

Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 4. С. 151–160  
Thermal processes in engineering, 2025, vol. 17, no. 4, pp. 151–160

Научная статья  
УДК 536.21  
URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=185063>  
EDN: <https://www.elibrary.ru/IMXMCX>

## Моделирование процесса теплопроводности в пористой среде с переменными во времени граничными условиями

К.В. Губарева<sup>1✉</sup>, А.В. Еремин<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Самарский государственный технический университет, Самара, Российская Федерация  
<sup>1</sup>[r.kristina2017@mail.ru](mailto:r.kristina2017@mail.ru)✉

**Аннотация.** Исследование направлено на решение нестационарной задачи теплопроводности для пористых материалов на основе трижды периодических минимальных поверхностей, где классические методы неэффективны из-за сложной геометрии и переменных граничных условий. Предложен гибридный численно-аналитический подход, основанный на интегральном методе теплового баланса с введением новой функции и дополнительных граничных условий, что позволяет свести задачу к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Цель работы – разработка приближенного аналитического решения для пористой пластины типа Неовиуса с учетом топологической структуры элементарной ячейки и его верификация. Результаты демонстрируют согласование с данными САЕ-моделирования в ANSYS (погрешность  $\leq 4\%$ ) и представлены в виде графиков температурного распределения. Полученные решения, не требующие ресурсоемких вычислений, применимы для проектирования теплообменников и термозащитных систем, обеспечивая баланс между точностью и доступностью для инженерной практики.

**Ключевые слова:** нестационарная теплопроводность, трижды периодическая минимальная поверхность Неовиуса, интегральный метод теплового баланса, приближенное аналитическое решение, эффективная теплопроводность, упорядоченные пористые структуры

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность редакции журнала и рецензентам за внимательное отношение к статье.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект №23-79-10044, <https://rscf.ru/project/23-79-10044/>).

**Для цитирования.** Губарева К.В., Еремин А.В. Моделирование процесса теплопроводности в пористой среде с переменными во времени граничными условиями // Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 4. С. 151–160. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=185063>

Original article

## Modeling of the heat conduction process in a porous medium with time-varying boundary conditions

K.V. Gubareva<sup>1✉</sup>, A.V. Eremin<sup>2</sup><sup>1,2</sup>Samara State Technical University, Samara, Russian Federation<sup>1</sup>r.kristina2017@mail.ru✉

**Abstract.** The present study is devoted to solving the non-stationary heat transfer problem for porous materials structured on the basis of triply periodic minimal surfaces (TPMS). These surfaces, such as gyroids, Schwarz and Neovius surfaces, find application in biomedical implants, filtration systems and aerospace thermal protection due to their unique topology combining high strength with minimal density. However, their complex geometry, including tortuous channels and non-uniform pore distribution, makes traditional heat transfer analysis methods, such as Fourier analytical solutions or standard finite element modeling, of little use. To overcome these limitations, an approximate analytical approach based on a modified integral heat balance method is proposed. The key innovation is the introduction of a special function approximating the heat flux in a porous medium and additional boundary conditions taking into account the topology of the unit cell of the material. This made it possible to reduce the original system of partial differential equations to a system of ordinary differential equations, which significantly simplified the calculations without losing the physical reliability of the model. The main objective of the work was to develop an approximate analytical solution for a Neovius plate, one of the basic classes of TPMP structures characterized by high symmetry and minimal surface energy. Particular attention is paid to taking into account the microstructural features of the material, including the pore distribution, the thickness of the partitions and their effect on the effective thermal conductivity. To verify the method, CAE modeling in ANSYS was used, where a three-dimensional parametric model of the unit cell with an adaptive grid was created, ensuring the resolution of local temperature gradients. Comparison of the results demonstrated high consistency: the maximum deviation of the analytical solution from the numerical one did not exceed 4 % over the entire range of time and space variables. The practical significance of the study is due to the possibility of using the obtained solutions in the design of energy-efficient heat exchangers, thermal protection systems for aerospace vehicles, and porous catalytic reactors. In addition, the developed approach provides flexibility: it allows adaptation to other types of TPMS structures by adjusting the unit cell parameters.

**Keywords:** non-stationary thermal conductivity, triply periodic minimal Neovius surface, integral method of heat balance, exact analytical solution, effective thermal conductivity, ordered porous structures.

**Acknowledgements.** The authors would like to thank the Editorial board of the journal and the reviewers for their attentive attitude to the article.

**Funding.** The research was carried out with funds from a grant from the Russian Science Foundation (project No. 23-79-10044, <https://rscf.ru/project/23-79-10044/>).

**For citation.** Gubareva K.V., Eremin A.V. Modeling of the heat conduction process in a porous medium with time-varying boundary conditions. *Thermal processes in engineering*. 2025, vol. 17, no. 4, pp. 151–160. (In Russ.). URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=185063>

### Введение

Современные технологические тенденции, направленные на повышение энергоэффективности и миниатюризацию устройств, стимулируют

активный поиск материалов с уникальными теплофизическими характеристиками. Особый интерес представляют пористые среды, сочетающие низкую плотность, высокую удельную по-

верхность и регулируемую теплопроводность. Эти свойства делают их незаменимыми в таких областях, как строительство [1–2], где они используются для теплоизоляции и снижения энергопотерь; аэрокосмическая отрасль [3–4], требующая легких и термостойких материалов; и энергетика [5–6], где пористые структуры применяются в системах теплообмена и аккумуляции энергии. Однако моделирование теплопереноса в таких материалах остается сложной научно-технической задачей. Гетерогенная структура пористых сред, нелинейные эффекты тепломассопереноса и необходимость решения параболических уравнений в частных производных создают значительные вычислительные сложности, ограничивающие точность прогнозирования их теплового поведения.

Для анализа нестационарных тепловых процессов традиционно применяются интегральные методы теплового баланса, основанные на концепции глубины термического слоя [7–9]. Эти методы эффективны в задачах, где отсутствуют точные аналитические решения, однако их ключевым ограничением остается искусственное разделение процесса на две стадии: распространение температурного фронта и квазистационарный режим. Такой подход противоречит парадоксу бесконечной скорости теплопереноса, заложенному в классическом уравнении Фурье [10], согласно которому температурное возмущение мгновенно распространяется по всему объему материала. Исследования демонстрируют, что с увеличением числа приближений время достижения фронтом центра материала асимптотически стремится к нулю [10], что приближает модель к физической реальности. Тем не менее, в долгосрочных процессах доминирование второй стадии приводит к накоплению погрешностей, актуализируя разработку методов, исключающих разделение на стадии и обеспечивающих целостное описание динамики теплопереноса.

Значительные трудности возникают при моделировании процессов переноса в пористых средах с упорядоченной микроструктурой, в частности в материалах на основе трижды периодических минимальных поверхностей, включая гироиды, поверхности Неовиуса и другие подобные топологии [11–12]. Их геометрическая

предсказуемость позволяет точно прогнозировать макроскопические свойства (теплопроводность, механическую прочность) через параметры ячейки, такие как толщина стенок и пористость. Например, увеличение пористости ТППП-структур повышает термическое сопротивление, но снижает механическую прочность, что требует многокритериальной оптимизации для конкретных приложений. Однако моделирование таких материалов осложняется необходимостью учета нестационарных граничных условий, сложной топологии и взаимодействия между твердой фазой и жидкостью или газом в порах. Эти факторы ограничивают применимость классических методов, ориентированных на однородные среды, и диктуют потребность в новых подходах, сочетающих аналитическую строгость с вычислительной эффективностью.

В данной работе предложен модифицированный интегральный метод теплового баланса, устраняющий необходимость разделения процесса на стадии. На примере пористой пластины с переменными во времени граничными условиями первого рода показано, что введение новой искомой функции и дополнительных граничных условий позволяет получить аналитическое решение, согласующееся с физической реальностью. Верификация метода выполнена на ТППП-структурах типа Неовиуса с использованием CAE-моделирования в ANSYS. Сравнение результатов численного моделирования с аналитическими решениями продемонстрировало погрешность менее 4 %, подтвердив адекватность подхода. Исключение стадии распространения температурного фронта не только упрощает расчеты, но и повышает точность прогнозирования температурных полей в динамических режимах, таких как циклический нагрев/охлаждение или импульсные тепловые воздействия.

Практическая значимость исследования охватывает широкий спектр инженерных приложений. В металлургии метод применим для моделирования термообработки изделий (закалка, отжиг), где температура поверхности изменяется линейно во времени, например, при нагреве валов в печах. В строительстве он позволяет оптимизировать прогрев бетонных конструкций в условиях низких температур, минимизируя риск образования трещин. Для геотермальных систем критически важна точная оценка распре-

деления температурных полей в грунте при сезонных изменениях поверхностных температурных условий. Применительно к электронным устройствам, разработанный метод обеспечивает расчет температурного режима систем охлаждения с учетом линейного роста тепловыделения компонентов. Химическая промышленность может использовать подход для контроля тепловых режимов реакторов с переменными граничными условиями, а климатология – для моделирования теплового баланса океанов при суточных изменениях температуры воздуха. Даже в пищевой индустрии метод актуален для расчета режимов пастеризации или стерилизации, где точное управление температурными профилями критично для сохранения качества продукции.

Разработанный метод вносит вклад в развитие технологий прогнозирования тепловых характеристик сложных пористых сред, обеспечивая баланс между точностью и вычислительной ресурсоемкостью. Его внедрение в инженерную практику позволит оптимизировать проектирование энергоэффективных систем, снизить риски перегрева в критических узлах и сократить затраты на экспериментальные исследования. Перспективы работы связаны с адаптацией метода для трехмерных ТПМП-структур, учета турбулентности в порах и взаимодействия с фазовыми переходами, что откроет новые возможности для применения в аддитивных технологиях и «зеленой» энергетике.

### Материалы и методы

В данном исследовании анализируется процесс теплопроводности в пористом материале, архитектура которого построена на основе трижды периодической минимальной поверхности (ТПМП) Неовиуса. ТПМП, или Triply Periodic Minimal Surfaces, представляют собой класс геометрических структур, бесконечно периодических в трех ортогональных направлениях и обладающих нулевой средней кривизной [13]. Указанное свойство, выражающееся в минимизации площади поверхности при фиксированных граничных условиях, позволяет целенаправленно проектировать материалы на основе трижды периодических минимальных поверхностей с требуемыми теплофизическими параметрами. Несмотря на бесконечность ТПМП, их структура может быть описана повторяющейся элементар-

ной ячейкой (рис. 1), которая служит базовым модулем для моделирования макроскопических свойств материала. Параметры ячейки (толщина стенок, размер пор) позволяют регулировать эффективную теплопроводность и механическую прочность материала. Например, увеличение пористости снижает массу, но повышает термическое сопротивление. На рисунке 1 представлена элементарная ячейка ТПМП Неовиуса, формирующая пористую среду. Такая структура сочетает высокую удельную поверхность, способствующую интенсивному теплопереносу, и анизотропию, которая может быть использована для оптимизации тепловых потоков в заданных направлениях.

В настоящей работе рассматривается задача нестационарного теплопереноса в пористой среде, структурированной по принципу трижды периодической минимальной поверхности типа Неовиуса, при наличии переменных во времени граничных условий теплового воздействия (рис. 1).

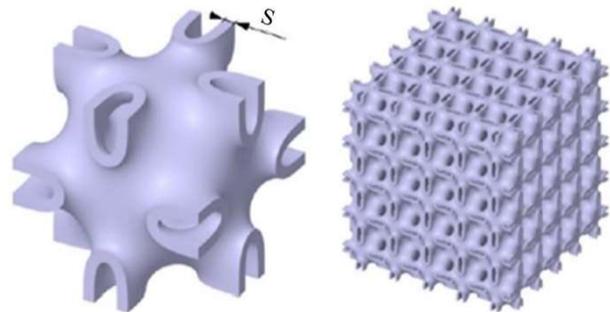


Рис. 1. Трижды периодическая минимальная поверхность Неовиуса, сгенерированная в Ansys

Математическая постановка имеет вид [14]:

$$\frac{\partial T(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \times \rho} \frac{\partial^2 T(\eta, \tau)}{\partial \eta^2}; \quad (0 \leq \eta \leq l; \tau > 0) \quad (1)$$

$$T(\eta, 0) = T_0; \quad \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \eta} = 0; \quad T(l, \tau) = T_0 + b \times \tau;$$

где  $T$  – температура, К;  $c$  – удельная теплоемкость, Дж/(кг×°С);  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $\tau$  – время, с;  $\eta$  – координата, м;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м×К);  $T_0$  – начальная температура, К;  $l$  – половина толщины пластины;  $b$  – скорость нагревания стенки, К/с.

Для определения макроскопических теплофизических характеристик пористого материала применен метод вычислительного усреднения,

основанный на концепции минимального репрезентативного объема [14–15]. В рамках этого подхода исходное уравнение теплопроводности (1) преобразуется к осредненной форме:

$$\frac{\partial T(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda_{eff}}{c_{eff} \times \rho_{eff}} \frac{\partial^2 T(\eta, \tau)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где  $c_{eff}$ ,  $\rho_{eff}$ ,  $\lambda_{eff}$  – усредненные (эффективные) значения плотности, теплоемкости и теплопроводности материала. Очевидно, что  $c_{eff} = c_s$ , где  $c_s$  – теплоемкость материала, не зависящая от пористости  $\varphi$ .

Плотность пористой среды выражается через пористость  $\varphi$ :

$$\rho_{eff} = \rho_s \times (1 - \varphi), \quad (3)$$

где  $\rho_s$  – плотность исходного материала,  $\varphi = 1 - \frac{V_{ТПМП}}{V}$  – пористость;  $V_{ТПМП}$  – объем ТПМП-ячейки;  $V$  – объем куба, в который вписана ячейка.

Авторами [15] теплопроводность определяется по формуле:

$$\lambda_{eff} = \lambda_s \times 0,73 \times (1 - \varphi), \quad (4)$$

где  $\lambda_s$  – теплопроводность материала каркаса.

Для верификации формулы (4) эффективная теплопроводность материала измерена экспериментально на установке ИТП-МГ4 «250» в соответствии со стандартом ISO 8301. В ходе эксперимента верхняя грань образца нагревалась до  $36 \pm 0,5$  °С, а нижняя охлаждалась до  $12 \pm 0,5$  °С. Критерием стационарности процесса служило изменение температуры не более чем на 0,1 °С/мин, достигнутое через 45 минут после начала измерений. Пористость образца 0,78; свойства материала: теплоемкость – 800 Дж/(кг×К); плотность – 1412 кг/м<sup>3</sup>; теплопроводность – 0,375 Вт/(м×К).

Эффективная теплопроводность по формуле (4) – 0,06 Вт/(м×К), испытываемого образца с учетом погрешностей измерений – 0,066 Вт/(м×К).

Подстановка (3) и (4) в (2) позволяет получить уравнение с эффективной температуропроводностью  $a_s$ :

$$\frac{\lambda_s \times (1 - \varphi)}{a_s \times \lambda_{eff}} \frac{\partial T(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(\eta, \tau)}{\partial \eta^2};$$

Для универсализации анализа введены безразмерные величины:

$\Theta = (T - T_0) / T_0$  – относительная температура;  
 $x = \eta / l$  – безразмерная координата;

$Fo = \frac{a_s \times \tau}{L^2}$  – число Фурье (безразмерное

время);

$A = \frac{\lambda_s}{\lambda_{eff}}$  – коэффициент, определяющийся

термическими характеристиками материала структурной матрицы и эффективной теплопроводности гомогенизированной среды;

$B = b \times l^2 / (a_s \times T_0)$  – безразмерная скорость нагревания стенки.

В безразмерной форме уравнение теплопроводности (1) принимает вид:

$$A \times (1 - \varphi) \times \frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(x, Fo)}{\partial x^2}; \quad (5)$$

( $Fo > 0$ ;  $0 \leq x < 1$ )

Граничные и начальные условия с учетом введенных обозначений:

$$\Theta(x, 0) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad (7)$$

$$\Theta(1, Fo) = B \times Fo. \quad (8)$$

Принятая постановка задачи (5)–(8) с линейным изменением температуры границы во времени (8) актуальна для процессов, где нагрев или охлаждение поверхности регулируется с постоянной скоростью. Это характерно для лабораторных экспериментов с программным управлением температурными параметрами (например, исследование термостойкости материалов), а также для технологических операций, требующих монотонного изменения теплового воздействия, таких как термообработка материалов, сушка пористых сред или моделирование климатических нагрузок на строительные конструкции. Кроме того, подобная модель применяется при изучении квазистационарных режимов в системах с медленно меняющимися внешними условиями, например, в геотермальных установках или теплозащитных покрытиях.

В соответствии с методологией, описанной в [16], введем вспомогательную функцию  $q(Fo)$ , представляющую изменение температуры во времени в центре пластины:

$$q(Fo) = \Theta(0, Fo), \quad (9)$$

Решение задачи (5)–(8) выполняется в виде степенного ряда:

$$\Theta(x, Fo) = \sum_{i=1}^n a_i(Fo) \times \xi^{i-1}, \quad (10)$$

где  $n$  – количество членов ряда,  $a_i(Fo)$  – неизвестные коэффициенты, зависящие от безразмерного времени.

Первое приближение ( $n = 3$ ):

$$\Theta(x, Fo) = a_1(Fo) + a_2(Fo) \times x + a_3(Fo) \times x^2. \quad (11)$$

Подстановка (11) в условия (7), (8) и (9) формирует систему уравнений:

$$\begin{cases} a_2 = 0, \\ a_1 - B \times Fo + a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 - q(Fo) = 0. \end{cases}$$

Решение системы:

$$\begin{aligned} a_1 &= q(Fo); \\ a_2 &= 0; \\ a_3 &= B \times Fo - q(Fo). \end{aligned}$$

Температурное поле принимает вид:

$$\Theta(x, Fo) = q(Fo) \times (1 - x^2) + B \times Fo \times x^2.$$

Проинтегрируем (5) по координате  $x$  в пределах  $[0, 1]$ :

$$\int_0^1 \left( A \times (1 - \varphi) \times \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) dx.$$

После интегрирования получено обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dq(Fo)}{dFo} \times 2A \times (1 - \varphi) + 6 \times q(Fo) - 6 \times B \times Fo + \\ + A \times B \times (1 - \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Его решение:

$$q(Fo) = C_1 \times e^{\frac{3Fo}{A \times B \times (\varphi - 1)}} + \frac{A \times B \times (\varphi - 1)}{2} + B \times Fo.$$

Условие ортогональности невязки начальному условию:

$$\int_0^1 [\Theta(x, 0)] f_1(x) dx = \frac{8C_1}{15} - \frac{4AB}{15} + \frac{4AB\varphi}{15} = 0.$$

Отсюда  $C_1 = \frac{AB}{2} (1 - \varphi)$ . Решение задачи (5)–(8)

с учетом найденных данных:

$$\begin{aligned} \Theta(x, Fo) = (1 - x^2) \left[ \frac{AB}{2} (1 - \varphi) \times e^{\frac{3Fo}{A \times B \times (\varphi - 1)}} + \right. \\ \left. + \frac{A \times B \times (\varphi - 1)}{2} + B \times Fo \right] + B \times Fo \times x^2. \end{aligned}$$

## Результаты

Для оценки корректности приближенно-аналитического решения проведено численное моделирование в модуле Transient Thermal программного комплекса ANSYS. В рамках задачи (5)–(8) на одной грани элементарной ячейки задано граничное условие первого рода, а на остальных поверхностях – адиабатические условия (отсутствие теплопереноса). Конечно-элементная сетка в ANSYS состоит из  $\approx 1,5 \times 10^6$  тетраэдральных элементов с локальным сгущением вблизи стенок. В ANSYS моделирована плоская пористая пластина с толщиной стенки  $S = 0,0018$  м, состоящая из ячеек Неовиуса, напечатанных из фотополимерной смолы. Конечно-элементная сетка для решения задачи состоит из  $\approx 1,5$  млн элементов.

На рисунках 2, 3 показано изменение температуры вдоль слоя и во времени в зависимости от параметра  $B$ . Определены диапазоны изменения безразмерной скорости (параметра  $B$ ):

– при  $0,05 < B < 0,3$  – безопасный режим (медленный нагрев). Такие условия обеспечивают плавное распределение температуры вдоль слоя, что исключает риск термической деформации даже при высокой пористости ( $\varphi = 0,78$ ).

– при  $0,3 \leq B < 1$  – допустимый режим (сопровождается умеренными градиентами). Этот диапазон применим для кратковременных процессов, например, для предварительного прогрева перед формованием.

– при  $1 \leq B < 1,5$  – умеренный режим. Данный диапазон соответствует переходным условиям между допустимым и критическим режимами нагрева. Он применяется в процессах, требующих быстрого, но контролируемого теплового воздействия (например, формование композитов или создание многослойных структур).

– при  $B \geq 1,5$  – критический режим, при котором возникает риск разрушения материала, его термической деструкции, размягчения и потери механической прочности. Например, при  $B = 1,5$  скорость нагрева  $b$  достигает 0,36 К/с, что приводит к локальным перегревам и деградации структуры из-за низкой эффективной теп-

лопроводности, обусловленной высокой пористостью и коэффициентом  $A = 6,25$ .

Зависимости безразмерной температуры, описывающие распределение температуры вдоль слоя и во времени, предоставляют возможность прогнозировать температурные поля в пористой среде при заданных условиях нагрева. Например, они позволяют рассчитать время достижения критической температуры в глубине материала. На основе этих зависимостей можно оптимизировать параметры теплозащиты, такие как толщина слоя и выбор материала с определенными характеристиками (эффективная теплопроводность  $\lambda_{eff}$ , температуропроводность  $a_s$ ), что минимизирует тепловые напряжения в конструкции. Кроме того, результаты работы позволяют верифицировать численные модели путем сопоставления безразмерных решений с экспериментальными данными.

На рисунке 4 приведены результаты моделирования безразмерного температурного поля, полученные двумя методами: аналитический метод – решение по формуле (10) при  $n = 6$ ; метод конечных элементов (МКЭ) с адаптивной сеткой в ANSYS.

Сравнение данных выявило высокую степень согласованности (максимальное отклонение  $\leq 5\%$ ) между методами, что подтверждает корректность предложенной математической модели. В диапазоне толщины стенки  $0 < S \leq 2$  мм гарантирует сохранение целостности ячейки Невюуса (отсутствие пересечений стенок, коллапса пор). Определена оптимальная пористость  $0,45 < \varphi \leq 1$ , которая обеспечивает стабильность тепловых характеристик. В указанных пределах  $\varphi$  распределение температуры вдоль координаты  $x$  становится слабочувствительным к геометрии ячейки (размеру пор, кривизне стенок). Это позволяет использовать универсальные аналитические решения для проектирования материалов без детального учета микроструктуры.

На рисунке 5 представлено распределение температурного поля в элементарной ячейке Невюуса исследуемого образца, рассчитанное аналитическим методом.

На рисунке 6 показано распределение безразмерных скоростей движения изотерм в пластине при переменных граничных условиях ( $v = d\zeta / dFo$ ), демонстрирующее нестационарный характер теплопереноса.

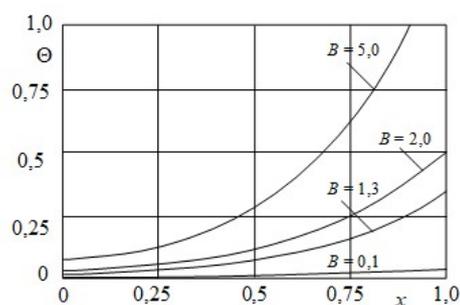


Рис. 2. Изменение температуры вдоль слоя в зависимости от параметра  $B$  при  $\varphi = 0,78$ ;  $A = 6,25$ ;  $Fo = 0,25$

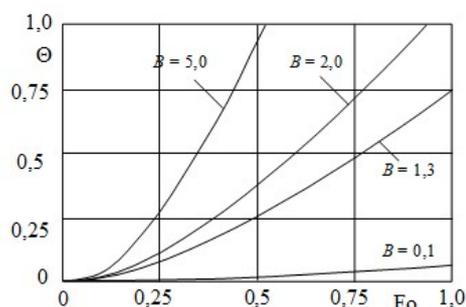


Рис. 3. Изменение температуры во времени в зависимости от параметра  $B$  при  $\varphi = 0,78$ ;  $A = 6,25$ ;  $x = 0,5$

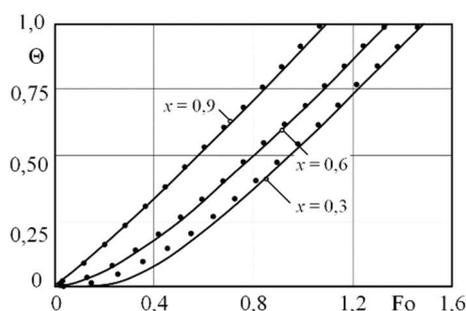


Рис. 4. Изменение температуры в пористой пластине при  $\varphi = 0,78$ ;  $A = 6,25$ ;  $B = 1,3$ ; — — расчет по формуле (10) (второе приближение);  $\circ \circ \circ \circ$  — МКЭ (ANSYS)

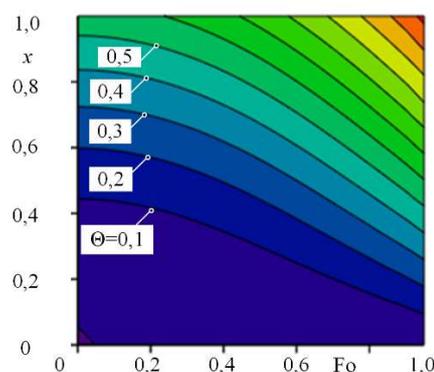


Рис. 5. Распределение температуры в элементарной ячейке Невюуса испытываемого образца при  $\varphi = 0,78$ ;  $A = 6,25$ ;  $B = 1,3$

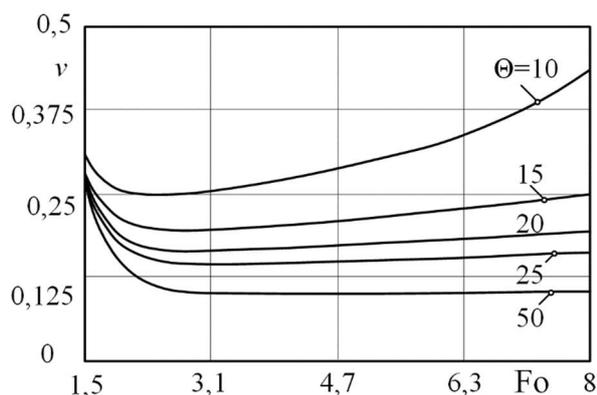


Рис. 6. Распределение скоростей изотерм в пластине при переменных граничных условиях при  $\varphi = 0,78$ ;  $A = 6,25$ ;  $B = 1,3$

### Обсуждение

Получено аналитическое решение для пористой стенки на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП) типа Неовиуса, позволяющее прогнозировать распределение температуры и тепловые потери без использования ресурсоемкого ПО. Верификация методом конечных элементов для ТПМП-структур типа Неовиуса показала погрешность менее 4% в широком временном диапазоне, подтвердив точность метода.

### Заключение

В работе предложен модифицированный интегральный метод теплового баланса, позволяющий получить приближенное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для материалов с упорядоченной пористой структурой. Введение новой искомой функции, характеризующей температурное поле в центре пластины, устранило противоречие между конечной скоростью распространения теплового фронта и параболической природой уравнения теплопроводности. Разработанные модифицированные граничные условия обеспечили выполнение дифференциального уравнения как на границах, так и внутри области, что подтвердило корректность подхода.

Сведение задачи к решению обыкновенного дифференциального уравнения за счет интегрального метода теплового баланса позволило обойти сложности, связанные с интегрированием уравнений в частных производных. Метод продемонстрировал универсальность для нелинейных задач, а также задач с переменными фи-

зическими свойствами и начальными условиями. Результаты применимы для определения эффективной теплопроводности пористых материалов, проектирования теплообменников и термозащитных систем. Простота аналитических выражений делает метод доступным для инженеров, работающих в условиях ограниченных вычислительных ресурсов.

### Список источников

1. Карначев И.П., Николаев В.Г., Бирюков В.В. и др. Тепловой режим большепролетных выработок при строительстве объектов атомной энергетики // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2020. № 2. С. 289–301. EDN: QVBTPF
2. Пиксайкина А.А., Конин М.А., Бабенкова Ю.В. Пористые тротуары как современная концепция зеленого строительства // Эффективные строительные конструкции: теория и практика: сборник статей XIX Международной научно-технической конференции, Пенза, 28–29 марта 2019 года / Пензенский государственный университет архитектуры и строительства. Пенза: Автономная некоммерческая научно-образовательная организация «Приволжский Дом знаний», 2019. С. 107–111. EDN: XCHFLT
3. Ogunsola A.W., Oyedotun M.F. Effects of nonlinear thermal radiation on magnetized Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Blood nanofluid flow through an inclined microporous channel: An investigation of second law analysis // Electrophoresis. 2023. DOI: 10.1002/elps.202300157
4. Jing L., Huo J., You X. et al. Numerical investigation of an aerospace thruster with ADN-based liquid propellant // Qinghua Daxue Xuebao (Ziran Kexue Ban). 2016. Vol. 56, № 10. pp. 1085–1090. DOI: 10.16511/j.cnki.qhdxxb.2016.22.043
5. Huabkhuntod T., Sinjapo S., Luampon R. et al. Study on heat transfer in two-layer porous media with heat generation in porous media // Energy Reports. 2022. Vol. 8. pp. 1565–1576. DOI: 10.1016/j.egyr.2022.11.062
6. Zhang Zh., Xu T., Li Sh. et al. Comprehensive effects of heat and flow on the methane hydrate dissociation in porous media // Energy. 2023. Vol. 265. DOI: 10.1016/j.ener.2022.126425
7. Карташов Э.М., Крылов С.С. Аналитические решения краевых задач теплопроводности со свободной границей // Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15, № 10. С. 456–467. EDN: QVYUOZ
8. Карташов Э.М. Краевые задачи для уравнений параболического типа в нецилиндрических областях // Теплофизика высоких температур. 2022. Т. 60, № 5. С. 725–739. DOI: 10.31857/S004036442204007X
9. Карташов Э.М., Крылов С.С. Модификация обобщенных тепловых потенциалов Тихонова - Самарского в аналитической теории нестационарного теп-

- лопереноса для нецилиндрических областей // Тепловые процессы в технике. 2022. Т. 14, № 11. С. 482–494. DOI: 10.34759/tpt-2022-14-11-482-494.
10. Кудинов И.В. Получение точных аналитических решений задач теплопроводности с переменными во времени граничными условиями // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2016. № 4(52). С. 108–117. EDN: XWZDFB
  11. Попов А.И., Зинина С.А., Еремин А.В. Определение проницаемости пористой среды, основанной на трижды периодических минимальных поверхностях Невюиса // Инженерный вестник Дона. 2024. № 6(114). С. 648–655. EDN: NDUZMT
  12. Al-Ketan O., Abu Al-Rub R.K. Multifunctional Mechanical Metamaterials Based on Triply Periodic Minimal Surface Lattices // *Advanced Engineering Materials*. 2019. Vol. 21, №. 10. DOI: 10.1002/adem.201900524
  13. Gunaydin K. Energy absorption ability of crush boxes filled with strut based and TPMP lattice structures // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2024. Vol. 46, №. 11. DOI: 10.1007/s40430-024-05207-z
  14. Ren Z.Y., Zheng Q.S. A Quantitative study of minimum sizes of representative volume elements of cubic polycrystals-numerical experiments // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2002. Vol. 50, №. 4. pp. 881–893. EDN: AUAFDL
  15. Брагин Д.М., Еремин А.В., Попов А.И. и др. Метод определения коэффициента эффективной теплопроводности пористого материала на основе минимальной поверхности типа Schoen's I-WP(R) // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2023. № 2. С. 61–68. DOI: 10.17588/2072-2672.2023.2.061-068
  16. Губарева К.В., Попов А.И., Зинина С.А. и др. Моделирование процесса теплообмена в пластине с переменными теплофизическими свойствами // Научное обозрение. Технические науки. 2020. № 6. С. 52–57. EDN: CNFSBP
  3. Ogunsola AW, Oyedotun MF. Effects of nonlinear thermal radiation on magnetized Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Blood nanofluid flow through an inclined microporous channel: An investigation of second law analysis. *Electrophoresis*. 2023. DOI: 10.1002/elps.202300157.
  4. Jing L, Huo J, You X et al. Numerical investigation of an aerospace thruster with ADN-based liquid propellant. *Qinghua Daxue Xuebao (Ziran Kexue Ban)*. 2016; 56(10):1085–1090. DOI: 10.16511/j.cnki.qhdxxb2016.22.043
  5. Huabkhuntod T, Sinjapo S, Luampon R et al. Study on heat transfer in two-layer porous media with heat generation in porous media. *Energy Reports*. 2022;8:1565–1576. DOI: 10.1016/j.egy.2022.11.062
  6. Zhang Zh, Xu T, Li Sh et al. Comprehensive effects of heat and flow on the methane hydrate dissociation in porous media. *Energy*. 2023;265. DOI: 10.1016/j.energy.2022.126425
  7. Kartashov EM, Krylov SS. Analytical solutions of boundary value heat conduction problems with a free boundary. *Thermal processes in engineering*. 2023; 15(10):456–467. (In Russ.). EDN: QVYUOZ
  8. Kartashov EM. Boundary value problems for parabolic equations in non-cylindrical domains. *Teplofizika vysokikh temperatur*. 2022;60(5):725–739. (In Russ.). DOI: 10.31857/S004036442204007X
  9. Kartashov EM, Krylov SS. Modification of generalized Tikhonov-Samarskii heat potentials in the analytical theory of unsteady heat transfer for non-cylindrical domains // *Thermal processes in engineering*. 2022; 14(11):482–494. (In Russ.). DOI: 10.34759/tpt-2022-14-11-482-494
  10. Kudinov IV. Obtaining exact analytical solutions of heat conduction problems with time-varying boundary conditions. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskie nauki*. 2016; (4(52)):108–117. (In Russ.). EDN: XWZDFB
  11. Popov AI, Zinina SA, Eremin AV. Determination of permeability of porous media based on triply periodic Neovius minimal surfaces. *Inzhenerkii vestnik Dona*. 2024; (6(114)):648–655. (In Russ.). EDN: NDUZMT
  12. Al-Ketan O, Abu Al-Rub RK. Multifunctional Mechanical Metamaterials Based on Triply Periodic Minimal Surface Lattices. *Advanced Engineering Materials*. 2019;21(10). DOI: 10.1002/adem.201900524
  13. Gunaydin K. Energy absorption ability of crush boxes filled with strut based and TPMP lattice structures. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2024;46(11). DOI: 10.1007/s40430-024-05207-z
  14. Ren ZY, Zheng QS. A Quantitative study of minimum sizes of representative volume elements of cubic polycrystals-numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2002;50(4):881–893. EDN: AUAFDL
  15. Bragin DM, Eremin AV, Popov AI et al. Method for determining the effective thermal conductivity of a porous

### References

1. Karnachev IP, Nikolaev VG, Biryukov VV et al. Thermal regime of large-span workings during the construction of nuclear energy facilities. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle*. 2020;(2): 289–301. (In Russ.). EDN: QBBTPF
2. Piksaykina AA, Konin MA, Babenkova YuV. Porous pavements as a modern concept of green construction. *Effektivnye stroitel'nye konstruksii: teoriya i praktika: sbornik statei XIX Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii, Penza, 28–29 marta 2019 goda / Penzenskii gosudarstvennyi universitet arkhitektury i stroitel'stva. – Penza: Avtonomnaya nekommercheskaya nauchno-obrazovatel'naya organizatsiya «Privolzhskii Dom znaniy», 2019. pp. 107–111. (In Russ.). EDN: XCHFLT*

- material based on Schoen's I-WP(R) minimal surface. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo energeticheskogo universiteta*. 2023;(2):61–68. (In Russ.). DOI: 10.17588/2072-2672.2023.2.061-068
16. Gubareva KV, Popov AI, Zinina SA et al. Modeling of heat exchange in a plate with variable thermophysical properties. *Nauchnoe obozrenie. Tekhnicheskie nauki*. 2020(6):52–57. (In Russ.). EDN: CNFSBP