

## **Краевое напряженное состояние прямоугольной пластины переменной толщины на основе уточненной теории**

**Зоан К.Х.\*, Фирсанов В.В.\*\***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, 125993, Россия*

\* *e-mail: [dqhieu57@gmail.com](mailto:dqhieu57@gmail.com)*

\*\* *e-mail: [k906@mai.ru](mailto:k906@mai.ru)*

***Статья поступила 28.11.2019***

### **Аннотация**

На основе неклассической теории рассматривается краевое напряженное состояние изотропной прямоугольной пластины переменной толщины под действием локальной нагрузки. Построена математическая модель дополнительного напряжённого состояния типа “погранслоя”, возникающего вблизи жёстко закреплённого края пластины. Она даёт возможность более достоверно оценить прочность авиационных конструкций вблизи нерегулярностей типа соединений, подкрепляющих элементов (лонжеронов), крыльев малого удлинения, оперения самолётов и ракет.

При построении математической модели пластины применяются трехмерные уравнения теории упругости. Перемещения аппроксимируются полиномами по нормальной к срединной плоскости координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява. Применяя вариационный принцип Лагранжа к уточненному выражению энергетического функционала,

сформулирована краевая задача по определению дополнительного напряженного состояния в зоне защемления пластины. Решение сформулированной краевой задачи осуществляется методами тригонометрических рядов Фурье, конечных разностей и матричной прогонки.

**Ключевые слова:** прямоугольная пластина, жестко защемленный край, трехмерные уравнения теории упругости, вариационный принцип Лагранжа, разложение в тригонометрические ряды, метод конечных разностей, метод матричной прогонки, напряженно-деформированное состояние «погранслоя», поперечные нормальные напряжения.

### **Введение**

Широкое применение в современной технике тонкостенных элементов конструкций вызывает необходимость разработки надежных и эффективных методов их расчета. В настоящее время инженерные расчеты пластин и оболочек в машиностроении, в том числе в авиационной и ракетно-космической отрасли, базируются на результатах классической теории типа Кирхгофа-Лява, Тимошенко-Рейсснера [1-3].

При построении приближенной теории пластин и оболочек, свободной от гипотез Кирхгофа-Лява, получил распространение метод прямого асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной теории упругости [4-8]. Задача о дополнительном по отношению к классической теории напряженно-деформированном состоянии (НДС) вблизи защемленного края была решена [9-10]

в вариационной постановке методом Власова-Канторовича с помощью специально построенной полиномиальной аппроксимирующей функции. Установлено, что дополнительное самоуравновешенное быстро затухающее при удалении от края напряженное состояние может имеет один и тот же порядок с максимальными напряжениями, соответствующими классическим теории.

Другой подход, развиваемый в работах [11-14], основан на представлении перемещений пластин и оболочек полиномиальными рядами по нормальной координате и задании связи между количеством слагаемых в этих разложениях по тангенциальному и поперечному направлениям. Следует отметить также работы [15-20] в которых рассматриваются другие методы уточненного расчета пластин и оболочек.

В данной работе в рамках подхода, рассматриваемого в [11-14], построена уточненная математическая модель НДС прямоугольной пластины с симметричной относительно срединной плоскости переменной толщиной в продольном направлении. Дано сравнение результатов, полученных по уточненной теории, с данными классической теории.

## **1. Постановка задачи**

Рассматривается прямоугольная пластина из изотропного материала, симметричная относительно срединной плоскости и произвольной геометрии в продольном направлении, отнесенная к безразмерной ортогональной системе координат  $O x y z$  (рис. 1).

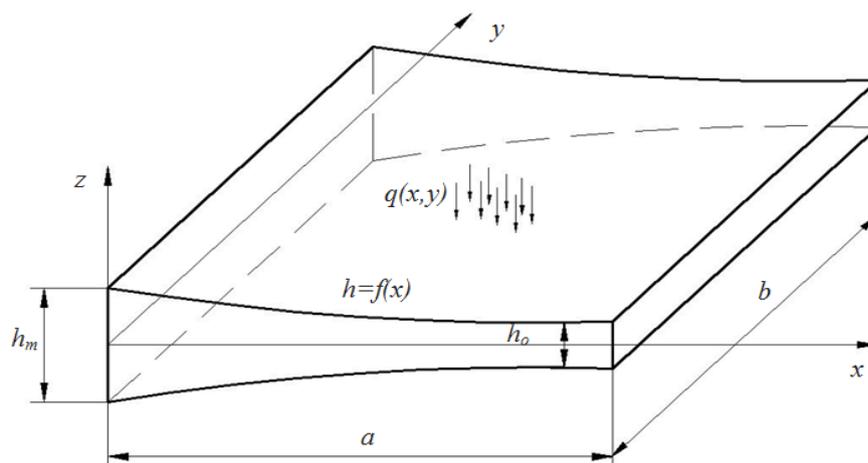


Рис.1. Прямоугольная пластина переменной толщины.

Обозначим через  $a$ ,  $b$  – характерные размеры пластины, а через  $2h$  – её переменную толщину. В соответствии с [14], будем полагать в дальнейшем, что искомые упругие перемещения  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  представляются полиномами по нормальной координате

$$\begin{aligned}
 U_1(x, y, z) &= u_0(x, y) + u_1(x, y)z + u_2(x, y)\frac{z^2}{2!} + u_3(x, y)\frac{z^3}{3!}, \\
 U_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + v_1(x, y)z + v_2(x, y)\frac{z^2}{2!} + v_3(x, y)\frac{z^3}{3!}, \\
 U_3(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_1(x, y)z + w_2(x, y)\frac{z^2}{2!}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют осям  $x$ ,  $y$ , и  $z$ .

Геометрические уравнения трехмерной теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \partial U_1 / \partial x, \quad \varepsilon_y = \partial U_2 / \partial y, \quad \gamma_{xy} = \partial U_1 / \partial y + \partial U_2 / \partial x, \\
 \gamma_{xz} &= \partial U_1 / \partial z + \partial U_3 / \partial x, \quad \gamma_{yz} = \partial U_2 / \partial z + \partial U_3 / \partial y, \quad \varepsilon_z = \partial U_3 / \partial z.
 \end{aligned} \tag{3}$$

С учетом уравнений (3) выражения для деформаций, соответствующих перемещениям (2), переписутся таким образом:

$$\varepsilon_x = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_y = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{z^i}{i!}, \quad \gamma_{xy} = \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_z = w_1 + w_2 z,$$

$$\gamma_{xz} = \left( u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \left( u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) z + \left( u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \frac{z^2}{2!}, \quad (4)$$

$$\gamma_{yz} = \left( v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left( v_2 + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) z + \left( v_3 + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2!}.$$

Физические уравнения трехмерной теории упругости для пластины имеют вид

$$\sigma_x = A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z, \quad \sigma_y = A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z, \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = A_{44}\gamma_{xy}, \quad \sigma_z = A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = A_{55}\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = A_{66}\gamma_{yz},$$

где коэффициенты  $A_{ij}$  ( $i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}$ ) представляют собой упругие постоянные изотропного материала пластины.

## 2. Математическая модель уточненного НДС пластины

Дифференциальные уравнения равновесия и естественные граничные условия для пластины находим на основании вариационного принципа Лагранжа

$$\iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz -$$

$$- \iint q(x, y) \delta \left[ w_0(x, y) + w_1(x, y)h + w_2(x, y) \frac{h^2}{2} \right] dx dy = 0. \quad (6)$$

Задача приведения двумерных уравнений к обыкновенным дифференциальным осуществляется путем разложения компонентов перемещений и внешних нагрузок в тригонометрические ряды по координате  $y$ . Далее внося указанные ряды в разложения (4) и физические уравнения (5), после подстановки найденных выражений в равенство (6), получим систему уравнений равновесия пластины в перемещениях

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=0}^3 \left( K_l^{us0} + K_l^{us11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_l^{us22} \right) U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi K_l^{vs12} \frac{d}{dx} V_{sm}(x) + \\
 & + K_l^{w01} \frac{d}{dx} W_{0m}(x) + S_1 K_l^{w11} \frac{d}{dx} W_{1m}(x) + S_2 K_l^{w21} \frac{d}{dx} W_{2m}(x) = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \\
 & \sum_{s=0}^3 \psi K_i^{us12} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) + \sum_{s=0}^3 \left( K_i^{vs0} + K_i^{vs11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_i^{vs22} \right) V_{sm}(x) - \\
 & + K_i^{w02} \psi W_{0m}(x) + S_1 K_i^{w12} \psi W_{1m}(x) + S_2 K_i^{w22} \psi W_{2m}(x) = 0, \quad i = 5, 6, 7, 8, \\
 & \sum_{s=0}^3 K_j^{us1} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi K_j^{vs2} V_{sm}(x) + \left( K_j^{w00} + K_j^{w011} \frac{d^2}{dx^2} - \right. \\
 & \left. - \psi^2 K_j^{w022} \right) W_{0m}(x) + S_1 \left( K_j^{w10} + K_j^{w111} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_j^{w122} \right) W_{1m}(x) + \\
 & + S_2 \left( K_j^{w20} + K_j^{w211} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_j^{w222} \right) W_{2m}(x) = K_j^{q33} Q_m, \quad j = 9, 10, 11.
 \end{aligned} \tag{7}$$

В уравнениях (7) буквой  $K$  с индексами сверху и внизу обозначены переменные коэффициенты, зависящие от геометрических параметров, упругих постоянных материала пластины. Ввиду громоздкости их выражений здесь они не приводятся.

Из вариационного уравнения (6) следует, что на жестко защемленных краях  $x = 0$  и  $x = a$  граничные условия принимают вид

$$U_{im} = V_{im} = W_{jm} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2. \quad (8)$$

Далее применяя конечно-разностный метод, производные 1-ого и 2-ого порядков уравнений (7) аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности. С учетом граничных условий (8) получим систему линейных алгебраических уравнений. Её матрица имеет одиннадцатый порядок и решается методом матричной прогонки с помощью компьютерной программы.

В результате определяются перемещения в узлах сетки, для аппроксимации которых используются сплайны. Деформации и тангенциальные напряжения пластины определяются из соответствующих геометрических и физических уравнений теории упругости, а поперечные напряжения - непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости

$$\tau_{xz} = -\int_{-h}^z \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz, \quad \tau_{yz} = -\int_{-h}^z \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz, \quad \sigma_z = -\int_{-h}^z \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz.$$

### 3. Пример расчета

Рассматривается изотропная прямоугольная пластина с размерами  $a = b = 1(m)$ ;  $h_m = 0,09(m)$ ;  $h_0 = 0,005(m)$ . Толщина пластины (рис.1) задается линейной функцией:  $h(x) = h_m - tg(\alpha) \cdot x$ ,  $x \in [0...a]$ , где  $tg(\alpha) = (h_m - h_0) / a$ . При этом  $-h \leq z \leq h$  и координата  $z=0$  соответствует срединной плоскости пластины. Локальная нагрузка задается в виде

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_1 \\ Q_0 \sin(\psi y), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x_2 < x \leq a \end{cases}$$

где  $x_1 = a/10$ ;  $x_2 = 9a/10$ ;  $Q_0 = const$ ;  $\psi = \pi/b$ .

Полагаем модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\mu = 0.3$ . Результаты расчета напряжений в пластине представлены в виде графиков на рис 2-5, где аббревиатура «клас» и «уточ» соответствуют результатам расчета по классической и уточненной теориям. На рис. 2 показаны графики компонентов напряженного состояния типа “погранслои”, определяемых по уточненной теории.

Анализ полученных результатов (рис. 2 - 5) показывает, что при удалении от края напряжения, определяемые классической и уточненной теориями, практически совпадают, что подтверждает достоверность полученных результатов. Максимальное рассогласование результатов расчета имеет место (рис. 4) при определении нормальных напряжений  $\sigma_y$  и составляет около 10%.

При исследовании НДС пластины с помощью предлагаемой теории, напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные тангенциальные напряжения  $\sigma_x$  - на 24,5% (рис. 3) и  $\sigma_y$  - на 20% (рис.4).

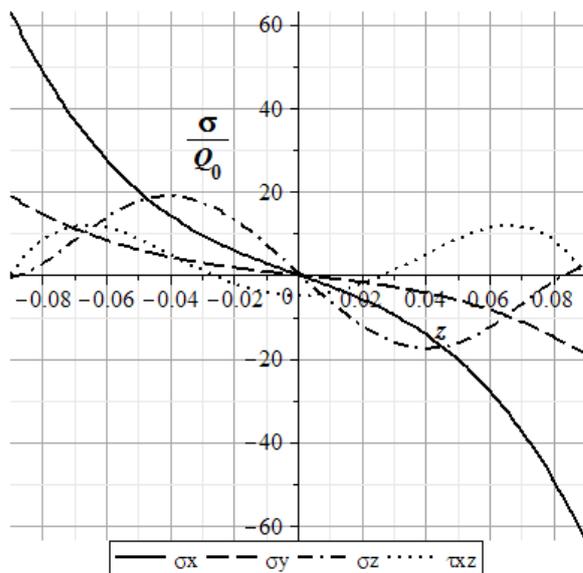


Рис. 2. Изменение напряжений  
“погранслои” по толщине  
на краю  $x = 0$

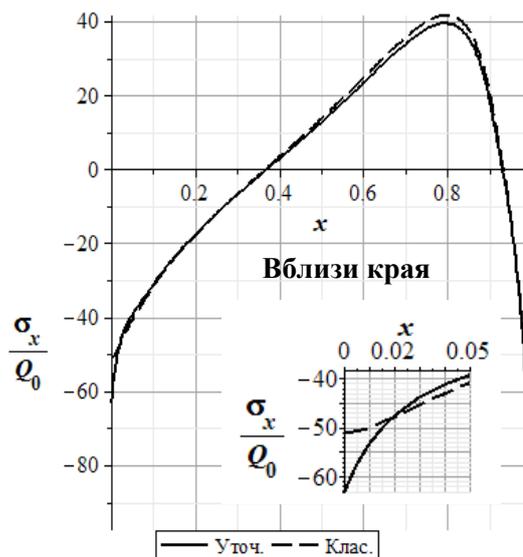


Рис. 3. Изменение  $\sigma_x$  по длине

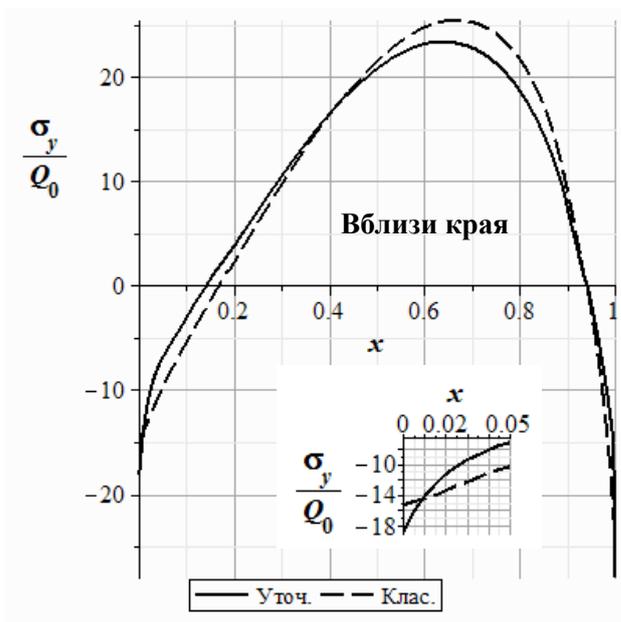


Рис. 4. Изменение  $\sigma_y$  по длине

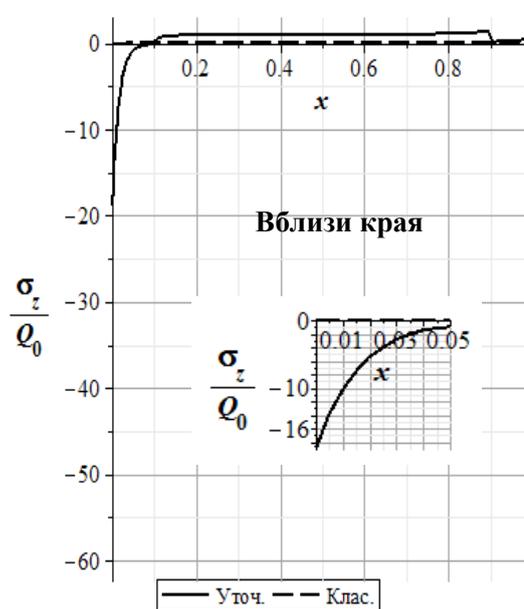


Рис. 5. Изменение  $\sigma_z$  по длине

Следует отметить, что в соответствии с классической теорией поперечные нормальные напряжения  $\sigma_z$  пренебрежимо малы, а по уточненной теории

составляют около 27% от максимального изгибного напряжения  $\sigma_x$  (рис. 3, 5). Кроме того, рис. 2 показывает, что максимальное касательное напряжение  $\tau_{xz}$  составляет около 60% от величины  $\sigma_z$  и 16% от величины  $\sigma_x$ , определяемых по уточненной теории. Таким образом, можно констатировать, что дополнительное НДС типа “погранслои” вносит существенный вклад в общее напряженное состояние пластины.

#### 4. Выводы

На основании уточненной теории построена краевая задача для определения НДС прямоугольной пластины с симметрично изменяющейся переменной толщиной под действием локальной нагрузки. Приведены результаты расчетов напряженного состояния прямоугольной пластины и дано их сравнение по классической и уточненной теориям. Установлено, что в краевой зоне пластины нормальные тангенциальные напряжения существенно уточняются. Дополнительные, по отношению к классической теории, поперечные нормальные напряжения оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения. Этот результат имеет важное значение, так как позволяет на этапах проектирования более достоверно оценить прочность и трещиностойкость элементов конструкций летательных аппаратов, а также других объектов машиностроения.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта РФФИ №17-08-00849\17)*

### **Библиографический список**

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.
2. Власов В.З. Общая теория оболочек. Избранные труды. Т.1. - М.: АН СССР, 1962. – 528 с.
3. Новожилов В.В. Теория упругости. - М.: Судпромгиз, 1958. – 373 с.
4. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. - Л.: Наука, 1997. – 414 с.
5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. - 512 с.
6. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. № 4. С. 668 - 686.
7. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. № 4. С. 593 - 608.
8. Колос А.В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. № 3. С. 582 - 589.
9. Фирсанов В.В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 35 - 43. (Firsanov V.V. Study of

stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory // Journal of machinery, manufacture and reliability, 2016, vol. 5, no. 6, pp. 515 – 522)

10. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Напряженное состояние “пограничный слой” в прямоугольной пластине переменной толщины // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. № 6. С. 443 - 451.

11. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Известия АН. Механика твердого тела. 1990. № 2. С. 158 - 167.

12. Firsanov V.V. The stressed state of the “boundary layer” type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory // Journal of machinery, manufacture and reliability, 2018, vol. 47. no. 3, pp. 241 - 248. DOI: 10.3103/S1052618818030068.

13. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100589>

14. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин переменной толщины при температурном воздействии // Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11. № 8. С. 365 - 373.

15. Зверяев Е.М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 33. 25 с. DOI:10.20948/prepr-2016-33.

16. Зверяев Е.М. Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых

отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=53459>

17. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=55762>

18. Friedrlchs K.O. Kirchoffs boundary conditions and the edge effect for elastic Plates // Proceeding of Symposia in Applied Mathematics, 1950, vol. 3, pp. 258.

19. Reissner E. Effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1945, vol. 12, no. 2, pp. A66 - A77.

20. Ghugal Y.M., Shimpi R.P. A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates // Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2002, URL: <https://doi.org/10.1177/073168402128988481>