

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Васильева София Николаевна

АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ КВАНТИЛЬНОГО КРИТЕРИЯ В
ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С БИЛИНЕЙНЫМИ И
КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПОТЕРЬ

Специальность 05.13.01

Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Специальность 05.13.18

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Ю. С. Кан

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,
профессор А. И. Кибзун

Москва, 2018 год

Оглавление

Введение	4
1 Аппроксимация ядра вероятностной меры	16
1.1. Основные определения и свойства ядра вероятностной меры	16
1.2. Аналитическое построение границ α -ядер	22
1.2.1. Многомерное нормальное распределение	22
1.2.2. Двумерное равномерное распределение	23
1.2.3. Распределение Коши	29
1.2.4. Равномерное распределение на противоположных сторонах квадрата	30
1.3. Алгоритм построения внешней аппроксимации ядра вероятностной меры . .	31
1.4. Выводы по главе 1	38
2 Программная реализация алгоритма аппроксимации α-ядра в двумерном случае	39
2.1. Описание программного модуля	39
2.2. Результаты работы программного модуля	40
2.3. Выводы по главе 2	48
3 Задача квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь	49
3.1. Постановка задачи	49
3.2. Сведение задачи квантильной оптимизации к задаче линейного программирования	51
3.3. Результаты расчетов для различных распределений случайного вектора . .	52
3.3.1. Нормальное распределение	52
3.3.2. Равномерное распределение	55
3.3.3. Распределение Коши	57
3.4. Метод решения задач с вероятностными ограничениями	57
3.5. Модельный пример	59
3.6. Выводы по главе 3	61

4	Метод линеаризации для решения задачи квантильной оптимизации с функцией потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров	62
4.1.	Постановка задачи	62
4.2.	Линеаризация функции потерь по вектору малых случайных параметров . .	64
4.3.	Портфельная задача	70
4.4.	Выводы по главе 4	75
5	Вероятностный анализ рассеивания концов баллистических траекторий	76
5.1.	Постановка задачи	76
5.2.	Используемые системы координат	78
5.3.	Генерация исходных данных для расчетов	80
5.4.	Расчет КВО методом Монте-Карло	83
5.5.	Обоснование метода покомпонентной линеаризации	84
5.6.	Схема расчетов по методу линеаризации	88
5.7.	Результаты расчетов	88
5.8.	Выводы по главе 5	91
	Заключение	96
	Список литературы	97

Введение

Актуальность темы. Одной из основных задач системного анализа является разработка способов учета неопределенностей в математических моделях систем. Качество функционирования систем обычно можно описать функцией, зависящей от стратегии и от случайных параметров, характеризующих влияние на систему случайных воздействий различной природы. Без ограничения общности можно считать, что для этой функции желательными являются малые значения. Наличие случайных параметров приводит к случайности значения функции потерь, что затрудняет сравнение различных стратегий между собой. Одним из способов преодоления этого затруднения является рассмотрение вероятностных критериев качества в случае, когда неопределенности имеют стохастическую природу. К вероятностным критериям относятся функция вероятности и функция квантили. Функция вероятности представляет собой вероятность непревышения функцией потерь заданного уровня. Функция квантили – наименьшее значение функции потерь, которое не будет превышено с вероятностью не ниже заданной. Задачи оптимизации и анализа этих критериев являются объектом изучения в теории стохастического программирования с вероятностными критериями. Развитие теории стохастического программирования началось в рамках специального раздела, связанного с учетом вероятностных ограничений. Этот раздел начал развиваться примерно с середины 50-х годов XX века благодаря работам Юдина [59], Чарнса и Купера [63,64], Чарнса, Купера и Саймондса [65], Гартски [68], Калла [71], Калла и Уоллеса [72], Колбина [80], Прекопы [87–90], Прекопы и Шантая [91], Сенгупты [95], Саймондса [96], Вайды [102]. В этих работах исследовались задачи стохастического программирования, в которых вероятностные критерии участвуют в задании ограничений на множество допустимых стратегий. В более современных работах рассматриваются задачи оптимизации как с совместными, так и с индивидуальными вероятностными ограничениями. Совместные вероятностные ограничения представляют собой ограничения на вероятность одновременного выполнения системы неравенств. Результаты по этой проблематике впервые были опубликованы в работе Чарнса и Купера [63] для случая линейной по случайным параметрам системы неравенств. Также решению задач с совместными вероятностными ограничениями посвящены работы Миллера и Вагнера

ра [86], Акойя [103], Акойя и Хенриона [104], Акойя и Сагастисабаль [105], Кси и Ахмеда [109]. Отдельный интерес представляют индивидуальные вероятностные ограничения, которые являются ограничениями на вероятности выполнения скалярных неравенств. В области индивидуальных вероятностных ограничений большой вклад внес венгерский математик Прекопа, который получил достаточные условия выпуклости допустимого множества, определенного индивидуальными вероятностными ограничениями. Это позволило применить методы выпуклого программирования к построению численных методов стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Основные результаты в данном направлении изложены в монографии Прекопы [92]. Результаты по разработке численных алгоритмов проверки вероятностных ограничений приведены в монографии Генца и Бретца [69]. Важно отметить, что в случае дискретного распределения случайных параметров системы в работах Прекопы, Визвари и Бадикса [93], Денчевой, Прекопы и Ружинского [66], Беральди и Ружинского [61], Лежена [81,82] разработаны эффективные алгоритмы решения задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями, основанными на понятии p -эффективных точек.

Среди вероятностных критериев особое место занимает квантильный критерий, характеризующий гарантированный по вероятности результат. Формально, задача оптимизации по квантильному критерию является частным случаем задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями.

Квантильный критерий качества впервые введен в рассмотрение Катаокой [74]. Это положило начало развитию теории стохастического программирования в новом направлении – теории решения задач квантильной оптимизации. Теория стохастического программирования с квантильным критерием получила развитие благодаря работам Райка [49–52], Кибзуна и Курбаковского [37, 76], Кибзуна, Лебедева и Малышева [38], Кибзуна и Малышева [39], Кибзуна, Малышева и Чернова [40], Лепша [43, 44, 83], Моесеке [106], Тамм [53, 54, 97, 98], Юби [57, 58], Марти [84, 85], Ермольева [20], Ермольева, Норкина и Ветса [67], Норкина и Роечко [46] и Урясьева [55, 99–101]. Современное состояние теории в данной области достаточно полно отражено в монографиях Кибзуна и Кана [35, 75].

Для формулировки условий существования решения оптимизационных задач с вероятностными критериями важен вопрос о непрерывности функций вероятности и квантили. Первые результаты по непрерывности вероятностных критериев получены Райком

в работах [49–52] и в дальнейшем развиты Малышевым и Кибзуном [45], Кибзуном и Каном [35, 75]. Свойство выпуклости является ключевым при доказательстве сходимости численных методов оптимизации. Оно связано со свойством выпуклости вероятностных распределений. Результаты, полученные в данном направлении венгерскими математиками Борелом и Прекопой, опубликованы в обзорной работе [62]. Применение этих результатов к функциям вероятности и квантили изложено в статье Кана и Кибзуна [26]. Результаты о свойствах вероятностных критериев также опубликованы в работах Кана и Кибзуна [26], Кана и Мистрюкова [27], Кибзуна и Кузнецова [36], Тамм [53].

В настоящее время основным аналитическим инструментом решения задач квантильной оптимизации является доверительный метод. Доверительный метод позволяет свести исходную задачу квантильной оптимизации к минимаксной, где максимум берется по доверительному множеству, которое предлагается оптимизировать. Решение минимаксной задачи на произвольном доверительном множестве по значению критерия является верхней оценкой решения исходной задачи квантильной оптимизации. Если выбранное доверительное множество является оптимальным, то решение минимаксной задачи совпадает с решением исходной задачи квантильной оптимизации. Впервые идея доверительного метода была предложена в работах Кибзуна, Лебедева и Малышева [38], Малышева и Кибзуна [39] и получила название «Обобщенный минимаксный подход». В монографии Кибзуна и Кана [75] обобщенный минимаксный подход был переименован в доверительный метод. В работах Кана и Суринова [29], Кибзуна, Малышева и Чернова [40], Кибзуна и Малышева [45], Кана [73], Кибзуна и Кана [75], Кибзуна, Малышева и Карпа [77], Кибзуна и Наумова [41] обобщенный минимаксный подход получил своё развитие, и для некоторых классов задач удалось сразу указать «хорошее» доверительное множество. В работе Кана [73] показано, что, когда функция потерь линейна по случайным параметрам, обобщенная минимаксная задача сводится к обычной минимаксной задаче (при выполнении некоторых условий регулярности), где в качестве множества неопределенности выступает α -ядро, которое не является доверительным множеством. В диссертационной работе этот результат является отправной точкой исследования. Несмотря на его важность, к настоящему времени на его основе не разработано конструктивных алгоритмов нахождения оптимального решения для непрерывных распределений случайных параметров. Следует также отметить, что к настоящему времени вопрос моделирования α -ядер является прак-

тически не исследованным, что затрудняет практическое применение упомянутого выше результата из [73] для решения конкретных задач.

Среди задач стохастического программирования выделяется класс задач с билинейной функцией потерь, поскольку именно такие функции потерь зачастую возникают в прикладных задачах. Они рассматривались, например, в работах [28, 33].

Также большой интерес представляют задачи с квазилинейной по случайным параметрам функцией потерь. К таким задачам относятся задачи, где случайные параметры являются малыми относительно детерминированных параметров функции потерь. Такой класс задач на практике возникает в тех случаях, когда случайные параметры оказывают малое влияние на динамику системы в целом. Задачам квантильного анализа с относительно малыми случайными параметрами посвящена публикация Кана и Сысуева [30], в которой предложена идея линеаризации функции потерь по случайным параметрам и приведено обоснование для скалярного случая. В работе Кана и Сысуева [31] проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода линеаризации и гарантирующим решением. До сих пор применение метода линеаризации в векторном случае при использовании квантильного критерия не обосновано.

Объектом исследования являются задачи стохастического программирования с вероятностными критериями с линейными и квазилинейными функциями потерь.

Цель и задачи работы.

Целью диссертационной работы является разработка алгоритмов решения задач анализа и оптимизации квантильного критерия с линейными и квазилинейными по непрерывным случайным параметрам функциями потерь, основанных на использовании моделей ядра вероятностной меры.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) разработать конструктивные способы построения моделей α -ядер и исследовать их свойства;
- 2) разработать алгоритм решения задач квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь, основанный на аппроксимации α -ядра;
- 3) обосновать метод линеаризации для решения квантильных задач оптимизации и анализа с квазилинейной функцией потерь;
- 4) с использованием метода линеаризации разработать алгоритм оценки кругово-

го вероятного отклонения в задаче вероятностного анализа рассеивания баллистических траекторий

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы математического моделирования, теории вероятностей и математической статистики, выпуклого анализа, функционального анализа, теории стохастического программирования, математического программирования.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. В работе впервые предложен алгоритм построения полиэдральных моделей ядра вероятностной меры. Создан программный модуль визуального представления этих моделей в двумерном случае. С использованием предложенных моделей задача квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь сведена к задаче линейного программирования. Обоснован метод линеаризации в многомерном случае. Обосновано использование метода линеаризации для задач, в которых функция потерь является нормой вектора, покомпонентно зависящего от малых случайных параметров.

Практическая ценность. Метод линеаризации позволяет решать задачи анализа характеристик рассеивания концов баллистических траекторий с использованием линеаризованных моделей, основанных на использовании баллистических производных, что снижает вычислительные затраты по сравнению с методом Монте-Карло. Алгоритм оптимизации квантильного критерия для билинейной функции потерь позволяет решать задачи оптимизации портфеля ценных бумаг с учетом риска в случаях, когда распределение вектора случайных доходностей непрерывно и отличается от нормального.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, 5 глав, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 106 страниц, включая 24 рисунка, 18 таблиц и список литературы, содержащий 109 наименований.

Во введении приведен подробный обзор имеющихся работ по тематике диссертационного исследования и смежным областям, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна, практическая ценность, а также кратко изложено содержание глав диссертации.

В первой главе вводятся ключевые понятия теории стохастического программи-

рования: функции вероятности и квантили, α -ядра вероятностной меры. Это α -ядро является выпуклым, ограниченным и замкнутым подмножеством пространства реализаций случайного вектора и определяется как пересечение всех замкнутых полупространств, вероятностная мера которых не ниже α . Далее приведены основные свойства ядра вероятностной меры, одним из которых является понятие регулярности, предложенное в монографии [35]. Регулярность позволяет свести задачу нахождения квантили линейной по случайным параметрам функции потерь к задаче поиска максимума этой линейной функции по реализациям случайного вектора на ядре. Далее приводятся новые результаты: теоремы о непустоте и о внутренней точке ядра. Первая теорема содержит условие, которое обеспечивает непустоту ядра при любом распределении рассматриваемого случайного вектора. Вторая теорема гласит о том, что при выполнении её условий обеспечивается регулярность α -ядра при $\alpha = 1/2$, при этом векторная медиана – вектор, составленный из медиан координат рассматриваемого случайного вектора, является его единственной точкой.

Приведены аналитические результаты, позволяющие строить точную границу ядра вероятностной меры для некоторых распределений. Например, в случае многомерного нормального распределения ядро является эллипсоидом [35], для двумерного распределения Коши – квадратом, а для двумерного равномерного распределения – множеством, ограниченным четырьмя гиперболами. Также рассматривается вырожденное распределение – равномерное распределение на противоположных сторонах квадрата. Для такого распределения α -ядро уровня $2/3$ является ромбом [35] и имеет вероятностную меру, равную нулю. К сожалению, на основании аналитических рассуждений, позволяющих точно находить границу α -ядра для приведенных распределений, не удастся предложить конструктивный алгоритм построения точных границ α -ядер в общем случае, или хотя бы для какого-либо класса распределений.

Вместо самого ядра предлагается использовать его модель – внешнюю полиэдральную аппроксимацию. Предложен пошаговый алгоритм построения такой аппроксимации для любого непрерывного случайного вектора. Уникальность алгоритма заключается в том, что он позволяет строить достаточно густую, хотя и не равномерную, сеть векторов нормали к граням аппроксимирующего многогранника. Для реализации настоящего алгоритма необходимо вычислять квантиль скалярного произведения единичного вектора

нормали на случайный вектор. Если вычисление точного значения квантили затруднено, то предлагается использовать её статистическую оценку. При этом, в случае выборочной оценки квантили и достаточного больших объемов выборки полученная аппроксимация остается внешней, но при большом количестве вершин аппроксимирующего многогранника и недостаточном объеме выборки число вершин может оказаться меньше заданного. Это связано с тем, что в случае использования приближенного значения квантили некоторые из ограничений, задающих полиэдральную аппроксимацию, могут вырождаться. Приведены рисунки с изображением точных границ ядер для различных α и границы аппроксимирующих многогранников, построенные с использованием точных значений квантили.

Во второй главе описан комплекс программ, реализующий разработанный алгоритм аппроксимации ядер нормального, логнормального, экспоненциального и равномерного распределений компонент двумерного случайного вектора. Реализованный в программном обеспечении алгоритм позволяет строить аппроксимации α -ядер по имеющейся выборке вне зависимости от закона распределения. С использованием этого алгоритма были построены аппроксимации α -ядер для равномерного распределения на противоположных сторонах квадрата и равномерного распределения на сторонах квадрата в случае, когда часть меры распределена равномерно по площади квадрата. Визуализация результатов позволяет получать графическое представление результатов работы алгоритма для не более чем трех различных значений α на одном рисунке. Приведены соответствующие рисунки для различных значений α .

В третьей главе исследована задача квантильной минимизации в случае билинейной функции потерь. Показано, что при замене α -ядра его полиэдральной моделью оптимальное значение критерия в соответствующей минимаксной задаче является оценкой сверху для оптимального значения квантильного критерия. Минимаксная задача, в которой внутренний максимум по реализациям случайного вектора ищется на аппроксимации ядра вероятностной меры, сводится к задаче линейного программирования. Доказана теорема о сходимости решения аппроксимирующей задачи по значению критерия с ростом числа вершин аппроксимирующего многогранника. Решено несколько числовых примеров для нормального, равномерного распределений и распределения Коши. На модельном примере показано, что использование ядра вероятностной меры дает приемлимую

погрешность для оптимальных значений функции квантили.

В четвертой главе исследуется задача минимизации квантильного критерия для функции потерь, нелинейно зависящей от вектора малых случайных параметров. Такие функции потерь встречаются в задачах управления летательными аппаратами с учетом случайных возмущений. Функция потерь в таких задачах обычно характеризует точность системы управления, например терминальную. Малые случайные параметры моделируются произведениями случайных величин с заданными распределениями на малые детерминированные константы, образующие вектор малых параметров. Исследуется вопрос о получении аналитических приближений квантильного критерия с учетом малости случайных параметров. Результаты основаны на методе линеаризации для решения задач квантильной оптимизации, предложенном в [30]. Этот метод заключается в использовании вместо исходной нелинейной функции потерь ее линейной модели, полученной в соответствии с тейлоровским разложением в ряд по случайным параметрам и сохранением лишь линейных членов разложения. В [30] этот метод обоснован только для случая скалярного случайного параметра, а также для векторного, но позволяющего построить достаточно гладкий детерминированный эквивалент. Приводится обоснование метода линеаризации для общего случая, когда случайных параметров несколько. Показано, что погрешность по квантильному критерию при использовании линеаризованной функции потерь пропорциональна квадрату нормы вектора малых параметров.

В пятой главе рассматривается задача вероятностного анализа рассеивания концов баллистических траекторий на поверхности Земли. В качестве характеристики рассеивания используется круговое вероятное отклонение (КВО). КВО является одной из характеристик точности стрельбы и представляет собой [17] длину радиуса круга, с центром в точке прицеливания, вероятность попадания в который равна $1/2$. Таким образом, КВО есть квантиль уровня $1/2$ случайной величины, характеризующей расстояние между возмущенной и номинальной точками падения. Предполагается, что отклонение от расчетной траектории обусловлено только случайными возмущениями начальной скорости. Они считаются малыми по сравнению с модулем номинальной начальной скорости. Считается, что расчетная траектория является участком эллиптической кеплеровой дуги. Выражения из теории Кеплера для расчета возмущенных траекторий нелинейно зависят от вектора начальной скорости. Поэтому КВО не удается найти аналитически. Для

преодоления этой проблемы предлагается модифицировать метод линеаризации: линеаризовать указанную выше нелинейную зависимость. Линеаризация осуществляется путем выделения линейной части разложения двумерного вектора терминального отклонения точки падения на поверхности Земли в ряд Тейлора по малым случайным параметрам, в качестве которых выступает вектор возмущений начальной скорости с нормальным законом распределения. Доказывается, что погрешность определения КВО с использованием такой линеаризованной модели пропорциональна величине малого параметра. Для применения метода линеаризации предлагается перейти в систему координат, связанную с номинальной точкой падения, в которой отклонения можно рассматривать в плоскости, вектором нормали к которой является радиус-вектор номинальной точки падения. Матрица частных производных в тейлоровском разложении в рассматриваемой задаче является матрицей баллистических производных. Отметим, что в работе Алферьева [1] получены аналитические соотношения для баллистических производных в случае свободного конца кеплеровой дуги. В рассматриваемой задаче концы всех возмущенных траекторий связаны граничным условием, поскольку они находятся на поверхности Земли, что не позволяет применить указанные соотношения для определения баллистической матрицы. Поэтому при проведении расчетов баллистические производные определялись методом конечных разностей. Поскольку вектор отклонений в линеаризованной модели линейно зависит от компонент вектора возмущения скорости, то его компоненты тоже имеют нормальное распределение. Для оценки КВО при использовании линеаризованной модели применялся метод, предложенный в статье Кана и Травина [32], который позволяет находить оценку квантили заданного уровня нормы двумерного гауссовского вектора с заданной точностью. Метод основан на построении сходящихся последовательностей верхних и нижних оценок квантили. Ранее задача по вычислению КВО рассматривалась в статье [18], в которой изучалась зависимость величины КВО от номинальной сферической дальности полета при учете возмущений вектора скорости. В этой статье метод линеаризации фактически был использован, но его математическое обоснование не было представлено. В настоящей главе такое обоснование приводится впервые. В общей постановке исследуется вопрос о точности метода линеаризации в задачах оценки квантилей функции потерь, заданной в форме нормы вектора, компоненты которого нелинейно зависят от произведения случайного вектора на малый детерминированный параметр. Доказано, что ошибка оценки

квантильного критерия с использованием линеаризованной модели имеет тот же порядок, что и малый параметр. В общем нелинейном случае квантиль можно оценить методом Монте-Карло с использованием порядковой выборочной оценки, свойства которой изложены в [35]. На модельном примере производится сравнение оценок КВО, полученных с применением метода линеаризации и метода Монте-Карло. Приведены результаты расчетов, которые свидетельствуют о том, что ошибка в определении КВО с использованием метода линеаризации по сравнению с методом Монте-Карло не превышает 1,5 % в широком диапазоне исходных данных.

В заключении приведены основные научные результаты, полученные автором работы.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Предложены и обоснованы метод решения задач квантильной оптимизации с билинейными функциями потерь с использованием ядра вероятностной меры и метод линеаризации решения задач квантильной оптимизации с функцией потерь, зависящей от малых случайных параметров (**области исследования 1 и 4 специальности 05.13.01**). Разработаны алгоритмы построения полиэдральных моделей α -ядра вероятностной меры и исследованы их свойства (**область исследования 2 специальности 05.13.18**). Разработан комплекс проблемно-ориентированных программ, позволяющий строить такие модели для двумерного случая (**область исследования 4 специальности 05.13.18**).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

- 1) Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа (ТПСА – 2014)» (Рыбинск, 2014);
- 2) XX международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2015);
- 3) 14-я международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2015);
- 4) VII Традиционная всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация» (Солнечногорск, 2015);
- 5) VIII Традиционная всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация» (пос. Репино, Санкт-Петербург, 2016);
- 6) Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения – 2016»

(Москва, 2016);

7) XXI международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2016);

8) Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Информатика, управление и системный анализ (ИУСА – 2016)» (Тверь, 2016);

9) Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения – 2017» (Москва, 2017);

10) XXII международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2017);

11) XVII Байкальская международная школа-семинар «методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, 2017);

12) Общественного постоянного научного семинара «Теория автоматического управления и оптимизации»,

13) Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения – 2018» (Москва, 2018);

14) Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Информатика, управление и системный анализ (ИУСА – 2018)» (Ростов-на-Дону, 2018);

15) семинар на кафедре «Исследование операций» ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2018);

16) VI International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018) (Иркутск, 2018);

17) VII Международная конференция «Проблемы оптимизации и их приложения (ОРТА – 2018)» (Омск, 2018).

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты №14-07-00089, 15-08-02833, 18-08-00595), РНФ (проект №16-11-00062).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 16 работах, из которых 4 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [7, 10, 11, 13], в том числе 3 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Scopus [7, 10, 11], в том числе 2 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Web of Science [10, 11], и 12 из которых опубликованы в тезисах докладов [3–6, 8, 9, 12, 14–16, 107, 108].

Личный вклад. В совместных публикациях с научным руководителем Каном Ю.С. руководителю принадлежат постановки задачи и идеи их решения.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность научному руководителю Кану Ю.С., участникам научного семинара на кафедре «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» МАИ (НИУ): Кибзуну А.И., Наумову А.В., Мирошкину В.Л., Ибрагимову Д.Н., Иванову С.В., а также участникам Общественного постоянного научного семинара «Теория автоматического управления и оптимизации»: Поляку Б.Т. и Назину А.В. за ценные критические замечания, позволившие улучшить качество диссертационной работы.

Глава 1. Аппроксимация ядра вероятностной меры

Данная глава посвящена свойствам α -ядра, алгоритмам построения его моделей и описанию его роли в задачах стохастического программирования с квантильным критерием. α -ядро является пересечением всех замкнутых полупространств, вероятностная мера которых не меньше, чем α . Для некоторых законов распределения удастся получить аналитические соотношения, позволяющие строить его границу. В общем случае получение таких соотношений представляется затруднительным. Поскольку задача построения ядра вероятностной меры представляется сложной, то предлагается находить его внешнюю аппроксимацию. Внешняя аппроксимация может быть найдена, если известен закон распределения случайного вектора. В разделе 1.1. приведены определения ядра вероятностной меры, его новые и известные свойства. В разделе 1.2. приведены аналитические выражения для построения границ α -ядер для некоторых распределений, а также представлены результаты построения границы ядра и её аппроксимаций в плоском случае. В разделе 1.3. описан алгоритм построения внешней полиэдральной аппроксимации ядра вероятностной меры. В разделе 1.4. сформулированы выводы по главе 1.

1.1. Основные определения и свойства ядра вероятностной меры

Все определения из данного раздела заимствованы из монографии [35]. Пусть Y – случайная величина с функцией распределения

$$F(y) = \mathbf{P}\{Y \leq y\}.$$

Квантиль распределения этой случайной величины для заданного уровня доверительной вероятности $\alpha \in (0, 1)$ определяется выражением

$$[Y]_\alpha = \min\{y : F(y) \geq \alpha\}. \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется α -доверительным множеством для случайного вектора X с реализациями $x \in \mathbb{R}^n$, если $\mathbf{P}\{X \in S\} \geq \alpha$, и α -супердоверительным, если $\mathbf{P}\{X \in S\} > \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть X – n -мерный случайный вектор. Пересечение всех выпуклых и замкнутых α -доверительных множеств в \mathbb{R}^n называется α -ядром вероятностной меры (распределения вектора X).

Очевидно, что α -ядро является выпуклым компактным множеством. Также в [35] установлено, что α -ядро K_α может быть определено как пересечение всех замкнутых α -доверительных полупространств:

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c\|=1} \{x : c^T x \leq b_\alpha(c)\}, \text{ где } b_\alpha(c) = [c^T X]_\alpha. \quad (1.2)$$

Наиболее важным и принципиальным для детерминированной аппроксимации вероятностных ограничений свойством α -ядра непрерывных распределений, является *регулярность* [35].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. α -Ядро K_α называется регулярным, если всякое замкнутое полупространство, содержащее это ядро, является α -доверительным.

Достаточные условия регулярности α -ядра установлены в [35] в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены следующие условия:

- (i) случайный вектор ξ имеет плотность вероятности,
- (ii) граница α -ядра K_α для распределения вектора X является гладкой поверхностью в \mathbb{R}^n .

Тогда K_α является регулярным.

В частности, известно, что K_α регулярно для невырожденного многомерного нормального распределения вектора X при $\alpha \geq 1/2$.

Для обобщения теоремы 1.1 определим множество S_α всех точек x^* на границе α -ядра, для которых выполнено условие $x^* \in \text{Arg max}_{x \in K_\alpha} c^T x$ для различных c . Другими словами, вектор внешней нормали к K_α в точках из S_α не является единственным.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены следующие условия:

- (i) случайный вектор X имеет плотность вероятности,

(ii) $\mathbf{P}\{c^T X \leq c^T x^*\} \geq p$ для любого $x \in S_\alpha$ и любого единичного нормального вектора c .

Тогда K_α является регулярным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Случай, когда множество S_α пусто, рассмотрен в [35, лемма 3.9]. Если же оно не пусто, то доказательство из [35] сохраняет силу, так как условие (ii) гарантирует, что каждое замкнутое полупространство, содержащее K_α и имеющее граничную гиперплоскость, которая проходит через точку $x^* \in S_\alpha$ автоматически является α -доверительным. \square

Пусть имеется функция потерь $f(X, u)$, зависящая от вектора X случайных параметров и от вектора u , который называется вектором стратегии.

ЛЕММА 1.1. Если функция потерь $f(x, u)$ непрерывна и квазивыпукла по x , и X имеет непустое α -ядро K_α , то

$$\max_{x \in K_\alpha} f(x, u) \leq [f(X, u)]_\alpha. \quad (1.3)$$

ЛЕММА 1.2. Если функция потерь $f(x, u)$ вогнута по x , и X имеет регулярное α -ядро K_α , то

$$\max_{x \in K_\alpha} f(x, u) \geq [f(X, u)]_\alpha. \quad (1.4)$$

Леммы 1.1, 1.2 и следующий результат доказаны в [35].

ТЕОРЕМА 1.3. Если функция потерь $f(x, u)$ вогнута и квазивыпукла по $x \in \mathbb{R}^n$, а $\alpha \in (0, 1)$ таково, что случайный вектор X имеет регулярное α -ядро K_α , то

$$[f(X, u)]_\alpha = \max_{x \in K_\alpha} f(x, u). \quad (1.5)$$

В частном случае, когда функция потерь является линейной по случайному вектору X , имеет место следующий результат из [35]:

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть случайный вектор X имеет регулярное α -ядро для некоторого $\alpha \in (0, 1)$. Тогда

$$[a^T(u)X + b(u)]_\alpha = b(u) + \max_{x \in K_\alpha} a^T(u)x.$$

ТЕОРЕМА 1.5. α -Ядро K_α n -мерного случайного вектора X не пусто для любого $\alpha \in (\frac{n}{n+1}, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5.

Обозначим семейство выпуклых и замкнутых α -доверительных подмножеств пространства \mathbb{R}^n через \mathcal{M} . Тогда согласно определению из [35] α -ядро может быть задано как пересечение всех множеств семейства \mathcal{M} :

$$K_\alpha = \bigcap_{S \in \mathcal{M}} S.$$

Поскольку \mathcal{M} – семейство всех замкнутых и выпуклых α -доверительных множеств, то среди них найдется хотя бы один шар конечного радиуса, который является компактом.

Таким образом, семейство \mathcal{M} содержит компакт. Поэтому в соответствии с теоремой Хелли [22, с.434] для проверки непустоты K_α достаточно показать, что пересечение любых $n + 1$ множеств семейства \mathcal{M} не пусто.

Рассмотрим случай $n = 2$. Выберем три множества из семейства \mathcal{M} и обозначим их A_1, A_2, A_3 . Пересечем множества A_1 и A_2 , их вероятностная мера больше или равна α . Тогда мера их дополнений $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ меньше или равна $1 - \alpha$. Множество A_2 отсекает от множества A_1 множество $A_1 \cap \bar{A}_2$. Поскольку множество \bar{A}_2 имеет меру, не превосходящую $1 - \alpha$, то мера пересечения $A_1 \cap \bar{A}_2$ также не превосходит $1 - \alpha$. Таким образом, мера множества A_1 превосходит меру множества $A_1 \cap A_2$ не более чем на $1 - \alpha$. Отсюда получаем

$$\mathbf{P}\{X \in A_1 \cap A_2\} \geq \alpha - (1 - \alpha).$$

Аналогично оценим меру пересечения трех множеств. Поскольку мера множества \bar{A}_3 не превосходит $1 - \alpha$, то и мера пересечения $A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$ также не превосходит $1 - \alpha$. Для любых множеств A_1, A_2, A_3 справедливо равенство

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (A_1 \cap A_2) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3).$$

Таким образом, получается оценка меры пересечения трех множеств

$$\mathbf{P}\{X \in A_1 \cap A_2 \cap A_3\} \geq \alpha - 2(1 - \alpha).$$

Чтобы K_α было не пусто, достаточно, чтобы вероятностная мера множества $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ была строго положительной, т. е., должно выполняться следующее неравенство

$$\alpha - 2(1 - \alpha) > 0,$$

откуда получается, что

$$\alpha > 2/3.$$

Также вероятностная мера должна быть меньше единицы, поэтому

$$\alpha \in \left(\frac{2}{3}, 1 \right).$$

Доказательство для произвольного n аналогично. С этой целью рассмотрим произвольные $n + 1$ множеств A_1, A_2, \dots, A_{n+1} из \mathcal{M} . Мера пересечения любых трех из этих множеств больше или равна $\alpha - 2(1 - \alpha)$. Очевидно, что после пересечения еще с одним α -доверительным множеством мера пересечения может уменьшиться не более чем на $1 - \alpha$, т. е. справедлива оценка

$$\mathbf{P}\{X \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\} \geq \alpha - 3(1 - \alpha).$$

Таким образом, справедливо

$$\mathbf{P}\{X \in \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\} \geq \alpha - n(1 - \alpha).$$

Если потребовать, чтобы правая часть этого неравенства была строго положительной, то отсюда вытекает непустота пересечения рассматриваемых множеств.

Отсюда следует, что

$$\alpha > \frac{n}{n+1}.$$

Таким образом, для параметра α получен интервал $(\frac{n}{n+1}, 1)$, зависящий от размерности n случайного вектора, при попадании в который α -ядро не пусто.

Теорема 1.5 доказана. \square

Важно отметить, что теорема 1.5 справедлива для любого распределения случайного вектора X . Кроме того, оценка $\alpha > \frac{n}{n+1}$ не улучшаемая, поскольку в случае $\alpha = \frac{n}{n+1}$ α -ядро может оказаться пустым. Например, для $n = 2$ ядро уровня $2/3$ пусто для равномерного распределения на вершинах треугольника.

В заключении данного раздела приведем новое свойство α -ядра, которое имеет отдельный интерес. Обозначим компоненты векторной медианы μ вектора X через $\mu_k = [X_k]_{1/2}$ для всех $k = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 1.6. *Пусть выполнены следующие условия:*

- (i) случайный вектор X имеет плотность вероятности;
- (ii) $\mathbf{P}\{\mu_k < X_k < \mu_k + \varepsilon\} > 0$ и $\mathbf{P}\{\mu_k - \varepsilon < X_k < \mu_k\} > 0$ для любого $\varepsilon > 0$, $k = 1, \dots, n$;
- (iii) α -ядро K_α не пусто для любого $\alpha \in (1/2, 1)$.

Тогда при $\alpha = 1/2$ α -ядро K_α является регулярным и содержит единственную точку μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6. Из (i) следует $\mathbf{P}\{X_k = \mu_k\} = 0$, $\mathbf{P}\{X_k < \mu_k\} = 1/2$ и $\mathbf{P}\{X_k > \mu_k\} = 1/2$. Используя (ii), получаем что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует $2n$ замкнутых полупространств $\{x : x_k \leq \mu_k + \varepsilon\}$ и $\{x : x_k \geq \mu_k - \varepsilon\}$, $k = \overline{1, n}$, которые являются α -доверительными для заданного $\alpha > 1/2$. Их пересечение образует куб C_ε стороной 2ε , для которого справедливо включение $\mu \in C_\varepsilon$.

Из выполнения условия (iii) следует, что $K_\alpha \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in (1/2, 1)$ и выполнено $K_\alpha \subset C_\varepsilon$. Пусть при этом $\mu \notin K_\alpha$. Тогда по аналогии с C_ε , можно построить множество C_{ε_1} , для $\varepsilon_1 < \varepsilon$ такое, что $\mu \in C_{\varepsilon_1}$ и $C_{\varepsilon_1} \cap K_\alpha = \emptyset$. Тогда найдется такое α_1 , для которого справедливо $1/2 < \alpha_1 < \alpha$, для которого выполнено $K_{\alpha_1} \subset C_{\varepsilon_1}$. Но поскольку $\alpha_1 < \alpha$, то должно выполняться $K_{\alpha_1} \subset K_\alpha$, но по построению имеем $C_{\varepsilon_1} \cap K_\alpha = \emptyset$. Получаем противоречие. Следовательно, медиана μ является внутренней точкой α -ядра K_α для любого $\alpha \in (1/2, 1)$.

Пусть α -ядро K_α при $\alpha = 1/2$ не является регулярным. Тогда существует полупространство, содержащее это ядро, вероятностная мера которого меньше $1/2$. Тогда его замкнутое дополнение имеет меру $\alpha_1 > 1/2$. По определению α -ядра это дополнение содержит в себе ядро K_{α_1} . Выше было доказано, что для любого $\alpha \in (1/2, 1)$ $\mu \in K_\alpha$. Таким образом, получаем противоречие.

Согласно условиям $\mathbf{P}\{X_k = \mu_k\} = 0$, $\mathbf{P}\{X_k < \mu_k\} = 1/2$ и $\mathbf{P}\{X_k > \mu_k\} = 1/2$, α -ядро при $\alpha = 1/2$ содержит единственную точку μ .

Теорема доказана. \square

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1.6 и условия вложенности ядер, медиана μ принадлежит всем ядрам K_α , $\alpha \in [1/2, 1)$. При этом условие регулярности может не сохраняться при изменении α .

1.2. Аналитическое построение границ α -ядер

Настоящий раздел посвящен построению точных границ α -ядер. Как отмечалось ранее, на сегодняшний день не известен конструктивный алгоритм построения точной границы ядра. Для некоторых распределений удается получить аналитические выражения для построения границы ядра вероятностной меры.

1.2.1. Многомерное нормальное распределение

Пусть случайный вектор имеет многомерное нормальное распределение $X \sim \mathcal{N}(m_x, Q_x)$, где m_x – вектор математического ожидания, а Q_x – положительно определенная матрица ковариаций. В [35] показано, что α -ядро такого распределения является эллипсоидом и определяется формулой:

$$K_\alpha = \{x : (x - m_x)^T Q_x^{-1} (x - m_x) \leq r_\alpha^2\},$$

где r_α – квантиль уровня α стандартного нормального распределения. Отсюда следует, что функцию $b_\alpha(c)$ в (1.2) можно определить из следующего соотношения:

$$b_\alpha(c) = c^T m_x + r_\alpha \sqrt{c^T Q_x c}, \quad (1.6)$$

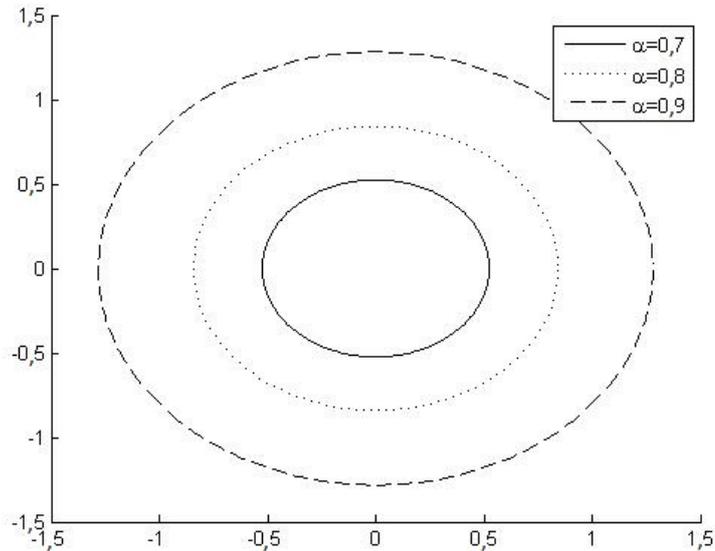


Рисунок 1.1. Ядра для двумерного нормального распределения

В случае двумерного нормального распределения с независимыми одинаково распределенными компонентами границы ядра являются окружностями для разных значений α . На рисунке 1.1 представлены α -ядра для различных уровней α двумерного нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей.

1.2.2. Двумерное равномерное распределение

Рассмотрим случайный вектор $X \sim U\left(\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$, равномерно распределенный по единичному квадрату $DEFG$ с центром в начале координат. Если же область, по которой распределен вектор X , является прямоугольником и её центр не совпадает с началом координат, то путем линейных преобразований приведем её к требуемому виду. Те же линейные преобразования произойдут и с ядром согласно [35, лемма 3.8]. Для нахождения аналитических соотношений для границы α -ядра необходимо определить функцию $b_\alpha(c)$, которая определяет границу α -ядра данного распределения для $\alpha > 1/2$. В двумерном случае вектор нормали c к границе ядра можно представить как $c = [c_1, c_2]$, $\|c\| = 1$.

Найдем координаты точек, лежащих на пересечении границы ядра и координатных осей. Для этого построим четыре α -доверительных полуплоскости с границами, параллельными осям. Поскольку α -ядро K_α определяется выражением (1.2) как пересечение всех α -доверительных полуплоскостей, то оно лежит в квадрате $L_1L_2L_3L_4$, полученном при пересечении четырех α -доверительных полуплоскостей (см. рисунок 1.2).

Рассмотрим точку R – одну из точек пересечения сторон квадрата $L_1L_2L_3L_4$ с осями координат. Изменим угол наклона прямой L_1L_4 . Очевидно, что если полученная прямая по-прежнему пересекает отрезки ED и FG , то она проходит через точку R и является границей α -доверительной полуплоскости (см. рисунок 1.3).

Если же полученная прямая перестает пересекать один из отрезков, то, как видно из рисунка 1.3, при прохождении её через точку R мера отсеченного треугольника превосходит $(1 - \alpha)$. Значит, все прямые, отсекающие треугольник от квадрата $DEFG$, должны лежать дальше от начала координат, чтобы являться границами α -доверительных полуплоскостей. Следовательно, точка R принадлежит границе α -ядра. То же справедливо и для остальных точек, лежащих на пересечении сторон квадрата $L_1L_2L_3L_4$ и координатных осей. Эти точки имеют следующие координаты: $R(\alpha - 0, 5; 0)$, $S(0; \alpha - 0, 5)$, $T(-\alpha +$

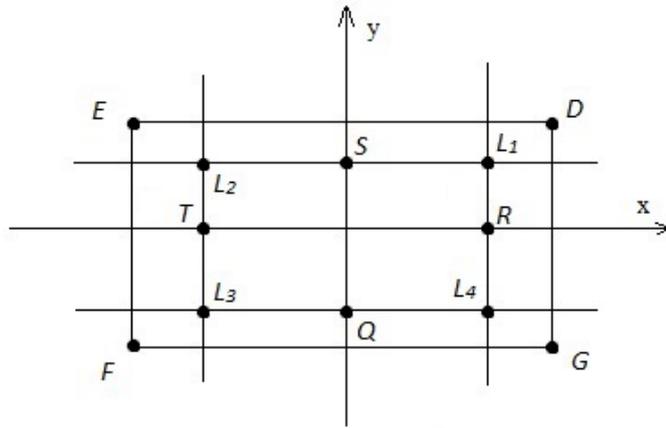


Рисунок 1.2. Построение α -ядра двумерного равномерного распределения

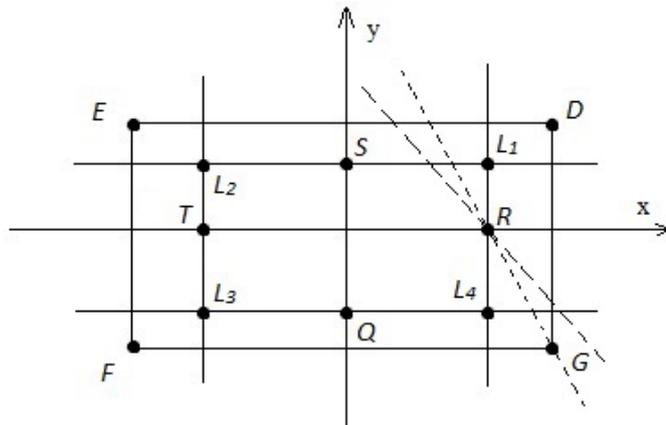


Рисунок 1.3. Построение α -ядра двумерного равномерного распределения

$0, 5; 0), Q(0; -\alpha + 0, 5)$.

Определим границу α -ядра в каждой из четырех частей квадрата $DEFG$, на которые его разбивают координатные оси. Пусть все касательные к α -ядру заданы линейным уравнением

$$x_2 = Hx_1 + J,$$

где $H = -\frac{c_1}{c_2} < 0$. Определим зависимость J от H .

Рассмотрим первую четверть: $x_1 > 0, x_2 > 0$. Обозначим тангенс угла наклона прямой RG через H_1 , а прямой ES через H_2 . Заметим, что

$$\frac{1}{2(\alpha - 1)} = H_2 \leq H \leq H_1 = 2(\alpha - 1). \quad (1.7)$$

Прямые с меньшими или большими коэффициентами H будут касаться α -ядра в точках S и R соответственно. При этом видно, что границы α -доверительных множеств, удовлетворяющие неравенству (1.7), будут отсекают от квадрата $DEFG$ $(1 - \alpha)$ -доверительные треугольники с прямым углом при вершине D .

Точки пересечения касательной со сторонами ED и DG имеют соответственно координаты: $U \left(\frac{1}{2H} - \frac{J}{H}; \frac{1}{2} \right), W \left(\frac{1}{2}; \frac{H}{2} + J \right)$. Определим расстояния от этих точек до точки $D \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$:

$$UD = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2H} - \frac{J}{H} \right),$$

$$WD = \frac{1}{2} - \left(\frac{H}{2} + J \right).$$

Вероятностная мера полученного треугольника UVW равна $1 - \alpha$, следовательно, справедливо уравнение:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2H} - \frac{J}{H} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{H}{2} + J - \frac{1}{2} \right) = 1 - \alpha.$$

Найдем параметр J как решение данного квадратичного уравнения при условии принадлежности точек U и W границам квадрата $DEFG$. Полученное решение:

$$J_I = \frac{1}{2} - \frac{H}{2} - \sqrt{-2H(1 - \alpha)}.$$

Проделав аналогичные рассуждения для остальных четвертей, получим:

-для $x_1 < 0, x_2 > 0$

$$J_{II} = \frac{1}{2} + \frac{H}{2} - \sqrt{2H(1 - \alpha)};$$

-для $x_1 < 0, x_2 < 0$

$$J_{III} = -\frac{1}{2} + \frac{H}{2} + \sqrt{-2H(1 - \alpha)};$$

-для $x_1 > 0, x_2 < 0$

$$J_{IV} = -\frac{1}{2} - \frac{H}{2} + \sqrt{2H(1 - \alpha)}.$$

Таким образом, получена зависимость параметров касательных от векторов нормали. Определим координаты точек касания. Пусть задана прямая $x_2 = H^*x_1 + J^*$, проходящая

через точку с координатами (x_1^*, x_2^*) на границе ядра. Тогда $J^* = x_2^* - H^* x_1^*$, и исходное уравнение будет зависеть от одного параметра:

$$x_2 = H^* x_1 + x_2^* - H^* x_1^*. \quad (1.8)$$

Если уравнение (1.8) при некотором H^* является касательной к α -ядру, то мера отсекаемого ею треугольника в точности будет равна $1 - \alpha$. В остальных же случаях прямая будет пересекать ядро, следовательно, и мера полученного при пересечении треугольника будет больше чем $1 - \alpha$. Найдем координаты точек пересечения прямой и сторон ED и DG : $U \left(\frac{1}{2H^*} - \frac{x_2^*}{H^*} + x_1^*, \frac{1}{2} \right)$, $W \left(\frac{1}{2}, \frac{H^*}{2} + x_2^* - H^* x_1^* \right)$ соответственно.

Определим расстояния от этих точек до точки $D \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$:

$$UD = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2H^*} - \frac{x_2^*}{H^*} + x_1^* \right),$$

$$WD = \frac{1}{2} - \left(\frac{H^*}{2} + x_2^* - H^* x_1^* \right).$$

Тогда площадь треугольника равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2H^*} + \frac{x_2^*}{H^*} - x_1^* \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{H^*}{2} - x_2^* + H^* x_1^* \right).$$

Определим параметр H^* , при котором достигается минимум данной функции. Для этого приравняем первую производную к нулю:

$$S'_{\Delta} = -\frac{1}{8} \frac{1}{H^{*2}} (-1 + H^* + 2x_2^* - 2H^* x_1^*) (1 - 2x_2^* + H^* - 2H^* x_1^*) = 0.$$

Из корней данного выражения выбираем отрицательный:

$$H^* = -\frac{1 - 2x_2^*}{1 - 2x_1^*}. \quad (1.9)$$

Проверим достаточное условие минимума для полученного корня:

$$S''_{\Delta} = -\frac{1}{4} \frac{(1 - 2x_2^*)^2}{H^{*3}} > 0, \forall H^* < 0.$$

В рассматриваемой четверти данное неравенство выполняется.

Поскольку полученная прямая является касательной к ядру, то она в точности совпадает с одной из касательных, заданных вектором нормали. Вернемся к полученным ранее результатам для параметров уравнения касательной. Выразим $H = H^*$ из уравнения (1.9) и составим систему уравнений

$$\begin{cases} x_2^* = H x_1^* + J; \\ x_2^* = \frac{1}{2} + \frac{H}{2} - H x_1^*. \end{cases} \quad (1.10)$$

Решим систему (1.10) и получим зависимость координат точки на границе ядра от угла наклона вектора нормали к касательной ядра:

$$\begin{cases} x_1^* = -\frac{1}{4} \frac{2J_I - 1 - H}{H}; \\ x_2^* = \frac{J_I}{2} + \frac{1}{4} + \frac{H}{4}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Проделав аналогичные расчеты для остальных четвертей, получаем следующие результаты:

-вторая четверть:

$$\begin{cases} x_1^* = -\frac{1}{4} \frac{2J_{II} - 1 + H}{H}, \\ x_2^* = \frac{J_{II}}{2} + \frac{1}{4} - \frac{H}{4}, \end{cases} \quad (1.12)$$

-третья четверть:

$$\begin{cases} x_1^* = -\frac{1}{4} \frac{2J_{III} + 1 + H}{H}, \\ x_2^* = \frac{J_{III}}{2} - \frac{1}{4} - \frac{H}{4}, \end{cases} \quad (1.13)$$

-четвертая четверть:

$$\begin{cases} x_1^* = -\frac{1}{4} \frac{2J_{IV} + 1 - H}{H}, \\ x_2^* = \frac{J_{IV}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{H}{4}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Эти формулы определяют границу ядра, которая для разных α изображена на рисунке 1.4. Можно показать, что построенное ядро обладает свойством регулярности.

Полученные выражения позволяют определить функцию $b_\alpha(c)$:

$$b_\alpha(c) = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*.$$

Запишем выражения для функции $b_\alpha(c)$ в зависимости от угла наклона β вектора нормали, подставляя выражения для x_1^* и x_2^* :

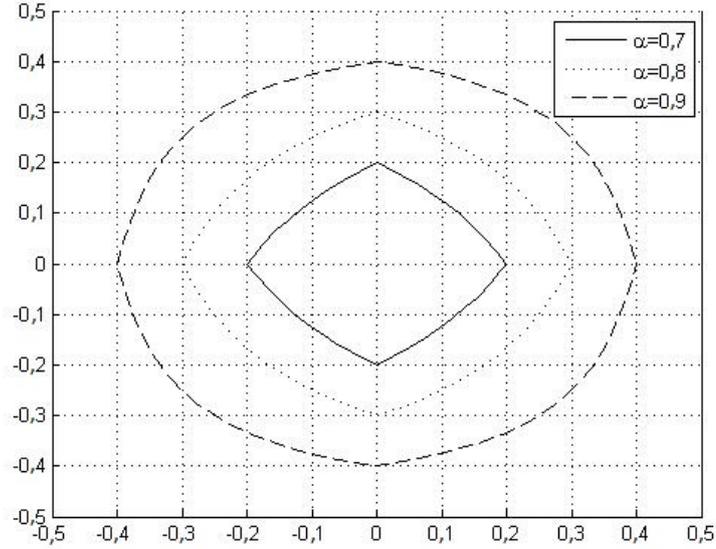


Рисунок 1.4. Двумерное равномерное распределение на единичном квадрате

$$b_{\alpha}(c) = \begin{cases} (\alpha - 0,5)c(1), \beta \in [\arctg(-2(1 - \alpha)); \arctg(2(1 - \alpha))], \\ -\frac{1}{4} \frac{2J_I - 1 - H}{H} c(1) + \left(\frac{J_I}{2} + \frac{1}{4} + \frac{H}{4}\right) c(2), \beta \in \left[\arctg(2(1 - \alpha)); \arctg\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)\right], \\ (\alpha - 0,5)c(2), \beta \in \left[\arctg\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right); \pi + \arctg\left(-\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)\right], \\ -\frac{1}{4} \frac{2J_{II} - 1 + H}{H} c(1) + \left(\frac{J_{II}}{2} + \frac{1}{4} - \frac{H}{4}\right) c(2), \beta \in \left[\pi + \arctg\left(-\frac{1}{2(1-\alpha)}\right); \pi + \arctg(-2(1 - \alpha))\right], \\ -(\alpha - 0,5)c(1), \beta \in [\pi + \arctg(-2(1 - \alpha)); \pi + \arctg(2(1 - \alpha))], \\ -\frac{1}{4} \frac{2J_{III} + 1 + H}{H} c(1) + \left(\frac{J_{III}}{2} - \frac{1}{4} - \frac{H}{4}\right) c(2), \beta \in \left[\pi + \arctg(2(1 - \alpha)); \pi + \arctg\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)\right], \\ -(\alpha - 0,5)c(2), \beta \in \left[\pi + \arctg\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right); \arctg\left(-\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)\right], \\ -\frac{1}{4} \frac{2J_{IV} + 1 - H}{H} c(1) + \left(\frac{J_{IV}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{H}{4}\right) c(2), \beta \in \left[\arctg\left(-\frac{1}{2(1-\alpha)}\right); \arctg(-2(1 - \alpha))\right]. \end{cases} \quad (1.15)$$

Из системы, задающей квантиль двумерного равномерного распределения, видно, что выражения являются достаточно громоздкими. Определим зависимость $y^*(x^*)$. Для этого подставим полученное H из уравнения (1.9) в первое уравнение системы (1.10). Получим следующую зависимость:

-первая четверть:

$$x_2^* = -\frac{1 - \alpha}{1 - 2x_1^*} + \frac{1}{2};$$

-вторая четверть:

$$x_2^* = -\frac{1 - \alpha}{1 + 2x_1^*} + \frac{1}{2};$$

-третья четверть:

$$x_2^* = \frac{1 - \alpha}{1 + 2x_1^*} - \frac{1}{2};$$

-четвертая четверть:

$$x_2^* = \frac{1 - \alpha}{1 - 2x_1^*} - \frac{1}{2}.$$

Во всех четырех функциях прослеживается обратная зависимость, что характерно для гиперболы. Следовательно, граница ядра состоит из частей четырех гипербол, соединенных между собой. Стоит заметить, что все формулы, записанные для четырех случаев, одинаковы с точностью до знака. Поэтому можно не расписывать выражение для четырех случаев, а представить его в общем виде формулой:

$$|x_2| = \frac{1}{2} - \left| \frac{(1 - \alpha)}{1 - 2|x_1|} \right|, \text{ при } |x_1| \leq \alpha - \frac{1}{2}. \quad (1.16)$$

В рассматриваемом примере множество S_α , использованное в формулировке теоремы 1.2, содержит 4 точки. Поэтому условия теоремы 1.1 не выполнены, но выполнены условия теоремы 1.2, откуда следует регулярность α -ядра для всех $\alpha \in (1/2, 1)$.

1.2.3. Распределение Коши

Пусть $X_1, \dots, X_k \sim C(0, 1)$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Характеристическая функция этого распределения имеет вид $g_{X_k}(t) = e^{-|t|}$. Из свойств характеристической функции следует, что сумма $\sum_{i=1}^k c_i X_i$ тоже имеет распределение Коши при $\sum_{i=1}^k |c_i| = 1$:

$$g_{c_1 X_1 + \dots + c_k X_k}(t) = e^{-|c_1 t|} \cdot \dots \cdot e^{-|c_k t|} = e^{-(|c_1| + \dots + |c_k|)|t|} = e^{-|t|}.$$

Если же $\sum_{i=1}^k |c_i| \neq 1$, тогда разделим каждый из элементов c_i на

$c_\Sigma = \sum_{i=1}^k |c_i| \neq 0$, после чего их сумма станет равной единице. Из соотношения (1.2) получаем

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c\|=1} \{x : c^T x \leq [c^T X]_\alpha\} = \bigcap_{\|c\|=1} \left\{ x : c^T x \leq \frac{x_\alpha}{c_\Sigma} \right\},$$

здесь x_α – квантиль уровня α распределения $C(0, 1)$.

Приведем выражение для функции $b_\alpha(c)$ в зависимости от угла наклона вектора c для случая двумерного распределения Коши:

$$b_\alpha(c) = \frac{x_\alpha}{|c_1| + |c_2|}, \quad (1.17)$$

где x_α – квантиль уровня α распределения $C(0, 1)$.

Из (1.17) следует, что ядро двумерного распределения Коши с независимыми одинаково распределенными компонентами имеет форму квадрата. Графическая интерпретация этого факта приведена на рисунке 1.5. Построенное ядро обладает свойством регулярности, поскольку оно удовлетворяет условиям теоремы 1.2.

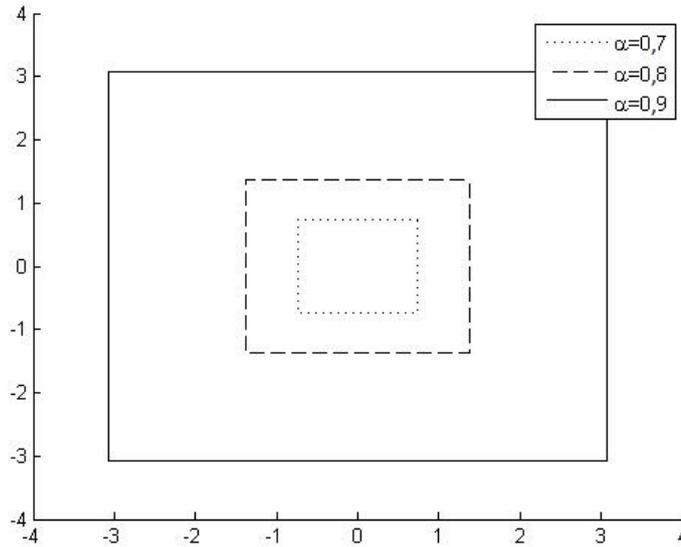


Рисунок 1.5. Ядра двумерного распределения Коши

Как и в случае равномерного распределения, α -ядро содержит 4 точки, принадлежащие множеству S_α . При этом регулярность α -ядра распределения Коши для всех $\alpha \in (1/2, 1)$ следует из теоремы 1.2.

1.2.4. Равномерное распределение на противоположных сторонах квадрата

В монографии [35] было рассмотрено распределение, α -ядро которого при некоторых α не обладает свойством регулярности. Предполагается, что двумерный случайный

вектор распределен равномерно на сторонах AD и BC квадрата $ABCD$. Для $\alpha = 2/3$ α -ядро является ромбом $KLMN$ и приведено на рисунке 1.6. Для проверки свойства регулярности проведем прямую Π , не пересекающую ромб $KLMN$. Множество, ограниченное сверху прямой Π и содержащее α -ядро $KLMN$, не является α -доверительным, поскольку $\mathbf{P}\{x \in \Pi\} = 1/2$.

В настоящем примере векторная медиана μ лежит на середине стороны AD , то есть вне ромба $KLMN$. Условия теоремы 1.6 не выполнены и α -ядро уровня $1/2$ является пустым множеством.

В [35] показано, что ядро такого распределения обладает свойством регулярности лишь при $\alpha \geq 3/4$.

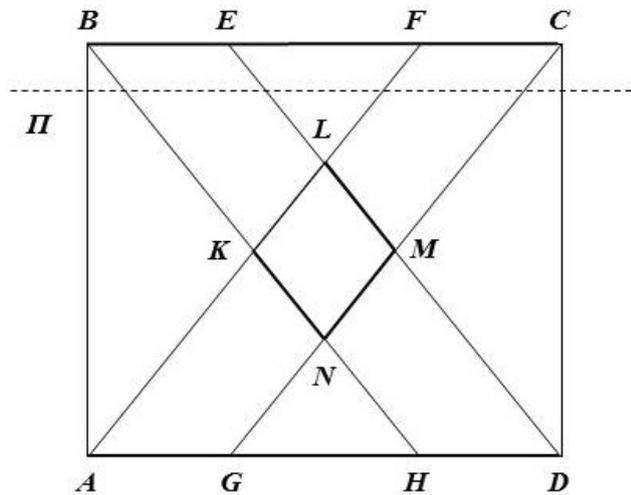


Рисунок 1.6. Нерегулярное α -ядро, $\alpha = 2/3$

1.3. Алгоритм построения внешней аппроксимации ядра вероятностной меры

В настоящее время не существует конструктивных методов построения α -ядра. предлагается алгоритм построения внешней аппроксимации ядра, заданного формулой (1.2). Такую аппроксимацию можно построить, если вместо всех единичных векторов рассмотреть лишь их конечный набор $\{c_j\}_{j=1}^N$:

$$K_\alpha^N = \bigcap_{j=1}^N \{x : c_j^T x \leq b_\alpha(c_j)\}. \quad (1.18)$$

С этой целью зафиксируем густой, но конечный набор векторов $\{c_j\}_{j=1}^N$, удовлетворяющих условию $\|c_j\| = 1$. В статье [11] в качестве нормы рассматривалась евклидова норма, но при построении аппроксимации можно использовать произвольную норму вектора, например $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

Пусть существуют две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Тогда существуют два множества векторов $c^1 : \|c^1\|_1 = 1$ и $c^2 : \|c^2\|_2 = 1$. Причем справедливо

$$c^2 = \frac{c^1}{\|c^1\|_2}. \quad (1.19)$$

Пусть α -ядро задается относительно нормы $\|\cdot\|_1$ ограничениями

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c^1\|_1=1} \{x : c^{1T} x \leq [c^{1T} X]_\alpha\}.$$

С учетом (1.19) сделаем подстановку

$$c^1 = c^2 \|c^1\|_2.$$

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c^2\|c^1\|_2\|_1=1} \{x : (c^2 \|c^1\|_2)^T x \leq [c^2 \|c^1\|_2^T X]_\alpha\}.$$

Поскольку $\|c^1\|_2 = \text{const}$, то справедливо

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c^1\|_2\|c^2\|_1=1} \{x : (c^2)^T x \leq [c^{2T} X]_\alpha\}.$$

Поскольку $\|c^2\|_1 = \text{const}$, то справедливо

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c^1\|c^2\|_1\|_2=1} \{x : (c^2 \|c^1\|_2)^T x \leq [c^2 \|c^1\|_2^T X]_\alpha\}.$$

Аналогично (1.19) имеем $c^1 = \frac{c^2}{\|c^2\|_1}$. Подставляя $\|c^2\|_1 = \frac{c^2}{c^1}$

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c^2\|_2=1} \{x : (c^2)^T x \leq [c^{2T} X]_\alpha\}.$$

Таким образом, показано, что при определении α -ядра норма может быть выбрана произвольно.

Ниже предлагается метод построения аппроксимации K_α^N α -ядра K_α , основанный на формуле (1.18), где K_α^N является пересечением конечного множества α -доверительных

полупространств, заданных векторами внешней нормали. Поскольку настоящая аппроксимация является пересечением лишь конечного числа полупространств, то справедливо $K_\alpha \subset K_\alpha^N$ для любого числа N пересекаемых полупространств, то есть модель K_α^N является внешней аппроксимацией. Отсюда следует, что оценка для квантильного критерия $\varphi_\alpha^N(u)$, полученная с использованием K_α^N , является оценкой сверху для его точного значения:

$$[f(X, u)]_\alpha = \max_{x \in K_\alpha} f(x, u) \leq \max_{x \in K_\alpha^N} f(x, u) = \varphi_\alpha^N(u). \quad (1.20)$$

Рассмотрим алгоритм, который позволяет строить густую сеть векторов $c_j, j = \overline{1, N}$.

АЛГОРИТМ 1.1. 1. Построить n -мерный куб

$$\mathcal{C} = \{x \in R^n : |x_i| \leq 1, \forall i = \overline{1, n}\},$$

описанный вокруг единичной сферы.

2. Для заданного числа точек L на ребре куба построим сеть точек, координаты которых удовлетворяют условиям: $\forall i = \overline{1, n}, x_i = \pm 1, x_j = -2 + \frac{2l}{L-1}, l = \overline{1, L-1} \forall j \neq i, j = \overline{1, n}$. Число таких точек равно $N = L^n - (L-2)^n$.

3. Обозначим все точки сети посредством z_j , где $j = \overline{1, N}$. Расстояние между любыми соседними точками на ребре куба равно $1/(L-1)$.

4. Спроецируем полученную сеть точек z_j на единичную сферу, тем самым определив искомый набор векторов единичных нормалей $\{c_j\}$:

$$c_j = \frac{z_j}{\|z_j\|}.$$

5. Для каждого $\{c_j\}, j = \overline{1, N}$, вычислить квантиль $b_\alpha(c_j)$, входящую в правую часть ограничений (1.18). На данном этапе определяются гиперплоскости, ограничивающие искомый многогранник.

6. Определить точки пересечения каждой n гиперплоскостей из N , заданных выражениями $c_j^T x = b_\alpha(c_j), j = \overline{1, N}$, пересечение которых не пусто.

7. Из множества точек, найденных в п. 6, выбрать точки, удовлетворяющие всем ограничениям. Найденные точки и являются вершинами K_α^N .

Обозначим число вершин полученного многогранника через J . Вообще говоря $J \neq N$ при $n > 2$.

Расстояние между любыми ближайшими соседними точками можно оценить сверху с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 1.3. *Для любых соседних точек c_j и c_k на единичной сфере, сгенерированные алгоритмом 1.1, справедливо $\|c_j - c_k\| \rightarrow 0$ при $L \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.3. Расстояние между соседними точками на единичной сфере не превосходит длины диагонали элементарного гиперкуба на поверхности куба \mathcal{C} поэтому:

$$\|c' - c''\| \leq \|z' - z''\| \leq 2\sqrt{n-1}/(L-1).$$

Таким образом, при увеличении L набор точек $\{c_j\}_{j=1}^N$ на поверхности единичной сферы сгущается, хотя и неравномерно. \square

ЛЕММА 1.4. *Для любой точки x_0 , принадлежащую границе α -ядра K_α , существует α -доверительное полупространство, для которого эта точка тоже является граничной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.4. Предположим, что точка x_0 , принадлежащей границе α -ядра K_α , но не существует α -доверительного полупространства, для которого она является граничной. В случае, когда α -доверительное полупространство не содержит точку x_0 , она также не принадлежит и α -ядру.

Пусть точка x_0 принадлежит некоторому α -доверительному полупространству вместе со своей окрестностью, тогда выполнено $c^T x_0 < b_\alpha(c)$ для любого $c : \|c\| = 1$. Преобразуем данное выражение:

$$0 < b_\alpha(c) - c^T x_0.$$

Поскольку настоящее выражение справедливо для любого $c : \|c\| = 1$, то введем обозначение:

$$h = \min_{c: \|c\|=1} (b_\alpha(c) - c^T x_0).$$

Минимум достигается, поскольку функция $b_\alpha(c)$ – полунепрерывна снизу согласно [35, лемма 2.11], а функция $c^T x_0$ – непрерывна.

Тогда справедливо

$$0 < h \leq b_\alpha(c) - c^T x_0.$$

Рассмотрим любую точку x^* , принадлежащую малой окрестности точки x_0 . Из полунепрерывности снизу функции квантили вытекает, что для всех $c : \|c\| = 1$ справедливо

$$0 < b_\alpha(c) - c^T x^*.$$

Это можно представить как

$$c^T x^* < b_\alpha(c), \quad \forall c : \|c\| = 1. \quad (1.21)$$

Согласно определению ядра (1.2) и формуле (1.21) точка x^* является внутренней точкой α -ядра вместе со своей малой окрестностью. Это противоречит тому, что точка x_0 выбрана на границе α -ядра. \square

ТЕОРЕМА 1.7. *Пусть функция квантили $b_\alpha(c)$ непрерывна, тогда множество K_α^N , построенное с помощью алгоритма 1.1, сходится в метрике Хаусдорфа к множеству K_α с ростом N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.7.

Согласно лемме 1.4 для любой точки x_0 , принадлежащей границе ядра K_α , существует полупространство, заданное неравенством $c^{*T}x \leq b_\alpha(c^*)$, для которого точка x_0 является граничной. Тогда в силу непрерывности функции квантили $b_\alpha(c)$ и леммы 1.3 для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $N = N(\varepsilon)$ такие, что для любого вектора $c^* : \|c^*\| = 1$ существует вектор c' , порожденный алгоритмом 1.1 такой, что $\|c^* - c'\| < \varepsilon$ и $|b_\alpha(c^*) - b_\alpha(c')| < \delta$, начиная с номера N .

\square

Из теоремы 1.7 следует, что полиэдральная модель, построенная с помощью алгоритма 1.1 своль угодно точно аппроксимирует α -ядро как в случае регулярного, так и в случае нерегулярного ядра.

Свойство непрерывности функции квантили $b_\alpha(c)$ можно проверить путем проверки условий теоремы из [51], главным из которых является условие ограниченности носителя случайного вектора. Если носитель случайного вектора не ограничен, то при наложении некоторых условий на его распределение, из [35, теорема 2.4], функция квантили оказывается непрерывной.

Для сравнения точной границы α -ядра с её моделью приведем рисунки 1.7, 1.8, на которых линиями изображены точные границы α -ядер, а точками – вершины их полиэдральных аппроксимаций.

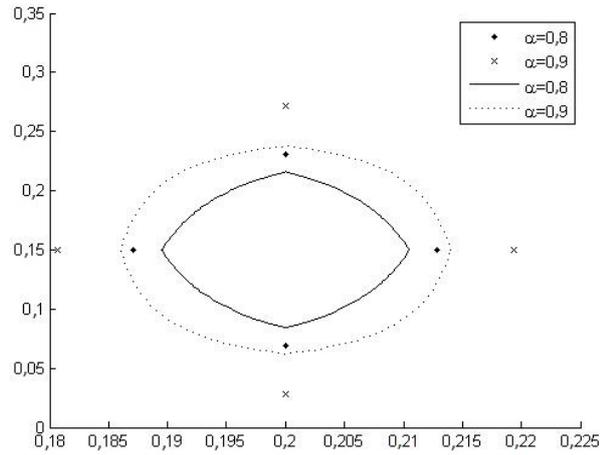


Рисунок 1.7. α -Ядро и его аппроксимация, $L = 2$

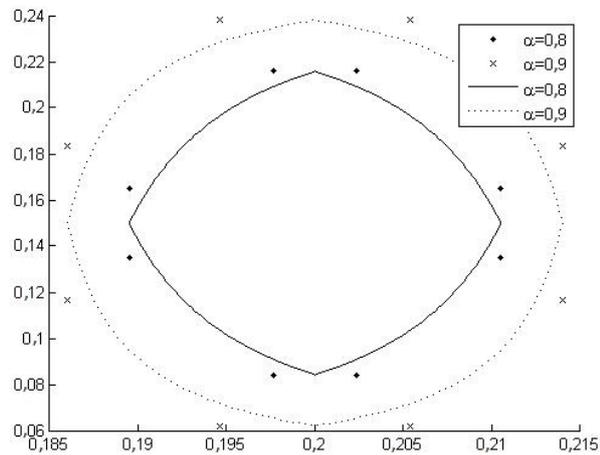


Рисунок 1.8. α -Ядро и его аппроксимация, $L = 3$

Из рисунков видно, что при $L = 3$ вершины аппроксимирующего многогранника лежат гораздо ближе к границе ядра, чем при $L = 2$, что является следствием сходимости аппроксимации ядра к истинному ядру в метрике Хаусдорфа.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Недостаток предложенного алгоритма, связанный с неравномерностью сети точек, можно устранить в случае двумерного распределения случайного вектора. Для этого расположим точки, задающие векторы нормалей, равномерно на единичной окружности через равные углы. Полученное множество единичных векторов и будет задавать множество векторов нормали.

Алгоритм 1.1 подразумевает, что функция квантили $b_\alpha(c)$ может быть вычислена точно. Если это сделать не удастся, то воспользуемся её выборочной оценкой.

Для этого сгенерируем выборку x_1, x_2, \dots, x_k случайного вектора X . Оценка функции квантили может быть найдена по формуле

$$\widehat{b}_\alpha(c_j) = C_{([\alpha k]), j}, \quad (1.22)$$

где $C_{i,j} = c_j^T x_i$, $C_{(1),j} \leq C_{(2),j} \leq \dots \leq C_{(k),j}$ – вариационный ряд, $[\cdot]$ – минимальное целое значение, ограничивающее сверху.

Формула 1.22 является следствием общей формулы [60] для выборочной оценки квантили. Пусть $y_i = \varphi(x_i)$, $i = \overline{1, k}$, – реализация случайной величины $Y = \varphi(X)$. Построим вариационный ряд $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots \leq y_{(k)}$. Тогда выборочная оценка функции квантили определяется формулой:

$$\widehat{\varphi}_\alpha = y_{([\alpha k])}. \quad (1.23)$$

Точность выборочной оценки обоснована следующей теоремой [60].

ТЕОРЕМА 1.8. *Если $\alpha \in (0, 1)$ и случайная величина Φ имеет плотность вероятности $p(\varphi)$, непрерывную в некоторой окрестности точки φ_α , причем $p(\varphi_\alpha) > 0$, то*

$$\widehat{\Phi}_\alpha - \varphi_\alpha = \frac{\widehat{P}(\varphi_\alpha) - \alpha}{p(\varphi_\alpha)} + o_p(k^{-1/2}), \quad (1.24)$$

где $\widehat{P}(\varphi_\alpha)$ – значение выборочной оценки вероятности в точке φ_α , φ_α – точное значение квантили, а $k^{1/2}o_p(k^{-1/2}) \rightarrow 0$ по вероятности при $k \rightarrow \infty$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если функция потерь $c^T x$ удовлетворяет условиям теоремы 1.8 $\forall c$, то имеет место сходимостъ по вероятности

$$\widehat{b}_\alpha(c) \rightarrow b_\alpha(c), \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (1.25)$$

За счет использования выборочной оценки квантили, не совпадающей в общем случае с точным значением квантили, число вершин многогранника может оказаться меньше чем при использовании её точного значения.

Стоит отметить, что использование выборочных оценок квантили не гарантирует выполнение соотношения $K_\alpha \subset \widehat{K}_\alpha^N$.

1.4. Выводы по главе 1

1. Установлены новые свойства α -ядра. Доказаны теоремы о достаточных условиях непустоты α -ядра и о свойствах векторной медианы.
2. Предложен метод построения внешних аппроксимаций α -ядра.
3. Доказана сходимость этих аппроксимаций к α -ядру.
4. Получены аналитические соотношения, позволяющие строить точные границы α -ядер для равномерного распределения и распределения Коши.

Глава 2. Программная реализация алгоритма аппроксимации α -ядра в двумерном случае

В разделе 2.1. приведено описание программного модуля, позволяющего строить внешние аппроксимации ядер по выборке в плоском случае для ряда распределений, а именно, для нормального, равномерного, логнормального, экспоненциального и распределения Коши. Параметры распределения, объем выборки и число пересекаемых доверительных полупространств задаются пользователем. В разделе 2.2. приведены результаты расчетов – визуальные представления моделей α -ядра. В разделе 2.3. сформулированы выводы по главе 2.

2.1. Описание программного модуля

Программный модуль PROKER предназначен для визуализации внешних аппроксимаций α -ядер двумерных распределений с независимыми одинаково распределенными компонентами. Для реализации алгоритма построения аппроксимаций использована программная среда MATLAB. Для удобства использования программы с помощью встроенного инструмента GUIDE создан пользовательский интерфейс программы, вид которого представлен на рисунках 2.1, 2.2.

В окне программы пользователь имеет возможность выбрать или ввести следующие параметры: вид распределения (среди предложенных), параметры (параметр) распределения, объем выборки, число доверительных полуплоскостей, число аппроксимаций (не более трех), параметр α для каждой из аппроксимаций. В меню выбора доступны для выбора следующие распределения: нормальное, равномерное, логнормальное, экспоненциальное и распределение Коши. На одном рисунке может быть построено не более трех аппроксимаций. Виды линий границ аппроксимаций, соответствующие значениям α , указаны в легенде. Для удобства все ячейки данных изначально заполнены. Для начала работы алгоритма программы необходимо нажать кнопку «Build approximation». После чего справа от меню появится рисунок, соответствующий параметрам, выбранным пользователем. Для построения границ аппроксимаций ядер при других параметрах необходимо изменить эти параметры в окне программы и нажать кнопку «Build approximation».

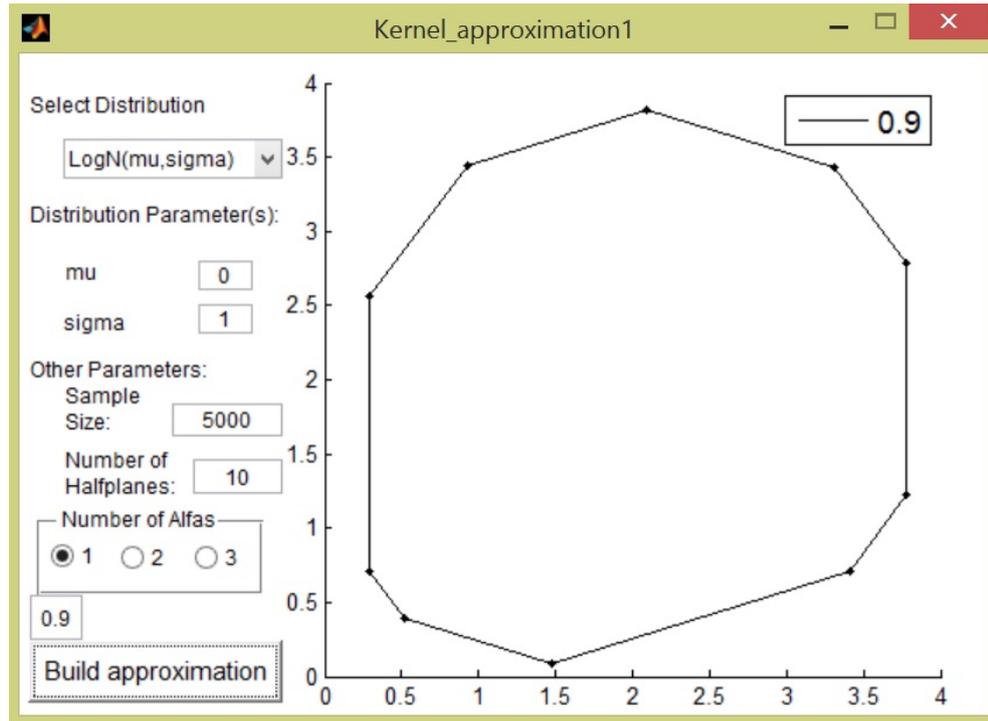


Рисунок 2.1. Пример работы программы. Логнормальное распределение

На рисунке 2.2 показано окно работы программы. На рисунке построены три аппроксимации ядер для заданных значений α . В качестве распределения выбрано экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$.

Для генерации выборки распределения используются стандартные функции из пакета MATLAB Statistics Toolbox.

Для удобства была создана функция `Kernel`, которая по заданным параметрам находит аппроксимацию и возвращает массив значений. На вход необходимо подать следующие данные: массив реализаций случайной величины, уровень α , число пересекаемых полуплоскостей.

После генерации точек всех ядер, используется стандартная функция `plot`, которая по точкам строит границу ядра.

2.2. Результаты работы программного модуля

В данном разделе представлены результаты для экспоненциального и логнормального распределений компонент случайного вектора X . На рисунках точками обозначены вершины многогранников, аппроксимирующих α -ядро. В случае двумерного распределе-

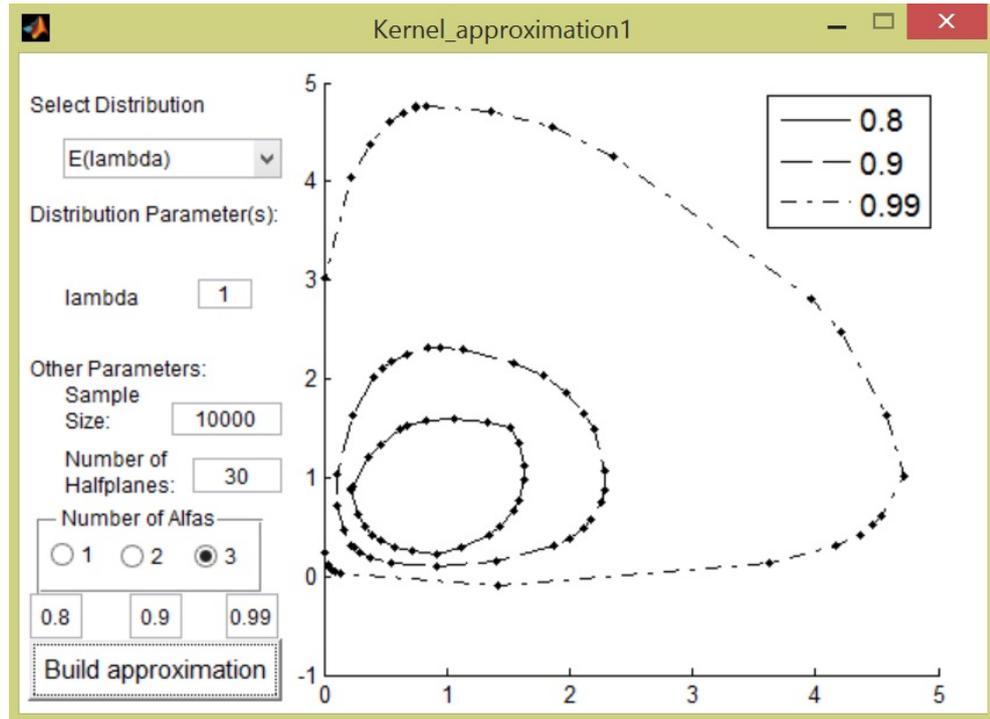


Рисунок 2.2. Пример работы программы. Экспоненциальное распределение

ния случайного вектора число вершин J не превосходит N .

С помощью описанной выше программы построим α -ядра для объема выборки 10^6 для $\alpha = 0,9$. Результаты работы алгоритма построения аппроксимации α -ядра при $N = 8, 16, 70$ для случая, когда компоненты случайного вектора X независимы и $X_i \sim \text{Log}N(0, 1), i = 1, 2$, показаны на рисунках 2.3–2.5.

Эмпирически установлено, что для выборок порядка $k = 10^6$ и выше выборочная оценка достаточно точна, поэтому уменьшение числа вершин аппроксимирующего многогранника не наблюдается.

Аналогичные результаты построения аппроксимации α -ядра при $N = 8, 16, 70$ для случая, когда компоненты случайного вектора X независимы и $X_i \sim E(1), i = 1, 2$, показаны на рисунках 2.6–2.8.

Для экспоненциального распределения при объеме выборки порядка $k = 10^6$ и выше выборочная оценка квантили также достаточно точна.

Разработанный программный модуль позволяет строить на одном рисунке одновременно две или три аппроксимации для различных значений α . На рисунках 2.9, 2.10 продемонстрированы границы ядер для $\alpha \in \{0,7; 0,9; 0,99\}$.

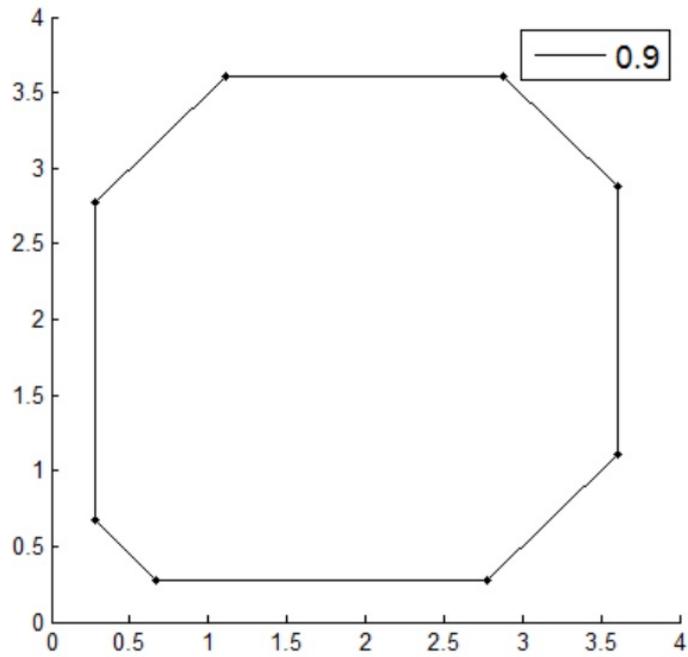


Рисунок 2.3. Логнормальное распределение, $N = 8$, $k = 10^6$, $\alpha = 0,9$

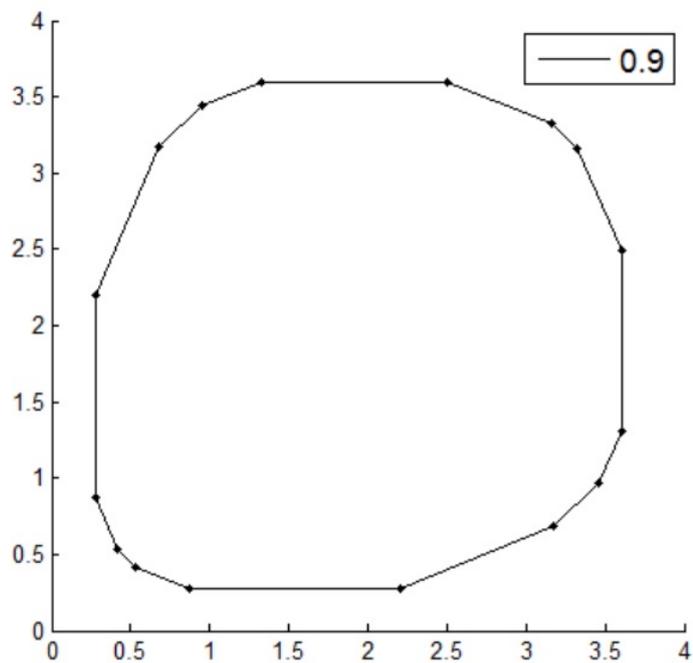


Рисунок 2.4. Логнормальное распределение, $N = 16$, $k = 10^6$, $\alpha = 0,9$

На рисунках 2.11, 2.12 показано, что при уменьшении объема выборки в случае логнормального распределения при $\alpha = 0,9$ число вершин аппроксимирующего многогранника уменьшается.

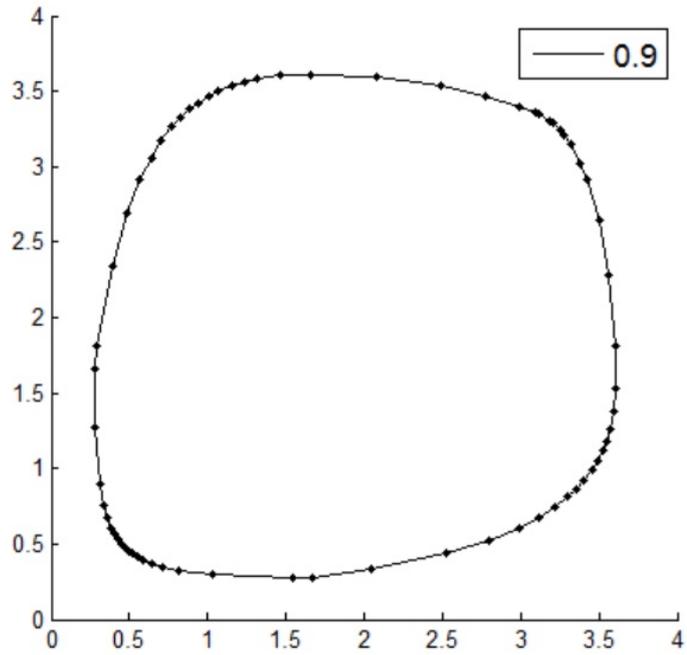


Рисунок 2.5. Логнормальное распределение, $N = 70$, $k = 10^6$, $\alpha = 0,9$

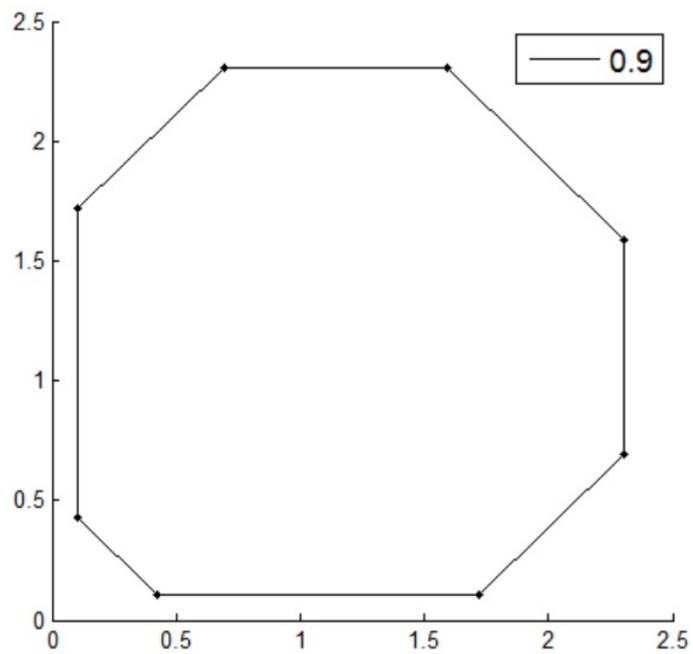


Рисунок 2.6. Экспоненциальное распределение, $N = 8$, $k = 10^6$, $\alpha = 0,9$

При проведении численных экспериментов на объеме выборки $k = 10^4$ было получено 50 вершин аппроксимирующего многогранника из 70 возможных. При использовании выборки объема $k = 10^3$ снижение точности выборочной оценки квантили приводит к

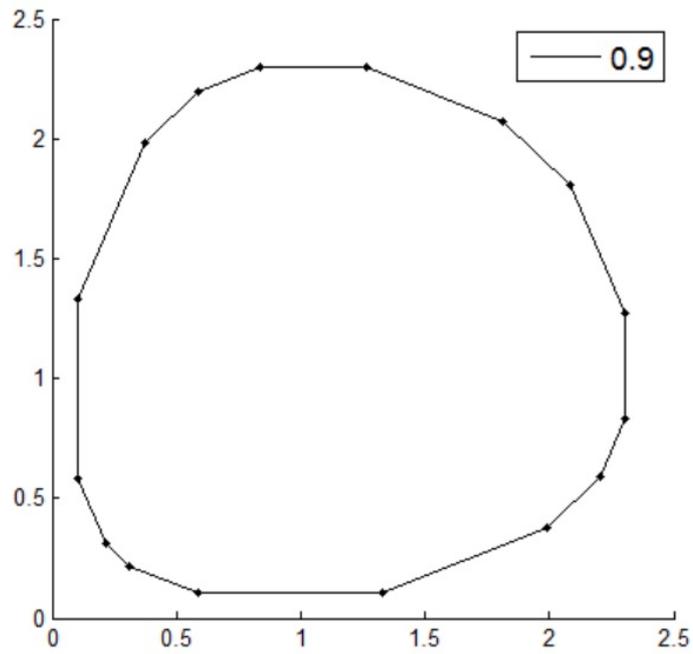


Рисунок 2.7. Экспоненциальное распределение, $N = 16$, $k = 10^6$, $\alpha = 0,9$

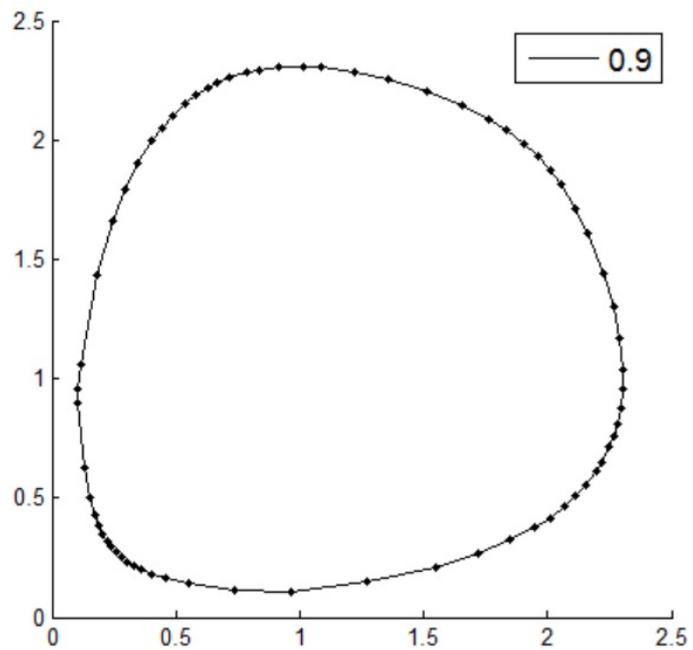


Рисунок 2.8. Экспоненциальное распределение, $N = 70$, $k = 10^6$, $\alpha = 0,9$

тому, что число вершин многогранника уменьшается. Для сгенерированной выборки случайного вектора число вершин оказалось равным 38 вместо возможных 70.

В случае, когда объем выборки увеличить невозможно или пользователю необходи-

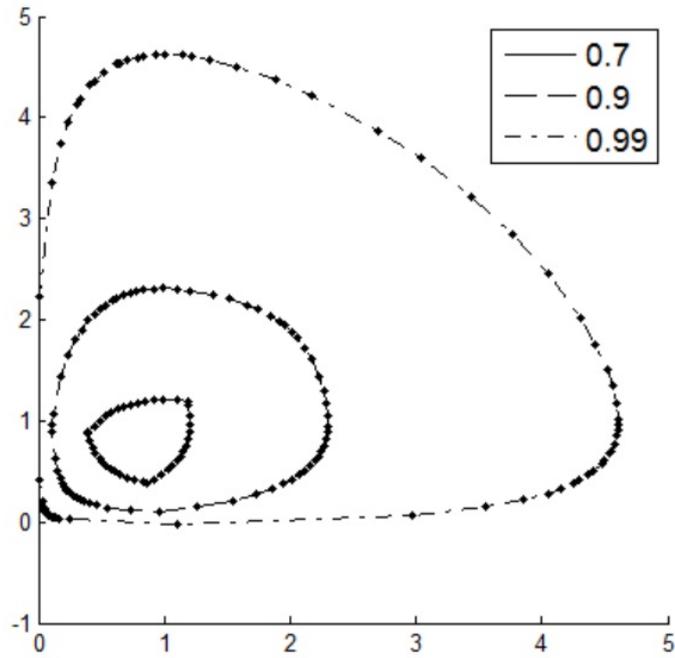


Рисунок 2.9. Экспоненциальное распределение, $N = 70$

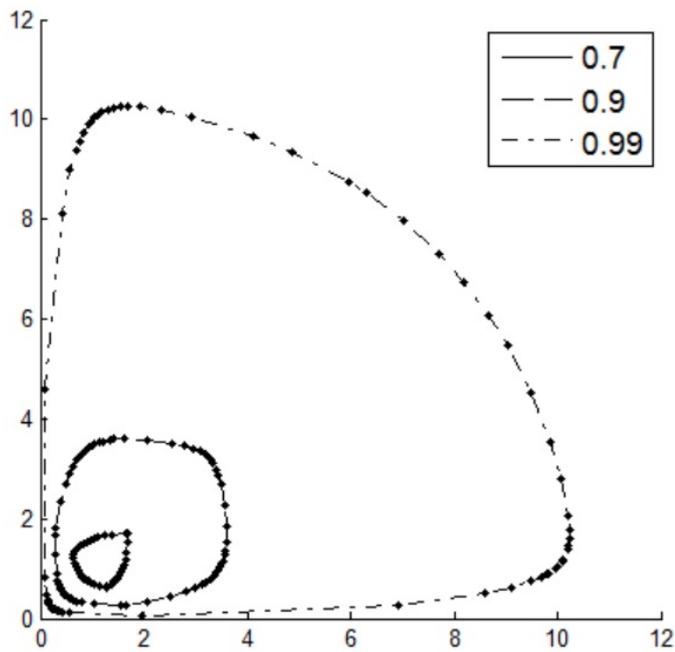


Рисунок 2.10. Логнормальное распределение, $N = 70$

мо увеличить скорость работы алгоритма, рекомендуется уменьшить число пересекаемых полупространств. Число вершин многогранника при этом уменьшится, но незначительно. Если пользователю необходимо увеличить точность аппроксимации, то необходимо уве-

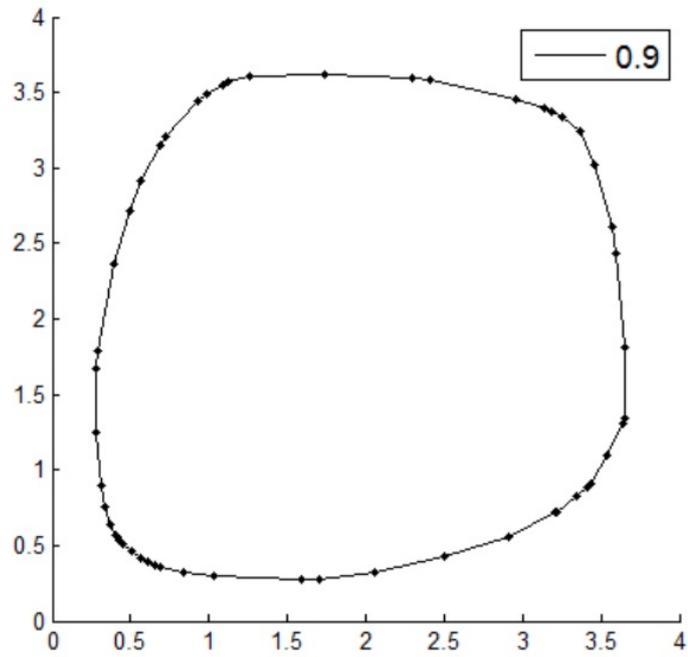


Рисунок 2.11. Логнормальное распределение, $N = 70$, выборка 10^4

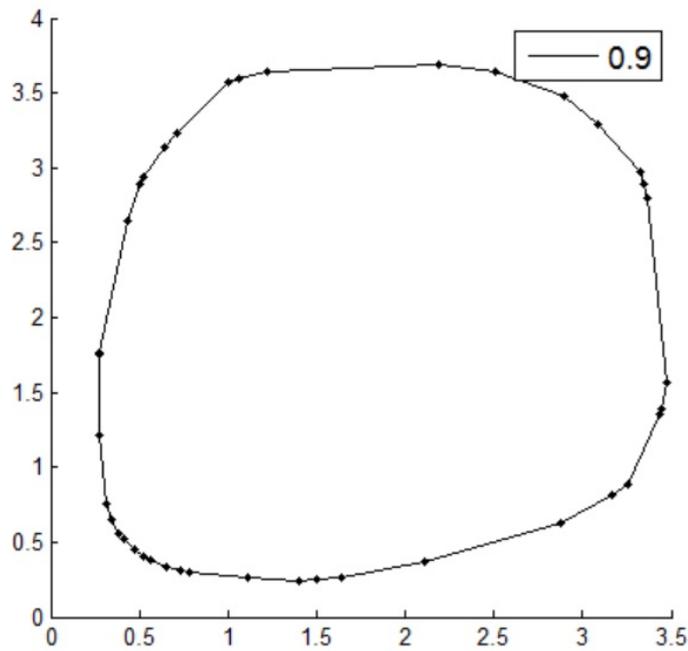


Рисунок 2.12. Логнормальное распределение, $N = 70$, выборка 10^3

личить параметр n для повышения точности выборочной оценки квантили.

Эмпирически установлено, что в случае логнормального экспоненциального распределений для $\alpha = 0,53$ и ниже, аппроксимация является пустым множеством, что сви-

детельствует о нарушении условий теоремы 1.5.

С использованием выборочной оценки квантили для выборки объема $n = 10^5$ равномерного распределения на противоположных сторонах квадрата были построены внешние аппроксимации ядра, приведенные на рисунках 2.13, 2.14.

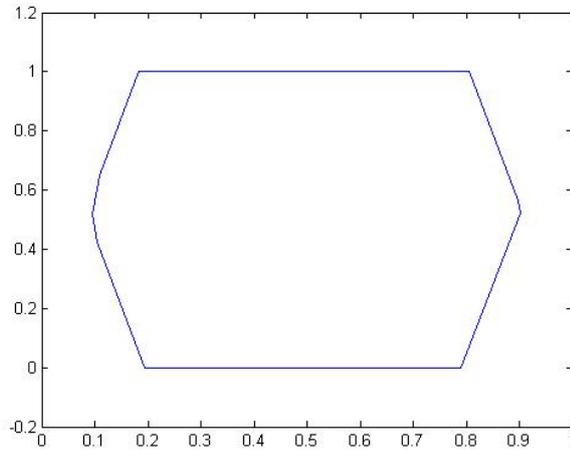


Рисунок 2.13. Равномерное распределение на противоположных сторонах квадрата,
 $\alpha = 0.9$

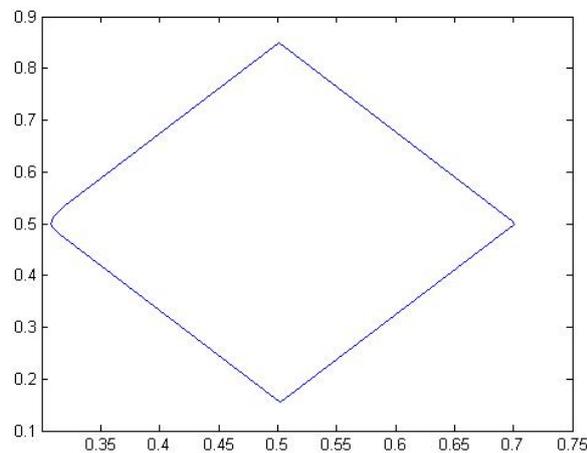


Рисунок 2.14. Равномерное распределение на противоположных сторонах квадрата,
 $\alpha = 0.7$

Рассматривается смесь равномерного распределения на противоположных сторонах квадрата и равномерного распределения на квадрате. Для данного распределения были

получены аппроксимации ядер, приведенные на рисунках 2.15, 2.16.

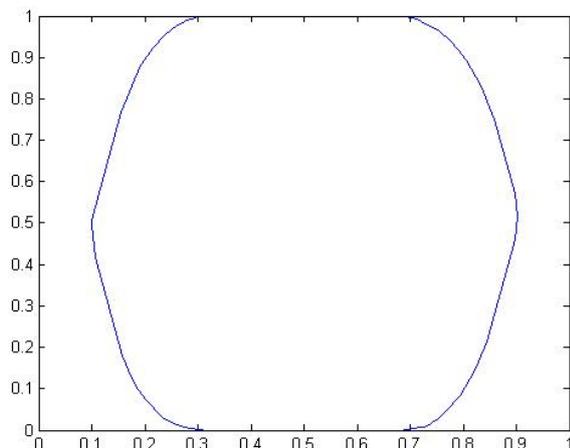


Рисунок 2.15. Ядро для смеси равномерных распределений, $\alpha = 0.9$

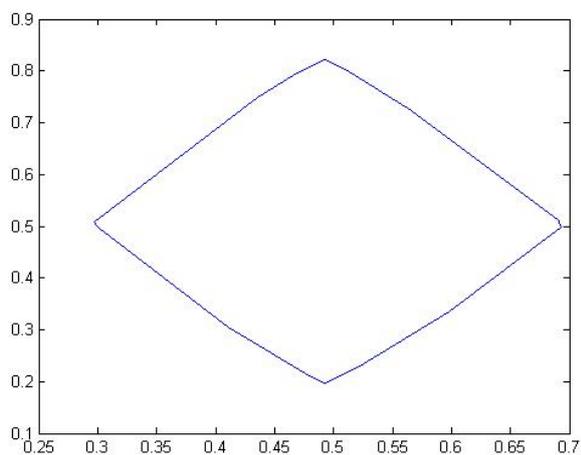


Рисунок 2.16. Ядро для смеси равномерных распределений, $\alpha = 0.7$

2.3. Выводы по главе 2

1. Разработан комплекс проблемно-ориентированных программ для проведения научных исследований по изучению геометрии α -ядер двумерных распределений.
2. Программный комплекс может использоваться как практический инструмент для проверки условий теоремы 1.5 о внутренней точке α -ядра.

Глава 3. Задача квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь

В данной главе предлагается численный метод, позволяющий свести задачу квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь к задаче линейного программирования. Метод основан на использовании внешней аппроксимации ядра вероятностной меры случайного вектора, построенной в главе 1. В теории стохастического программирования задачи с билинейными функциями потерь (линейными по случайным параметрам и по вектору оптимизируемых переменных) занимают особое место, поскольку часто возникают в прикладных задачах.

В разделе 3.1. приведена постановка задачи. В разделе 3.2. приведен способ сведения исходной задачи к задаче линейного программирования. В разделе 3.3. приведено сравнение результатов, полученных с использованием предложенного приближенного метода с точным решением. В разделе 3.4. способ, предложенный в разделе 3.2., применяется к задаче с вероятностными ограничениями. В разделе 3.6. сформулированы выводы по главе 3.

3.1. Постановка задачи

Рассматривается задача минимизации функции квантили с линейными ограничениями на u

$$\varphi_\alpha(u) = [a^T u + b^T X + u^T \Theta X]_\alpha \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (3.1)$$

где u – вектор оптимизируемых переменных, U – полиэдр в R^l , a и b – известные детерминированные векторы размерностей l и n соответственно, Θ – детерминированная матрица размера $l \times n$.

Рассматриваются два варианта предположений о случайном векторе $X \in \mathbb{R}^n$. В первом случае считается, что закон распределения вектора X известен. Во втором задана только выборка из закона распределения этого вектора.

Вектор u является детерминированным, поэтому

$$[a^T u + b^T X + u^T \Theta X]_\alpha = a^T u + [b^T X + u^T \Theta X]_\alpha. \quad (3.2)$$

Отметим, что если Θ – нулевая матрица, то выражение (3.2) сводится к выражению:

$$[a^T u + b^T X + u^T \Theta X]_\alpha = a^T u + [b^T X]_\alpha$$

и, поскольку второе слагаемое в правой части этого выражения не зависит от u , задача (3.1) эквивалентна задаче линейного программирования

$$a^T u + [b^T X]_\alpha \rightarrow \min_{u \in U}.$$

В дальнейшем матрица Θ предполагается ненулевой.

По теореме 1.4 задача (3.1), в случае регулярности α -ядра K_α , эквивалентна минимаксной задаче

$$a^T u + \max_{x \in K_\alpha} (b^T x + u^T \Theta x) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (3.3)$$

Отметим, что в настоящее время считается, что основным аналитическим инструментом решения задач квантильной оптимизации является доверительный метод [35], сводящий задачу квантильной оптимизации к обобщенной минимаксной:

$$a^T u + \min_{S \in E_\alpha} \sup_{x \in S} (b^T x + u^T \Theta x) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (3.4)$$

где E_α – семейство всех α -доверительных множеств.

Преимущество (3.3) по сравнению с (3.4) заключается в том, что в (3.3) отсутствует трудновыполнимая операция минимизации по множеству S . На самом деле, задачи (3.3) и (3.4) эквивалентны из-за линейности функции потерь по случайным параметрам. Более того, как показано в [35], для случая линейной по случайным параметрам функции потерь, указанная операция выполнима и приводит к задаче (3.3). Пусть K_α^N – полиэдральная модель α -ядра, построенная с помощью алгоритма 1.1. Обозначим оценку функции квантили, найденную на аппроксимации ядра многогранником K_α^N , как

$$\varphi_\alpha^N(u) = a^T u + \max_{x \in K_\alpha^N} (b^T x + u^T \Theta x). \quad (3.5)$$

Многогранник (1.18) является внешней аппроксимацией α -ядра, т.е. $K_\alpha \subset K_\alpha^N$, поэтому для любого $u \in U$ справедливо неравенство

$$\varphi_\alpha^N(u) \geq a^T u + \max_{x \in K_\alpha} (b^T x + u^T \Theta x) = \varphi_\alpha(u), \quad (3.6)$$

т.е. использование аппроксимации K_α^N позволяет построить в рассматриваемой задаче верхнюю оценку функции квантили. Эту оценку можно последовательно уточнить, сгущая набор векторов нормали $\{c_j\}_{j=1}^N$.

3.2. Сведение задачи квантильной оптимизации к задаче линейного программирования

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Задача минимизации по $u \in U$ функции $\varphi_\alpha^N(u)$ эквивалентна следующей задаче линейного программирования:*

$$y \rightarrow \min_{\substack{u \in U \\ y \in \mathbb{R}}}, \quad a^\top u + b^\top v_j + u^\top \Theta v_j \leq y, \quad (3.7)$$

где v_j – вершины K_α^N , $j = \overline{1, J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3.1. Доказательство основано на способе сведения минимаксной задачи на многогранниках к задаче линейного программирования [19]. Поскольку множество K_α^N является многогранником, то в правой части (3.5) записана задача линейного программирования. Поэтому справедливо следующее соотношение:

$$\varphi_\alpha^N(u) = a^\top u + \max_{j=\overline{1, J}}(b^\top v_j + u^\top \Theta v_j). \quad (3.8)$$

В результате задача (3.1) сводится к минимаксной задаче

$$a^\top u + \max_{j=\overline{1, J}}(b^\top v_j + u^\top \Theta v_j) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (3.9)$$

Переходя от задачи (3.9) к эквивалентной задаче линейного программирования, получаем задачу (3.7), что и доказывает утверждение. \square

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть функция квантили $b_\alpha(c)$ непрерывна, K_α регулярно и функция потерь имеет вид $f(x, u) = a(u)^\top x + b(u)$, где $a(u)$ – вектор с непрерывными по u компонентами и $b(u)$ функция непрерывная по u , $x \in \mathcal{X}, u \in U$ – компакт, тогда*

$$\min_{u \in U} \varphi_\alpha^N(u) - \min_{u \in U} \varphi_\alpha(u) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (3.10)$$

где $\varphi_\alpha(u) = [f(X, u)]_\alpha$, $\varphi_\alpha^N(u) = \max_{x \in K_\alpha^N} f(x, u)$.

Для доказательства необходимо определить дилатацию множества K_α^N радиуса $\delta(N)$:

$$K_\alpha^{\delta(N)} = \cup_{x \in K_\alpha} \{\overline{B}_{\delta(N)}(x)\}$$

где $\overline{B}_{\delta(N)}(x)$ – замкнутый шар радиуса $\delta(N)$ с центром в точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. В силу регулярности ядра K_α справедливо

$$\varphi_\alpha(u) = \max_{x \in K_\alpha} (a(u)^\top x + b(u)). \quad (3.11)$$

Для любого $\delta > 0 \exists N^0 = N^0(\delta)$ такое, что $\forall N \geq N^0$ справедливо следующее включение:

$$K_\alpha^{\delta(N)} \supseteq K_\alpha^N \supseteq K_\alpha. \quad (3.12)$$

Согласно теореме 1.2 справедлива сходимость в метрике Хаусдорфа

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_\alpha^N = K_\alpha. \quad (3.13)$$

При $N \rightarrow \infty, \delta(N) \rightarrow 0$ справедлива сходимость в метрике Хаусдорфа:

$$K_\alpha^{\delta(N)} \rightarrow K_\alpha. \quad (3.14)$$

Из включений (3.12) следует, что

$$\max_{x \in K_\alpha} (b^T x + u^T \Theta x) \leq \max_{x \in K_\alpha^{(N^0)}} (b^T x + u^T \Theta x) \leq \max_{x \in K_\alpha^{\delta(N^0)}} (b^T x + u^T \Theta x). \quad (3.15)$$

Из [56, лемма 1.1 (II), стр. 29] следует непрерывность функции $\max_{K_\alpha^{\delta(N^0)}} (b^T x + u^T \Theta x)$ по u и по δ в точке $\delta = 0$. Поэтому справедлива сходимость

$$\max_{x \in K_\alpha^{\delta(N^0)}} (b^T x + u^T \Theta x) \rightarrow \max_{x \in K_\alpha} (b^T x + u^T \Theta x), \text{ при } \delta \rightarrow 0. \quad (3.16)$$

Отсюда следует сходимость

$$\max_{x \in K_\alpha^{(N^0)}} (b^T x + u^T \Theta x) \rightarrow \max_{x \in K_\alpha} (b^T x + u^T \Theta x), \text{ при } N^0 \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

Введем обозначение:

$$h(\delta, u) = \max_{x \in K_\alpha^{(N^0)}} (b^T x + u^T \Theta x).$$

Согласно [56, лемма 1.1 (II), стр. 27] функция $h(\delta, u)$ – непрерывная по (δ, u) в любой точке вида $(0, u_0)$, где $u_0 \in U$. Функция $h(\delta, u)$ удовлетворяет условиям [56, лемма 1.1 (II), стр. 27]. Введем обозначение: $g(\delta) = \min_{u \in U} h(\delta, u)$. Согласно [56, Лемма 1.1 (II), стр. 27] функция $g(\delta)$ непрерывна по δ в точке $\delta = 0$. Отсюда следует сходимость $g(\delta) \rightarrow g(0)$ при $\delta \rightarrow 0$. Теорема доказана. \square

3.3. Результаты расчетов для различных распределений случайного вектора

3.3.1. Нормальное распределение

Рассмотрим инвестиционный портфель, состоящий из одного безрискового и двух рискованных активов. Доход такого портфеля можно рассчитать по формуле $R(X, u) = \beta u_0 +$

$u^T X$, где $\beta = \text{const}$ – доход безрискового актива, $X = [X_1, X_2]^T$ – доходы рискованных активов, u_0 – доля вложений в безрисковый актив, $u = [u_1, u_2]$ – доли вложений в рискованные активы. Причем для u выполнено следующее равенство: $u_0 + u_1 + u_2 = 1$, благодаря которому в формуле дохода портфеля можно опустить зависимость от u_0 . Для учета запрета операции "short-sales" необходимо выполнение следующих ограничений: $u_i \geq 0, i = 0, 1, 2$.

Пусть вектор доходностей рискованных финансовых инструментов имеет невырожденное нормальное распределение с известными вероятностными характеристиками:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \right).$$

Известно [33], что оптимальный портфель по квантильному критерию, учитывающему риск, может быть найден в результате последовательного решения задач квадратичного программирования.

Данный пример носит тестовый характер. В нем известно точное решение, с которым сравнивается приближенное, найденное с помощью предложенного метода.

Найдем вероятностные характеристики для дохода портфеля R :

$$\mu(u) = M[R(X, u)] = \beta u_0 + m^T u, \quad \sigma^2(u) = D[R(X, u)] = u^T Q_X u.$$

Решим задачу квантильной оптимизации:

$$\varphi_\alpha(u) = \min\{x : P(-R(X, u) \leq x) \geq \alpha\} \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (3.18)$$

где $U = \{(u_0, u_1, u_2) : u_0 + u_1 + u_2 = 1, u_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$.

В соответствии с [33] задача (3.18) эквивалентна задаче

$$\gamma_\alpha \sqrt{f(c)} - c \rightarrow \min_{c \in [c_{\min}, c_{\max}]}, \quad (3.19)$$

где $c_{\min} = \min\{\beta, m_1, m_2\}$, $c_{\max} = \max\{\beta, m_1, m_2\}$, $f(c)$ определяется в результате решения задачи Тобина-Марковица:

$$f(c) = \min_{u: \mu(u)=c} \sigma^2(u), \quad (3.20)$$

где γ_α – α -квантиль распределения $\mathcal{N}(t, \infty)$,

Задача (3.19) является однопараметрической и может быть решена путем перебора на густой сетке, разбивающей отрезок $[c_{\min}, c_{\max}]$. Такой подход назовем точным методом.

Он позволяет получить сколь угодно точное решение задачи и служит эталонным решением, с которым можно сравнить результаты, полученные с помощью предложенного метода.

Решим задачу (3.19) при следующих модельных значениях параметров: $\beta = 0, 1, m_1 = 0, 2, m_2 = 0, 15, q_{11} = 4 \cdot 10^{-3}, q_{12} = 5 \cdot 10^{-5}, q_{22} = 10^{-4}$.

Результаты численных расчетов предложенным и точным способами приведены в таблицах 3.1, 3.2. Если известно, что случайный вектор X имеет многомерное нормальное распределение с известными параметрами, то правую часть в ограничении (1.2) определим из соотношения (1.6). Такой подход назовем первым способом. Когда же задана выборка, воспользуемся подходом, основанным на использовании выборочной оценки квантили. Такой подход назовем вторым способом. Будем искать правую часть в ограничении (1.18) по формуле (1.22) при достаточно больших объемах выборки k , находя выборочную статистику.

В таблице 3.1 представлены результаты расчетов оптимальных значений квантильного критерия при использовании грубой аппроксимации ядра при $L = 2$, т. е. для двухмерного случая аппроксимирующий многогранник является квадратом. При этом оптимальное решение достигается в одной из его вершин. В таблице 3.2 представлены результаты расчетов, но уже при более точной аппроксимации, когда $L = 3$. Таким образом, полученный аппроксимационный многогранник является восьмиугольником.

Таблица 3.1. Результаты расчетов для числа точек разбиения на грани $L = 2$

α	0,8	0,9	0,99
Первый способ	-0,1477	-0,1335	-0,1000
Второй способ($k = 5000$)	-0,1475	-0,1328	-0,1000
Второй способ($k = 10000$)	-0,1477	-0,1336	-0,1000
Точное решение	-0,1477	-0,1406	-0,1288

Результаты свидетельствуют о том, что оценки оптимального решения квантильного критерия, полученные с помощью предложенного метода, достаточно точны. Предложенный метод находит решение, оптимальное по значению критерия, при этом вектор

Таблица 3.2. Результаты расчетов для числа точек разбиения на грани $L = 3$

α	0,8	0,9	0,99
Первый способ	-0,1477	-0,1372	-0,1267
Второй способ($k = 5000$)	-0,1475	-0,1372	-0,1000
Второй способ($k = 10000$)	-0,1477	-0,1373	-0,1270
Точное решение	-0,1477	-0,1406	-0,1288

стратегий u может и не совпадать с оптимальной стратегией, соответствующей точному решению.

Из данных, приведенных в таблице, видно, что с ростом L значения критерия, полученные приближенным способом, стремятся к значению точного метода. Уже при $L = 3$ результаты приближенного метода близки к результатам точного. Это характеризует предложенный алгоритм во всех его модификациях как достаточно эффективный метод решения определенного класса задач.

3.3.2. Равномерное распределение

Теперь рассмотрим инвестиционный портфель, в котором доходы рискованных активов имеют двумерное равномерное распределение. Подберем параметры распределения так, чтобы математические ожидания компонент вектора совпадали с вектором математических ожиданий доходов ценных бумаг, имеющих нормальное распределение. Определим дисперсию каждой из компонент случайного вектора с нормальным распределением. Для этого воспользуемся методом главных компонент и найдем собственные векторы и собственные значения ковариационной матрицы:

$$Q_X = H^T \Lambda H,$$

здесь матрица $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1^2, \lambda_2^2\} = \text{diag}\{0,0001; 0,004\}$ состоит из дисперсий компонент случайного вектора, H – матрица главных векторов. Пусть первая компонента случайного вектора распределена равномерно на отрезке $[q, w]$. Определим значения этих параметров,

решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,2 = (q + w)/2, \\ 10^{-4} = (w - q)^2/12. \end{cases} \quad (3.21)$$

Получено решение:

$$\begin{cases} q = 0,18, \\ w = 0,22. \end{cases} \quad (3.22)$$

То же проделаем и для второй компоненты случайного вектора.

$$\begin{cases} 0,15 = (q + w)/2, \\ 4 \cdot 10^{-3} = (w - q)^2/12. \end{cases} \quad (3.23)$$

Получено решение:

$$\begin{cases} q = 0,04, \\ w = 0,26. \end{cases} \quad (3.24)$$

В таблицах 3.3, 3.4 приведены результаты численных расчетов оптимальных значений квантильного критерия при $L = 2$ и $L = 3$ соответственно. В данном примере точным решением является значение критерия на границе ядра, полученное при помощи формул для координат точек границ ядра 1.11, 1.12, 1.13, 1.14 методом дихотомии. Первый способ находит решение задачи на аппроксимации ядра. В качестве квантили используется точное значение двумерной квантили, определяемое 1.15. Второй способ использует выборочную оценку квантили.

Таблица 3.3. Полученные результаты для числа точек разбиения на грани $L = 2$

α	0,8	0,9	0,99
Первый способ	-0,1871	-0,1807	-0,1699
Второй способ($k = 5000$)	-0,1871	-0,1808	-0,1700
Второй способ($k = 10000$)	-0,1871	-0,1809	-0,1697
Точное решение	-0,1895	-0,1860	-0,1828

Таблица 3.4. Полученные результаты для числа точек разбиения на грани $L = 3$

α	0,8	0,9	0,99
Первый способ	-0,1895	-0,1860	-0,1828
Второй способ($k = 5000$)	-0,1893	-0,1859	-0,1828
Второй способ($k = 10000$)	-0,1895	-0,1859	-0,1829
Точное решение	-0,1895	-0,1860	-0,1828

3.3.3. Распределение Коши

Пусть случайный вектор доходов рискованных активов имеет распределение Коши $C(x_0, \gamma)$. Особенностью этого распределения является отсутствие у него математического ожидания и дисперсии. Подберем параметры распределения следующим образом: $x_0 = m, \gamma = [\lambda_1, \lambda_2]$. Результаты расчетов для $L = 2$ и $L = 3$ приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5. Полученные результаты для числа точек разбиения на грани $L = 2$

α	0,8	0,9	0,99
Первый способ	-0,1999	-0,1997	-0,1968
Второй способ($k = 5000$)	-0,1997	-0,1994	-0,1938
Второй способ($k = 10000$)	-0,1997	-0,1994	-0,1932
Точное решение	-0,1999	-0,1997	-0,1968

В случае распределения Коши предложенный метод находит решение, близкое к точному, уже при $L = 2$.

3.4. Метод решения задач с вероятностными ограничениями

Рассмотрим задачу стохастического программирования с индивидуальными вероятностными ограничениями:

$$h(u) \rightarrow \max_{u \in U} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{P}\{g_i(X, u) \leq 0\} \geq p_i, \quad i = \overline{1, I}, \quad (3.26)$$

где $h(u)$ – детерминированная вещественнозначная целевая функция, и вещественные функции g_i можно интерпретировать как компоненты вектора-функции g . Как было отмечено в [70], индивидуальные вероятностные ограничения (3.26) легко сводятся к системе детерминированных неравенств в случае, когда функции $g_i(X, u)$ являются сепарабельными по u, X . Обобщим этот результат для случая, когда эти функции линейны по X .

Для начала рассмотрим индивидуальные вероятностные ограничения общего вида (3.26). Они связаны с неравенствами для функций вероятности, соответствующих функциям потерь $g_i(X, u)$. Пусть η – случайная величина с функцией распределения $F_\eta(y)$. В [94] установлено, что неравенство $F_\eta(y) \geq \alpha$ выполнено тогда и только тогда, когда $[\eta]_\alpha \leq y$. Поэтому каждое вероятностное ограничение в формуле (3.26) может быть представлено в эквивалентной квантильной форме:

$$[g_i(X, u)]_{\alpha_i} \leq 0. \quad (3.27)$$

Рассмотрим случай, когда функции $g_i(u, X)$ линейны по X , т.е. $g_i(X, u) = a_i^T(u)X + b_i(u)$, и α_i -ядра K_{α_i} распределения вектора X являются регулярными, $\mathfrak{B} = \overline{1, I}$. Тогда, применяя теорему 1.4, выражение (3.27) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$b_i(u) + \max_{x \in K_{\alpha_i}} a_i^T(u)x \leq 0. \quad (3.28)$$

Отметим, что если функция $b_i(u)$ выпукла, а функция $a_i^T(u)x$ выпукла по u для любого вектора $x \in K_{\alpha_i}$, то левая часть неравенства (3.28) является выпуклой функцией и следовательно, допустимое множество стратегий u является выпуклым.

Далее, заменим α_i -ядро в выражении (3.28) его полиэдральной аппроксимацией $K_{\alpha_i}^N$, где v_i^j – вершины i -го многогранника $j \in J_i$. Учитывая линейность максимизируемой функции в (3.28), имеем

$$\max_{x \in K_{\alpha_i}^N} a_i^T(u)x = \max_{j \in J_i} a_i^T(u)v_i^j.$$

Вследствие этого, можно заключить, что каждое индивидуальное вероятностное ограничение из (3.26) может быть аппроксимировано системой неравенств

$$b_i(u) + a_i^T(u)v_i^j \leq 0, \quad j \in J_i. \quad (3.29)$$

Такая система определяет выпуклое допустимое множество, если левая часть каждого из ее неравенств выпукла по u . В частном случае, когда функции $b_i(u)$ и $a_i(u)$ линейны по u , это условие выполнено.

Рассмотрим специальный случай задачи линейного стохастического программирования

$$d^T u \rightarrow \max_{u \in U} \quad (3.30)$$

при детерминированных линейных ограничениях

$$Au = B \quad (3.31)$$

и индивидуальных вероятностных ограничениях вида

$$\mathbf{P}\{p_i^T u + \beta_i^T X + u^T \Theta_i X + \gamma_i \leq 0\} \geq \alpha_i, \quad \forall i, \quad (3.32)$$

где u – вектор оптимизируемой стратегии из \mathbb{R}^m , d и α_i детерминированные векторы размерности m , A – детерминированная матрица размерности $(k \times m)$, B – заданный вектор размерности k , X – n -мерный случайный вектор, β_i – детерминированный n -мерный вектор, Θ_i – заданная матрица размерности $(m \times n)$ и γ_i – действительное число. С учетом результатов предыдущего раздела аппроксимируем рассматриваемую задачу следующей задачей линейного программирования. Функции $a_i(u)$ и $b_i(u)$ можно представить в линейной форме:

$$a_i(u) = \beta_i + \Theta_i^T u, \quad b_i(u) = \alpha_i^T u + \gamma_i.$$

Учитывая тот факт, что ограничения (3.29) могут быть записаны в виде линейных неравенств

$$\alpha_i^T u + \gamma_i + (\beta_i^T + u^T \Theta_i) v_i^j \leq 0, \quad j \in J_i, \quad (3.33)$$

исходная задача стохастического программирования (3.30), (3.31) и (3.32) аппроксимируется задачей линейного программирования (3.30), (3.31) и (3.33).

3.5. Модельный пример

Рассматривается оптимизационная задача

$$u_1 - 2u_2 \rightarrow \max_{u_1, u_2} \quad (3.34)$$

при детерминированных ограничениях

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1 \quad (3.35)$$

и двух вероятностных ограничениях вида

$$\mathbf{P}\{u_1X_1 - u_2X_2 \leq 1\} \geq 0.9, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{P}\{3u_1X_1 - u_2X_2 \leq 2\} \geq 0.7, \quad (3.37)$$

где X_1, X_2 — независимые, одинаково равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины.

Как уже отмечалось выше, в [94] показано, что вероятностные ограничения (3.36), (3.37) можно переписать в эквивалентной квантильной форме:

$$[u_1X_1 - u_2X_2]_{0.9} \leq 1, \quad [3u_1X_1 - u_2X_2]_{0.7} \leq 2. \quad (3.38)$$

С использованием теоремы 1.4 эти неравенства равносильны следующим:

$$\max_{(x_1, x_2) \in K_{0.9}} (u_1x_1 - u_2x_2) \leq 1, \quad \max_{(x_1, x_2) \in K_{0.7}} (3u_1x_1 - u_2x_2) \leq 2, \quad (3.39)$$

где K_α — α -ядро равномерного распределения на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$. В подразделе 1.2.2. были получены аналитические соотношения для K_α и установлена его регулярность. С целью иллюстрации предложенного подхода заменим α -ядра в (3.39) их полиэдральными аппроксимациями. В расчетах множества J_1 и J_2 содержат одинаковое число точек, т.е. ядра $K_{0.9}$ и $K_{0.7}$ аппроксимированы полиэдрами, содержащими одинаковое количество N вершин. В результате ограничения (3.39) аппроксимируются системами линейных неравенств

$$u_1v_1^j - u_2v_2^j \leq 1, \quad \forall j \in J_1, \quad 3u_1v_1^j - u_2v_2^j \leq 1, \quad \forall j \in J_2, \quad (3.40)$$

а исходная задача — задачей линейного программирования (3.34), (3.35), (3.40).

Для $N = 128$ получено следующее решение аппроксимирующей задачи линейного программирования: $u = (0, 9522; 0)$, оптимальное значение целевой функции 0.9522. Для $N = 16$ результаты схожие: $u = (0, 9524; 0)$, оптимальное значение целевой функции 0,9524. В этих расчетах функция квантили $b_\alpha(c)$ при нахождении вершин полиэдральной аппроксимации вычислялась точно с использованием указанного выше результата из подраздела 1.2.2. При замене точного выражения для функции $b_\alpha(c)$ ее выборочной оценкой для объема выборки $n = 10^6$ получены следующие результаты. Для $N = 16$ получено решение $u = (0, 9530; 0)$, оптимальное значение критерия 0,9530. Для $N = 128$: $u = (0, 9527; 0)$, значение критерия 0,9527. Это свидетельствует о работоспособности предложенного подхода.

3.6. Выводы по главе 3

1. Для класса задач квантильной оптимизации с билинейными функциями потерь предложен новый метод решения, основанный на использовании внешней аппроксимации α -ядра, позволяющий сводить исходную задачу стохастического программирования к задаче линейного программирования. Доказана сходимость полученного решения по значению критерия к точному решению.

2. Предложенный метод распространен на задачи стохастического программирования с индивидуальными вероятностными ограничениями.

3. На тестовых примерах показано, что предложенный приближенный метод обеспечивает приемлемую точность по значению критерия.

Глава 4. Метод линеаризации для решения задачи квантильной оптимизации с функцией потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров

В разделе 4.1. приводится постановка задачи квантильной оптимизации с функцией потерь, особым образом зависящей от малых параметров. С помощью известных подходов не удастся решить эту задачу. Для нахождения приближенного решения предлагается метод, заключающийся в замене исходной нелинейной функции потерь на её линеаризованную модель. Под линеаризованной моделью понимается линейная часть разложения функции потерь по вектору малых случайных параметров. В разделе 4.2. приводится основной результат, а именно: теорема об использовании линеаризованной по случайным параметрам модели вместо исходной нелинейной по случайным параметрам функции потерь. Данная теорема справедлива только при ограниченном носителе вектора случайных параметров. Показано, что при такой замене возникающая ошибка мала. Далее результат о линеаризации расширяется на случай неограниченного носителя случайного вектора. При этом накладывается ряд ограничений на распределение случайного вектора. В разделе 4.3. рассматривается задача о составлении портфеля из облигаций с фиксированным доходом. Здесь показано, что метод линеаризации позволяет свести задачу максимизации дохода портфеля, нелинейно зависящего от вектора малых случайных параметров к задаче квантильной оптимизации с линейной по случайным параметрам функцией потерь. Такая задача может быть сведена к эквивалентной минимаксной в случае использования ядра вероятностной меры или его аппроксимации.

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим функцию потерь

$$f(X^\mu, u) = f(\mu_1 X_1, \dots, \mu_n X_n, u), \quad (4.1)$$

где u – вектор стратегии, причем $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, U – компакт, μ_1, \dots, μ_n – малые детерминированные параметры, $X^\mu = (\mu_1 X_1, \dots, \mu_n X_n)$ – вектор малых случайных параметров. Реализации данного вектора обозначаются $x^\mu = (\mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n)$ и принадлежат пространству \mathbb{R}^n .

В дальнейшем для этих векторов иногда будет удобно использование матричной формы записи: $x^\mu = M \cdot x$, $X^\mu = M \cdot X$, где $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$, $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$, $M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены элементы вектора $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

В [35] введены следующие определения.

Функция вероятности для функции потерь (4.1) имеет вид

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{f(X^\mu, u) \leq \varphi\}, \quad (4.2)$$

где \mathbf{P} – вероятность, φ – допустимый уровень потерь.

Функция квантили для функции потерь (4.1) имеет вид

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\} \triangleq [f(X^\mu, u)]_\alpha. \quad (4.3)$$

Задача квантильной оптимизации

$$\varphi_\alpha(u) \rightarrow \min_{u \in U} \quad (4.4)$$

составляет объект исследования настоящей главы.

Метод линеаризации для решения задачи (4.4) впервые предложен в работе [30] для случая $n = 1$ и заключается в замене нелинейной функции потерь её первым приближением с учетом малости параметров μ_1, \dots, μ_n .

Обоснование метода линеаризации в векторном случае основано на следующем результате из [21].

ТЕОРЕМА 4.1. *Если функция $g: B(z) \rightarrow \mathbb{R}$ определена и принадлежит классу $C^{(N)}(B(z), \mathbb{R})$ в окрестности $B(z) \subset \mathbb{R}^t$ точки $z \in \mathbb{R}^n$, а отрезок $[z; z + h]$ полностью содержится в $B(z)$, то имеет место равенство*

$$g(z + h) - g(z) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} (h_1 \partial_1 + \dots + h_n \partial_n)^k g(z) + r_{N-1}(z; h). \quad (4.5)$$

Здесь $r_{N-1}(z; h) = \frac{1}{N!} (h_1 \partial_1 + \dots + h_n \partial_n)^N g(z + \theta h)$ – остаточный член ряда Тейлора в форме Лагранжа, $\theta \in (0, 1)$, $\partial_i g(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial z_i}$ – частная производная функции $g(z_1, \dots, z_n)$ по i -й координате, $\partial_{ij} g(z) = \partial_i \partial_j g(z) = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z_j} \right)$ – вторая частная производная функции $g(z_1, \dots, z_n)$ по i -й и j -й координатам, $C^{(N)}(B(z), \mathbb{R})$ – пространство функций $g: B(z) \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих непрерывные частные производные до порядка N включительно.

Для $N = 2$ данный результат конкретизируется следующим образом. Разложение в ряд Тейлора функции $g(z)$ для $N = 2$ в окрестности точки z можно представить в виде

$$g(z_1 + h_1, z_2 + h_2) = g(z_1, z_2) + (h_1\partial_1 + h_2\partial_2)g(z) + r_1(z; h). \quad (4.6)$$

Остаточный член полученного ряда имеет вид

$$r_1(z; h) = \frac{1}{2}(h_1^2\partial_{11} + 2h_1h_2\partial_{12} + h_2^2\partial_{22})g(z + \theta h). \quad (4.7)$$

Обозначим линейную часть разложения через $g_l(z)$. Тогда (4.6) будет иметь вид

$$g(z_1 + h_1, z_2 + h_2) = g_l(z) + r_1(z; h). \quad (4.8)$$

Функцию $g_l(z)$ в (4.8) назовем линейризованной моделью нелинейной функции $g(z)$.

Для получения двухсторонней оценки остаточного члена ряда Тейлора оценим его по абсолютной величине. Здесь и далее под нормой вектора $z \in \mathbb{R}^t$ будем понимать

$$\| z \|_\infty = \max_{i=1, \dots, t} |z_i|.$$

В дальнейшем будем использовать именно эту норму и более простое обозначение $\| z \|$ для нее:

$$\begin{aligned} 2|r_1(z; h)| &= |(h_1^2\partial_{11} + 2h_1h_2\partial_{12} + h_2^2\partial_{22})g(z + \theta h)| \leq \\ &\leq |(h_1^2\partial_{11})g(z + \theta h)| + |(2h_1h_2\partial_{12})g(z + \theta h)| + |(h_2^2\partial_{22})g(z + \theta h)| \leq \\ &\leq \| h \|^2 (|\partial_{11}g(z + \theta h)| + 2|\partial_{12}g(z + \theta h)| + |\partial_{22}g(z + \theta h)|). \end{aligned} \quad (4.9)$$

По определению справедливо $(z_1 + \theta h_1, z_2 + \theta h_2) \in [z_1, z_1 + h_1] \times [z_2, z_2 + h_2]$. Из компактности множества $[z_1, z_1 + h_1] \times [z_2, z_2 + h_2]$ и непрерывности частных производных N -го порядка следует их ограниченность. Поэтому

$$r_1(z; h) = O(\| h \|^2). \quad (4.10)$$

4.2. Линеаризация функции потерь по вектору малых случайных параметров

Приведем две теоремы, в которых указаны условия, позволяющие воспользоваться методом линеаризации в случаях ограниченного и неограниченного носителя вектора случайных параметров.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть функция $f(x^\mu, u)$ дважды непрерывно дифференцируемая по x^μ , непрерывна по $u \in U$ вместе со своими производными по x^μ первого и второго порядков, носитель \mathcal{X} случайного вектора X ограничен и ноль является внутренней точкой для \mathcal{X} . Тогда справедливо

$$[f(X^\mu, u)]_\alpha = [f_i(X^\mu, u)]_\alpha + O(\|\mu\|^2). \quad (4.11)$$

Для доказательства теоремы 4.2 потребуются следующие результаты.

Введем в рассмотрение функции множеств:

$$\chi(S) = \inf_{x \in S} \Phi(x), \quad \varphi(S) = \sup_{x \in S} \Phi(x).$$

В [35] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.3. Для любого $\alpha \in (0, 1)$ справедливы соотношения:

$$\varphi_\alpha = \min_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \varphi(S) = \sup_{D \in \mathcal{F}^{1-\alpha}} \chi(D), \quad S_\alpha = \arg \min_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \varphi(S),$$

где \mathcal{F}_α – семейство всех α -доверительных множеств; $\mathcal{F}^{1-\alpha}$ – семейство всех $1 - \alpha$ супердоверительных множеств.

Определение супердоверительного множества дано в главе 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Рассмотрим функцию потерь вида $f(x^\mu, u)$. В соответствии с теоремой 4.1 заменим исходную функцию потерь ее разложением в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$f(x^\mu, u) = f_i(x^\mu, u) + r_1(x^\mu, u).$$

Здесь $f_i(x^\mu, u) = f(0, u) + (\mu_1 x_1 \partial_1 + \dots + \mu_n x_n \partial_n) f(0, u)$ – линейная по малым параметрам модель системы, $r_1(\mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n, u) = \frac{1}{2} (\mu_1 x_1 \partial_1 + \dots + \mu_n x_n \partial_n)^2 f(\theta x^\mu, u)$ – остаточный член ряда Тейлора в форме Лагранжа, $x \in \mathcal{X}$, $\theta \in (0, 1)$.

С целью компактности записи формул без ограничения общности рассмотрим случай $n = 2$. При оценке остаточного члена будем использовать ∞ -норму. Она дает более точную оценку по сравнению с использованием евклидовой нормы. Рассмотрим множество точек с постоянной евклидовой нормой, равной C . Они лежат на n -мерной сфере радиуса C .

Очевидно, что максимум модулей координат принадлежит отрезку $[C/\sqrt{2}, C]$, т. е. всегда меньше либо равен C – евклидовой норме вектора.

Найдем оценку модуля остаточного члена ряда:

$$\begin{aligned} 2|r_1(x^\mu; u)| &= |((x_1^\mu)^2 \partial_{11} + 2x_1^\mu x_2^\mu \partial_{12} + (x_2^\mu)^2 \partial_{22})f(\theta x^\mu, u)| \leq \\ &\leq |(x_1^\mu)^2 \partial_{11} f(\theta x^\mu, u)| + |2x_1^\mu x_2^\mu \partial_{12} f(\theta x^\mu, u)| + |(x_2^\mu)^2 \partial_{22} f(\theta x^\mu, u)|. \end{aligned}$$

Поскольку $x_i^\mu x_j^\mu \leq \max_k x_k^{\mu 2}$, $i, j, k = 1, 2$, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |(x_1^\mu)^2 \partial_{11} f(\theta x^\mu, u)| + |2x_1^\mu x_2^\mu \partial_{12} f(\theta x^\mu, u)| + |(x_2^\mu)^2 \partial_{22} f(\theta x^\mu, u)| \leq \\ \leq \|x^\mu\|^2 (|\partial_{11} f(\theta x^\mu, u)| + 2|\partial_{12} f(\theta x^\mu, u)| + |\partial_{22} f(\theta x^\mu, u)|). \end{aligned}$$

В силу непрерывности рассматриваемой функции и ее производных по своим аргументам сумма, стоящая в скобках, является ограниченной. Оценим вектор x^μ по норме:

$$\|(\text{diag}(x)\mu)\|^2 = (\text{diag}(x)\mu)^T \text{diag}(x)\mu = \mu^T \text{diag}(x)\text{diag}(x)\mu,$$

где $\text{diag}(x) = \text{diag}(x_1, \dots, x_t)$.

Для квадратичной формы $\mu^T \text{diag}(x)\text{diag}(x)\mu$ справедлива оценка:

$$\lambda_{\min}(\text{diag}(x)^2) \|\mu\|^2 \leq \mu^T \text{diag}(x)\text{diag}(x)\mu \leq \lambda_{\max}(\text{diag}(x)^2) \|\mu\|^2,$$

где λ_{\min} , λ_{\max} – минимальное и максимальное собственные числа матрицы. Поскольку матрица $\text{diag}(x)^2$ диагональная, минимальное и максимальное собственные числа равны минимальному и максимальному диагональным элементам соответственно. Поскольку вектор X имеет ограниченный носитель, все его компоненты могут быть оценены. Обозначим максимальное значение реализаций случайной величины X_i^2 через $c_1 = \max_{i=1, \dots, t, x \in \mathcal{X}} x_i^2$. Тогда может быть получена оценка

$$\mu^T \text{diag}(x)\text{diag}(x)\mu \leq \|\mu\|^2 \max_{i=1, \dots, t} x_i^2 \leq \|\mu\|^2 c_1.$$

Таким образом,

$$r_1(x^\mu; u) = O(\|\mu\|^2).$$

Пусть $f_l(x^\mu, u)$ – линейная часть разложения функции $f(x^\mu, u)$ в ряд Тейлора.

Из теоремы 4.3 следует, что

$$[f(X^\mu, u)]_\alpha = [f_l(X^\mu, u) + r_1(X^\mu, u)]_\alpha =$$

$$= \sup_{D \in \mathcal{F}^{1-\alpha}} \inf_{x \in D} (f_l(x, u) + r_1(x, u)) \geq \inf_{x \in D} (f_l(x, u) + r_1(x, u)). \quad (4.12)$$

Поскольку r_1 является остаточным членом в тейлоровском разложении, то существуют константы c_2 и c_3 :

$$c_2 \|\mu\|^2 \leq r_1(x^\mu, u) \leq c_3 \|\mu\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{x \in D} (f_l(x, u) + r_1(x, u)) \geq \inf_{x \in D} (f_l(x, u)) + c_2 \|\mu\|^2. \quad (4.13)$$

Возьмем \sup от левой части (4.12) и правой части (4.13), знак неравенства при этом останется прежним:

$$[f(X^\mu, u)]_\alpha \geq \sup_{D \in \mathcal{F}^{1-\alpha}} \inf_{x \in D} (f_l(x, u)) + c_2 \|\mu\|^2 = [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + c_2 \|\mu\|^2. \quad (4.14)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [f(X^\mu, u)]_\alpha &= \min_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \sup_{x \in S} (f_l(x, u) + r_1(x, u)) \leq \\ &\leq \sup_{x \in S} (f_l(x, u) + r_1(x, u)) \leq \sup_{x \in S} (f_l(x, u)) + c_3 \|\mu\|^2. \end{aligned}$$

Аналогично (4.14) получаем, что

$$[f(X^\mu, u)]_\alpha \leq \min_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \sup_{x \in S} (f_l(x, u)) + c_3 \|\mu\|^2 = [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + c_3 \|\mu\|^2. \quad (4.15)$$

Таким образом, из (4.14), (4.15) получаем

$$[f_l(X^\mu, u)]_\alpha + c_2 \|\mu\|^2 \leq [f(X^\mu, u)]_\alpha \leq [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + c_3 \|\mu\|^2.$$

Отсюда следует

$$[f(X^\mu, u)]_\alpha = [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + O(\|\mu\|^2).$$

Теорема доказана. \square

Учет неограниченности носителя можно выполнить с помощью следующего результата.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть η_k – последовательность случайных величин, сходящихся к случайной величине η по распределению ($\eta_k \xrightarrow{F} \eta$) и для $\alpha \in (0, 1)$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{[\eta]_\alpha < \eta < [\eta]_\alpha + \varepsilon\} > 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (4.16)$$

тогда справедливо

$$[\eta_k]_\alpha \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} [\eta]_\alpha. \quad (4.17)$$

Для доказательства теоремы 4.4 понадобится теорема из [2].

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $\xi_k(\omega) \xrightarrow{n.n.} \xi(\omega)$ и $H(s)$ – функция, непрерывная почти всюду относительно распределения случайной величины ξ (т.е. $H(s)$ непрерывна в каждой точке множества $B : \mathbf{P}(x \in B) = 1$). Тогда

$$H(\xi_k) \xrightarrow{n.n.} H(\xi).$$

В этой теореме $\xrightarrow{n.n.}$ обозначает сходимость почти наверно.

Рассмотрим функции $P(\varphi) = \sup_{u \in U} P_\varphi(u)$ и $\varphi(\alpha) = \inf_{u \in U} \varphi_\alpha(u)$. Эти функции являются неубывающими по своим аргументам. Для доказательства теоремы 4.5 нам понадобится следующая лемма из [24].

ЛЕММА 4.1. Пусть a и b – действительные числа: $b > a$ и $P_b(u) > P_a(u)$. Тогда $a \leq \varphi_\alpha(u) \leq b$ для любого $\alpha \in (P_a(u), P_b(u))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.4.

Введем обозначения для функций распределения: $F_n(x) = F_{\eta_n}(x)$, $F(x) = F_\eta(x)$. Выберем $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что точки $[\eta]_\alpha - \delta_1$, $[\eta]_\alpha + \delta_2$ являются точками непрерывности функции F . Очевидно, что справедливо $[\eta]_\alpha - \delta_1 < [\eta]_\alpha + \delta_2$. В силу (4.17) справедлива оценка $F([\eta]_\alpha + \delta_2) > F([\eta_n]_\alpha) \geq \alpha$, поскольку функция F строго возрастает. С другой стороны, из определения квантили следует, что $F([\eta]_\alpha - \delta_1) < \alpha$. Таким образом, получаем

$$F([\eta]_\alpha - \delta_1) < \alpha < F([\eta]_\alpha + \delta_2). \quad (4.18)$$

Согласно теореме 4.5 из сходимости $\eta_n \xrightarrow{F} \eta$ следует, что

$$F_n([\eta]_\alpha - \delta_1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F([\eta]_\alpha - \delta_1),$$

$$F_n([\eta]_\alpha + \delta_2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F([\eta]_\alpha + \delta_2).$$

Найдется такое $n = N$, начиная с которого неравенство (4.18) может быть преобразовано в

$$F_n([\eta]_\alpha - \delta_1) < \alpha < F_n([\eta]_\alpha + \delta_2).$$

Таким образом, выполнены условия леммы 4.1, из которой следует, что

$$[\eta]_\alpha - \delta_1 \leq [\eta_m]_\alpha \leq [\eta]_\alpha + \delta_2. \quad (4.19)$$

В силу произвольности параметров δ_1 и δ_2 можно выбирать их достаточно малыми. Отсюда следует сходимость

$$[\eta_n]_\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [\eta]_\alpha.$$

Теорема доказана. \square

В качестве случайного вектора с усеченным носителем будем использовать

$$X_k = \begin{cases} X, & \|X\| \leq k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда вектор малых случайных параметров с ограниченным носителем может быть представлен как $X_k^\mu = M \cdot X_k$.

Определим последовательность случайных величин

$$\eta_k = \eta_k(u) = f(X_k^\mu, u)$$

и случайную величину

$$\eta = \eta(u) = f(X^\mu, u).$$

Очевидно, что $\eta_k \xrightarrow{\text{П.Н.}} \eta$, поэтому $\eta_k \xrightarrow{F} \eta$, где \xrightarrow{F} обозначает сходимость по распределению. Пусть η при каждом u удовлетворяет условиям теоремы 4.4, тогда

$$[f(X_k^\mu, u)]_\alpha \xrightarrow{k \rightarrow \infty} [f(X^\mu, u)]_\alpha. \quad (4.20)$$

Из доказательства теоремы 4.2 следует, что

$$[f(X^\mu, u)]_\alpha = [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + r(u, \mu),$$

где

$$|r(u, \mu)| \leq c(u) \|\mu\|^2 \quad (4.21)$$

с непрерывной по u функцией $c(u)$. Если U – компакт, то переходя в (4.21) к максимуму по $u \in U$, в силу теоремы Вейерштрасса заключаем, что

$$\sup_{u \in U} |r(u, \mu)| \leq C \|\mu\|^2, \quad (4.22)$$

где $C = \max_{u \in U} c(u) < \infty$. Этот максимум достигается по теореме Вейерштрасса. Поэтому справедливо двухстороннее неравенство:

$$[f_l(X^\mu, u)]_\alpha - C\|\mu\|^2 \leq [f(X^\mu, u)]_\alpha \leq [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + C\|\mu\|^2.$$

Переходя в этом неравенстве к минимуму по $u \in U$, получаем

$$\inf_{u \in U} [f_l(X^\mu, u)]_\alpha - C\|\mu\|^2 \leq \inf_{u \in U} [f(X^\mu, u)]_\alpha \leq \inf_{u \in U} [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + C\|\mu\|^2.$$

Следовательно, при малых значениях μ справедливо

$$\inf_{u \in U} [f(X^\mu, u)]_\alpha \approx \inf_{u \in U} [f_l(X^\mu, u)]_\alpha$$

Отсюда следует справедливость следующего результата:

$$\min_{u \in U} [f(X_k^\mu, u)]_\alpha \approx \min_{u \in U} [f_l(X_k^\mu, u)]_\alpha. \quad (4.23)$$

Легко проверить, что из компактности K_α следует, что

$$\max_{x \in K_\alpha} f(x^\mu, u) = \max_{x \in K_\alpha} f_l(x^\mu, u) + O(\|\mu\|^2). \quad (4.24)$$

Поэтому в первом приближении (с точностью до $O(\|\mu\|^2)$) задачу (4.4) можно заменить минимаксной задачей

$$\max_{x \in K_\alpha} f(x^\mu, u) \rightarrow \min_{u \in U} \quad (4.25)$$

либо

$$\max_{x \in K_\alpha} f_l(x^\mu, u) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (4.26)$$

Отметим, что этот результат справедлив и в случае, когда множество U бесконечно, но носитель распределения случайного вектора X ограничен. В [11] показано, что при использовании полиэдральной аппроксимации α -ядра задача (4.26) сводится к задаче линейного программирования большой размерности, если $f_l(X^\mu, u)$ имеет билинейную структуру, а $u \in U$, где U – полиэдр.

4.3. Портфельная задача

На финансовом рынке существует целый ряд финансовых инструментов, позволяющих инвестировать в них капитал. Основные из них описаны в [47]. Рассмотрим инвестиционный портфель со сроком инвестирования T , состоящий из облигаций с фиксированным

доходом, купонные выплаты по которым производятся два раза в год. Будем считать, что множество доступных к покупке облигаций является конечным. Каждая купонная ценная бумага характеризуется номиналом L_i , временем погашения T_i (дней) и размером купона P_i , $i = 0, \dots, n$. Пусть нулевой индекс имеет облигация с самой далекой датой погашения (наибольшим T_i). Будем называть ее безрисковой ценной бумагой. Так же, как и в [28], будем считать, что весь высвобождаемый капитал (полученный от купонных выплат и при погашении облигаций) направляется на приобретение только безрисковой ценной бумаги. Если даты выплаты купонов и погашения рискованных облигаций не совпадают с датами выплаты купонов по безрисковой облигации, то цена безрисковой облигации в момент реинвестиций состоит из случайной стоимости облигации в последний, предшествующий текущему, момент выплаты ее купона и накопленного купонного дохода (НКД) – доли купона, накопленной с момента последней выплаты купона. Величина НКД обозначается Q_i , $i = 1, \dots, n$, и является постоянной для каждой из облигаций, поскольку зависит только от времени после выплаты купона по безрисковой бумаге до ближайшей выплаты купона по i -й ценной бумаге.

Пусть имеется капитал K в начальный момент времени, который необходимо распределить между $n + 1$ купонными облигациями. Пусть u_i – доля капитала, тогда $u_i K$ – капитал, вложенный в i -ю облигацию, c_i – цена i -й рискованной ценной бумаги в ближайший предшествующий или совпадающий с началом инвестирования момент выплаты купона по ней, η_j – цена безрисковой ценной бумаги в момент выплаты j -го купона, $j = 0, \dots, t$, причем $c_0 = \eta_0$. Тогда стоимость безрискового актива в момент выплаты купона или погашения i -й облигации в момент времени, следующий за моментом выплаты j -го купона по безрисковой ценной бумаге, равна $\xi_{ji} = \eta_j + Q_i$. Для долей капитала справедливо равенство

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1.$$

Это условие накладывает ограничение на использование капитала: необходимо вложить в облигации весь имеющийся капитал. Введем ограничение

$$u_i \geq 0,$$

запрещающее совершать операции ‘short-sales’ – запрет брать облигации в долг. Это ограничение обусловлено спецификой данной задачи. Если взять в долг некоторую облигацию, продать ее и на полученные средства приобрести другую, более выгодную облигацию, то

возможна ситуация, когда взятая в долг облигация прекратит свое существование. В таком случае после погашения взятой в долг бумаги нельзя приобрести ее, чтобы вернуть долг.

Для простоты будем полагать, что дата начала инвестирования совпадает с датой выплаты купона по безрисковому активу. В момент начала инвестирования приобретается безрисковая ценная бумага в количестве

$$u_0 C_0$$

и рискованные ценные бумаги в количестве

$$u_i C_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $C_0 = K/c_0$, $C_i = K/(c_i + P_i - Q_i)$ – объемы облигаций, которые можно приобрести за имеющийся капитал в момент начала инвестирования. Заметим, что при приобретении рискованных ценных бумаг в начальный момент их стоимость будет состоять из суммы их номинальной стоимости и НКД, равного $P_i - Q_i$.

В каждый следующий момент времени будут начисляться купоны, и на сумму купонов будет приобретаться безрисковый актив. Также после погашения облигаций все полученные средства будут перенаправляться на покупку безрискового актива. Размер капитала после окончания инвестирования будет равен:

$$\begin{aligned} K^* = & u_0 C_0 \prod_{j=1}^t \left(1 + \frac{P_0}{\xi_{0j}}\right) (P_0 + L_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{[T_i/183]} u_i C_i \frac{P_i}{\xi_{ik}} \prod_{j=k+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{\xi_{0j}}\right) (P_0 + L_0) + \\ & + \sum_{i=1}^n u_i C_i \frac{P_i}{\xi_{i[T_i/183]}} \prod_{j=[T_i/183]+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{\xi_{0j}}\right) (P_0 + L_0) \end{aligned}$$

Пусть случайная величина η_j имеет нормальное распределение с известными параметрами

$$\eta_j \sim N(m_j, \sigma_j^2), \quad \sigma_j \ll m_j.$$

Тогда случайная величина ξ_{ij} тоже имеет нормальное распределение

$$\xi_{ij} \sim N(Q_i + m_j, \sigma_j^2), \quad \sigma_j \ll Q_i + m_j.$$

Представим случайную величину ξ_{ij} в виде

$$\xi_{ij} = Q_i + m_j + X_j \sigma_j,$$

где $X_j \sim N(0, 1)$.

Произведем переобозначение переменных для упрощения выражения $\mu_{ij} = \sigma_j / (m_j + Q_i)$.

Тогда выражение, описывающее капитал после окончания срока инвестирования, примет вид:

$$\begin{aligned}
 K^* = & u_0 C_0 \prod_{j=1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \frac{1}{1 + X_j \mu_{0j}} \right) (P_0 + L_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{[T_i/183]} u_i C_i \frac{P_i}{m_k + Q_i} \times \\
 & \times \frac{1}{1 + X_k \mu_{ik}} \prod_{j=k+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \frac{1}{1 + X_j \mu_{0j}} \right) (P_0 + L_0) + \\
 & + \sum_{i=1}^n u_i C_i \frac{P_i}{m_{0[T_i/183]} + Q_i} \frac{1}{1 + X_{[T_i/183]} \mu_{i[T_i/183]}} \prod_{j=[T_i/183]+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_{0j}} \frac{1}{1 + X_j \mu_{0j}} \right) (P_0 + L_0).
 \end{aligned}$$

Линеаризуем данное выражение по случайной величине X_j , $j = \overline{1, t}$,

$$\begin{aligned}
 K_l^* = & u_0 C_0 \left(\prod_{j=1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \right) + \sum_{j=1}^t X_j \mu_{0j} \frac{P_0}{m_j} \prod_{i \neq j, i=1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_i} \right) \right) (P_0 + L_0) + \\
 & + \sum_{i=1}^n u_i C_i \sum_{k=0}^{[T_i/183]} \frac{P_i}{m_k + Q_i} \times \\
 & \times \left(\prod_{j=k+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \right) + \sum_{j=k+1}^t \frac{P_0}{m_j} X_j \mu_{0j} \prod_{q \neq j, q=k+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_q} \right) \right) (P_0 + L_0) + \\
 & + \sum_{i=1}^n u_i C_i \sum_{k=0}^{[T_i/183]} \frac{P_i}{m_k + Q_i} X_k \mu_{ik} \prod_{j=k+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \right) (P_0 + L_0) + \\
 & + \sum_{i=1}^n u_i C_i \frac{P_i}{m_{[T_i/183]} + Q_i} \times \\
 & \times \left(\prod_{j=[T_i/183]+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \right) + \sum_{j=[T_i/183]+1}^t \frac{P_i}{m_j} X_j \mu_{0j} \prod_{q \neq j, q=[T_i/183]+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_q} \right) \right) (P_0 + L_0) + \\
 & + \sum_{i=1}^n u_i C_i \frac{P_i}{m_{[T_i/183]}} X_{[T_i/183]} \mu_{i[T_i/183]} \prod_{j=[T_i/183]+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \right) (P_0 + L_0).
 \end{aligned}$$

Годовой доход портфеля равен

$$D = (K_l^* - K) \cdot 365/T.$$

Учтем, что $K = \sum_{i=0}^n C_i u_i$. Представим доход портфеля в векторно-матричной форме:

$$D = u^T b + u^T A X,$$

где

$$u = [u_0, u_1, \dots, u_n]^T,$$

$$b = [b_0, b_1, \dots, b_n]^T,$$

$$A = \{A_{ij}\}_{i=0, \dots, n, j=1, \dots, t},$$

$$X = [X_1, \dots, X_t]^T,$$

$$b_0 = \left(C_0 \prod_{j=1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \right) (P_0 + L_0) - C_0 \right) \cdot 365/T,$$

$$b_i = \left(C_i \sum_{k=0}^{[T_i/183]} \frac{P_i}{m_k + Q_i} \prod_{j=k+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \right) (P_0 + L_0) + \right. \\ \left. + C_i \frac{P_i}{m_{[T_i/183]} + Q_i} \prod_{j=[T_i/183]+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \right) (P_0 + L_0) - C_i \right) \cdot 365/T,$$

$$A_{0j} = C_0 \mu_{0j} \frac{P_0}{m_j} \prod_{i \neq j, i=1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_i} \right) (P_0 + L_0) \cdot 365/T,$$

$$A_{ij, i \neq 0} = \left(C_i \sum_{k=0}^{[T_i/183]} \frac{P_i}{m_k + Q_i} \frac{P_0}{m_j} \mu_{0j} \prod_{q \neq j, q=k+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_q} \right) (P_0 + L_0) + \right. \\ \left. + C_i \frac{P_i}{m_j + Q_i} \mu_{ij} \prod_{k=j+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_k} \right) (P_0 + L_0) + C_i \frac{P_i}{m_{[T_i/183]} + Q_i} \frac{P_i}{m_j} \mu_{0j} \times \right. \\ \left. \times \prod_{q \neq j, q=[T_i/183]+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_q} \right) (P_0 + L_0) + \right. \\ \left. + C_i \frac{P_i}{m_{[T_i/183]}} \mu_{i[T_i/183]} \prod_{j=[T_i/183]+1}^t \left(1 + \frac{P_0}{m_j} \right) (P_0 + L_0) \right) \cdot 365/T.$$

Учитывая, что функция дохода имеет билинейную структуру, для решения задачи

$$[-D]_{\alpha} \rightarrow \min_{u \in U}$$

можно применять методологию из главы 3.

4.4. Выводы по главе 4

1. Метод линеаризации, позволяющий решать задачи анализа и оптимизации с квантильным критерием с функцией потерь, нелинейно зависящей от вектора малых случайных параметров, обоснован для векторного случая. Доказано, что ошибка, возникающая при такой замене, имеет порядок квадрата нормы вектора малых детерминированных параметров.

2. Построена линеаризованная модель портфельных инвестиций в купонные облигации с учетом риска, позволяющая применить к рассматриваемой задаче подход, описанный в главе 3.

Глава 5. Вероятностный анализ рассеивания концов баллистических траекторий

В разделе 5.1. приведена постановка задачи, а также введены основные понятия, используемые в настоящей главе. В разделе 5.2. описаны используемые системы координат, а также приведены матрицы переходов между ними. В разделе 5.3. приведены формулы для расчета неизвестных параметров по заданным параметрам. В разделе 5.4. описано применение метода Монте-Карло для решения задачи оценивания кругового вероятного отклонения. В качестве альтернативы методу Монте-Карло предлагается использовать метод линеаризации. В разделе 5.5. приведено аналитическое обоснование метода покомпонентной линеаризации. В разделе 5.6. приведены формулы для расчетов по линеаризованной модели. В разделе 5.7. приведены результаты расчетов по методу Монте-Карло и методу линеаризации. Произведено сравнение результатов, полученных разными методами. В разделе 5.1. приводятся выводы по главе 5.

5.1. Постановка задачи

Рассматривается возмущенное движение материальной точки в центральном гравитационном поле Земли. Начальные условия движения характеризуются детерминированными исходными координатами на поверхности Земли, заданными радиус-вектором R , модулем номинальной начальной скорости $\|V_0\|$, азимутом δ и углом бросания θ . Далее для удобства вместо азимута используется угол $\nu = \frac{\pi}{2} - \delta$. Предполагается, что конец траектории R_k тоже лежит на поверхности Земли. Начальная скорость V_n отличается от начальной номинальной тем, что учитывает скорость вращения Земли вокруг своей оси. Значение величины $\|V_0\|$ и различные значения угла θ для проведения расчетов будут найдены по задаваемой дальности полета в соответствии с методикой, описанной ниже в разделе 5.4.

Полагается, что учет возмущений осуществляется лишь за счет возмущения вектора скорости.

Возмущенный вектор скорости определяется формулой $V = V_n + \Delta V$, где V_n - заданный детерминированный (номинальный) вектор скорости, ΔV - вектор возмущения

скорости. Предполагается, что компоненты вектора ΔV независимы и одинаково распределены по нормальному закону $V \sim N(0, I_3 \mu^2)$. Здесь I_3 – трехмерная единичная матрица, а значение параметра μ считается малым по сравнению со значением $\|V_n\|$. Подобная модель возмущений использовалась в работе [18] в постановке задачи вероятностного анализа возмущенного баллистического полета. Считается, что $\|V_n\|$ меньше первой космической скорости и в отсутствии случайных возмущений (т.е. при $\Delta V \equiv 0$) материальная точка в соответствии с кеплеровой теорией будет двигаться по эллиптической траектории, которая в некоторый момент времени T_k пересекает земную поверхность в точке падения R_{kn} . Из-за учета случайных возмущений скорости происходит рассеивание точки падения, которую обозначим через $R_k = R_k(\Delta V)$. Вектор R_k является случайным из-за случайности ΔV . В качестве характеристики размеров области рассеивания выберем круговое вероятное отклонение (КВО) κ , которое определяется условием:

$$\mathbf{P} (\|R_k - R_{kn}\| \leq \kappa) = \frac{1}{2}, \quad (5.1)$$

где \mathbf{P} - вероятность. Величина κ подлежит оценке. Отметим, что зависимость R_k от приращения скорости ΔV является нелинейной из-за нелинейности аналитических зависимостей теории кеплеровского движения. Это приводит к негауссовости закона распределения вектора R_k и нетривиальности задачи вычисления κ . Единственным работоспособным инструментом здесь представляется метод Монте-Карло, основанный на прямом статистическом моделировании возмущенных траекторий и оценке κ по полученной выборке значений случайной величины $\|R_k - R_{kn}\|$. С учетом того, что отклонение конца возмущенной траектории от номинальной точки падения по высоте пренебрежимо мало, будем рассматривать двумерный вектор отклонения. Компонентами двумерного вектора отклонения являются отклонение по дальности и отклонение по боку. Далее производится линейаризация компонент вектора отклонения. Полученная после линейаризации модель линейна по вектору возмущения скорости. Оценка κ в случае линейаризованной модели определяется как квантиль уровня $\frac{1}{2}$ нормы двумерного вектора отклонений. В случае, когда возмущения скорости имеют нормальное распределение, величина может быть найдена относительно легко. Численный метод нахождения квантили заданного уровня для нормы двумерного гауссовского случайного вектора предложен в [32]. Подобный подход к оценке КВО был использован в [18], но без оценки его точности. Данная глава как раз и посвящена данному вопросу, т.е. оценке точности метода линейаризации по сравнению с ме-

тодом Монте-Карло применительно к задаче вероятностного анализа рассеивания концов баллистических траекторий. Расчеты производятся как с учетом, так и без учета вращения Земли вокруг своей оси.

5.2. Используемые системы координат

Исходной системой координат $Oxyz$ является абсолютная геоцентрическая система координат (АГСК), жестко связанная с Землей, в которой точка O – центр Земли, ось Oz направлена вдоль мгновенной оси вращения Земли на северный полюс, ось Ox направлена на точку пересечения начального меридиана с плоскостью экватора, а ось Oy лежит в плоскости экватора. Направление оси Oy выбирается так, чтобы векторы, задающие оси Ox , Oy , Oz , составляли правую тройку. Для простоты будем считать, что Земля имеет форму шара.

При учете вращения Земли точка падения смещается против вращения Земли по сравнению с её положением на невращающейся Земле. Угловую скорость вращения Земли будем считать постоянной. Введем инерциальную систему координат $Ox^*y^*z^*$, которая будет совпадать с АГСК в начальный момент времени. Эта система координат совпадает с АГСК на всём протяжении полета, если вращение Земли не учитывается. Оси Oz и Oz^* совпадают в любой момент времени. Если вращение Земли учитывается, то преобразование любого вектора X из исходной системы координат в систему координат $Ox^*y^*z^*$ осуществляется следующим образом:

$$X = A^*X^*, A^* = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \psi = \frac{2\pi T}{T_{rot.}} \quad (5.2)$$

где $T_{rot.} = 86\,400[\text{с}]$ – время полного обращения Земли вокруг своей оси, T – время полета (будет определено ниже). Для проведения расчетов удобно перейти к вспомогательной системе координат, в которой вся траектория полета будет лежать в плоскости, заданной двумя осями системы. Для этого введем новую систему координат $Ox'y'z'$, и определим направления векторов правой тройки e_1', e_2', e_3' , задающих её оси:

$$e_1' = \frac{[001]^T \times R}{\| [001]^T \times R \|}, e_3' = \frac{R}{R_E}, e_2' = e_3' \times e_1' \quad (5.3)$$

где $a \times b$ – векторное произведение векторов a и b , $R_E = 6371$ [км.] – радиус Земли. Вектор положения точки X^* в новой системе координат может быть найден путем умножения на матрицу перехода:

$$X' = A'X^*, A' = \begin{bmatrix} (e'_1)^T \\ (e'_2)^T \\ (e'_3)^T \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Поскольку в начальный момент времени системы координат $Oxyz$ и $Ox^*y^*z^*$ совпадают, то и координаты векторов в этих системах тоже совпадают, поэтому из системы координат $Oxyz$ можно сразу перейти к системе $Ox'y'z'$. Но при нахождении координат точки падения с учетом вращения Земли необходимо из системы координат $Ox'y'z'$ перейти сначала в систему координат $Ox^*y^*z^*$, а уже из неё в систему координат $Oxyz$, проделав соответствующие обратные преобразования. Далее, определим систему координат $Ox''y''z''$, в которой рассматриваемое движение является движением в плоскости $Ox''z''$. Для этого осуществим поворот базисных векторов e'_1, e'_2 на угол ν против часовой стрелки вокруг оси Oz' . При этом ось Oz'' совпадает с осью Oz' . Переход от системы координат $Ox'y'z'$ к системе $Ox''y''z''$ осуществляется путем умножения вектора на матрицу перехода:

$$X'' = A''X', A'' = \begin{bmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

При решении задачи генерации исходных данных матрицы A' и A'' понадобятся только до момента, пока не определены координаты вектора скорости. После определения координат вектора скорости для упрощения вычислений введем матрицу \tilde{A} перехода из системы координат $Ox^*y^*z^*$ в систему $Ox''y''z''$. Эта матрица будет однозначно определяться по радиус-вектору точки начала движения и вектору скорости, заданным в АГСК:

$$\tilde{e}_3 = \frac{R}{R_E}, \tilde{e}_2 = \frac{R \times V}{\|R \times V\|}, \tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 \times \tilde{e}_3, X'' = \tilde{A}X^*, \tilde{A} = \begin{bmatrix} (\tilde{e}_1)^T \\ (\tilde{e}_2)^T \\ (\tilde{e}_3)^T \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Для определения расстояния от конца номинальной траектории до реальной точки падения материальной точки введем систему координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, ось $O\bar{z}$ которой проходит

через номинальную точку падения и центр Земли. Матрица перехода может быть определена по радиус-векторам точки приземления и точки старта следующими соотношениями:

$$\bar{e}_3 = \frac{R_k}{R_E}, \bar{e}_1 = \frac{R_k \times R}{\|R_k \times R\|}, \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1, \bar{X} = \bar{A}X, \bar{A} = \begin{bmatrix} (\bar{e}_1)^T \\ (\bar{e}_2)^T \\ (\bar{e}_3)^T \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

В этой системе координат при расчете КВО разность номинального и возмущенного векторов по третьей компоненте не существенна, поэтому будем рассматривать отклонения в плоскости $O\bar{x}\bar{y}$. Отклонения траекторий возмущенного движения по дальности ΔL будем откладывать по оси $O\bar{y}$, а отклонения по боку ΔB по оси $O\bar{x}$.

5.3. Генерация исходных данных для расчетов

В данном разделе приведены вспомогательные соотношения теории Кеплера [48], позволяющие в плоском случае по заданной максимальной дальности полета L_{\max} определяется пучок из m навесных траекторий одинаковой скорости, характеризующихся различными значениями $\theta_j, j = 1, \dots, m$, и задаваемыми значениями $L_j \leq L_{\max}$ дальности полета, где L_{\max} – максимальная дальность. Значение угловой дальности полета F в радианах связано с дальностью полета L следующим соотношением:

$$F_j = \frac{L_j}{R_E}, j = \overline{1, m}. \quad (5.8)$$

По номинальным значениям дальностей определим номинальные точки падения в системе координат $Ox''y''z''$:

$$R''_{knj} = (R_E \sin F_j \quad 0 \quad R_E \cos F_j)^T. \quad (5.9)$$

Определим оптимальный угол бросания, под которым должна быть запущена материальная точка, чтобы угловая дальность была равна L_{\max} , а скорость в начальный момент времени была бы минимальной (траектории минимальной скорости, одинаковой дальности):

$$\theta_{\max} = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} \left(\operatorname{tg} \frac{F_{\max}}{2} + \frac{\bar{h}}{\sin F_{\max}} \right), F_{\max} = \frac{L_{\max}}{R_E}, \bar{h} = \frac{\|R\| - \|R_{kn}\|}{\|R_{kn}\|}, \quad (5.10)$$

где R_{kn} – радиус-вектор номинальной точки падения, R – радиус-вектор начальной точки. Поскольку точки старта и падения лежат на поверхности Земли, то параметр \bar{h} равен нулю. С учетом этого выражение для вычисления угла бросания можно представить в более простом виде:

$$\theta_{\max} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{F_{\max}}{2} \right). \quad (5.11)$$

Для вычисления углов бросания для остальных $m - 1$ дальностей полета понадобится значение модуля начальной скорости. При вычислении вектора скорости с учетом вращения Земли необходимо к номинальному начальному вектору скорости $V_0 = (V_1 \ V_2 \ V_3)^T$ прибавить вектор скорости точки старта на поверхности Земли V_E , обусловленный вращением Земли, и лежащий в плоскости, касательной к поверхности Земли в этой точке, параллельно плоскости экватора:

$$V_n = V_0 + V_E. \quad (5.12)$$

Абсолютное значение минимальной номинальной скорости определяется по формуле [48, (11.5)], которая после учета того, что точки старта и падения находятся на одном расстоянии от центра Земли, примет вид:

$$\|V_n\|^2 = \frac{2\pi_0}{R_E \left(\sin 2\theta_{\max} \operatorname{ctg} \frac{F_{\max}}{2} + 2 \cos^2 \theta_{\max} \right)}. \quad (5.13)$$

Для вычисления углов $\theta_j, j = \overline{1, m-1}$ необходимо решить квадратное уравнение, полученное из выражения, которое связывает между собой номинальную скорость, угол бросания и угловую дальность полета:

$$\operatorname{tg}^2 \theta_j - \operatorname{tg} \theta_j \operatorname{ctg} \frac{F_j}{2} \frac{\|V_n\|^2 R_E}{\pi_0} + 1 - \frac{\|V_n\|^2 R_E}{\pi_0} = 0, j = \overline{1, m-1}. \quad (5.14)$$

Решением данного квадратного уравнения является пара корней. Навесным траекториям соответствует корень:

$$\theta_j = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{F_j}{2} \frac{\|V_n\|^2 R_E}{2\pi_0} + \frac{\sqrt{d_j}}{2} \right), \quad (5.15)$$

где $d_j = \operatorname{ctg}^2 \frac{F_j}{2} \frac{\|V_n\|^4 R_E^2}{\pi_0^2} - 4 + 4 \frac{\|V_n\|^2 R_E}{\pi_0}, j = \overline{1, m-1}$.

Определим компоненты вектора скорости V_n учитывая, что его направление задано углом бросания θ_j и азимутом δ . Для удобства перейдем в систему координат $Ox'y'z'$. В этой системе координат вектор V'_E имеет лишь первую ненулевую компоненту. Введем обозначение для абсолютного значения вектора скорости Земли в точке старта $V^E = \frac{2\pi\|R_{Oz}\|}{T_{rot}}$, где R_{Oz} – расстояние от точки старта до оси Oz в АГСК. Тогда вектор V''_n имеет вид:

$$V''_n = \begin{bmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V'_1 + V^E \\ V'_2 \\ V'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (V'_1 + V^E) \cos \nu + V'_2 \sin \nu \\ -(V'_1 + V^E) \sin \nu + V'_2 \cos \nu \\ V'_3 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Поскольку в системе координат $Ox''y''z''$ движение осуществляется в плоскости $Ox''z''$, то вторая компонента вектора скорости равна нулю. Угол θ_j – угол бросания, его котангенс является отношением первой компоненты вектора скорости к третьей компоненте. Евклидова норма вектора номинальной скорости V_n должна совпадать со значением минимальной скорости. По этим трем условиям составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} \theta_j = \frac{(V'_1 + V^E) \cos \nu + V'_2 \sin \nu}{V'_3}, \\ (V'_1 + V^E) \sin \nu = V'_2, \\ (V'_1 + V^E)^2 + (V'_2)^2 + (V'_3)^2 = \|V_n\|^2. \end{cases} \quad (5.17)$$

Данная система является разрешимой относительно компонент вектора скорости V' , поэтому для неё удастся получить аналитическое решение:

$$\begin{cases} V'_1 = \cos \theta_j \cos \nu \|V_n\| - V^E, \\ V'_2 = \cos \theta_j \sin \nu \|V_n\|, \\ V'_3 = \sin \theta_j \|V_n\|. \end{cases} \quad (5.18)$$

Вектор номинальной скорости в начальный момент времени в АГСК определяется по следующей формуле:

$$V_n = (A')^T V'_n \quad (5.19)$$

Также при учете вращения Земли, точка конца траектории полета смещается против вращения Земли на расстояние, пропорциональное времени полета. Для учета вращения Земли по найденным значениям скорости и угла бросания определим время полета.

Для этого воспользуемся формулами [48, (9.59, 9.61)], поскольку рассматривается движение по эллиптической траектории между точками, лежащими по разные стороны от её фокуса:

$$T_j = T_p (\pi - 2\beta_j + 2\gamma_j). \quad (5.20)$$

Здесь

$\beta_j = \arcsin \frac{1-2k}{e_j}$, $\gamma_j = e_j \cos \beta_j$, $T_p = \sqrt{\frac{a^3}{\pi_0}}$, $e_j = \sqrt{1 - 4k(1-k) \cos \theta_j}$, $a = \frac{R_E}{2(1-k)}$, $k = \frac{\|V_n\|^2 R_E}{2\pi_0}$, где e – эксцентриситет, a – большая полуось эллиптической орбиты. Приведенные формулы вытекают из [48, (9.59, 9.61)] с учетом того, что концы всех рассматриваемых траекторий находятся на поверхности Земли.

5.4. Расчет КВО методом Монте-Карло

КВО κ является квантилью уровня $1/2$ случайной величины, характеризующей расстояние между расчетной и реальной точками падения. Нахождение точного значения этой квантили не представляется возможным, поэтому будем строить её выборочную оценку, которую определим с помощью метода статистического моделирования. Расчеты будут производиться для дальностей в диапазоне от $L_{\max}/2$ до L_{\max} с заданным шагом, для различных углов бросания и минимальной скорости, определенных в предыдущем разделе., т.е. в данном разделе номер j комплекта исходных данных считается фиксированным и по этой причине в формулах опущен. Для фиксированных номинальных значений дальности и вектора невозмущенной скорости, найденных в разделе 5.3., определим координаты точек падения с учетом случайных возмущений вектора скорости. Для этого к вектору номинальной скорости прибавим вектор возмущений, имеющий нормальное распределение с независимыми одинаково распределенными компонентами, имеющими нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией μ^2 :

$$V_i = V_{ni} + \Delta V_i, \Delta V_i \sim N(0, I_3 \mu^2), \quad (5.21)$$

где $i = \overline{1, K}$ – номер моделируемой реализации, I_3 – единичная матрица размера 3×3 . Найдем матрицы \tilde{A}_i , которые являются матрицами \tilde{A} для каждой реализации вектора скорости $V_i, i = \overline{1, n}$. Перейдем в систему координат, где движение при фиксированной реализации вектора скорости является плоским и происходит в плоскости $O\tilde{x}_i\tilde{z}_i$. В силу

этого факта вектор скорости имеет лишь две ненулевые компоненты: $V_i'' = (V_{xi}'' \ 0 \ V_{zi}'')^T$. Угол бросания для каждой реализации вычислим по известным компонентам скорости: $\theta_i = \arctg \frac{V_{zi}''}{V_{xi}''}$. Определим угловые дальности F_i , $i = \overline{1, K}$ по формуле [48, (7.35)]:

$$F_i = 2 \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_i}{\frac{\pi_0}{\cos^2 \theta_i R_E \|V\|^2} - 1} \right). \quad (5.22)$$

Как и отмечалось ранее, плоское движение осуществляется в плоскости $Ox''z''$, поэтому координаты точки конца номинальной траектории имеют следующий вид:

$$R_{ki}'' = (R_E \sin F_i, \ 0, \ R_E \cos F_i)^T. \quad (5.23)$$

Осуществим обратный переход к системе координат $Oxyz$:

$$R_{kn} = A^{*T} \tilde{A}^T R_{kn}'', \quad R_{ki} = A^{*T} \tilde{A}_i^T R_{ki}'', \quad i = \overline{1, K}. \quad (5.24)$$

Получим статистическую выборку $\Delta_i = \|R_{ki} - R_{kn}\|$ реализаций случайной величины $\Delta = \|R_k - R_{kn}\|$, являющейся расстоянием от номинальной точки падения до фактического места касания поверхности Земли. Выборочную оценку функции квантили уровня α можно определить по формуле (1.22).

Найденная оценка функции квантили и будет являться статистической оценкой для КВО, если положить $\alpha = \frac{1}{2}$.

5.5. Обоснование метода покомпонентной линеаризации

Как отмечалось выше, КВО κ является квантилью уровня $1/2$ распределения случайной величины ξ .

Рассмотрим случайную величину $\|\bar{R}_{ki} - \bar{R}_{kn}\|$ в системе координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, в которой отклонение траектории возмущенного движения по дальности ΔL будем откладывать по оси $O\bar{y}$, а отклонение по боку ΔB по оси $O\bar{x}$. Поскольку отклонения вдоль оси $O\bar{z}$ незначительны, то опустим их и будем рассматривать отклонения концов возмущенных траекторий от номинальной точки падения в двумерном случае в плоскости $O\bar{x}\bar{y}$. Тогда справедливо следующее: $\|\bar{R}_k - \bar{R}_{kn}\| = \left\| \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\Delta B^2 + \Delta L^2}$. С учетом этого вероятностное ограничение (5.1) может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{P} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} \right\| \leq \kappa \right\} = 1/2.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} \right\| \leq \kappa \right\} = \mathbf{P} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} \right\|^2 \leq \kappa^2 \right\}.$$

Поэтому КВО может быть найдено из условия

$$\kappa^2 = \left[\left\| \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} \right\|^2 \right]_{\frac{1}{2}}.$$

Для дальнейших выкладок потребуются следующие результаты.

ЛЕММА 5.1. Пусть ξ, η – случайные величины, $P_\varphi = \mathbf{P} \{ \xi < \varphi \}$, $P_\varphi^1 = \mathbf{P} \{ \eta < \varphi \}$, причем $P_\varphi \geq P_\varphi^1, \forall \varphi$, тогда: $[\eta]_\alpha \geq [\xi]_\alpha, \forall \alpha \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1. Введем обозначение $[\eta]_\alpha = \varphi_\alpha$. Тогда $\mathbf{P} \{ \xi \leq \varphi_\alpha \} = P_{\varphi_\alpha} \geq P_{\varphi_\alpha}^1 = \alpha$. Отсюда следует $[\xi]_\alpha = \min \{ \varphi : P_\varphi \geq \alpha \} \leq \min \{ \varphi : P_\varphi^1 \geq \alpha \} = [\eta]_\alpha$, то есть $[\xi]_\alpha \leq [\eta]_\alpha$. Лемма доказана. \square

ЛЕММА 5.2. Пусть X и Y – случайные величины, причем Y неотрицательна, $\mu > 0$ – действительное число. Тогда для любого действительного числа $R > 0$ справедлива двухсторонняя оценка:

$$\mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu R \} - \varepsilon_R \leq \mathbf{P} \{ X + \mu Y \leq \varphi \} \leq \mathbf{P} \{ X \leq \varphi \}, \text{ где } \varepsilon_R = \mathbf{P} \{ Y > R \} \quad (5.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. Оценим вероятность $\mathbf{P} \{ X + \mu Y \leq \varphi \}$. Учитывая, что $Y \geq 0$, получим $\mathbf{P} \{ X + \mu Y \leq \varphi \} = \mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu Y \} \leq \mathbf{P} \{ X \leq \varphi \}$. Тем самым обосновано правое неравенство в (5.25). Построим оценку снизу. $\mathbf{P} \{ X + \mu Y \leq \varphi \} = P_{R1} + P_{R2}$, где $P_{R1} = \mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu Y, Y \leq R \}$, $P_{R2} = \mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu Y, Y > R \}$. Построим оценки для обоих слагаемых. Для первого слагаемого имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} P_{R1} &\geq \mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu R, Y \leq R \} = \mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu R, Y \leq R \} + \mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu R, Y > R \} - \\ &\quad - \mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu R, Y > R \} = \mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu R \} - \mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu R, Y > R \} \geq \\ &\quad \geq \mathbf{P} \{ X \leq \varphi - \mu R \} - \varepsilon_R \end{aligned}$$

$$P_{R1} \leq \mathbf{P}\{X + \mu Y \leq \varphi\} \leq \mathbf{P}\{X \leq \varphi\}$$

Для второго: $0 \leq P_{R2} \leq \mathbf{P}\{Y > R\} = \varepsilon_R$. В итоге получаем неравенство: $\mathbf{P}\{X \leq \varphi - \mu R\} - \varepsilon_R \leq \mathbf{P}\{X + \mu Y \leq \varphi\} \leq \mathbf{P}\{X \leq \varphi\}$. Лемма доказана. \square

ЛЕММА 5.3. Пусть X и Y - случайные величины, причем Y отрицательна, $\mu > 0$ - действительное число. Тогда для любого действительного числа $R > 0$ справедлива двухсторонняя оценка:

$$\mathbf{P}\{X \leq \varphi\} \leq \mathbf{P}\{X + \mu Y \leq \varphi\} \leq \mathbf{P}\{X \leq \varphi + \mu R\} + \delta_R, \text{ где } \delta_R = \mathbf{P}\{Y < -R\}.$$

Доказательство леммы 5.3 аналогично доказательству леммы 5.2.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть X и Y - случайные величины, μ - детерминированный параметр. Тогда для $\forall R > 0$, \exists константы $\delta_R, \varepsilon_R : \delta_R, \varepsilon_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, для любого $\alpha \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$[X]_{\alpha - \delta_R} - \mu R \leq [X + \mu Y]_{\alpha} \leq [X]_{\alpha + \varepsilon_R} + \mu R.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Введем обозначение:

$$Y = Y^- + Y^+, \quad Y^- = \min\{Y, 0\} \leq 0, \quad Y^+ = \max\{Y, 0\} \geq 0.$$

С учетом этого: $\mathbf{P}\{X + \mu Y \leq \varphi\} = \mathbf{P}\{X \leq \varphi - \mu(Y^- + Y^+)\}$. Тогда справедлива следующая двухсторонняя оценка вероятности:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X \leq \varphi - \mu R\} - \varepsilon_R &\leq \mathbf{P}\{X \leq \varphi - \mu Y^+\} \leq \mathbf{P}\{X \leq \varphi - \mu(Y^- + Y^+)\} \leq \\ &\leq \mathbf{P}\{X \leq \varphi - \mu Y^-\} \leq \mathbf{P}\{X \leq \varphi + \mu R\} + \delta_R. \end{aligned}$$

Рассмотрим левую часть неравенства $\mathbf{P}\{X \leq \varphi - \mu R\} - \varepsilon_R \leq \mathbf{P}\{X + \mu Y \leq \varphi\}$. Согласно лемме 5.1 из него следует, что $[X + \mu Y]_{\alpha} \leq [X + \mu R]_{\alpha + \varepsilon_R} = [X]_{\alpha + \varepsilon_R} + \mu R$. Аналогичные рассуждения справедливы и для правой части неравенства: из $\mathbf{P}\{X + \mu Y \leq \varphi\} \leq \mathbf{P}\{X \leq \varphi + \mu R\} + \delta_R$ следует $[X + \mu Y]_{\alpha} \geq [X - \mu R]_{\alpha - \delta_R} = [X]_{\alpha - \delta_R} - \mu R$. Теорема доказана. \square

Применим теорему 5.1 для нахождения оценки квантили квадрата нормы отклонения. Для этого найдем разложение первого порядка вектора $\begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix}$ в ряд Тейлора по

возмущению вектора скорости: $\begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} = D\Delta\bar{V} + r_1$, где D – матрица Якоби (матрица баллистических производных), $D\Delta\bar{V}$ – линейная часть разложения, r_1 – остаточный член в форме Лагранжа, $\Delta V = \mu\xi$, $\xi \sim N(0, I_3)$, $\Delta\bar{V} = \bar{A}\Delta V = \mu\bar{A}\xi = \mu\bar{\xi}$, $r_1 = O(\mu^2)$. Поскольку матрица \bar{A} является ортогональной, то вектор $\bar{\xi} = \bar{A}\xi$ имеет нормальное распределение: $\bar{\xi} \sim N(0, I_3)$. Возведем в квадрат норму вектора $\begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix}$: $\left\| \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} \right\|^2 = \Delta B^2 + \Delta L^2$. С

другой стороны $\left\| \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} \right\|^2 = \|D\Delta V + r_1\|^2 = \|D\Delta V\|^2 + \|r_1\|^2 + 2(D\Delta V, r_1)$. Здесь $D\Delta\bar{V}$ имеет порядок малости μ , r_1 – порядок μ^2 . Исходя из этого можно определить порядки слагаемых, входящих в квадрат нормы вектора отклонения. Первое слагаемое $\|D\Delta V\|^2$ имеет порядок малости μ^2 , $2(D\Delta V, r_1)$ – порядок малости μ^3 , $\|r_1\|^2$ – порядок малости μ^4 . В соответствии с этим справедливо следующее представление: $\left\| \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} \right\|^2 = \mu^2(X + \mu Y + \mu^2 Z)$, где X, Y, Z – случайные величины одного порядка. Оценим квантиль уровня p случайной функции $X + \mu Y + \mu^2 Z$. Пусть для неё выполнено условие теоремы $\mathbf{P}\{[X]_p < X + \mu Y + \mu^2 Z < [X]_\alpha + \varepsilon\} > 0$, $\forall \varepsilon > 0$. Сделаем замену $\check{X} = X + \mu Y$, тогда согласно теореме справедлива оценка квантили

$$[\check{X}]_{\alpha - \delta_{R_1}} - \mu^2 R_1 \leq [\check{X} + \mu^2 Z]_\alpha \leq [\check{X}]_{\alpha + \varepsilon_{R_1}} + \mu^2 R_1.$$

По теореме 5.1 оценим левую и правую части неравенства. Для левой части неравенства справедливо следующее $[\check{X}]_{\alpha - \delta_{R_1}} = [X + \mu Y]_{\alpha - \delta_{R_1}} \leq [X]_{\alpha - \delta_{R_1} - \delta_{R_2}} - \mu R_2$. Аналогичные выкладки справедливы и для правой части неравенства: $[\check{X}]_{\alpha + \varepsilon_{R_1}} = [X + \mu Y]_{\alpha + \varepsilon_{R_1}} = [X]_{\alpha + \varepsilon_{R_1} + \varepsilon_{R_2}} + \mu R_2$. Тогда для квантили рассматриваемой функции может быть получена двухсторонняя оценка:

$$[X]_{\alpha - \delta_{R_1} - \delta_{R_2}} - \mu^2 R_1 - \mu R_2 \leq [X + \mu Y + \mu^2 Z]_\alpha \leq [X]_{\alpha + \varepsilon_{R_1} + \varepsilon_{R_2}} + \mu^2 R_1 + \mu R_2.$$

Учитывая, что сумма $\mu^2 R_1 + \mu R_2$ имеет порядок малости μ , справедливо следующее:

$$[X]_{\alpha - \delta_{R_1} - \delta_{R_2}} + O(\mu) \leq [X + \mu Y + \mu^2 Z]_\alpha \leq [X]_{\alpha + \varepsilon_{R_1} + \varepsilon_{R_2}} + O(\mu).$$

Отметим, что ε_R и δ_R зависят от величины R , и при её стремлении к бесконечности стремятся к нулю. Если выполнено условие $\mathbf{P}\{[X]_\alpha < X < [X]_\alpha + \varepsilon\} > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, то функ-

ция квантили $[X]_\beta$ непрерывна по β в точке p , отсюда $[X]_{\alpha-\delta_{R1}-\delta_{R2}} \rightarrow [X]_\alpha, [X]_{\alpha+\varepsilon_{R1}+\varepsilon_{R2}} \rightarrow [X]_\alpha$ при $R \rightarrow \infty$.

5.6. Схема расчетов по методу линеаризации

Метод линеаризации позволяет вместо исходной нелинейной задачи (5.1) решать задачу с линейной моделью $\kappa = \min \{ \varphi : \mathbf{P} \{ \|D\Delta V\| \leq \varphi \} \geq \frac{1}{2} \}$. Поскольку левая и правая части неравенства, стоящего под знаком вероятности неотрицательны, то $\kappa = \min \{ \varphi : \mathbf{P} \{ \|D\Delta V\|^2 \leq \varphi^2 \} \geq \frac{1}{2} \}$. Вектор, стоящий под знаком нормы имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $K = \mu^2 DD^T$. Рассматриваемая задача сводится к задаче оценки квантильного критерия уровня $1/2$ нормы двумерного гауссовского вектора с известными параметрами распределения. В работе [32] был предложен метод, позволяющий строить такую оценку параметра κ с задаваемой точностью. Метод основан на построении верхней и нижней оценок квантили двумерного нормального вектора с задаваемой точностью. Задача о нахождении оценки квадрата нормы случайного вектора сводится к нахождению малой полуоси эллипса, вероятность попадания в который для реализаций двумерного стандартного нормального случайного вектора составляет $1/2$. Отношение малой и большой полуосей эллипса известно и равно отношению меньшего собственного значения матрицы K к её большему собственному значению. Для нахождения малой полуоси используется метод, предложенный в [32], который является модификацией метода дихотомии, позволяющей находить оптимальное значение аргумента функции с задаваемой точностью. Преимуществом линеаризованной модели является то, что величина оказывается пропорциональна величине μ . Этот факт позволяет не пересчитывать КВО для каждого значения μ , а находить КВО путем умножения имеющихся результатов на отношение нового значения малого параметра к его старому значению. Данное обстоятельство отмечено в [18] и позволяет существенно упростить расчеты и избежать трудоемких вычислений по методу Монте-Карло.

5.7. Результаты расчетов

Приведем результаты расчетов для нелинейной модели и линеаризованной модели. Приведем таблицу соответствия углов бросания и номинальных дальностей полета для $L_{\max} = 12000$ км:

Результаты, приведенные в таблице 5.1, получены согласно формулам раздела 5.3..

Таблица 5.1. Начальные данные

$L, 10^3 \text{ км}$	6	7	8	9	10	11	12
$\theta, ^\circ$	59.45	54.15	48.72	43.07	37.06	30.25	18.02

При проведении расчетов с учетом вращения Земли в нелинейном случае использовался метод Монте-Карло для выборке объемом $n = 10^4$, описанный в разделе 5.4. Для азимута равного $\pi/2$ были получены результаты, представленные в таблицах 5.2, 5.3, 5.4.

Таблица 5.2. Расчеты по нелинейной модели

$\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
$L, 10^3 \text{ км}$					
6	216.9228	21.6937	2.1697	0.2170	0.0217
7	229.7218	22.9628	2.2977	0.2298	0.0230
8	245.9681	24.6262	2.4639	0.2464	0.0246
9	268.1990	26.8010	2.6802	0.2680	0.0268
10	301.7416	30.2043	3.0214	0.3021	0.0302
11	364.0618	36.4017	3.6387	0.3638	0.0364
12	581.4578	58.2774	5.8193	0.5820	0.0582

Результаты расчетов для азимута, равного $\pi/3$, с учетом вращения Земли приведены в таблицах 5.5, 5.6, 5.7.

Далее приведены результаты расчетов в случае, когда Земля предполагается неподвижной и учет скорости вращения Земли не производится. В таблицах 5.8, 5.9, 5.10 представлены результаты расчетов при азимуте равном $\pi/2$. Результаты расчетов по методу Монте-Карло:

Результаты расчетов для азимута, равного $\pi/3$ приведены в таблицах 5.11, 5.12, 5.13.

Как видно из таблиц, относительная погрешность метода линеаризации не превышает 1,5% как с учетом, так и без учета вращения Земли. Отметим, что в [32] вращение

Таблица 5.3. Расчеты по линеаризованной модели

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	213.8201	21.3820	2.1382	0.2138	0.0214
7	226.8283	22.6828	2.2683	0.2268	0.0227
8	243.6363	24.3636	2.4364	0.2436	0.0244
9	266.7932	26.6793	2.6679	0.2668	0.0267
10	301.7822	30.1782	3.0178	0.3018	0.0302
11	362.2104	36.2210	3.6221	0.3622	0.0362
12	577.6564	57.7656	5.7766	0.5777	0.0578

Таблица 5.4. Относительные ошибки (в %)

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	1.4510	1.4575	1.4732	1.4730	1.4731
7	1.2756	1.2341	1.2967	1.3066	1.3080
8	0.9571	1.0778	1.1314	1.1297	1.1303
9	0.5269	0.4561	0.4582	0.4557	0.4555
10	0.0134	0.0865	0.1176	0.1060	0.1048
11	0.5111	0.4987	0.4578	0.4353	0.4314
12	0.6581	0.8859	0.7403	0.7446	0.7451

Земли не учитывалось.

Произведено сравнение времени работы программ с использованием метода линеаризации и метода Монте-Карло. Для расчета одной из приведенных выше таблиц для фиксированного значения угла азимута метод линеаризации требует примерно 1,5 секунд, в то время как метод Монте-Карло при объеме выборки $k = 10^4$ затрачивает около 58 секунд. Таким образом метод линеаризации требует примерно в 40 раз меньших временных

Таблица 5.5. Расчеты по нелинейной модели

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	215.2422	21.5459	2.1547	0.2155	0.0215
7	227.7667	22.7443	2.2749	0.2275	0.0227
8	244.8734	24.5013	2.4512	0.2451	0.0245
9	267.0662	26.7093	2.6716	0.2672	0.0267
10	301.2899	30.2095	3.0195	0.3020	0.0302
11	359.9150	36.0017	3.5969	0.3598	0.0360
12	572.8517	57.3469	5.7327	0.5732	0.0573

Таблица 5.6. Расчеты по линеаризованной модели

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	213.8208	21.3821	2.1382	0.2138	0.0214
7	226.8290	22.6829	2.2683	0.2268	0.0227
8	243.6373	24.3637	2.4364	0.2436	0.0244
9	266.7944	26.6794	2.6679	0.2668	0.0267
10	301.7837	30.1784	3.0178	0.3018	0.0302
11	362.2127	36.2213	3.6221	0.3622	0.0362
12	577.6624	57.7662	5.7766	0.5777	0.0578

затрат по сравнению с методом Монте-Карло.

5.8. Выводы по главе 5

1. Область применения метода линеаризации расширена на задачи квантильной оптимизации, где в качестве функции потерь выступает норма случайного вектора, компоненты которого нелинейно зависят от вектора малых случайных параметров. В этом

Таблица 5.7. Относительные ошибки (в %)

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	0.6648	0.7660	0.7723	0.7628	0.7632
7	0.4134	0.2707	0.2897	0.2884	0.2872
8	0.5074	0.5646	0.6088	0.6146	0.6161
9	0.1019	0.1118	0.1372	0.1455	0.1475
10	0.1636	0.1031	0.0537	0.0659	0.0671
11	0.6343	0.6061	0.6961	0.6721	0.6735
12	0.8328	0.7260	0.7598	0.7773	0.7837

Таблица 5.8. Расчеты по нелинейной модели

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	212.8787	21.2897	2.1291	0.2129	0.0213
7	226.4652	22.6351	2.2642	0.2264	0.0226
8	243.2685	24.3822	2.4396	0.2439	0.0244
9	266.9554	26.7276	2.6726	0.2672	0.0267
10	302.1888	30.2391	3.0253	0.3025	0.0302
11	361.0871	36.1604	3.6136	0.3613	0.0361
12	575.0542	57.4996	5.7568	0.5756	0.0576

случае производится покомпонентная линеаризация. Доказано, что ошибка, возникающая при такой замене, имеет порядок величины малого параметра.

2. Метод линеаризации применен при расчете кругового вероятного отклонения. Результаты расчетов показали, что погрешность метода линеаризации относительно метода Монте-Карло для широкого диапазона значений не превосходит 1,5%.

3. Линеаризованная модель позволяет примерно в 40 раз быстрее находить КВО по

Таблица 5.9. Расчеты по линеаризованной модели

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	213.8201	21.3820	2.1382	0.2138	0.0214
7	226.8283	22.6828	2.2683	0.2268	0.0227
8	243.6363	24.3636	2.4364	0.2436	0.0244
9	266.7932	26.6793	2.6679	0.2668	0.0267
10	301.7822	30.1782	3.0178	0.3018	0.0302
11	362.2104	36.2210	3.6221	0.3622	0.0362
12	577.6564	57.7656	5.7766	0.5777	0.0578

Таблица 5.10. Относительные ошибки (в %)

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	0.4403	0.4315	0.4267	0.4320	0.4325
7	0.1601	0.2104	0.1815	0.1728	0.1716
8	0.1510	0.0762	0.1346	0.1227	0.1241
9	0.0608	0.1811	0.1746	0.1639	0.1656
10	0.1347	0.2017	0.2468	0.2269	0.2249
11	0.3101	0.1673	0.2353	0.2519	0.2495
12	0.4505	0.4605	0.3420	0.3550	0.3563

сравнению с методом Монте-Карло с выборкой $k = 10^4$.

Таблица 5.11. Расчеты по нелинейной модели

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	214.2608	21.4251	2.1418	0.2142	0.0214
7	227.2456	22.7334	2.2728	0.2273	0.0227
8	243.7343	24.4381	2.4427	0.2442	0.0244
9	265.5993	26.6108	2.6612	0.2661	0.0266
10	302.5890	30.2947	3.0326	0.3033	0.0303
11	364.0885	36.4789	3.6488	0.3649	0.0365
12	581.7320	58.2252	5.8214	0.5821	0.0582

Таблица 5.12. Расчеты по линеаризованной модели

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	213.8204	21.3820	2.1382	0.2138	0.0214
7	226.8286	22.6829	2.2683	0.2268	0.0227
8	243.6367	24.3637	2.4364	0.2436	0.0244
9	266.7937	26.6794	2.6679	0.2668	0.0267
10	301.7827	30.1783	3.0178	0.3018	0.0302
11	362.2112	36.2211	3.6221	0.3622	0.0362
12	577.6584	57.7658	5.7766	0.5777	0.0578

Таблица 5.13. Относительные ошибки (в %)

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	0.2059	0.2014	0.1703	0.1808	0.1818
7	0.1839	0.2228	0.1972	0.2097	0.2110
8	0.0401	0.3057	0.2616	0.2485	0.2470
9	0.4477	0.2569	0.2530	0.2445	0.2445
10	0.2672	0.3858	0.4888	0.5098	0.5119
11	0.5183	0.7118	0.7373	0.7367	0.7366
12	0.7052	0.7952	0.7766	0.7744	0.7824

Заключение

В диссертационной работе предложены и обоснованы методы решения задач квантильной оптимизации с билинейными и квазилинейными по случайным параметрам функциями потерь, что конкретизируется следующими результатами, выносимыми на защиту:

1. Предложен алгоритм построения внешней полиэдральной аппроксимации α -ядра;
2. Разработан комплекс программ, позволяющий строить модели α -ядер;
3. Для класса задач квантильной оптимизации с билинейными функциями потерь предложен новый метод решения, основанный на использовании внешней аппроксимации α -ядра, позволяющий свести исходную задачу стохастического программирования к задаче линейного программирования. Доказана сходимость полученного решения по значению критерия к точному решению;

4. Обоснован метод линеаризации, позволяющий решить задачи квантильной оптимизации с квазилинейными функциями потерь. Метод основан на замене исходной функции потерь на её линеаризованную модель, полученную в соответствии с тейлоровским разложением исходной функции по вектору малых случайных параметров. Доказано, что ошибка, возникающая при такой замене, имеет порядок квадрата нормы вектора малых параметров;

5. Область применения метода линеаризации расширена на задачи квантильной оптимизации, где в качестве функции потерь выступает норма случайного вектора, компоненты которого нелинейно зависят от вектора малых случайных параметров. Доказано, что ошибка, возникающая при замене исходной модели на линеаризованную, имеет порядок малости, равный значению малого параметра;

6. На основе метода линеаризации решена задача расчета кругового вероятного отклонения. Результаты расчетов показали, что погрешность метода линеаризации относительно метода Монте-Карло для широкого диапазона значений не превосходит 1,5%.

Список литературы

1. Алферьев В.Л. Свойства матриц частных производных на Кеплеровой дуге // Двойные технологии, 2011, №4(57), С.14–21.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. Васильева С.Н. Алгоритм построения аппроксимации ядра вероятностной меры для решения задач квантильной оптимизации // Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодежная научная конференция: Сборник тезисов докладов. – М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2017. – С.52.
4. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Метод линеаризации в задачах квантильной оптимизации // Проблемы оптимизации и их приложения: тезисы докладов VII Международной конференции – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2018. – С.103.
5. Васильева С.Н. Применение метода линеаризации в задаче оценивания кругового вероятного отклонения // Гагаринские чтения – 2018: XLIV Международная молодежная научная конференция: Сборник тезисов докладов: Т. 2. – М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2018. – С.330.
6. Васильева С.Н. Применение метода линеаризации для решения задач квантильной оптимизации с функциями потерь, зависящими от вектора малых случайных параметров // Гагаринские чтения – 2016: XLII Международная молодежная научная конференция: Сборник тезисов докладов: Т. 1. – М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016. – С.462 – 463.
7. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Алгоритм визуализации плоского ядра вероятностной меры // Информатика и её применения, 2018, № 2, С. 60–68.
8. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Линеаризация квантили функции потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров с ограниченным носителем // Информатика,

управление и системный анализ: Труды IV Всероссийской международной конференции молодых ученых с международным участием. Т. II. – Тверь: Тверской государственный технический университет, 2016. С.14–19.

9. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Линеаризация функции потерь в задаче квантильной оптимизации для случая ограниченного носителя вектора малых параметров // 14-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2015». 16-20 ноября 2015 года. Москва. Тезисы. – Типография «Люксор», 2015. – С. 391 – 392.
10. Васильева С. Н., Кан Ю. С. Метод линеаризации для решения задачи квантильной оптимизации с функцией потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров // Автомат. и Телемех., 2017. № 7. С. 95–109.
11. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // АиТ. 2015. № 9. С. 83–101.
12. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // Теория и практика системного анализа: Труды III Всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием. – Т. I. – Рыбинск: РГАТУ имени П.А. Соловьева, 2014. – С. 38–43.
13. *Васильева С.Н., Кан Ю.С. О линеаризации модели возмущенного движения в задаче вероятностного анализа рассеивания баллистических траекторий // Труды МАИ, 2018. №99. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=92015>*
14. Васильева С.Н., Кан Ю.С. О линеаризации нелинейных моделей в задачах вероятностного анализа рассеивания баллистических траекторий // Информатика, управление и системный анализ: Труды V Всероссийской международной конференции молодых ученых с международным участием. – Ростов-на-Дону: Мини-Тайп, 2018. С.336-345.
15. Васильева С.Н., Кан Ю.С. О методе линеаризации для решения задач квантильной оптимизации с функциями потерь, зависящими от малых случайных параметров // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. – М.:Изд-во МАИ, 2016. С.103–106.

16. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Применение метода линеаризации при решении задачи оптимизации дохода портфеля ценных бумаг по квантильному критерию // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. – М.:Изд-во МАИ, 2017. С.138–139.
17. Военный энциклопедический словарь Ракетных войск стратегического назначения // гл. ред.: Сергеев И.Д., Яковлев В.Н., Соловцов Н.Е. и др. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. – 634 С.
18. Гончаренко В. И., Кан Ю. С., Травин А. А. Математическое и программное обеспечение анализа рассеивания точек падения фрагментов летательных аппаратов // Труды МАИ, 2012, №61.
19. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н Введение в минимакс. – М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1976.
20. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976.
21. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. – М.: МЦНМО, 2012.
22. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
23. Кан Ю.С. Оптимизация портфеля ценных бумаг по квантильному критерию. – В кн.: Финансовая математика / Под ред. Ю.М.Осипова и др. – М.:ТЕИС, 2001, С. 83–105.
24. Кан Ю.С. Оптимизация управления по квантильному критерию // Автомат. и Телемех., 2001. № 5. С. 77–88.
25. Кан Ю.С. Оптимизация инвестиций в дисконтные ценные бумаги по квантильному критерию качества // Proc. of Int. Scientific School «Modeling and Analysis of Safety, Risk and Quality in Complex Systems». Saint Peterburg, 2001, P. 248-256.
26. Кан Ю.С., Кибзун А.И. Свойства выпуклости функции вероятности и квантили в задачах оптимизации // Автомат. и Телемех., 1996. № 3. С. 82–102.
27. Кан Ю.С., Мистрюков А.А. Качественные исследования функций вероятности и квантили // Изв. РАН, Теория и системы управления, 1996. № 3. С. 36–40.

28. Кан Ю.С., Русяев А.В. Задача квантильной минимизации с билинейной функцией потерь // Автомат. и Телемех., 1998. № 7. С. 67–75.
29. Кан Ю.С., Суринов Р.Т. О неравенстве треугольника для критерия VaR // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: Труды Международной научной школы МАБР-2004. – СПб.: СПбГУАП, 2004. С. 243–248.
30. Кан Ю.С., Сысуев А.В. Основы метода линеаризации для решения задач квантильного анализа с малыми случайными параметрами // Автомат. и Телемех., 2008. № 8, С. 71–82.
31. Кан Ю.С., Сысуев А.В. Сравнение квантильного и гарантирующего подходов при анализе систем // Автомат. и Телемех., 2007, № 1, С. 57–67
32. Кан Ю.С., Травин А.А. О приближенном вычислении квантильного критерия // Автомат. и Телемех., 2013, № 6, С. 57–65.
33. Кан Ю.С., Тузов Н.В. Минимизация квантили нормального распределения с билинейной функцией потерь // Автомат. и Телемех., 1998. № 11. С. 82–92.
34. Кибзун А.И., Кан Ю. С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2009.
35. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
36. Кибзун А.И., Кузнецов Е.А. Выпуклые свойства функции квантили в задачах стохастического программирования // АиТ, 2004. № 2. С. 33–42.
37. Кибзун А.И., Курбаковский В.Ю. Численные алгоритмы квантильной оптимизации и их применение к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. РАН, Техническая кибернетика, 1992. № 1. С. 75–81.
38. Кибзун А.И., Лебедев А.А., Малышев В.В. О сведении задачи с вероятностными ограничениями к эквивалентной минимаксной // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1984. № 4. С. 73–80.

39. Кибзун А.И., Малышев В.В. Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1984. № 1. С. 20–29.
40. Кибзун А.И., Малышев В.В., Чернов Д.Э. Два подхода к решению задач стохастической оптимизации // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1988. № 3. С. 20–25.
41. Кибзун А.И., Наумов А.В. Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации // Космические исследования, 1995. № 2. С. 160–165.
42. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000.
43. Лепп Р. Максимизация функции вероятности при простых ограничениях // Изв. АН ЭССР, физ.-мат., 1979, 28, № 4, С. 303–309.
44. Лепп Р. Минимизация гладкой функции при вероятностных ограничениях // Изв. АН ЭССР, физ.-мат., 1980, 29, № 2, С. 140–144.
45. Малышев В.В., Кибзун А.И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1987. 303 С.
46. Норкин В.И., Роевко Н.В. α -вогнутые функции и меры их приложения. // Кибернетика и системный анализ, 1991, 6, С. 77–88.
47. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М.: Инфра-М, 1994.
48. Погорелов Д.А. Теория кеплеровых движений летательных аппаратов. – М.: Физматгиз, 1961. – 106 С.
49. Райк Э. Качественные исследования в задачах стохастического нелинейного программирования // Изв. АН ЭССР, физ.-мат., 1971, 20, № 1, С. 8–14.
50. Райк Э. О функции квантиля в стохастическом нелинейном программировании // Изв. АН ЭССР, физ.-мат., 1971, 20, № 2, С. 229–231.
51. Райк Э. О задачах стохастического программирования с функционалами вероятности и квантиля // Изв. АН ЭССР, физ.-мат., 1972, 21, № 2, С. 142–148.

52. Райк Э. Дифференцируемость по параметру функции вероятности и стохастический псевдоградиентный метод для её оптимизации // Изв. АН ЭССР, физ.-мат., 1975, 24, № 1, С. 3–9.
53. Тамм Э. О квазивыпуклости функций вероятности и квантили // Изв. АН ЭССР, физ.-мат., 1976, 25, № 2, С. 141–144.
54. Тамм Э. О минимизации функции вероятности // Изв. АН ЭССР, физ.-мат., 1979, 28, № 1, С. 17–24.
55. Урясьев С.П. Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. – М.:Наука, 1979.
56. Федоров В.В. Численные методы максимина. – М.:Наука, 1979.
57. Юби Э. Минимизация функции вероятности методом статистического моделирования // Труды Таллинского политехнического института, 1976, № 441, С. 57–76.
58. Юби Э. Статистическое исследование задач стохастического программирования и метод их решения. // Изв. АН ЭССР, Физика. Математика., 1977, 26, № 4, С. 369–375.
59. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. – М.:Светское радио, 1979.
60. Bahadur R.R. A Note on Quantiles in Large Samples // *The Annals of Mathematical Statistics*, 1996. Vol. 37. P. 577–580.
61. Beraldi P., Ruszczyński A. A branch and bound method for stochastic integer problems under probabilistic constraints // *Optimization Methods & Software*. 2002. V. 17. No. 3. P. 359–382.
62. Borel C. Convex Set Functions in d -Space. // *Period. Math. Hung.*, 1975. V. 6. No. 2. P. 11–136.
63. Charnes A., Cooper W.W. Chance-Constrained Programming. // *Management Sci.*, 1959, 6, P.73–79.

64. Charnes A., Cooper W.W. Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance-Constraints. // *Oper. Res.*, 1963, **11**, P.18–39.
65. Charnes A., Cooper W.W., Symonds G.H. Cost Horizons and Certainty Equivalents: An Approach to Stochastic Programming of Heating Oil. // *Management. Sci.*, 1958, **4**, P.235–263.
66. Dentcheva D., Prékopa A., Ruszczyński A. Concavity and efficient points of discrete distributions in probabilistic programming // *Mathematical Programming*. 2000. No. 89. P. 55–77.
67. Ermoliev Yu., Norkin V., Wets R.J.-B. The Minimization of Discontinuous Functions: Mollifier Subgradients. Working Paper WP-92-73, IIASA, Laxenburg, Austria, 1992.
68. Gartska S.J. The Economic Equivalence of Several Stochastic Programming Models. In: *Stochastic Programming*, ed. M.A.H. Dempster, Academic Press, New York, 1980, P. 83–91.
69. Genz A., Bretz F. *Computation of Multivariate Normal and t -Probabilities*. Heidelberg: Springer, 2009.
70. Guigues V. and Henrion R. (2017). Joint dynamic probabilistic constraints with projected linear decision rules. // *Optimization Methods & Software*, 2016, no. 32:5, P. 1006 – 1032.
71. Kall P. *Stochastic Linear Programming*. – Berlin: Springer-Verlag, 1976.
72. Kall P., Wallace S.W. *Stochastic Programming*. Chichester, Wiley, 1994.
73. Kan Yu.S Application of the Quantile Optimization to Bond Portfolio Selection // *Stochastic Optimization Techniques. Numerical Methods and Technical Applications. Lecture Notes in Economics and Mathemaical Systems*. Vol. 513. K.Marti ed. – Berlin: Springer, 2002, P. 285–308.
74. Kataoka S.A. Stochastic Programming Model // *Ekonometrika*. 1963. V. 31. No. 1-2. P. 181-196.
75. Kibzun A., Kan Yu. *Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions*. Chichester, Wiley, 1996.

76. Kibzun A.I., Kurbakovskiy V.Yu. Guaranteeing Approach to Solving Quantile Optimization Problem // *Annals of Operation Research*, 1991. Vol. 30. P. 81–93
77. Kibzun A.I., Malyshev V.V., Karp K.A. A Minimax Approach for Statistical Simulation of Complex Technical Systems // *Advances in Modeling and Simulation*. – AMSE Press, 1988. Vol. 10., No. 3 P. 35–46
78. Kogan A. and Lejeune M.A. Threshold boolean form for joint probabilistic constraints with random technology matrix // *Mathematical Programming*, 2014, no. 147, P. 391 – 427.
79. Kogan A., Lejeune M. A., and Luedtke J. Erratum to: Threshold boolean form for joint probabilistic constraints with random technology matrix // *Mathematical Programming*, 2016, no. 155(1), P. 617–620.
80. Kolbin V.V. *Stochastic Programming*. – D.Reidel, Dordrecht, 1977.
81. Lejeune M.A. Pattern-based modeling and solution of probabilistically constrained optimization problems // *Oper. Res.* 2012. No. 60. P. 1356–1372.
82. Lejeune M.A. Pattern definition of the p-efficiency concept // *Ann. Oper. Res.* 2012. No. 200 P. 23–36.
83. Lepp R. Stochastic Approximation Type Algorithm for the Maximization of the Probability Function. // *Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised, Füüsika & Matemaatika*, 1983, **32**, No.2, P.150–156.
84. Marti K. Approximations and Derivatives of Probability Functions. // In: *Approximation, Probability and Related Fields*, eds. G.Anastassiou and S.T.Rachev, Plenum Press, New York, 1994.
85. Marti K. Stochastic Optimization Methods in Structural Mechanics. // *ZAMM: Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, **70**, pp.742–745.
86. Miller B.L., Wagner H.M. Chance constrained programming with joint constraints // *Oper. Res.* 1965. No. 13. P. 930–945.

87. Prékopa A. Logarithmic Concave Measures and Related Topics. In: *Stochastic Programming*, ed. M.A.H.Dempster. – London: Academic Press, P.63–82.
88. Prékopa A. Logarithmic Concave Measures with Application to Stochastic Programming. // *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1971, 32, P.301–316.
89. Prékopa A. Numerical Solution of Probabilistic Constrained Programming Problems. In: *Numerical Techiques for Stochastic Optimization*, eds. Yu.Ermoliev and R.J.B.Wets, Springer-Verlag, Berlin, 1980, P.123–139.
90. Prékopa A. On Logarithmic Concave Measures and Functions. // *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1973, 34, P.325–343.
91. Prékopa A., Szántai T.A. A New Multivariate Gamma Distribution and Its Fitting to Empirical Streamflow Data. // // *Water Resources Resarch*, 1978, 14, P.19–24.
92. Prékopa A. *Stochastic Programming*. Dordrecht: Kluwer, 1995.
93. Prékopa A., Vizvári D., Badics T. Programming under probabilistic constraint with discrete random variable. In: Giannesi F. (Ed.), *New Trends in Mathematical Programming*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998, P. 235–255.
94. Rosenblatt-Roth M. Quantiles and Medians // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1965. No. 36. P. 921–925.
95. Sengupta J.K. *Stochastic Programming Methods and Applications*. North-Holland, Amsterdam, 1972.
96. Symonds G. U Deterministic Solution for a Class of Chance-Constrained Programming Problem // *Oper. Research*, 1967, 15, No. 3, P. 229–235.
97. Tamm E. On g -concave Functions and Probability Measures. // *Изв. АН ЭССР*, физ. - мат., 1977, 26, № 4, С. 376–379.
98. Tamm E. On Minimization of a Function under an Equality Chance Constraint. // *Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization*, 1981, **12**, No.2, P. 253–262.
99. Uryas'ev S. Differentiability of an Integral over a Set Defined by Inclusion. // *Cybernetics*, 1988, v.24, **5**, P. 638–642.

100. Uryas'ev S. A Differentiation Formula for Integrals over Sets Given by Inclusion. // *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 1989, **10(7 & 8)**, P. 827–841.
101. Uryas'ev S. Derivatives of Probability Functions and Integrals over Sets Given by Inequalities. // *J. Computational and Applied Mathematics*, 1995, **56**.
102. Vajda J. *Probabilistic Programming*. – Acad. Press, New York, London, 1972.
103. van Ackooij W. Eventual convexity of chance constrained feasible sets, *Optimization (A Journal of Math. Programming and Operations Research)*, 2015, no. 64(5), P. 1263–1284.
104. van Ackooij W. and Henrion R. (Sub-) Gradient formulae for probability functions of random inequality systems under Gaussian distribution. *SIAM Journal on Uncertainty Quantification*, 2017, no. 5(1), P. 63–87.
105. van Ackooij W. and Sagastizábal C. Constrained bundle methods for upper inexact oracles with application to joint chance constrained energy problems. *SIAM Journal on Optimization*, 2014, no. 24(2), P. 733–765.
106. van Moeseke P. Stochastic Linear Programming // *Yale Economic Essays*, 1965. Vol. 5. P. 197–253.
107. Vasileva S.N. and Kan Yu.S. Application of the linearization method for solving quantile optimization problem // *Abstracts of the 17th Baikal international school-seminar «Methods of Optimization and Their Applications»* . Irkutsk: ESI SB RAS, 2017, P. 68.
108. Vasil'eva S.N. and Kan Yu.S. On the linearization of the criterial function in probabilistic problems of analysis and optimization // *Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018)*. Irkutsk : ISDCT SB RAS, 2018, P .69.
109. Xie W. and Ahmed S. On quantile cuts and their closure for chance constrained optimization problems. *Mathematical Programming*, 2017, ser. B, P. 1–26.