

БЫСТРОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ОБОБЩЕННЫХ ЛУЧЕЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ НАНОСТРУКТУРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

АЛИФАНОВ Олег Михайлович, декан Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н., профессор, член-корреспондент РАН.
E-mail: alf@cosmos.com.ru

ALIFANOV Oleg M., Moscow Aviation Institute (State Technical University).
E-mail: alf@cosmos.com.ru

ГРЕБЕННИКОВ Александр Иванович, профессор Автономного университета г. Пуэбла, Мексика, д.ф.-м.н.
E-mail: agrebe@fcfm.buap.mx

GREBENNIKOV Alexander I., Autonomous University of Puebla, MEXICO.
E-mail: agrebe@fcfm.buap.mx

Рассматривается постановка обратной задачи теплопроводности как коэффициентной обратной задачи для линейного параболического уравнения. Предложен новый метод обобщенных лучей (GR-метод) для решения этой задачи. Метод основан на сведении дифференциального уравнения в частных производных к семейству обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием локальных трасс для рассматриваемых функций и операторов. GR-метод выражает решение обратной задачи для этого типа уравнений посредством точных аналитических формул, использующих прямое и обратное преобразования Радона. Предложенный вариант GR-метода осуществлен в виде алгоритмов и программного компьютерного обеспечения, более быстрых по сравнению со всеми известными, основанными на традиционных подходах. Это важно для математического моделирования при создании наноструктурных материалов со специальными свойствами теплопроводности.

We consider mathematical statement of the inverse heat conduction problem as inverse coefficient problem for linear parabolic equation. New General Ray (GR) method for solution of this problem is proposed. The method is based on reduction of Partial Differential Equation (PDE) to assemblage of Ordinary Differential Equations using local traces for considered functions and operators. GR-method presents the solution of the inverse problem for this type of equations by explicit analytical formulas that use the direct and inverse Radon transforms. Proposed version of GR-method can be realized as algorithms and computer software faster as all known ones, based on traditional approaches. This is very important for mathematical simulation at the developing of nanostructured materials with special heat-conductive properties.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача для уравнения в частных производных; метод обобщенных лучей; регуляризация.

Key words: coefficient inverse problem for PDE, General Ray method, regularization.

1. Введение

Наноструктурные материалы со специальными свойствами теплопроводности важны для многих приложений в ракетно-космической технике. Математическое и компьютерное моделирование является одним из важных шагов в их создании. В рассматриваемом случае это моделирование приводит к решению обратных задач теплопроводности. Нанотехнологии характеризуются существенно более детальным прониканием в структуру исследуемых предметов и явлений. Зачастую основные математические модели, которые описывают нанотехнологические процессы, включают традиционные

дифференциальные уравнения, однако часто со специфическими элементами. Это требует развития и адаптации соответствующих математических моделей, разработки новых аналитических и численных методов для их изучения, приспособленных к требованиям, диктуемым нанотехнологиями. Одно из наиболее важных требований — это возможность получить достаточное увеличение точности при решении проблемы в реально дозволённое время или, что эквивалентно, решить проблему с приемлемой точностью наиболее быстро. Математические модели и известные численные методы часто не удовлетворяют этим требованиям при их компью-

терной реализации, в частности для решения сформулированных обратных задач.

2. Постановка коэффициентной обратной задачи теплопроводности для стационарного случая

Мы рассматриваем дифференциальное уравнение в частных производных для постановки задачи о переносе тепла в твердом теле

$$u_t(t, x, y) = \nabla(\varepsilon(x, y) \nabla u(t, x, y)), \quad (1)$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad t > t_0,$$

которое описывает распределение температуры $u(t, x, y)$ в плоской области Ω с теплопроводностью $\varepsilon(x, y)$.

В стационарном случае температура не зависит от времени: $u(t, x, y) = u(x, y)$, поэтому уравнение (1) переходит в уравнение типа Лапласа

$$\nabla(\varepsilon(x, y) \nabla u(x, y)) = 0, (x, y) \in \Omega. \quad (2)$$

Рассматривается коэффициентная обратная задача для уравнения (2) относительно функции $\varepsilon(x, y)$, если удовлетворяются следующие граничные условия:

$$\varepsilon(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = J_n(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \quad (3)$$

$$u(x, y) = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (4)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ — нормальная производная в точках криволинейной границы Γ ; функции $J_n(x, y)$, $u^0(x, y)$ заданы на кривой Γ . Традиционный подход для решения этой обратной задачи приводит к нелинейной некорректно поставленной проблеме [1, 2].

3. Метод обобщенных лучей

В работе [3] был сформулирован принцип обобщенных лучей (*GR*-принцип), который для рассматриваемых проблем заключается в построении такого аналога уравнения (2), которое описывает распределение функций $u(x, y)$, $\varepsilon(x, y)$ вдоль «обобщенных локальных лучей», задаваемых некоторой прямой линией l с параметризацией Радона [4], использующей параметр τ :

$$x = p \cos \varphi - \tau \sin \varphi, \quad y = p \sin \varphi + \tau \cos \varphi.$$

Здесь $|p|$ — длина перпендикуляра от центра координат к линии l ; $\varphi \in [0, \pi]$ — угол между осью x и этим перпендикуляром.

Используя эту параметризацию, определим следы функций $u(x, y)$, $\varepsilon(x, y)$ при $(x, y) \in l$ для фиксированных p , φ как функции $u(\tau)$, $\varepsilon(\tau)$ переменного τ .

Предполагаем, что область Ω выпуклая, и определим для каждого фиксированного p , φ параметры τ_0 , τ_1 , которые соответствуют пунктам пересечения линии l и границы области.

GR-принцип приводит к совокупности (зависящей от p , φ) обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\varepsilon(\tau) u'_\tau(\tau))'_\tau = 0, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1], \quad (5)$$

представляющих локальный аналог уравнения (2). Граничные условия (3), (4) дают соответствующие локальные граничные условия в точках τ_0 , τ_1 .

Мы рассматриваем для фиксированного p , φ следующие граничные условия:

$$\varepsilon(\tau_0) u'_\tau(\tau_0) = J(p, \varphi); \quad (6)$$

$$u(\tau_1) - u(\tau_0) = v(p, \varphi) \quad (7)$$

для заданных функций $v(p, \varphi)$ и $J(p, \varphi)$.

Уравнения (5)–(7) образуют базовую математическую модель для обратной задачи восстановления коэффициента $\varepsilon(x, y)$. Граничное условие (7) можно получить по данным в граничном условии (4). Но граничное условие (6) принципиально отличается от (3), потому что (6) включает производную по переменной τ , что соответствует направлению прямой линии l , а не направлению нормали к кривой границы Γ .

Приведем один пример, для того чтобы продемонстрировать аргументы, поясняющие применимость граничного условия (6) в формулировке базовой математической модели, следующей из *GR*-принципа. Для простоты мы рассматриваем ниже как Ω единичный круг. На рис. 1 мы представляем соответствующую модельную структуру, которая состоит из двух концентрических кругов: единичный круг Ω как однородная основа с $\varepsilon(x, y) \equiv 1$ и один неоднородный элемент Ω_1 как круг радиус-

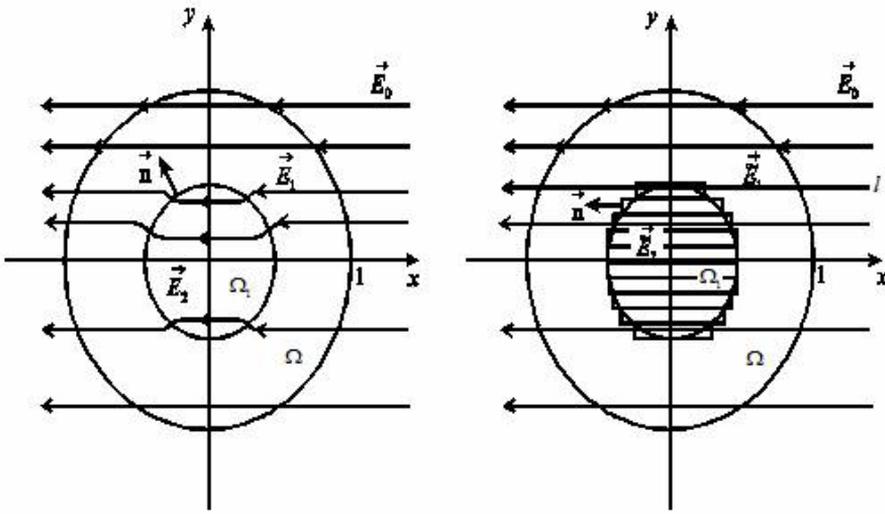


Рис. 1. Иллюстрация, поясняющая применимость GR-принципа

са $r < 1$. Тепловое поле имеет малое возмущение в окрестности Ω_1 (рис. 1), вызванное этой неоднородностью. Можно представить приближенно область Ω_1 как совокупность прямоугольников с длинными сторонами, параллельными линии l , и с короткими, пересекающими внутреннюю окружность, как показано в правой части рис. 1.

Предположим, что значения температуры и теплового потока в точках этой приближенной границы равны значениям температуры и теплового потока однородного внешнего поля, т. е. мы пренебрегаем малым возмущением направления поля в окрестности границы Ω_1 , вызванным этой неоднородностью, так как нормаль к главной части кусочной границы совпадает по направлению с направлением линии l . Таким образом, как продемонстрировано в правой части рис. 1, мы можем рассматривать линии теплового поля как прямые линии во всей рассматриваемой области.

Предполагая, что компоненты с различными характеристиками теплопроводности в рассматриваемой структуре имеют гладкое распределение, такое, что функции $\varepsilon(\tau)u_\tau(\tau)$ и $u_\tau(\tau)$ непрерывны, и интегрируя дважды уравнение (5) по τ , получаем для $\varepsilon(x, y)$ формулу

$$\varepsilon(x, y) = 1/R^{-1} \left[\frac{v(p, \varphi)}{J(p, \varphi)} \right], \quad (8)$$

где R^{-1} — оператор обратного преобразования Радона.

Формула (8) представляет метод обобщенных лучей (GR-метод) для рассматриваемой обратной

задачи восстановления коэффициента теплопроводности. Эту формулу можно применять также для структур с кусочно-постоянным распределением характеристик теплопроводности.

Численную реализацию формулы (8) мы называем «сканирующим GR-алгоритмом». Этот алгоритм является быстрым, так как не требует решения никаких уравнений, и к тому же обратное преобразование Радона может быть эффективно вычислено с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье, которое имеется, например, в системе MATLAB.

Анализ формул для обратного преобразования Радона показывает, что его неустойчивость для дискретных зашумленных данных соответствует неустойчивости проблемы численного дифференцирования значений зашумленной функции $\bar{v}(p, \varphi)$ по переменной p . Регуляризация обратного преобразования Радона была построена на основании метода рекурсивного сглаживания (RS) сплайнами, представленного в работе [5] с теоретическими и численными обоснованиями. Если для структур с кусочно-постоянными характеристиками теплопроводности задан комплект известных значений $\{\varepsilon_i\}$, то алгоритм включает также проекцию пререконструированных данных на множество $\{\varepsilon_i\}$ с использованием абсолютного или относительного критерия.

4. Численные эксперименты

Сканирующий GR-алгоритм был численно испытан на модельных примерах. Представленные эксперименты соответствуют кусочно-постоянной структуре внутри единичного круга, когда $J(p, \varphi) \equiv 1$.

В этих примерах используется упомянутое толкование приближенной формы границ внутренних элементов, для того чтобы симитировать приближения для функции $u(\tau_1)$. Вычисляем эту функцию путем решения прямой задачи Коши для уравнения (5) для значений переменного τ вне внутренних элементов, после этого продолжаем построенное решение внутри элементов, используя традиционные граничные условия непрерывности температуры и нормального (относительно приближенной прямоугольниками границы) компонента теплового потока.

В первом примере рассматриваемая неоднородная структура имеет общую базовую характеристику теплопроводности $\epsilon_0(x, y) = 1$, два различных внутренних элемента имеют $\epsilon_1(x, y) = 2$, $\epsilon_2(x, y) = 3$.

Результаты реконструкции изображения структуры в первом эксперименте даны на рис. 2: диаграмма (a) — точное изображение; диаграммы (b), (c), (d) — реконструкция изображения структуры с помощью GR-алгоритма для объема дискретных данных, определяемых числом точек $n = 20, 40, 100$ соответственно.

Боле трудный случай для реконструкции соответствует большей шкале изменения значений $\{\epsilon_i\} = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$, когда для пререконструированного изображения необходима дополнительная обработка (проекция) даже при использовании точных исходных данных. Во втором примере мы используем точные значения исходных функций в дискретных точках для случая $\epsilon_1(x, y) = 1$, $\epsilon_2(x, y) = 70$.

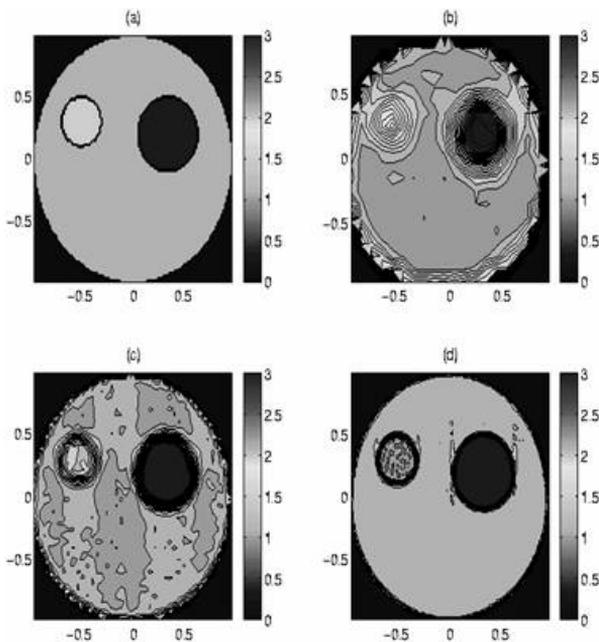


Рис. 2. Иллюстрация первого примера

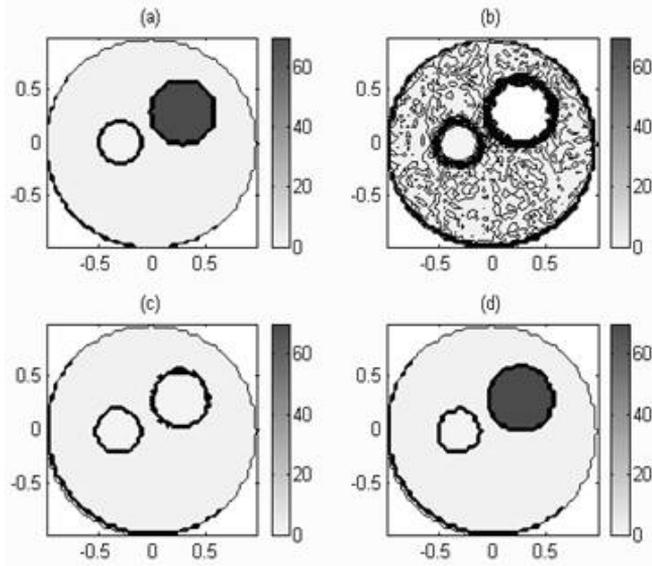


Рис. 3. Иллюстрация второго примера

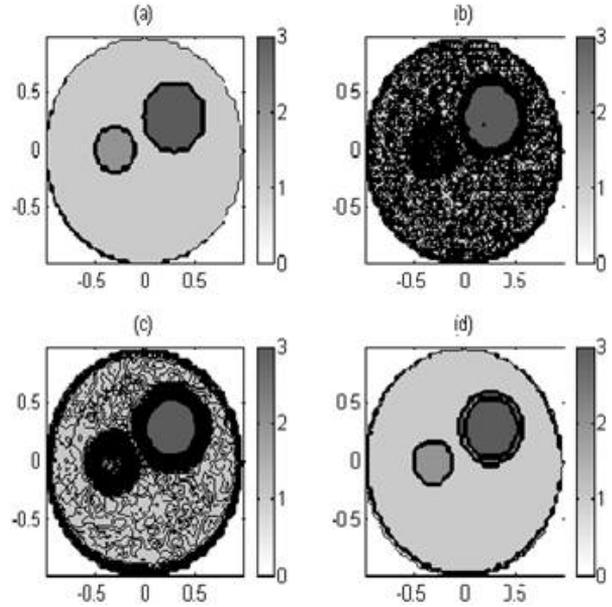


Рис. 4. Иллюстрация третьего примера

клетных точках для случая $\epsilon_1(x, y) = 1$, $\epsilon_2(x, y) = 70$. На рис. 3 приведены восстановленные с помощью GR-алгоритма изображения структуры: график (a) — точное распределение; график (b) — реконструкция без дополнительной обработки (проектирования), график (c) — реконструкция с проекцией по абсолютному критерию; график (d) — реконструкция с проекцией по относительному критерию.

Третий представленный численный эксперимент соответствует реконструкции структуры, с использованием зашумленных входных данных, т.е. значений функции

$$\bar{v}(p, \varphi) = v(p, \varphi)(1 + \delta(p, \varphi)),$$

где $\delta(p, \varphi)$ — хаотическая функция с оценкой:
 $\|\delta(p, \varphi)\|_{C[\Omega]} \leq \delta$.

Результаты регуляризованной реконструкции для $n = 31$, $\delta = 0,05$ даны на рис. 4: график (a) — точное $\varepsilon(x, y)$; график (b) — реконструкция по зашумленным значениям $\bar{v}(p, \varphi)$ без регуляризации; график (c) — реконструкция по зашумленной $\bar{v}(p, \varphi)$ только с *RS*; график (d) — реконструкция по зашумленным значениям $\bar{v}(p, \varphi)$ с *RS* и проекцией пре-реконструированного изображения по абсолютному критерию.

Выводы

Предложен новый метод обобщенных лучей (*GR*-метод) для решения коэффициентной обратной задачи для линейного стационарного параболического уравнения. *GR*-метод выражает решение обратной задачи посредством точных аналитических формул, использующих прямое и обратное преобразование Радона. Метод осуществлен в виде быстрого алгоритма и программного компьютерного

обеспечения, опробованного на численных экспериментах. Он может быть применен для математического моделирования при создании наноструктурных материалов со специальными свойствами теплопроводности.

Библиографический список

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. — М.: Машиностроение, 1988.
2. Isakov V. Inverse Problems for Partial differential Equations. Springer, New York, 1998.
3. Grebennikov A. The Study of the Approximation Quality of GR-Method for Solution of Dirichlet Problem for Laplace Equation// WSEAS Transaction on Mathematics Journal. (2003), Issue 4, Vol. 2, pp. 312—317.
4. Radon J. Uber Die Bestimmung von Funktionen Durch Ihre Integrawerte Langs Gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sachsische Academic der Wissenschaften, Leipzig, Math.-Phys. (1917), KI. N 69, pp. 262—267.
5. Морозов В.А., Гребенников А.И. Методы решения некорректных задач: алгоритмические аспекты. — М.: Изд-во МГУ, 1992.