) + \\
& + (f_{0012} - f_{0210})f_{1101} + (f_{1002} - f_{1200})f_{0111} + 2f_{0301} - 2f_{0103}] \\
b_{04} = & -\frac{1}{16\pi} \left[\left((f_{0012} - f_{0210})^2 + (f_{1002} - f_{1200})^2 - f_{0111}^2 - \right. \right. \\
& - f_{1101}^2) \cot \pi (\sigma_1 - 2\sigma_2) - 2(f_{1002} - f_{1200})(f_{0012} - f_{0210}) + \\
& \left. \left. + 2f_{0111}f_{1101} + 4f_{0400} - 4f_{0202} + 4f_{0004} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \frac{1}{16\pi} [((f_{1002} + f_{0111} - f_{1200}) (3 f_{0030} + 4 f_{0012} + 4 f_{0210} + f_{2010}) + \\
&+ (f_{0012} - f_{0210} - f_{1101}) (4 f_{1200} + 4 f_{1002} + f_{1020} + 3 f_{3000})) \cot (\pi \sigma_1) - \\
&- (3 (f_{0111} - f_{1002} + f_{1200}) (f_{0030} - f_{2010}) + \\
&+ 3 (f_{1020} - f_{3000}) (f_{0012} - f_{0210} + f_{1101})) \cot 3 (\pi \sigma_1) + \\
&+ 2 (f_{0111} - 2 f_{1200}) (f_{0111} + 2 f_{1002}) - 2 (f_{1101} + 2 f_{0210}) (f_{1101} - 2 f_{0012}) + \\
&+ 4 f_{1020} (f_{1002} - f_{1200}) + 4 f_{2010} (f_{0012} - f_{0210}) - 2 (f_{2010} - 3 f_{0030}) f_{1101} + \\
&+ 2 (f_{1020} - 3 f_{3000}) f_{0111} - 4 f_{0121} - 4 f_{1012} + 4 f_{1210} + 4 f_{2101}] \\
b_{22} &= \frac{1}{16\pi} [((f_{0012} - f_{0210} - f_{1101}) (3 f_{0030} + 4 f_{0012} + 4 f_{0210} + f_{2010}) - \\
&- (4 f_{1200} + 4 f_{1002} + f_{1020} + 3 f_{3000}) (f_{1002} + f_{0111} - f_{1200})) \cot (\pi \sigma_1) + \\
&+ 3 ((f_{1020} - f_{3000}) (f_{0111} - f_{1002} + f_{1200}) - \\
&- (f_{0030} - f_{2010}) (f_{0012} - f_{0210} + f_{1101})) \cot 3 (\pi \sigma_1) + \\
&+ 2 (2 f_{0111} + f_{1020} - 3 f_{3000}) (f_{0012} - f_{0210}) - 2 f_{0111} (f_{1101} + 2 f_{2010}) + \\
&+ 2 (f_{1002} - f_{1200}) (3 f_{0030} - 2 f_{1101} - f_{2010}) - 2 f_{1101} (f_{0111} + 2 f_{1020}) - \\
&- 8 f_{0012} f_{1200} - 8 f_{0210} f_{1002} - 4 f_{2200} + 4 f_{2002} + 4 f_{0220} - 4 f_{0022} + 4 f_{1111}]
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Приложение Б

Приложение

Б.1. Приложение 2

$$\begin{aligned}
w_{0202} = & -\frac{1}{4(\rho^2 - 1)^2 \delta_1} \left(\rho^2 \left((f_{1002} - f_{1200})^2 + f_{1101}^2 \right) \delta_1^2 - \right. \\
& - (\rho^2 - 1)^2 \left((f_{1002} - f_{1200})(f_{0012} - f_{0210}) + f_{0111}f_{1101} - 6f_{0004} - \right. \\
& - 2f_{0202} - 6f_{0400} \left. \right) \delta_1 + 2(f_{0012} + f_{0210})^2 (\rho^2 - 1)^2 \left. \right) + \\
& + \frac{i}{4\rho^2 - 1} (\rho^2 + 1) (f_{1101}(f_{0012} - f_{0210}) - (f_{1002} - f_{1200})f_{0111})
\end{aligned} \tag{Б.1}$$

$$\begin{aligned}
w_{2101} = & -\frac{1}{2\rho^2 - 1} \left((\rho^2 + 1) f_{1101}^2 + 2\rho^2 (f_{1002}^2 + f_{1200}^2) - 4f_{1002}f_{1200} \right) - \\
& - \frac{i}{\delta_1} \left((f_{1002} + f_{1200})f_{1101} - f_{2002} - f_{2200} \right) \delta_1 - f_{2010} (f_{0012} + f_{0210})
\end{aligned} \tag{Б.2}$$

$$w_{4000} = f_{4000} + \frac{1}{2} \frac{f_{2010}^2}{\delta_1} \tag{Б.3}$$

Список литературы

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
2. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 3.
3. *Бардин Б.С.* О ветвлении периодических решений системы, близкой к системе Ляпунова // *ПММ*. 1999. Т. 63, Вып. 4. С. 538–548.
4. *Бардин Б.С., Чекин А.М.* Об орбитальной устойчивости плоских колебаний спутника на круговой орбите // *Космич. исслед.* 2008. Т. 46, Вып. 3. С. 278–288.
5. *Бардин Б.С., Чекина Е.А.* Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Труды МАИ*. 2016. Вып. 89.
6. *Бардин Б.С., Чекина Е.А.* Об устойчивости резонансного вращения спутника на эллиптической орбите // *Нелинейная динамика*. 2016. Т. 12, Вып. 4.
7. *Белецкий В.В.* О либрации спутника // В сб. Искусственные спутники Земли. М.: АН СССР, 1959. Вып. 3. С. 13–31.
8. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
9. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
10. *Белецкий В.В., Лавровский Э.К.* К теории нерезонансного вращения меркурия // *Астрономический журнал*. 1975. Т. 52, Вып. 6. С. 1299.
11. *Белецкий В.В., Шляхтин А.Н.* Резонансные вращения спутника при взаимодействии магнитных и гравитационных полях. Препринт № 46, Институт

- Прикладной математики АН СССР, Москва, 1980. (Russian).
12. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
 13. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
 14. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М: Наука, 1979. 253 с.
 15. *Брюно А.Д.* О колебаниях спутника на эллиптической орбите. Препринт № 53 Ин-та Прикладной математики АН СССР, 1976. С. 20.
 16. *Брюно А.Д.* О некоторых свойствах функций, встречающихся в небесной механике // *Мат. заметки.* 1977. Т. 22, № 1. С. 109–116.
 17. *Брюно А.Д.* Семейства периодических решений уравнения Белецкого // *Космич. исслед.* 2002. Т. 40, № 3. С. 295–316.
 18. *Гребенников Е.Л., Рябов Ю.А.* Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971.
 19. *Гусев А.В., Петрова Н.К., Китиаишвили И.Н.* Захват в резонансное вращение и физическая либрация многослойных планет и лун. Казань: Издательство Казанского гос. университета, 2008.
 20. *Златоустов В.А., Охоцимский Д.Е., Сарычев В.А., Торжеский А.П.* Исследование колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Космич. исслед.* 1964. Т. 2, Вып. 5. С. 657–666.
 21. *Иванов А.П., Сокольский А.Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // *ПММ.* 1980. Т. 44, Вып. 6. С. 963–970.
 22. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // *Собр. соч.* Т.1. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 327 – 401.
 23. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
 24. *Маркеев А.П.* Устойчивость стационарного вращения спутника на эллиптической орбите // *Космич. исслед.* 1965. Т. 3, Вып. 5. С. 674–676.
 25. *Маркеев А.П.* О вращательном движении динамически симметричного спут-

- ника на эллиптической орбите // *Космич. исслед.* 1967. Т. 5, Вып. 4. С. 530–539.
26. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
27. *Маркеев А.П.* О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // *Изв. РАН. МТТ.* 1996. 2. С. 37–54.
28. *Маркеев А.П.* Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *Изв. РАН. МТТ.* 2004. 6. С. 3–12.
29. *Маркеев А.П.* Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана // *ПММ.* 2005. Т. 69, 3. С. 355–371.
30. *Маркеев А.П.* О колебаниях спутника относительно направления, фиксированного в абсолютном пространстве // *ПММ.* 2007. Т. 71, 1. С. 3–11.
31. *Маркеев А.П.* Об устойчивости колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Доклады Академии наук.* 2007. Т. 413, № 3. С. 340–344.
32. *Маркеев А.П.* К задаче об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите // *Изв. РАН. МТТ.* 2008. 2. С. 3–12.
33. *Маркеев А.П.* О вращениях почти симметричного спутника относительно направления, фиксированного в абсолютном пространстве эллиптической орбите при резонансе меркурианского типа // *ПММ.* 2008. Т. 72, 5. С. 707–720.
34. *Маркеев А.П.* К теории резонансного вращения меркурия // *Нелинейная динамика.* 2009. Т. 5, 1. С. 87–98.
35. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
36. *Маркеев А.П.* Об одном способе аналитического представления отображений, сохраняющих площадь // *ПММ.* 2014. Т. 78, 5. С. 611–624.

37. *Маркеев А.П., Бардин Б.С.* Плоские вращательные движения спутника на эллиптической орбите // *Космич. исслед.* 1994. Т. 32, 6. С. 43–49.
38. *Маркеев А.П., Чеховская Т.Н.* Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите // *ПММ.* 1976. Т. 40, Вып. 6. С. 1040 – 1047.
39. *Маркеев А.П., Чеховская Т.Н.* О резонансных периодических решениях гамильтоновых систем, рождающихся из положения равновесия // *ПММ.* 1982. Т. 46, Вып. 1. С. 27 – 33.
40. *Мельников А.В.* О последовательности бифуркаций удвоения периода относительного движения несферического спутника в синхронном резонансе // *Известия ГАО РАН. Астрометрия и небесная механика.* 2000. 214. С. 161–168.
41. *Мельников А.В.* Бифуркационный режим синхронного резонанса в поступательно-вращательном движении несферических естественных спутников планет // *Космические исследования.* 2001. Т. 39, 1. С. 74–84.
42. *Мельников А.В., Шевченко И.И.* Об устойчивости вращения несферических естественных спутников в синхронном резонансе // *Астрономический вестник.* 2000. Т. 34, 5. С. 476–486.
43. *Садов С.Ю.* Анализ функции, определяющей устойчивость вращения почти симметричного спутника. Препринт № 84 Ин-та Прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1994.
44. *Садов С.Ю.* Коэффициенты осредненного уравнения колебаний спутника. Препринт № 27 Ин-та Прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1995. С. 32.
45. *Садов С.Ю.* Нормальная форма уравнения колебаний спутника в сингулярном случае // *Мат. заметки.* 1995. Т. 58, Вып. 5. С. 785–789.
46. *Садов С.Ю.* Высшие приближения метода усреднения для уравнения плоских колебаний спутника. Препринт № 48 Ин-та Прикладной математики

им. М.В. Келдыша РАН, 1996.

47. *Садов С.Ю.* Плоские движения почти симметричного спутника относительно центра масс с рациональными числами вращения. Препринт № 31 Ин-та Прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1997.
48. *Садов С.Ю.* Об устойчивости резонансного вращения спутника относительно центра масс в плоскости орбиты // *Космические исследования.* 2006. Т. 44, Вып. 2. С. 170–181.
49. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Серия: Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ, 1978. Т. 11. 223 с.
50. *Сарычев В.А., Златоустов В.А.* Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. Препринт № 48 Ин-та Прикладной математики АН СССР, 1975.
51. *Торжеский А.П.* Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите // *Космич. исслед.* 1964. Т. 2, Вып. 5. С. 667–678.
52. *Хентов А.А.* Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника земли вокруг своего центра масс // *Космич. исслед.* 1968. Т. 6, 5. С. 793–795.
53. *Хентов А.А.* Синхронизация спутников // *В кн.: Динамика систем. Горький: Издание горьковского госуниверситета.* 1974. С. 51.
54. *Хентов А.А.* Об одном вращательном движении спутника // *Космич. исслед.* 1984. Т. 22, Вып. 1. С. 130–131.
55. *Холостова О.В.* О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // *Изв. РАН. МТТ.* 1996. № 3. С. 167–175.
56. *Холостова О.В.* Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника в одном частном случае // *Космич. исследования.* 2008. Т. 46, 3. С. 270–278.

57. Черноузько Ф.Л. Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // *Журнал вычисл. математики и матем. физики*. 1963. Т. 3, № 3. С. 528–538.
58. Чуркина Т.Е. Об устойчивости одного плоского резонансного движения спутника при наличии пространственных возмущений // *Изв. РАН. МТТ*. 2007. 4. С. 14–25.
59. Чуркина Т.Е. Устойчивость движения спутника на эллиптической орбите в случае цилиндрической прецессии при резонансе лунного типа // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика*. 2009. 2. С. 5–13.
60. Чуркина Т.Е. Об устойчивости вращений спутника при резонансе меркурианского типа // *Изв. РАН. МТТ*. 2014. 2. С. 19–27.
61. Якубович В.Я., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
62. Alessandra Celletti V. S. Some properties of the dumbbell satellite attitude dynamics // *Celest. Mech.* 2008. V. 101, no. 1-2. P. 105–126.
63. Bardin, B.S., Chekina, E.A. On stability of a resonant rotation of a symmetric satellite in an elliptic orbit // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2016.
64. Bardin, B.S., Chekina, E.A., Chekin A.M. On stability of a planar rotation of a satellite in an elliptic orbit // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. V. 20, no. 1. P. 63–73.
65. Birkhoff, G. D. Dynamical systems. With an addendum by Jurgen Moser. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. IX. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1966. P. xii+305.
66. Sadov S. Functions that determine stability of rational rotations of a near symmetric satellite // *Mathematics and Computers in Simulation*. 1998. V. 4, no. 5-6. P. 465–484.
67. Sadov S. Lissajous solutions of the satellite oscillation equation: Stability and

- bifurcations via higher order averaging // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 1999. V. 2, no. 2. P. 96–101.
68. *Siegel, C.L., Moser, J. K.* Lectures on celestial mechanics. New York: Springer-Verlag, 1971.
69. *Siegel C.L.* Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin: Springer, 1956.
70. *Zlatoustov V. A., Markeev A. P.* Stability of planar oscillations of a satellite in an elliptic orbit // *Celestial Mech.* 1973. V. 7, no. 1. P. 31–45.