



Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187444>

EDN: <https://www.elibrary.ru/BBXHNV>

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЕ МЕТОДОМ СЕН-ВЕНАНА – ПИКАРА – БАНАХА

А.В. Пыхтин  

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
г. Москва, Россия

 pykhtin-av@yandex.ru

Цитирование: Пыхтин А.В. Решение для температурных касательных напряжений в двухслойной полосе методом Сен-Венана – Пикара – Банаха // Труды МАИ. 2026. № 146.
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187444>

Аннотация. На примере задачи температурного коробления незакрепленной двухслойной полосы дано развитие элементов метода Сен-Венана – Пикара – Банаха (SVPB) и расширенное изложение ряда его аспектов. Постановка концентрируется на проблеме определения касательных напряжений на стыке между слоями, где обычно применяемый аппарат метода приводит к тривиальному результату. Рассмотрены варианты корректировки полученной формы решения с использованием физической гипотезы, расширения формы начального приближения с включением в нее требуемых факторов, асимптотической постановки краевого условия в месте стыка слоев. Решения построены аналитически; проведено их сопоставление, в том числе с результатом расчета по методу конечных элементов. Рассмотрены способы построения решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, применение выражений старших итераций и сходимости. Предложен вариант метода, не опирающийся на приближения искомых величин, и подход к построению решения для него.

Ключевые слова: плоская задача, слоистый материал, температурные напряжения, краевой эффект, итерации, метод Сен-Венана – Пикара – Банаха

SOLUTION FOR TEMPERATURE SHEAR STRESSES IN A TWO-LAYER STRIP BY THE SAINT-VENANT – PICARD – BANACH METHOD

A.V. Pykhtin ✉ 

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

✉ pykhtin-av@yandex.ru

Citation: Pykhtin A.V. Solution for temperature shear stresses in a two-layer strip by the Saint-Venant – Picard – Banach method // Trudy MAI. 2026. No. 146. (In Russ.).

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187444>

Abstract. Using the example of an unfixed two-layer strip temperature warping problem, the evolution of elements of the Saint-Venant – Picard – Banach (SVPB) method and an expanded presentation of some of its aspects are given. The formulation is concentrated on the problem of determining the shear stresses at the junction between layers, where the usually applied apparatus of the method leads to a trivial result. Variants of correcting the obtained form of the solution using a physical hypothesis, expanding the form of the initial approximation with the inclusion of the required factors, and an asymptotic statement of the boundary condition at the junction of the layers are considered. The solutions are constructed analytically; their comparison is carried out, including with the result of calculation using the finite element method. The ways of constructing solutions of differential and integro-differential equations, applying expressions of higher iterations and convergence are considered. A version of the method is proposed that does not rely on approximations of the unknown values, as well an approach to constructing a solution for it.

Keywords: plane problem, layered material, temperature stresses, edge effect, iterations, Saint-Venant – Picard – Banach method

Введение

Аналитический метод, принятый в качестве основы исследования, направлен на интегрирование уравнений в частных производных с малым параметром. Библиография по нему и ключевые результаты приведены в работах [1–7]. Метод показал значительную общность в решении задач (статики и динамики) теории упругости тонкостенных систем (для полосы, пластины и оболочек) при действии поверхностной нагрузки и поля температуры в материале сплошной и слоистой структуры.

Метод объединяет итерационный и асимптотический подходы и может рассматриваться как развитие принципов асимптотического интегрирования уравнений теории упругости [8–10]. Форма, к которой преобразуются исходные уравнения (без применения каких-либо допущений), создает основу для использования метода последовательных приближений с целью построения выражений исходных неизвестных задачи через новые основные неизвестные, чем достигается редукция размерности дифференциальных уравнений и уменьшение количества неизвестных. Выполнение граничных условий приближенными выражениями величин напряженно-деформированного состояния дает решение для новых основных неизвестных (определяются вид функций и константы интегрирования), через них с помощью прямых действий находятся искомые неизвестные задачи. Опору аналитическим вычислениям создает аппарат, рассматривающий асимптотики быстро и медленно меняющихся компонент решения.

Подходы к применению метода при решении задач температурного деформирования слоистой полосы рассмотрены в работах [11–16]. Приведенное исследование стало результатом испытания возможностей и развития метода в связи с проблемой получения функции касательных напряжений на линии стыка материалов продольных слоев полосы (с различным коэффициентом линейного температурного расширения) при условии свободных ее краев.

1. Исходные соотношения

1.1. Преобразование исходных уравнений к форме оператора метода последовательных приближений. Напряженно-деформированное состояние

среды описывается уравнениями теории упругости [17], в которых действие заданного поля температуры учтено в выражениях для линейных деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_z$ [18]:

$$\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0,$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x^* - \nu \sigma_z^*) + \alpha T, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z^* - \nu \sigma_x^*) + \alpha T, \quad \tau^* = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma, \quad (1)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}.$$

Индексом «*» здесь обозначены размерные величины, заменяемые далее безразмерными; перемещения (u^*, w^*), линейные ($\varepsilon_x, \varepsilon_z$) и угловая (γ) деформации, напряжения $\sigma_x^*, \sigma_z^*, \tau^*$ считаются функциями двух декартовых координат x^*, z^* , начало отсчета (O) которых расположено в геометрическом центре прямоугольной полосы длиной l и толщиной $2h$. Продольная ось Ox^* , параллельная лицевым (длинным) сторонам, разделяет полосу на два слоя.

В задаче модуль упругости (E) и коэффициент Пуассона (ν) постоянные, не зависящие от слоя. Рассматривается коробление тела, связанное с различием коэффициентов линейного температурного расширения материала слоев (α_1 – для нижнего слоя, α_2 – для верхнего) при изменении температуры (T) относительно некоторой начальной, не создающей дополнительных напряжений.

Запись уравнений в безразмерном виде

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu \sigma_z) + \alpha T, \quad \varepsilon_z = (\sigma_z - \nu \sigma_x) + \alpha T, \quad \tau = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (3)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (4)$$

включает выражение угловых деформаций в соотношение упругости для касательных напряжений. Величины перемещений и координат приведены к безразмерному виду: продольных (u^* и x^*) – делением на длину l , поперечных (w^* и z^*) – отнесением к полутолщине h ; малая величина $\varepsilon = h/l$ – параметр

тонкостенности (подобный вводимым в теории пластин и оболочек). Масштабом безразмерных напряжений выступает модуль упругости (E).

Уравнения такого вида могут быть приведены [12,13] к форме (отражающей принцип сжимающих отображений для неподвижной точки [19])

$$y = Ay, \tag{5}$$

определяющей отображение вектора неизвестных y (компонент напряженно-деформированного состояния) в себя действием оператора A . При учете фактора температуры в уравнениях (3) – это соотношения [20]:

$$\sigma_z = -\varepsilon \int_0^z \frac{\partial \tau}{\partial x} dz + \sigma_{z0}, \quad \tau = -\varepsilon \int_0^z \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz + \tau_0, \tag{6}$$

$$\sigma_x = \nu \sigma_z + \varepsilon_x - \alpha T, \quad \varepsilon_z = (1 - \nu^2) \sigma_z - \nu \varepsilon_x + (1 + \nu) \alpha T, \quad u = 2(1 + \nu) \int_0^z \tau dz - \varepsilon \int_0^z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0, \tag{7}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = -\int_0^z \varepsilon_z dz + w_0. \tag{8}$$

Приведение уравнений (2)–(4) к этой форме включает прямое интегрирование (с переменным верхним пределом) тех из них, в которых присутствует оператор дифференцирования по переменной z , – с появлением функций меньшей размерности, обозначенных индексом «0». По сути выполненного преобразования эти функции (y_0) соответствуют значению неизвестных y на нижней границе вычисляемого интеграла, здесь

$$y_0(x) = y(x, z) \Big|_{z=0}. \tag{9}$$

В выборе нижней границы содержится преимущество определенности вычисления интегралов по толщине полосы, состоящей из нескольких слоев; кроме того, такой подход позволяет придать величинам y_0 физический смысл. Также к функциям y_0 применяется наименование «произволов интегрирования» [4,12] (неизвестные функции, образующиеся при вычислении интеграла по одной координате от функции нескольких координат), следующее из вычисления интегралов как неопределенных. Существует интерпретация, предложенная автором метода проф. Е.М. Зверевым: если в дифференциальном уравнении (например, втором уравнении (2)) в левой части оставить только производную по

переменной z , то τ_0 имеет смысл общего решения такого однородного уравнения для τ (величина τ_0 неизменна для уравнения).

1.2. Приближенные выражения искомых величин через новые основные неизвестные.

В выражении (5), при условии, что точные значения y неизвестны, применение метода последовательных приближений позволяет рассматривать процесс повторяющегося действия оператора как циклический

$$y_{(n)} = Ay_{(n-1)}. \quad (10)$$

Номер в скобках в нижнем индексе указывает номер итерации, на которой определены величины; начальное приближение – $y_{(0)}$.

Характер соотношений (6)–(8) позволяет [12] при известных двух величинах вычислить остальные путем последовательных подстановок известных значений в определяющие их уравнения из числа (6)–(8). Действие оператора A , таким образом, выполняется поэлементно; форма соотношений (5), (10) остается неизменной. Циклом (итерацией) применения оператора A можно считать выполнение его элементов, приводящее к определению нового приближения всех неизвестных.

Последовательностями поэлементного выполнения оператора A могут быть, например [12,21]:

$$\left\{ (\underline{\tau}, \underline{\sigma}_z), \underline{w}, (\underline{u}, \underline{\varepsilon}_x), \underline{\underline{\sigma}}_x, \underline{\underline{\varepsilon}}_z \right\} \text{ или } \left\{ (\underline{u}, \underline{\varepsilon}_x), \underline{\underline{\sigma}}_z, (\underline{\sigma}_x, \underline{\tau}), (\underline{\varepsilon}_z, \underline{w}) \right\}. \quad (11)$$

Одинарным подчеркиванием здесь отмечены величины, условно полагаемые известными в начале действия оператора; в круглые скобки объединены пары величин, для вычисления второй из которых требуется только первая; двойным подчеркиванием отмечены составляющие y , необходимые для начала следующего применения оператора (первыми из которых вычисляются компоненты с одинарным подчеркиванием).

Если начальным приближением является

$$w_{(0)} = w_0, \tau_{(0)} = \tau_0, \quad (12)$$

где w_0, τ_0 – неизвестные функции только продольной координаты, образованные при получении выражений (6)–(8) оператора A , то выполнение одного цикла оператора в порядке первой последовательности (11) дает следующие соотношения [16]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z(1)} &= [-\varepsilon\tau'_0]z + [\sigma_{z0}], \quad u_{(1)} = [-\varepsilon w'_0 + 2(1+\nu)\tau_0]z + [u_0], \\
 \varepsilon_{x(1)} &= [-\varepsilon^2 w''_0 + 2(1+\nu)\varepsilon\tau'_0]z + [\varepsilon u'_0], \\
 \sigma_{x(1)} &= [-\varepsilon^2 w''_0 + (2+\nu)\varepsilon\tau'_0]z + [\varepsilon u'_0 + \nu\sigma_{z0}] - \alpha T, \\
 \varepsilon_{z(1)} &= [\nu\varepsilon^2 w''_0 - (1+\nu)^2 \varepsilon\tau'_0]z + [-\nu\varepsilon u'_0 + (1-\nu^2)\sigma_{z0}] + (1+\nu)\alpha T, \\
 w_{(1)} &= [\nu\varepsilon^2 w''_0 - (1+\nu)^2 \varepsilon\tau'_0] \frac{z^2}{2} + [-\nu\varepsilon u'_0 + (1-\nu^2)\varepsilon\sigma_{z0}]z + [w_0] + \left\{ (1+\nu)\varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz \right\}, \\
 \tau_{(1)} &= [\varepsilon^3 w'''_0 - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau''_0] \frac{z^2}{2} + [-\varepsilon^2 u''_0 - \nu\varepsilon\sigma'_{z0}]z + [\tau_0] + \left\{ \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz \right\}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Штрихом обозначено применение оператора дифференцирования по переменной x . Выражения такого вида образуют приближения $y_{(n)}(x, z)$ искомых функций, вычисляемые прямыми действиями через неизвестные функции $y_0(x)$. При выполнении граничных условий приближениями $y_{(n)}$ разрешающие соотношения записываются для функций y_0 , становящихся новыми основными неизвестными задачи.

Выражения $y_{(n)}$ искомых функций обладают структурой вида степенного ряда по поперечной координате и асимптотического ряда по малому параметру ε , дополняющейся старшими членами в процессе итераций, включающими производные старших порядков (каждое применение оператора A сопровождается четырехкратным дифференцированием по продольной координате и четырехкратным интегрированием по поперечной), так

$$\begin{aligned}
 u_{(2)} &= [(2+\nu)\varepsilon^3 w'''_0 - (1+\nu)(3+\nu)\varepsilon^2 \tau''_0] \frac{z^3}{6} + [-(2+\nu)\varepsilon^2 u''_0 - (1+\nu)^2 \varepsilon\sigma'_{z0}] \frac{z^2}{2} + \\
 &\quad + [-\varepsilon w'_0 + 2(1+\nu)\tau_0]z + [u_0] + \left\{ (1+\nu)\varepsilon \int_0^z \int_0^z (\alpha T)' dz dz \right\}, \\
 \sigma_{x(2)} &= [2\varepsilon^4 w''''_0 - (3+2\nu)\varepsilon^3 \tau'''_0] \frac{z^3}{6} + [-2\varepsilon^3 u'''_0 - (1+2\nu)\varepsilon^2 \sigma''_{z0}] \frac{z^2}{2} + \\
 &\quad + [-\varepsilon^2 w''_0 + (2+\nu)\varepsilon\tau'_0]z + [\varepsilon u'_0 + \nu\sigma_{z0}] + \{-\alpha T\} + \left\{ \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{(2)} = & \left[-2\varepsilon^5 w_0^V + (3+2\nu)\varepsilon^4 \tau_0^{IV} \right] \frac{z^4}{24} + \left[2\varepsilon^4 u_0^{IV} + (1+2\nu)\varepsilon^3 \sigma_{z0}''' \right] \frac{z^3}{6} + \\ & + \left[\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2} + \left[-\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon \sigma_{z0}' \right] z + [\tau_0] + \\ & + \left\{ \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz \right\} + \left\{ -\varepsilon^3 \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)''' dz dz dz \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z(3)} = & \left[2\varepsilon^6 w_0^{VI} - (3+2\nu)\varepsilon^5 \tau_0^V \right] \frac{z^5}{120} + \left[-2\varepsilon^5 u_0^V - (1+2\nu)\varepsilon^4 \sigma_{z0}^{IV} \right] \frac{z^4}{24} + \\ & + \left[-\varepsilon^4 w_0^{IV} + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' \right] \frac{z^3}{6} + \left[\varepsilon^3 u_0''' + \nu\varepsilon^2 \sigma_{z0}'' \right] \frac{z^2}{2} + [-\varepsilon \tau_0'] z + [\sigma_{z0}] + \\ & + \left\{ -\varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right\} + \left\{ \varepsilon^4 \int_0^z \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz dz dz \right\}, \end{aligned}$$

Римскими цифрами обозначены производные по координате x соответствующей кратности.

1.3. О выборе начального приближения. Начальное приближение (12) применялось прежде в основном при решении задач с преобладанием явления изгиба в полосе [2,12], в том числе с учетом слоистого характера материала [14], а также влияния фактора температуры [13,15,16,20]. Исходное допущение $u_{(0)} = u_0$, $\sigma_{z0(0)} = \sigma_{z0}$ и вторая из последовательностей оператора A (11) выбирались при расчете поперечного обжатия полосы [21], что приводило к разрешающим соотношениям с относительно более высоким порядком производных от u_0, σ_{z0} .

Замечено [7,12], что предположения $w_{(0)} = w_0$, $\gamma_{(0)} = 0$ приводят к классическому уравнению изгиба. Первое из них, по положению в структуре оператора A , является следствием допущения несжимаемости нормали $\varepsilon_z = 0$, которое, так же как и второе, присуще классической теории [22]. Уравнениям типа Тимошенко – Рейсснера отвечает допущение $\gamma_{(0)} = \gamma_0$ (что то же, $\tau_{(0)} = \tau_0$) применяемое совместно с полаганием $w_{(0)} = w_0$. Гипотеза $w_{(0)} = 0$, $\gamma_{(0)} = 0$ определяет задачу о продольном растяжении – сжатии. Начальное приближение (12), представляющее собой почленную сумму обозначенных трех случаев, дает структуру уравнений и форму решения достаточные для выполнения всех граничных условий на выражениях начальных итераций [12].

В задаче о влиянии температуры учитывающие ее действие слагаемые в последовательности приближений (12),(13) появляются не сразу. Дополнение

фактором температуры непосредственно соотношений начального приближения (12) возможно при рассмотрении ε_z, σ_x , предшествующих им в цепочке элементов (11) оператора (6)–(8). Сохранение в формулах для ε_z, σ_x (7) только слагаемых с функциями α и T

$$\varepsilon_{z(0)} = 0 + (1 + \nu)\alpha T, \quad \sigma_{x(0)} = 0 - \alpha T,$$

дает подстановкой в выражения для w (8), τ (6), дополненные соотношения начального приближения

$$w_{(0)} = w_0 + (1 + \nu) \int_0^z \alpha T dz, \quad \tau_{(0)} = \tau_0 + \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz.$$

Если температурные слагаемые в выражениях для ε_z, σ_x принимать в том виде, как они вводятся в соотношения упругости (3)

$$\varepsilon_{z(0)} = 0 + \alpha T, \quad \sigma_{x(0)} = 0 - \frac{1}{1 - \nu} \alpha T,$$

то следование физической гипотезе и исходным уравнениям дает несколько отличные коэффициенты в форме начального приближения

$$w_{(0)} = w_0 + \int_0^z \alpha T dz, \quad \tau_{(0)} = \tau_0 + \frac{1}{1 - \nu} \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz.$$

При выполнении граничных условий приближениями старших итераций (вида (14)) введенные дополнительно в начальном приближении температурные слагаемые перемещаются вверх в структуре ряда (над ними выполняются действия дифференцирования и интегрирования) и на решение в рассматриваемой постановке влияния не оказывают. В общем случае подходы к учету физических гипотез ожидают дополнительного исследования. Так, фактор температуры, будучи введенным в исходных выражениях для линейных деформаций (1) [16] либо той же величиной в выражениях их первых приближений [13], приводит к функциям частного решения (w_0) различного знака кривизны.

2. Выполнение граничных условий на лицевых сторонах. Разрешающие соотношения для новых основных неизвестных

2.1. Построение уравнений. В задаче о короблении прямоугольной полосы заданным в ней полем температуры, когда стороны полосы свободны от

кинематических связей и механической нагрузки, граничные условия могут быть записаны при помощи введенных безразмерных показателей:

$$\tau = 0, \sigma_z = 0 \text{ при } z = \pm 1, \quad (15)$$

$$\tau = 0, \sigma_x = 0 \text{ при } x = \pm 1/2. \quad (16)$$

Выполнение условий на длинных сторонах ($z = \pm 1$) приближениями $\tau_{(2)}, \sigma_{z(3)}$ (14) приводит к уравнениям для $w_0, \tau_0, u_0, \sigma_{z0}$, разделяемым [12] относительно пар неизвестных, для w_0, τ_0 :

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^5 w_0^V \frac{1}{6} + \varepsilon^3 w_0''' + \frac{3+2\nu}{12} \varepsilon^4 \tau_0^{IV} - (2+\nu) \varepsilon^2 \tau_0'' + 2\tau_0 = \\ & = -\varepsilon \left(\int_0^{-1} (\alpha T)' dz + \int_0^1 (\alpha T)' dz \right) + \varepsilon^3 \left(\int_0^{-1} \int_0^z \int_0^z (\alpha T)''' dz dz dz + \int_0^1 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)''' dz dz dz \right), \\ & -\varepsilon^6 w_0^{VI} \frac{1}{30} + \varepsilon^4 w_0^{IV} \frac{1}{3} + \frac{3+2\nu}{60} \varepsilon^5 \tau_0^V - \frac{2+\nu}{3} \varepsilon^3 \tau_0''' + 2\varepsilon \tau_0' = \\ & = \varepsilon^2 \left(\int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right) - \varepsilon^4 \left(\int_0^{-1} \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz dz dz \right) \end{aligned} \quad (17)$$

и u_0, σ_{z0} :

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^4 u_0^{IV} \frac{1}{3} + \varepsilon^2 u_0'' - \frac{1+2\nu}{6} \varepsilon^3 \sigma_{z0}''' + \varepsilon \nu \sigma_{z0}' = \\ & = -\varepsilon \left(\int_0^{-1} (\alpha T)' dz - \int_0^1 (\alpha T)' dz \right) + \varepsilon^3 \left(\int_0^{-1} \int_0^z \int_0^z (\alpha T)''' dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)''' dz dz dz \right), \\ & -\varepsilon^5 u_0^V \frac{1}{6} + \varepsilon^3 u_0''' - \frac{1+2\nu}{12} \varepsilon^4 \sigma_{z0}^{IV} + 2\sigma_{z0} = \\ & = \varepsilon^2 \left(\int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right) - \varepsilon^4 \left(\int_0^{-1} \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz dz dz + \int_0^1 \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)^{IV} dz dz dz dz \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Связывая поиск величины касательных температурных напряжений на линии стыка слоев полосы (при $z=0$) в первую очередь с определением функции τ_0 , решение ищется на уравнениях (17).

2.2. Решение системы однородных уравнений подстановкой функции e^{px} . По аналогии со способом решения системы линейных уравнений, разрешенных относительно первых производных [23], подстановка

$$w_0 = e^{px}, \tau_0 = \lambda e^{px}, \quad (19)$$

(где λ, p – неизвестные числа) в уравнения (17) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
& -p^5 \varepsilon^5 \frac{1}{6} + p^4 \lambda \varepsilon^4 \frac{3+2\nu}{12} + p^3 \varepsilon^3 - p^2 \lambda \varepsilon^2 (2+\nu) + 2\lambda = 0, \\
& -p^6 \varepsilon^6 \frac{1}{30} + p^5 \lambda \varepsilon^5 \frac{3+2\nu}{60} + p^4 \varepsilon^4 \frac{1}{3} - p^3 \lambda \varepsilon^3 \frac{2+\nu}{3} + 2p\lambda = 0.
\end{aligned}$$

Из первого находится

$$\lambda = \frac{2p^3 \varepsilon^3 (p^2 \varepsilon^2 - 6)}{p^4 \varepsilon^4 (3+2\nu) - 12p^2 \varepsilon^2 (2+\nu) + 24}, \quad (20)$$

второе дает разрешающее соотношение для p :

$$\frac{2p^4 \varepsilon^4 (p^4 \varepsilon^4 - 24p^2 \varepsilon^2 + 120)}{15(p^4 \varepsilon^4 (3+2\nu) - 12p^2 \varepsilon^2 (2+\nu) + 24)} = 0, \quad (21)$$

корни числителя которого (подобие характеристического многочлена)

$$p = \left\{ 0, \pm \varepsilon^{-1} \sqrt{2(6 \pm \sqrt{6})} \right\} \quad (22)$$

отличны от корней знаменателя при действительных значениях ε и ν .

Корень $p=0$ с кратностью 4 формирует решение в виде суммы

$$w_0^{sg} = C_n^s x^n, \quad (23)$$

в которой n изменяется от 0 до 3; символом « s » обозначаются элементы, относящиеся к решению с нулевой асимптотической изменяемостью (подробнее – в пункте 2.3; здесь – к решению вида полинома), символом « g » – компоненты решения однородного уравнения; C_n^s – неизвестные константы интегрирования. Коэффициенты λ (20) при нулевых значениях корней p обращаются в ноль и приводят к тривиальному решению для τ_0^{sg} в форме (19). Такое сочетание w_0^{sg}, τ_0^{sg} не удовлетворяет тождественно уравнениям (17) и требует дополнения решением

$$\tau_0^{sg} = -3\varepsilon^3 C_3^s. \quad (24)$$

Компоненты решения, отвечающие ненулевым корням p (22), представленным в виде $p_n = \varepsilon^{-1} p_{en}$, (быстроменяющиеся, обозначаемые в пункте 2.3 символом « q ») можно найти по формуле

$$y_0^{qq} = \lambda_n C_n^q e^{p_{en} x / \varepsilon}. \quad (25)$$

Здесь n принимает значения от 1 до 4 (при суммировании); C_n^q – константы интегрирования; значения λ_n для компоненты w_0^{qq} , как следует из формы решения

(19), равны единице, для τ_0^{gg} – вычисляются подстановкой значений p_n в соотношение (20).

Примененный к решению дифференциальных уравнений (17) подход обеспечивает общее решение восемью линейно независимыми функциями (и константами интегрирования). Суммарный порядок старших производных w_0, τ_0 в уравнениях (равный 11-ти), и способ подбора решения (в форме функций (19)) оставляют место предположению о существовании функций, дополняющих решение до общего.

Построение формы решения выполнением граничных условий (15) величинами следующего приближения $(\tau_{(3)}, \sigma_{z(4)})$ приводит к системе дифференциальных уравнений (аналогичной соотношениям (17)) с суммарным порядком старших производных равным 15-ти. Корни характеристического многочлена (12-й степени) включают нулевой корень кратностью 4 и парные корни многочлена относительно четных степеней p (как в числителе дроби (21)). Решение для последних имеет аналитическую форму (получено с помощью пакета символьных вычислений SymPy), но громоздко. В таблице 1 приведены численные значения ненулевых корней характеристического многочлена для нескольких итераций при $\nu = 0.35, \varepsilon = 0.2$.

Таблица 1

Значения ненулевых корней характеристического многочлена

Приближение функций τ, σ_z	Выражение	Значения (пример)	
		действительные	комплексные
$\tau_{(1)}, \sigma_{z(2)}$	$\pm \varepsilon^{-1} k, \pm \varepsilon^{-1} k \sqrt{3}, k = \sqrt{2/(2+\nu)}$ (только для решения τ_0)	$\pm 4.61, \pm 7.99$	-
$\tau_{(2)}, \sigma_{z(3)}$	$\pm \varepsilon^{-1} \sqrt{2(6 \pm \sqrt{6})}$	$\pm 13.32, \pm 20.55$	-
$\tau_{(3)}, \sigma_{z(4)}$	функция от ε (аналитическое выражение громоздко)	$\pm 21.04, \pm 34.52$	$\pm 15.1 \pm 6.72i$

Для приближений $\tau_{(1)}, \sigma_{z(2)}$ прямое применение подстановки (19) ведет к получению только нулевых корней. Результат в табл. 1 относится к асимптотически преобразованным уравнениям.

Кратность нулевого корня (и отвечающая ей форма решения) неизменна для всех итераций – в связи с регулярным характером выражений $\tau_{(n)}, \sigma_{z(n+1)}$, которыми выполняются граничные условия на длинных сторонах полосы (при рассматриваемом начальном приближении (12)).

2.3. Асимптотический подход к решению. Различие в поведении решения вблизи границ (и иных сингулярностей) и в невозмущенной (внутренней) области дает основу для рассмотрения его составляющих, характеризуемых различной изменяемостью по пространственной координате [10]. Степень изменяемости может быть определена как относительное изменение (в результате дифференцирования) асимптотического порядка величины, измеряемого показателем степени малого параметра [24]. В применяемом методе [2,7,12] в качестве малого параметра задействован параметр тонкостенности ε ; асимптотические оценки даются как $O(\varepsilon^n)$, где n – некоторые числа; решение рассматривается состоящим из медленно и быстро меняющихся компонент, обозначаемых индексами « s » и « q »,

$$y_0 \approx y_0^s(x) + y_0^q(x/\varepsilon), \quad (26)$$

изменяемость которых (в направлении оси Ox) выражается

$$(y_0^s)' \sim \varepsilon^0 y_0^s, \quad (y_0^q)' \sim \varepsilon^{-1} y_0^q. \quad (27)$$

Дифференцирование первой (характеризуемой нулевой изменяемостью) не влечет изменения ее асимптотического порядка; вторая возрастает в ε^{-1} раз. Такой состав компонент и их оценки соотносятся с решением вида (23)–(25).

2.3.1. Медленно меняющееся решение. Применительно к уравнениям (17), для получения асимптотического решения в области, удаленной от краев, учитывается [12], что основной значимостью здесь обладают медленно меняющиеся составляющие решения (при условии такого же характера функций правых частей уравнений). Для них слагаемые со старшими производными (с множителями ε с высокими показателями степени), принимая во внимание

первое соотношение (27), представляют собой малые величины более высокого порядка и могут быть отброшены. Тогда уравнения, описывающие медленно меняющееся решение во внутренней области, приобретают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0^{s''' } + 2\tau_0^s &= -\varepsilon \left(\int_0^{-1} (\alpha T)' dz + \int_0^1 (\alpha T)' dz \right), \\ \varepsilon^4 w_0^{sIV} \frac{1}{3} + 2\varepsilon \tau_0^{s'} &= \varepsilon^2 \left(\int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right), \end{aligned} \quad (28)$$

и приводят к разрешающему уравнению

$$\frac{2}{3} \varepsilon^4 w_0^{sIV} = -\varepsilon^2 \left(\int_0^{-1} (\alpha T)' dz + \int_0^1 (\alpha T)' dz \right) - \varepsilon^2 \left(\int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz \right). \quad (29)$$

Общее решение однородного уравнения совпадает с решением (23). Частное решение (получаемое прямым интегрированием; обозначаемое символом «р»), отвечающее функции правой части уравнения для случая постоянных температуры и коэффициентов линейного температурного расширения материала слоев (в рассматриваемой задаче) выражается функцией

$$w_0^{sp} = \frac{3}{8} \varepsilon^{-2} (\alpha_1 - \alpha_2) T x^2. \quad (30)$$

Этому решению для w_0^s отвечает общее решение τ_0^{sg} (24) и частное решение

$$\tau_0^{sp} = 0.$$

Результат в такой форме (отличающийся коэффициентом в выражении w_0^{sp}) получен в работе [13] при решении выполнением граничных условий на длинных сторонах приближениями $\tau_{(1)}, \sigma_{z(2)}$ и введении фактора температуры через выражения первого приближения для линейных деформаций.

Уравнения (28) для медленно меняющихся составляющих решения являются общими при построении на приближениях τ, σ_z всех итераций, начиная с $\tau_{(1)}, \sigma_{z(2)}$.

2.3.2. Быстро меняющееся решение. Структура искоемых величин в виде суммы компонент (26), позволяющая вычитанием из уравнений относительно w_0, τ_0 уравнений для составляющих w_0^s, τ_0^s прийти к соотношениям для быстро меняющихся величин. При выполнении граничных условий (15) приближениями,

соответствующими $\tau_{(1)}$ (13), $\sigma_{z(2)}$ (14), сингулярно возмущенные уравнения имеют вид

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0, \quad -\frac{2+\nu}{3}\varepsilon^3\tau_0^{q'''} + 2\varepsilon\tau_0^{q'} = 0, \quad (31)$$

В работе [12], где получен этот результат, полагалось $w_0 \ll w_0^s$. Основание этому находится в форме уравнения для w_0^s , соотносящей поведение узкой длинной полосы с изгибом балки. При поиске решения уравнений этого приближения $(\tau_{(1)}, \sigma_{z(2)})$ напрямую подстановкой (19) характеристический многочлен также показывает только нулевые корни (способом без асимптотических преобразований обнаруживается только медленно меняющаяся составляющая решения вида (23)). Для уравнений (31) ненулевые корни (отвечающие быстро меняющемуся решению вида (25)) помещены в табл. 1.

Подход к разделению уравнений на быстро и медленно меняющиеся составляющие возможен также с точки зрения независимости операторов в слагаемых, содержащих отдельно быстро и медленно меняющиеся компоненты решения [25]. Основанием этому является независимость переменной x/ε [10] (в силу произвольной малости параметра ε) в форме быстро меняющегося решения (25).

2.4. Решение уравнений, преобразуемых прямыми подстановками.

Уравнения (31) могут быть получены из исходных для w_0, τ_0 , если величина $w_0 \ll w_0^s$ в них полагается известной (при найденном соотношении (29)) и переносится в правую часть. Искомая τ_0 в левой части в рассматриваемой задаче может считаться состоящей только из τ_0^q (постоянная составляющая τ_0^s (24) ожидаемому симметричному изгибу не свойственна).

Одна из составляющих решения исходных уравнений для w_0, τ_0 также может быть найдена без включения асимптотических преобразований – действиями сложения и вычитания с дифференцированием в паре уравнений (присущей для метода структуры) [16,21]. Получаемая таким образом величина носит характер частного решения, но позволяет отделить уравнения для второй неизвестной (полаганием в исходных уравнениях первой из них найденной). Определяемое

решение для второй неизвестной таким же образом позволяет найти новые соотношения для первой из них. Часть из последовательности результатов, получаемых таким образом, прежде отбрасывалась как формально несовместная (в частности, уравнения (31), – при решении на приближении $\tau_{(1)}, \sigma_{z(2)}$; для получения аналогичных компонент, как совместных, решение строилось на выражениях следующих итераций); возможность их сохранения может основываться на асимптотическом рассмотрении и учете приближенного характера уравнений.

3. Выполнение граничных условий на коротких сторонах $x = \pm 1/2$.

Решение (23)–(25), (30) имеет характер достаточно развитого (по составу компонент) для описания в некотором приближении рассматриваемого в задаче явления, описываемого величинами w_0, τ_0 .

Симметричная относительно оси Oz^* постановка задачи о температурном короблении полосы с граничными условиями (16) позволяет исключить в медленно меняющемся решении (23), (24) слагаемые с константами интегрирования C_0^w, C_1^w, C_3^w и рассматривать выполнение граничных условий только на одном крае. При малых значениях ε взаимным влиянием краев также можно пренебречь, для левой части полосы (при $z < 0$) в составе быстро меняющегося решения (25) сохранить только значимые слагаемые с константами C_3^q, C_4^q . Решение приобретает вид

$$\begin{aligned} w_0 &\square \frac{3}{8} \varepsilon^{-2} (\alpha_1 - \alpha_2) T_0 x^2 + C_2^s x^2 + C_3^q e^{-p_1 x} + C_4^q e^{-p_2 x}, \\ \tau_0 &\square -C_3^q \lambda_1 e^{-p_1 x} - C_4^q \lambda_2 e^{-p_2 x}, \end{aligned} \quad (32)$$

где p_n, λ_n ($n=1,2$) – положительные действительные числа, определенные формулами (22), (20).

Неизвестные константы находятся путем выполнения граничных условий (16) на краю $x = -1/2$ приближенными выражениями для τ, σ_x вида (13), (14). Выполняемые при любом значении z (при структуре левой части в виде ряда по переменной z) уравнения, полаганием независимого обращения в ноль

коэффициентов (выражений) при z в каждой степени [12] приводит к серии уравнений, разделенных относительно пар основных неизвестных; для определяемых функций w_0, τ_0 – это

$$\tau_0 = 0, \varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' = 0, -2\varepsilon^5 w_0^V + (3 + 2\nu) \varepsilon^4 \tau_0^{IV} = 0, \dots, \quad (33)$$

$$-\varepsilon^2 w_0'' + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' = 0, 2\varepsilon^4 w_0^{IV} - (3 + 2\nu) \varepsilon^3 \tau_0''' = 0, \dots \quad (34)$$

Порядок строк отвечает порядку условий (16). Приведенные уравнения соответствуют приближениям $\tau_{(2)}, \sigma_{x(2)}$ (14); их количество может быть увеличено либо сокращено в зависимости от числа искомых констант.

Примечание (о выборе приближений различных итераций). Поскольку при циклическом применении оператора A (10) его элементы взаимными подстановками в выражениях (6)–(8) выполняются последовательно, образуя цепочку выражений, границы итераций имеют в значительной мере условный характер (с точки зрения взаимосвязей составляющих $y_{(n)}$). При совместном применении приближенных выражений, относящихся к различным итерациям (при выполнении ими граничных условий (15), (16) и при вычислении компонент напряженно-деформированного состояния по найденным величинам основных неизвестных), здесь полагается, что их выбор обуславливается возможностью получения решения, и все приближения до некоторой степени отвечают определяемой ими величине.

Решение 1 (базовое, тривиальное). Первые два слагаемые в форме решения для w_0 (32) могут быть объединены (с включением коэффициента при x^2 первого слагаемого в состав константы C_2^s). Отвечающие количеству искомых констант уравнения – первые два уравнения (33) и первое уравнение (34), следующие из выполнения граничных условий (16) приближениями $\tau_{(1)}, \sigma_{x(1)}$ (13), – являются однородными (впрочем, как и последующие в строках (33), (34)) и приводят к нулевым значениям констант и тривиальному решению для w_0, τ_0 . Переход к формам решения, получаемым подстановкой (19) при выполнении граничных условий на длинных сторонах приближениями $\tau_{(n)}, \sigma_{z(n+1)}$ старших итераций (с

большим количеством констант интегрирования), на таком результате не отражается.

Это не означает полностью тривиального решения во всей полосе. Компоненты напряженно-деформированного состояния определяются приближениями вида (13), (14) на основе всех четырех основных неизвестных – $w_0, \tau_0, u_0, \sigma_{z0}$. Подобно задаче о нахождении функций w_0, τ_0 решается задача для u_0, σ_{z0} . Форма их решения строится на уравнениях (18). Система соотношений для вычисления констант интегрирования, вытекающая из граничных условий (16)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_0'' + \nu \varepsilon \sigma_{z0}' &= 0, \quad 2\varepsilon^4 u_0^{IV} + (1+2\nu)\varepsilon^3 \sigma_{z0}''' = 0, \dots, \\ \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} &= \alpha T, \quad 2\varepsilon^3 u_0''' + (1+2\nu)\varepsilon^2 \sigma_{z0}'' = 0, \dots, \end{aligned} \quad (35)$$

в отличие от выражений (33),(34), содержит неоднородное уравнение как признак ненулевого решения (величина αT постоянна в пределах слоя).

Примечание (о признаках наличия нетривиального решения для τ_0). В задаче об определении w_0, τ_0 величины α и T присутствуют совместно во всех уравнениях как сомножители. Влияние на результат пропорционального изменения любой из них в рассматриваемых примерах математически равноценно. В моделях, соотносимых с рассматриваемой, в однородном материале поле температуры с линейным по толщине законом распределения напряжений не вызывает и приводит к прогибу (поперечным перемещениям точек на линии $z=0$) в форме параболы [6, 13, 26–28]. При ступенчатом виде функции α (и постоянной величине T) в двухслойной полосе квадратичный характер зависимости $w_0(x)$ (30) сохраняется, но, в силу характера явления на стыке материалов, ожидаются также сдвиговые деформации (и касательные напряжения).

Уравнения (28), (17), (33), (34) показывают возможность существования решения с асимптотическими оценками

$$w_0^{sp} \sim \varepsilon^{-2} \alpha T, \quad w_0 \sim w_0^{sp}, \quad \tau_0 \square \tau_0^{qq}, \quad w_0^{qq} \wedge \tau_0^{qq} \sim \varepsilon^0 \alpha T. \quad (36)$$

Решение 2 (нестрогое). Слагаемые с x^2 , составляющие медленно меняющееся решение для w_0 (32), с позиции обычной теории могут трактоваться как отвечающие действию постоянного изгибающего момента (кривизна линии

изгиба, определяемая упрощенной формулой, постоянна) во внутренней области. Первое слагаемое – частное решение w_0^{sp} (30) – определяет непосредственную реакцию на заданную функцию температурного воздействия (в правой части уравнения (29)). Второе слагаемое (компонента общего решения w_0^{sg}) константой интегрирования C_2^s связано с выполнением граничного условия на короткой стороне. Деланое допущение о полагании этой константы равной нулю может интерпретироваться как отказ для узкой длинной полосы от учета во внутренней области изгибающего момента, создаваемого на краю.

Оставшиеся константы интегрирования C_3^q, C_4^q формы решения (32) (для левой части полосы) находятся выполнением на краю $x = -1/2$ двух условий, стоящих первыми в строках (33), (34), соответствующих приближениям $\tau_{(0)}, \sigma_{x(1)}$:

$$C_3^q = -A^q \lambda_2 e^{-p_{\varepsilon 1} 0,5/\varepsilon}, C_4^q = A^q \lambda_1 e^{-p_{\varepsilon 2} 0,5/\varepsilon}, A^q = \frac{3T(\alpha_2 - \alpha_1)}{4\varepsilon \left[\varepsilon (\lambda_1 p_2^2 - \lambda_2 p_1^2) - \lambda_1 \lambda_2 (2 + \nu)(p_2 - p_1) \right]}.$$

Графики на рисунках 1 и 2 характеризуют решение (для половины полосы со стороны левого свободного края) при нагреве на $1^\circ [K]$ (значение параметра T), коэффициенте линейного температурного расширения нижнего слоя $\alpha_1 = 10 \cdot 10^{-6} [^\circ K^{-1}]$, верхнего – $\alpha_2 = 20 \cdot 10^{-6} [^\circ K^{-1}]$, и $\nu = 0.35$ (для обоих слоев).

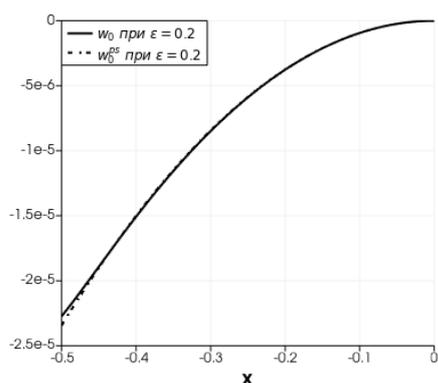


Рисунок 1 - Безразмерные поперечные перемещения (функция $w_0(x)$ и частное решение $w_0^{ps}(x)$)

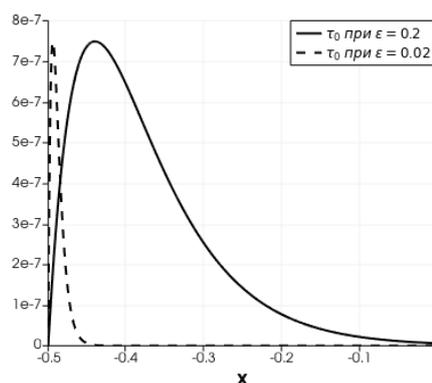


Рисунок 2 - Влияние параметра ε на безразмерные касательные напряжения (функция $\tau_0(x)$)

Основную роль в величине поперечных перемещений w_0 выполняет медленно меняющаяся составляющая w_0^{ps} . Существенное влияние на нее оказывает параметр тонкостенности (при уменьшении его значения до $\varepsilon = 0.02$

максимальные перемещения возрастают на три десятичных порядка). Быстро меняющаяся компонента (полностью составляет решение τ_0) реагирует на уменьшение относительной толщины полосы сокращением области краевого эффекта (в безразмерных координатах), сохраняя порядок максимальных значений.

Асимптотические оценки (36) и найденное решение качественно одинаково описывают характер функций w_0 и τ_0 . Будучи реализованными численно, оценки (36) имеют ограниченное применение (если сравнивать приведенные в таблице 2 значения с графиками). Эффективность асимптотического подхода проявляется при проведении сопоставлений и преобразований уравнений к виду разрешающих для наблюдаемых компонент решения.

Таблица 2

Численные значения асимптотических оценок (36)

	$\varepsilon = \frac{2}{10}$	$\varepsilon = \frac{2}{100}$
$\varepsilon^0 \alpha T$:	$1.5 \cdot 10^{-5}$	
$\varepsilon^{-2} \alpha T$:	$3.75 \cdot 10^{-4}$	$3.75 \cdot 10^{-2}$

Решение 3 (построение конечно-элементных моделей в среде SALOME и расчеты средствами пакета Code Aster). Физические постоянные предыдущего примера $(\alpha_1, \alpha_2, \nu)$ дополнены модулем упругости $E = 7 \cdot 10^4$ [МПа]. Геометрия моделей соответствует значениям параметра тонкостенности $\varepsilon = 0.2$ ($l = 1$ [м], $h = 0.2$ [м]) и $\varepsilon = 0.02$ ($l = 10$ [м]).

Расчет поперечных перемещений на линии $z = 0$ практически повторяет график (см. рисунок 1); в модели с $\varepsilon = 0.2$ расхождение между результатами в точке наибольшего перемещения составляет менее 2%, при $\varepsilon = 0.02$ – менее 0,5%. Форма в деформированном состоянии левой половины полосы показана на рисунке 3 качественно (контуром) относительно исходного состояния (закрашенная область) для $\varepsilon = 0.2$.

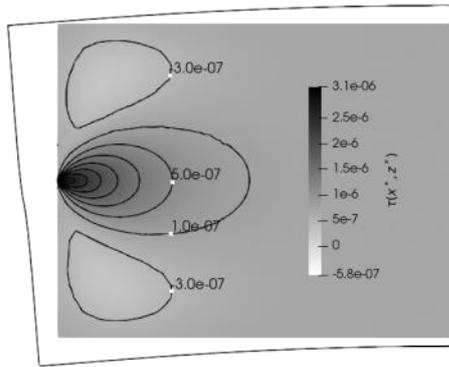


Рисунок 3 - Поле безразмерных касательных напряжений τ левой половины полосы (ось Ox^* проходит горизонтально от левого края по центру). Деформированное состояние (контур)

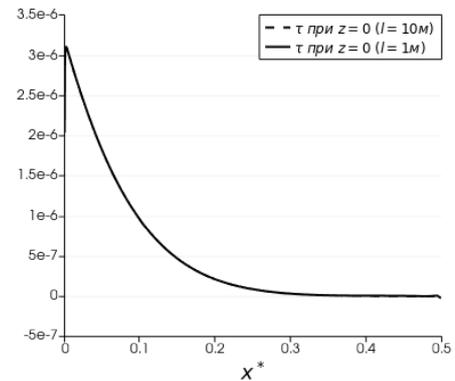


Рисунок 4 - Безразмерные касательные напряжения τ на линии $z=0$ (между слоями) у левого края полосы на участке длиной 0.5 [м] – в зависимости от размерной координаты x^* , отсчитываемой от края

Изображение поля касательных напряжений обнаруживает их концентрацию на стыке слоев вблизи свободного края (см. рис. 3); график распределения по продольной координате при $z=0$ приведен на рисунке 4. Последовательное сгущение шага сетки (локально до 10^{-7} [м]) увеличивало значение экстремума, и его расположение приближалось к внешней границе. Погрешность счета оставляла на свободном краю значение касательных напряжений около 65% от пикового (у концентратора). Для участка протяженностью 0.5 [м] от левой границы результаты при $\varepsilon=0.2$ и $\varepsilon=0.02$ совпали.

Эффект концентрации напряжений и его техническое приложение, сходимость и точность расчета методом конечных элементов (МКЭ) могут быть предметом отдельного исследования. Аналитическое решение 2 показывает меньшее значение пикового напряжения, чем достигаемое при наибольшем сгущении сетки МКЭ. Локализация быстро меняющегося решения и относительное сжатие краевой области при уменьшении ε проявляются для численного и аналитического решений качественно одинаково.

Замечание: параболическая форма основного решения w_0^{ps} (30) и решений на сопоставимых моделях (ссылки на которые приведены в примечании к решению 1) с позиции классической теории указывает на приближенный их характер; точным [27] считается решение для линии изгиба в форме окружности

(постоянство кривизны). На графиках (расчет при $\varepsilon = 0.2$) большая кривизна для результата по МКЭ проявляется в области большого роста параболы решения w_0^{ps} (рисунок 5).

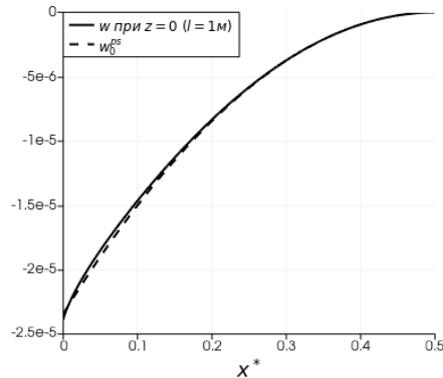


Рисунок 5 - Безразмерные поперечные перемещения w на линии $z=0$ численной модели и аналитическое решение w_0^{ps}

4. Выполнение краевого условия в месте стыка слоев.

Решение 4 (на начальном приближении (12)). При выполнении граничных условий на коротких сторонах полосы (16) приближениями для τ, σ_x вида (14) в получаемых уравнениях (33)–(35) неоднородная часть (строющаяся на величине αT) входит только в соотношение с неизвестными u_0, σ_{z_0} (в структуре выражений $\sigma_{x(n)}$ в рассматриваемой задаче величина αT присутствует одним слагаемым с множителем z^0 , что соотносится со слагаемым, содержащим выражение относительно u_0, σ_{z_0}). Асимптотическая аппроксимация величины αT в месте стыка слоев градиентом порядка ε^{-1} представима функцией

$$\alpha T(z) \approx T \left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \frac{z}{\varepsilon} \right], \quad (37)$$

включающей также слагаемое с z^1 , которое соотносится со слагаемым с w_0, τ_0 , образуя с ним неоднородное уравнение. Применение такой функции при выполнении краевого условия определяет сингулярно возмущенное решение, порождаемое эффектом в месте стыка. Форма решения для w_0, τ_0 в рассматриваемом случае принимается та же (32) (удовлетворяющая граничным условиям на длинных сторонах полосы).

Соотношения для определения трех констант интегрирования здесь – начальные уравнения в строках (33),(34): одно из строки (33) и два из (34), либо,

наоборот, что соответствует выполнению краевых условий приближениями $\tau_{(0)}, \sigma_{x(2)}$ либо $\tau_{(1)}, \sigma_{x(1)}$. Из них неоднородным будет только первое из строки (34). Это уравнение также единственное, в которое войдет константа интегрирования C_2^s , и из него она может быть выражена. Для определения оставшихся двух констант (а это C_n^q) уравнения однородны, отсюда следует тривиальное решение для быстро меняющейся составляющей решения (и всей функции τ_0) и решение для w_0 в виде параболы (медленно меняющееся).

Вместо асимптотического представления (37) аппроксимация ступенчатого перехода свойств материала между слоями с последующим разложением в ряд

$$\alpha T(z) \cong T_0 \left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \operatorname{th} \left(\frac{z}{\varepsilon} \right) \right] \cong T_0 \left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \left(\frac{z}{\varepsilon} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^3 + \dots \right) \right] \quad (38)$$

может позволить дополнить правые части уравнений строки (34), сделав их неоднородными (для получения ненулевой функции τ_0).

Переход к такому представлению дает решение, стремящееся к бесконечности (по крайней мере, в части быстро меняющейся составляющей; для τ_0 такое решение имеет вид концентратора напряжения на стыке слоев возле края полосы). При увеличении количества учитываемых членов ряда (38) число неоднородных уравнений строки (34) возрастает. В левой их части порядок производных от функций w_0, τ_0 увеличивается; также возрастают показатели степени малого параметра ε , стоящего множителем при них. При рассмотрении в уравнениях величин w_0, τ_0 как суммы компонент (26), слагаемые с быстро меняющимися составляющими искомым величин при дифференцировании свой асимптотический порядок не меняют, слагаемые с компонентами нулевой изменемости становятся относительно малыми (при действии старших степеней ε) и могут быть отброшены. Остающиеся слагаемые с быстро меняющимися компонентами соотносятся с функциями в правой части уравнений, где отрицательный показатель степени параметра ε по абсолютной величине растет. В результате увеличение числа принимаемых во внимание членов разложения (38) приводит к росту амплитудных значений быстро меняющихся компонент

решения (функции факториала в структуре выражений $\sigma_{x(n)}$ и ряда (38), относящиеся к левой и правой частям уравнений, взаимно сокращаются).

При описании перехода между слоями функцией (37), асимптотический взгляд на уравнения (34) (с неоднородным первым выражением), абстрагируясь от конкретного представления функций решения (32), позволяет ожидать присутствия быстро меняющихся компонент сингулярно возмущенного решения (локализующегося в места стыка слоев на краю полосы) с асимптотическим порядком

$$w_0^q \wedge \tau_0^q \sim \varepsilon^{-1} \alpha T, \quad (39)$$

что выше на единицу оценки (36) (отвечающей постановке условия для края в целом).

Замечание: Сходимость решения, получаемого методом SVPB, может включать:

а) сходимость приближенных выражений $y_{(n)}$ (вида асимптотических рядов (14)) для искомых функций напряженно-деформированного состояния;

б) сходимость последовательности решений для основных неизвестных ($w_0, \tau_0, u_0, \sigma_{z_0}$), получаемых выполнением граничных условий на длинных сторонах приближениями последовательных итераций $y_{(n)}$ (с увеличением в составе решения количества констант интегрирования);

в) сходимость результатов вычислений величин $y_{(n)}$ (при разных значениях n) по найденным решениям основных неизвестных $w_0, \tau_0, u_0, \sigma_{z_0}$ (подстановкой их в выражения $y_{(n)}$).

По пункту а): в части медленно меняющейся составляющей решения – вычисление производных не изменяет ее асимптотического порядка, а множители с малым параметром ε^n делают ряд асимптотически сходящимся. Для быстро меняющейся компоненты – слагаемые вида $\varepsilon^n y_0^{q(n)}$ (где (n) – символ производной порядка n) имеют один асимптотический порядок; сходимость обеспечивается присутствием в знаменателе факториала от n (идея доказательства высказана автором метода Е.М. Зверевым).

По пункту б): при достаточной малости параметра ε решение, построенное на выражениях начальных итераций (включающих основную часть асимптотического ряда) асимптотически точно и рассмотрение старших итераций не требуется (так понимается взгляд на метод его автора). В рассматриваемой задаче уравнения для компонент нулевой изменчивости τ_0^s, w_0^s (28) являются общими (не зависят от выбора приближений $\tau_{(n)}, \sigma_{x(n+1)}$, которыми выполняются граничные условия на длинных сторонах полосы). Решение τ_0^q сингулярно возмущенных уравнений (31), построенных на приближениях $\tau_{(1)}, \sigma_{z(2)}$, по форме не отличается от полученного из приближений $\tau_{(2)}, \sigma_{z(3)}$ без применения асимптотических соображений (выражение (25), значения корней p в табл. 1); оба решения строятся на двух парах противоположных по знаку действительных корней характеристического многочлена, обеспечивая решение парами затухающих от каждого края компонент (для описания нетривиального решения при условии свободного края). Отличие между этими решениями в том, что второе удовлетворяет уравнениям граничных условий (приближенным по построению) алгебраически точно, первое – асимптотически. В табл. 1 можно наблюдать численно сжатие области краевого эффекта при переходе к старшим итерациям (дополнительный аргумент в пользу выполнения пункта б) при сравнительно больших значениях ε).

Пункт в) связан с аспектом, затронутым в примечании перед решением 1. Для полученного решения формально точно выполненными будут граничные условия, выраженные приближениями $y_{(n)}$, на которых уравнения граничных условий были построены. В отношении компонент напряженно-деформированного состояния y , приближенные выражения для которых $y_{(n)}$ не участвовали напрямую в постановке граничных условий, сходимость может рассматриваться с учетом воззрений пунктов а) и б). В случае асимптотически малых ε наиболее медленно затухающей составляющей ряда в выражении $y_{(n)}$ будет относящаяся к быстро меняющимся компонентам решения; для них скорость убывания пропорциональна факториалу номера итерации в степени «-1»

(следует из пункта а)). Поскольку величины $y_{(n)}$ получаются цепочкой взаимных подстановок, для случая сравнительно больших значений ε можно ожидать (вне зависимости от сходимости выражений как ряда) лучшую совместность (близость к физическому явлению выполненных условий на границе) результатов выражений $y_{(n)}$, наиболее близко расположенных в цепочке элементов оператора A (как в сторону прямой последовательности, так и обратной) к величинам $y_{(n)}$, с помощью которых были выполнены граничные условия.

Решение 5 (на скорректированном начальном приближении). Решение в форме (32) при выполнении граничных условий свободных краев (33),(34) может стать нетривиальным относительно τ_0 , если в дополнение к представлению области перехода функцией (37) рассмотрим новую форму начального приближения (12) с дополненным вторым соотношением (для τ), Целью построения является включение в первое уравнение (33) также величины w_0 .

Для этого в формуле для τ (6) величина σ_x берется выраженной через деформации

(из первых двух соотношений упругости (3))

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z - (1+\nu)\alpha T].$$

Линейные деформации здесь выражаются через перемещения по формулам (4). После подстановок второе соотношение (6) приобретает вид

$$\tau = -\frac{1}{1-\nu^2} \left\{ \varepsilon^2 \int_0^z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dz + \nu\varepsilon \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} \right] - (1+\nu)\varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz \right\} + \tau_0. \quad (40)$$

Конечная разность в квадратных скобках при решении задачи в узкой (шириной 2ε) области перехода между слоями приближенно может быть выражена через значение производной по поперечной координате от функции $\frac{\partial w}{\partial x}$

Если величину w считать медленно меняющейся (в начальном приближении), то дифференцирование (здесь по переменной z) не меняет ее асимптотического порядка. На линии стыка слоев (при $z=0$) поперечные

перемещения, как следует из выражений (13),(14), характеризуются одним слагаемым w_0 (для окрестности – приближенно). С учетом этого

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right|_{z=0} \approx \varepsilon \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right|_{z=0} \square \varepsilon \varepsilon^0 \left. \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right|_{z=0} \approx \varepsilon w'_0.$$

При вычислении интеграла в первом слагаемом (40) также может быть выполнена замена u на u_0 . В результате выражение, полагаемое далее в качестве начального приближения функции τ , приобретает вид

$$\tau_{(0)} = -\frac{1}{1-\nu^2} \left\{ \varepsilon^2 u''_0 z + \nu \varepsilon^2 w'_0 - (1+\nu) \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz \right\} + \tau_0. \quad (41)$$

При выполнении этим приближением первого условия на краю (16), слагаемые с z^0 дают уравнение, расширенное в сравнении с первым уравнением (33):

$$-\frac{\nu}{1-\nu^2} \varepsilon^2 w'_0 + \tau_0 = 0. \quad (42)$$

В остальном решение задачи выполняется по общей схеме.

Действие оператора A при новой форме начального приближения не сохраняет слагаемого с w'_0 в приближениях $\tau_{(n)}$ на последующих итерациях. Общий характер изменений, вызванных корректировкой начального приближения, заметен при сопоставлении выражения для $\tau_{(2)}$ (14) с новой формой (в качестве примера):

$$\begin{aligned} \tau_{(2)} = & \left[\frac{3+2\nu}{1-\nu^2} \varepsilon^6 u''_0 \right] \frac{z^5}{120} + \left[-\frac{2(1-\nu^2)+\nu(3+2\nu)\varepsilon}{1-\nu^2} \varepsilon^5 w'_0 + (3+2\nu) \varepsilon^4 \tau''_0 \right] \frac{z^4}{24} + \\ & + \left[2\varepsilon^4 u''_0 + (1+2\nu) \varepsilon^3 \sigma''_{z0} \right] \frac{z^3}{6} + \left[\varepsilon^3 w'''_0 - (2+\nu) \varepsilon^2 \tau''_0 \right] \frac{z^2}{2} + \left[-\varepsilon^2 u''_0 - \nu \varepsilon \sigma'_{z0} \right] z + [\tau_0] + \\ & + \left\{ \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz \right\} + \left\{ -\varepsilon^3 \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)''' dz dz dz \right\} + \left\{ \frac{\nu(5+2\nu)}{1-\nu^2} \varepsilon^5 \int_0^z \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)^V dz dz dz dz \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

При выборе приближения $\tau_{(0)}$ (начального характера), решение для w_0, τ_0 принимается в виде (32) (с тремя константами интегрирования). Эта форма совпадает с результатом выполнения граничных условий на длинных сторонах полосы приближениями $\tau_{(2)}, \sigma_{z(3)}$ в новой их форме. Уравнения для определения трех неизвестных констант – соотношение (42) и уравнения, аналогичные первым

двум в строке (34) (полученные выполнением второго граничного условия (16) приближением $\sigma_{x(2)}$ с представлением функции αT в виде (37))

$$-\varepsilon^2 w_0'' + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' = T_0 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \varepsilon^{-1},$$

$$\frac{2(1 - \nu^2) + \nu(3 + 2\nu) \varepsilon}{1 - \nu^2} \varepsilon^4 w_0^{IV} - (3 + 2\nu) \varepsilon^3 \tau_0''' = 0.$$

Численно сравнение результата при выполнении краевого условия у стыка слоев, показано на рисунках 6 и 7, с предшествующими решениями характеризует его как оценку сверху.

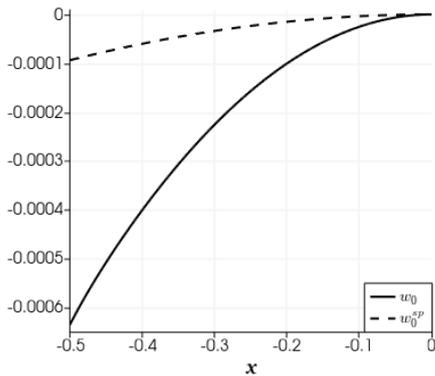


Рисунок 6 - Функция $w_0(x)$ и частное решение $w_0^{ps}(x)$ при $\varepsilon=0.1$

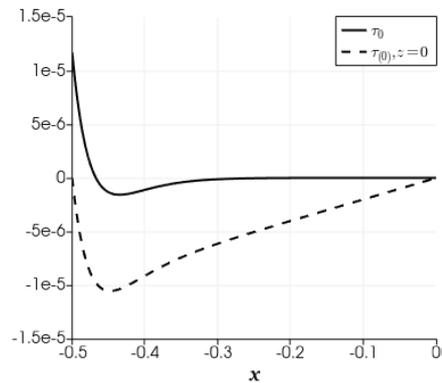


Рисунок 7 - Функция $\tau_0(x)$ и касательные напряжения $\tau_{(0)}$ на линии $z=0$ при $\varepsilon=0.1$

Величина касательных напряжений в приближении $\tau_{(0)}$ удовлетворяет первому краевому условию (16) точно. Для последующих приближений в выражениях $\tau_{(n)}$ слагаемое при z^0 (не обращающееся в ноль на линии $z=0$) меняет форму (например, в выражении (43)); выполнение граничного условия имеет приближенный (асимптотический) характер. На рис. 7 значения, принимаемые величинами $\tau_{(0)}$ и τ_0 вблизи края полосы, имеют один десятичный порядок. При уменьшении значения параметра тонкостенности (до $\varepsilon=0.02$) порядок этих величин сохраняется, сопровождаясь некоторым ростом их амплитуд (здесь, как в решении 2 и решении 3 и оценке (39), величина τ_0 ограничена). Функция w_0 на линии $z=0$ по амплитуде значительно превосходит величину частного решения w_0^{sp} , проявляясь в основном медленно меняющейся составляющей.

Графики приведены для значения $\varepsilon=0.1$ – меньшем, чем верхнее его значение в примере решения 2. Большие значения параметра ε менее

свойственны для метода, включающего асимптотические переходы, и показательны с точки зрения сохранения его применимости при увеличении ε . Здесь при $\varepsilon=0.2$ корни характеристического многочлена переходят в комплексную область.

Особенностью полученного решения являются также дробные значения показателя степени малого параметра ε в корнях характеристического многочлена, что влечет корректировку в учете изменяемости компонент решения (27) и отражается на выполнении оценок асимптотических порядков.

5. Подход к точному решению

Оператор A в формуле преобразования (5) задает отображение вектора неизвестных y в себя. Правая сторона этого равенства определяет эквивалент вектору y в виде выражений для всех его составляющих (в форме соотношений (6)–(8)). Оператор A , будучи примененным повторно к этим выражениям, создает для вектора y новый эквивалент (в смысле определения ими одной величины, стоящей в левой части) – выражения следующей итерации (можно сказать, этим находится новая форма самого оператора).

При поэлементном выполнении оператора A (выражений (6)–(8) в очередности первой последовательности (11) в рассматриваемом случае) и начальных значениях в виде самих искомых величин (вместо начальных приближений (12))

$$w_{[0]} = w(x, z), \quad \tau_{[0]} = \tau(x, z) \quad (44)$$

результат последовательных подстановок в элементах оператора имеет структуру, сходную с приближениями $y_{(n)}$ (13), (14), в частности

$$\begin{aligned} \tau_{[2]} = & -2\varepsilon^5 \int_0^z \int_0^z \int_0^z \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} dzdzdz + \varepsilon^4 (3+2\nu) \int_0^z \int_0^z \int_0^z \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4} dzdzdz + \\ & + [2\varepsilon^4 u_0^{IV} + (1+2\nu)\varepsilon^3 \sigma_{z0}'''] \frac{z^3}{6} + [\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0''] \frac{z^2}{2} + [-\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon \nu \sigma_{z0}'] z + \tau_0 + \\ & + \left\{ \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz - \varepsilon^3 \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)''' dzdzdz \right\}, \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{[2]} = & -(1+2\nu)\varepsilon^4 \int_0^z \int_0^z \int_0^z \int_0^z \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} dzdzdzdz + 2(1+\nu)^2 \varepsilon^4 \int_0^z \int_0^z \int_0^z \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4} dzdzdzdz \\
& + \left[(1+2\nu)\varepsilon^3 u_0''' + 2\nu(1+\nu)\varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \right] \frac{z^3}{6} + \left[\nu\varepsilon^2 w_0'' - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' \right] \frac{z^2}{2} + \\
& + \left[-\nu\varepsilon u_0' + \varepsilon(1-\nu^2)\sigma_{z_0} \right] z + w_0 + (1+\nu) \left\{ \int_0^z \alpha T dz - \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dzdzdz \right\}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Выражения новых представлений $y_{[n]}$ исходного вектора y по построению не содержат приближений и отвечают точным значениям y . Функции y_0 – их значения на нижней границе интервала интегрирования (здесь взгляды на сущность функций y_0 в контексте метода затронуты в комментарии к формуле (9)). В символическом виде структура этих выражения может быть записана как

$$y = I_z D_x y + z^k D_x y_0 + I_z D_x (\alpha T). \tag{47}$$

Здесь I_z, D_x – операторы (в слагаемых выражения их вид различен), включающие интегрирование (по переменной z) и дифференцирование (по x), соответственно; z^k – множители полиномиального характера к слагаемым оператора D_x .

Направление решения. Соотношения вида (47) дают выражение каждой из искомым неизвестных задачи y через шесть величин: две неизвестные компоненты вектора y , выбранные начальными значениями (здесь w, τ (44)), и функции y_0 (это $w_0, \tau_0, u_0, \sigma_{z_0}$). Выражения для каждой искомой неизвестной, полученные на разных итерациях, являются эквивалентными между собой (в указанном выше смысле). Каждое из выражений результирует действие всех элементов оператора A – после выполнения последовательными подстановками всех его элементов. Разрешающими уравнениями для указанных шести неизвестных могут быть, например, соотношения для $\tau_{[n]}, w_{[n]}$ со значениями n от 1 до 3.

Применение в получаемых уравнениях, как однородных, подстановки

$$\begin{aligned}
w &= e^{p_x x + p_z z}, \quad \tau = \lambda_\tau e^{p_x x + p_z z}, \\
w_0 &= e^{p_x x}, \quad \tau_0 = \lambda_{\tau_0} e^{p_x x}, \quad u_0 = \lambda_{u_0} e^{p_x x}, \quad \sigma_{z_0} = \lambda_{\sigma_{z_0}} e^{p_x x},
\end{aligned} \tag{48}$$

где величины p, λ (с нижними индексами) – неизвестные константы, приводит в решении относительно этих величин к случаям $p_z \neq 0$ и $p_z = 0$ (отличающимся характером вычисления интегралов такого вида, как в выражениях (45),(46)).

Для случая $p_z \neq 0$, полаганием независимости обращения в ноль коэффициентов (выражений) при линейно независимых функциях, находятся константы:

$$p_z = \pm i \varepsilon p_x, \lambda_{\tau_0} = \lambda_{\tau} = \varepsilon \frac{p_x}{1+\nu}, \lambda_{u_0} = -i, \lambda_{\sigma_{z0}} = i \varepsilon \frac{p_x}{1+\nu}. \quad (49)$$

Последние три величины приведены для выражения p_z (первого в строке) со знаком плюс (в качестве примера). Количество уравнений в этом способе расчета превосходит количество неизвестных; решение определяется при условии совместности всем уравнениям.

При значении $p_z = 0$ аналогичным образом находятся соотношения:

$$p_x = 0, \lambda_{\tau_0} = \lambda_{\tau}, \lambda_{\sigma_{z0}} = 0. \quad (50)$$

Форма решения y^g однородных уравнений имеет вид

$$y^g = P_{mr}^{(f)} e^{p_{xm}x + p_{xm}^{(f)}z}. \quad (51)$$

Верхний индекс f ($f = \{1,2\}$) указывает на величины, относящиеся к корням p_z , определяемым для каждого корня p_x первым соотношением (49); m – номер корня p_x (по f и m выполняется суммирование); P_{mr} – многочлен степени r (отвечает кратности корня p_x) от x и z (для функций y_0^g – только от x) с множителями вида $\lambda_{y_{jkl}}^{(f)} C_{jkl}^{(f)}$ (здесь y указывает на определяемую функцию y^g ; $j = \{0,m\}$; k и l принимают значения показателей степени x и z слагаемого; $\lambda_{w_0jkl}^{(f)} = \lambda_{w_{jkl}}^{(f)} = 1$; $C_{jkl}^{(f)}$ – константы интегрирования). Форма (51) является общей для неизвестных y и y_0 ; для y_0 в показателе степени экспоненты присутствует только слагаемое с p_x (48).

Оставшиеся невычисленными константы $p_x, \lambda_{\tau jkl}^{(f)}, \lambda_{u_0 jkl}^{(f)}, C_{jkl}^{(f)}$ находятся выполнением граничных условий (на всех сторонах полосы). Уравнения граничных условий составляются на выражениях для компонент напряженно-

деформированного состояния $y_{[n]}$ (подобных (45),(46)) с подстановкой в них формы решения (51). Входящие в выражения $y_{[n]}$ слагаемые с αT представляют собой частные решения неоднородных уравнений (47) (при найденных y^g).

Примечание (об изменяемости решения в направлениях осей). Случаи $p_z = 0$ и $p_z \neq 0$ отвечают медленно и быстро меняющимся составляющим решения. Следствием первого соотношения (50) является равная (нулевая) асимптотическая изменяемость по переменным x, z определяемой им медленно меняющейся составляющей решения.

Для быстро меняющейся компоненты, в случае комплексных корней p_x с одним асимптотическим порядком действительной и мнимой частей, множитель ε в первом выражении (49) вносит корректировку на разный масштаб безразмерных координат x и z . Изменяемость решения в направлениях обеих размерных осей равная.

Примечание (о форме, в которой ищется решение). Функция двух координат в показателе степени экспоненты (48) задает поверхность в виде растущей волны с прямым фронтом. Существуют подстановки более общего вида, применяемые при решении дифференциальных уравнений [23]. Ожидается возможным применение функций в показателе степени экспоненты в виде смешанных полиномов от x и z .

Заключение.

В процессе поиска подхода, ведущего к определению ненулевой компоненты касательных напряжений на стыке продольных слоев полосы, рассмотрен ряд постановок и частных приемов решения, в том числе ранее не применявшихся в составе метода SVPB.

Постановка условий на краю в целом может привести к ненулевому результату для касательных напряжений на линии стыка при введении в модель физической гипотезы, отменяющей влияние свободного края в части, подобной дополнительному действию изгибающего момента в обычной теории (распространяющегося во внутреннюю область полосы). Частное решение

неоднородного уравнения, получаемое для функции поперечных перемещений точек на горизонтальной оси симметрии, с высокой точностью совпадает с численным расчетом по МКЭ. Общее решение для касательных напряжений также показывает сопоставимый результат. Наблюдаемое явление заключается в концентрации напряжений вблизи края полосы на линии стыка слоев.

Постановка краевого условия в месте стыка слоев приводит к сопоставимому результату без введения дополнительных предположений. При способе разложения в ряд функции, описывающей переход свойств материала между слоями, решение для касательных напряжений типа концентратора неограниченно (в упругой области; расчеты по МКЭ при сгущении сетки также приводили к росту напряжений, их сходимость не исследовалась). При асимптотическом способе описания перехода свойств материала (в виде градиента в узкой области) для получения решения дополнительно учитывались факторы (в функции начального приближения), асимптотически следующие из исходных уравнений. Найденное решение, качественно и количественно сопоставимое с предшествующими, в большей мере носит асимптотический характер.

Способ решения дифференциальных уравнений (аналогичный применяемому для систем уравнений, разрешенных относительно первых производных) на соотношениях старших итераций приводит к результату, качественно не уступающему асимптотическому (для начальных итераций). Исключение влияния асимптотических переходов обеспечивает формально точное выполнение исходных уравнений граничных условий (в приближении рассматриваемых итераций).

Подход, дающий трактовку методу SVPB, как ведущему к точному решению (основывается на действии оператора метода на исходное точное значение искомых функций), ожидает дополнительного исследования.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

Список источников

1. Зверяев Е.М. Построение основного напряженного состояния тонкой упругой оболочки методом простых итераций. // Деформирование и разрушение элементов конструкций летательных аппаратов. М. : МАТИ, 1989. С. 56–63.
2. Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 5/6. С. 823–833.
3. Зверяев Е.М. Современная трактовка принципа и полуобратного метода Сен-Венана // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. № 16 (5). С. 390–413.
4. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: https://mai.ru/upload/iblock/876/8767af08970b8e67ef0a1b7_1d2763cd0.pdf (дата обращения: 12.04.2025).
5. Зверяев Е.М. Низкочастотные колебания длинной упругой полосы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2021. № 6. С. 111–129.
6. Хоа В.Д. Температурные напряжения в элементах тонкостенных конструкций из слоистых материалов : дис. ... канд. техн. наук. М., 2024, 196 с.
7. Zveryayev Y.M. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beams and plates // Journal of applied mathematics and mechanics. 2003. Vol. 67, no. 3. P. 425–434.
8. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, № 4. С. 668–686.
9. Полубаринова-Кочина П.Я. К вопросу об устойчивости пластинки // Прикладная математика и механика 1936. Т. 3, № 1. С. 16–22.
10. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bulletin of the American Mathematical Society. 1955. Vol. 61, no. 6. С. 485–504.

11. Хоа В.Д., Зверяев Е.М. Аналитическое решение для термонапряженной двуслойной упругой полосы // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177653> (дата обращения: 04.04.2025).
12. Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 83. 19 с. DOI:10.20948/prepr-2018-83. URL: https://keldysh.ru/papers/2018/prep2018_83.pdf (дата обращения: 15.08.2023).
Режим доступа: сайт www.mathnet.ru.
13. Зверяев Е.М. Температурная деформация длинной упругой полосы // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22 (3). С. 293–304.
14. Зверяев Е.М., Рынковская М.И., Хоа В.Д. Построение решения уравнений теории упругости слоистой полосы на основе принципа сжатых отображений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. № 19 (5). С. 421–449.
15. Хоа В.Д., Зверяев Е.М. Температурная деформация тонкой многослойной упругой полосы // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. 2023. № 23. С. 50–60.
16. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Напряженно-деформированное состояние тонкой прямоугольной полосы при температурном воздействии // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178462&ysclid=md060o542w533431211> (дата обращения: 07.10.2024).
17. Ляв А. Математическая теория упругости. М. ; Л. : ОНТИ, 1935. 674 с.
18. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. М. ; Л.: ОНТИ. Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937. 110 с.
19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1976. 543 с.
20. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Уточненные уравнения термонапряженно-деформированного состояния балки из композиционного материала // XXXIII Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2021). 2021. С. 89-96.

21. Зверьяев Е.М., Пыхтин А.В. Решение задачи нагружения полосы методом Сен-Венана – Пикара – Банаха // Материалы XXI международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021). 2021. С. 214–215.
22. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. № 3. С. 26–47.
23. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1976. 589 с.
24. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. М.: Гостехиздат. 1953. 544 с.
25. Зверьяев Е.М., Пыхтин А.В., Хоа В.Д. Пространственная задача для прямоугольной упругой пластины // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 4 (297). С. 2–11.
26. Боли Б., Уэйнер Д. Теория температурных напряжений. М. : Мир, 1964. 517 с.
27. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М. : Наука, 1966. 636 с.
28. Машиностроение : энциклопедия. Разд. I. Инженерные методы расчетов. Т. 1-3. Динамика и прочность машин. Кн. 2. Теория механизмов и машин / под общ. ред. К. С. Колесникова. М. : Машиностроение. 1995. 624 с.

References

1. Zveryaev E.M. Construction of the main stress state of a thin elastic shell by the method of simple iterations. // In the collection Deformation and destruction of structural elements of aircraft. Moscow: MATI, 1989. Pp. 56-63.
2. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method for integrating the equations of the theory of elasticity of thin-walled systems // PMM. 2019. Vol. 83, No. 5–6. Pp. 823–833. // Applied Mathematics and Mechanics.
3. Zveryaev E.M. Modern interpretation of the principle and semi-inverse method of Saint-Venant // Structural Mechanics of Engineering Structures and Buildings. 2020. No. 16(5). Pp. 390-413.

4. Zveryaev E.M., Olehova L.V. Iterative interpretation of the semi-inverse Saint-Venant method in constructing equations of thin-walled structural elements made of composite material // Trudy MAI. 2015. No. 79. URL: <https://mai.ru/upload/iblock/876/8767af08970b8e67ef0a1b71d2763cd0.pdf> (date of access: 12.04.2025).
5. Zveryaev E.M. Low-frequency vibrations of a long elastic strip // Izvestiya RAS. Mechanics of Solids. 2021. No. 6. Pp. 111-129.
6. Khoa V.D. Temperature stresses in elements of thin-walled structures made of layered materials. Diss. for the dissertation of Cand. Sci. (Eng.). Moscow, 2024, 196 p.
7. Zveryayev Y.M. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beams and plates // Journal of applied mathematics and mechanics. Elsevier, 2003. Vol. 67, No. 3. Pp. 425–434.
8. Goldenweiser A.L. Construction of an approximate theory of plate bending by the method of asymptotic integration of the equations of elasticity theory // PMM. 1962. Vol. 26, No. 4. Pp. 668–686.
9. Polubarinova-Kochina P.Ya. On the stability of a plate // PMM. 1936. Vol. 3, No. 1, Pp. 16–22.
10. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bulletin of the American Mathematical Society. 1955. Vol. 61, No. 6. Pp. 485–504.
11. Khoa V.D., Zveryaev E.M. Analytical solution for a thermally stressed two-layer elastic strip // Trudy MAI. 2023. No. 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177653> (date of access: 04.04.2025).
12. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method for integrating partial differential equations with a small parameter // Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences. 2018. No. 83. URL: https://keldysh.ru/papers/2018/prep2018_83.pdf (date accessed: 15.08.2023).
13. Zveryaev E.M. Temperature deformation of a long elastic strip // RUDN Journal of Engineering Research. 2021. Vol. 22(3). Pp. 293-304.
14. Zveryaev E.M., Rynkovskaya M.I., Khoa V.D. Construction of a solution to the equations of the theory of elasticity of a layered strip based on the principle of

compressed mappings // Structural Mechanics of Engineering Structures and Buildings. 2023. No. 19(5). Pp. 421-449.

15. Khoa V.D., Zveryaev E.M. Temperature deformation of a thin multilayer elastic strip // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2023. No. 23. Pp. 50-60.

16. Khoa V.D., Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. Stress-strain state of a thin rectangular strip under temperature influence // Trudy MAI. 2024. No. 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178462&ysclid=md060o542w533431211> (date of access: 07.10.2024).

17. Love A.E.H. Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Moscow, Leningrad: ONTI. 1935. 674 p. 1935.

18. Lebedev N.N. Temperature stresses in the theory of elasticity. Moscow, Leningrad: ONTI. Glavnaya redaktsiya tekhniko-teoreticheskoi literatury Publ. 1937. 110 p.

19. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka. 1976. 543 p.

20. Hoa V.D., Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. Refined equations of the thermal stress-strain state of a beam made of composite material // XXXIII International Innovative Conference of Young Scientists and Students on Problems of Mechanical Engineering (MIKMUS-2021). 2021. Pp. 89-96.

21. Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. Solution of the strip loading problem by the Saint-Venant-Picard-Banach method // Proceedings of the XXI International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems (VMSPS'2021). 2021. Pp. 214-215.

22. Vasiliev V.V. On the theory of thin plates // Izvestiya RAS. Mechanics of Solids. 1992. No. 3. P. 26-47.

23. Kamke E. Handbook of ordinary differential equations. Moscow: Nauka. 1976. 589 p.

24. Goldenweiser A.L. Theory of thin elastic shells. Moscow: Gostekhizdat. 1953. 544 p.

25. Zveryaev E.M., Pykhtin A.V., Khoa V.D. Spatial problem for a rectangular elastic plate // Structural Mechanics of Engineering Structures and Buildings. 2021. No. 4 (297). Pp. 2-11.
26. Boli B., Weiner D. Theory of temperature stresses. Moscow: Mir. 1964. 517 p.
27. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. Plates and shells. Moscow: Nauka. 1966. 636 p.
28. Mechanical engineering. Encyclopedia. Dynamics and strength of machines. Theory of mechanisms and machines. Vol. 1-3. In 2 books. Book 2 / Under the general editorship of K. S. Kolesnikov. Moscow: Mechanical engineering. 1995. 624 p.

Информация об авторах

Александр Вячеславович Пыхтин, кандидат технических наук, доцент кафедры 914 “Проектирование сложных технических систем”, Московский авиационный институт, г. Москва, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1961-2237>; SPIN-код: 8057-0081; e-mail: pykhtinav@mai.ru

Information about the authors

Alexander V. Pykhtin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department 914 “Design of Complex Technical Systems”, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1961-2237>; SPIN-код: 8057-0081; e-mail: pykhtinav@mai.ru

Получено 25 сентября 2025 ● Принято к публикации 10 декабря 2025 ● Опубликовано 27 февраля 2026
Received 25 September 2025 ● Accepted 13 December 2025 ● Published 27 February 2026
