

Научная статья

УДК 539.3;517.9

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186881>

EDN: <https://www.elibrary.ru/HDTEYB>

## **УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ТИПА КИРХГОФА-ЛЯВА ИЗ МАТЕРИАЛА С КОМБИНИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ**

**Л.И. Могилевич, Е.В. Попова, Е.В. Евдокимова, В.С. Попов**✉

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,

г. Саратов, Россия

✉ [vic\\_p@bk.ru](mailto:vic_p@bk.ru)

---

**Цитирование:** Могилевич Л.И., Попова Е.В., Евдокимова Е.В., Попов В.С. Уединенные волны деформации в цилиндрической оболочке типа Кирхгофа-Лява из материала с комбинированной нелинейностью, содержащей вязкую жидкость // Труды МАИ. 2025. № 145. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186881>

---

**Аннотация.** В работе осуществлена постановка задачи гидроупругости для цилиндрической оболочки типа Кирхгофа-Лява, материал которой обладает обобщенным законом Гука, учитывающим его нелинейность в виде комбинации квадратичной функции и степенной функции с показателем  $3/2$ . Изучен случай бесконечно протяженной оболочки, заполненной вязкой ньютоновской жидкостью постоянной плотности. Проведен асимптотический анализ поставленной краевой задачи математической физики методом двухмасштабных разложений. Рассматривая первое (линейное) приближение по малому параметру задачи установлено, что жидкость, заполняющая оболочку, не влияет на волновой

процесс. Профиль фронта волны продольной деформации в оболочке является произвольной функцией, а волны деформации в оболочке распространяются со звуковой скоростью. Рассматривая задачу во втором приближении получено нелинейное эволюционное уравнение, обобщающее уравнение Кортевега-де Вриза-Шамеля (КдВШ), которое позволяет исследовать нелинейные уединенные гидроупругие волны продольной деформации в оболочке. Показано, что данное уравнение в частном случае при рассмотрении материала оболочки несжимаемым, а течение жидкости в оболочке ползущим имеет точное решение в виде солитона. При этом вязкая жидкость, заполняющая оболочку, не оказывает влияние на волновой процесс в ее стенках, а скорость солитонов оказывается выше звуковой. Для исследования общего случая предложена новая разностная схема для перехода к дискретному аналогу обобщенного уравнения КдВШ, которая получена в рамках интегроинтерполяционного подхода, базирующегося на применении техники построения базисов Грёбнера. Проведено численное исследование данного уравнения при задании начальных условий в виде точного частного солитонного решения. Вычислительные эксперименты позволили установить, что скорость уединенных волн продольной деформации в оболочке оказывается ниже звуковой, а первоначально возбуждаемый солитон разрушается с течением времени, если осуществляется учет инерции движения жидкости и материал оболочки сжимаем.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, комбинированная нелинейность, вязкая жидкость, гидроупругость, солитоны деформации, вычислительный эксперимент.

.....

**SOLITARY DEFORMATION WAVES IN A KIRCHHOFF-LOVE CYLINDRICAL SHELL  
MADE OF A MATERIAL WITH A COMBINED NONLINEARITY CONTAINING A  
VISCOUS FLUID L.I. Mogilevich, E.V. Popova, E.V. Evdokimova, V.S. Popov✉**

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia

✉ [vic\\_p@bk.ru](mailto:vic_p@bk.ru)

**Abstract.** This paper presents the hydroelasticity problem formulation for a Kirchhoff-Love cylindrical shell whose material obeys a generalized Hooke's law, accounting for its nonlinearity in the form of a combination of a quadratic function and a power function with exponent  $3/2$ . The case of an infinitely extended shell filled with a viscous Newtonian fluid of constant density is studied. An asymptotic analysis of the boundary value problem of mathematical physics is carried out using the multiscale perturbation method. Considering the first (linear) approximation with respect to a small parameter of the problem, it is established that the fluid filling the shell does not affect the wave process. The profile of the longitudinal strain wave front in the shell is an arbitrary function, and the strain waves in the shell propagate at the speed of sound. Considering the problem in the second approximation, a nonlinear evolution equation is obtained, generalized Schamel–Korteweg–de Vries equation, which allows one to study nonlinear solitary hydroelastic waves of longitudinal strain in the shell. It is shown that, in the particular case of an incompressible shell material and a creeping fluid flow in the shell, this equation has an exact soliton solution. The viscous fluid filling the shell has no effect on the wave process in its walls, and the soliton velocity is higher than the speed of sound. To study the general case, a new difference scheme is proposed for converting to a discrete analog of the generalized Schamel–Korteweg–de Vries equation. This scheme is obtained using an integro-interpolation approach based on the Gröbner base construction technique. A numerical study of this equation is performed with initial conditions specified as an exact particular soliton solution. Computational experiments revealed that the velocity of solitary longitudinal deformation waves in the shell is lower than the speed of sound, and the initially excited soliton decays over time if the shell material is compressible and the inertia of the fluid motion is taken into account.

**Keywords:** cylindrical shell, combined nonlinearity, viscous fluid, hydroelasticity, deformation solitons, computational experiment.

---

## Введение

Исследование эволюции нелинейных волн деформации в упругих элементах конструкций представляет собой актуальную и практически важную задачу. Это связано с тем, что с одной стороны, нелинейная волновая динамика в ряде вопросов находится в стадии своего становления, а с другой стороны, на практике все чаще находят применение конструкции, выполненные из современных материалов с существенно нелинейными физическими свойствами. Поэтому дальнейшее развитие технологий неразрушающей волновой диагностики [1] состояния упругих конструкций авиакосмической техники требует постановки и решения задач по изучению и моделированию нелинейных волновых процессов в таких элементах конструкций как цилиндрические оболочки. Данные оболочки часто являются основными несущими элементами, а также стенками трубопроводов, заполненных вязкой жидкостью. Можно отметить, что в рамках линейной волновой динамики [2], например, могут быть рассмотрены проблемы гидроудара [3] или пульсирующего движения вязкой жидкости в упругой оболочке-трубке [4, 5], выполненной из материала, работающего в пределах линейной теории упругости, т.е. подчиняющегося линейному закону Гука.

Учет нелинейных эффектов, физической или геометрической нелинейности материала упругой конструкции, открывает возможность исследования нелинейной волновой динамики в упругих средах [6, 7], и в частности, распространения солитонов деформации в стержнях, пластинах и оболочках [8-10]. Приведем ниже ряд исследований, наиболее близких к теме предлагаемой работы, по моделированию распространения солитонов деформации в цилиндрических оболочках, заполненных жидкостью. Геометрически нелинейная цилиндрическая оболочка, содержащая идеальную несжимаемую жидкость исследована в [11, 12]. Автором сформулирована осесимметричная задача гидроупругости для рассматриваемой оболочки, и проведен ее асимптотический анализ. В результате получено уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ) для прогиба оболочки, используя которое выполнены расчеты распространения солитонов прогибов на оболочке при отсутствии/наличии в оболочке жидкости, а также при движении в ней стационарного потока жидкости с постоянной скоростью.

Цилиндрическая оболочка типа Кирхгофа-Лява, заполненная вязкой несжимаемой жидкостью и выполненная из материала с физически жесткой кубической нелинейностью, рассмотрена в [13] с дополнительным учетом конструкционного демпфирования. В [14] изучен случай, когда материал оболочки обладает квадратичной физической нелинейностью, а оболочка, содержащая вязкую жидкость, окружена упругой средой Винклера. В этих работах осуществлена постановка задач гидроупругости, а для их асимптотического анализа применен метод двухмасштабных разложений, позволивший изучить солитоны продольной деформации. В результате в [13], получено эволюционное уравнение, обобщающее модифицированное уравнение КдВ, а в [14] – интегродифференциальное эволюционное уравнение, обобщающее уравнение КдВ. Моделирование распространения солитонов продольной деформации в двух соосных оболочках, выполненных из материала с дробной жесткой физической нелинейностью и содержащих вязкую жидкость между оболочками и во внутренней оболочке, выполнено в [15]. Авторами на основе асимптотического анализа сформулированной осесимметричной задачи гидроупругости двух соосных оболочек получено новое эволюционное уравнение, обобщающее уравнение Шамеля, а также предложен подход для перехода к его дискретному аналогу на базе использования техники построения базисов Грёбнера. Аналогичные оболочки, но из несжимаемого материала с физической комбинированной квадратичной и дробной нелинейностью, исследованы в [16] для случая ползущего течения вязкой жидкости, заполняющей оболочки.

В предлагаемой статье предложена математическая модель для исследования эволюции солитонов продольной деформации в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость постоянной плотности и выполненной из сжимаемого материала, связь напряжений и деформаций в котором представлена обобщенным законом Гука в виде суммы квадратичной функции и дробно-степенной функции, а также с учетом инерции движения вязкой жидкости в оболочке.

# Постановка задачи гидроупругости оболочки из физически нелинейного материала, имеющего квадратичную и дробно-степенную нелинейность

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, изготовленную из физически нелинейного сжимаемого материала, т.е. считаем коэффициент Пуассона материала отличным от 1/2. Полагаем, что оболочка полностью заполнена вязкой жидкостью. Изучая волновой процесс в оболочке исходим из того, что ее протяженность можно принять бесконечно большой и исключать из рассмотрения отражение волн на ее торцах.

Ведем декартовы координаты  $x, z$ , направляя ось  $x$  вдоль оси симметрии оболочки и считая, что точка начала декартовой системы находится в центральном поперечном сечении оболочки. С этой же точкой совместим центр цилиндрической системы координат  $r, \theta, x$ . Рассматриваем осесимметричную постановку задачи, принимая во внимание осевую симметрию рассматриваемой механической системы, и ограничимся изучением волнового процесса в положительном направлении оси  $x$ . Обозначим как  $R_1$  – радиус внутренней поверхности оболочки,  $h_0$  – толщину оболочки, которую считаем постоянной, а радиус срединной поверхности оболочки как  $R = R_1 + h_0/2$ , и принимаем, что отношение  $h_0/R \ll 1$ . Полагаем, что упругие волны деформаций в оболочке, вызваны начальным возбуждением в виде солитона, а движение вязкой жидкости в оболочке приходит за счет взаимодействия с ее стенками.

Исходим из того, что для оболочки справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява и уравнения ее динамики согласно [17] можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \rho h_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right) \quad (2)$$

В уравнениях (1) приняты следующие обозначения:  $W$  – прогиб оболочки, его положительное направление принято к центру кривизны оболочки,  $U$  – продольное упругое перемещение оболочки,  $q_x, q_n$  – касательное и нормальное напряжения жидкости на границе ее контакта с оболочкой,  $\tilde{t}$  – время,  $\rho_0$  – плотность материала оболочки,  $M_x, N_x, N_\theta$  – момент и усилия, действующие на элемент срединной поверхности оболочки в направлении осей  $x$  и  $\theta$  соответственно.

$M_x$  и  $N_x, N_\theta$  выражаются через нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_\theta$  [17]

$$M_x = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_x z dz, \quad N_x = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_x dz, \quad N_\theta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \sigma_\theta dz. \quad (2)$$

Аналогично [16], исходим из того, что материал оболочки имеет жесткую комбинированную физическую нелинейность в виде суммы квадратичной и дробно-степенной функций, но учитываем сжимаемость материала

$$\sigma_x = 1 \frac{E}{2\mu_0} \left( \sigma_x \sigma_\theta \right)^{1/2} + m E \sigma_{u12} + m E_2 \sigma_u \sigma_\theta, \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = 1 \frac{E}{2\mu_0} \left( \sigma_\theta \sigma_x \right)^{1/2} + m E \sigma_{u12} + m E_2 \sigma_u \sigma_\theta, \\ \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \sigma_1 (\sigma_{2x} \sigma_{2\theta}) \sigma_{2x} \sigma_{2\theta} \right]^{1/2}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2}.$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга,  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона,  $m, m_2$  – положительные константы материала, имеющие размерность напряжений и определяемые из опытов на растяжение-сжатие [18, 19]. В частном случае при  $\mu_0 = 1/2$  осуществляется переход к несжимаемому физически нелинейному материалу рассмотренному в [16], а если дополнительно считать  $m < 0, m_2 = 0$  или  $m < 0, m_2 < 0$  получим несжимаемые материалы с мягкой физической квадратичной или комбинированной нелинейностью, соответственно, которые рассмотрены в [20,

21].

Деформации элемента оболочки выражаются через упругие перемещения как [15, 16]

$$\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x_2} = R \frac{\partial W}{\partial R} \quad (4)$$

где  $z$  – локальная координата перпендикулярная срединной поверхности оболочки и изменяющаяся от  $-h_0/2$  до  $h_0/2$  (на срединной поверхности оболочки  $z=0$ ).

Учитывая (2)-(4) в (1) и рассматривая аналогично [16] интенсивность деформаций на срединной поверхности оболочки (при  $z = 0$ ), получили уравнения движения оболочки в перемещениях

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \left( \frac{U_x}{R} - \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{R} \right) = \frac{mE}{1 + 3_0} \quad (5)$$

[illegible]

$$\frac{Eh_0}{12(1-\nu^2)}\frac{\Delta^2}{x^2}\left\langle\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{2}h_{02}\frac{\partial^2}{\partial x^2}W_2\right]\right\rangle_{\theta=0}=\frac{1}{2}Eh_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{2}h_{02}\frac{\partial^2}{\partial x^2}W_2\right]_{\theta=0}$$





$$V_x \square U \square \square V_{\sim x} \square W \square \square V_{\sim t_x} = \square \square U_{\sim t}, V_r \square U \square \square V_{\sim t_r} \square W \square \square V_{\sim t_r} = \square \square \square W_{\sim t} \quad (8)$$

при  $r=R_1 \square W, t$

а также условиями для компонент скорости жидкости на оси симметрии, сформулированными и обоснованными в [15] в следующем виде

$$\text{при } r=0. \quad \frac{rV_r}{r} \square 0, \quad \frac{\square V^x}{\square r} = 0$$

### Асимптотический анализ задачи. Эволюционное уравнение

Пусть имеют силу следующие отношения малости

$$\frac{u_{1,2}}{R} \square \frac{O(\square_{12})}{l}, \quad h_{0m} \square O(1), \quad l_m \square h_0 \square O(1), \quad E \square O(1), \quad E_2 \square O(\square_{12}), \quad \square \square \square \square \quad (10)^h$$

и используем безразмерные переменные

$$R_2 \quad w \quad \sim \quad u \quad R \quad m \quad m$$

$$W \square w_m u_3, \quad U \square u_m u_1, \quad x^* \square x l, \quad t^* \square t c_0 / l, \quad r^* \square r / R, \quad (11)$$

где  $c_0 \square \sqrt{E / (\rho_0 (1 \square \rho_0^2))}$  – скорость звука в материале оболочки,  $l$  – длина волны, принимаемая за характерный линейный масштаб,  $u_m, w_m$  – характерные масштабы упругих перемещений оболочек,  $\varepsilon$  – малый параметр задачи.

Проведем анализ уравнений (5) методом возмущений [23], рассматривая асимптотические разложения функций упругих перемещений оболочки

$$u_1 \square u_{10} \square \square_{12} u_{11} \square \dots, \quad u_3 \square u_{30} \square \square_{12} u_{31} \square \dots, \quad (12)$$

и вводя бегущую переменную  $\xi$  и медленное время  $\tau$

$$\square \square x^* \square c^* t^*, \quad \square \square \square^{12} t^*, \quad (13)$$



Исключим из (15)  $u_{11}, u_{31}$  продифференцировав второе уравнение по  $\xi$  и после этого вычтя его из первого уравнения. В результате имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{10}}{d\xi^2}}} \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{10}}{d\xi^2}} = m E \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{10}}{d\xi^2}}} \right) \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{10}}{d\xi^2}}} \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{10}}{d\xi^2}} = m E \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{10}}{d\xi^2}}} \right) \quad (16)$$

Полученное уравнение является обобщением уравнения Кортевега-де

Вриза-Шамеля (КдВШ) для продольной деформации  $\frac{1}{2} \frac{d^2 u_{10}}{d\xi^2}$ . Отметим, что

исключение из рассмотрения жидкости в оболочке эквивалентно полаганию  $q_x = q_n = 0$ . В этом случае (16) представляет собой однородное уравнение КдВШ.

Для определения  $q_x, q_n$  проведем асимптотический анализ уравнений динамики жидкости (7)-(9) аналогично [15, 16]. Для этого вводим безразмерные переменные вида

$$V_r = h_0 c l_0 v_r, V_x = h_0 c R_0 v_x, r^* = \frac{R}{R_0} r, t^* = \frac{c l_0}{R_0} t, x^* = \frac{1}{R_0} x, p = \frac{1}{R_0 c l_0} p. \quad (17)$$

В рассматриваемой постановке для задачи динамики жидкости имеют место следующие соотношения

$$\frac{R}{R_0} = O(\epsilon^4), \frac{h_0}{R_0} = \epsilon. \quad (18)$$

Тогда, переходя в (6)-(9) к безразмерным переменным (17) с учетом (18), рассматривая следующие асимптотические разложения искомых функций

$P = P^0 \dots, v_r = v_r^0 \dots, v_x = v_x^0 \dots$ , (19) и ограничиваясь в (19) первым членом, получим линеаризованные уравнения движения вязкой жидкости, заполняющей оболочку,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0, \quad v_r = 0 \text{ при } x=l, \quad (20)$$

и соответствующие им краевые условиями

$$v_r = 0 \text{ при } r=0, \quad v_r = 0 \text{ при } r=1, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \text{ при } r=0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \text{ при } r=1. \quad (21)$$

Решение задачи (20), (21) проведено в [15] и определены выражения для  $q_x$ ,  $q_n$  с точностью до  $\psi$ ,  $\varepsilon^{1/2}$  в следующем виде

$$q_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}, \quad q_n = \frac{\partial v_r}{\partial x} \text{ при } x=0, \quad (22)$$

где

$$P_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial x} = 0 \text{ при } x=l$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \text{ при } r=0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \text{ при } r=1$$

Принимая во внимание (22), (23) и что согласно второму уравнению (14)  $u_{30} = 0$ , а также учитывая малость параметров  $\psi$ ,  $\lambda$  получаем следующее

выражение, определяющее правую часть (16)

$$q_x - \frac{1}{2} R q_n = 4 \frac{1}{2} c_{02} \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} u_{10} - \frac{1}{2} R \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} [(1 - \frac{1}{2} c_{02})^2 - \frac{1}{2} c_{02}] u_{210}.$$

(24)  $\frac{1}{2} R c_0$

## Численное моделирование эволюции солитонов продольной деформации

Учитывая (24), представим уравнение (16) в виде

$$q_t - \frac{1}{2} c_{02} \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} u_{10} - \frac{1}{2} R \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} [(1 - \frac{1}{2} c_{02})^2 - \frac{1}{2} c_{02}] u_{210} = 0, \text{ используя}$$

следующие обозначения

$$\frac{1}{2} c_{02} \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} u_{10} = c_3 \frac{1}{2} c_{02} \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} u_{10}, \quad \frac{1}{2} R \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} [(1 - \frac{1}{2} c_{02})^2 - \frac{1}{2} c_{02}] u_{210} = c_2 \frac{1}{2} R \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} [(1 - \frac{1}{2} c_{02})^2 - \frac{1}{2} c_{02}] u_{210},$$

(26)

$$q = \frac{1}{2} c_{02} \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} u_{10} - \frac{1}{2} R \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} [(1 - \frac{1}{2} c_{02})^2 - \frac{1}{2} c_{02}] u_{210},$$

\*

$$\frac{1}{2} c_{02} \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} u_{10} = c_3 \frac{1}{2} c_{02} \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} u_{10}, \quad \frac{1}{2} R \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} [(1 - \frac{1}{2} c_{02})^2 - \frac{1}{2} c_{02}] u_{210} = c_2 \frac{1}{2} R \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} [(1 - \frac{1}{2} c_{02})^2 - \frac{1}{2} c_{02}] u_{210},$$

$$\text{где } c_3 = \frac{1}{2} c_{02} \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} u_{10}, \quad c_2 = \frac{1}{2} R \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} [(1 - \frac{1}{2} c_{02})^2 - \frac{1}{2} c_{02}] u_{210}.$$

Нижний индекс в (25) обозначает соответствующую частную производную. Если положить  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$ , осуществляется переход к обобщенному уравнению КдВ, при  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0$  – к обобщенному уравнению Шамеля, а при  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$  – к обобщенному уравнению КдВШ. Данные уравнения описывают распространение уединенных волн продольной деформации в физически нелинейной оболочке, заполненной вязкой жидкостью.

Заметим, если материал оболочки несжимаем, то  $\sigma^* = 0$  (вследствие того, что в этом случае  $\mu_0 = 1/2$ ), а если исключается инерция движения жидкости, то  $\sigma = 0$ . При выполнении допущения  $\sigma^* = 0$  в (25) осуществляется переход к уравнению КдВШ, имеющему точное солитонное решение вида

$$q(t, x) = \frac{1}{2} c_{02} \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} u_{10} - \frac{1}{2} R \sqrt{1 - \frac{1}{2} c_{02} (1 - \frac{1}{2} c_{02})} [(1 - \frac{1}{2} c_{02})^2 - \frac{1}{2} c_{02}] u_{210}.$$

$$254^4 \sqrt[4]{\frac{1}{\sigma_0^2} \frac{1}{258 k^2} \text{ch}(k(4k^2 t))} \quad (27)$$

Отметим, что в представленном решении  $k$  – волновое число, является произвольным, решение справедливо и при  $\sigma^* = \sigma = 0$ . В общем случае уравнение (25) не имеет точного решения, поэтому требуется подход, позволяющий перейти к дискретному аналогу (25), а частное решение (27) можно использовать в качестве начального условия при реализации численного решения.

В качестве такого подхода используем интегро-интерполяционный метод построения новых разностных схем для дискретизации эволюционных уравнений в частных производных с помощью техники базисов Грёбнера, предложенный в [24, 25]. Последовательность получения разностной схемы, проверка ее адекватности и устойчивости аналогична [15], а полученная новая разностная схема для обобщенного уравнения КдВШ (25), т.е. при  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ , имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{u_{nj+1} - u_{nj}}{4} - \frac{(u_{3/2nj+1} - u_{3/2nj+1})}{4} - \frac{(u_{3/2nj+1} - u_{3/2nj+1})}{4} \\ & \quad \frac{(u_{j+1}^2 - u_{2n+1})}{4h} - \frac{(u_{2nj+1} - u_{2nj+1})}{4h} - \frac{(u_{nj+1/2} - 2u_{nj+1} - 2u_{nj+1})}{4h_3} \\ & \quad \frac{(u_{nj+2} - 2u_{nj+1} - 2u_{nj+1} - u_{nj+2})}{4h_3} - \frac{(u_{nj+1/2} - u_{nj+1/2})}{4h} - \frac{(u_{nj+1} - u_{nj+1})}{2} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь введены дискретные сеточные функции  $u_j^n = u(t_n, x_j)$  и обозначено  $t_{n+1} - t_n = \tau$ ,  $x_{j+1} - x_j = h$ .

Для решения разностной схемы (27) при ее программной реализации использован метод итераций, что потребовало линеаризации нелинейных степенных сеточных функций с показателем степени  $3/2$  и  $2$  для следующего временного слоя. Процедура линеаризации основана на применении предложенных расчетных соотношений вида





Здесь  $k_1, k_2$  – волновые числа, соответствующие первой и второй уединенным волнам, а  $\eta^*$  – начальное запаздывание одной волны относительно другой по координате  $\eta$ .

Результаты расчета эволюции в оболочке из несжимаемого материала ( $\mu_0 = 1/2$ , т.е.  $\sigma^* = 0$ ) двух солитонов деформации, разной амплитуды и смещенных друг от друга по координате  $\eta$  представлены на рис. 1 для случая исключения из рассмотрения инерции вязкой жидкости, т.е. при  $\sigma = 0$ .

При расчете использовали начальные условия (31), (32), в которых для  $\varphi^{(1)}$  полагали  $k_1 = 0,225$  и начальное смещение  $\eta^* = 50$ , для  $\varphi^{(2)}$  полагали  $k_2 = 0,2$ . В указанном случае, солитоны деформации в оболочке распространяются в положительном направлении оси пространственной координаты  $\eta$ . Учитывая, что солитоны деформации соответствуют второму члену асимптотического разложения (12) их скорость оказывается выше звуковой, т.к. первому члену (12) соответствуют линейные волны, распространение которых происходит со скоростью звука. Отметим, что случай, представленный на рис. 1, также соответствует варианту отсутствия жидкости в оболочке, т.к. переход к нему подобен полаганию в (25)  $\sigma = \sigma^* = 0$ . Следовательно, при несжимаемом материале оболочки и исключении из рассмотрения инерции движения жидкости, ее заполняющей, наличие жидкости в оболочке не влияет на нелинейный волновой процесс и он подобен процессу в оболочке без жидкости. При этом эволюция двух первоначально возбужденных солитонов деформации вида (31), (32) разной амплитуды и смещенных в пространстве друг относительно друга происходит по классическому сценарию. Солитон с большей амплитудой догоняет солитон с меньшей амплитудой и наблюдается их упругое взаимодействие как частиц.

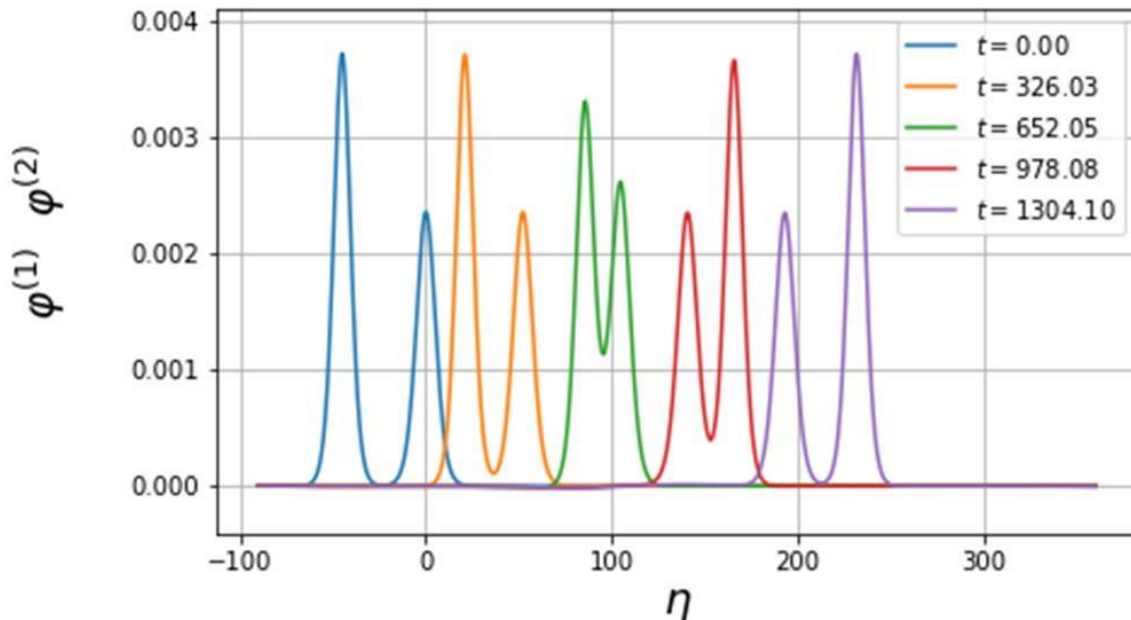


Рисунок 1- Результаты численного решения уравнения (25) при  $\sigma = \sigma^* = 0$  с начальными условиями (31), (32), в которых  $k_1 = 0,225$ ,  $k_2 = 0,2$ ,  $\eta^* = 50$ .

Результаты расчета эволюции солитона деформации в оболочке, выполненной из сжимаемого материала при учете инерции движения жидкости, заполняющей оболочку, представлены на рис. 2. При расчете использовали начальное условие (30), в котором полагали  $k=0,2$ , а также задавали в (28) значения коэффициентов  $\sigma = 0,2$ ,  $\sigma^* = 0,4$ . Моделирование позволило определить, что в этом случае наблюдается достаточно быстрое разрушение солитона деформации, а его скорость распространения оказывается дозвуковой, т.к. уединенная волна распространяется в отрицательном направлении оси пространственной координаты  $\eta$ .

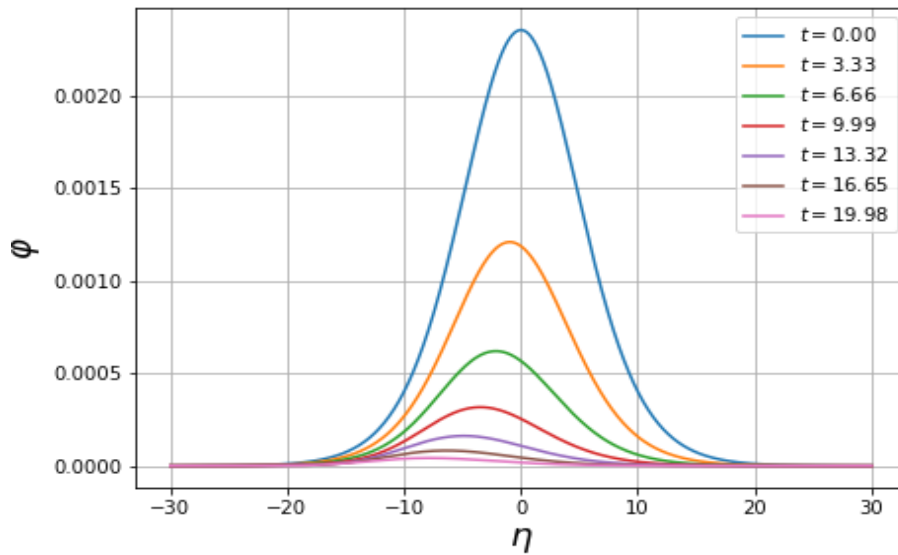


Рисунок 2 - Результаты численного решения уравнения (25) при  $\sigma = 0.2$ ,  $\sigma^* = 0.4$  с начальными условиями (30) с волновым числом  $k = 0,2$ .

Результаты расчета эволюции солитона деформации в оболочке, выполненной из сжимаемого материала без учета инерции движения жидкости, заполняющей оболочку, представлены на рис. 3. При расчете использовали начальное условие (30), в котором полагали  $k=0,2$ , а также задавали в (28) значения коэффициентов  $\sigma = 0$ ,  $\sigma^* = 0,4$ . Как следует из приведенного на рисунке сценария эволюции солитона скорость его распространения выше звуковой, но наблюдается разрушение уединенной волны с течением времени.

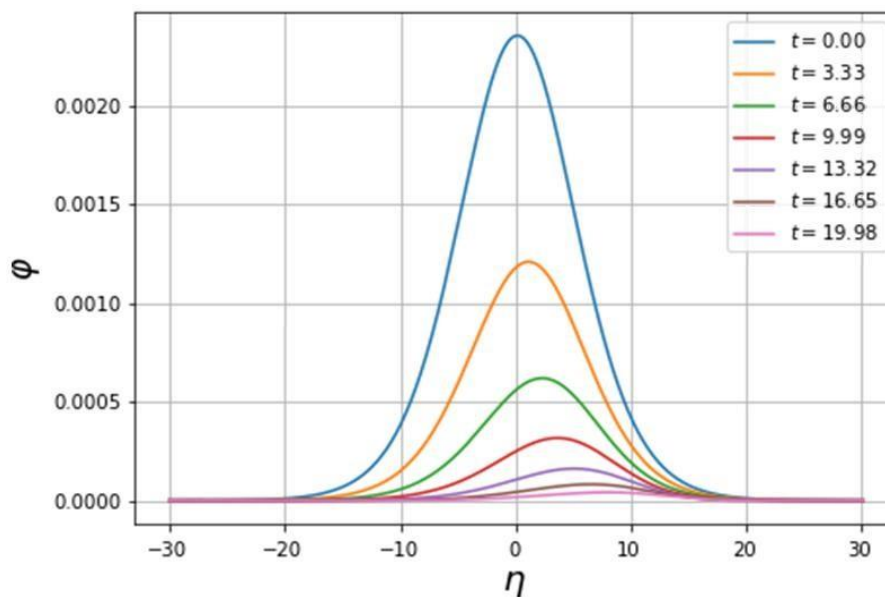


Рисунок 3 - Результаты численного решения уравнения (25) при  $\sigma = 0$ ,  $\sigma^* = 0.4$  с начальными условиями (30) с волновым числом  $k = 0,2$ .

## **Выводы и заключение**

Данные расчетов, позволяют утверждать, что солитоны деформации в оболочке из несжимаемого материала, заполненной вязкой жидкостью, инерцией движения которой пренебрегают, распространяются со скоростью выше скорости звука, не меняя своей амплитуды и скорости. В этом случае наличие вязкой жидкости в оболочке не влияет на волновой процесс, и он подобен процессу в «сухой» оболочке, т.е. оболочке без жидкости.

В случае наличия в оболочке из сжимаемого материала жидкости, при учете инерции движения последней, наблюдается разрушение солитонов деформации, а их скорость распространения оказывается дозвуковой. С другой стороны, если инерция движения вязкой жидкости исключается из рассмотрения, а материал оболочки считается сжимаемым, то скорость солитона будет выше звуковой, но его разрушение сохраняется. Следовательно, при сжимаемом материале оболочки вязкость жидкости в рассматриваемой механической системе обуславливает диссипацию энергии и ведет к разрушению солитонов деформации. Учет инерции жидкости приводит к изменению скорости солитона – она становится дозвуковой. В то же время, при рассмотрении вязкой жидкости без учета инерции ее движения, и использовании несжимаемого материала оболочки, диссипативные свойства вязкой жидкости не проявляются, а скорость распространения солитонов становится выше скорости звука.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития методов акустической диагностики состояния цилиндрических оболочек, содержащих вязкую жидкость. Например, в ходе решения обратных задач при оценке механических свойств и состояния трубопроводов систем гидропривода, подачи топлива и охлаждения, входящих в состав современных изделий авиакосмической промышленности, и выполненных из материалов с существенно нелинейными физическими свойствами.

---

## **Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

authors declare no conflict of interest.

**Список источников**

1. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М. : Наука, 2009. 280 с.
2. Волны в сплошных средах / А.Г. Горшков, А.Л. Медведский, Л.Н. Рабинский, Д.В. Тарлаковский. М. : Физматлит, 2004. 472 с.
3. Башарина Т.А., Глебов С.Е., Акользин И.В. Исследование распространения гидроударной волны в стабилизаторе давления поршневого типа // Труды МАИ : электрон. журнал. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177661>.
4. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках. Собр. соч. М. : Изд-во АН СССР, 1952. С. 172–183.
5. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves // Philosophical Magazine, 1955. Vol. 46. P. 199–221. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/14786440208520564>.
6. Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Никитина Е.А. Учет влияния поврежденности материала на скорость распространения в нем упругой волны // Труды МАИ : электрон. журнал. 2010. № 40. 5 с. URL: <https://trudymai.ru/upload/iblock/34f/uchet-vliyaniya-povrezhdennosti-materiala-naskorost-rasprostraneniya-v-nem-uprugoy-volny.pdf?ysclid=mj1j3cowru120442467>.
7. Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Морозов А.Н. Локализация волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде // Труды МАИ : электрон. журнал. 2010. № 40. URL: [https://mai.ru/upload/iblock/b05/lokalizatsiya-volnydeformatsii-v-nelineyno\\_uprugoy-provodyashcheysrede.pdf?ysclid=mj1jb091n486817661](https://mai.ru/upload/iblock/b05/lokalizatsiya-volnydeformatsii-v-nelineyno_uprugoy-provodyashcheysrede.pdf?ysclid=mj1jb091n486817661).
8. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках : обзор // Акустический журнал. 2002. Т. 48, № 6. С. 725–740.

9. Островский Л.А., Гурбатов С.Н., Диденкулов И.Н. Нелинейная акустика в Нижнем Новгороде : обзор // Акустический журнал. 2005. Т. 51, № 2. С. 150–166.
10. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов : Саратовский государственный технический университет, 1999. 132 с.
11. Кореньков А.Н. Линейная дисперсия и солитоны на цилиндрической оболочке с жидкостью // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 6. С. 122– 125.
12. Кореньков А.Н. Уединенные волны на цилиндрической оболочке с жидкостью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6, № 1. С. 131–143. DOI 10.21638/11701/spbu01.2019.110.
13. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Продольные волны в нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость // Труды МАИ : электрон. журнал. 2019. № 105. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=104003>.
14. Моделирование продольных волн в оболочке с физически квадратичной нелинейностью, заполненной жидкостью и окруженной упругой средой / Т.В. Быкова, Е.В. Евдокимова, Л.И. Могилевич, В.С. Попов // Труды МАИ. 2020. № 111. DOI 10.34759/trd-2020-111-3.
15. Эволюция уединенных гидроупругих волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках с физической нелинейностью Шамеля / Ю.А. Блинков, Л.И. Могилевич, В.С. Попов, Е.В. Попова // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16 (4). С. 430–444.
16. Попова Е.В. Моделирование эволюции уединенных волн деформации в двух соосных оболочках из несжимаемого материала с комбинированной нелинейностью, содержащих вязкую жидкость между ними и во внутренней оболочке // Труды МАИ : электрон. журнал. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php/Downloads/published.php?ID=179680&ysclid=mj1jdz3633176399842>.
17. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. : Наука, 1972. 432 с.

18. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
19. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin : Springer, 1958, 684 p.
20. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dynamics, 2019. Vol. 98, iss. 1. P. 185–194. DOI 10.1007/s11071-01905181-5
21. The Schamel – Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells / A.I. Zemlyanukhin, A.V. Bochkarev, I.V. Andrianov, V.I. Erofeev // Journal of Sound and Vibration, 2021. Vol. 491. Art. 115752. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115752>
22. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. : Дрофа, 2003. 840 с.
23. Nayfeh A.H. Perturbation methods. New York, Wiley, 1973. 425 p.
24. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozzhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2006. Vol. 2. Art. 051. DOI 10.3842/SIGMA.2006.051.
25. Blinkov Y.A., Gerdt V.P., Marinov K.B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods // Programming and Computer Software, 2017. Vol. 43, iss. 2. P. 84–89. DOI 10.1134/S0361768817020049.

## References

1. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. Akusticheskii kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ekspluatatsii [Acoustic control of equipment during manufacture and operation]. Moscow, Nauka Publ., 2009, 280 p.
2. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. Volny v sploshnykh sredakh [Waves in continuous media]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 p.
3. Basharina T.A., Glebov S.E., Akol'zin I.V. Trudy MAI: elektron. zhurn., 2023, no. 133. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177661>.
4. Gromeka I.S. O skorosti rasprostraneniya volnoobraznogo dvizheniya zhidkosti v uprugikh trubkakh [On the velocity of wave-like motion of fluids in elastic tubes].



Moscow, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1952, pp. 172–183.

5. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves. *Philosophical Magazine*, 1955, vol. 46, pp.

199–221. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/14786440208520564>.

6. Erofeev V.I., Morozov A.N., Nikitina E.A. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2010, no.

40. 5 p. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=22861>.

7. Erofeev V.I., Mal'khanov A.O., Morozov A.N. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2010. no. 40. Available at: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=22860>.

8. Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates, and shells (A Review). *Acoustical Physics*, 2002, vol. 48, no. 6, pp. 643–655. DOI:10.1134/1.1522030.

9. Ostrovsky L.A., Didenkulov J.N., Gurbatov S.N. Nonlinear acoustics in Nizhni Novgorod (A review). *Acoustical Physics*, 2005, vol. 51, no. 2, pp. 114–127. DOI:10.1134/1.1884486.

10. Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. *Nelineinye volny v tsilindricheskikh obolochkakh: solitony, simmetrii, evolyutsiya* [Nonlinear waves in cylindrical shells: solitons, symmetries, evolution]. Saratov, Saratov State Technical University, 1999, 132 pp.

11. Koren'kov A.N. Linear dispersion and solitons in a liquid-filled cylindrical shell.

*Technical Physics*, 2000, vol. 45, no. 6, pp. 789–793. DOI 10.1134/1.1259723.

12. Koren'kov A.N. Solitary waves on a cylinder shell with liquid. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2019, vol. 52, no. 1, pp. 92–101.

13. Ivanov S.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2019, no 105. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=104003>.

14. Bykova T.V., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2020, no. 111. DOI 10.34759/trd-2020-111-3.

15. Blinkov Yu.A., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova E.V. *Computational Continuum Mechanics*, 2023, vol. 16, iss. 4. pp. 430–444.

16. Popova E.V. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2024, no. 135. Available at:



17. Vol'mir A.S. Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek [Nonlinear dynamics of plates and shells: studies. Manual for undergraduate and graduate]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 432 p.
18. Lukash P.A. Osnovy nelineinoi stroitel'noi mekhaniki [Fundamentals of nonlinear structural mechanics]. Moscow, Stroyizdat, 1978, 204 p.
19. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin, Springer, 1958, 684 p.
20. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. Nonlinear Dynamics, 2019, vol. 98, iss. 1. pp. 185–194. DOI 10.1007/s11071-01905181-5
21. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel – Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. Journal of Sound and Vibration, 2021, vol. 491, art. 115752. DOI 10.1016/j.jsv.2020.115752.
22. Loitsyanskii L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza. Moscow, Bustard, 2003. 840 p.
23. Nayfeh A.H. Perturbation methods. New York, Wiley, 1973, 425 p.
24. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozzhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2006, vol. 2, art. 051. DOI 10.3842/SIGMA.2006.051.
25. Blinkov Y.A., Gerdt V.P., Marinov K.B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods. Programming and Computer Software, 2017, vol. 43, iss. 2, pp. 84–89. DOI 10.1134/S0361768817020049.

### **Информация об авторах**

**Лев Ильич Могилевич**, доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия; e-mail: mogilevichli@gmail.com

**Елизавета Викторовна Попова**, аспирант, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия; e-mail: [elizaveta.popova.97@bk.ru](mailto:elizaveta.popova.97@bk.ru)

**Екатерина Владимировна Евдокимова**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия; e-mail: [eev2106@mail.ru](mailto:eev2106@mail.ru)

**Виктор Сергеевич Попов**, доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия; e-mail: [vic\\_p@bk.ru](mailto:vic_p@bk.ru)

### Information about the authors

**Lev I. Mogilevich**, Dr. Sc. (Eng.), professor of Applied Mathematics and System Analysis Department, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia; e-mail: [mogilevichli@gmail.com](mailto:mogilevichli@gmail.com)

**Elizaveta V. Popova**, postgraduate student, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia; e-mail: [elizaveta.popova.97@bk.ru](mailto:elizaveta.popova.97@bk.ru)

**Ekaterina V. Evdokimova**, Cand. Sc. ((Phys.-Math.)), associate professor of Applied Mathematics and System Analysis Department, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia; e-mail: [eev2106@mail.ru](mailto:eev2106@mail.ru)

**Viktor S. Popov**, Dr. Sc. (Eng.), professor of Applied Mathematics and System Analysis Department, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia; e-mail: [vic\\_p@bk.ru](mailto:vic_p@bk.ru)

---

Получено 23 октября 2025 ● Принято к публикации 10 декабря 2025 ● Опубликовано 30 декабря 2025  
Received 23 October 2025 ● Accepted 10 December 2025 ● Published 30 December 2025

---