

На правах рукописи



**Харченко Кирилл Дмитриевич**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СВОЙСТВ СРЕД  
С ПОЛЯМИ ДЕФЕКТОВ**

01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

**Научный руководитель:** доктор технических наук, профессор  
**Лурье Сергей Альбертович**

**Официальные оппоненты:** **Шоркин Владимир Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел.

**Павлов Игорь Сергеевич**, доктор физико-математических наук, доцент, заместитель директора по научной работе Института проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» г. Нижний Новгород.

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, г. Москва.

Защита диссертации состоится «27» декабря 2017 г. в 13<sup>00</sup> на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д.4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте: [https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=85204](https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=85204)

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Федотенков Г.В.

## **Общая характеристика работы**

### **Актуальность темы исследования.**

Наличие микро и нановключений, а также особенности микроструктуры, связанные с малым размером включений и большой плотностью границ раздела фаз, требует, как правило, учета масштабных эффектов и развития моделей деформирования, с помощью которых устанавливается связь физических свойств материала с характерными изученными размерами его микроструктуры. Этим объясняется интенсивное развитие исследований и публикаций, посвященных усложненным неклассическим моделям сред с полями дефектов, градиентным моделям сред. Такие модели являются весьма эффективными для определения эффективных свойств неоднородных материалов с учетом их внутренней структуры и масштабных эффектов. Однако при применении усложненных неклассических моделей сред с полями дефектов и градиентных моделей возникает ряд проблем, связанных с определением напряженного состояния, оценкой прочности, разрушения, накопления повреждений, в связи с тем, что для указанных моделей такие вопросы к настоящему времени не изучены. Поэтому решение проблемы определения соответствия между обобщенными средами (среды с полями дефектов, градиентные среды) и моделями классических изотропных сред, но с переменными свойствами, является весьма актуальной, так как позволяет в принципе распространить методы, известные для классических сред на неклассические обобщенные среды. Иначе говоря, определение эквивалентности между средами с полями дефектов и эквивалентными функционально-градиентными средами, с переменными по координатам свойствами представляется актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела (МДТТ).

### **Степень разработки темы исследования.**

С одной стороны, в настоящее время имеются достаточно проработанные модели сред с полями дефектов, градиентные модели сред, позволяющие адекватно

моделировать неоднородные структурированные материалы что подтверждается большим числом публикаций. С другой стороны, существует огромная база знаний по подходам к решению задач МДДТ, разработанная для классических сред. Связь между ними, позволяющая воспользоваться преимуществами обоих способов только начинает развиваться.

### **Цели и задачи работы.**

1. Установить энергетическую эквивалентность между обобщенными средами с полями дефектов и градиентными средами, а также изотропными классическими средами, но с переменными по координатам характеристиками.
2. Получить аналитические соотношения, позволяющие трактовать среды с полями дефектов и градиентные среды, как эквивалентные неоднородные изотропные материалы с переменными по координатам свойствами.
3. Получить аналитические соотношения, позволяющие по решению, найденному для пористой среды определить эффективные характеристики эквивалентной изотропной среды с функционально-градиентными (ФГ) свойствами.
4. Исследование функционально-градиентных свойств неоднородных материалов, реализующихся по границам различных фаз в слоистой структуре (неоднородных стержнях) и оценка эффектов усиления или ослабления, связанных с градиентными эффектами; исследование одно- и двухосного растяжения пористого стержня, а также функционально-градиентных свойств эквивалентной изотропной среды; исследование дисперсионных соотношений колебания пористого стержня; исследование функционально-градиентных свойств в неоднородных структурах типа композиционных материалов с наноструктурированными волокнами, в которых межфазный слой моделируется как градиентный материал.

### **Научная новизна.**

1. Доказано, что для сред с локализованными полями дефектов, свойства которых в рамках моделей типа Миндлина определяются эволюцией полей дефектов, справедлива альтернативная трактовка, позволяющая описывать материал, поврежденный дефектами, как эквивалентный функционально-градиентный материал с переменными по координатам свойствами, моделируемый в рамках классической теории упругости.
2. Установлено, что тензор эффективных модулей упругости изотропной среды, моделируемой с использованием энергетической эквивалентности, определяется явно по решению краевой задачи для обобщенной среды с полями дефектов через тензор поврежденности второго ранга, т.е. фактически предложена математическая модель поврежденности с тензорным параметром.
3. Установлены явные соотношения, позволяющие по решениям, найденным для сред с полями дефектов и градиентных сред определить эффективные свойства функционально-градиентной изотропной среды.
4. В ходе работы получены аналитические соотношения, позволяющие по накопленной поврежденности за счет дефектов, определить эффективные характеристики эквивалентного изотропного материала.

### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Теоретическая значимость работы состоит в установлении энергетической эквивалентности между обобщенными средами с полями дефектов и градиентными средами, а также изотропными классическими средами, но с переменными по координатам характеристиками. Теоретическую значимость имеют соотношения, позволяющие прогнозировать свойства сред с полями дефектов и градиентных сред как изотропных сред с функционально-градиентными свойствами. В результате, к таким средам могут быть применимы методы оценки прочности, поврежденности и разрушения хорошо апробированные в рамках теории упругости и механики разрушения.

Практическая значимость - связана с возможностью распространения методов механики деформируемого твердого тела (оценка прочности, поврежденности, разрушения) на класс проблем где для адекватного моделирования необходимо привлечение обобщенных моделей сред. Продемонстрировано, что пористые среды проявляют необычные свойства с точки зрения изотропных классических сред, которые могут быть описаны опять же с использованием моделей изотропных сред, но с функционально-градиентными свойствами.

### **Методология и методы исследования.**

1. Модели градиентной теории упругости.
2. Применение вариационных методов и уравнений математической физики
3. Применение тензорной алгебры.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Доказательство энергетической эквивалентности между моделями сред с полями дефектов и градиентными моделями сред, а также изотропными средами с функционально-градиентными свойствами.
2. Алгоритм построения соотношений, позволяющих трактовать среды с полями дефектов, как эквивалентные неоднородные изотропные материалы с переменными по координатам свойствами.
3. Аналитические соотношения, позволяющие по решению, полученному для пористой среды определить эффективные характеристики эквивалентной изотропной среды с функционально-градиентными свойствами.
4. Установленный эффект зависимости характеристик эффективной среды (дефектность которой определяется полями пор) от вида нагружения.
5. Эффект «запирания» определенного диапазона длин волн для пористых сред (следовательно, и для класса искусственных ауксетиков, которые моделируются пористыми средами).

6. Качественные оценки эффектов усиления (или деградации свойств) композиционных материалов.

### **Степень достоверности и апробация результатов работы.**

Получение результатов, основанных на точных аналитических решениях, непротиворечащих физическому смыслу и находящимся в соответствии с результатами, полученными другими авторами, а также использование хорошо апробированных строгих математических подходов, методов механики сплошных сред, прикладной теории упругости, вариационных методов и методов уравнений математической физики подтверждает достоверность данной исследовательской работы.

Основные результаты диссертационной работы апробированы на: 2-й Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем». Москва, 17 - 19 декабря 2013г.; Международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций». Москва, 10 - 13 ноября 2014 г.; Второй международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций». Москва. 18 - 20 октября 2016г.

**Публикации.** По результатам диссертационной работы опубликовано 8 работ, 3 из которых в журналах, рекомендуемых ВАК РФ.

**Структура и объем диссертационной работы.** Диссертационная работа изложена на 142 страницах. Состоит из введения, четырех глав, заключения, списка используемой литературы и семи приложений. Иллюстрирована 25 рисунками и содержит 1 таблицу.

### **Основное содержание работы**

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, приводятся цели и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимости, методы и методология исследования, положения,

выносимые на защиту. А также, перечень основных выступлений, на которых были апробированы результаты работы.

Первая глава посвящена обзору моделирования неоднородных структур. Рассматривается развитие градиентной теории упругости, ее применение к прикладным задачам различных областей механики деформируемых тел и смежным областям в рамках работ Айфантиса К.Е., Альтенбаха Х., Белова П.А., Гао К., Лурье С.А., Миндлина Р.Д., Тупина Р.А., Флэка Н.А., Хадченсона Д.В., Шоркина В.С., Янга Ф. и влияния масштабных эффектов на определение упругих свойств композиционных материалов. Особое место уделено рассмотрению кинематики дефектов и в частности наличию пор, как одного из видов дефектов, которые рассматривались такими учеными как Делл-Исола Ф., Кингери В.Д., Кнудсен Ф.П., Кобл Р.Л., Ковин С.С., Марков К.З., Нинзиато Д.В., Сиарлетта М., Спригс Р.М. Рассмотрено влияние вискеризации на свойства межслоевой адгезии, исследуемое в работах Гузя А.Н., Гузя И.А., Лагудаса Д., Рушитского Я.Я. и др.

Во второй главе приведены основные градиентные модели и неклассические модели сред с полями дефектов. Существующие теории условно разделены на две группы. В первую входит теория Тупина, Аэро-Кувшинского и градиентных деформаций. Во вторую группу входят теории Миндлина, Коссера и сред с сохраняющимися дислокациями. Каждая группа разобрана с точки зрения кинематики модели. Получено обобщение известных градиентных теорий которое содержит вышеописанные теории как свои частные случаи:

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijkml}^{11} D_{ij,k}^1 D_{mn,l}^1 + 2C_{ijkml}^{12} D_{ij,k}^1 D_{mn,l}^2 + C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2] / 2$$

где  $U_V$  - потенциальная энергия,  $D_{ij}^1, D_{ij}^2$  - стесненная и свободная дисторсия,  $C_{ijmn}^{pq}$  - тензоры модулей упругости,  $C_{ijkml}^{pq}$  - тензоры градиентных модулей.

Рассмотрены условия симметрии в градиентных теориях упругости. В градиентной части плотности потенциальной энергии деформации  $C_{ijklmn} R_{i,jk} R_{l,mn} / 2$ , вторые производные от компонент вектора перемещений  $R_{i,jk}$  являются



компонентами тензора второго ранга, и удовлетворяют условию симметрии в отношении перестановки индексов в последней паре:

$$R_{i,jk} = R_{i,kj} \quad (1)$$

Условие симметрии (1), является необходимым и достаточным условием непрерывности первых производных вектора перемещений. Это качество непрерывных полей перемещений отмечается специально, как характерное свойство градиентных теорий упругости, поскольку для таких теорий градиентная часть потенциальной энергии является квадратичной формой кривизн перемещений.

С учетом условия симметрии по порядку дифференцирования, предложена прикладная двухпараметрическая модель для полностью симметричной градиентной теории:

$$C_{ijklmn} = k_1 \left( \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + \right. \\ \left. + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} \right) + \\ + k_8 \left( \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \right).$$

где  $\delta_{ij}$  - тензор Кронекера,  $k_1, k_8$  - физические постоянные материала.

Определяющие соотношения для такой модели:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ m_{ijk} = k_1 \left[ (2\varepsilon_{il,l} + \theta_{,i}) \delta_{jk} + (2\varepsilon_{jl,l} + \theta_{,j}) \delta_{ki} + (2\varepsilon_{kl,l} + \theta_{,k}) \delta_{ij} \right] + 2k_8 (\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j})$$

где  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжений,  $m_{ijk}$  - тензор моментных напряжений,  $\lambda, \mu$  - коэффициенты Ламе,  $\theta = R_{k,k}$  - совместное изменение объема (дивергенция перемещений),  $\varepsilon_{ij} = (R_{i,j} + R_{j,i})/2$  - тензор совместных деформаций.

Раздел 2.5 посвящен теоремам об эквивалентности сред. В нем предложена трактовка сред с полями дефектов, описываемых с помощью градиентной упругости для однородных изотропных материалов в окрестности особых точек как некоторых межфазных слоев с переменными свойствами. В общем случае свойства таких функциональных межфазных слоев с переменными свойствами зависят от координат, а также от условий нагружения и краевых условий. В первой

теореме доказывается что лагранжиан общей теории сред с полями сохраняющихся дислокаций можно представить в виде лагранжиана неоднородной среды Миндлина-Тупина. Для этого в качестве промежуточных переменных вместо компонентов тензора свободной дисторсии  $D_{ij}^2$  вводятся компоненты тензора относительной поврежденности  $t_{ij}$ :  $D_{ij}^2 = t_{ip} R_{p,j}$ ,  $D_{ijk}^2 = t_{ip} R_{p,jk} + t_{ip,k} R_{p,j}$ , определяющий переменность по координатам тензорных полей упругих  $\tilde{C}_{ijmn}, \tilde{C}_{ijmnl}, \tilde{C}_{ijkmnl}$  и адгезионных  $\tilde{A}_{ijmn}, \tilde{A}_{ijmnl}, \tilde{A}_{ijkmnl}$  свойств:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{ijmn} &= C_{ijmn}^{11} + 2C_{ijbn}^{12} t_{bm} + C_{ajbn}^{22} t_{ai} t_{bm} + C_{ajkbnl}^{22} t_{ai,k} t_{bm,l}, \quad \tilde{C}_{ijmnl} = (C_{mnlbjk}^{12} + C_{anlbjk}^{22} t_{am}) t_{bi,k}, \\ \tilde{C}_{ijkmnl} &= C_{ijkmnl}^{11} + 2C_{ijkbnl}^{12} t_{bm} + C_{ajkbnl}^{22} t_{ai} t_{bm} \\ \tilde{A}_{ijmn} &= A_{ijmn}^{11} + 2A_{ijbn}^{12} t_{bm} + A_{ajbn}^{22} t_{ai} t_{bm} + (2A_{ijbnl}^{12} + 2A_{ajbnl}^{22} t_{ai} + A_{ajkbnl}^{22} t_{ai,k}) t_{bm,l} \\ \tilde{A}_{ijmnl} &= A_{ijmnl}^{11} + A_{ijbnl}^{12} t_{bm} + A_{ajmnl}^{21} t_{ai} + A_{ajbnl}^{22} t_{ai} t_{bm} + (A_{mnlajk}^{12} + A_{ajkbnl}^{22} t_{bm}) t_{ai,k} \\ \tilde{A}_{ijkmnl} &= (A_{ijkmnl}^{11} + 2A_{ijkbnl}^{12} t_{bm} + A_{ajkbnl}^{22} t_{ai} t_{bm})\end{aligned}$$

здесь  $A_{ijmn}^{pq}, A_{ijbnl}^{pq}, A_{mnlajk}^{pq}$ ,  $p, q = 1, 2$  тензоры модулей упругости адгезионных взаимодействий в континуальной модели адгезии общего вида для сред с полями дефектов; значения  $p, q$  отвечают квадратичной форме (и билинейным слагаемым) свободных и стесненных дисторсий на поверхности тела, для градиентной теории упругости (свободные дисторсии равны нулю) потенциальная энергия поверхностных взаимодействий имеет вид:

$$(1/2) \oint\oint (A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + 2A_{ijmnl} R_{i,j} R_{m,nl} + A_{ijkmnl} R_{i,jk} R_{m,nl}) dF.$$

На основе введенных соотношений лагранжиан общей теории приводится к лагранжиану неоднородной градиентной среды Тупина:

$$\begin{aligned}L &= A - (1/2) \iiint \{ \tilde{C}_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + 2\tilde{C}_{ijmnl} R_{i,j} R_{m,nl} + \tilde{C}_{ijkmnl} R_{i,jk} R_{m,nl} \} dV - \\ &\quad - (1/2) \oint\oint \{ \tilde{A}_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + 2\tilde{A}_{ijmnl} R_{i,j} R_{m,nl} + \tilde{A}_{ijkmnl} R_{i,jk} R_{m,nl} \} dF\end{aligned}\quad (2)$$

Формулировка общей теории сред с полями сохраняющихся дислокаций в форме (2) не содержит в явном виде тензор свободных дисторсий  $D_{ij}^2$  или тензор относительной поврежденности  $t_{ij}$ . Эти переменные оказались «спрятанными» в тензорные поля упругих и адгезионных свойств.

Во второй теореме доказывається, что лагранжиан общей теории сред с полями дислокаций можно представить в форме лагранжиана неоднородной изотропной среды, т.е. имеет место эквивалентность вариационных постановок рассматриваемых моделей сред. При доказательстве, предполагается, что имеют место расширенные соотношения Коши, определяющие тензор дисторсии  $d_{ij}$  по вектору непрерывных перемещений  $d_{ij} = \partial R_i / \partial x_j$ ,  $d_{ij} = \gamma_{ij} + (1/3)\theta\delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk}$ ,  $\gamma_{ij}$  - компоненты тензора девиатора деформаций,  $\theta$  - объемная деформация,  $\omega_k$  - псевдовектор поворотов или упругих вращений,  $\mathcal{E}_{ijk}$  - компоненты тензора Леви-Чивиты,  $\delta_{ij}$  - тензор Кронекера. Для тензора дисторсий выполняются однородные условия Папковича  $d_{ij} \mathcal{E}_{ijk} = 0$ . На основе функционала Лагранжа для дефектных сред и соотношений Грина, потенциальная энергия приобретает классический вид:

$$L = A - (1/2) \iiint \sigma_{ij} R_{i,j} dV$$

где  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжений. Далее определяется эффективный модуль объемной деформации:

$$\tilde{K} = \sigma_{kk} / R_{k,k} = (K^{11} R_{m,m} + K^{12} D_{mm}) / R_{k,k} = K^{11} + K^{12} D_{mm} / R_{k,k} \quad (3)$$

и модуль сдвига эквивалентной классической среды:

$$\tilde{G} = \mu^{11} + \mu^{12} \sqrt{(\beta_{ab} \beta_{ab}) / (\gamma_{ab} \gamma_{ab})} \quad (4)$$

где  $K^{11} = (3\lambda^{11} + 2\mu^{11})/3$ ,  $K^{12} = (3\lambda^{12} + 2\mu^{12})/3$ ;  $\gamma_{ab} = (R_{a,b} / 2 + R_{b,a} / 2 - R_{p,p} \delta_{ab} / 3)$  - девиатор стесненных деформаций,  $\beta_{ab} = (D_{ab} / 2 + D_{ba} / 2 - D_{rr} \delta_{ab} / 3)$  - девиатор свободных деформаций.

Таким образом, однозначно определены переменные по координатам модули сдвига (4) и объемного сжатия (3) эквивалентной неоднородной (функциональной) классической среды. Переменность их по координатам определяется полями перемещений  $R_i$  и несовместных дисторсий  $D_{ij}^2$ .

Далее, в частности, доказано, что лагранжиан теории сред Миндлина - Тупина можно представить в виде лагранжиана для изотропной среды теории упругости. Для этого введен частный случай модели квазиконтинуума Миндлина-

Тупина, предполагая, что тензор шестого ранга выражается через тензор четвертого ранга  $C_{ijkl}^{11} = C_{rkij}^{11} C_{rlmn}^{11} / C$ . На основании решения краевой задачи и найденных полных  $R_m$  и классических  $U_m$  перемещений определяется ортотропный тензор переменных модулей классической среды  $\tilde{C}_{ijmn} U_{m,n} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n}$ . В общем случае эти девять уравнений позволяют определить девять компонент тензора переменных модулей  $\tilde{C}_{ijmn}$ . Следовательно, лагранжиан теории сред Тупина, представлен как потенциальная энергия и лагранжиан классической неоднородной, в общем случае, ортотропной среды:

$$L = A - (1/2) \iiint \tilde{C}_{ijmn} U_{i,j} U_{m,n} dV$$

В третьей главе развивается модель пористых сред с микроструктурой, описывающая эффекты деградации свойств материала из-за рассеянных повреждений. В ходе построения решения устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. В общем случае предложенный метод позволяет определить зависимость свойств от вида напряженного состояния, т.е. учесть эффекты накопления повреждений.

Основываясь на доказательстве теоремы об эквивалентности модели среды с полями дефектов и классической моделью функционально-градиентного материала, рассмотренной во второй главе и используя приведенную там процедуру в диссертации рассмотрено получение соотношений, позволяющих по решению, найденному для пористой среды определить эффективные характеристики эквивалентной изотропной среды с функционально-градиентными свойствами. Основываясь на определениях пористой среды  $D_{ij}^1 = R_{i,j}$ ;  $D_{ij}^2 = \theta \delta_{ij} / 3$ ;  $\theta \neq R_{k,k}$ , где  $D_{ij}^1, D_{ij}^2$  - стесненная и свободная дисторсия, записан лагранжиан дефектной среды в рамках модели Миндлина:

$$L = A - (1/2) \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{n,m} + 2K^{12} \delta_{ij} R_{i,j} \theta + K^{22} \theta \theta + K^{22} l_\theta^2 \delta_{kl} \theta_{,k} \theta_{,l}] dV$$

где  $C_{ijmn}^{pq}$  - тензоры модулей упругости,  $C_{ijkml}^{pq}$  - тензоры градиентных модулей,  $\theta$  - объемная деформация,  $K^{22} = (3\lambda^{22} + 2\mu^{22}) / 3$ ,  $l_\theta$  - масштабный параметр.

На основании вариационного уравнения, которое определяет краевую задачу для сред с полями дефектов – пор, получены уравнения равновесия, которые приводятся к распадающейся системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(2\mu^{11} + \lambda^{11} - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}}\right)R_{k,ki} + \mu^{11}(\Delta R_i - R_{k,ki}) - (2\mu^{11} + \lambda^{11})l_\theta^2 \Delta R_{k,ki} + P_i^V - l_\theta^2 P_{k,k}^V = 0 \\ \theta = -\frac{K^{12}}{K^{22}}R_{k,k} - \frac{(2\mu^{11} + \lambda^{11})}{K^{12}}l_\theta^2 \Delta R_{k,k} - \frac{l_\theta^2}{K^{12}}P_{k,k}^V \end{cases}$$

где  $P_i^V$  - внешние объемные силы,  $\Delta$  - оператор Лапласа.

Получены выражения для эффективных модулей эквивалентной классической изотропной среды, рассматриваемой как функционально-градиентный изотропный материал, в котором свойства определяются через решение, найденное для пористой среды.

Приводя плотность потенциальной энергии к форме, записанной через классические напряжения, определен тензор податливостей  $E_{ijpq}^{-11}$ :

$$E_{ijpq}^{-11} = (1/\tilde{K})\delta_{ij}\delta_{pq} + (1/\tilde{G})(\delta_{ip}\delta_{jq}/2 + \delta_{iq}\delta_{jp}/2 - \delta_{ij}\delta_{pq}/3)$$

Модуль объемного сжатия является разностью постоянного по координатам поврежденного порами модуля объемного сжатия минус переменная по координатам градиентная поправка:

$$\tilde{K} = (K^{11} - K^{12}K^{12}/K^{22}) - (2\mu^{11} + \lambda^{11})l_\theta^2 \Delta R_{k,k} / R_{k,k}$$

Переменный модуль сдвига остается постоянным и не поврежденным:

$$\tilde{G} = \sqrt{\frac{(\sigma_{p,q}/2 + \sigma_{q,p}/2 - \sigma_{i,i}\delta_{pq}/3)(\sigma_{p,q}/2 + \sigma_{q,p}/2 - \sigma_{j,j}\delta_{pq}/3)}{(R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{m,m}\delta_{ab}/3)(R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{n,n}\delta_{ab}/3)}} = \mu^{11}$$

Раздел 3.5 посвящен исследованию дисперсионных соотношений колебаний пористого стержня. В выражении для полной энергии появится дополнительное слагаемое, связанное с кинетической энергией, которое является суммой классической и градиентной частей  $K = K_{classic} + K_{grad}$ , зависящих от скоростей деформации:

$$K_{classic} = \frac{1}{2} \int_V \int_{t_2}^{t_1} \rho \dot{R}_i \dot{R}_i dt dV, \quad K_{grad} = \frac{1}{2} \int_V \int_{t_2}^{t_1} \rho_{ijmn} \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n} dt dV, \quad \text{где } \rho = \rho_0 - \text{плотность}$$

в классическом понимании,  $t$  - время,  $\rho_{ijmn} = \rho_\theta \delta_{ij} \delta_{mn} + (\rho_\gamma + \rho_\omega) \delta_{im} \delta_{jn} + (\rho_\gamma - \rho_\omega) \delta_{in} \delta_{jm}$ ,  $\rho_\theta$ ,  $\rho_\gamma$ ,  $\rho_\omega$  - градиентная инертность (в данном случае  $\rho_\omega = 0$ ). Уравнения движения в данном случае:

$$\begin{aligned} -Ek^2 R_0 + \rho_0 \omega^2 R_0 - K^{12} ik \theta_0 - \rho_2 \omega^2 \theta_0 &= 0 \\ K^{12} ik R_0 - \rho_2 \omega^2 R_0 - K^{22} l_\theta^2 k^2 \theta_0 - K^{22} \theta_0 + \rho_1 \omega^2 \theta_0 &= 0 \end{aligned}$$

здесь  $R = R_0 e^{i(kx - \omega t)}$ ,  $\theta = \theta_0 e^{i(kx - \omega t)}$ ;  $R_0$  и  $\theta_0$  - амплитуды,  $e$  - основание натурального логарифма,  $i$  - мнимая единица,  $k$  - волновое число (величина, обратная длине волны),  $\omega$  - частота,  $x$  - продольная координата,  $\rho_1$  - мера инертности свободного изменения объема,  $\rho_2$  - мера инертности производных свободного изменения объема. Определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} -Ek^2 + \rho_0 \omega^2 & -K^{12} ik - \rho_2 \omega^2 \\ K^{12} ik - \rho_2 \omega^2 & -K^{22} l_\theta^2 k^2 - K^{22} + \rho_1 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Рассмотрено несколько частных случаев. Первый  $l_\theta = 0$ ;  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ , частота:

$$\omega^2 = \frac{Ek^2}{\rho_0} \left( 1 - \frac{f}{1-f} \frac{K^{12}}{E} \right), \text{ где } K^{12} / K^{22} = f / (1-f), f - \text{объемное содержание пор. График}$$

для распределения частоты приведен на рисунке 1 а). Первый случай характеризуется отсутствием дисперсии. Существуют такие значения коэффициент Пуассона и объемного содержания пор, при которых  $(fK^{12} / (1-f) 2G(1+\nu)) > 1$ , в таком случае пористая среда становится «непроницаемой» для распространения в ней любых длин волн. Данный эффект представляется не физическим, поэтому необходимо учитывать эволюцию пористости. Второй случай  $l_\theta \neq 0$ , выражение для частоты:

$$\omega^2 = \frac{Ek^2}{\rho_0} \left( 1 - \frac{f}{1-f} \frac{K^{12}}{E(l_\theta^2 k^2 + 1)} \right) \quad (5)$$

На рисунке 1 б) показано распределение правой части этого выражения. Для расчета принято  $E = 71$  ГПа,  $\rho_0 = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $K^{12} = 65,73$  ГПа,  $l_\theta = 0.4$ . Из рисунка видно, что может существовать такой длинноволновой интервал, для которого пористое тело «непрозрачно».

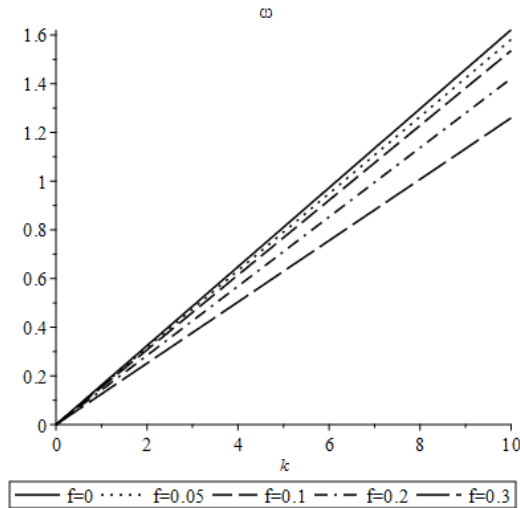


Рисунок 1 а). Распределение частоты (Гц) в зависимости от волнового числа

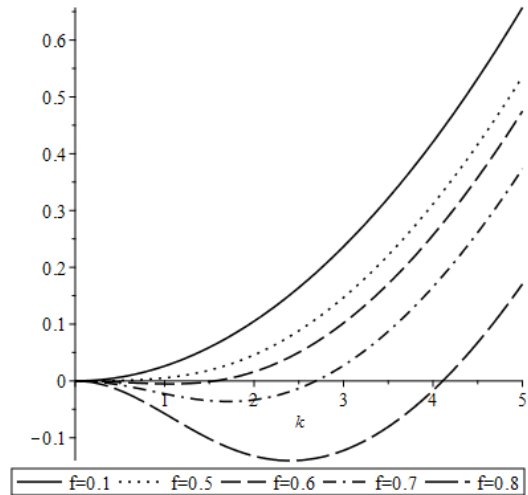


Рисунок 1 б). Распределение правой части выражения (5) (Гц<sup>2</sup>) в зависимости от волнового числа

В 4 главе приведены, решения рассмотренных в диссертации примеров. В разделе 4.1 проводится исследование растяжения составной двухфазной слоистой структуры или сдвиг такой структуры. В случае сдвига под модулями Юнга понимаются модули сдвига. Слоистая структура состоит из  $N$  фрагментов матрицы и армирующего материала с модулями Юнга  $E_{M,D}$ , «моментными» модулями  $C_{M,D}$  и длинами  $\rho_{M,D}$ . Определено выражение для модуля Юнга, которое имеет явное выражение:

$$\tilde{E}(x) = \begin{cases} E_D \frac{1}{1 + x_f \frac{a_D \operatorname{ch}(a_D x)}{\operatorname{sh}(a_D \rho_D / 2)}} & \text{внутри включения} \\ E_D E_M \frac{\frac{a_D}{E_D \operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E_M \operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)}}{\frac{a_D}{\operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{\operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)}} & \text{на границе контакта} \\ E_M \frac{1}{1 - x_f \frac{a_M \operatorname{ch}(a_M (x - (\rho_D / 2 + \rho_M / 2)))}{\operatorname{sh}(a_M \rho_M / 2)}} & \text{внутри матрицы} \end{cases}$$

где  $x_f = \frac{(1/E_M) - (1/E_D)}{\frac{a_D}{E_D \operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E_M \operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)}}$ ;  $a_M = \sqrt{C_M / E_M}$ ,  $a_D = \sqrt{C_D / E_D}$  - масштабные

параметры.

Модуль Юнга классической неоднородной среды является непрерывной функцией координаты  $x$ , и асимптотически приближается к значениям модулей матрицы  $E_M$  и включения  $E_D$  при удалении от границы контакта  $\rho_D / 2$ .

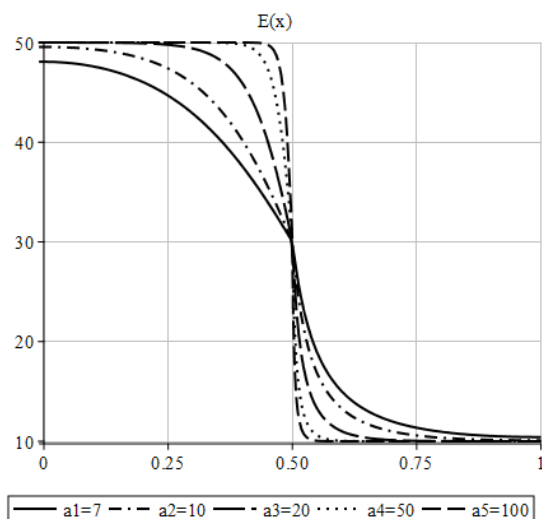


Рисунок 2. Модуль Юнга (ГПа) на границе контакта для случая  $a_M = a_D$ ;

На рисунке 2 приведен график для модуля Юнга, когда  $\rho_M = \rho_D = 1$ ,  $E_M = 10$  ГПа,  $E_D = 50$  ГПа, значения масштабных параметров  $a_M = a_D = 7; 10; 20; 50; 100$ . Штриховая линия на рисунке 2 соответствует максимальному значению масштабного параметра и наиболее близка к решению в классической постановке. В случае уменьшения длины фрагмента армирующего материала до  $\rho_D = 0.5$ , а затем до  $\rho_D = 0.3$

получим распределение модуля Юнга, представленного на рисунке 3 а) и 3 б) соответственно.

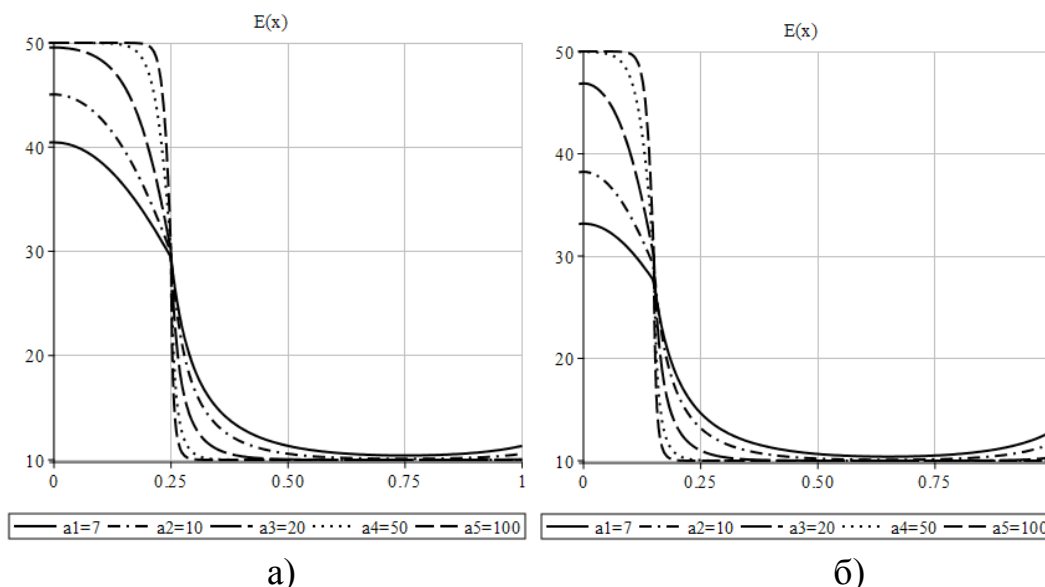


Рисунок 3. Модуль Юнга (ГПа) на границе контакта: а) для случая  $\rho_D = 0.5$ ; б) для случая  $\rho_D = 0.3$ ;

Так как жесткая фаза по определению имеет модуль, превышающий модуль мягкой фазы, часть межфазного слоя, лежащего в жесткой фазе, пренебрежимо мала по сравнению с той частью межфазного слоя, которая лежит в мягкой фазе.



Отсюда можно сделать вывод: чем «жестче» жесткая фаза, тем меньшая доля межфазного слоя находится в жесткой фазе и тем большая доля – в мягкой фазе». Следовательно, можно говорить, что жесткая фаза «выталкивает» межфазный слой в мягкую фазу.

В разделе 4.2 рассматривается одно- и двухосное растяжение пористого стержня. Задача решается относительно перемещений  $\Lambda_\theta^2 R'''' - R'' = 0$ , которые являются нечетной функцией в отношении продольной координаты, здесь  $\Lambda_\theta^2 = l_\theta^2 EK^{22} / (EK^{22} - K^{12}K^{12})$  - масштабный параметр. Получено выражение для пористости и перемещений, а также объемного модуля:

$$\tilde{K} = K_{11} - K_{11} \frac{\alpha f}{1-f} - (\lambda^{11} + 2\mu^{11}) \Lambda_\theta^2 \frac{\Delta R_{k,k}}{R_{k,k}} \quad (6)$$

где  $\alpha = K^{12} / K^{11}$  - мера поврежденности. Деградация свойств определяется “алгебраической поврежденностью” - второе слагаемое в (6) и эволюцией пор - третье слагаемое в том же выражении. В случае если  $\Delta R_{k,k} / R_{k,k} \approx 0$  и  $\alpha = 0$  имеем идеальную неповрежденную среду. График распределение поврежденности по длине полосы, представлен на рисунке 4. Под поврежденностью здесь понимается выражение для  $\theta$ , т.е. свободное изменение объема. Для примера принято  $E = 71$  ГПа,  $l = 1$ ,  $\Lambda_\theta = 0.2$ ,  $\mu^{11} = 26.4$  ГПа,  $\lambda^{11} = 46.9$  ГПа. На рисунке 5 показано распределения безразмерного модуля объемного сжатия ( $\tilde{K} / K^{11}$ ) в зависимости от масштабного параметра  $\Lambda_\theta$  в четырех сечениях, в расчете принято  $\alpha = 0.5$ ,  $f = 0.15$ .

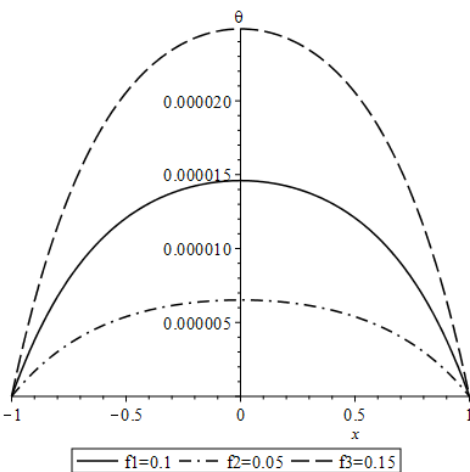


Рисунок 4. Распределение поврежденности

В случае двухосного напряженного состояния также получены выражения для пористости и перемещений, а также объемного модуля. На рисунке 6 приведен график безразмерного модуля объемного сжатия  $\tilde{K} / K^{11}$  при двухосном растяжении полосы в сечении  $x = 0$ , в зависимости от коэффициента пропорциональности нагрузок

$\chi = P_x/P_y$ . График построен в четырех сечениях по поперечной координате. Для примера принято:  $l=1$ ,  $\Lambda_\theta = 0.2$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\mu^{11} = 26.4$  ГПа,  $\lambda^{11} = 46.9$  ГПа,  $f = 0.1$ .

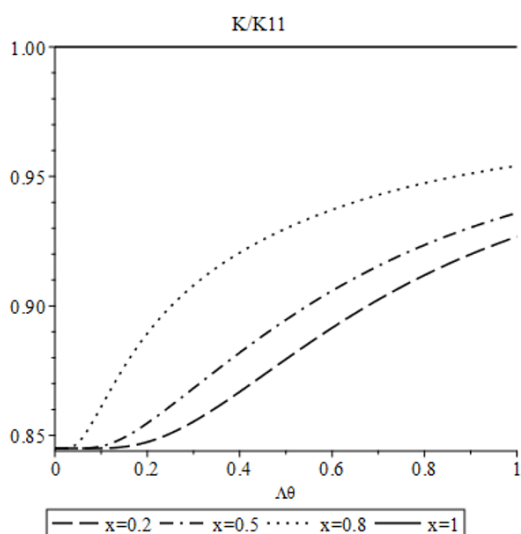


Рисунок 5. Изменение эффективного модуля за счет градиентности

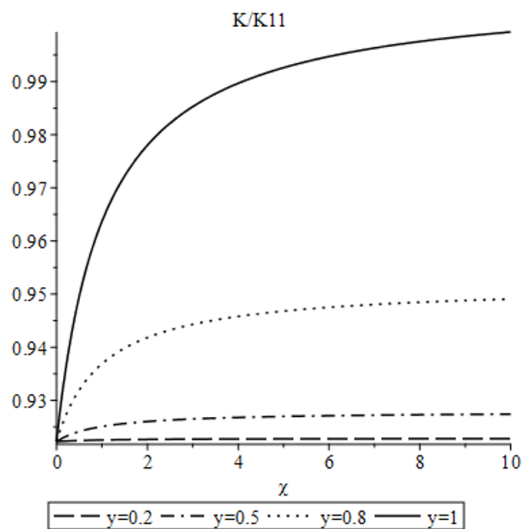


Рисунок 6. Изменение эффективного модуля в зависимости от  $\chi$

Раздел 4.3 посвящен определению эффективных свойств композиционных материалов с вискеризованными волокнами. Представительный элемент, состоящий из матрицы и волокна показан на рисунке 7 а. Ось симметрии, совпадает с направлением оси  $r$  и ее свойства является постоянными по длине вискерсов, рисунок 7 б.

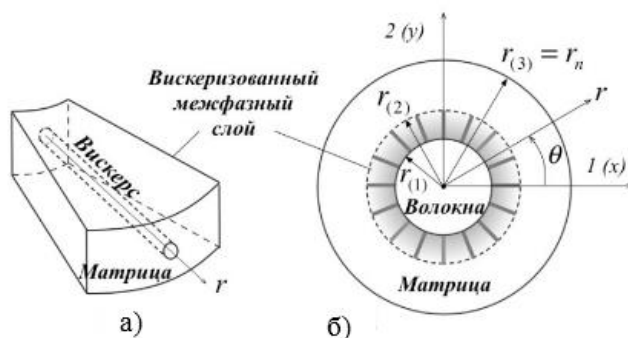


Рисунок 7 а) ячейка вискеризованного межфазного слоя;  
б) ячейка вискеризованного волокнистого композита

Эффективные механические характеристики ВКМ, армированного однонаправленными волокнами с вискеризованным межфазным слоем определялись с помощью самосогласованной модели Эшелби четырех цилиндрических тел. Для учета переменности свойств межфазного слоя,

использовались соотношения градиентной теории упругости. Решение строилось на основе обобщенного представления Папковича-Нейбера для перемещений через потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Лапласа и Гельмгольца.

Тензор переменных модулей классической среды  $\tilde{C}_{ijmn}$  определялся на основе найденных полных  $R_m$  и классические перемещений  $U_m$ :

$$R_{i,j} = \tilde{C}_{ijmn}^{-1} (C_{mnpq}^{11} U_{p,q})$$

Для иллюстрации полученных результатов рассматривался композиционный материал, усиленный углеродными волокнами диаметром  $D=5$  мкм со слоем вискерсов шириной  $l_0 = 2$  мкм. Характеристики углеродного волокна: продольный модуль Юнга  $E_1 = 241$  ГПа, поперечный модуль Юнга  $E_2 = 14.5$  ГПа, модуль сдвига вдоль оси волокна  $G_{13} = 22.8$  ГПа, модуль сдвига в поперечной плоскости к оси волокна  $G_{12} = 4.8$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_{12} = 0.27$ . Вискерсы имеют диаметр  $d = 0.85$  мкм и длину  $L = 2000$  нм, равномерно распределены на поверхности базового волокна. Средняя объемная концентрация вискерсов, определяет расстояние между ними на поверхности базового волокна  $c_0 = 42.17\%$ . Для вискерсов:  $E = 1100$  ГПа,  $\nu = 0.14$ . Матрица - смола с параметрами  $E_M = 3$  ГПа,  $\nu_M = 0.3$ . На рисунке 8 представлен график распределения объемного модуля при двухосном растяжении. Значения на оси абсцисс соответствуют: 0-1 базовое волокно; 1-1,8 слой с вискерсами; матрица 1,8-2,2. Все размеры расчетной области приведены к радиусу базового волокна.

В случае “мягкого” градиентного слоя, когда модуль Юнга для вискерсов  $E = 7$  ГПа, наблюдается более плавная картина распределения объемного модуля в системе “волокно - вискеризованный слой - матрица”, рисунок 9. Остальные параметры соответствуют приведенным выше. Эффект усиления обнаруживается, если рассмотреть увеличенные зоны на границах фаз (рисунки 10 и 11), он приводит к раздуванию поверхности напряжения и увеличению предела прочности матрицы.

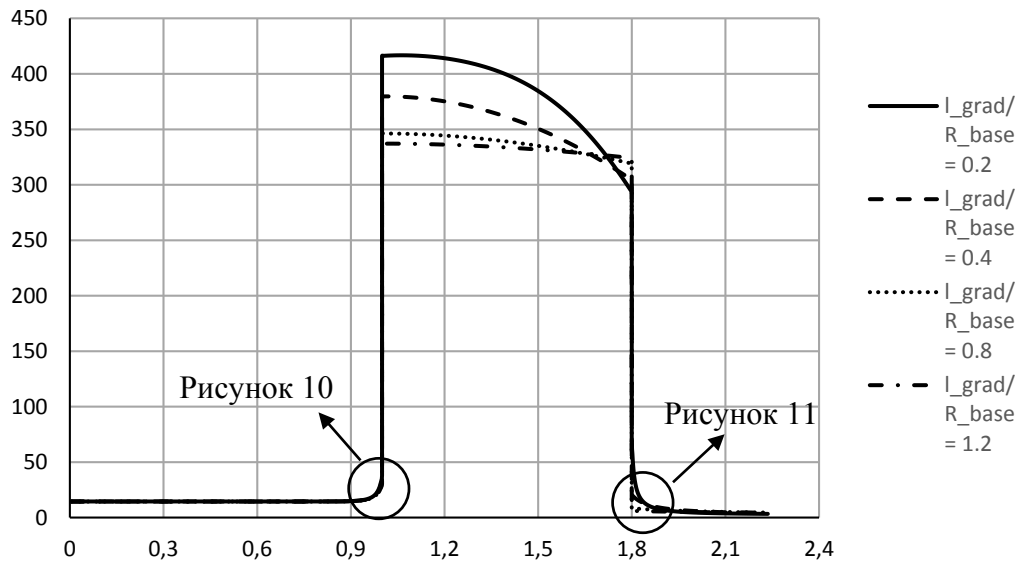


Рисунок 8. Распределение объемного модуля (ГПа) при двухосном растяжении

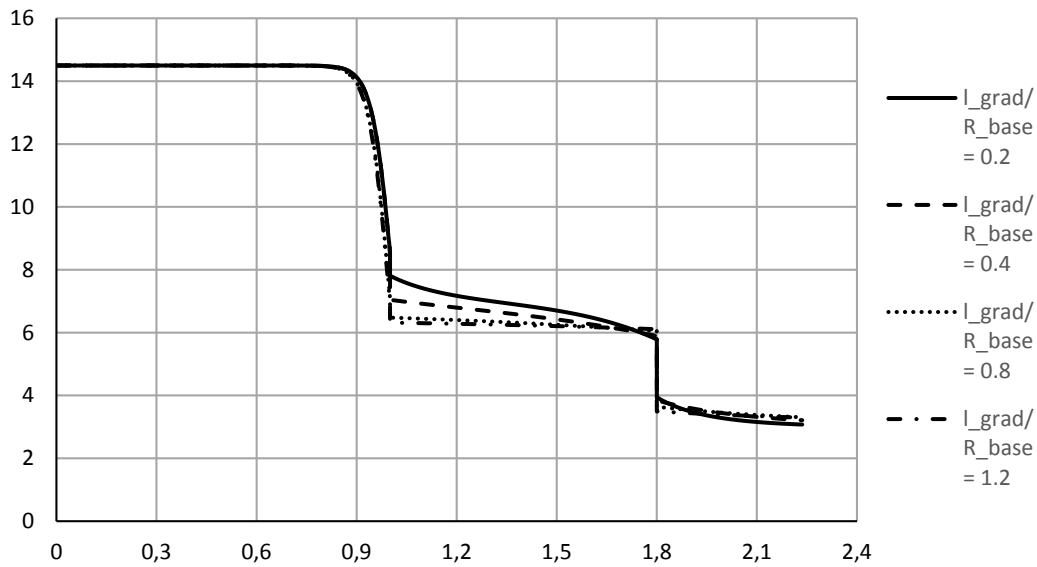


Рисунок 9. Распределение объемного модуля (ГПа) при двухосном растяжении с “мягким” градиентным слоем.

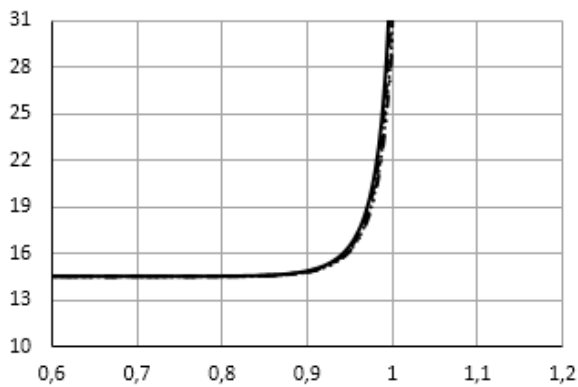


Рисунок 10. Объемный модуль на границе волокно-вискеризованный слой

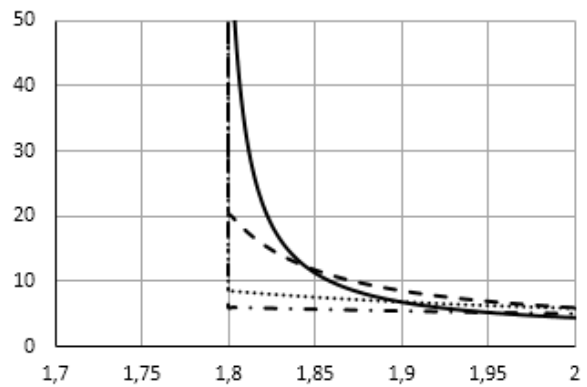


Рисунок 11. Объемный модуль на границе вискеризованный слой-матрица

Представленные рисунки показывают, что жесткая фаза существенно повреждается, при этом происходит сжатие поверхности прочности, а слабая фаза соответственно упрочняется. В композиционном материале упрочнение слабой фазы происходит в том смысле, что возрастает эффективный модуль. Именно этим объясняется эффект усиления, связанный с наноразмерными включениями. На границе раздела между жестким включением и матрицей происходит локальное ужесточение матрицы, что продемонстрировано на рисунке 11. Т.к. поверхность раздела в нанокompозитах велика даже при малом объемном содержании нановключений, то эти эффекты могут быть существенными. Представленные результаты позволяют качественно и приближенно количественно оценить эффекты усиления.

В последнем разделе четвертой главы на основе критерия прочности Мизеса-Хилла проведена оценка несущей способности при росте поврежденности.

### Заключение.

Основные результаты диссертационной работы:

- Установлена энергетическая эквивалентность между обобщенными моделями сред с полями дефектов и изотропной классической средой с переменными по координатам характеристиками.
- Определен тензор эффективных модулей упругости изотропной среды который определяется явно по решению краевой задачи для обобщенной среды с полями дефектов через тензор поврежденности второго ранга, т.е. фактически предложена математическая модель поврежденности с тензорным параметром.
- Получены соотношения, позволяющие моделировать среду с полями дефектов общего вида как изотропную среду с ФГ свойствам.
- Выведены аналитические соотношения, позволяющие по решению, полученному для пористой среды определить эффективные характеристики

эквивалентной изотропной среды с функционально-градиентными свойствами.

- Установлено, что пористая среда может быть фильтром для распространения определенных длин волн.
- Установлено, что жесткий межфазный слой «выталкивается» из более жесткой фазы в более мягкую и этим объясняются эффекты усиления. Отмечено, что использование соответствия градиентной модели межфазного слоя позволяет получить приближенные оценки эффектов усиления.
- Анализ эффективных характеристик вискеризованных волокон приводит к обнаружению эффекта усиления на границе межфазного слоя и матрицы, что эквивалентно увеличению предела прочности матрицы.

Список публикаций по теме диссертационной работы:

1. Lurie S.A., Belov P.A., Kharchenko K.D. The theory of media with defect fields and models of deformation of functional layers in isotropic materials // Nanomechanics Science and Technology. An International Journal. - 2015. - Vol 6. - №1. - Pp. 1-16.
2. Белов П.А., Лурье С.А., Харченко К.Д. Моделирование механических свойств изотропных межфазных слоев в теории сред с полями дефектов // Механика композиционных материалов и конструкций. - 2016. - Т. 22. - №2. - С. 159-174.
3. Харченко К.Д. О функционально-градиентных эффективных свойствах пористой среды // Механика композиционных материалов и конструкций. - 2017. - Т. 23. - №3. - С. 374-389.
4. Харченко К.Д., Лыкосова Е.Д. О дисперсионных свойствах пористых сред // Механика композиционных материалов и конструкций, принята в печать.
5. Харченко К.Д., Лурье С.А. Построение аналитического корректирующего решения с согласованной кинематикой в задаче об изгибе ортотропной полосы со статическими условиями на продольных краях // Тезисы докладов

- 2-ой Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем» - Москва, 17-19 декабря 2013 г. - С. 146.
6. Лурье С.А., Харченко К.Д., Лыкосова Е.Д. Построение аналитического корректирующего решения с согласованной кинематикой в задаче об изгибе ортотропной полосы со статическими условиями на продольных краях // Сборник трудов 2-ой Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем» - Москва, 17-19 декабря 2013 г. - Т. 3. - С. 96-104.
  7. Харченко К.Д., Лурье С.А. О замкнутом решении плоской задачи теории упругости для конечной ортотропной полосы со статическими граничными условиями на продольных кромках // Тезисы докладов международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций» - Москва, 10-13 ноября 2014 г. - С. 16.
  8. Харченко К.Д. Об эквивалентности пористой среды и неоднородной классической среды // Сборник трудов второй международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций» - Москва, 18-20 октября 2016 г. - С. 199-201.