


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»


На правах рукописи

УДК 534-13

Куроедов Алексей Анатольевич

**Исследование линейной неустойчивости рабочего процесса в
энергетических установках твердого топлива**

Специальность: 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

**Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук**

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор
Борисов Дмитрий Марианович

Москва

2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. Анализ проблемы неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ....	10
1.1 Экспериментальное исследование неустойчивых режимов работы ЭУТТ.....	14
1.2 Теоретическое исследование неустойчивых режимов работы ЭУТТ	17
1.3 Акустические свойства зоны горения топлива	23
Глава 2. Методики исследования неустойчивых режимов работы ЭУТТ..	31
2.1 Модификация энергетической методики.....	31
2.2 Физико-математическая модель процессов в камере сгорания ЭУТТ	36
2.2.1 Основное стационарное течение в КС.....	38
2.2.2 Пульсационное течение в КС	44
2.2.3 Расчетная сетка.....	46
Глава 3. Экспериментальное определение акустических свойств зоны горения конденсированных систем.....	52
3.1 Экспериментальная установка по определению акустической проводимости топлива.....	52
3.2 Методика определения акустической проводимости зоны горения безметалльных и металлизированных топлив	58
3.3 Погрешность измерений	61
3.4 Измерение акустической проводимости безметалльных и металлизированных составов.....	63
Глава 4. Численное моделирование продольной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ в линейном приближении.....	73
4.1 Результаты расчетов устойчивости рабочего процесса в ЭУТТ с использованием энергетической методики	73

4.2	Расчет собственных мод колебаний в областях простой формы	76
4.3	Верификация методики исследования продольной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ в линейном приближении	80
4.4	Устойчивость режимов работы ЭУТТ, использующих металлизированные топлива	100
4.4.1	ЭУТТ большого удлинения.....	100
4.4.2	Двухкамерная ЭУТТ	107
4.5	Устойчивость рабочего процесса в двухкамерной многосопловой ЭУТТ.....	112
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		121
ПРИЛОЖЕНИЕ		122
	Энергетическая методика.....	122
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....		131

ВВЕДЕНИЕ

Учёт возможности перехода на неустойчивые режимы работы, сопровождающиеся автоколебаниями давления в камере сгорания, занимает важное место при проектировании энергетических установок твердого топлива (ЭУТТ). Неустойчивость рабочего процесса может проявляться как в виде колебаний давления малой амплитуды, составляющих не более 5% от среднего давления в камере сгорания (КС), колебаний конечной амплитуды, не меняющейся со временем, а также в виде распространения ударных волн по камере сгорания установки. Данные явления наблюдались во многих установках [44] и приводили к различным последствиям: от выхода из строя узлов и агрегатов систем управления до схода с расчетной траектории и разрушения ЭУТТ. Недостаточное внимание, уделяемое исследованию неустойчивости ЭУТТ на стадии проектирования, в дальнейшем может привести к увеличению материальных затрат и увеличению времени доработки изделия.

Первые ЭУТТ, в которых наблюдались неустойчивость рабочего процесса, обладали малыми габаритами, что позволяло эмпирическим путем (изменением формы наполнителя или геометрии КС) добиться устойчивой работы. В дальнейшем с началом разработки крупногабаритных установок данный подход оказался чрезвычайно затратным, что послужило началом интенсивных работ по теоретическому исследованию неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ. В настоящее время можно выделить три основных подхода к исследованию: подход, основанный на использовании полуаналитических методик; подход, включающий в себя решение системы линеаризованных уравнений Эйлера (или системы уравнений Навье-Стокса) в частотной и временной областях для определения пульсаций давления в КС ЭУТТ; подход, заключающийся в непосредственном решении полных уравнений, описывающих динамику продуктов сгорания в КС ЭУТТ. Все эти подходы, помимо описания распространения возмущений в продуктах

сгорания должны быть дополнены моделями нестационарного горения топлива, которые позволяют корректно описывать взаимодействие возмущений с зоной горения топлива. Каждая из представленных методик имеет свои недостатки и преимущества. В силу своей наглядности и малых вычислительных затрат наибольшее распространение получили полуаналитические методики. Наиболее перспективным в плане полноты описания процессов, протекающих во время перехода на неустойчивые режимы работы, является подход, основанный на решении полных уравнений, описывающих законы сохранения для продуктов сгорания (ПС). В настоящее время этот подход становится все более популярным. Однако его применение весьма ограничено в силу большой вычислительной ресурсоемкости и трудностей, связанных с построением адекватных моделей нестационарного горения смесевых топлив. Для полуаналитических методик и методик, основанных на решении линеаризованных уравнений Эйлера в частотной области решение проблемы моделирования взаимодействия возмущений давления с поверхностью горения упрощается введением в рассмотрение акустической проводимости (или акустического импеданса) топлива, связывающей пульсации скорости и давления у поверхности горения. Измерения акустической проводимости могут быть выполнены с использованием различных экспериментальных установок, к которым относятся Т-камера, установка с вращающимся клапаном, импедансная труба, СВЧ-камера и установка с магнитным расходомером. Однако не все указанные способы могут быть использованы для определения свойств металлизированных топлив. В данной работе предлагается схема импульсной Т-камеры, позволяющая определять акустическую проводимости как металлизированных, так и безметалльных топлив в широком диапазоне частот и среднего давления в КС. Общая задача исследования линейной неустойчивости решается с использованием подхода, основанного на решении системы линеаризованных уравнений Эйлера.

Актуальность работы

Несмотря на многочисленные теоретические, расчётные и экспериментальные работы, посвященные исследованию различных аспектов неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ, существует ряд задач, не получивших в настоящее время удовлетворительного решения. К таким задачам относятся измерение акустических свойств зоны горения перспективных высокотемпературных металлизированных топлив, а также определение устойчивости рабочего процесса в многокамерных (например, [26]) и многосопловых (например, [4]) ЭУТТ со сложной формой канала. В данной работе изложено решение этих задач, направленное на создание комплексной методики определения линейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ.

Целью работы является комплексное исследование линейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ, работающих на безметалльных и металлизированных топливах.

Основными задачами, решаемыми в работе являются:

1. Разработка методики моделирования распространения возмущений давления малой амплитуды в осесимметричном канале переменного сечения с проницаемыми стенками, заполненным газовой средой;
2. Разработка экспериментальной установки для определения акустических свойств зоны горения топлива. Проведение экспериментальных исследований акустической проводимости безметалльных и металлизированных составов для различных частот колебаний давления и среднего давления в КС;
3. Расчет устойчивости рабочего процесса в различных ЭУТТ, работающих на безметалльных и металлизированных топлив, акустическая проводимость которых определялась с использованием разработанной установки;

4. Модификация энергетической методики определения неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ, связанного с особенностями усреднения рабочих параметров по времени в объёме КС ЭУТТ.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Предложена схема экспериментальной установки по определению акустических свойств зоны горения топлив с использованием вспомогательных камер генерации давления;

2. На разработанной автором экспериментальной установке проведено измерение акустической проводимости зоны горения безметалльного и металлизированного топлив;

3. С использованием математически обоснованного способа усреднения по времени рабочих параметров в камере сгорания предложена модификация энергетической методики определения линейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ;

4. Предложена комплексная методика исследования устойчивости рабочего процесса в ЭУТТ с осесимметричной проточной частью с учетом влияния частиц конденсированной фазы продуктов сгорания топлива.

Достоверность полученных результатов подтверждается сопоставлением результатов расчета, полученных по предложенной методике, с данными экспериментальных исследований и результатами расчётов, проведённых с использованием других методик. Достоверность экспериментальных результатов обеспечивается тщательным планированием эксперимента и качественным экспериментальным оборудованием.

Практическая ценность результатов работы заключается в создании комплексной методики исследования линейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ, включающей в себя методику экспериментального определения акустических свойств зоны горения. Разработанная экспериментальная методика определения акустических свойств топлив позволяет определять акустическую проводимость и функцию отклика зоны горения по давлению в широком диапазоне частот реализуемых колебаний.

Применение комплексной методики позволило установить возможность перехода на неустойчивые режимы двухкамерной многосопловой ЭУТТ при использовании безметального топлива.

На защиту выносятся:

1. Методика определения линейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ с осесимметричной проточной частью.
2. Методика экспериментального определения акустической проводимости зоны горения безметальных и металлизированных составов.
3. Результаты экспериментальных исследований акустических свойств зоны горения безметальных и металлизированных топлив в диапазоне частот до 1000 Гц.
4. Результаты расчетов коэффициентов затухания для различных ЭУТТ с осесимметричной КС.

Апробация работы и научные публикации:

Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на 54-ой, 55-ой и 56-ой конференции Московского физико-технического института в 2011, 2012, 2013 гг.; научных семинарах и конференциях Центра Келдыша. Основное содержание и результаты диссертационной работы отражены в 4 публикациях, в том числе 3 из перечня ВАК.

Список публикаций соискателя по теме диссертации:

1. Куроедов А.А., Лаптев И.В., Борисов Д.М. Влияние конденсированной фазы на акустическую неустойчивость в энергетических установках на твердом топливе, Труды МАИ, Выпуск № 90, 2016. Режим доступа: http://trudymai.ru/upload/iblock/a49/kuroedov_laptev_borisov_rus.pdf

2. Куроедов А. А., Борисов Д. М. Влияние способа усреднения рабочих параметров энергетических установок на твердом топливе на значение коэффициента затухания акустических колебаний, Труды МАИ, Выпуск № 94, 2017. Режим доступа:

http://trudymai.ru/upload/iblock/3c3/kuroedov_borisov_rus.pdf

3. Куроедов А. А., Борисов Д. М., Семёнов П. А. Определение акустической проводимости зоны горения безметалльных и металлизированных энергетических конденсированных систем, Труды МАИ, Выпуск №98, 2018. Режим доступа:

http://trudymai.ru/upload/iblock/0cc/Kuroedov_Borisov_Semenov_rus.pdf

4. Куроедов А.А., Борисов Д.М., Лаптев И.В. Исследование влияния конденсированной фазы на акустическую неустойчивость в энергетических установках на твердом топливе // Труды 56-й научной конференции МФТИ, 2013, Т. 1. С. 106-107.

Объём работы

Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения и приложения, содержит – 146 машинописных листов, включающих 80 рисунков, 14 таблиц и список используемой литературы из 173 наименований.

Глава 1. Анализ проблемы неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ

Исследование возможности перехода на неустойчивые режимы работы является важным этапом при проектировании ЭУТТ. Неустойчивый рабочий процесс в камерах сгорания ЭУТТ может проявляться в виде низко- и высокочастотных автоколебаний давления в различных направлениях с частотой в диапазоне от нескольких герц до десятков килогерц [18]. Данные режимы работы были впервые четко идентифицированы в конце 1940х годов, когда стало возможным использование высокочастотных датчиков измерения давления. К этому же времени относятся первые попытки теоретического описания неустойчивости в ЭУТТ¹. Однако, по косвенным данным (сильные отклонения среднего давления в камере сгорания) с неустойчивыми режимами работы ЭУТТ сталкивались еще во второй половине 1930-х годов [173, Глава 1] . Интерес к вопросам устойчивости в конце 1960-х – начале 1970-х гг. был обусловлен необходимостью решения ряда проблем, связанных с устойчивостью работы ЭУТТ на новых топливах с низким содержанием конденсированной фазы, устойчивостью металлизированных твёрдых топлив, используемых в разрабатываемых крупногабаритных установках, и устойчивостью установок со сложной конфигурацией наполнителя.

Первые серьёзные успехи как в теоретическом (моделирование линейной и нелинейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ), так и в экспериментальном плане (разработка методик определения акустической проводимости зоны горения топлив) были достигнуты в 1970-х годах в СССР, США и Франции [83, с. 51-56].

С начала 1980-х годов работы в области неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ касались, в большей мере, исследования процессов в

¹ К одной из первых иностранных публикаций, посвященной теоретическому анализу явления неустойчивой работы ЭУТТ (в публикации используется термин «резонансное горение») можно отнести [105].

крупногабаритных установках с высоким отношением длины проточной части КС к её диаметру ($\frac{L}{D} \geq 10$, где D – диаметр проточной части КС; L – длина проточной части КС). В США обширная программа была посвящена ускорителям Space Shuttle [46, 47, 133, 134] и ускорителям ракеты-носителя Titan [52, 85]. Во Франции исследованию подверглись стартовые ускорители ракеты-носителя Ariane 5 [35, 91, 121, 128, 129, 151, 161]. Последнее время также ведутся интенсивные работы по исследованию различных аспектов неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ [6, 9, 17, 92, 104, 146].

Более чем за полувековой период исследования сформировалась система классификации неустойчивых режимов работы ЭУТТ. Так в работе [36]² выделяют три уровня³ неустойчивости: неустойчивость, характерная для камеры сгорания энергетической установки (ЭУ); неустойчивость, затрагивающая всю систему (системная неустойчивость); неустойчивость горения непосредственно топлива (внутренняя неустойчивость). Первая группа включает наиболее распространенный тип неустойчивости, характеризующийся распространением акустических волн в камере сгорания (акустическая неустойчивость). Данный процесс представляет собой колебательный процесс с частотой, определяемой геометрией камеры сгорания, и средней скоростью звука в среде, заполняющей камеру сгорания. К первому типу неустойчивости относят и распространение в камере сгорания ударных волн, а также гидродинамическую неустойчивость, которая связана с формированием и развитием вихревых структур в камере сгорания. Второй уровень неустойчивости связан с взаимным влиянием процессов, протекающих в камере сгорания, деформаций элементов конструкции и агрегатов системы управления. Последний уровень неустойчивости, наиболее сложный в исследовании, представляет собой неустойчивость, присущую непосредственно горению топлива. Подобная трёхуровневая система, которая определяет, где локализовано явление – на

² Классификация, представленная в данной публикации, может быть применена не только к ЭУТТ, но и к ЖРД и ГРД.

³ Здесь под уровнем подразумевается место локализации

уровне топлива, камеры сгорания или всей системы, не является жесткой⁴. Различные уровни неустойчивостей могут взаимодействовать между собой и переходить друг в друга. Например, акустические колебания, развивающиеся в камере сгорания, могут приходить в резонанс с собственными колебаниями некоторых агрегатов системы управления и приводить к выходу их строя. Помимо этих трёх классов существует разделение неустойчивостей на самопроизвольные и вынужденные. Последний вид касается устойчивости рабочего процесса по отношению к некоторому внешнему возмущению давления. В данной работе рассматривается неустойчивость, характерная для КС (без учёта влияния её развития на элементы конструкции установки и узлы управления). В рамках неё выделяют низкочастотную и высокочастотную неустойчивости, которые могут быть рассмотрены как в линейной, так и нелинейной постановке.

В общем случае, неустойчивость ЭУТТ является следствием взаимодействия явлений, протекающих непосредственно в топливе (разложение компонент топлива), в газовой фазе около поверхности горения (химическое взаимодействие продуктов разложения топлива) и непосредственно в КС вдали от зоны горения (газодинамические эффекты). Данные процессы происходят одновременно, однако их характерные размеры сильно разнятся, что и обуславливает сложность исследования неустойчивости ЭУТТ [39, с. 11].

Последствия перехода энергетических установок (ЭУ) на неустойчивые режимы работы могут быть весьма серьезными. Например, при стендовой отработке двигателя баллистической ракеты Sergeant возникала тангенциальная неустойчивость, приводящая к возникновению настолько сильного крутящего момента, что корпус ЭУ, зафиксированный цепями, вырывало со стапеля. В лётных испытаниях наблюдались те же явление, что приводило к сходу летательного аппарата с курса [96, 163]. В некоторых

⁴ Отличный подход к классификации неустойчивости применительно к ЭУТТ представлены в [89, 152].

случаях возникновение колебаний в КС ЭУТТ приводило к значительному увеличению среднего давления в камере сгорания, как это наблюдалось при отработке ЭУ американской ракеты класса воздух-воздух ATR (Advance Tactical Rocket). Известны случаи, когда возникновение колебаний давлений в КС не вызывало никаких проблем в работе установки, однако, приводило к выходу из строя системы управления (ЭУ американской ракеты Mk 12 Navy Standard)⁵. Проблема неустойчивости возникала для специальных многокамерных ЭУ, примером которых может служить ЭУ отделения и мягкой посадки ракетных блоков ракеты-носителя, на которой значительные по амплитуде пульсации давления, обусловленные взаимодействием двух встречных потоков, истекающих из каналов наполнителей обеих камер [26, с. 15].

Ключевым моментом при исследовании различных видов неустойчивости является выявление и правильный учёт механизмов, приводящих к возбуждению и демпфированию колебаний давления в камере сгорания ЭУ. К механизмам, приводящим к возбуждению и развитию колебаний в камере сгорания относят: взаимодействие полей акустического давления и скорости с поверхностью горения; горение частиц оксидов металлов в объёме камеры сгорания, вихреобразование. К механизмам демпфирования относят: истечение продуктов сгорания через сопловой блок; затухание колебаний на частицах, находящихся в потоке; конструкционное демпфирование [38, 82].

Основная практическая задача при исследовании заключается в избегании перехода ЭУТТ на неустойчивые режимы работы. Решение данной задачи достигается в результате тщательного анализа всех факторов на этапе проектирования новой установки. В случае возникновения неустойчивости необходимо предпринять меры для её устранения. В настоящее время основными способами подавления неустойчивости в ЭУТТ является

⁵ Более подробно со случаями возникновения неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ в США можно ознакомиться в работе [44].

изменение проточной части камеры сгорания (в том числе установка различных дополнительных перегородок и резонаторов) и внесение модификаций в состав топлива. Как показывает практика, изменение распределения частиц окислителя топлива или добавления различных стабилизирующих добавок может быть очень эффективным в борьбе с неустойчивостью рабочего процесса в ЭУТТ⁶.

1.1 Экспериментальное исследование неустойчивых режимов работы ЭУТТ

Низкочастотная неустойчивость

Низкочастотная неустойчивость⁷ представляет собой явление, характеризующееся развитием колебаний, частота которых ниже наименьшей собственной частоты колебаний полости КС ЭУ. Данный вид неустойчивости характерен для энергетических установок с малой величиной приведённой длины КС L^* (отношения объёма проточной части КС к площади критического сечения сопла) [173, с. 325-363]. В некоторых случаях реализующиеся в КС низкочастотные колебания могут приводить к погасанию топлива, за которым может следовать самопроизвольное возгорание с последующим погасанием⁸. При этом количество циклов «погасание-возгорание» может достигать нескольких десятков за время работы ЭУ [159]. Экспериментальное исследование низкочастотной неустойчивости сводится к определению границ устойчивости исследуемой системы в координатах $L^* - p$, $L^* - u_0$ или $L^* - \omega$ где p - давление в камере сгорания; u_0 - скорость горения топлива; ω - частота колебаний, а также исследованию смещения границ устойчивости под влиянием различных факторов. [18, с. 141-169]. Развитие низкочастотной неустойчивости

⁶ Известны экспериментальные работы, в которых добавление 0,5% (от массы топлива) карбида циркония в исходный состав топлива приводило к полному устранению пульсаций давления [45]. Однако утверждение о том, что любой двигатель, работающий на металлизированных составах, будет заведомо устойчив, является необоснованным. Примером могут служить двигатель противолодочной ракеты Subroc и двигатель третьей ступени ракеты Minuteman I [44].

⁷ В литературе можно встретить другие названия данного явления: неакустическая неустойчивость (nonacoustic instability), L^* -неустойчивость.

⁸ Данное явление получило название «chuffing» («пыхтение») [30].

экспериментально исследовалась для ЭУ, использующих двухосновные топлива [30, 122, 159] двухосновные топлива с металлическими добавками, смесевые [27, 30, 124, 153, 159, 160] смесевые металлизированные топлива [114, 123]. Отдельно исследовался вопрос влияния размера частиц перхлората аммония на формирование низкочастотной неустойчивости [124]. Из всех указанных выше работ наиболее подробно процесс проведения эксперимента и методика обработки экспериментальных данных описаны в [159].

Линейная высокочастотная неустойчивость

Наиболее полное описание результатов экспериментального исследования линейной высокочастотной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ представлено в работах [41, 107]. В данных работах обобщаются результаты испытаний более чем сорока ЭУТТ, проводимых в рамках крупной международной исследовательской программы. Основной целью являлось пополнение базы экспериментальных данных, необходимых для верификации существующих и вновь создаваемых физико-математических моделей, описывающих линейную неустойчивость в ЭУТТ. В рамках эксперимента в рассматриваемых двигателях создавался одиночный импульс давления, генерируемый дополнительными пиротехническими составами, амплитуда которых составляла до 10% от среднего давления в КС. В опытах фиксировалось давление в камере сгорания как функция времени. По полученным зависимостям определялся коэффициент затухания генерируемого импульса.

В работе [107] рассматривались ЭУ с наполнителями⁹, имеющими цилиндрический канал и канал в форме звезды. Все используемые топливные составы были безметалльными. Значения среднего давления в КС лежали в диапазоне 12,3...15 МПа. В работе [41] рассматривались как безметалльные, так и металлизированные топлива. В отличие от [107], в [41] в одном пуске в КС создавался не один, а три одиночных импульса, что позволяло получить

⁹ 87% полидисперсного ПХА и 12% бутилкаучук

значения трёх коэффициентов затухания, соответствующих различным диаметрам проточной части камеры сгорания.

Нелинейная высокочастотная неустойчивость

Экспериментальные исследования неустойчивости к конечному импульсу (нелинейная неустойчивость рабочего процесса) начались ещё в 1960-х [59, 132]. При этом в ходе исследований наблюдались ЭУ, рабочий процесс в которых был устойчив к возмущениям давления малой амплитуды, но склонный к переходу на неустойчивые режимы работе при формировании в КС импульса давления конечной амплитуды [54]. Помимо фиксирования давления в КС в некоторых исследованиях для более глубокого изучения явления проводилась фотосъёмка через специальные окна в корпусе ЭУ [55]. Отдельно проводилось обширное экспериментальное исследование продольной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ [57]. Опыты осуществлялись с использованием 54 различных топливных рецептур, в которых варьировались не только тип связки, но и её массовая доля, размер частиц окислителя и алюминия. Помимо данной работы проводились исследования безметалльных составов [162]. Отдельно стоит отметить обширные исследования конца 1990х годов [42, 43, 48, 106, 108–110], в рамках которых проводились исследование ЭУ различной конфигураций и использующие в качестве топлива различные рецептуры (топлива с низким содержанием конденсированной фазы, с добавлением октагена и гексагена, металлизированные топлива). Данные работы, как и работы П. Харриса и Ф. Бломшильда в рамках исследование линейной неустойчивости, были направлены не только на исследование влияния различных факторов на формирование нелинейной неустойчивости, но и создания базы знаний для последующей верификации различных физико-математических моделей данного явления.

1.2 Теоретическое исследование неустойчивых режимов работы ЭУТТ

Низкочастотная неустойчивость

Самый простой анализ L^* -неустойчивости основывается на линеаризации закона сохранения массы для КС ЭУТТ и дополнением данного уравнения связью пульсаций давления и массоприхода с поверхности горения (функция отклика зоны горения топлива по давлению) с привлечением различных нестационарных моделей горения топлив [18]¹⁰. Так как частота колебаний при низкочастотной неустойчивости меньше первой моды частоты акустических колебаний рассматриваемой полости двигателя, все параметры в КС изменяются только по времени. Из решения полученной системы уравнений определяются частоты колебаний и значения приведенной длины камеры сгорания, при которой данные частоты реализуются. Аналогичные результаты получаются при рассмотрении ЭУ как замкнутой системой с обратной связью, в которой имеются два динамических звена, описывающих поведение зоны горения при наличии возмущений давления, и звена, описывающего поведение продуктов сгорания в камере при нестационарном горении топлива. В качестве источника начального возмущения может рассматриваться изменение площади горения, изменение площади критического сечения сопла или внешне подводимая масса газа. В качестве выходных параметров анализируются возмущения давления в камере сгорания или массового расхода через сопло. Важный результат, который подробно представлен в работах [66, 74, 145], заключается в том, что некоторые формы низкочастотной неустойчивости, по сути, являются акустической, что позволяет применять к ним способы описания, используемые при исследовании акустической неустойчивости. Связано это с тем, что при рассмотрении акустических колебаний в замкнутом объеме, где стенки имеют нулевую акустическую проводимость, возможен дискретный набор

¹⁰ В англоязычной литературе данный подход получил название «элементарной теорией» (elementary theory [173, Глава 9]).

частот колебаний. При этом нулевой моде соответствует тривиальное решение – отсутствие колебаний в полости. В случае же проточной части камеры сгорания ЭУТТ акустическая проводимость зоны горения и соплового блока отличны от нуля, что делает возможным существование помимо основного тона и обертонов также и нулевой моды колебаний, частота которой и соответствует частоте низкочастотных колебаний, фиксируемых при L^* -неустойчивости.

Высокочастотная неустойчивость

Множество подходов теоретического исследования высокочастотной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ можно разделить на три группы, отличающиеся друг от друга как детализацией процессов, протекающих в ЭУТТ (а, следовательно, и потребными вычислительными ресурсами), так и используемыми математическими методами. К первой группе относятся полуаналитические методики. В рамках данного подхода исследуется устойчивость течения в КС к некоторому заданному тестовому возмущению. Возмущение либо представляется в виде суперпозиции собственных мод колебаний проточной части КС, либо может исследоваться устойчивость отдельной моды. С вычислительной точки зрения задача сводится к определению знака комплексной части круговой частоты колебаний. Поиск решения может проводиться либо с использованием волнового уравнения относительно возмущений давления (подход Калика), либо с использованием уравнения энергии возмущения (энергетический подход, в настоящее время развиваемый Г. Фландро и его учениками) с дальнейшим его усреднением по объёму камеры и по времени. Данная группа методик не требует больших вычислительных ресурсов и позволяет в кратчайшие сроки определить устойчивость рабочего процесса в исследуемом ЭУТТ к определённым видам возмущений малой амплитуды. Основным недостатком является то, что вид возмущения задается (исходя из физических соображений), а не определяется в процессе решения. Преимущества методики очевидны при исследовании КС простой формы, однако математические сложности существенно

возрастают для исследования сложных каналов (канал в форме звезды, зонтика, выгонного колеса). Ко второй группе относятся методики, основанные на численном решении линеаризованных уравнений, описывающих динамику продуктов сгорания в КС. В отличие от подходов предыдущей группы в данной группе методик не делается никаких предположений относительно пространственной формы реализуемых колебаний. При этом решение может быть найдено в частотной области, если сделано предположение, что возмущение является гармоническим по времени, либо во временной области, если рассматривается эволюция некоторого стартового возмущения. В общей постановке исходная задача распадается на две: 1) определение основного квазистационарного¹¹ течения в КС; 2) определение возмущений, распространяемых на фоне данного квазистационарного течения. В случае исследования в частотной области после дискретизации линеаризованной системы уравнений задача сводится к отысканию собственных векторов и собственных значений некоторой матрицы. В качестве граничных условий для методик первых двух групп требуется знание акустических свойств зоны горения топлива, а именно безразмерной акустической проводимости $A_b = \rho_0 c_0 (u'/p')$, безразмерного акустического импеданса [13] $z_b = 1/A_b$, или функции отклика зоны горения по давлению $R_b = 1/\gamma M_b (M_b + A_b)$ ¹². В рамках подхода третьей группы происходит решение полных нелинейных уравнений, описывающих динамику ПС в КС, с привлечением различных моделей нестационарного горения топлив. Данный подход направлен на более детальное исследование структуры течения в ЭУТТ, на разрешение вихревых структур и генерацию вихревого звука в КС. Однако он требует больших вычислительных ресурсов и сопряжен с рядом сложностей, касающихся построения нестационарных

¹¹ Под термином «квазистационарный» здесь подразумевается то, что изменением параметров основного течения по времени можно пренебречь на фоне быстропеременного пульсационного течения.

¹² В приведенных формулах ρ_0 – плотность ПС; c_0 – скорость звука; u' , p' – пульсационная составляющая скорости и давления; γ – показатель адиабаты; M_b – число Маха на поверхности горения. Указанные определения акустической проводимости и функции отклика зоны горения по давлению не являются единственными. Подробно данный вопрос рассмотрен в [60, 135]. В данной работе в дальнейшем будут использоваться приведенные выше соотношения.

моделей горения топлива. Тем не менее, в исследовательском плане данный подход является наиболее полным. В настоящей работе развивается подход второй группы, не получивший столь широкого применения в области исследования устойчивости рабочего процесса применительно к ЭУТТ, как подходы первой и третьей группы. Тем не менее, именно данный подход может предоставить относительно полную картину явления и позволяет провести большое количество параметрических расчетов в обозримые сроки, не требуя чрезмерных вычислительных ресурса. Коротко рассмотрим методики, относящиеся к группе полуаналитических – методику Калика и энергетическую методику.

Подход Калика (F.E.C. Culick)

Работу [71] можно отнести к первой публикации автора, где последовательно излагается подход исследования устойчивости рабочего процесса к возмущениям малой амплитуды в различных ЭУТТ. Подход основывается на идеях, изложенных в работах [62, 63]. В рамках задачи рассматривается устойчивость рабочего процесса к продольным модам акустических колебаний в камере с проточной частью в форме цилиндра. Течение представляется в виде суперпозиции основного неоднородного стационарного течения и нестационарного пульсационного течения. Осуществляется линеаризация исходной системы уравнений, описывающих законы сохранения массы, импульса и энергии в элементарном объеме сплошной среды, а также формирование неоднородного волнового уравнения для пульсаций давления. В дальнейшем, используя метод функций Грина [14], задача сводится к интегральному уравнению относительно безразмерных пульсаций давления. Функция Грина представлялась в виде суперпозиции собственных колебаний рассматриваемой газовой полости. При этом основной задачей является отыскание зависимости мнимой части волнового числа от различных параметров камеры сгорания. Искомое волновое число для некоторой моды колебаний рассматривалось как сумма волнового числа, соответствующего решению невозмущенного волнового

уравнения, и некоторой поправки. Следующая работа Калика [72] являлась логическим продолжением работы 1963 года. В данной работе описывается применение разработанного подхода для ЭУТТ, в частности для интерпретации обширных экспериментальных данных, полученных В. Браунли и Ф. Марбелом, представленных в [56]. В работе [56] рассматривалось влияние диаметра критического сечения сопла, начального диаметра и температуры топлива на развитие тангенциальных мод колебаний в КС ЭУТТ. Большое внимание уделялось решению задачи воспроизводимости результатов. В качестве топлива использовался состав на основе полисульфида с перхлоратом аммония в качестве окислителя. Результатом работы стало построение границ устойчивости в координатах $K_n - D_p$, где K_n – отношение площади горячей поверхности топлива к площади критического сечения сопла, а D_p – диаметр проточной части КС. Каликом рассматривается только переход двигателя на неустойчивые режимы работы, т.е. делалась попытка с помощью разработанной методики получить границы устойчивости, аналогичные тем, что были получены в эксперименте. При этом не рассматриваются нелинейные эффекты, которые наблюдались В. Браунли и Ф. Марбелом. В данной работе уже более обстоятельно вводится разложение искомого решения по двум малым параметрам – безразмерной амплитуде колебаний ε и среднему числу Маха M_b у поверхности горения топлива¹³. Параллельно схожая задача линейной неустойчивости решалась Б. Зинном (B.T. Zinn) с применением метода Галеркина [172]. Как отмечается в [83], оба метода, примененные к уравнениям одного вида, дают одинаковый результат. В дальнейшем подход Калика был обобщен на случай нелинейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ [33, 76, 79–81, 170].

Предложенный Каликом подход как для квазиодномерного [75, 77], так и для трёхмерного случая [78], был положен в основу программного комплекса под названием SSP (Standard Stability Prediction program). Данный

¹³ Более подробно можно ознакомиться в [152, Глава 5.4], [83, Глава 3.1] и [15].

программный комплекс разрабатывался в США с середины 1970-х годов и использовался для определения линейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ, SSP имел две реализации: для продольных (SSP-1D) и поперечных (SSP-3D) мод колебаний, – и применялся совместно с расчетным комплексом SPP [103] по определению внутрибаллистических характеристик ЭУТТ (Solid Performance Program). Верификация комплекса SSP-1D с имеющимися экспериментальными данными представлена в работах [29, 41, 107, 148].

Энергетический подход

Параллельно с методикой Калика происходило развитие энергетической методики по исследованию неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ. Работы в данном направлении проводились в Applied Physics Laboratory с конца 1950-х годов в США [83, с. 100]. Первые исследования [111] были посвящены созданию упрощенной модели нестационарного горения топлива при наличии малых возмущений давления в камере сгорания ЭУТТ. Исследовалось влияние различных параметров задачи на величину функции отклика зоны горения. Однако верификация полученных результатов не проводилась в силу большого количества параметров (17 параметров) и невозможности их точного определения в эксперименте на тот момент. В работе [58] авторами рассматривается энергетический подход к вопросу исследования акустической неустойчивости ЭУТТ. Подход заключается в оценке источников акустической энергии и её диссипации в рассматриваемой полости с проницаемыми стенками. Было получено выражение для коэффициента затухания для случая распространения малых изоэнтропических возмущений в неоднородном потенциальном потоке. Данный подход был применен для получения зависимости коэффициента затухания от величины акустической проводимости зоны горения топлива. Подход получил развитие в работе [112]. В дальнейшем энергетическая методика, применяемая Р. Хартом (R. Hart), Р. Кантреллом (R. Cantrell) и Ф. МакКлюром (F. McClure), была обобщена на случай более сложных течений. Так Морфи (C. Morfe) [141]

получил выражение для изменения энергии малых возмущений, распространяющихся в неоднородном потоке. Пирсом (A. Peirce) [149] было получено выражение для изменения энергии малых возмущений при исследовании затухания плоских волн, распространяющихся в воздухе, с учетом колебательной релаксации молекул кислорода и азота. В работе [143] Маерсом (M. Myers) был предложен способ получения выражения для изменения энергии акустических возмущений, распространяющихся в стационарном изоэнтропическом потоке. Также был сформулирован общий подход к записи закона изменения энергии произвольного возмущения в стационарном изоэнтропическом потоке. Результаты данной работы были обобщены на случай произвольных возмущений, распространяемых в произвольном стационарном потоке в следующей работе Маерса [144]. Предложенный подход в дальнейшем широко применялся и дорабатывался на конкретных задачах, в которых рассматривались процессы в ЭУ различного назначения [31, 49, 86, 119, 142, 150, 167, 168, 171], в том числе ЖРД и ЭУТТ [94, 156]. Также энергетическая методика был обобщен на случай нелинейной неустойчивости ЭУ [98, 99, 101, 117].

Сравнение подхода Калика и энергетического подхода при исследовании нелинейной неустойчивости проводилось в работе [103]. Отмечено совпадение результатов, с теми, что были получены при решении полной системы уравнения Навье-Стокса, описывающих динамику продуктов сгорания в КС с привлечение нестационарной модели горения топлива.

1.3 Акустические свойства зоны горения топлива

Как отмечалось выше, устойчивость работы ЭУТТ к возмущениям малой амплитуды определяется балансом между источниками и стоками энергии возмущения в камере сгорания. Источниками энергии является основное течение и зона горения топлива. Среди потерь – вынос энергии через сопло, потери на частицах и вязкоупругие потери в топливе и на элементах конструкции. Каждая из указанных составляющих должна быть

оценена количественно для определения устойчивости рабочего процесса в конкретной ЭУ. Свойства зоны горения топлива заслуживают особого внимания, так как именно в топливе запасена энергия, часть которой подпитывает колебания давления в камере сгорания. Сложность физико-химических процессов, протекающих в зоне горения, значительно ограничивает возможности численного моделирования акустической проводимости с использованием моделей нестационарного горения смесевых топлив. Наиболее общий подход (и, как следствие, наиболее перспективный) заключающийся в детальном моделировании структуры смесевого топлива [115, 116, 120, 164], трехмерном моделировании физико-химических процессов в конденсированной и газовой фазах, является весьма затратным с точки зрения вычислений и, соответственно, достаточно уникальным исследованием [26, с. 148-150]. По этой причине большое распространение приобретают различные приближенные методы [25], [8, Глава 2-3], [7, 21, 22, 50].

Данное обстоятельство делает предпочтительным использование различных экспериментальных методик определения акустической проводимости зоны горения. Начало интенсивных работ в данном направлении приходится на конец 1950 – начало 1960х годов. В конце 50х в США. Э. Прайсом (E.W. Price) была предложена специальная установка для определения акустической проводимости зоны горения топлива, получившая название Т-камеры [68, 89, 112]. В самой простой конфигурации Т-камера представляет собой металлическую трубу длиной от полуметра до нескольких метров и диаметром несколько сантиметров. По торцам трубы располагаются исследуемые образцы топлива в форме дисков. Продукты сгорания истекают из отверстия в середине трубы, что определяется необходимостью минимизации потерь для первой продольной моды колебаний. Основными преимуществами данной установки являются простота конструкции, небольшой расход топлива, приходящийся на один опыт, а также возможность определения акустической проводимости зоны

горения в широком диапазоне частот и давлений в камере сгорания. В первых Т-камерах применялись наполнители с каналом в форме цилиндра, однако использование такой конфигурации вносило дополнительные сложности при интерпретации экспериментальных данных [173, Глава 17].

В классической Т-камере происходит самопроизвольное возбуждение первой продольной моды колебаний продуктов сгорания топлива. При этом в эксперименте фиксируются коэффициенты затухания (growth and decay constants) на начальном (после инициации наполнителя) и конечном (после выгорания наполнителя) этапах работы Т-камеры. Так как измерение акустической проводимости с использованием Т-камеры является косвенным, параллельно происходило развитие теории, направленной на корректную интерпретацию данных, полученных, в установке [34, 67, 113]. Первые работы по исследованию процессов в Т-камере были направлены на подтверждение возможности получения воспроизводимых результатов в данной установке и возможности сравнения акустической проводимости для разных рецептур топлива не только качественно, но и количественно [68, 84, 147]. Были получены близкие значения акустической проводимости одного и того же баллиститного топлива в различных схемах классической Т-камеры [68]. Также предлагались новые схемы Т-камеры исследования высокочастотных колебаний (до 20 кГц), в которых центральное сопло заменено щелями (прорезями), сделанными в корпусе Т-камеры по кольцу [127].

Важной работой, систематизирующей 30-летний опыт использования классической Т-камеры по исследованию баллиститных и смесевых топлив в США, является публикация М. Бекстеда (M.W. Beckstead) и К. Мередит (K.V. Meredith) [40]. В ней достаточно детально описывается ранний этап использования классической Т-камеры, в рамках которого в восьми лабораториях США независимо измерялась функция отклика зоны горения по давлению для тестового образца топлива А-13 (массовая доля монодисперсного перхлората аммония (90 мкм) – 76%, связка – РВАН). В

работе отмечается приемлемое совпадение результатов в диапазоне частот до 2000 Гц, полученных в различных лабораториях, однако, указывается на сильный разброс данных, наблюдаемый в рамках исследований внутри отдельной лаборатории. Представлены результаты по исследованию влияния концентрации и дисперсности ПХА¹⁴ на функцию отклика зоны горения топлива. В рамках проведенных исследований отмечен дестабилизирующий эффект уменьшения размеров частиц ПХА и повышения концентрации мелкодисперсной фракции. Описываются результаты крупной серии экспериментов по определению функции отклика топлива с низким содержанием конденсированной фазы в продуктах сгорания, применяемых в малогабаритных ЭУТТ. Данная серия экспериментов была направлена на исследование влияние стабилизирующих добавок, в качестве которых использовались ZrC , Al_2O_3 и графит.

По мере совершенствования топливных рецептур и введения в их состав металлических добавок все чаще возникали случаи, когда в классической Т-камере не происходило самопроизвольное возбуждение колебаний. Это было связано с диссипацией акустической энергии на частицах окислов металлов¹⁵. К концу 1960-х годов сформировались два основных подхода для решения данной задачи. Первый подход заключался в создании возмущений давления в Т-камере внешними устройствами с дальнейшим измерением коэффициентов затухания сгенерированных возмущений [102, 145, 166]. Вторым подходом заключался в развитии поверхности горения топлива с целью увеличения подпитки возмущений в камере сгорания. Вторым подходом привносил сложности при интерпретации данных, так как картина течения в Т-камере становится неоднородной [70].

В рамках первого подхода появились первые варианты импульсной Т-камеры (pulsed T-burner) [102, 145]. В дальнейшем была предложена более

¹⁴ Концентрация и размер частиц ПХА варьировался таким образом, чтобы у соответствующих рецептур оставалась неизменной скорость горения

¹⁵ Однако есть и успешные примеры применения классической Т-камеры для металлизированных топлив [126].

универсальная установка, в которой создавалось два импульса давления в одном опыте и измерялись их коэффициенты затухания. Данный результат достигался размещением по торцам Т-камеры двух устройств для генерации возмущений. Первое устройство срабатывало через некоторое время после воспламенения наполнителей, второе – сразу же после того как оба наполнителя выгорят [51, 166].

В рамках второго подхода удавалось создавать колебания в классической Т-камере путем развития стартовой поверхности наполнителя нанесением перфорации [1]. В некоторых методиках развитие поверхности осуществлялось изменением формы наполнителя на стакан или цилиндр. От опыта к опыту варьировалась начальная площадь горения и измерялся коэффициент затухания для различных значений площади горения. В дальнейшем по коэффициенту пропорциональности определялась функция отклика зоны горения по давлению. Данная установка получила название Т-камера с варьируемой площадью горения (Variable Area T-burner или VATB) [125, 137]. Существуют две её модификации, которые позволяют увеличить точность результатов испытаний [138], а также распространить VATB на случай низких частот [140]. Существует также методика, сочетающий сильные стороны как импульсной Т-камеры, так и VATB (Pulse/Variable-Area T-burner) [28].

Помимо классической Т-камеры и её различных модификаций существуют и другие способы экспериментального определения акустической проводимости зоны горения топлива, получившие, однако, менее широкое распространение. Способ, описанный в [53] основывается на создании колебаний давления в небольшой камере сгорания путем периодического изменения площади дополнительного специального отверстия в камере для отвода продуктов сгорания. Периодическое изменение осуществляется с помощью вращающегося клапана в выходном отверстии. Клапан работает одновременно с обычным соплом, диаметр критического сечения которого определяет давление в камере сгорания.

Частота колебаний задается угловой скоростью вращения клапана. Таким образом, колебания давления создаются на определенной частоте для определенного среднего давления в камере. Большинство испытаний с использованием данной экспериментальной установки проводится при частотах выше 300 Гц при амплитуде возмущений менее 10 % от среднего давления для уменьшения влияния нелинейных эффектов. Сравнение результатов, полученных в Т-камере и установке с вращающимся клапаном, показывает хорошее соответствие. При этом последняя установка имеет ряд преимуществ по сравнению с Т-камерой. К ним относится существенное сокращение числа требуемых испытаний для получения распределения акустической проводимости от частоты. Но есть и недостатки, например, вращающиеся детали при температуре 2500 – 3500 К.

Для определения акустической проводимости топлива также может применяться импедансная труба [37, 157], представляющая собой модификацию классического способа определения акустических свойств различных поверхностей. В данном подходе образец топлива размещается с одного конца трубы. На другом конце располагается акустический генератор. После запуска акустического генератора осуществляется поджиг топлива. В результате отражения падающей волны от поверхности горения в трубе реализуется стоячая волна определенной частоты, характеристики которой зависят от свойств отражающей поверхности, т.е. от акустической проводимости зоны горения топлива. В запуске осуществляется измерение пульсаций давления по длине трубы. Затем с помощью методики, изложенной в [139], рассчитывается акустическая проводимость и диссипация энергии возмущения в установке. Отличительной особенностью данной установки по сравнению с Т-камерой является возможность определения сдвига фаз между пульсациями скорости и давления. Показано, что потери в установке изменяются со временем, что как раз и подтверждает расхождение в результатах, полученных при исследовании самовозбуждаемых колебаний в классической Т-камере.

Наиболее перспективным методом экспериментального определения акустической проводимости можно считать метод с использованием магнитного расходомера [61, 136, 158, 169], который теоретически позволяет провести прямое измерение скорости продуктов у поверхности горения топлива при частотах выше 20 кГц. Создание пульсаций давления происходит посредством периодического изменения площади критического сечения сопла. Пульсации давления и пульсации скорости измеряются одновременно. В камере сгорания внешними устройствами создается магнитное поле, приводящее к возникновению разности потенциалов, фиксируемой на двух электродах, вмонтированных в образец топлива. Образец изготавливается в форме цилиндра. Несмотря на достаточно крупные стартовые финансовые вложения для организации измерительного стенда, данный метод является достаточно экономичным, так как требует образцов топлива малых габаритов для испытаний.

Еще одним способом, относящимся к прямым методам измерения функции отклика зоны горения по давлению, является так называемый микроволновой метод [165]. Данный метод основывается на эффекте Доплера. В опыте в установке с исследуемым горящим топливом создается возмущение давления, а по самому образцу распространяется ВЧ сигнал. Отражаясь от горячей поверхности топлива фаза отраженного сигнала приобретает сдвиг относительно падающего сигнала. Скорость изменения сдвига фаз фиксируется аппаратурой и по полученным данным определяется функция отклика зоны горения по давлению. Основными источниками ошибки определения функции отклика являются неровность поверхности наполнителя, его упругие свойства и вибрации самой установки. В рамках данного метода функция отклика зоны горения может быть измерена при частотах до 1800 Гц.

На основании проведенного анализа удалось сформировать основные составные части разрабатываемой комплексной методики определения продольной линейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ. Методика

основана на численном решении системы линеаризованных уравнений, описывающих динамику продуктов сгорания в камере ЭУТТ. Акустическая проводимость зоны горения топлив определяется экспериментально с использованием предложенной автором импульсной Т-камеры.

Глава 2. Методики исследования неустойчивых режимов работы ЭУТТ

В главе рассматривается энергетическая методика. Предлагается её модификация, связанная со способом усреднения параметров ПС в КС по времени. Также в главе представлена методика, основанная на численном решении линеаризованных уравнений, описывающих динамику продуктов сгорания в камере ЭУТТ.

2.1 Модификация энергетической методики

Как отмечалось в Главе 1, распространенной полуаналитической методикой исследования линейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ является энергетическая методика. Она подразумевает анализ баланса энергии возмущений, реализуемых в КС с учётом влияния процессов горения, теплообмена, диссипации энергии в сопловом блоке, демпфирование возмущений стенками камеры и других физических и химических факторов, влияющих на внутрикамерные процессы.

Баланс энергии возмущений в камере определяется на основе расчёта полей пульсаций давления и скорости потока, что позволяет дать количественную оценку источников и стоков энергии возмущения, линейная комбинация которых (только для случая возмущений малой амплитуды) определяет условие устойчивости ЭУТТ:

$$E_M = \sum E_i < 0, \quad (2.1)$$

где E_M – суммарная средняя энергия возмущения в ЭУТТ; E_i – средняя энергия возмущения для определённого источника и стока [26, с. 349-354].

Количественно линейная неустойчивость рабочего процесса в ЭУТТ описывается коэффициентом затухания α , получаемый в результате усреднения уравнения изменения энергии возмущения по времени.

При рассмотрении распространения возмущений малой амплитуды в некотором стационарном несжимаемом потоке газа, уравнение изменения энергии возмущения может быть записано следующим образом [100]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p' \cdot p'}{2} + \frac{\vec{u}' \cdot \vec{u}'}{2} \right] = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = -\nabla(p' \vec{u}') - M_b \frac{\vec{u}_0}{2} \nabla(p')^2 - M_b \vec{u}' \cdot [\nabla(\vec{u}' \vec{u}_0)], \quad (2.2)$$

$$I_2 = M_b \vec{u}' \cdot (\vec{u}' \times \nabla \times \vec{u}_0 + \vec{u}_0 \times \nabla \times \vec{u}'),$$

$$I_3 = \delta_d^2 \vec{u}' \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u}') - \delta^2 \vec{u}' \cdot [\nabla \times \nabla \times \vec{u}'],$$

где p_0 , \vec{u}_0 , ρ_0 - давление, скорость и плотность основного стационарного потока; p' , \vec{u}' , ρ' - давление, скорость и плотность возмущенного течения; $\delta^2 = \mu/\rho_0 a_0 L$; μ - коэффициент динамической вязкости; L - длина камеры сгорания; $\delta_d^2 = \delta^2(\zeta/\mu + 4/3)$; ζ - коэффициент объёмной вязкости. Данное выражение записано в безразмерном виде, в котором операция обезразмеривания выполняется следующим образом:

$$p = \frac{p^*}{\gamma p_0}, \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \vec{u} = \frac{\vec{u}^*}{a_0}, t = \frac{t^*}{R/a_0}, \vec{r} = \frac{\vec{r}^*}{R}, \quad (2.3)$$

где a_0 - скорость звука в невозмущенном потоке; γ - показатель адиабаты; R - радиус проточной части КС; верхним индексом «*» обозначены размерные величины; нижним индексом «0» обозначены параметры основного течения.

При этом параметры основного течения удовлетворяют следующей системе уравнений (основное течение в силу малости числа Маха M в КС рассматривается несжимаемым):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{u}_0 = 0 \\ \nabla \left(\frac{\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_0}{2} \right) - \vec{u}_0 \times \nabla \times \vec{u}_0 = -\nabla p_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Уравнение изменения энергии (2.2) позволяет определить устойчивость рабочего процесса в КС к возмущениям конкретной формы при известных полях $\vec{u}_0(r, \varphi, z)$ и $p_0(r, \varphi, z)$, удовлетворяющих системе уравнений (2.4) с соответствующими граничными условиями.

При этом возмущения задаются в виде

$$q'(r, \varphi, z, t) = \hat{q}'(r, \varphi, z) e^{\alpha t} e^{i\omega t}, \quad (2.5)$$

где пространственная форма возмущений $\hat{q}'(r, \varphi, z)$ известна. Таким образом, задача сводится к определению знака коэффициента затухания α , получаемый после подстановки (2.5) в (2.2) и интегрирования полученного выражения по объёму проточной части КС и усреднения по времени.

Данный подход может быть использован при исследовании как продольных, так и тангенциальных мод, однако наибольшую математическую проработанность данная методика получил для продольной акустической неустойчивости. В работах [93, 100, 131] рассматривается ЭУТТ с цилиндрическим каналом (рис. 2.1).

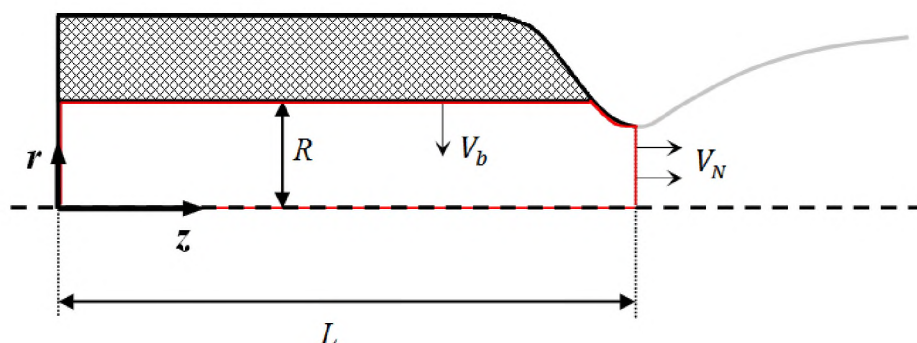


Рис. 2.1. Схема расчетной области при исследовании устойчивости продольных мод колебаний.

В качестве решения системы уравнений (2.4) относительно \vec{u}_0 при условии вдува газа с поверхности горения топлива в области $\{0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq (L - \Delta L)/R\}$, где ΔL – длина докритической части сопла, используется приближённое аналитическое решение [73], имеющее хорошее совпадение с результатами экспериментов с рабочим телом воздух [87]:

$$\begin{aligned} u_{0r} &= -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2} r^2\right) \\ u_{0\varphi} &= 0 \\ u_{0z} &= \pi z \cos\left(\frac{\pi}{2} r^2\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пространственная форма безразмерных пульсаций давления p' и вектора скорости \vec{u}' представляется в виде суммы акустической $(\hat{p}, \hat{\vec{u}})$ и вихревой $(\tilde{p}, \tilde{\vec{u}})$ составляющих:

$$\begin{aligned} p' &= p'_{ac} + p'_{rot} = (\hat{p}'_{ac}(r, z) + \tilde{p}'_v(r, z)) e^{\alpha_m t} e^{i\omega_m t} \\ \vec{u}' &= \vec{u}'_{ac} + \vec{u}'_{rot} = (\hat{\vec{u}}'_{ac}(r, z) + \tilde{\vec{u}}'_v(r, z)) e^{\alpha_m t} e^{i\omega_m t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где величины с нижним индексом «ac» представляют собой классические решения, описывающие распространения плоских акустических возмущений в неподвижной среде ($\vec{u}_0 = 0, \nabla \times \vec{u}' = 0$). Величины с нижним индексом «v» – поправки к классическим решениям, обусловленные проявлением вязких свойств среды и наличием ненулевого среднего течения.

Подставляя выражения (2.7) в уравнение для энергии возмущения, группируя соответствующие члены, получается следующее выражение, которое можно интерпретировать как уравнение изменения акустической энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(p'_{ac})^2}{2} + \frac{\vec{u}'_{ac} \cdot \vec{u}'_{ac}}{2} \right] &= I_{ac} + I_{ac}^0 + I_{rot} + I_{rot}^0 + I_{rot}^{ac} + I_{rot}^{0,ac}, \\ I_{ac} &= -\nabla(p'_{ac} \vec{u}'_{ac}) + \delta_d^2 \vec{u}'_{ac} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}'_{ac}), \\ I_{ac}^0 &= -M_b \frac{\vec{u}_0}{2} \nabla(p'_{ac} \cdot p'_{ac}) - M_b \vec{u}'_{ac} \nabla(\vec{u}'_{ac} \cdot \vec{u}_0), \\ I_{rot} &= -\nabla(\hat{p}'_{rot} \vec{u}'_{rot}) - \delta^2 \vec{u}'_{rot} \cdot [\nabla \times \vec{\omega}'_{rot}], \\ I_{rot}^0 &= -M_b (\vec{u}'_{rot} \nabla) \cdot (\vec{u}'_{rot} \cdot \vec{u}_0) + M_b \tilde{\vec{u}} \cdot (\vec{u}_0 \times \vec{\omega}'_{rot}), \\ I_{rot}^{ac} &= -M_b (\vec{u}'_{rot} \nabla) \cdot (\vec{u}'_{rot} \cdot \vec{u}_0) + M_b \vec{u}'_{rot} \cdot (\vec{u}_0 \times \vec{\omega}'_{rot}), \\ I_{rot}^{0,ac} &= -M_b \vec{u}'_{rot} \nabla(\vec{u}'_{ac} \vec{u}_0) - M_b \vec{u}'_{ac} \nabla(\vec{u}'_{rot} \vec{u}_0) + M_b \vec{u}'_{ac} \cdot (\vec{u}_0 \times \vec{\omega}'_{rot}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\vec{\omega}'_{rot} = \nabla \times \vec{u}'_{rot}$

В дальнейшем необходимо проинтегрировать уравнение (2.8) по всему объёму канала и усреднить полученное выражение по времени.

В работах [65, 93, 100, 131] усреднение по времени некоторой физической величины q осуществляется следующим образом:

$$\langle q \rangle = \frac{k}{2\pi} e^{\alpha t} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} q(t) \cdot e^{-\alpha t} dt, \quad (2.9)$$

где $k = 2\pi/\lambda$; λ – длина волны. Данная операция усреднения отличается от классической [3, с. 158]:

$$\langle q \rangle = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} q(t) dt \quad (2.10)$$

Использование (2.9) значительно упрощает расчёты и позволяет получить легко интерпретируемое выражение для коэффициента затухания α . Проводя операции усреднения для правой части (2.8), получается следующее итоговое выражение для α :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i, \quad (2.11)$$

где α_i отвечают за коэффициенты затухания различной природы и могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Вид конкретных коэффициентов α_i представлен в Приложении. В работе [95] в некоторых выражениях α_i при интегрировании по объёму проточной части КС предлагается перейти от интегрирования по объёму камеры сгорания к интегрированию по её поверхности, используя соотношение Остроградского-Гаусса и некоторые свойства решений. Данное преобразование облегчает дальнейшее исследование, т.к. уже не требуется знание пространственной формы колебаний во всём объёме камеры, а только на поверхностях, её ограничивающих: поверхности горения, стенках камеры и в критическом сечении сопла.

В случае применения операции усреднения (2.10), получается следующее уравнение относительно α :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{k}} e^{2\alpha t} [A \cos^2(kt) + B \sin^2(kt)] dt = D e^{2\alpha \frac{2\pi}{k}}, \quad (2.12)$$

где A, B и D – числовые константы, получаемые в результате интегрирования по объёму КС пространственной формы пульсаций давления и скорости. Выражения для них представлены в Приложении.

2.2 Физико-математическая модель процессов в камере сгорания ЭУТТ

В данном пункте Главы 2 рассматривается методика исследования неустойчивости ЭУТТ, основанная на численном решении линеаризованных уравнений, описывающих динамику продуктов сгорания камере установки.

На рис. 2.2 представлена общая схема ЭУТТ, в которой исследуется устойчивость рабочего процесса. Установка состоит из металлического корпуса, внутри которого размещается топливо с цилиндрическим каналом. Вдвиг ПС, обусловленный горением топлива, осуществляется по нормали к поверхности горения. Предполагается, что размер зоны, в которой происходит разложение топлива и дальнейшее химическое взаимодействие продуктов сгорания, существенно меньше радиуса проточной части КС. ПС в самой камере рассматриваются в виде однокомпонентной среды с постоянными теплофизическими свойствами. Истечение ПС происходит через сопло.

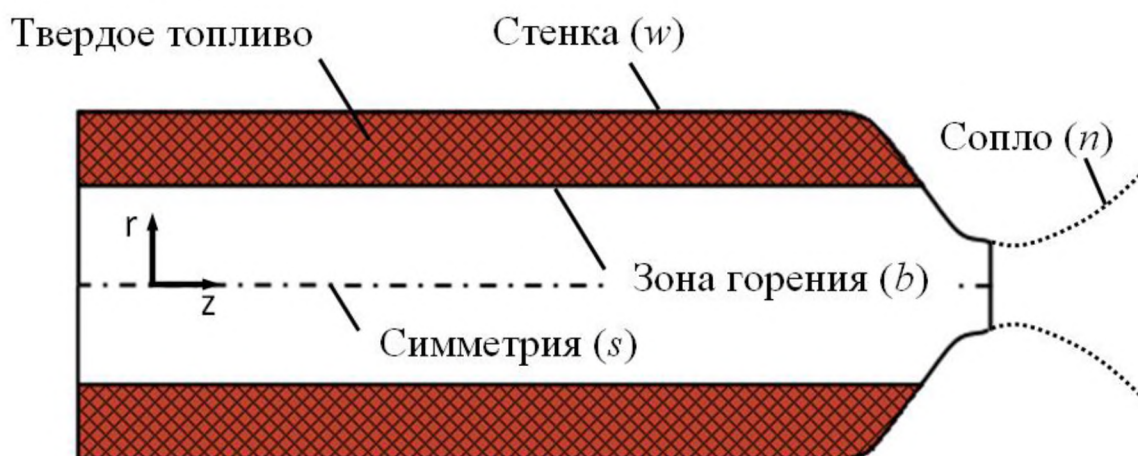


Рис. 2.2. Схема ЭУТТ.

Исходная система уравнений, описывающая динамику продуктов сгорания в КС ЭУТТ в дифференциальной форме, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u} - \vec{\tau}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{u} \rho \varepsilon - \vec{\tau} \cdot \vec{u}] + \nabla \cdot \vec{q} = 0 \\ p = \rho RT \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left(\xi - \frac{2}{3} \mu_v \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij}, \quad \vec{q} = -\lambda \nabla \cdot T$$

$$\varepsilon = e + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2}, \quad e = c_v T, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad u_\varphi = 0$$

где ρ , p , T – плотность, давление и температура ПС; \vec{u} – вектор скорости; τ_{ij} – компоненты тензора напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; e – удельная внутренняя энергия ПС, ε – удельная полная энергия ПС; c_v – удельная теплоёмкость ПС при постоянном объёме; $R = \frac{R_{\text{ун}}}{\mu}$, $R_{\text{ун}} = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная; μ – молярная масса ПС; μ_v – коэффициент динамической вязкости ПС; ξ – коэффициент объёмной вязкости ПС; λ – коэффициент теплопроводности ПС. Для исследования развития возмущений давления малой амплитуды течение в КС представляется в виде суперпозиции основного и пульсационного. Консервативные переменные $\vec{U} = [\rho, \rho u, \rho w, \rho \varepsilon]$, входящие в исходную систему уравнений (2.13) будут иметь следующий вид:

$$\vec{U}(\vec{x}, t) = \vec{U}_0(\vec{x}) + \vec{U}'(\vec{x}, t), \quad (2.14)$$

при этом предполагается, что

$$\frac{|U'_i|}{|[U_0]_i|} \ll 1, \quad i = 1 \dots 4 \quad (2.15)$$

На протяжении всего времени работы ЭУТТ значение основных параметров ПС меняется со временем. Претерпевает изменение и геометрия проточной части КС, обусловленная выгоранием топлива. Однако, в силу

относительно высокой частоты реализуемых в ЭУТТ колебаний давления (100 ... 1000 Гц) изменения параметров основного течения в КС по времени являются несущественным на фоне нескольких периодов колебаний давления. Данное обстоятельство позволяет рассматривать основное течение в КС стационарным (при фиксированной геометрии проточной части). Подобные рассуждения справедливы для основного режима работы ЭУТТ и требуют особой проверки на этапах выхода на режим и спаде давления.

В рамках данного предположения после группировки членов одного порядка малости и пренебрежения членами более высокого порядка система уравнений (2.13) распадается на две – систему уравнений, описывающую стационарное течение в КС и систему, описывающую пульсационное течение, накладываемое на данное стационарное течение. В дальнейшем обе системы вместе с замыкающими их граничными условиями и методами численного решения рассматриваются по отдельности.

2.2.1 Основное стационарное течение в КС

В рамках предположений, описанных в предыдущем пункте, система уравнений, которой подчиняются параметры установившегося течения ПС в КС, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \nabla(\rho_0 \vec{u}_0) = 0 \\ \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_0 \otimes \vec{u}_0 - \vec{\tau}_0) = 0 \\ \nabla \cdot [\vec{u}_0 \rho_0 \varepsilon_0 - \vec{\tau}_0 \cdot \vec{u}_0] + \nabla \cdot \vec{q}_0 = 0 \\ p_0 = \rho_0 R T_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_0 = e_0 + \frac{u_0^2}{2}, \quad e_0 = c_v T_0$$

$$[\tau_{ij}]_0 = -p_0 \delta_{ij} + \mu_v \left(\frac{\partial [u_i]_0}{\partial x_j} + \frac{\partial [u_j]_0}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_v \frac{\partial [u_i]_0}{\partial x_i} \delta_{ij}, \quad \vec{q}_0 = -\lambda \nabla T_0$$

Здесь в выражении для тензора напряжений опущен член, содержащий коэффициент объёмной вязкости.

Расчетная область ограничена поверхностью горения (*b*), твердой стенкой (*w*), сверхзвуковой частью сопла (*n*) и осью симметрии (*s*). В качестве граничных условий на поверхности горения задается скорость

продуктов сгорания u_{0b} , давление p_{0b} и температура T_{0b} . Скорость горения определяется через параметры ПС в камере в предположении, что происходит полная газификация топлива:

$$(\rho_{0b} \vec{u}_{0b}) \cdot \vec{n}_b = \rho_T u_T(p_b), \quad \vec{u}_{0b} \cdot \vec{\tau}_b = 0 \quad (2.17)$$

Здесь ρ_T – плотность топлива; $u_T = ap^\nu$ – закон горения топлива; a, ν – константы; $\vec{n}_b, \vec{\tau}_b$ – вектор нормали и вектор касательной к поверхности горения. Давление на поверхности горения равно местному давлению ПС, а температура T_{0b} является функцией p_{0b} .

$$\begin{aligned} p_{0b} &= p_0 \\ T_{0b} &= T_{0b}(p_{0b}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

На твердой стенке действует условие прилипания

$$\vec{u}_{0s} = 0 \quad (2.19)$$

Также стенка является теплоизолированной.

На границе сверхзвуковой части сопла производная потоков массы, импульса и энергии по нормали к границе равны нулю.

Стационарное решение нелинейной системы уравнений ищется методом установления в рамках метода конечных элементов с использованием метода Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ). В рамках данного подхода решается следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \vec{u}_0) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho_0 \vec{u}_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_0 \otimes \vec{u}_0 - \vec{\tau}_0) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho_0 \varepsilon_0)}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{u}_0 \rho_0 \varepsilon_0 - \vec{\tau}_0 \cdot \vec{u}_0] + \nabla \cdot \vec{q}_0 &= 0 \\ p_0 &= \rho_0 R T_0 \end{aligned} \right. \quad (2.20)$$

В более компактной форме система уравнений (2.20) может быть записана следующим образом [5]:

$$\frac{\partial \vec{U}_0}{\partial t} + \nabla (\vec{F}_0^E - \vec{F}_0^{visc}) = 0 \quad (2.21)$$

Общий поток массы, импульса и полной энергии разделяется на два: \vec{F}_0^E – поток, не содержащий членов с коэффициентом вязкости, и \vec{F}_0^{visc} – поток, определяемый вязкостью среды. Рассмотрим для простоты применение РМГ на примере скалярного уравнения относительно неизвестной w , удовлетворяющей уравнению переноса в некоторой расчетной области V :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla(\vec{f}) = 0 \quad (2.22)$$

где поток \vec{f} , согласно ранее принятым обозначениям, представим в виде $\vec{f} = \vec{f}^E - \vec{f}^{visc}$. Поток \vec{f}^E является нелинейной функцией w , в то время как $\vec{f}^{visc} = \vec{f}^{visc}(w, \nabla w)$. Исходная расчетная область V разбивается на множество попарно непересекающихся треугольных элементов $\{V^m, m = \overline{1, M}\}$, таких, что $\cup_m V^m = V$. Для каждого элемента V^m вводится локальный набор базисных функций $\{\psi_k^m(\vec{x}), k = \overline{1, N}\}$. В пределах каждого элемента V^m решение уравнения (2.22) с соответствующими граничными условиями $u^m(\vec{r}, t)$ реконструируется в виде разложения по введенном в данном элементе базису $\psi_k^m(\vec{x})$:

$$w^m(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^N \hat{w}_k^m(t) \psi_k^m(\vec{r}), \quad m = \overline{1, M} \quad (2.23)$$

Подставляя выражение (2.23) в исходное уравнение (2.22), необходимо потребовать ортогональность невязки в объеме элемента V^m всем базисным функциям ψ_l^m , что достигается последовательным умножением полученного выражение на $\psi_l^m(\vec{x})$, $l = \overline{1, N}$ и интегрированием по объему элементу V^m . Данную процедуру необходимо повторить для всех элементов V_m , $m = \overline{1, M}$. В результате получается следующая система ОДУ относительно $w_k^m(t)$:

$$\int_{V_m} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{w}_k^m}{\partial t} \psi_l \psi_k dV + \int_{V_m} \psi_l \cdot \nabla(\vec{f}) dV = 0, \quad (2.24)$$

$$l = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}$$

В дальнейшем во втором слагаемом нужно перейти от интегрирования по объему элемента V^m к интегрированию по его границе ∂V^m , используя теорему Остроградского-Гаусса:

$$\int_{V_m} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{w}_k^m}{\partial t} \psi_l \psi_k dV + \int_{\partial V^m} \psi_l \vec{f} \cdot \vec{n}^m dS - \int_{V_m} \vec{f} \cdot \nabla(\psi_l) dV = 0 \quad (2.25)$$

где \vec{n}^m – единичный вектор внешней нормали поверхности ∂V^m элемента V^m . Поток \vec{f} также аппроксимируется внутри элемента разложением в ряд по базисным функциям [32]:

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^N \hat{f}_k^m(t) \psi_k(\vec{r}), \quad (2.26)$$

в результате чего уравнение (2.25) примет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{w}_k^m}{\partial t} \int_{V_m} \psi_l \psi_k dV + \sum_{k=1}^N \left(\hat{f}_k^m \Big|_{\Gamma} \vec{n}^m \int_{S_m} \psi_l \psi_k dS + \hat{f}_k^m \int_{V_m} \psi_k (\nabla \psi_l) dV \right) \quad (2.27)$$

Уравнение (2.27) можно записать в матричном виде:

$$\hat{M}^m \frac{\partial \hat{w}^m}{\partial t} + \sum_i \left[(\hat{B}_r^m)^i \hat{f}_r^m \Big|_{\Gamma^i} + (\hat{B}_z^m)^i \hat{f}_z^m \Big|_{\Gamma^i} \right] + \hat{K}_r^m \hat{f}_r^m + \hat{K}_z^m \hat{f}_z^m = 0 \quad (2.28)$$

где \hat{M}^m , \hat{B}^m и \hat{K}^m – матрица масс, потоковая матрица и матрица жесткости для элемента V^m . Суммирование в (2.28) ведется по всем границам элемента m . В общем виде выражения для матриц \hat{M}^m , \hat{B}^m и \hat{K}^m имеют следующий вид:

$$\hat{M}_{lk}^m = \int_{V_m} \psi_l \psi_k dV \quad (2.29)$$

$$[\hat{K}_r^m]_{lk} = \int_{V_m} \psi_k \frac{\partial \psi_l}{\partial r} dV, \quad [\hat{K}_z^m]_{lk} = \int_{V_m} \psi_k \frac{\partial \psi_l}{\partial z} dV \quad (2.30)$$

$$[\hat{B}_r^m]_{lk} = \int_u \int_v (\psi_l \psi_k) N_r dudv, \quad [\hat{B}_z^m]_{lk} = \int_u \int_v (\psi_l \psi_k) N_z dudv \quad (2.31)$$

В выражении (2.31) N_r и N_z есть r и z -компоненты вектора внешней нормали \vec{N} поверхности S элемента расчетной сетки. Если поверхность элемента задается некоторым векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $\{u, v\} \in \Omega$, тогда $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ ¹⁶. Для дальнейшего решения системы ОДУ относительно $\hat{w}_k^m(t)$ необходимо выбрать способ аппроксимации потока \vec{f} на границе ячейки. В данной работе для приближения невязкого потока \vec{f}^E используется соотношение Лакса-Фридрикса [154, 155]:

$$f_\Gamma^E = \frac{1}{2}(\vec{f}_+^E + \vec{f}_-^E) \cdot \vec{n}_\Gamma - \frac{1}{2}\tau(w_+ - w_-) \quad (2.32)$$

где \vec{n}_Γ – внешняя нормаль границы рассматриваемого элемента; величины с нижним индексом «+» берутся из самого элемента, а с индексом «-» берутся из соседнего¹⁷. Поток $\vec{f}_\pm^E = \sum_{k=1}^N (\hat{f}_\pm^E)_k^m(t) \psi_k(\vec{r})$ необходимо выразить через w_\pm . После этого поток на границе элемента можно свести к виду $f_\Gamma^E = \sum_{k=1}^N (f_\Gamma^E)_k^m(t) \psi_k(\vec{r})$, где коэффициенты разложения $(f_\Gamma^E)_k^m$ будут определяться через коэффициенты разложения $(\hat{w}_\pm)_k^m$.

В случае потока $\vec{f}^{visc}(w, \nabla w) = \sum_{k=1}^N (\hat{f}^{visc})_k^m(t) \psi_k(\vec{r})$ для получения выражений для $(\hat{f}_\Gamma^{visc})_k^m$ через $(\hat{w}_\pm)_k^m$ предварительно необходимо рассчитать значения градиента величины w внутри самого элемента. Для этого производные представляются в виде разложения по базисным функциям

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^N g_{i,k}^m(t) \psi_k^m(\vec{r}) \quad (2.33)$$

¹⁶ $\vec{r}_u \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\vec{r}_v \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$

¹⁷ Верхний индекс « m » у обозначения границы m -ой ячейки Γ опущен, чтобы не перегружать запись.

Последовательно домножая разложение (2.33) на $\psi_l^m(\vec{x})$, $l = \overline{1, N}$ и интегрируя по объёму ячейки V^m , можно получить следующее выражение для $g_{i,k}^m(t)$:

$$\int_{V_m} \sum_{k=1}^N g_{i,k}^m(t) \psi_k^m \psi_l^m dV - \int_{\partial V^m} \psi_l w dS + \int_{V_m} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_i} \sum_{k=1}^N \widehat{w}_k^m(t) \psi_k^m(\vec{r}) dV = 0 \quad (2.34)$$

В уравнении (2.34) использовался переход от интегрирования по объёму к интегрированию по поверхности элемента. Решение системы (2.34) даст возможность получить выражения $g_{i,k}^m(t)$ через $(\widehat{w}_{\pm})_k^m$ и итоговые выражения для $(\widehat{f}_{\Gamma}^{visc})_k^m$.

Для решения (2.28) используется метод Рунге-Кутты второго порядка.

Если записать решаемую задачу в виде $\frac{\partial \widehat{w}}{\partial t} = \widehat{f}(t, \widehat{w})$, то значение \widehat{w} , на временном слое $n + 1$ будет определяться через значения на временном слое n следующим образом [150, с. 365]:

$$\widehat{w}^{n+1/2} = \widehat{w}^n + \frac{\Delta t}{2} \widehat{f}(t^n, \widehat{w}^n), \quad \widehat{w}^{n+1} = \widehat{w}^n + \Delta t \widehat{f}(t^{n+1/2}, \widehat{w}^{n+1/2}) \quad (2.35)$$

Шаг по времени Δt определяется через число Куранта C :

$$\Delta t = C \frac{\min_{m=1 \dots M} (d^m)}{\max_{\substack{m=1 \dots M \\ k=1 \dots 3}} (\lambda_k^m)}, \quad (2.36)$$

где d_m – длина наибольшего ребра треугольного элемента.

Система алгебраических уравнений, получающаяся в результате аппроксимации системы уравнений, описывающих основное установившееся течение, решается итерационным методом Крыловского типа – перезапускаемым методом обобщенных минимальных невязок (GMRES(m) – Restarted General Minimal RESiduals).

В качестве начального значения давления продуктов сгорания p_0^{init} берется значение, удовлетворяющее уравнению баланса расходов с поверхности горения и через сопло при реализации сверхзвукового течения (при фиксированном радиусе проточной части КС):

$$\rho_T u_T (p_0^{init}) S_T = \frac{p_0^{init} F_{кр}}{\sqrt{(2/(\gamma + 1))^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \gamma R T_0}}, \quad (2.37)$$

где S_T – площадь горения топлива; $F_{кр}$ – площадь критического сечения сопла. Найденные поля параметров основного течения затем подставляются в линеаризованную систему (2.13).

2.2.2 Пульсационное течение в КС

Линеаризованная система уравнений (2.13) имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \vec{u}' + \rho' \vec{u}_0) = 0 \\ \frac{\partial(\rho_0 \vec{u}' + \rho' \vec{u}_0)}{\partial t} + \nabla(\rho' \vec{u}_0 \otimes \vec{u}_0 + \rho_0 \vec{u}' \otimes \vec{u}_0 + \rho_0 \vec{u}_0 \otimes \vec{u}' - \vec{\tau}') = 0 \\ \frac{\partial(\rho' \varepsilon_0 + \rho_0 \varepsilon')}{\partial t} + \nabla[\vec{u}_0 \rho_0 \varepsilon' + \vec{u}_0 \rho' \varepsilon_0 + \vec{u}' \rho_0 \varepsilon_0 - \vec{\tau}' \vec{u}_0 - \vec{\tau}_0 \vec{u}'] + \nabla \vec{q}' = 0 \\ p' = \rho' R T_0 + \rho_0 R T' \end{array} \right. \quad (2.38)$$

В рамках работы [93] было показано, что при режимах течения, реализующихся в камере сгорания ЭУТТ, диссипация энергии возмущений малой амплитуды, обусловленная вязкостью и теплопроводностью газа значительно ниже диссипации энергии, вызванной её выносом через сопло. Поэтому членами $\vec{\tau}'$, $\vec{\tau}' \cdot \vec{u}_0$, $\vec{\tau}_0 \cdot \vec{u}'$ и $\nabla \cdot \vec{q}'$ можно пренебречь, т.е. рассматривать линеаризованные уравнения Эйлера (и уравнение состояния ПС):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}' + \rho' \vec{u}_0) = 0 \\ \frac{\partial(\rho_0 \vec{u}' + \rho' \vec{u}_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho' \vec{u}_0 \otimes \vec{u}_0 + \rho_0 \vec{u}' \otimes \vec{u}_0 + \rho_0 \vec{u}_0 \otimes \vec{u}' + p') = 0 \\ \frac{\partial(\rho' \varepsilon_0 + \rho_0 \varepsilon')}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{u}_0 \rho_0 \varepsilon' + \vec{u}_0 \rho' \varepsilon_0 + \vec{u}' \rho_0 \varepsilon_0 + p' \vec{u}_0 + \rho_0 \vec{u}'] = 0 \\ p' = \rho' R T_0 + \rho_0 R T' \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Акустические свойства зоны горения, стенки КС и соплового блока характеризуются значениями акустических импедансов Z_b , Z_w и Z_n . Для поверхности горения в качестве её характеристики вместо акустического импеданса Z_b чаще используется безразмерная акустическая проводимость. В случае распространения возмущений в движущейся среде связь между пульсациями давления p' нормальной компонентой пульсации скорости \vec{u}' на границе области с импедансом Z определяются выражением [90]:

$$\vec{u}' \cdot \vec{n} = \frac{p'}{Z} + \frac{1}{i\omega} \vec{u}_0 \cdot \nabla \left(\frac{p'}{Z} \right) - \frac{p'}{i\omega Z} \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot (\nabla \cdot \vec{u}_0)) \quad (2.40)$$

Таким образом, для поверхности топлива имеем:

$$\vec{u}'_b \cdot \vec{n} = \frac{p'_b}{Z_b} + \frac{1}{i\omega} \vec{u}_{0b} \cdot \nabla \left(\frac{p'_b}{Z_b} \right) - \frac{p'_b}{i\omega Z_b} \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot (\nabla \cdot \vec{u}_{0b})) \quad (2.41)$$

На стенке КС в силу условия прилипания $\vec{u}'_{0w} = 0$. При этом предполагается, что на стенке амплитуда падающей волны равняется амплитуде отраженной, т.е. $Z_w \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\vec{u}'_w \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.42)$$

Для соплового блока справедливо следующее соотношение:

$$\vec{u}'_n \cdot \vec{n} = \frac{p'_n}{Z_n} \quad (2.43)$$

Следует сделать некоторое замечание относительно импеданса сопла Z_n . В случае, когда длина волны колебаний существенно превосходит длину докритической части сопла, рассмотрение отражение волн в КС существенно упрощается. В рамках данных допущений можно получить следующее выражение для Z_n [69, 118]:

$$Z_n = \frac{2\bar{\rho}_0 \bar{c}_0}{(\gamma - 1)\bar{M}_0}, \quad (2.44)$$

где $\bar{\rho}_0$, \bar{c}_0 и \bar{M}_0 – среднее значение плотности основного течения, скорости звука и числа Маха на входе в сопло. При этом данное граничное условие выставляется не в критическом сечении сопла, а на входе в сужающуюся

часть сопла. Так исходная расчетная область, представленная на рис. 2.2, сводится к цилиндру.

Система уравнений (2.39) решается в частотной области. Предполагается, что возмущения в КС являются гармоническими по времени, т.е. $\vec{q}'(r, z, t) = \widehat{\vec{q}}'(r, z)e^{i\omega t}$, где $\vec{q}' = [\rho', \rho_0 \vec{u}' + \rho' \vec{u}_0, \rho_0 \varepsilon' + \rho' \varepsilon_0]^T$. Таким образом, исходная система уравнений сводится к виду

$$\begin{cases} i\omega \hat{\rho}' + \nabla(\rho_0 \widehat{\vec{u}}' + \hat{\rho}' \vec{u}_0) = 0 \\ i\omega(\rho_0 \widehat{\vec{u}}' + \hat{\rho}' \vec{u}_0) + \nabla(\hat{\rho}' \vec{u}_0 \otimes \vec{u}_0 + \rho_0 \widehat{\vec{u}}' \otimes \vec{u}_0 + \rho_0 \vec{u}_0 \otimes \widehat{\vec{u}}' + \hat{p}') = 0 \\ i\omega(\hat{\rho}' \varepsilon_0 + \rho_0 \hat{\varepsilon}') + \nabla \cdot [\vec{u}_0 \rho_0 \hat{\varepsilon}' + \vec{u}_0 \hat{\rho}' \varepsilon_0 + \widehat{\vec{u}}' \rho_0 \varepsilon_0 + \rho' \vec{u}_0 + \rho_0 \widehat{\vec{u}}'] = 0 \\ \hat{p}' = \hat{\rho}' RT_0 + \rho_0 RT' \end{cases} \quad (2.45)$$

Система уравнений (2.45) является линейной. Процесс дискретизации уравнений аналогичен процессу дискретизации для системы уравнений (2.20). При этом в силу линейности потоков их аппроксимация выполняется существенно проще. После дискретизации система (2.45) сведется к задаче на собственные значения в общей постановке:

$$A \vec{q}' = \omega B \vec{q}', \quad (2.46)$$

где матрицы A и B можно выразить через матрицу масс, потоковую матрицу и матрицу жесткости.

2.2.3 Расчетная сетка

Для численного решения системы дифференциальных уравнений, описывающих течение продуктов сгорания топлива в КС ЭУТТ, расчетная область разбивается на множество треугольных элементов. Граница области задается в виде набора кривых Безье второго порядка [19], которые в дальнейшем аппроксимируются набором отрезков с наперед заданной точностью. Для построения триангуляции используется метод триангуляции Делоне с ограничениями (на минимальный угол и минимальный размер ребра треугольника, принадлежащего триангуляции) [64]. Первичная триангуляция осуществлялась методом *ear clipping* [88].

Применение описанного выше алгоритма дискретизации расчетной области при численном исследовании течения вязкого газа в каналах сложной формы подробно рассмотрено в [20].

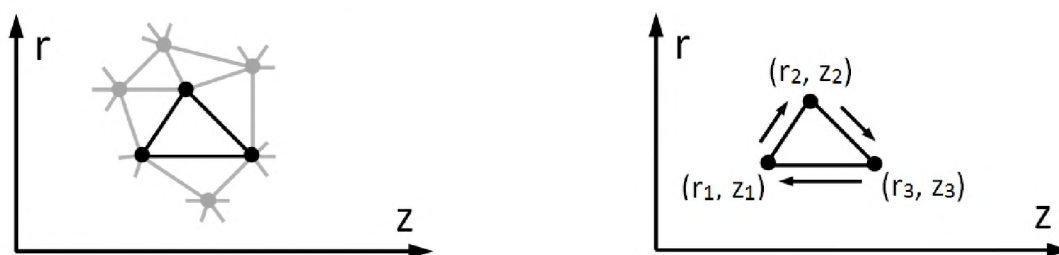


Рис. 2.3. Треугольный элемент расчетной сетки.

Для случая осесимметричного канала в качестве базисных функций используются полиномы Лагранжа. Алгоритм построения полином Лагранжа на произвольной треугольной области подробно изложен в [11, с. 133].

Для произвольного треугольного элемента расчетной сетки с координатами вершин $\{r_1, z_1\}$, $\{r_2, z_2\}$, $\{r_3, z_3\}$ (рис. 2.3) коэффициенты матрицы масс, матрицы жесткости и потоковой матрицы могут быть рассчитаны аналитически. В общем случае произведение полиномов Лагранжа $\psi_i \cdot \psi_j$ можно представить в виде

$$\psi_i \cdot \psi_j = \sum_{\substack{l,k \\ l+k \leq 2p}} h(l,k), \quad h(l,k) = r^l z^k \quad (2.47)$$

В результате расчет интегралов по объему элемента расчетной сетки и по его поверхности выражения $\psi_i \cdot \psi_j$ сводятся к сумме интегралов от одночленов вида $h(l,k)$. Для простоты расчет интегралов будет рассматриваться на примере одного слагаемого $h(l,k)$.

Для осесимметричного случая ячейки расчетной сетки представляют собой тело, образованное вращением треугольника вокруг оси, лежащей в одной плоскости с треугольником и не пересекающей сам треугольник (рис. 2.4)¹⁸. Для элементов массовой матрицы, удовлетворяющих выражению (2.29), интегрирование по объему элемента, сведется к сумме интегралов по

¹⁸ Случай, когда одно из ребер треугольника лежит на оси вращения, будет рассматриваться отдельно.

объему усеченных конусов, образующими которых являются ребра рассматриваемой треугольного элемента.

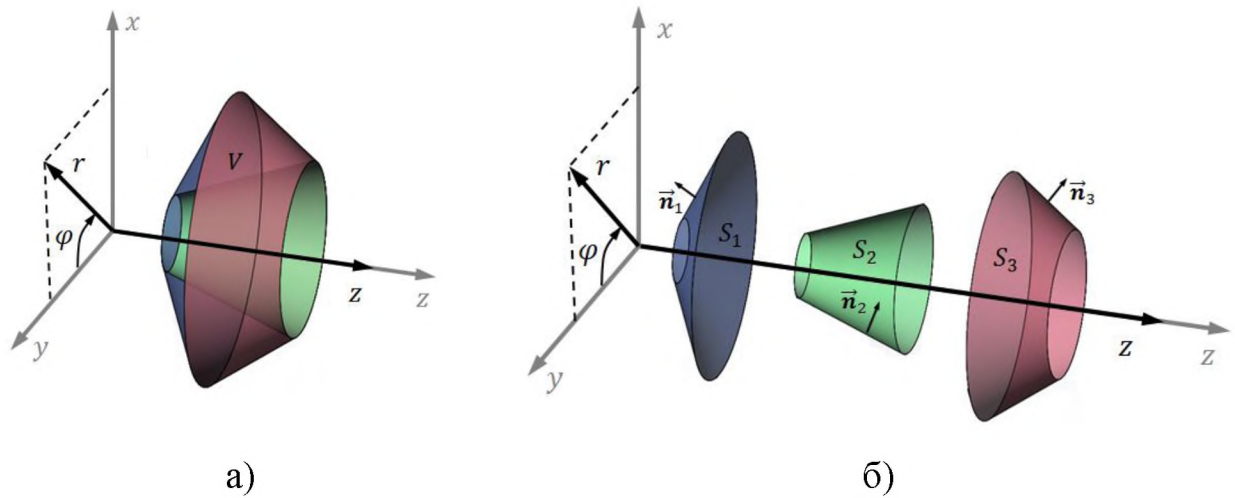


Рис. 2.4. Элемент расчетной сетки.

Множество точек ребра с координатами вершин $\{r_1, z_1\}$, $\{r_2, z_2\}$, $z_1 \neq z_2$ принадлежат прямой

$$r = az + b, \quad a = \frac{r_1 - r_2}{z_1 - z_2}, \quad b = \frac{r_2 z_1 - r_1 z_2}{z_1 - z_2} \quad (2.48)$$

Зная коэффициенты a и b , объемные интегралы можно свести к повторным так, что

$$\int_{V_m} h(l, k) dV = \sum_{s=1}^3 I_s^m(l, k), \quad I_s^m(l, k) = 2\pi \int_{z_{1s}}^{z_{2s}} z^k dz \int_0^{a_s z + b_s} r^{l+1} dr \quad (2.49)$$

В выражении (2.49) суммирование ведется по усеченным конусам (т.е. по ребрам). После интегрирования по z выражение для I_s^m примет вид

$$I_s^m(l, k) = \frac{2\pi}{l+2} \int_{z_{1s}}^{z_{2s}} z^k (a_s z + b_s)^{l+2} dz \quad (2.50)$$

Для расчета (2.50) в подынтегральном выражении можно перейти к биномиальному разложению

$$(a_s z + b_s)^{l+2} = \sum_{n=0}^{l+2} C_{l+2}^n (az)^{k+1-n} b^n, \quad C_{l+2}^n = \frac{(l+2)!}{n! (l+2-n)!} \quad (2.51)$$

После интегрирования по z получается следующее выражение для $I_s^m(l, k)$

$$I_s^m(l, k) = \frac{2\pi}{(l+2)a^{k+1}} \sum_{n=0}^{l+2} \left[\frac{(l+2)!}{n!(l+2-n)!} \frac{a^q b^n}{q} [z_{2s}^q - z_{1s}^q] \right], \quad (2.52)$$

$$q = l + k - n + 3$$

При вырождении усеченного конуса в цилиндр ($a = 0, r = b$), выражение (2.52) примет следующий вид:

$$I_s^m(l, k) = \frac{2\pi b^{l+2}}{(l+2)(k+1)} [z_{2s}^{k+1} - z_{1s}^{k+1}] \quad (2.53)$$

Аналогично матрице масс осуществляется расчет матриц жесткости $[\widehat{K}_r^m]_{lk}$ и $[\widehat{K}_z^m]_{lk}$, элементы которых удовлетворяют соотношениям (2.30), так как выражения $\psi_k \frac{\partial \psi_l}{\partial r}$ и $\psi_k \frac{\partial \psi_l}{\partial z}$ также можно представить в виде (2.47).

В выражениях для потоковых матриц суммарная поверхность ячейки в общем случае образована тремя боковыми поверхностями усеченных конусов, образующими которых являются ребра треугольников расчетной сетки (рис. 2.4-б). Множество точек поверхности усеченного конуса, задается радиус-вектором

$$\vec{r} = [r \cos \varphi, r \sin \varphi, \tilde{a}r + \tilde{b}]^T, \quad (2.54)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \tilde{a} = \frac{z_1 - z_2}{r_1 - r_2}, \quad \tilde{b} = \frac{z_2 r_1 - z_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

С учетом (2.54) вектор нормали поверхности равен $\vec{N} = [-\tilde{a}r, 0, r]^T$ в цилиндрической системе координат. Таким образом, после введенной параметризации выражения для потоковых матриц (2.31) сведутся к виду

$$[\widehat{B}_r^m]_{lk} = -2\pi \tilde{a} \int_{r_1}^{r_2} r^{l+1} (\tilde{a}r + \tilde{b})^k dr, \quad (2.55)$$

$$[\widehat{B}_z^m]_{lk} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r^{l+1} (\tilde{a}r + \tilde{b})^k dr$$

В случае, когда ребро треугольного элемента параллельно оси z ($\tilde{a} \rightarrow \infty$), поверхность вращения будет представлять собой боковую поверхность цилиндра радиусом $R = r_1 = r_2$, которая задается радиус-вектором

$$\begin{aligned} \vec{r} &= [R\cos\varphi, R\sin\varphi, z]^T, \\ z_1 &\leq z \leq z_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (2.56)$$

При этом нормаль $\vec{N} = [R, 0, 0]^T$, а выражения (2.55) преобразуются к виду

$$[\hat{B}_r^m]_{lk} = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} R^{l+1} z^k dz, \quad [\hat{B}_z^m]_{lk} = 0 \quad (2.57)$$

Последовательно проводя указанные выше вычисления, можно получить итоговые выражения для элементов матриц масс, жесткости и потоковых матриц, которые представлены таб. 2.1.

Таб. 2.1. Элементы матриц.

Матрица масс	
	$\widehat{M}^m(l, k) = \sum_{s=1}^3 I_s^m(l, k), \quad I_s^m(l, k) = 2\pi \int_{z_{1s}}^{z_{2s}} \int_0^{az+b} r^l z^k \cdot r dr$
$r \neq const,$ $z \neq const$	$I_s^m(l, k) = \frac{2\pi}{(l+2)a^{k+1}} \sum_{n=0}^{l+2} \left[\frac{(l+2)!}{n!(l+2-n)!} \frac{a^q b^n}{q} [z_{2s}^q - z_{1s}^q] \right],$ $q = l + k - n + 3$
$r = const$	$I_s^m(l, k) = \frac{2\pi b^{l+2}}{(l+2)(k+1)} [z_{2s}^{k+1} - z_{1s}^{k+1}]$
$z = const$	$I_s^m(l, k) = 0$
Матрицы жесткости	
	$[\widehat{K}_{lk}^m]_r = \sum_{i=1}^3 (I_{st}^r)_i^m(l, k), \quad (I_{st}^r)_i^m(l, k) = 2\pi \int_{z_{1i}}^{z_{2i}} \int_0^{az+b} l r^{l-1} z^k \cdot r dr$
$r \neq const,$ $z \neq const$	$(I_{st}^r)_i^m(l, k) = \frac{2\pi l}{(l+1)a^{k+1}} \sum_{n=0}^{l+2} \left[\frac{(l+1)!}{n!(l+1-n)!} \frac{a^q b^n}{q} [z_{2i}^q - z_{1i}^q] \right],$ $q = l + k - n + 2$
$z = const$	$(I_{st}^r)_i^m(l, k) = \frac{2\pi l b^{l+1}}{(l+1)(k+1)} [z_{2i}^{k+1} - z_{1i}^{k+1}]$
$r = const$	$(I_{st}^r)_i^m(l, k) = 0$
	$[\widehat{K}_{lk}^m]_z = \sum_{i=1}^3 (I_{st}^z)_i^m(l, k), \quad (I_{st}^z)_i^m(l, k) = 2\pi \int_{z_{1i}}^{z_{2i}} \int_0^{az+b} k r^l z^{k-1} \cdot r dr$
$r \neq const,$ $z \neq const$	$(I_{st}^z)_i^m(l, k) = \frac{2\pi k}{(l+2)a^{k+1}} \sum_{n=0}^{l+2} \left[\frac{(l+2)!}{n!(l+2-n)!} \frac{a^q b^n}{q} [z_{2i}^q - z_{1i}^q] \right],$ $q = l + k - n + 2$
$z = const$	$(I_{st}^z)_i^m(l, k) = \frac{2\pi b^{l+2}}{(l+2)} [z_{2i}^k - z_{1i}^k]$
$r = const$	$(I_{st}^z)_i^m(l, k) = 0$
Потоковые матрицы	
	$[\widehat{B}_{lk}^m]_{r,z}^i = (I_{flux}^{r,z})_i^m(l, k)$
$r \neq const,$ $z \neq const$	$(I_{flux}^z)_i^m(l, k) = 2\pi \sum_{n=0}^k \left[\frac{k!}{n!(k-n)!} \frac{\tilde{a}^{k-n} b^n}{q} [r_{2i}^q - r_{1i}^q] \right],$ $(I_{flux}^r)_i^m(l, k) = -\tilde{a} (I_{flux}^z)_i^m(l, k), \quad q = l + k - n + 2$
$z = const$	$(I_{flux}^z)_i^m(l, k) = \frac{2\pi b^k}{(l+2)} [r_{2i}^{l+2} - r_{1i}^{l+2}], \quad (I_{flux}^r)_i^m(l, k) = 0$
$r = const$	$(I_{flux}^z)_i^m(l, k) = 0, \quad (I_{flux}^r)_i^m(l, k) = \frac{2\pi r_{1i}^{l+1}}{(k+1)} [z_{2i}^{k+1} - z_{1i}^{k+1}]$

Глава 3. Экспериментальное определение акустических свойств зоны горения конденсированных систем

Данная глава посвящена описанию предлагаемой методики измерения акустической проводимости зоны горения топлива. Представлена схема экспериментальной установки, порядок проведения эксперимента, а также способ последующей обработки полученных экспериментальных данных. В главе приводятся результаты по определению акустической проводимости безметаллического и металлизированного составов в диапазоне частот до 1000 Гц для трёх давлений в КС. Проводится сопоставление полученных данных с данными для схожих топлив.

3.1 Экспериментальная установка по определению акустической проводимости топлива

Для экспериментального определения акустических свойств зоны горения предлагается использовать импульсную Т-камеру, схема которой представлена на рис. 3.1. В состав установки входят классическая Т-камера и две вспомогательные камеры генерации возмущений давления (далее ВК). Т-камера состоит из пяти съёмных стальных секций. Длина проточной части Т-камеры составляет 1700 мм, диаметр – 151 мм. Изменение числа секций установки позволяет варьировать частоту создаваемых продольных колебаний продуктов сгорания, тем самым измерять акустическую проводимость зоны горения в широком диапазоне частот. Конструкция соплового блока предусматривает возможность изменение диаметра критического сечения до запуска установки путём замены молибденового вкладыша. В качестве устройства генерации импульса давления в Т-камере выступают вспомогательные камеры генерации возмущений давления (ВК), соединяющиеся с крышками Т-камеры посредством четырёх шпилек. В свободном объёме ВК размещается пиротехнический состав, обеспечивающий разрыв металлической мембраны, зажимаемой в канале,

соединяющем свободный объем ВК и Т-камеры (рис. 3.2). Посадочное место разрывной мембраны в крышке Т-камеры и поверхность ответной детали ВК имеют форму усеченного конуса. Данная конструкция позволяет сформировать при зажиме мембраны кольцевой концентратор напряжений, по которому происходит её разрыв.

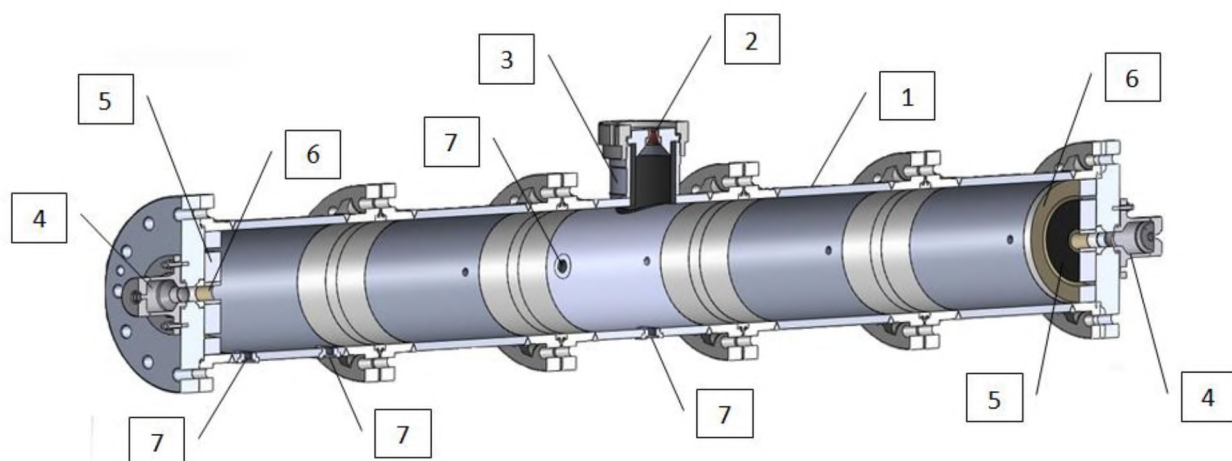


Рис. 3.1. Схема импульсной Т-камеры: 1 - съёмные стальные секции Т-камеры; 2 – молибденовый вкладыш критического сечения сопла; 3 – сопловой блок; 4 – вспомогательные камеры генерации малых возмущений; 5 – топливо; 6 – бронировка поверхности топлива; 7 – посадочные места ПП ДДИ-21.

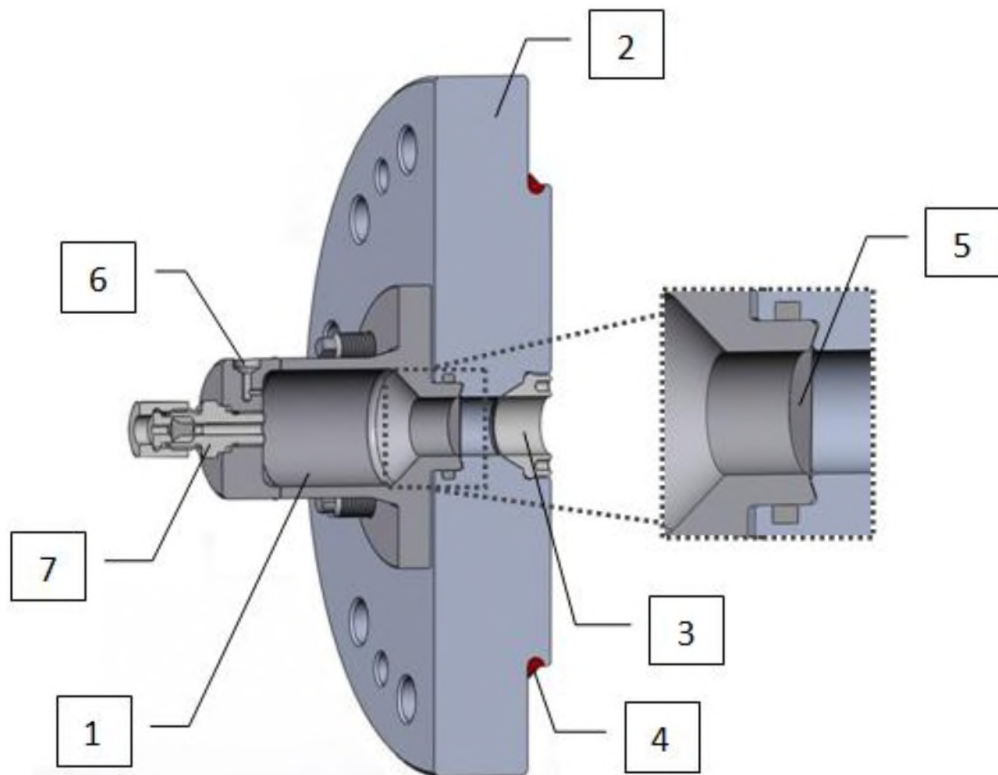


Рис. 3.2. Схемы вспомогательной камеры генерации возмущений давления на крышке Т-камеры: 1 – вспомогательная камера; 2 – крышка Т-камеры; 3 – втулка; 4 – уплотнительная резинка; 5 – разрывная мембрана; 6 – посадочное место ПП ЛХ-412; 7 – штуцер сальниковый для герметичного вывода проводов запального устройства.



Рис. 3.3. Т-камера с ВК на ступеле испытательного стенда.

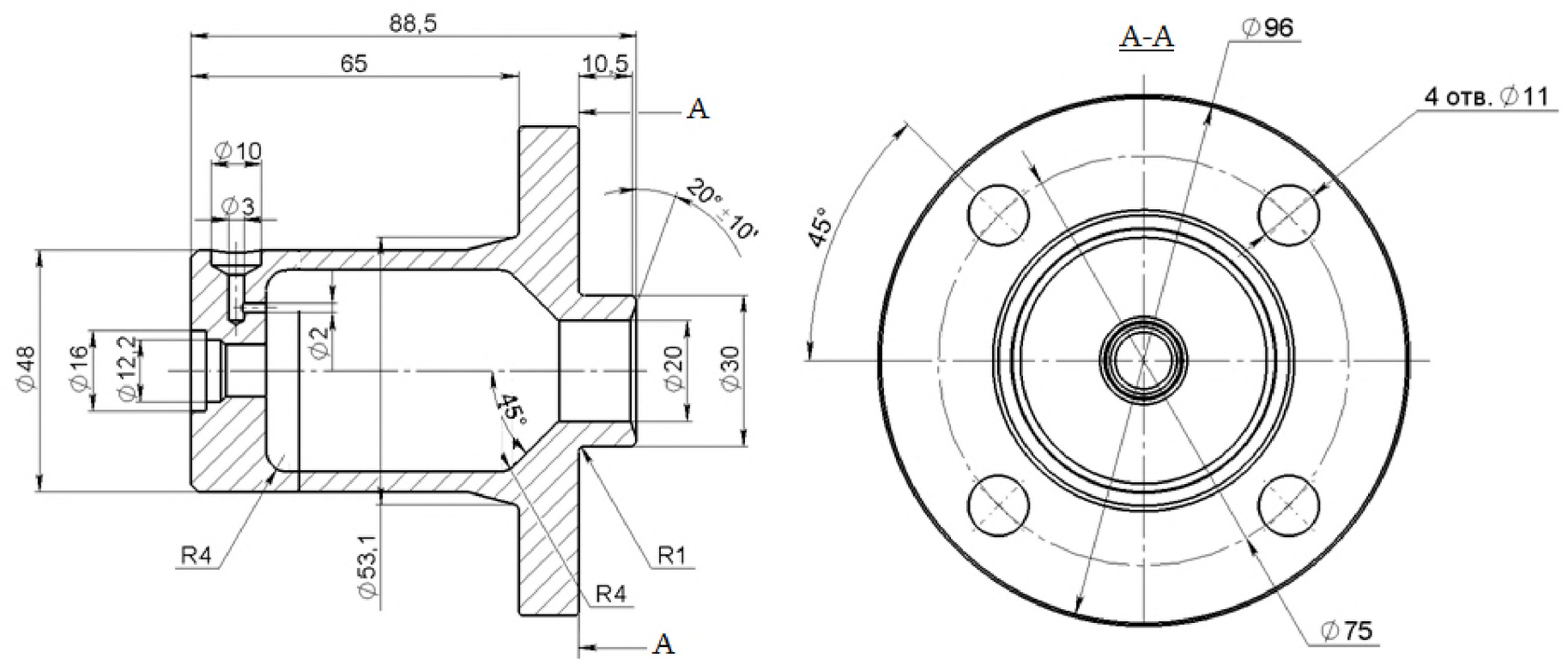
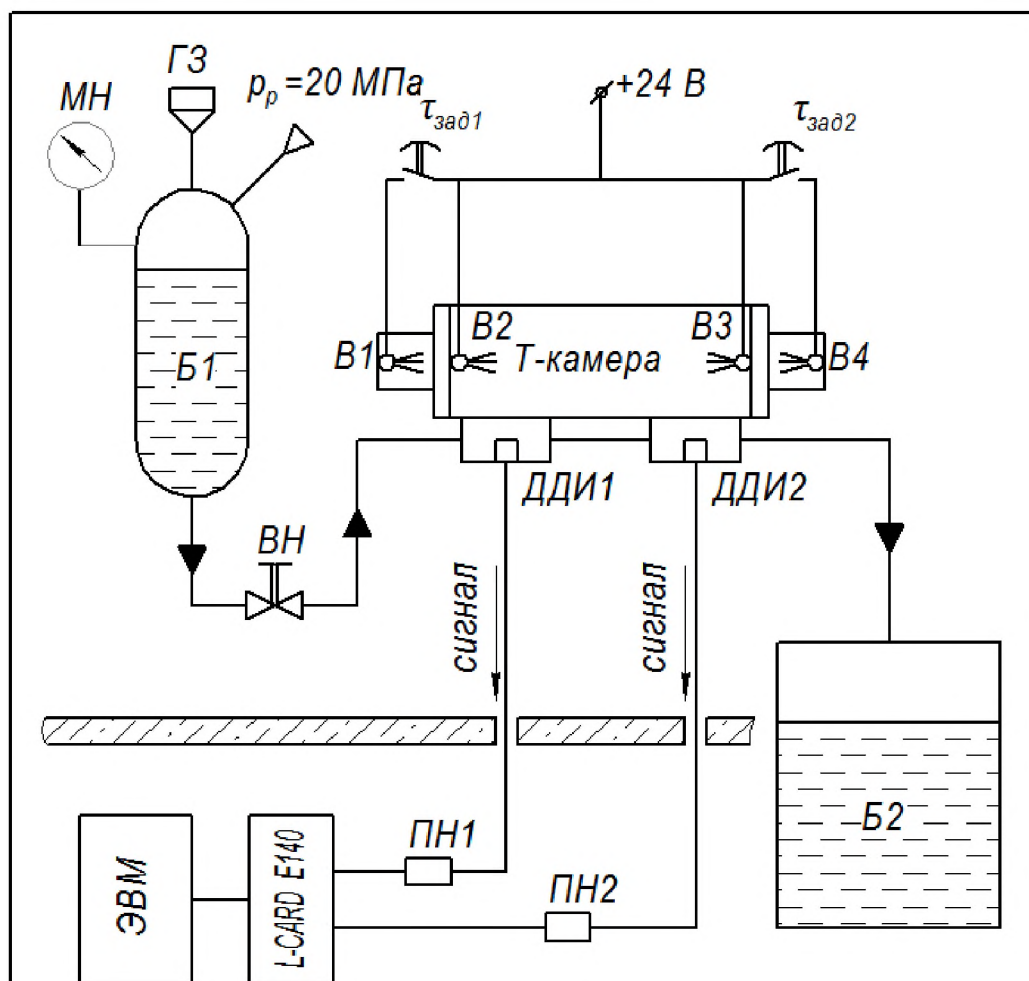


Рис. 3.4. Вспомогательной камера генерации возмущений давления.



Техническая характеристика

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 1. Рабочая среда | - продукты сгорания ТТ; |
| 2. Вспомогательная среда | - вода; |
| 3. Расход вспом. среды | - 5 л/мин; |
| 4. Время работы системы | - до 10 с; |
| 5. Задержки | - $\tau_{зад1} = 3...5$ с; |
| | $\tau_{зад2} = 6...9$ с. |

Поз. обозн.	Наименование	Кол-во	Примечание
ДДИ1, ДДИ2	Датчик давления ДДИ	2	$p_k = 4,5$ МПа; 10 кГц
ЭУ	Экспериментальная установка "Т-камера"	1	$p_{макс} = 20$ МПа
ПН1, ПН2	Нормирующий преобразователь НП-03	2	10 кГц; ЗАО "Цати"
В1...В4	Навеска воспламенительная	4	$M = 3...31$ г

Рис. 3.5. Схема испытательного стенда для проведения запусков импульсной Т-камеры.

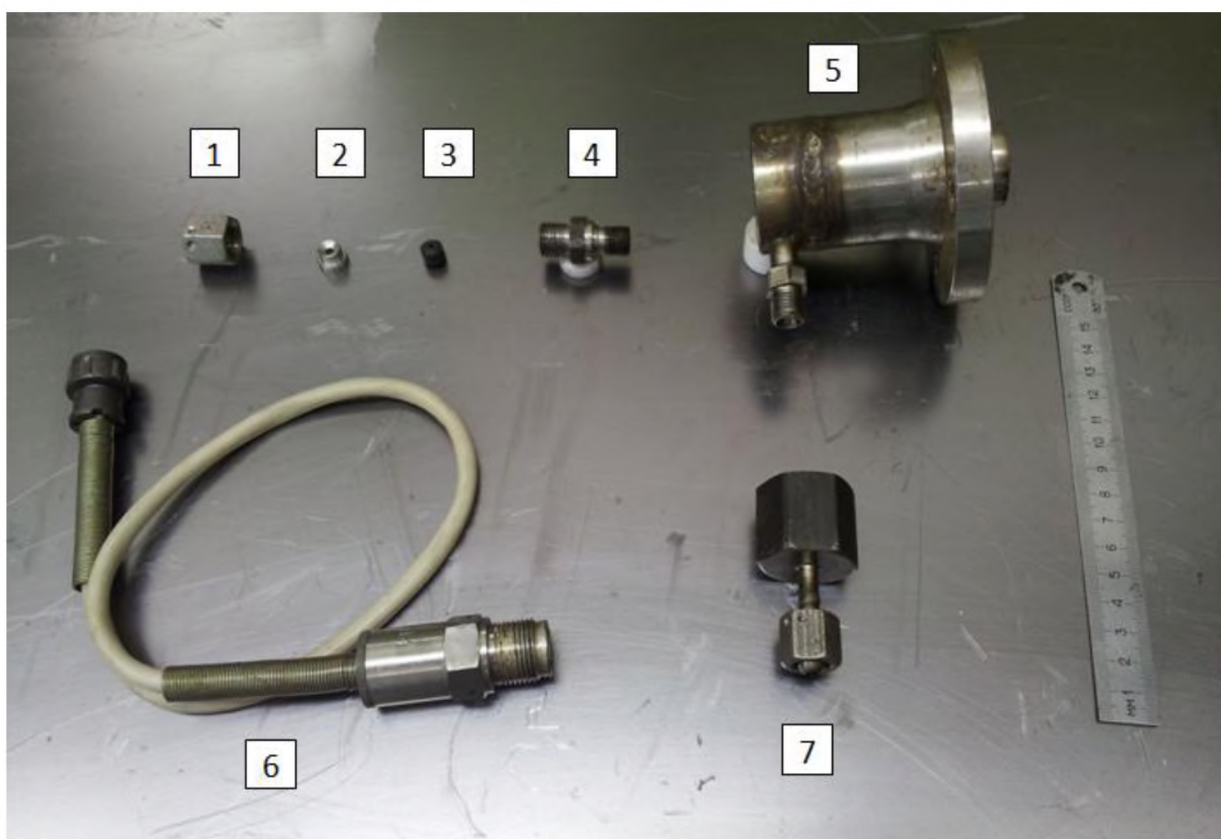


Рис. 3.6. Вспомогательная камера генерации возмущений давления: 1 – гайка накидная 6-21-ОСТ 92-3905-76; 2 – втулка сальниковая; 3 – прокладка сальниковая; 4 – штуцер сальниковый; 5 – корпус вспомогательной камеры; 6 – ПП ЛХ-412; 7 – посадочное гнездо ПП ЛХ-412.



а) Основные наполнители

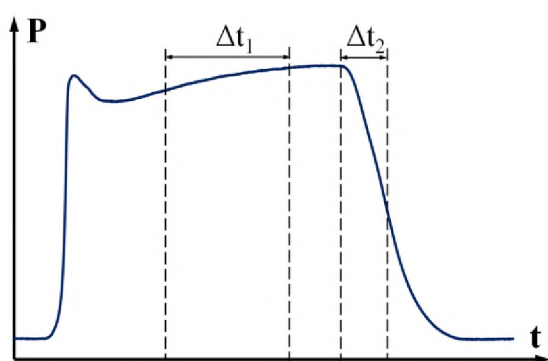


б) Втулка с деревянной проставкой

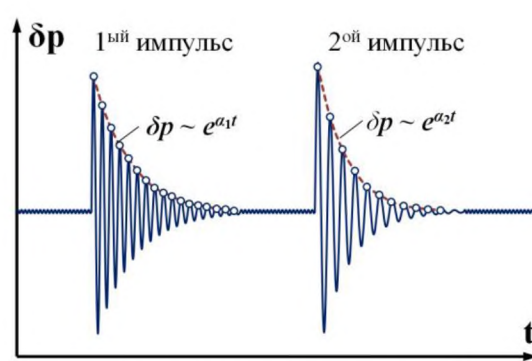
Рис. 3.7. Оснастка импульсной Т-камеры.

3.2 Методика определения акустической проводимости зоны горения безметалльных и металлизированных топлив

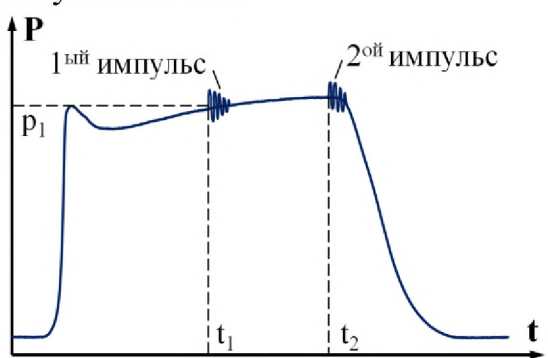
Для определения акустической проводимости зоны горения исследуемого состава проводится серия запусков. Для каждого запуска изготавливаются образцы в форме цилиндра с центральным отверстием. В первом запуске ВК не используются, а по торцам Т-камеры устанавливаются крышки без отверстий, к внутренней поверхности которых приклеиваются изготовленные образцы топлива. В начальный момент времени после появления тока в цепи происходит одновременное срабатывание воспламенительных устройств В2 и В3 (рис. 3.5), необходимых для поджига основного наполнителя. По полученным данным определяется продолжительность работы установки, необходимая в дальнейшем для правильного выставления временной задержки для своевременного срабатывания пиротехнических составов в ВК в последующих запусках (рис. 3.8-а, б).



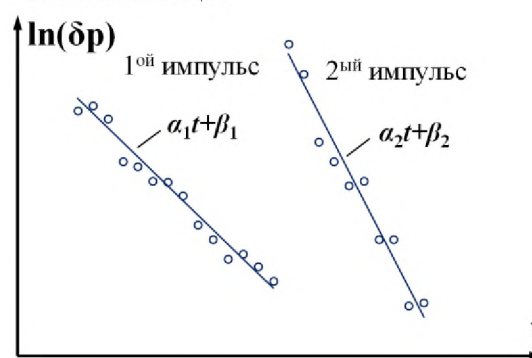
а) определение временных задержек в запуске без ВК



в) выделение пульсационной составляющей



б) генерация импульсов в Т-камере



г) расчет коэффициентов затухания

Рис. 3.8. Последовательность измерений с использованием импульсной Т-камеры.

В дальнейших запусках по торцам Т-камеры устанавливаются две ВК с металлическими мембранами. Внутри ВК располагаются воспламенительные устройства В1 и В4. Времена задержки между срабатыванием воспламенительных устройств {В2, В3} и В1, а также В1 и В4 выставляются таким образом, чтобы срабатывание ВК приходилось на основной период работы установки Δt_1 и на участок спада Δt_2 , в момент, когда оба наполнителя уже выгорели. В начальный момент времени срабатывают воспламенительные устройства В2 и В3. Затем после того как пройдет время, установленное на реле, последовательно срабатывают воспламенительные устройства В1 и В4. При достижении в ВК давления разрыва мембраны в Т-камере создается импульс давления, который затухает со временем. Пульсации давления в эксперименте фиксируются охлаждаемыми высокочастотными датчиками давления (ДДИ-21), на основании показаний которых рассчитываются коэффициенты затухания первого и второго импульсов (рис. 3.8-б, в). По полученным коэффициентам затухания рассчитывается акустическая проводимость зоны горения топлива и функция отклика зоны горения по давлению.

Для первого импульса коэффициент затухания

$$\alpha_1 = \alpha_c + \alpha_d, \quad (3.1)$$

Где $\alpha_c > 0$ – коэффициент затухания, характеризующий приток энергии от поверхности горения топлива; $\alpha_d < 0$ – коэффициент затухания, описывающий диссипацию акустической энергии Т-камере. При этом [70, 166]

$$\alpha_c = 2f \frac{S_b a_{th}}{S_c a} (Re(A_b) + M_b), \quad (3.2)$$

$$R_b = \frac{1}{\gamma} + \frac{A_b}{\gamma M_b}, \quad (3.3)$$

где f – частота реализуемых колебаний; S_b – площадь горения топлива; S_c – площадь проточной части Т-камеры; $a = 2Lf$ – скорость звука; L – длина проточной части Т-камеры; $a_{th} = \sqrt{\gamma R T_{th}}$ – теоретическая скорость распространения звуковых волн в ПС, находящихся в термодинамическом

равновесии; $R = \frac{R_{yH}}{\mu_g}$ – газовая постоянная; μ_g – молярная масса продуктов сгорания; T_{th} – температура продуктов сгорания; A_b – акустическая проводимость зоны горения; $M_b = \frac{\rho_T u_T(P_g)}{a \rho_{th}}$ – число Маха у поверхности горения; ρ_T – плотность топлива; $u_T(P_g)$ – скорость горения топлива при давлении P_1 ; R_b – функция отклика зоны горения по давлению; $q = Re(q) + iIm(q)$ – запись комплексного числа.

Для второго импульса $\alpha_c = 0$, так что

$$\alpha_2 = \alpha_d \quad (3.4)$$

Таким образом, справедливо следующие соотношение для действительной части акустической проводимости:

$$Re(A_b) = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) S_c}{2f} \frac{a}{S_b a_{th}} - M_b \quad (3.5)$$

В работе [166] было предложено соотношение для A_b , учитывающее различие частот реализуемых колебаний для первого и второго импульсов:

$$Re(A_b) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1}{f_1} - \frac{\alpha_2}{f_2} \right) \frac{S_c}{S_b} \frac{a}{a_{th}} - M_b \quad (3.6)$$

Данные соотношения справедливы для случая, когда вектор пульсаций скорости направлен по нормали к горячей поверхности. При наличии ненулевой тангенциальной компоненты пульсации скорости итоговое значение действительной части акустической проводимости \tilde{A}_b будет связано с акустической проводимостью, определяемой выражением (3.6), следующим соотношением [97]:

$$Re(\tilde{A}_b) = Re(A_b) - \delta \left(\frac{kb}{a^2 + b^2} \right), \quad (3.7)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\delta^2 = \mu/\rho_0 a_0 L$. Коэффициенты a и b удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + \frac{M_b}{\delta} a = 0 \\ 2a + \frac{M_b}{\delta} = \frac{k}{b} \end{cases} \quad (3.8)$$

Для получения значений акустической проводимости при других частотах и давлениях в установке изменяется количество секций и диаметр критического сечения сопла.

3.3 Погрешность измерений

Измерения акустической проводимости и функции отклика зоны горения с помощью импульсной Т-камеры являются косвенными. При этом $A_b = A_b(\alpha_1, \alpha_2, f_1, f_2, S_c, S_b, a, a_{th}, M_b)$. Для погрешности косвенного измерения некоторой величины $F(q_1, q_2, \dots, q_n)$ справедливо следующее соотношение [23, с. 81]:

$$\Delta F = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \Delta q_i \right)^2}, \quad (3.9)$$

где q_i – аргументы F ; Δq_i – погрешность определения величины соответствующего аргумента.

Значение коэффициентов затухания первого и второго импульсов α_1 и α_2 определяются по наклону прямой $\delta p(t)$, построенной в полулогарифмическом масштабе по основанию e . Прямая проводится методом наименьших квадратов. Для погрешности коэффициента k прямой $y = A + Bx$, построенной по N экспериментальным точкам справедливо следующее соотношение [23, с. 166]:

$$\Delta B = \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(\frac{\sum (y_i - A - Bx_i)^2}{\langle x \rangle^2 - \langle x^2 \rangle} \right)}, \quad (3.10)$$

где $\langle x \rangle = \frac{\sum_i^N x_i}{N}$, $\langle x^2 \rangle = \frac{\sum_i^N x_i^2}{N}$.

Частота колебаний давления по мере их затухания изменяется. В силу данного обстоятельства частоты f_1 и f_2 вычисляются как среднее арифметическое на времени затуханий колебаний. В среднем удается полноценно зафиксировать не более 10 колебаний.

Поэтому частота колебаний, входящих в соотношение (3.6), вычисляется не с использованием формулы для стандартного отклонения, а при помощи соотношения (3.9) (рис. 3.8-г):

$$f = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} f_i = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|t_{i+1} - t_i|},$$

$$\Delta f = \frac{1}{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\Delta t_{i+1})^2 + (\Delta t_i)^2}{(t_{i+1} - t_i)^4}}. \quad (3.11)$$

Погрешность площади горения наполнителя и площади проточной части Т-камеры:

$$\Delta S_b = 2\pi \sqrt{(R_1 \cdot \Delta R_1)^2 + (R_2 \cdot \Delta R_2)^2},$$

$$\Delta S_c = 2\pi R_c \Delta R_c \quad (3.12)$$

Погрешность реализуемой в Т-камере скорости звука в продуктах сгорания топлива $a = 2Lf_1$:

$$\Delta a = 2\sqrt{(f_1 \cdot \Delta L)^2 + (L \cdot \Delta f_1)^2}, \quad (3.13)$$

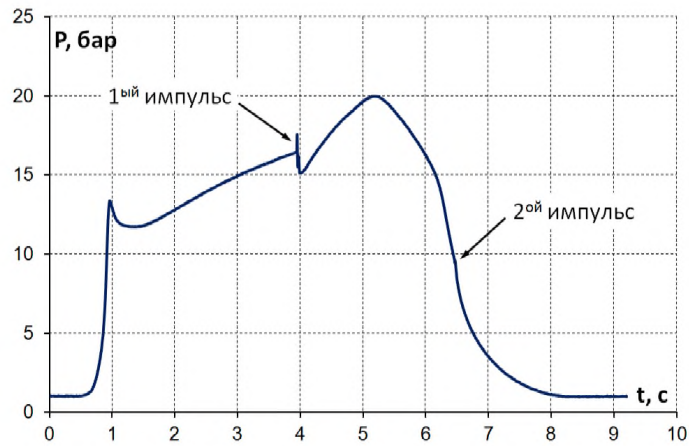
Погрешность теоретической скорости звука a_{th} и числа Маха M_b у поверхности горения определяется погрешностью определения среднего давления в импульсной Т-камере, фиксируемого в момент генерации первого импульса. Среднее давление измеряется ПП МИДА (максимальное измеряемое давление зависит от датчика и может составлять $P_{max} = 2, 4, 6, 10$ МПа) с погрешностью 0,5% от P_{max} . Зная погрешность определения среднего давления в Т-камере, можно определить погрешность других параметров среды $\{T_{th}, \rho_{th}, \gamma_{th}\}$ с использованием вычислительной программы Terra [24]. Погрешность определения акустической проводимости A_b и числа Маха M_b у поверхности горения в дальнейшем используется для определения погрешность функции отклика зоны горения по давлению с учётом формул (3.3) и (3.9).

3.4 Измерение акустической проводимости безметалльных и металлизированных составов

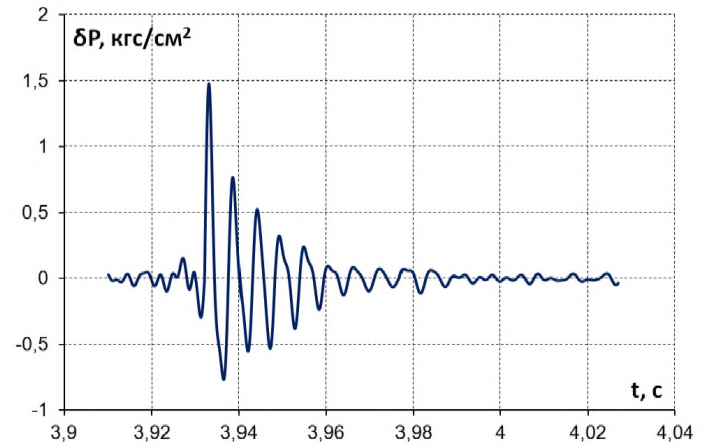
В работе проведены измерения акустической проводимости зоны горения для низкотемпературного безметалльного (№1-Б в таб. 3.1) и металлизированного (№3-М в таб. 3.1) составов. Полученные значения проводимости сравнивались с соответствующими значениями схожих по составу топлив {№2-Б, №4-М, №5-М, №6-М}, исследование которых проводилось другими авторами. Как следует из данных, представленных в таб. 3.1, прямое сравнение результатов проведенных экспериментов для групп составов {№1-Б, №2-Б} и {№3-М, №4-М, №5-М, №6-М} является не совсем корректным. Данное обстоятельство обусловлено некоторыми различиями в массовых долях компонент и дисперсности частиц ПХА и алюминия.

Результаты измерений с использованием низкотемпературного состава №1-Б для случая пяти секций Т-камеры (минимальная частота) представлены на рис. 3.9 а-г. Результаты измерений с использованием металлизированного состава №3-М для случая пяти секций Т-камеры представлены на рис. 3.10 а-г. Значения коэффициента затухания, действительной части акустической проводимости и функции отклика по давлению для топлив №1-Б и №3-М изображены на рис. 3.11 – рис. 3.14 и рис. 3.15 –рис. 3.18. Также для обоих составов проводилось измерение акустической проводимости для трёх различных давлений¹⁹ в КС в указанных диапазонах частот.

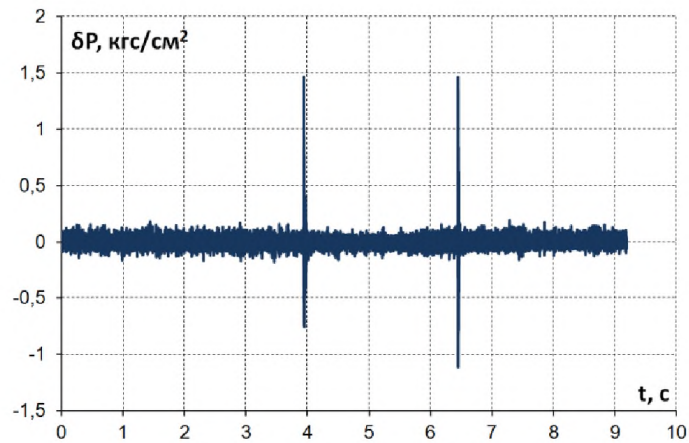
¹⁹ Давление в камере варьируется изменением диаметра критического сечения молибденового вкладыша



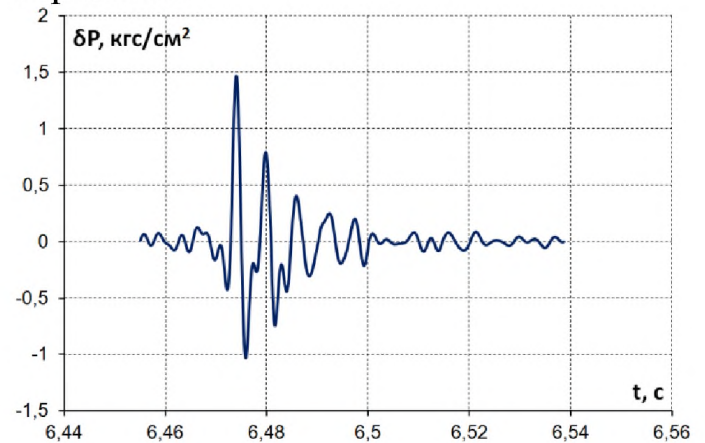
а) Давление у поверхности горения топлива



б) Пульсации давления после срабатывания первой ВК

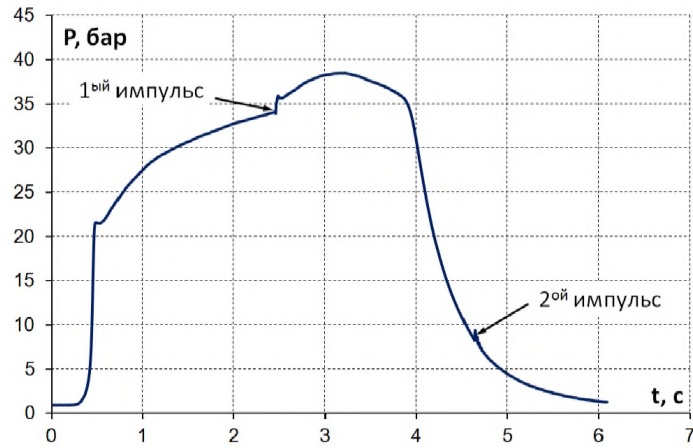


в) Пульсационная составляющая давления в зоне у поверхности горения топлива

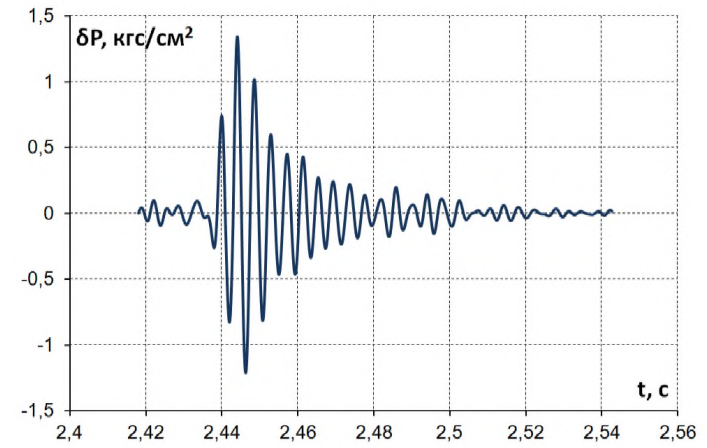


г) Пульсации давления после срабатывания второй ВК

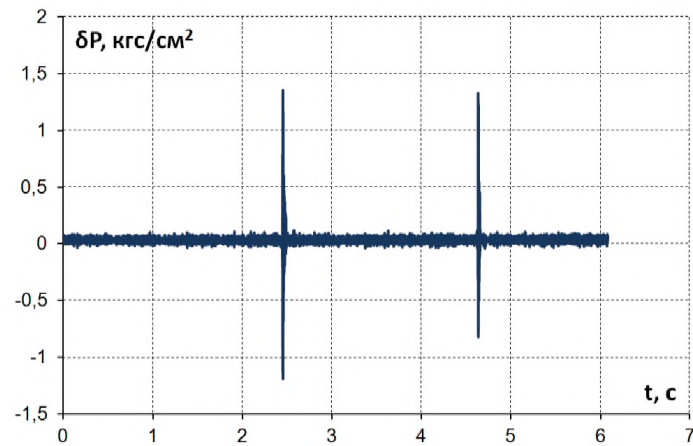
Рис. 3.9. Генерация возмущений давления в Т-камере с низкотемпературным безметалльным топливом №1-Б



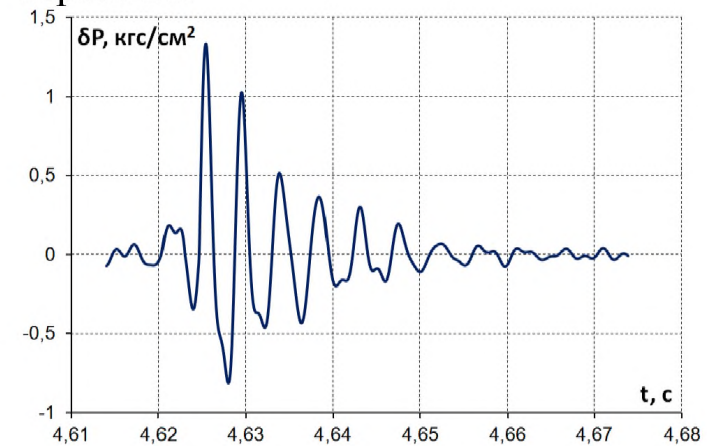
а) Давление у поверхности горения топлива



б) Пульсации давления после срабатывания первой ВК



в) Пульсационная составляющая давления в зоне у поверхности горения топлива



г) Пульсации давления после срабатывания второй ВК

Рис. 3.10. Генерация возмущений давления в Т-камере с металлизированным топливом №3-М.

Таб. 3.1. Характеристики топлив.

	ПХА	Связка	Алюминий
№1-Б	70%	22%	—
№2-Б*	76%	24%	—
№3-М	70%	11%	18%
№4-М**	70%	12%	15%
№5-М***	76%	20%	3%
№6-М***	64%	20%	16%

* - данные представлены на основании [40]

** - данные представлены на основании [39, с. 86-110]

*** - данные представлены на основании [1]

Результаты расчетов акустической проводимости, функции отклика зоны горения и соответствующих параметров ПС для других частот представлены в таб. 3.2.

Таб. 3.2. Результаты расчетов акустической проводимости

Состав №1-Б

№ запуска	1	2	3	4
$\alpha_1, 1/c$	-84,3	-91,15	-92,3	-95,6
$\alpha_2, 1/c$	-89,3	-98,292	-102,2	-108,1
$f_1, \text{Гц}$	182,4	267	460	587
$L, \text{м}$	1,604	1,304	0,882	0,582
$R_{1,\text{м}}$	0,0585	0,0585	0,0585	0,0585
$R_{2,\text{м}}$	0,014	0,014	0,014	0,014
$a, \text{м/с}$	585,4	696,5	811,5	683,2
$P_g, \text{МПа}$	1,638	1,664	1,69	1,7
$T_{th}, \text{К}$	1497,15	1497,22	1497,3	1497,3
$\rho_{th}, \text{кг/м}^3$	2,46	2,5	2,55	2,55
$M_b, 10^{-3}$	2,2	2,1	2,1	2,1
$a_{th}, \text{м/с}$	929,738	929,725	929,708	929,708
$Re(A_b), 10^{-3}$	15,3	10,8	9,2	8,3
$Re(R_b)$	5,9	4,6	4,1	3,8

Состав №3-М

№ запуска	1	2	3	4
$\alpha_1, 1/c$	-76,1	-80,01	-85,2	-92
$\alpha_2, 1/c$	-88,1	-100,1	-95,2	-115
$f_1, \text{Гц}$	236,7	396,6	620,17	823
$L, \text{м}$	1,58	1,28	0,858	0,558
$R_{1,\text{м}}$	0,055	0,055	0,055	0,055
$R_{2,\text{м}}$	0,014	0,014	0,014	0,014
$a, \text{м/с}$	747,9	1015,4	1064,2	918,6
$P_g, \text{МПа}$	3,4	2,9	3,6	3,2
$T_{th}, \text{К}$	3403,4	3390,7	3408,34	3400
$\rho_{th}, \text{кг/м}^3$	3,35	2,9	3,55	3,23
$M_b, 10^{-3}$	4	4,4	3,9	4,1
$a_{th}, \text{м/с}$	1332,5	1330,52	1333,3	1332
$Re(A_b), 10^{-3}$	14,6	19	6,4	7,3
$Re(R_b)$	3,84	4,54	2,21	2,3

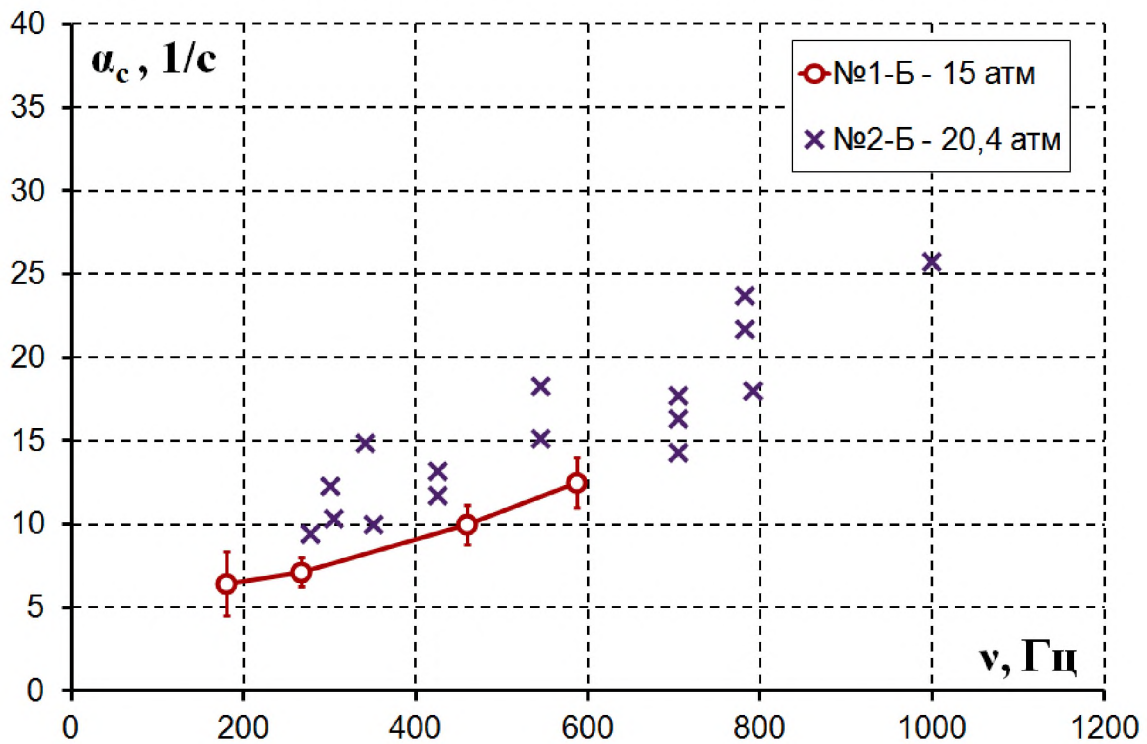


Рис. 3.11. Зависимость коэффициента затухания зоны горения безметаллических топлив №1-Б и №2-Б от частоты малых возмущений давления в Т-камере.

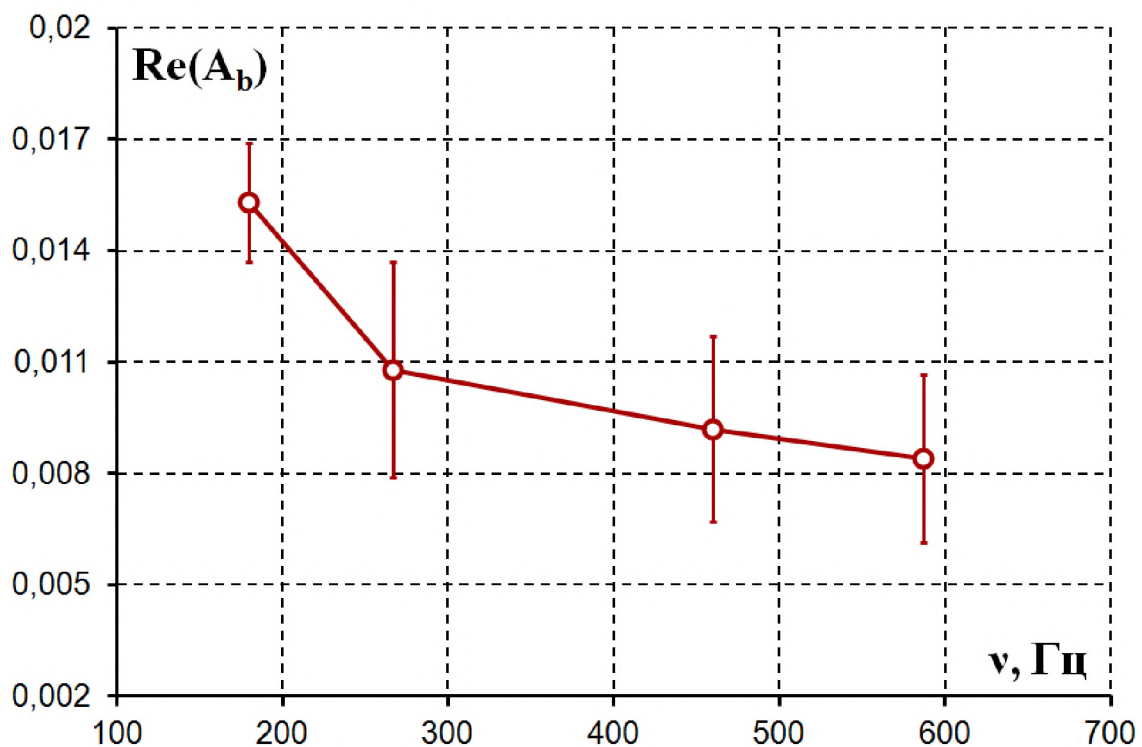


Рис. 3.12. Зависимость акустической проводимости зоны горения безметаллических топлив №1-Б от частоты малых возмущений давления в Т-камере.

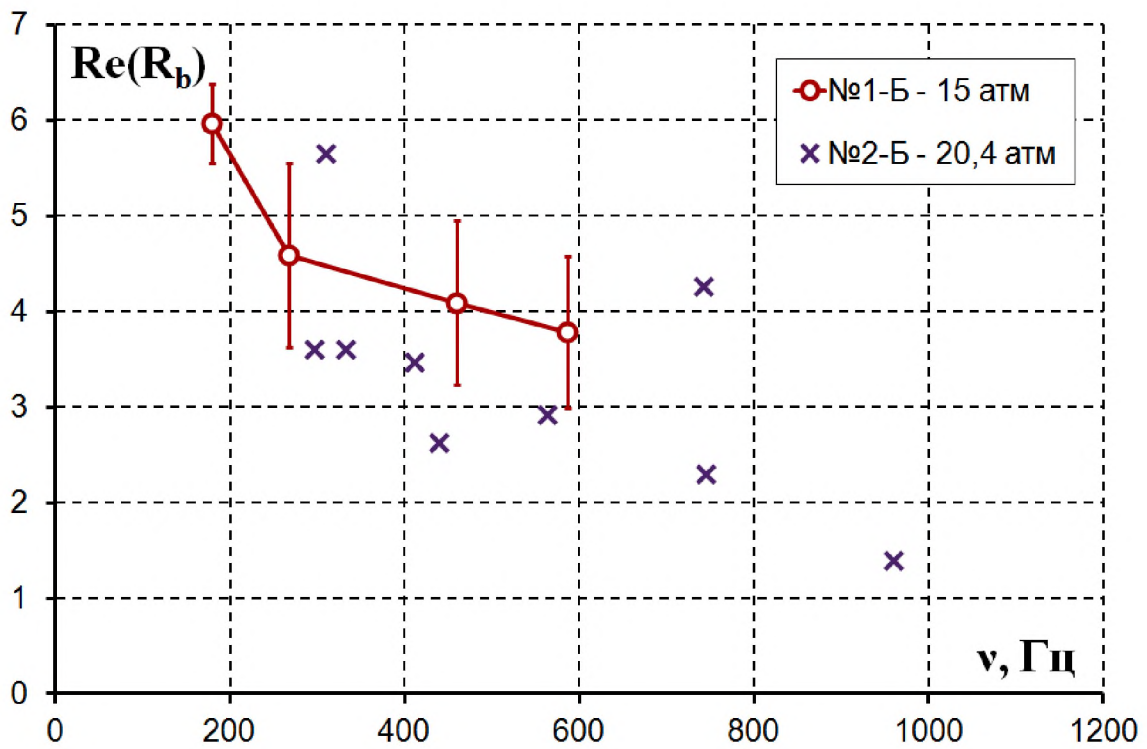


Рис. 3.13. Зависимость функции отклика зоны горения по давлению для безметалльных топлив №1-Б и №2-Б от частоты малых возмущений давления в Т-камере.

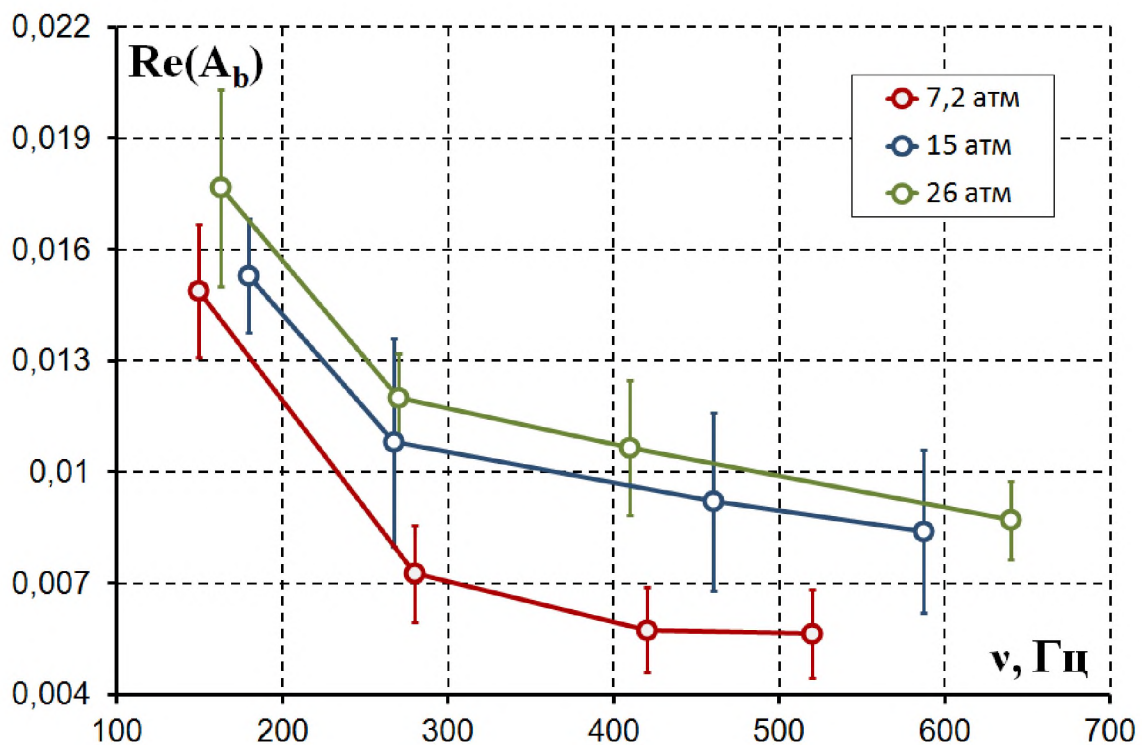


Рис. 3.14. Зависимость акустической проводимости зоны горения безметалльных топлив №1-Б от частоты для трёх давлений в Т-камере.

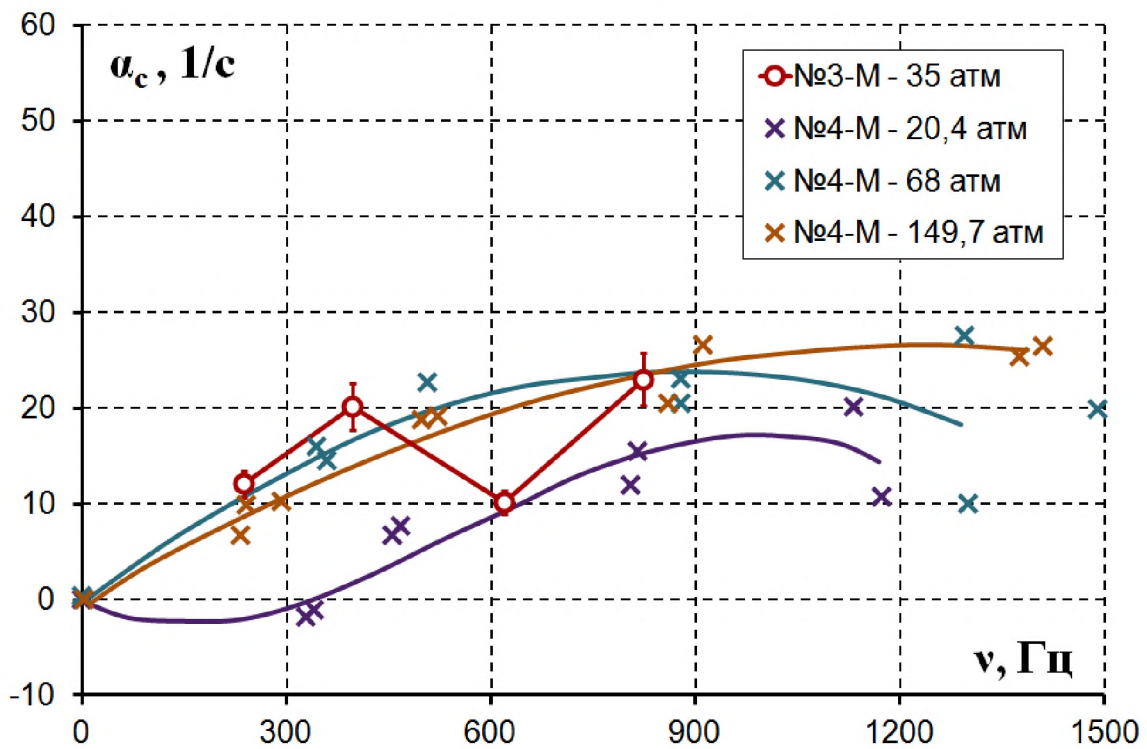


Рис. 3.15. Зависимость коэффициента затухания зоны горения металлизированных топлив №3-М и №4-М от частоты малых возмущений давления в Т-камере.

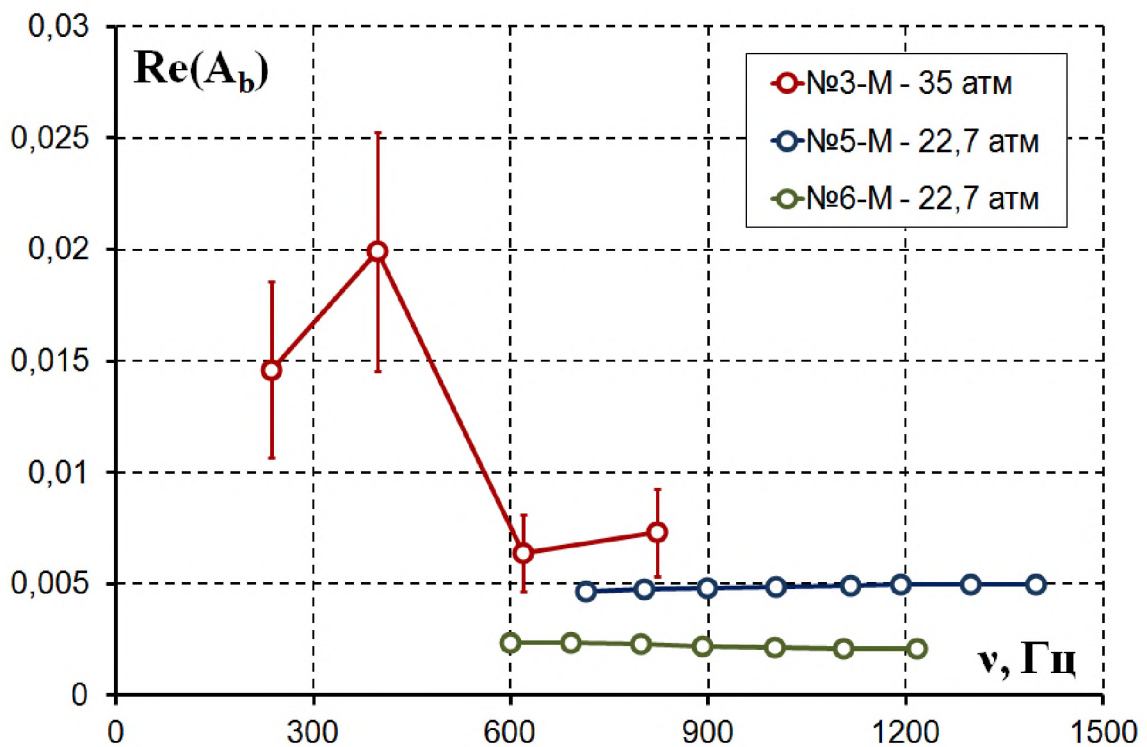


Рис. 3.16. Зависимость акустической проводимости зоны горения металлизированных топлив №3-М №5-М и №6-М от частоты малых возмущений давления в Т-камере.

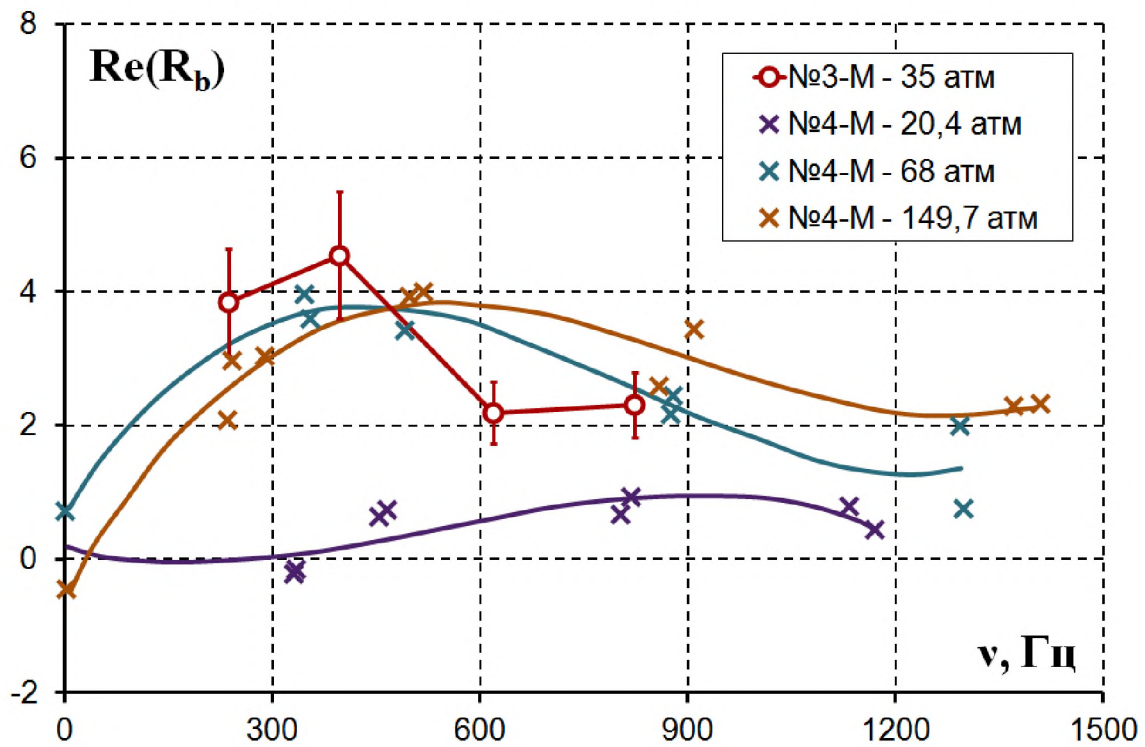


Рис. 3.17. Зависимость функции отклика зоны горения по давлению для металлизированных топлив №3-M и №4-M от частоты малых возмущений давления в Т-камере.

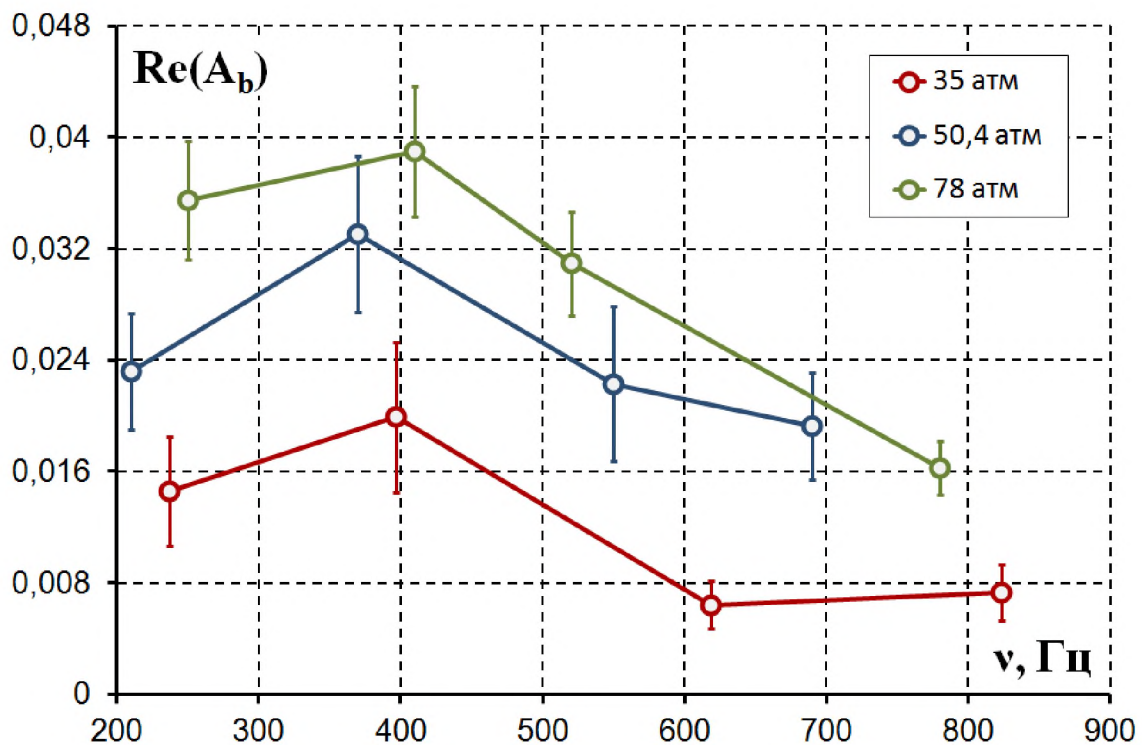


Рис. 3.18. Зависимость акустической проводимости зоны горения металлизированного топлив №3-M от частоты для трёх давлений в Т-камере.

Стоит обратить внимание на достаточно большую относительную погрешность определения акустической проводимости и функции отклика зоны горения по давлению как для безметалльного состава №1-Б, так и для металлизированного №3-М. В среднем относительная погрешность составляет 15-20%. Данное обстоятельство вызвано высокой чувствительностью A_b и R_b к точности определения коэффициентов затухания α_1 и α_2 . Ещё одним источником расхождений между полученными в эксперименте результатами и данными, имеющимися в открытой печати, является разное рабочее давление в Т-камере. При этом закономерности поведения акустической проводимости в рассматриваемом диапазоне частот для безметалльного и металлизированного составов были подтверждены. Для состава №1-Б наблюдается монотонное убывание A_b с увеличением частоты пульсаций давления, в то время как для металлизированного состава №3-М наблюдается максимум.

Глава 4. Численное моделирование продольной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ в линейном приближении

В данной главе представлены результаты исследования устойчивости рабочего процесса в различных ЭУТТ, проводимых с помощью модифицированной энергетической методики и методики, основанной на численном решении системы линеаризованных уравнений, описывающих динамику продуктов сгорания в ЭУТТ. В первом пункте приводится сравнение результатов расчетов устойчивости рабочего процесса в трех ЭУ, проводимых в рамках энергетической методики с использованием двух способов усреднения рабочих параметров в КС установок по времени. Во втором пункте главы рассматриваются тестовые задачи определения собственных мод колебаний в областях простой формы. В третьем пункте представлены результаты расчетов коэффициентов затухания для шести ЭУТТ с цилиндрическим наполнителем. Все ЭУ работают на безметалльных топливах, акустические характеристики которых представлены в литературе. В четвертом пункте приводятся результаты расчетов для ЭУ, где в качестве топлива используется металлизированный состав №3-М, акустические свойства зоны горения которого были получены с использованием импульсной Т-камеры и представлены в Главе 3. В конце Главы представлены результаты расчетов устойчивости рабочего процесса в энергетической установке с каналом сложной формы, в которой используется безметалльный состав №1-Б.

4.1 Результаты расчетов устойчивости рабочего процесса в ЭУТТ с использованием энергетической методики

В данном пункте представлены результаты расчетов, проведенных по энергетической методике, для трёх типов ЭУТТ, параметры которых

представлены в таб. 4.1. Для данных установок получение значения α проводится с использованием двух способов усреднения параметров в КС:

$$\langle q \rangle = \frac{k}{2\pi} e^{\alpha t} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} q(t) \cdot e^{-\alpha t} dt \quad (4.1)$$

$$\langle q \rangle = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} q(t) dt \quad (4.2)$$

При использовании усреднения (4.1) коэффициент затухания α представим в виде суперпозиции коэффициентов $\alpha_1 \dots \alpha_{10}$, общий вид которых описан в Приложении. Значения $\alpha_1 \dots \alpha_{10}$ для рассматриваемых ЭУТТ указаны в таб. 4.2.

Таб. 4.1. Параметры ЭУ [93]

ЭУ	L , м	R , м	M_b	δ	f , Гц	A_b	α_0 , м/с
Малой тяги	0,6	0,025	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$5,49 \cdot 10^{-4}$	1227	$2,5 \cdot 10^{-3}$	1427
Средние	2,03	0,102	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$2,74 \cdot 10^{-4}$	360	$1,2 \cdot 10^{-3}$	1462
Крупногабаритные	35,1	0,7	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$1,04 \cdot 10^{-4}$	19,5	10^{-3}	1369

Таб. 4.2. Результаты расчетов коэффициентов затухания $\alpha_1 \dots \alpha_{10}$ при использовании усреднения (4.1).

ЭУ	α_1	α_2	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α
Малой тяги	-84,7	$-1,62 \cdot 10^{-4}$	-80,1	80,1	30,7	-15,8	0,06	14,9	-15	-69,78
Средние	-37,1	$-1,43 \cdot 10^{-5}$	35,7	35,7	11,5	-0,56	0,06	10,9	-11	-26,14
Крупно-ные	-3,67	$-4,43 \cdot 10^{-8}$	-3,64	3,65	1,15	-0,003	0,01	1,15	-1,16	-2,5

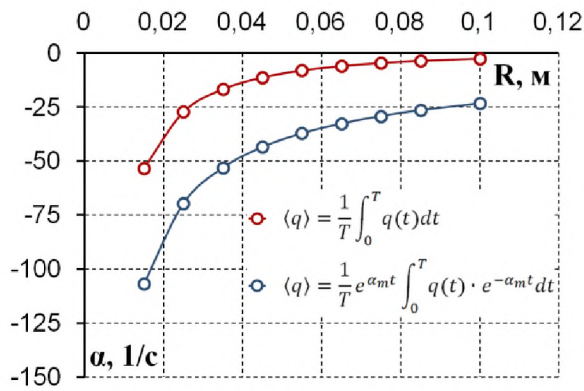
При использовании усреднения по времени (4.2) уже нельзя выделить отдельные слагаемые наподобие коэффициентов затухания $\alpha_1 \dots \alpha_{10}$, как это делалось при использовании усреднения (4.1). В данном случае значение коэффициента затухания α определяется из решения уравнения (2.12, Глава 2). В таб. 4.3 представлены результаты расчетов коэффициентов

затухания для различных типов ЭУТТ с использованием усреднений (4.1) и (4.2).

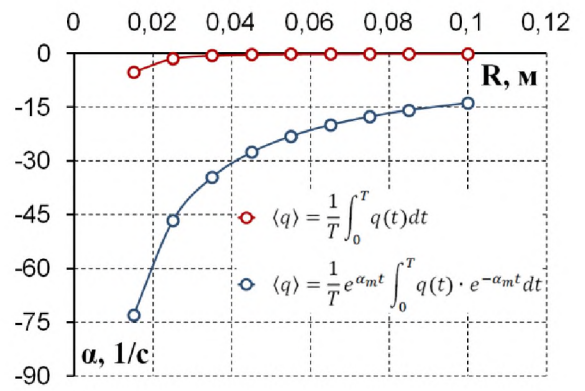
Таб. 4.3. Результаты расчетов с применением различных способов усреднения по времени.

Тип установки	α усреднение (4.2)	α усреднение (4.1)
Малой тяги $R=0,025$ м	-27,21	-69,78
Средние $R=0,102$ м	-17,79	-26,14
Крупногабаритные $R=35,1$ м	-1,852	-2,5

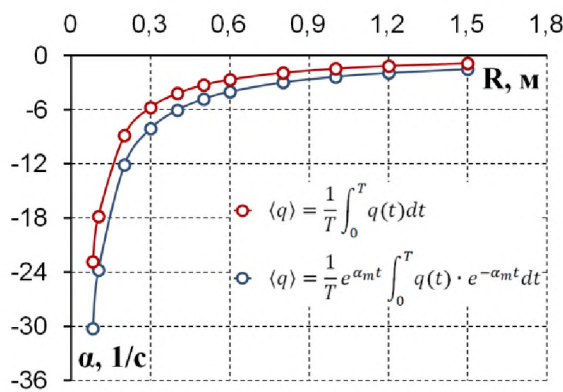
Как видно из таб. 4.3 оба способа усреднения показывают одинаковое поведение ЭУТТ по отношению к возмущениям малой амплитуды в камере сгорания, а именно, рабочий процесс во всех ЭУТТ являются устойчивыми (указанные в таблице радиусы соответствуют начальным размерам каналов). На рис. 4.1 представлены зависимости коэффициентов затухания α от радиуса канала и от скорости вдува с поверхности горения (M_b) для указанных установок. Согласно рис. 4.1 рабочий процесс является устойчивым к малым возмущениям на протяжении всего времени работы для всех рассматриваемых ЭУТТ, независимо от способа усреднения рабочих параметров. Однако усреднение (4.1) завышает устойчивость ЭУ. Данное обстоятельство по-разному проявляется для различных ЭУТТ: наибольшее расхождение в результатах наблюдается для ЭУ малой тяги, в то время как наименьшее различие – для крупногабаритных ЭУ. Различие в значениях коэффициентов затухания, полученных разными методами усреднения, на начальном этапе работы ЭУТТ составляет 61%, 32% и 26% для ЭУ малой тяги, средних и крупногабаритных ЭУ соответственно. Данные результаты указывают на целесообразность использования усреднения (4.1).



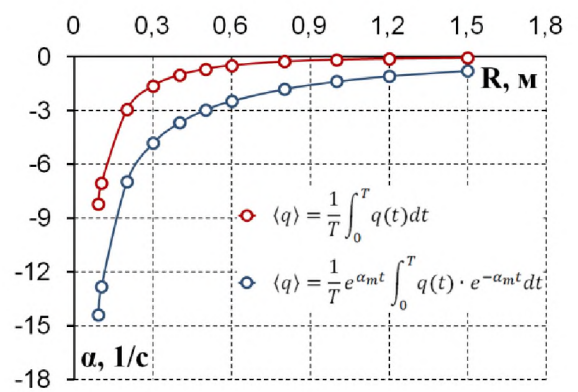
а) ЭУ малой тяги, $M_b=1,7 \cdot 10^{-3}$



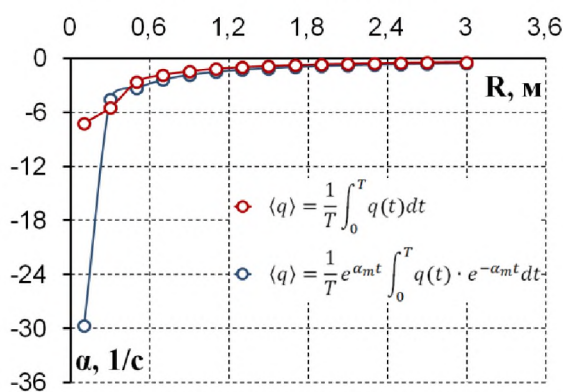
б) ЭУ малой тяги $M_b=0,85 \cdot 10^{-3}$



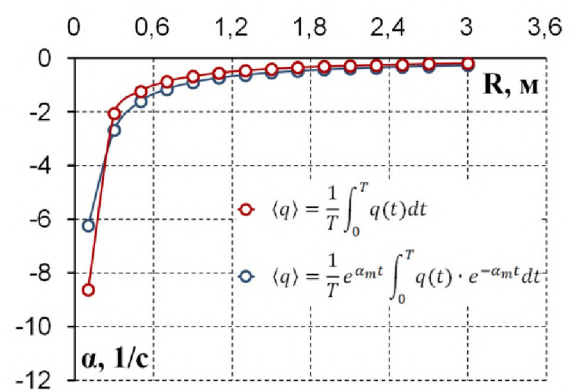
а) Средняя ЭУ, $M_b=3,1 \cdot 10^{-3}$



б) Средняя ЭУ $M_b=1,55 \cdot 10^{-3}$



а) Крупно-ая ЭУ, $M_b=2,3 \cdot 10^{-3}$



б) Крупно-ая ЭУ $M_b=1,15 \cdot 10^{-3}$

Рис. 4.1. Зависимость устойчивости рабочего процесса в различных ЭУ от способа усреднения по времени рабочих параметров в КС.

4.2 Расчет собственных мод колебаний в областях простой формы

В качестве тестовой задачи для РМГ рассматривается распространение акустических колебаний в цилиндре длиной L радиусом R (рис. 4.2-а) с твердыми непроницаемыми стенками, заполненным покоящимся газом при

температуре T_0 и давлении p_0 . В общем случае поле пульсаций давления имеет вид $p'(r, \varphi, z, t) = \hat{p}'(r, \varphi, z) \cos(\omega t + \psi)$. В данной постановке решение системы уравнений (2.27 Глава 2) может быть сведено к решению краевой задачи для уравнения Гельмгольца относительно $\hat{p}(r, \varphi, z)$, которая имеет аналитическое решение, получаемое методом разделения переменных [10, с. 389]. На рис. 4.3 представлены результаты численного решения системы (2.19) для случая первых двух продольных и радиальных мод акустических колебаний в цилиндре. Для продольных мод ($l=1, 2, \dots, n=0$) $\hat{p}'_{l0}(r, \varphi, z) = A \cos\left(\frac{\pi l}{L} z\right)$, где A – произвольная константа. Для радиальных мод ($l=0, n=1, 2, \dots$) $\hat{p}'_{0n}(r, \varphi, z) = B J_0(\kappa_{n0} r)$, где $J_0(r)$ – функция Бесселя нулевого порядка, κ_{n0} – корни уравнения $\frac{d}{dr} J_0$, B – произвольная константа. Для рассматриваемого случая $\kappa_{10}=3,83$; $\kappa_{20}=7,01$.

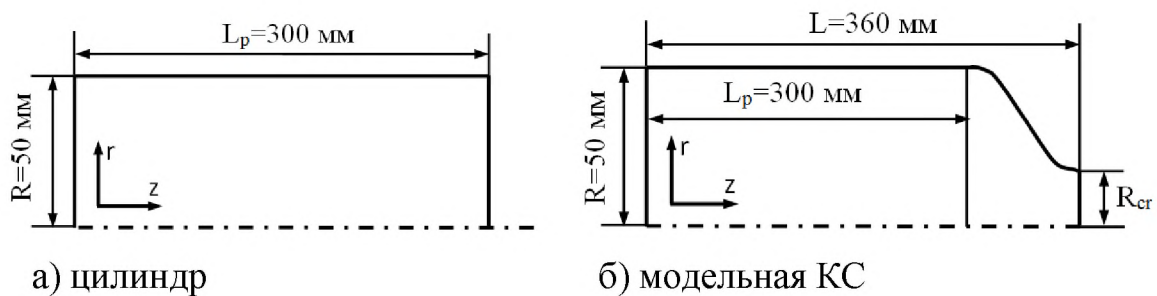


Рис. 4.2. Размеры цилиндра и модельной камеры для расчета собственных колебаний ($p_0=0,23$ МПа; $T_0=2747$ К; $\mu=25,8$ г/моль; $\gamma=1,22$).

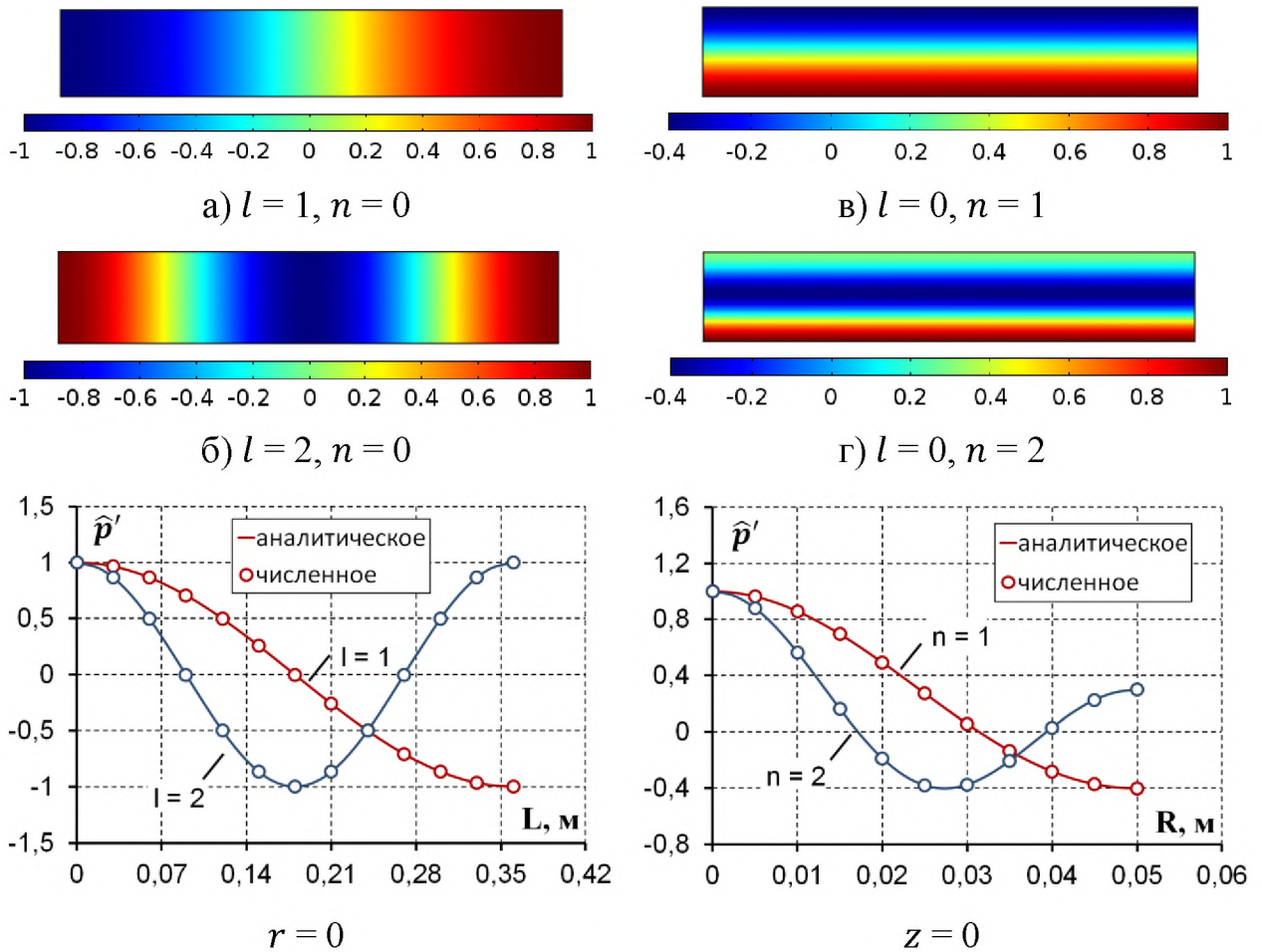


Рис. 4.3. Пространственная форма продольных и радиальных мод акустических колебаний в цилиндре.

В таб. 4.4 представлены результаты исследования сеточной сходимости по норме L^1 для поля давления $\hat{p}'(r, z)$. Относительное отклонение численного решения от точного решения по норме L^1 определяется выражением

$$\delta_{\hat{p}'} = \frac{\int_V |\hat{p}' - \hat{P}'| dV}{\int_V |\hat{P}'| dV}, \quad (4.3)$$

где \hat{P}' – точное решение. Интегрирование выполняется по всему объёму расчетной области V .

Таб. 4.4. Сеточная сходимость для продольных и радиальных мод колебаний в цилиндре.

Расчетная сетка			$N = 1566,$ $d_{max} = 5 \cdot 10^{-3}$	$N = 6034,$ $d_{max} = 2,5 \cdot 10^{-3}$	$N = 24040,$ $d_{max} = 1,25 \cdot 10^{-3}$
Продольные моды	$l = 1$ $n = 0$	$f, \text{Гц}$	1729	1729	1729
		$\delta_{\hat{p}'}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
	$l = 2$ $n = 0$	$f, \text{Гц}$	3458	3458	3458
		$\delta_{\hat{p}'}$	$4,7 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$
Поперечные моды	$l = 0$ $n = 1$	$f, \text{Гц}$	12656	12656	12656
		$\delta_{\hat{p}'}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$
	$l = 0$ $n = 2$	$f, \text{Гц}$	23171	23172	23171
		$\delta_{\hat{p}'}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$

f – частота колебаний; N – количество элементов расчетной сетки; d_{max} – максимальный размер ребра треугольного элемента расчетной сетки.

Также в работе проводится расчет собственных колебаний покоящегося газа в замкнутой области, имеющей форму проточной части модельной ЭУ, с использованием РМГ. На рис. 4.4 представлены пространственное распределение продольных колебаний давления вдоль оси камеры сгорания в модельной КС (рис. 4.2-б) для трех диаметров критического сечения сопла. Длина докритической части сопла составляет 20% от длины КС, при этом длина волны для первой и второй продольных мод колебаний равны $2L$ и L соответственно. На рис. 4.5 представлены уровни постоянного давления \hat{p}' в сопловой области. Как видно из указанных рисунков, чем меньше отношение длины волны колебаний к длине докритической части сопла, тем выше влияние геометрии сопла на их пространственное распределение. Пренебрежение влиянием докритической части сопла на пространственное распределение первой продольной моды колебаний широко применялось в рамках энергетической методики при исследовании неустойчивости ЭУТТ с каналом в форме цилиндра [93]. В рамках данного приближения устойчивость исследовалась для колебаний

вида $p'(r, z, t) = A \cos\left(\frac{\pi l}{L} z\right) e^{i\omega t}$, где длине L соответствует длине КС ЭУТТ от переднего днища до начала сужающейся части сопла.

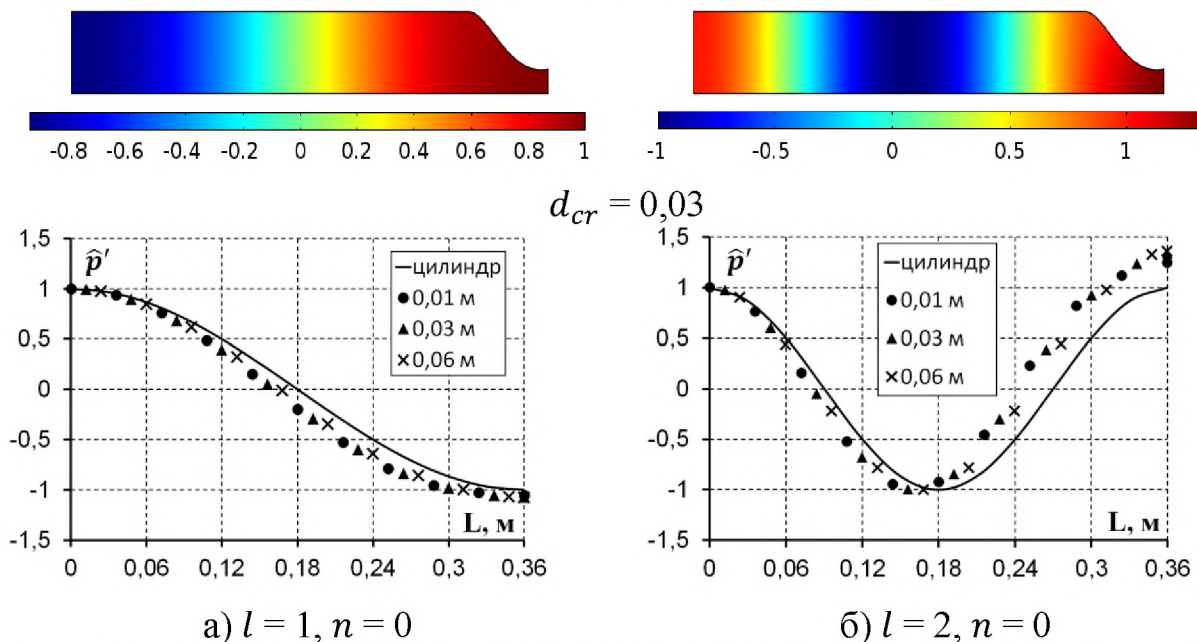


Рис. 4.4. Пространственная форма продольных мод акустических колебаний в модельной КС для трех диаметров критического сечения сопла ($r = 0$).

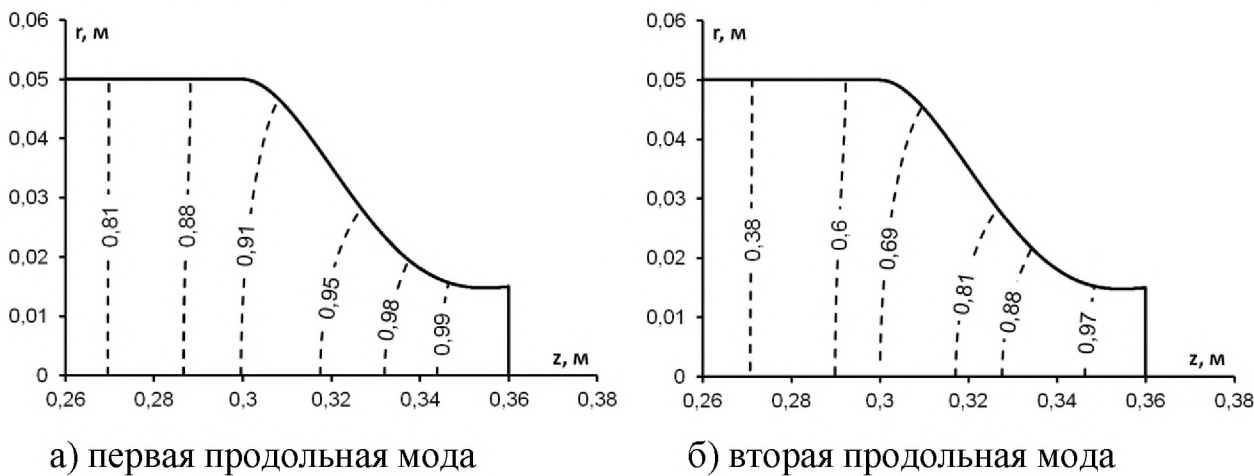


Рис. 4.5. Уровни постоянного давления \hat{p}' в сопловой области при диаметре критического сечения сопла 30 мм.

4.3 Верификация методики исследования продольной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ в линейном приближении

Верификация описанной в Главе 2 методики определения линейной неустойчивости малых возмущений проводилась на экспериментальных данных, представленных в работах [41, 107]. Все рассматриваемые ЭУ

снаряжены наполнителем с каналом в форме цилиндра (рис. 4.6). Геометрические размеры установок представлены в таб. 4.5. Обозначение составов такое же, как в оригинальных статьях [41, 107]. Характеристики продуктов сгорания рассматриваемых топлив представлены в таб. 4.6.

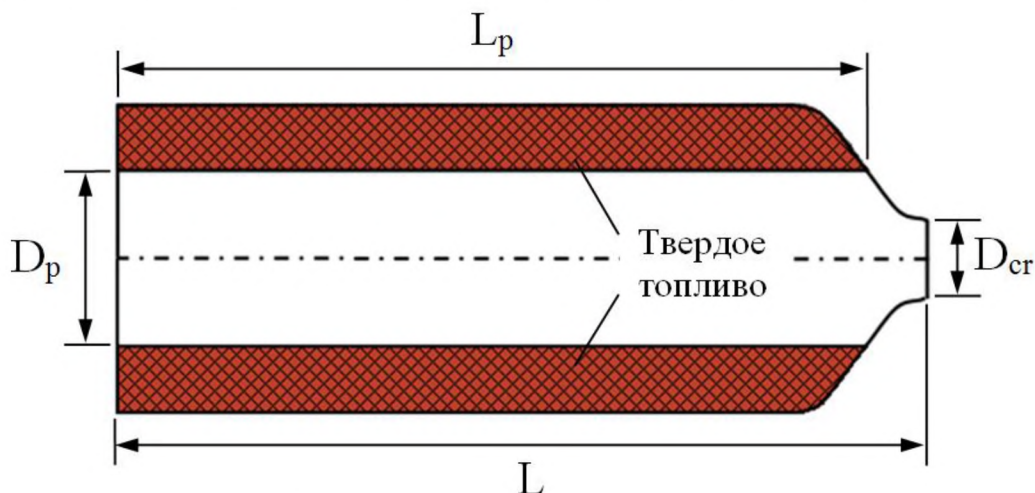


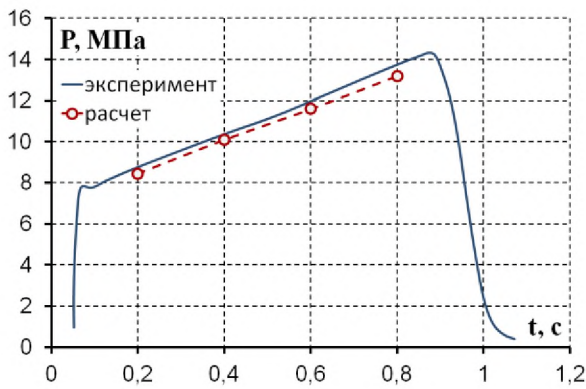
Рис. 4.6. Схема ЭУТТ [41, 107].

Таб. 4.5. Геометрические размеры исследуемых ЭУТТ [41, 107].

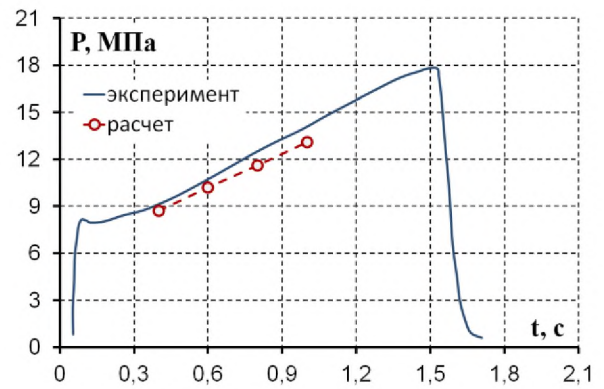
Наименование установки	Момент генерации импульса, с	D_p , мм	D_{cr} , мм	L_p , мм	L , мм	Наименование топлива
1А-Н	0,11	66,6	25,6	777	820	А
2В-Н	0,12	67,2	25,6	777	820	В
3С-Н	0,13	67,7	25,6	777	820	С
4А-Н	0,17	123,4	47,3	1438	1509	А
5L-B	0,745	90	40,01	1700	1785	NWR-11
6L-B	0,887	90	43,43	1700	1785	NWR-11

Таб. 4.6. Характеристики топлив и их ПС [41, 107].

хар-ки топливо	u_0 , м/с	ν	ρ_p , кг/м ³	$T_{пс}$, К	C_p , кДж/кг/К	μ , г/моль	γ	μ_ν , Па·с	λ , Вт/м/К
А, В, С	$2,56 \cdot 10^{-5}$	0,37	1718	2747	1,9	25,8	1,22	$8 \cdot 10^{-5}$	0,215
NWR-11	$2,67 \cdot 10^{-6}$	0,491	1800	2800	2,2	25,2	1,19	$8 \cdot 10^{-5}$	0,258



а) Энергетическая установка 1А-Н



б) Энергетическая установка 4А-Н

Рис. 4.7. Среднее по КС давление основного течения.

В таб. 4.7 представлены результаты исследования сеточной сходимости по норме L^1 поля давления p для энергетических установок 1А-Н, 4А-Н и 5L-В:

$$\delta_p = \frac{\int_V |p - P| dV}{\int_V |P| dV}, \quad (4.4)$$

В выражении (4.5) в качестве P используется поле, посчитанное на самой грубой сетке. Параметры грубой сетки для ЭУ 1А-Н – $\{N = 23383, d_{max} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}\}$; для 4А-Н – $\{N = 54686, d_{max} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}\}$; для 5L-В – $\{N = 64458, d_{max} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}\}$

Таб. 4.7. Сеточная сходимость по давлению для основного течения.

ЭУТТ	1А-Н			
Расчетная сетка	$N = 50272$ $d_{max} = 2 \cdot 10^{-3}$	$N = 100045$ $d_{max} = 1,4 \cdot 10^{-3}$	$N = 201612$ $d_{max} = 1 \cdot 10^{-3}$	$N = 401206$ $d_{max} = 7 \cdot 10^{-4}$
δ_p	$1,65 \cdot 10^{-3}$	$1,76 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,82 \cdot 10^{-3}$
ЭУТТ	4А-Н			
Расчетная сетка	$N = 103507$ $d_{max} = 2,6 \cdot 10^{-3}$	$N = 211496$ $d_{max} = 1,8 \cdot 10^{-3}$	$N = 401744$ $d_{max} = 1,3 \cdot 10^{-3}$	$N = 835270$ $d_{max} = 9 \cdot 10^{-4}$
δ_p	$1,93 \cdot 10^{-2}$	$2,83 \cdot 10^{-2}$	$3,44 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$
ЭУТТ	5L-В			
Расчетная сетка	$N = 99998$ $d_{max} = 2,4 \cdot 10^{-3}$	$N = 198285$ $d_{max} = 1,7 \cdot 10^{-3}$	$N = 473234$ $d_{max} = 1,1 \cdot 10^{-3}$	$N = 797708$ $d_{max} = 8,5 \cdot 10^{-4}$
δ_p	$1,57 \cdot 10^{-2}$	$2,49 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$3,47 \cdot 10^{-2}$

В представленной таблице N – количество элементов расчетной сетки; d_{max} – максимальный размер ребра треугольного элемента расчетной сетки. Как видно из таб. 4.7, относительное отклонение δ_p стремится к некоторому предельному значению по мере измельчения расчетной сетки (рис. 4.8).

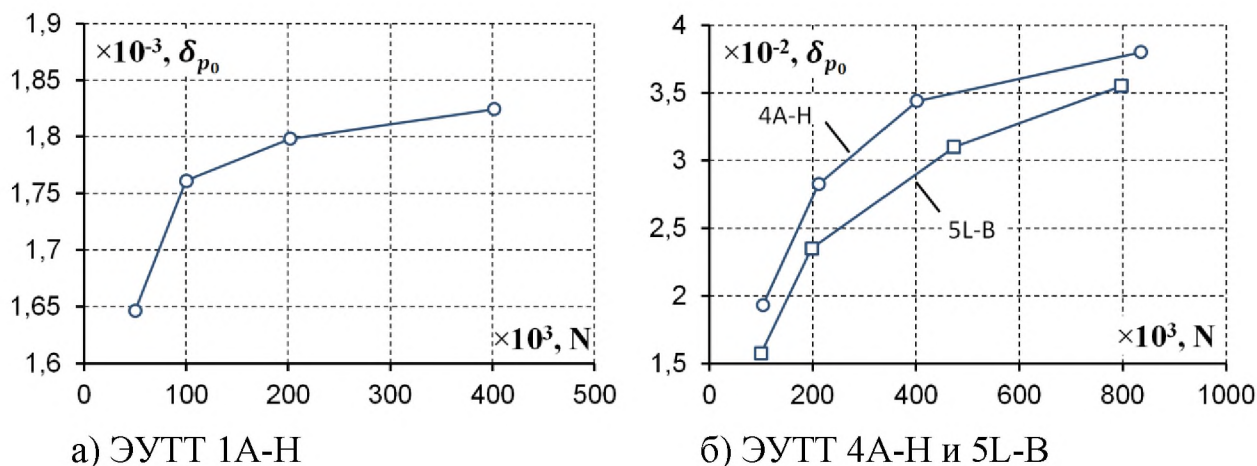


Рис. 4.8. Сеточная сходимость для основного течения.

Как отмечалось выше, важной характеристикой топлива, необходимой для расчета устойчивости рабочего процесса в ЭУТТ, является акустическая проводимость зоны горения. Зачастую в публикациях для топлив приводят значения функции отклика зоны горения по давлению, с помощью которой можно восстановить значение акустической проводимости, используя соотношение

$$A_b = M_b(\gamma R_b - 1) \quad (4.5)$$

Для составов В и С в работе [107] представлены зависимости функции отклика зоны горения от частоты при давлении в камере сгорания $p = 12,4$ МПа (рис. 4.9), а для состава А – при трех различных давлениях (рис. 4.10). Для топлива NWR-11 в работе [41] также представлены значения R_b при трёх различных давлениях (рис. 4.11). В силу того, что для давлений, реализуемых в КС, непосредственное экспериментальное определение R_b не проводилось, для получения требуемых значений осуществляется интерполяция имеющихся данных²⁰. В указанном диапазоне давлений при

²⁰ Подход предложен в публикации [107, с.8].

фиксированной частоте зависимость R_b от давления представляется параболической $R_b(\nu) = a(\nu)p^2 + b(\nu)p + c(\nu)$. По данным $R_b(\nu)$, представленным в [107], для частот с шагом в 200 Гц определяются коэффициенты $a(\nu)$, $b(\nu)$ и $c(\nu)$ от давления при фиксированной частоте. По полученным зависимостям можно восстановить функцию отклика зоны горения для произвольного давления и частоты. Подобные рассуждения справедливы только для топлив А и NWR-11, так как только для них указана зависимость функции отклика зоны горения от частоты при разных давлениях. Для топлив В и С, схожих по составу с топливом А, делается предположение, что для них также справедлива зависимость $R_b(\nu) = a(\nu)p^2 + b(\nu)p + c(\nu)$. При этом для топлив В и С данная зависимость отличается от зависимостей, установленных для топлива А, только свободным членом $c(\nu)$. Таким образом, для составов В и С справедливы соотношения $R_b^{B,C}(\nu) = a^A(\nu)p^2 + b^A(\nu)p + c^{B,C}(\nu)$. Коэффициенты $c^{B,C}(\nu)$ определялись по зависимостям, представленным для давления 12,4 МПа (рис. 4.9).

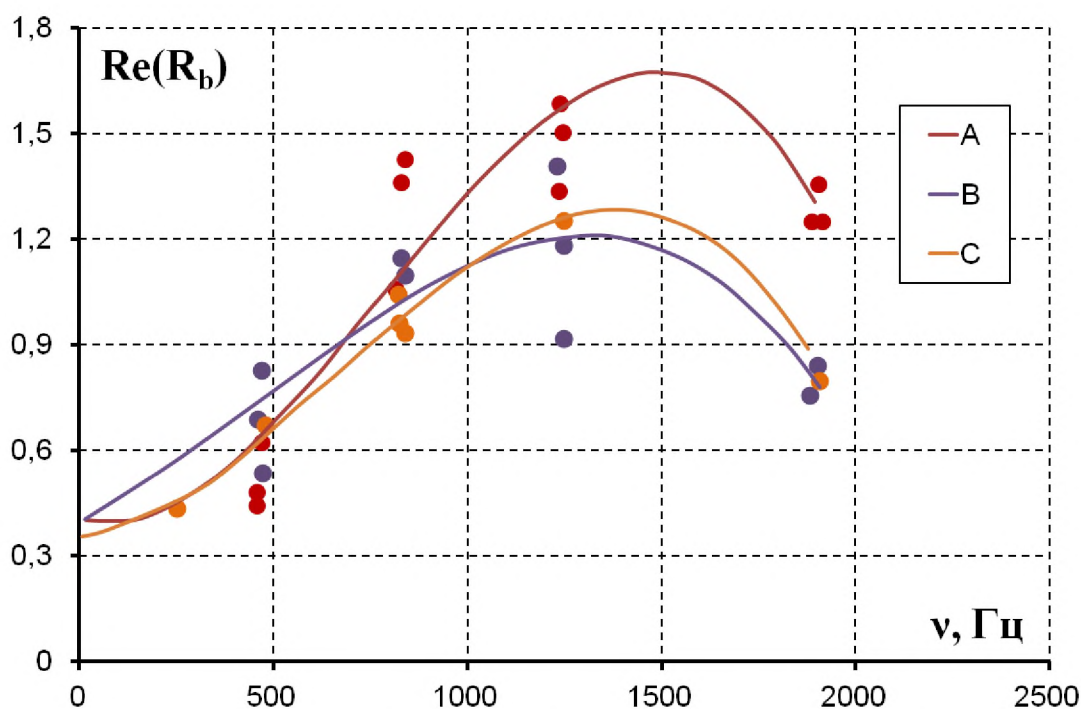


Рис. 4.9. Функция отклика зоны горения R_b при давлении $p = 12,4$ МПа для составов А, В и С [107].

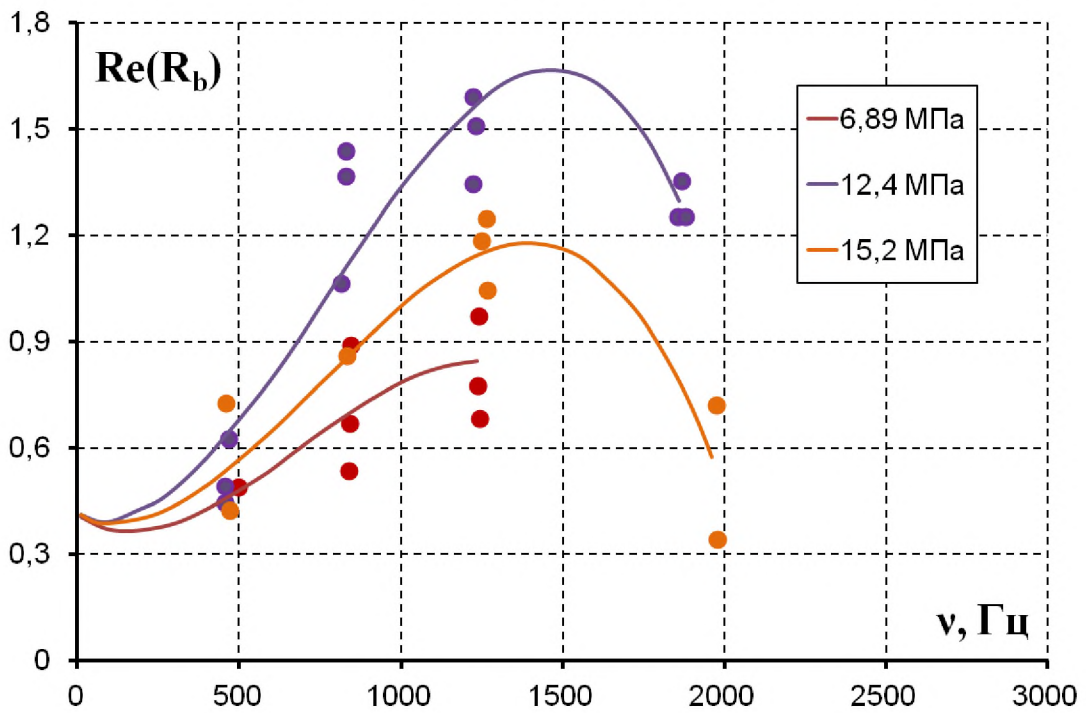


Рис. 4.10. Функция отклика зоны горения R_b при давлениях 6,89, 12,4 и 15,2 МПа для состава А [107].

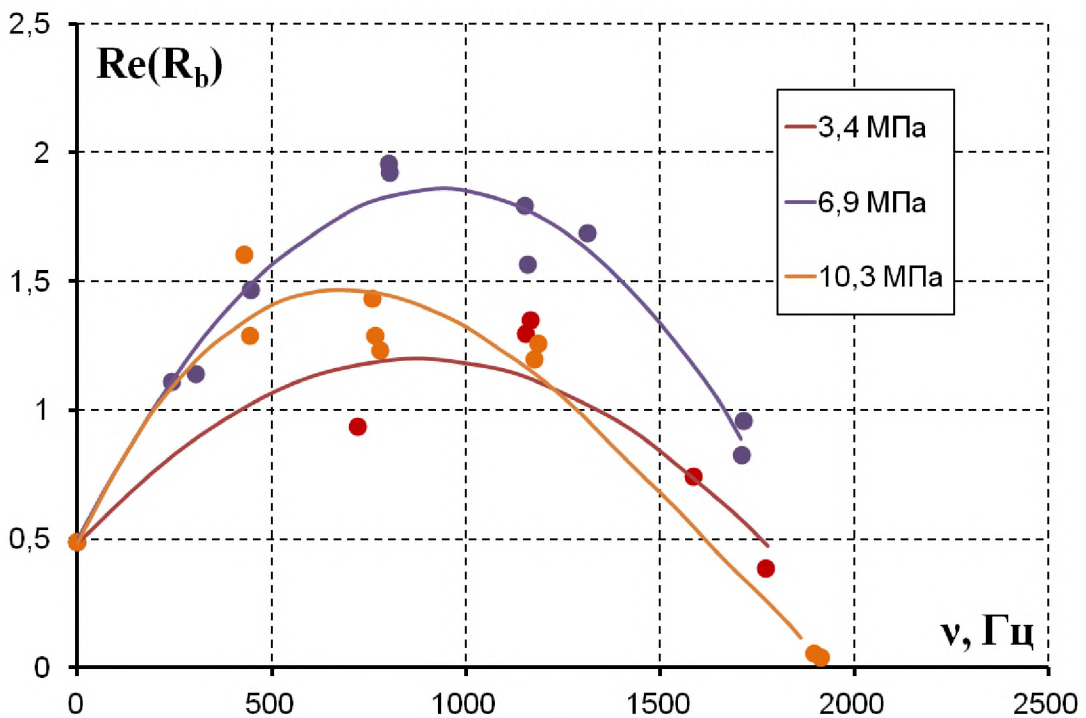
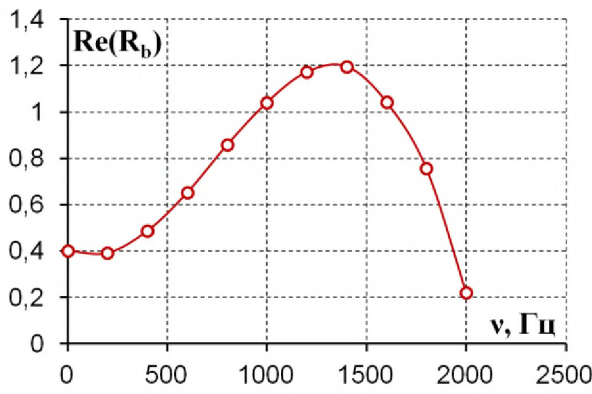
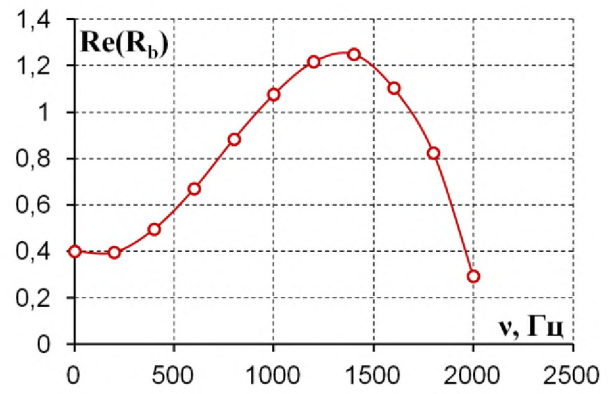


Рис. 4.11. Функция отклика зоны горения R_b при давлениях 3,4, 6,9 и 10,3 МПа для состава NWR-11 [41].

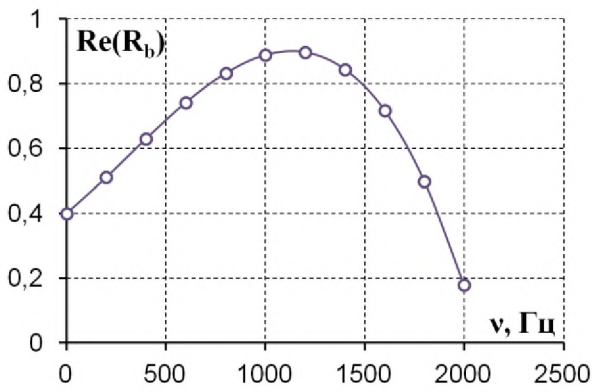


а) $p_0=8,1$ МПа

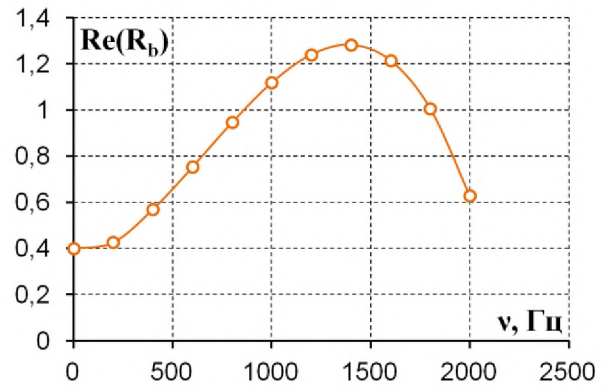


б) $p_0=8,3$ МПа

Рис. 4.12. Функция отклика зоны горения R_b для состава А.



а) состав В, $p_0=8,2$ МПа



б) состав С, $p_0=8,2$ МПа

Рис. 4.13. Функция отклика зоны горения R_b для составов В и С.

Для проведения численного эксперимента расчетная сетка измельчается в области около поверхности горения в прямоугольнике $\frac{D_p}{4} \times L_p$ и в докритической части сопла (рис. 4.14). На рис. 4.15 и рис. 4.16 представлены поля давления p_0 , скорости \vec{u}_0 и чисел Маха M основного квазистационарного течения в различных частях КС установки 1А-Н. Результаты расчетов распределения пульсаций давления \hat{p}' , радиальной \hat{u}' и азимутальной \hat{w}' компонент пульсаций скорости для той же ЭУ представлены на рис. 4.26. Как отмечалось выше, поиск решений линеаризованной системы уравнений Эйлера ищется в пространстве комплексных функций. Поля пульсаций давления и проекций скорости на оси r и z имеют общий вид $q'(r, z, t) = \hat{q}'(r, z)e^{i\omega t}$. При этом физически реализуемым решением является действительная часть $q'(r, z, t)$:

$$\text{Re}(q') = e^{-\text{Im}(\omega)t} (\text{Re}(\hat{q}') \cos(\text{Re}(\omega)t) - \text{Im}(\hat{q}') \sin(\text{Re}(\omega)t)) \quad (4.6)$$

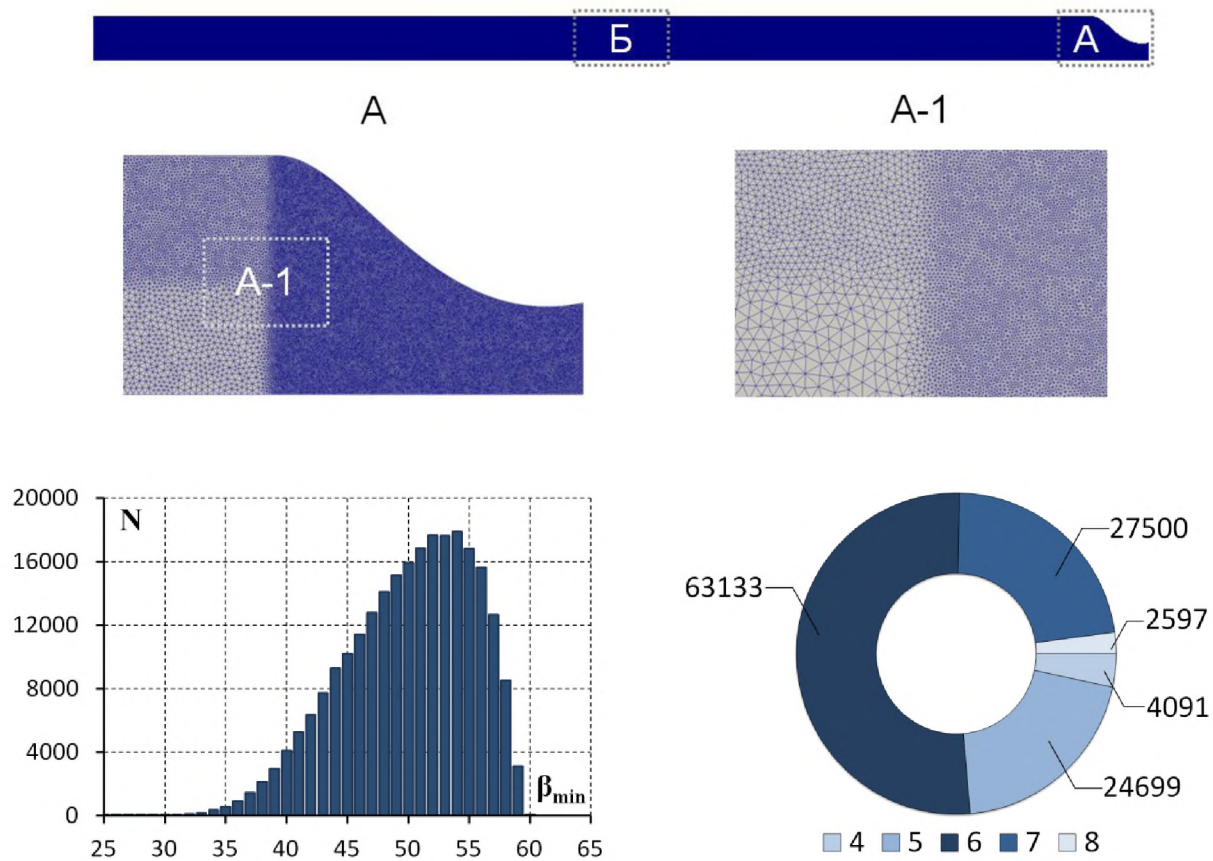


Рис. 4.14. Дискретизация расчетной области (ЭУТТ 1А-Н).

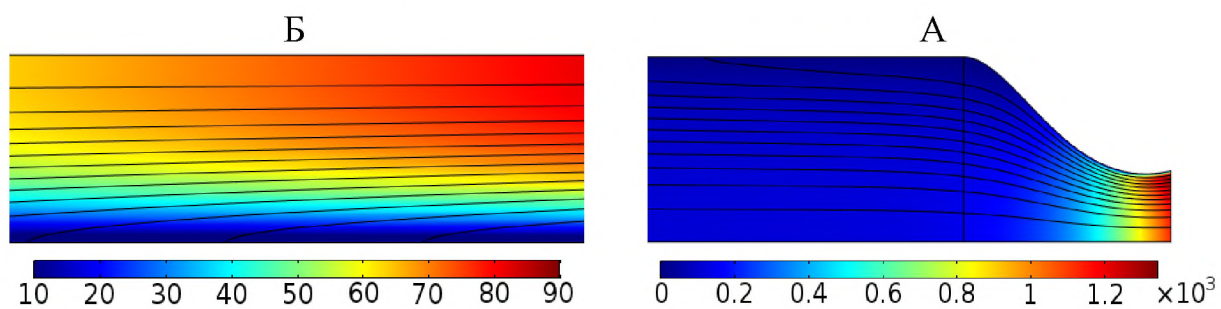


Рис. 4.15. Скорость основного течения (м/с) в КС установки 1А-Н.

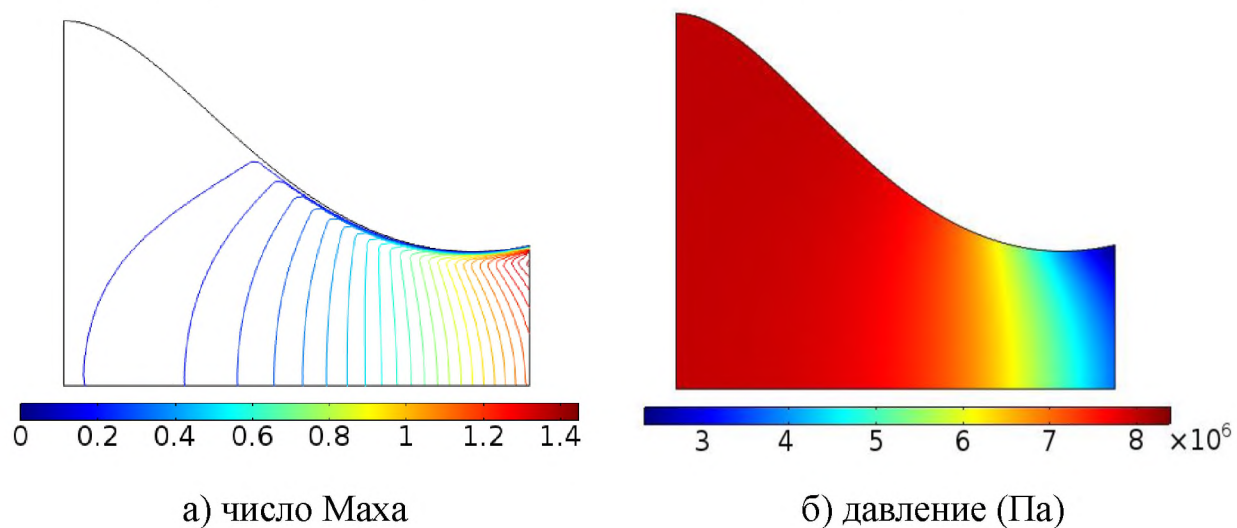


Рис. 4.16. Параметры ПС в сопловом блоке установки 1А-Н.

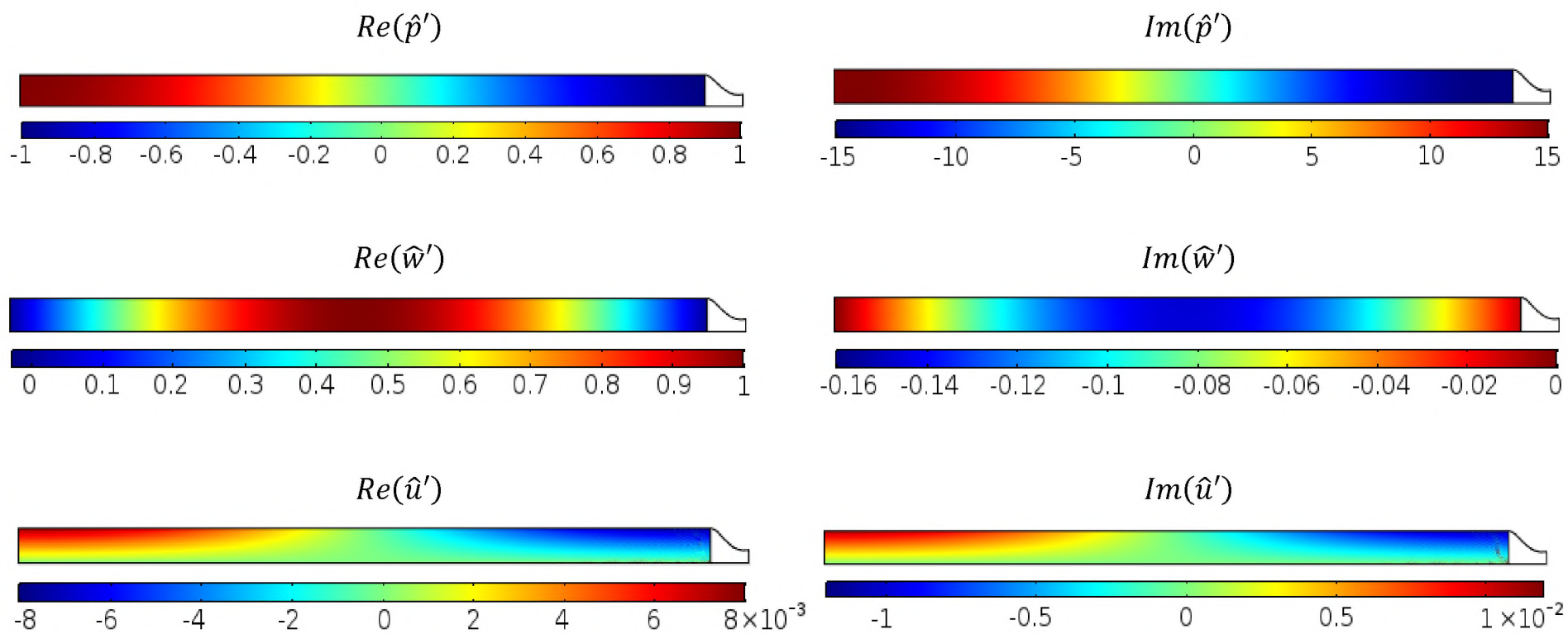


Рис. 4.17. Пространственное распределение пульсаций давления, радиальной и азимутальной компонент скорости в КС установки 1А-Н.

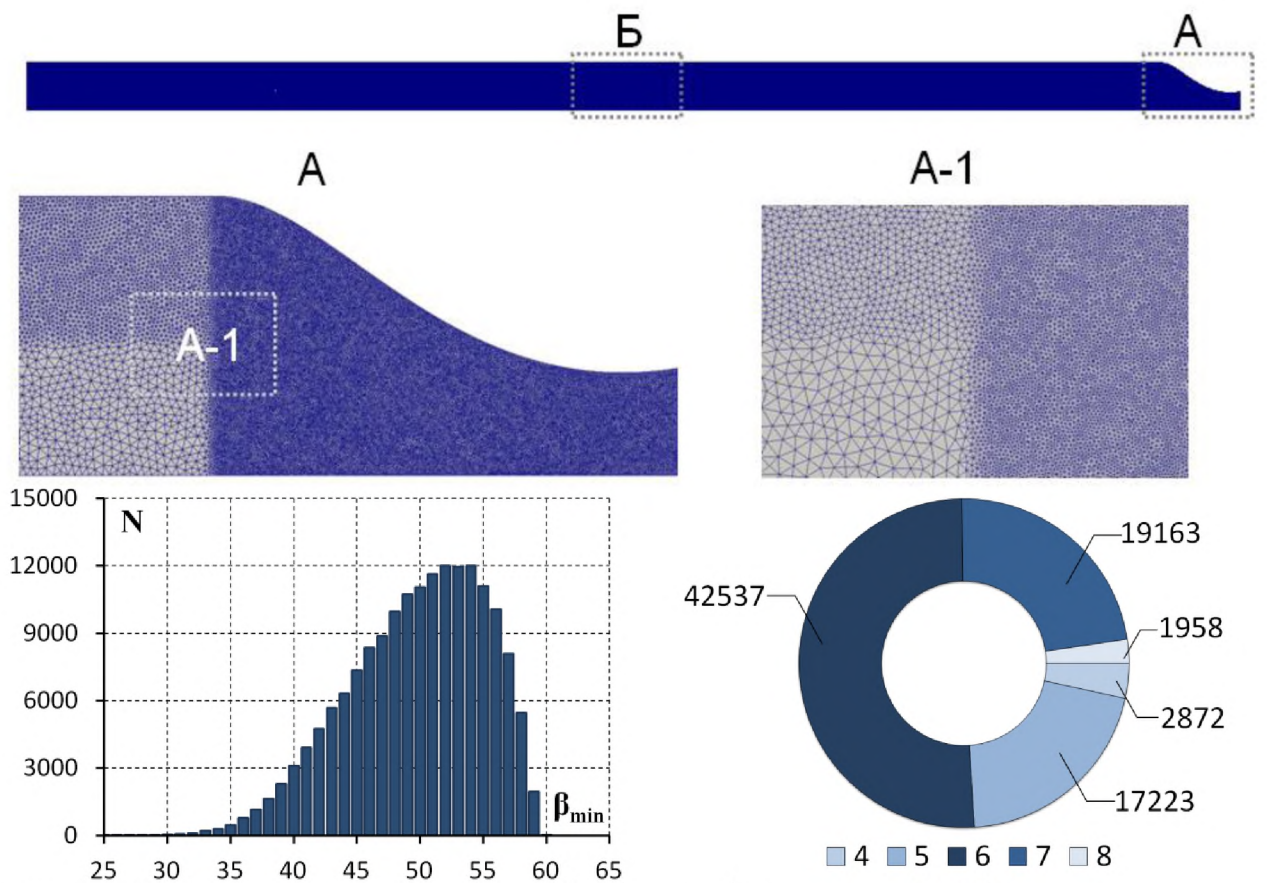


Рис. 4.18. Дискретизация расчетной области (установка 4А-Н)

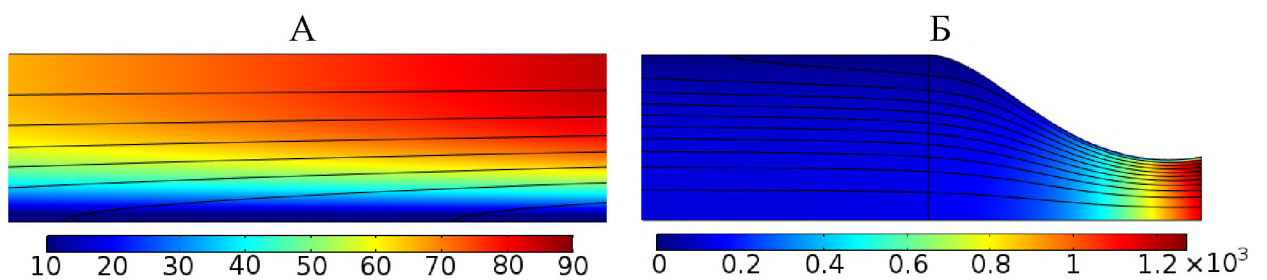
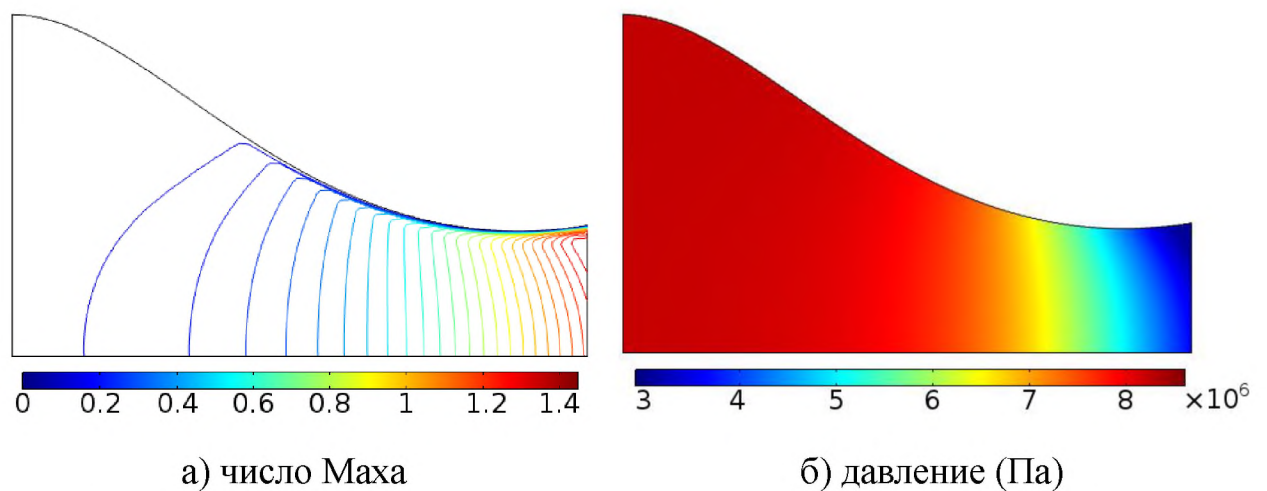


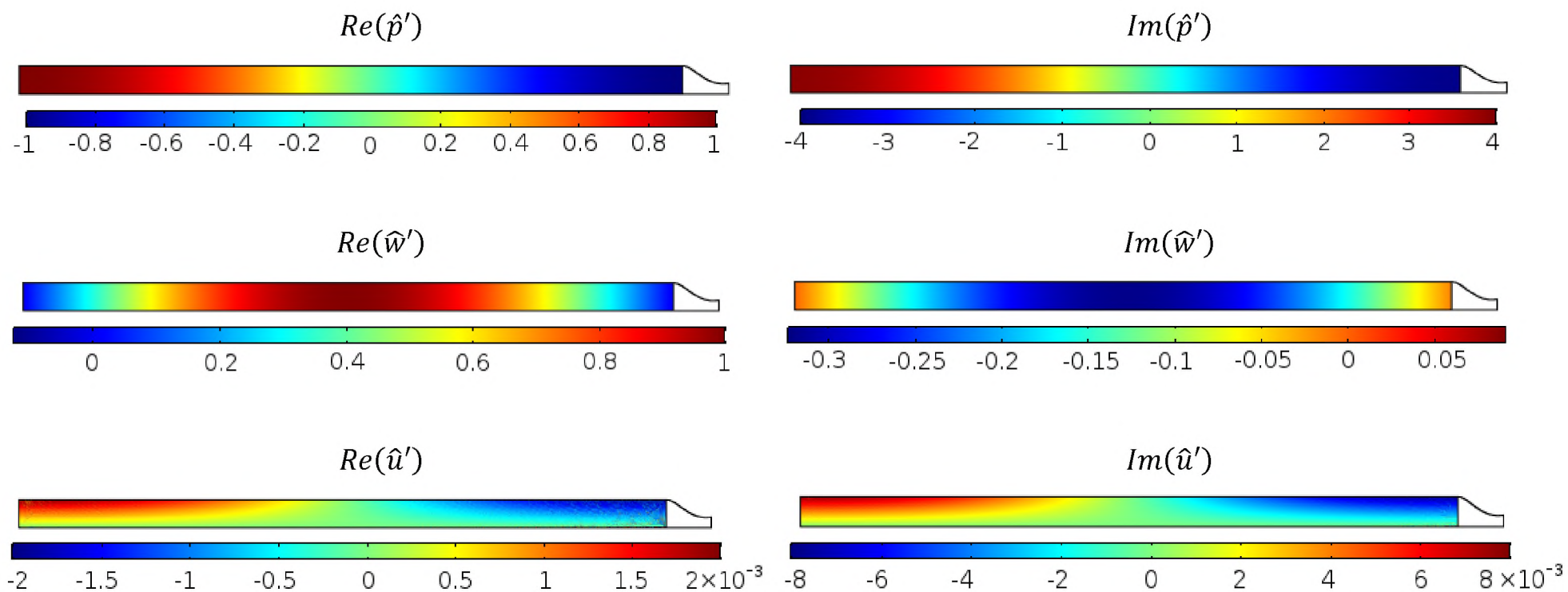
Рис. 4.19. Скорость основного течения (м/с) в КС установки 4А-Н.



а) число Маха

б) давление (Па)

Рис. 4.20. Параметры ПС в сопловом блоке установки 4А-Н.



06

Рис. 4.21. Пространственное распределение пульсаций давления, радиальной и азимутальной компонент скорости в КС установки 4А-Н.

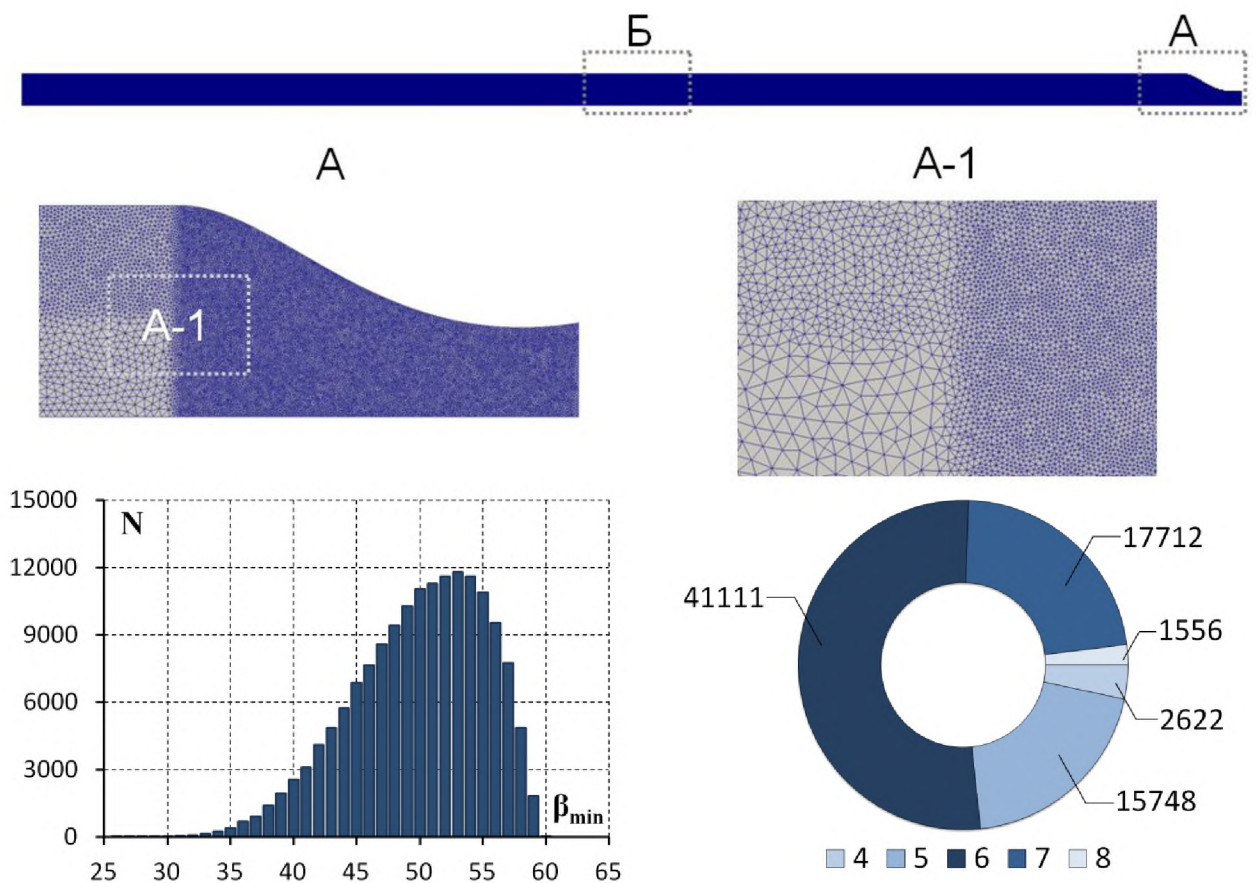


Рис. 4.22. Дискретизация расчетной области (установка 5L-B).

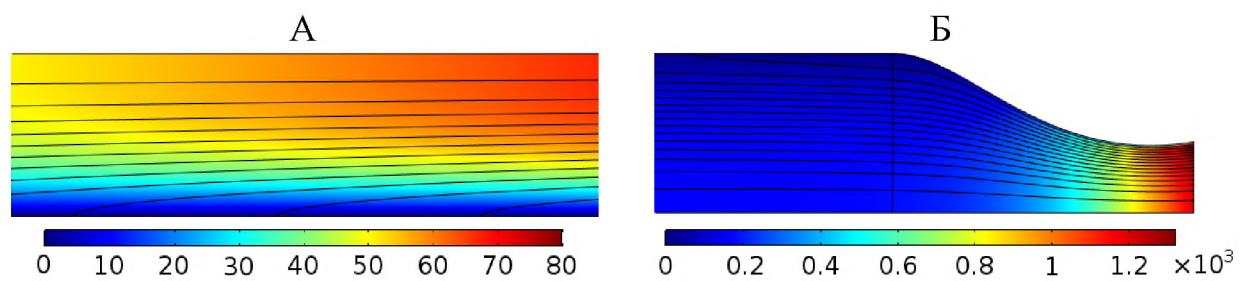


Рис. 4.23. Скорость основного течения в КС установки 5L-B.

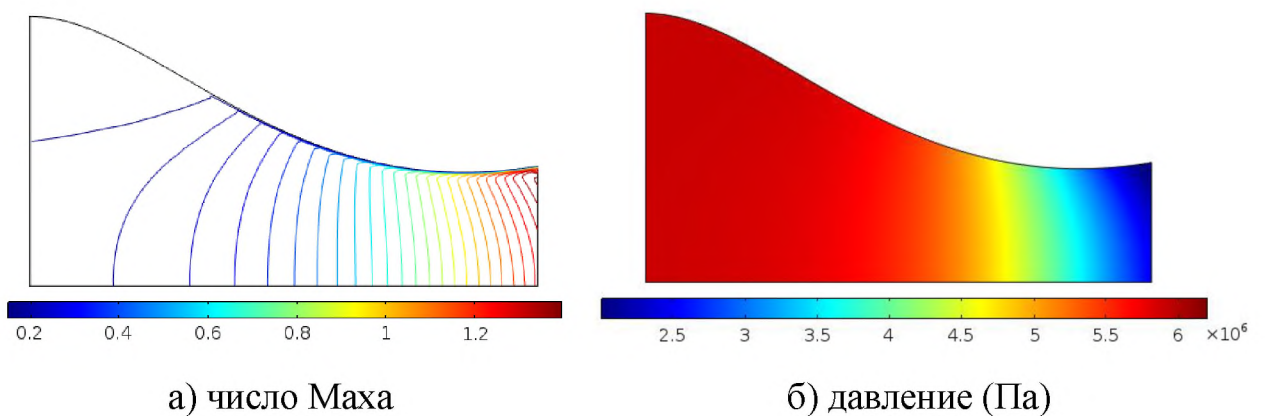


Рис. 4.24. Параметры ПС в сопловом блоке установки 5L-B.

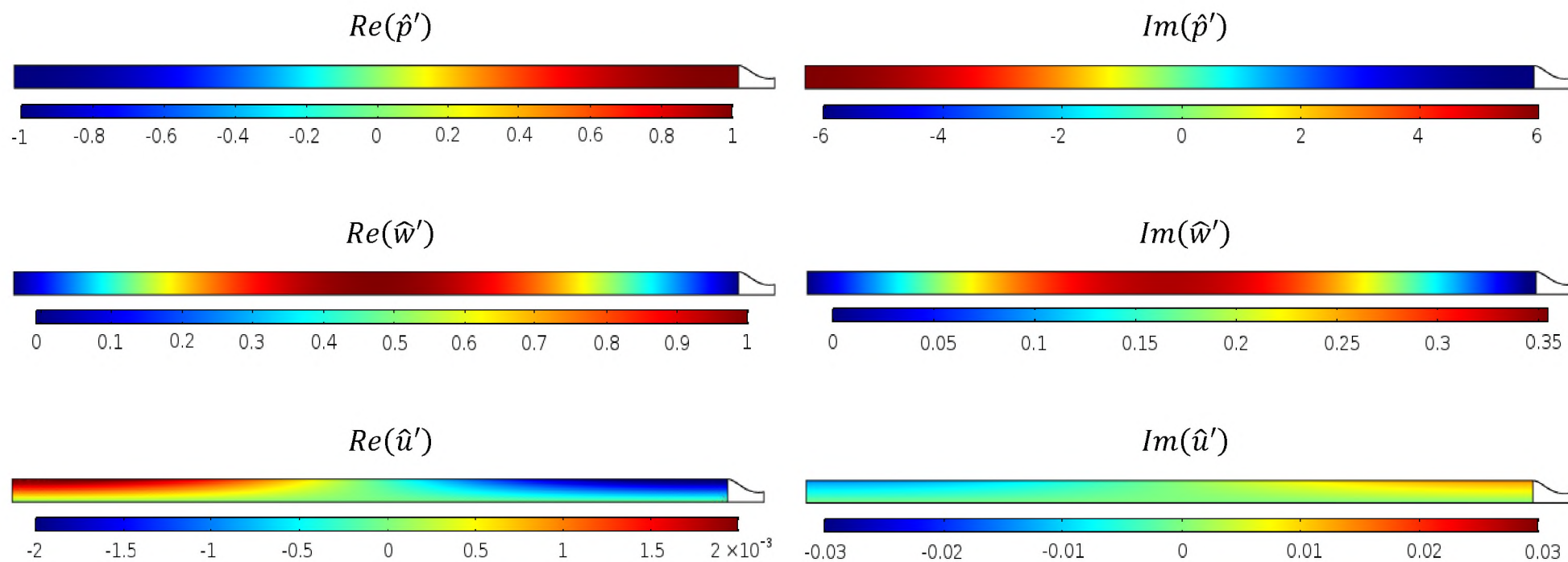
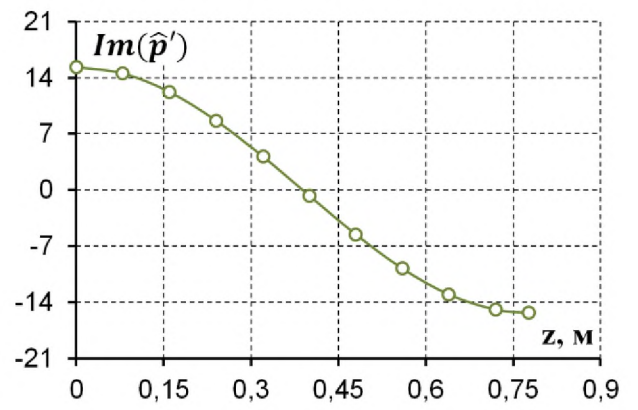
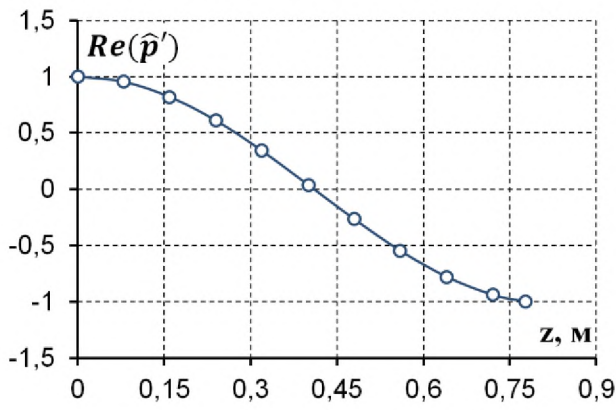
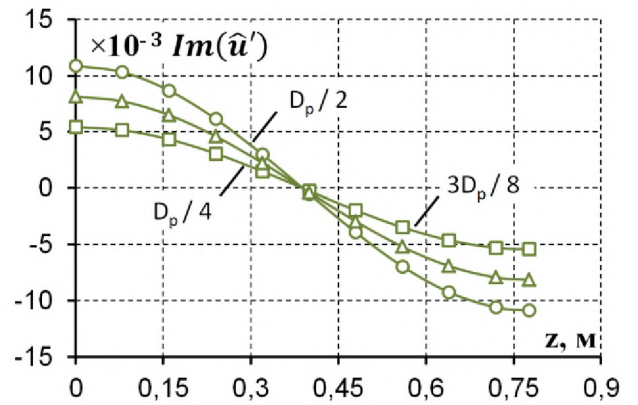
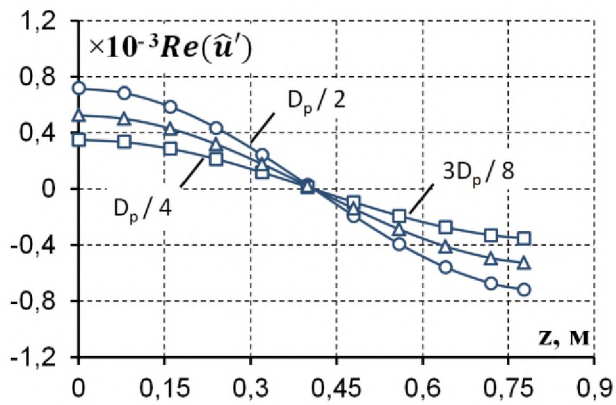


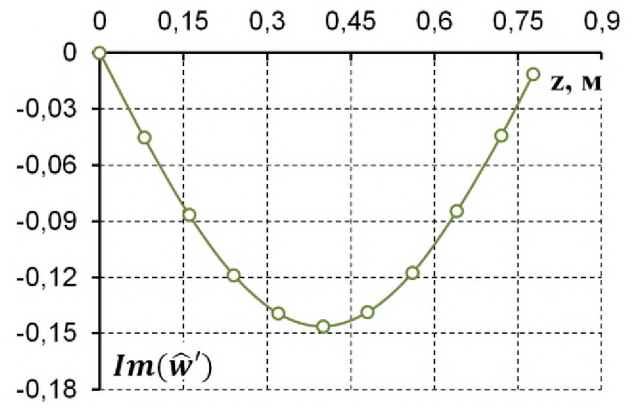
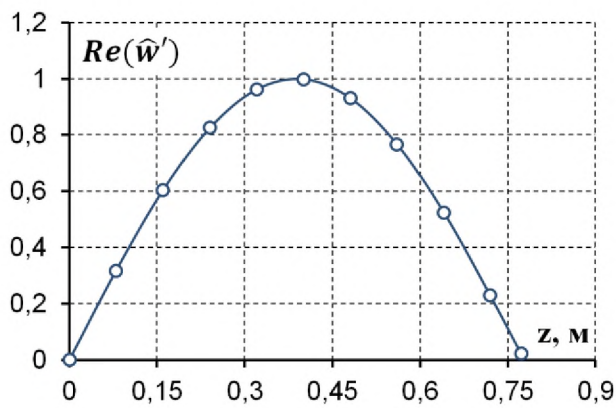
Рис. 4.25. Пространственное распределение пульсаций давления, радиальной и азимутальной компонент скорости в КС установки 5L-B.



а) пульсации давления \hat{p}' ($r = 0$)

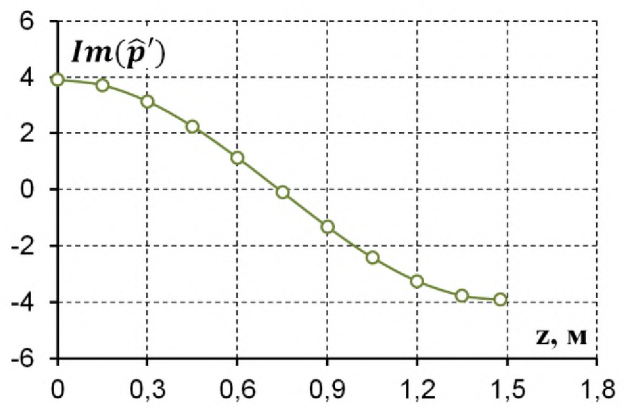
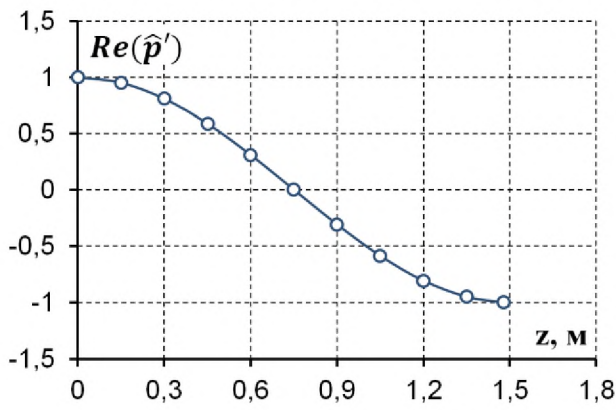


б) радиальная компонента пульсаций скорости \hat{u}'

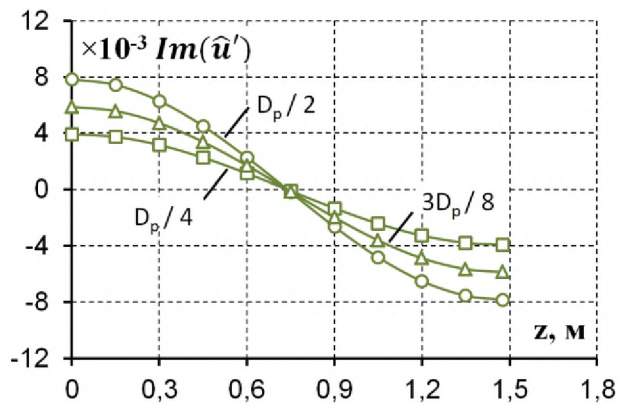
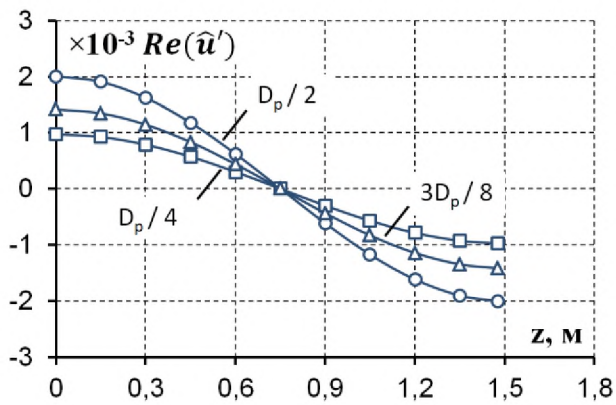


в) азимутальная компонента пульсаций скорости \hat{w}' ($r = 0$)

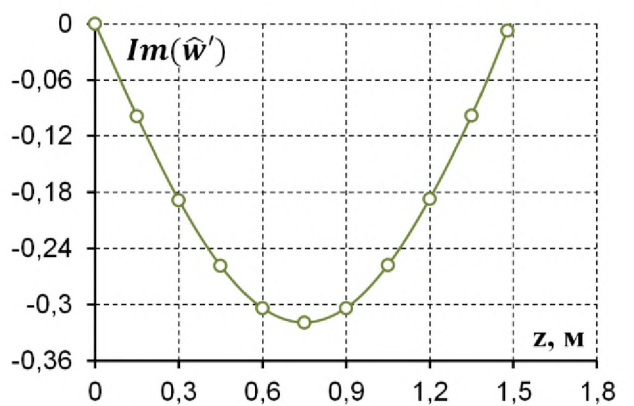
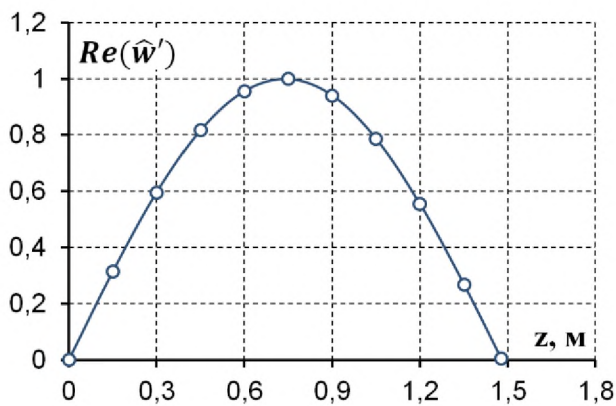
Рис. 4.26. Пространственное распределение пульсаций давления и скорости для установки 1А-Н



а) пульсации давления \hat{p}' ($r = 0$)

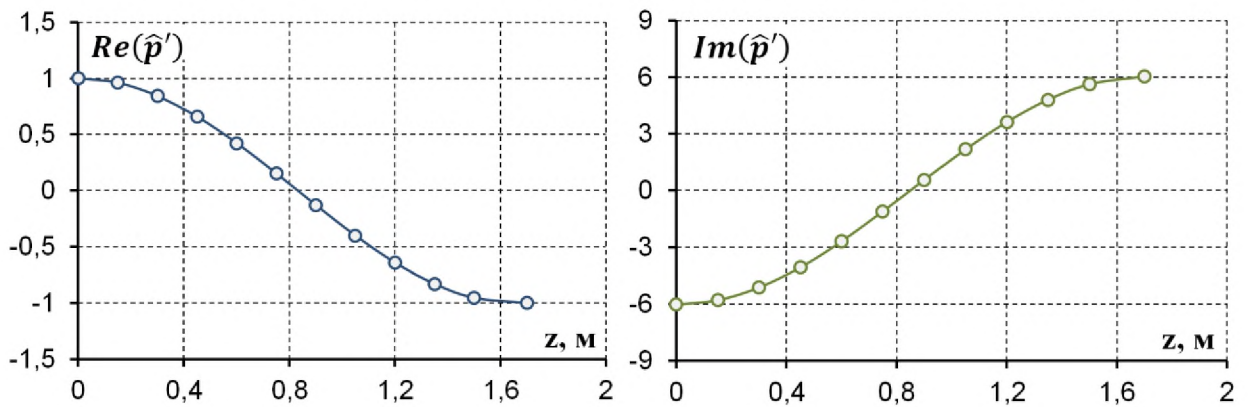


б) радиальная компонента пульсаций скорости \hat{u}'

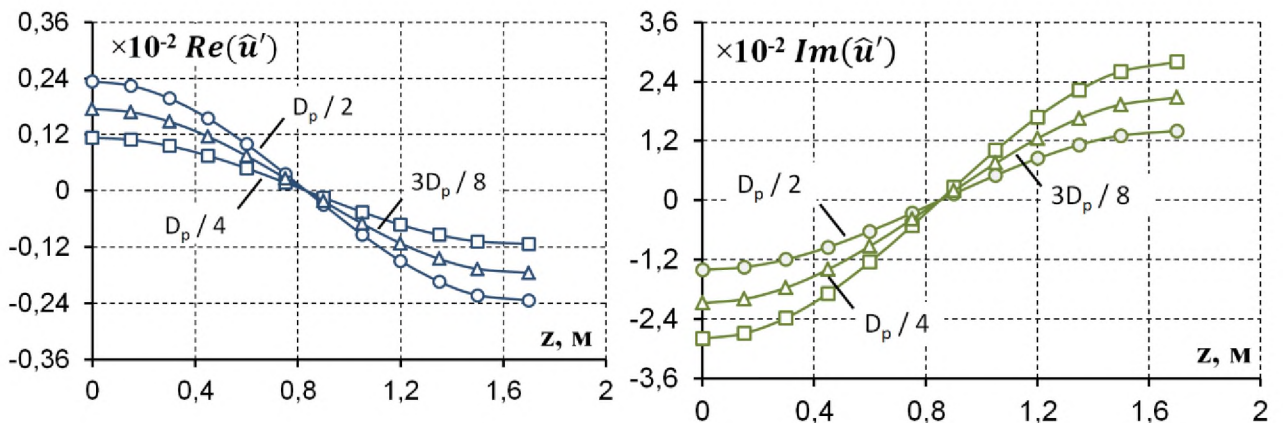


в) азимутальная компонента пульсаций скорости \hat{w}' ($r = 0$)

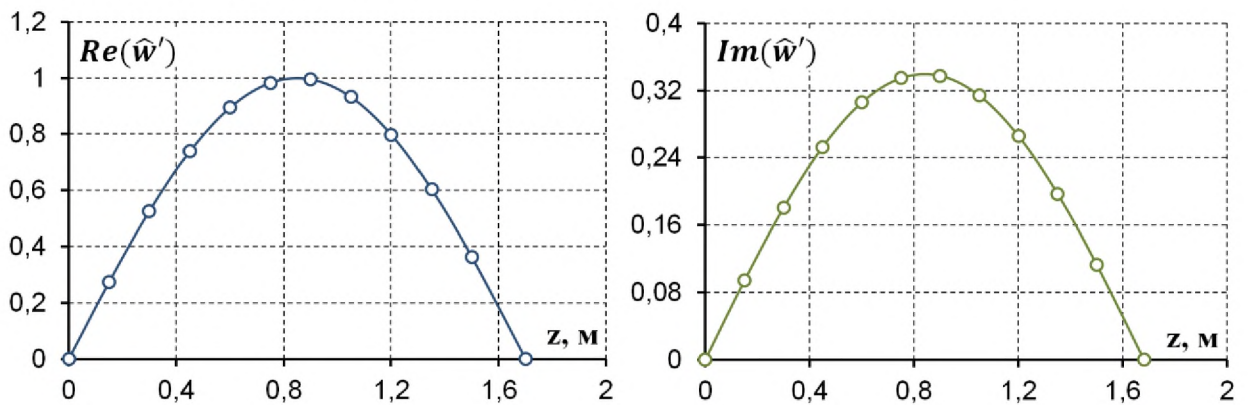
Рис. 4.27. Пространственное распределение пульсаций давления и скорости для установки 4А-Н.



а) пульсации давления \hat{p}' ($r = 0$)



б) радиальная компонента пульсаций скорости \hat{u}'



в) азимутальная компонента пульсаций скорости \hat{w}' ($r = 0$)

Рис. 4.28. Пространственное распределение пульсаций давления и скорости для установки 5L-B.

На рис. 4.29 представлены результаты расчетов коэффициентов затухания α для указанных в таб. 4.5 ЭУ. Черно-белые – данные из публикаций [41, 107], , красные – результаты расчетов с использованием предлагаемой методики. По оси x отложены значения α , полученные экспериментально, а по оси y – расчетные значения α . Геометрическое место точек, для которых экспериментальные и расчетные значения α совпадают, представлено сплошной черной линией на графике. К областям, ограниченным пунктирными линиями, относятся области, для которых расчетное значения α лежит в диапазоне $\pm 25\%$ и $\pm 50\%$ от соответствующего экспериментального значения α . Для всех ЭУТТ, указанных в [107] (буква «Н» в наименовании установки) расчет α осуществлялся с использованием подхода Калика, коротко описанная во Введении. В [41] представлены только экспериментальные данные, в связи с чем, данные для установок 5L-V и 6L-V лежат на прямой точного совпадения значений.

Как видно из рис. 4.29, все ЭУ из работы Харриса являются устойчивыми по отношению к малым продольным возмущениям давления. Установки 2B-H, 3C-H и 4A-H в реальности являются менее устойчивыми, чем это предсказывает полуаналитическую методику Калика (точки на графике лежат ниже кривой точного совпадения). Для ЭУ 2B-H и 3C-H данные, полученные по методике Калика, укладываются в диапазон 50% отклонения от экспериментальных данных. Наибольшее отклонение ($>50\%$) наблюдается для ЭУТТ 4A-H. Как отмечается в [107], данное завышение устойчивости для большинства ЭУТТ может быть связано с неточностями экспериментального определения функции отклика зоны горения по давлению да рассматриваемых топлив.

Расчетные значения α , полученные с использованием методики, описанного в данной работе, лежат в диапазоне 25 % отклонения от результатов, полученных экспериментально. При этом все значения α лежат выше значений, полученных по методике Калика. Установки 1A-H и 2B-H являются более устойчивыми, чем это предсказывает предложенная

методика. Данное обстоятельство может быть связано с тем, что в при расчете не учитывалось содержания конденсированной фазы в потоке (в данном случае речь идет о саже, так как все рассматриваемые топлива являются безметалльными), что приводит к завышению значений α относительно как результатов, полученных экспериментально, так и полученных с помощью методики Калика.

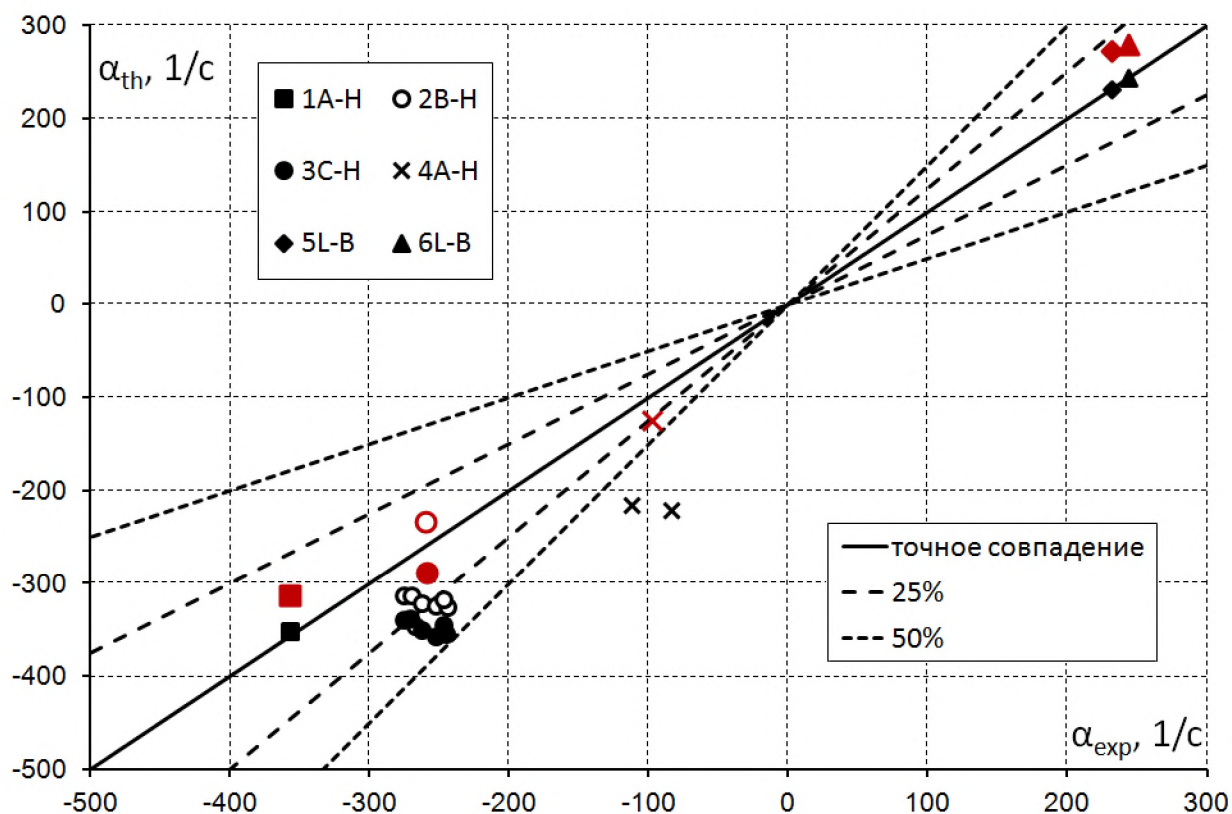


Рис. 4.29. Коэффициент затухания: черные – данные из [41, 107], красные – расчетные данные.

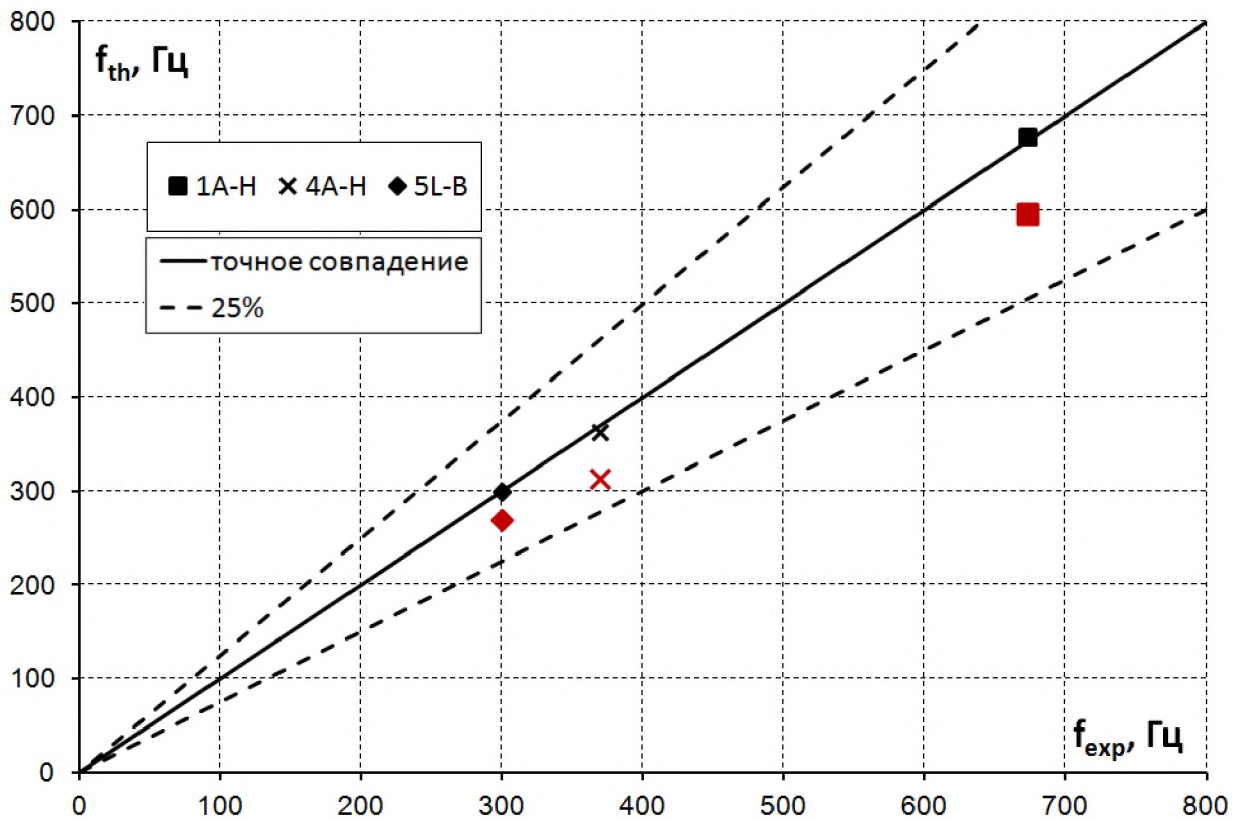


Рис. 4.30. Частота реализуемых колебаний; черные – данные из [41, 107], красные – расчетные данные.

В таб. 4.8 представлены результаты исследования сеточной сходимости по норме L^1 полей пульсаций давления \hat{p}' для установок 1А-Н, 4А-Н и 5L-B:

$$\delta_{\hat{p}'}^{Re} = \frac{\int_V |Re(\hat{p}') - Re(\hat{P}')| dV}{\int_V |Re(\hat{P}')| dV}, \quad (4.7)$$

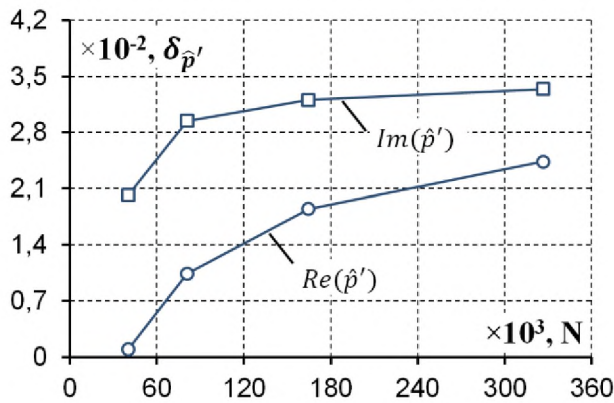
$$\delta_{\hat{p}'}^{Im} = \frac{\int_V |Im(\hat{p}') - Im(\hat{P}')| dV}{\int_V |Im(\hat{P}')| dV}, \quad (4.8)$$

В выражениях (4.7) и (4.8) в качестве \hat{P}' использовалось поле пульсаций, посчитанное на самой грубой сетке. Параметры грубой сетки для ЭУ 1А-Н – $\{N = 18791, d_{max} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}\}$; для 4А-Н – $\{N = 44280, d_{max} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}\}$; для установки 5L-B – $\{N = 53002, d_{max} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}\}$

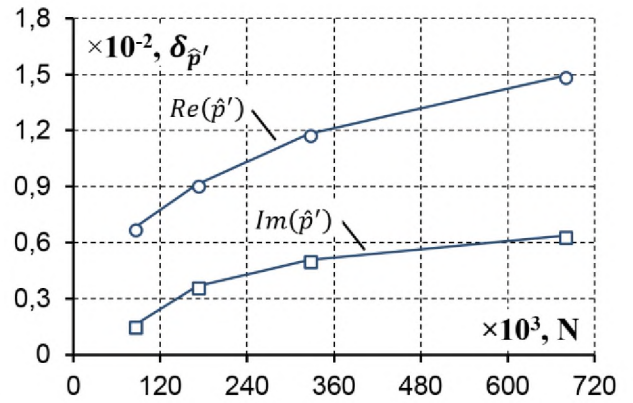
Таб. 4.8. Сеточная сходимость пульсационного течения

ЭУТТ	1А-Н			
Расчетная сетка	$N = 40480$ $d_{max} = 2 \cdot 10^{-3}$, м	$N = 81005$ $d_{max} = 1,4 \cdot 10^{-3}$, м	$N = 164540$ $d_{max} = 1 \cdot 10^{-3}$, м	$N = 326294$ $d_{max} = 7 \cdot 10^{-4}$, м
$\delta_{\hat{p}'}^{Re}$	$1,65 \cdot 10^{-3}$	$1,76 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$
$\delta_{\hat{p}'}^{Im}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$
ν , Гц	595	595	595	595
α_{th} , с ⁻¹	-313	-313	-313	-313
ЭУТТ	4А-Н			
Расчетная сетка	$N = 83891$ $d_{max} = 2,6 \cdot 10^{-3}$	$N = 170936$ $d_{max} = 1,8 \cdot 10^{-3}$	$N = 325152$ $d_{max} = 1,3 \cdot 10^{-3}$	$N = 677494$ $d_{max} = 9 \cdot 10^{-4}$
$\delta_{\hat{p}'}^{Re}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$
$\delta_{\hat{p}'}^{Im}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$
ν , Гц	313	313	313	313
α_{th} , с ⁻¹	-124	-124	-124	-124
ЭУТТ	5L-B			
Расчетная сетка	$N = 82206$ $d_{max} = 2,4 \cdot 10^{-3}$	$N = 163613$ $d_{max} = 1,7 \cdot 10^{-3}$	$N = 391938$ $d_{max} = 1,1 \cdot 10^{-3}$	$N = 662812$ $d_{max} = 8,5 \cdot 10^{-4}$
$\delta_{\hat{p}'}^{Re}$	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
$\delta_{\hat{p}'}^{Im}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$6,2 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$
ν , Гц	269	269	269	269
α_{th} , с ⁻¹	272	272	272	272

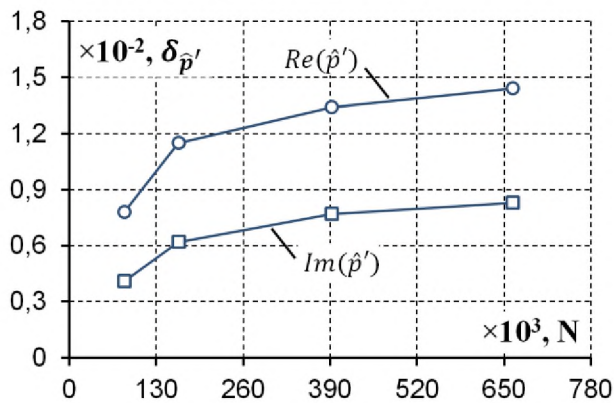
Как и для случая со сходимостью решения, соответствующего основному течению, относительные отклонения $\delta_{\hat{p}'}^{Re}$ и $\delta_{\hat{p}'}^{Im}$ стремятся к некоторым предельным значениям по мере измельчения сетки (рис. 4.31).



а) ЭУТТ 1А-Н



б) ЭУТТ 4А-Н



в) ЭУТТ 5L-B

Рис. 4.31. Сеточная сходимость для пульсационного течения.

4.4 Устойчивость режимов работы ЭУТТ, использующих металлизированные топлива

В данном пункте работы исследуется устойчивость рабочего процесса в двух ЭУТТ, в которых в качестве топлива используется состав близкий к № 3-М (Глава 3).

4.4.1 ЭУТТ большого удлинения

В качестве первой ЭУТТ рассматривается установка большого удлинения, схема которого представлена на рис. 4.32. Общее время работы ЭУ не превышает 6 секунд. Коэффициент затухания α рассчитывается для четырех моментов времени, лежащих в диапазоне 1...5 с. Размеры наполнителя, выгорание которого для различных моментов времени определяются с использованием алгоритма [12], представлены в таб. 4.9. Все

данные указаны в безразмерном виде относительно диаметра критического сечения сопла D_{cr} .

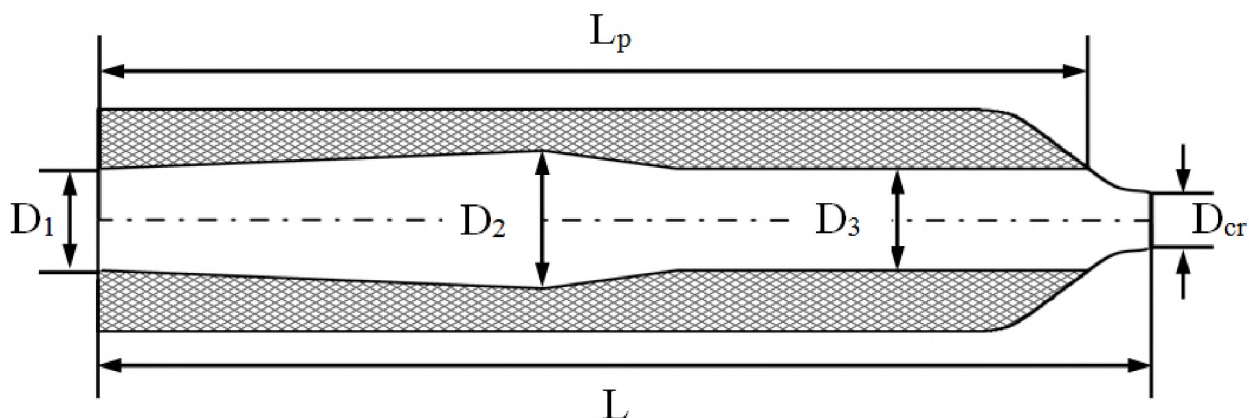


Рис. 4.32. Общая схема проточной части КС ЭУ большого удлинения $L = 28,7$.

Таб. 4.9. Параметры проточной части КС ЭУ большого удлинения в различные моменты времени.

t, c	D_1	D_2	D_3	L_p
1,5	1,8	2	1,5	27,5
2,5	2	2,1	1,7	27,4
3,5	2,2	2,7	1,8	27,35
4,5	2,3	2,5	2	27,3

В отличие от установок, рассмотренных в пункте 4.3, данная ЭУ в качестве топлива использует металлизированный состав №3-М. В силу данного обстоятельства итоговый коэффициент затухания α может быть представлен в виде

$$\alpha = \tilde{\alpha} + \alpha_p, \quad (4.9)$$

где $\tilde{\alpha}$ – коэффициент затухания, обусловленный особенностями основного течения в КС, стоком энергии через сопло и взаимодействием возмущения с зоной горения топлива; α_p – коэффициент затухания, обусловленный диссипацией энергии возмущений на частицах конденсированной фазы.

В [16, с. 228] предложена следующая зависимость для α_p :

$$\alpha_p = -\eta \frac{\omega \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (4.10)$$

где η – массовая концентрация конденсированной фазы в ПС; $\tau = \frac{\rho_{\text{ч}}}{18\mu_{\text{visc}}} d_{\text{ч}}^2$ – время скоростной релаксации колеблющейся частицы; ω – угловая частота колебаний; $\rho_{\text{ч}}$ – плотность вещества частицы (в данном случае Al_2O_3); $d_{\text{ч}}$ – диаметр частицы. В качестве температурной зависимости плотности частиц для случая оксида алюминия может быть использовано следующее соотношение [25, с. 174]

$$\rho_{\text{ч}} = 5558 - 1,08T \quad (4.11)$$

На рис. 4.33 представлено поведение α_p при различных частотах для характерных диаметров частиц и массовой концентрации конденсированной фазы ($\rho_{\text{ч}} = 1778 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$).

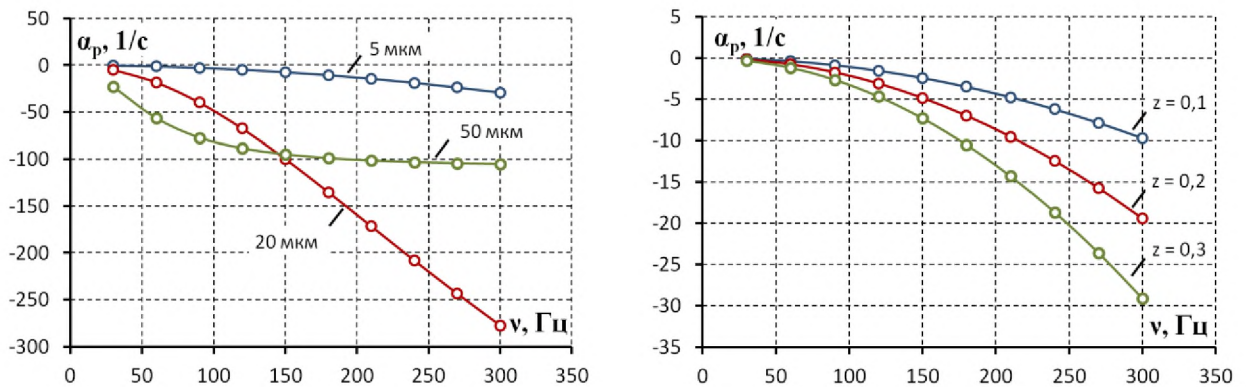


Рис. 4.33. Зависимость коэффициента затухания α_p для различных параметров конденсированной фазы.

Так же как и для предыдущих ЭУТТ расчетная сетка установки большого удлинения, дополнительно измельчалась вдоль поверхности наполнителя и в области соплового блока (рис. 4.34). Параметры ПС в различных частях камеры ЭУ представлены на рис. 4.35 и рис. 4.36.

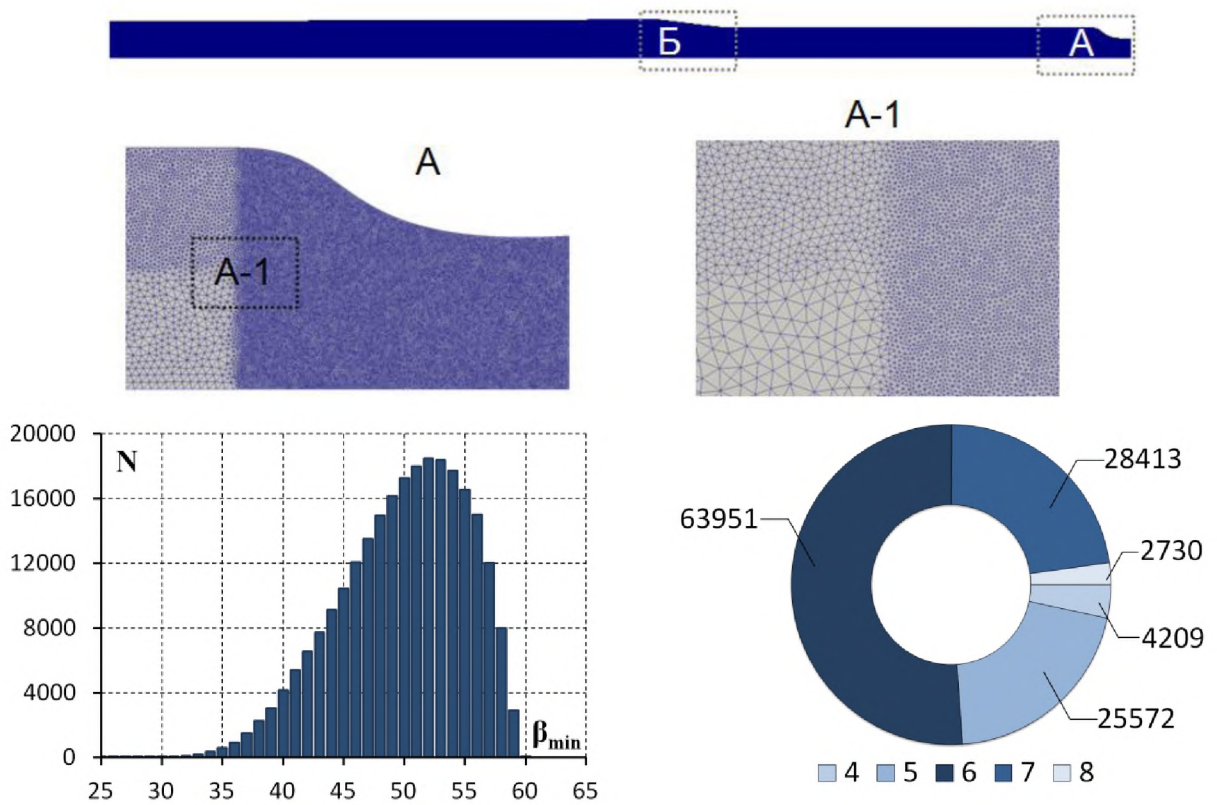


Рис. 4.34. Расчетная сетка для КС ЭУТТ большого удлинения.

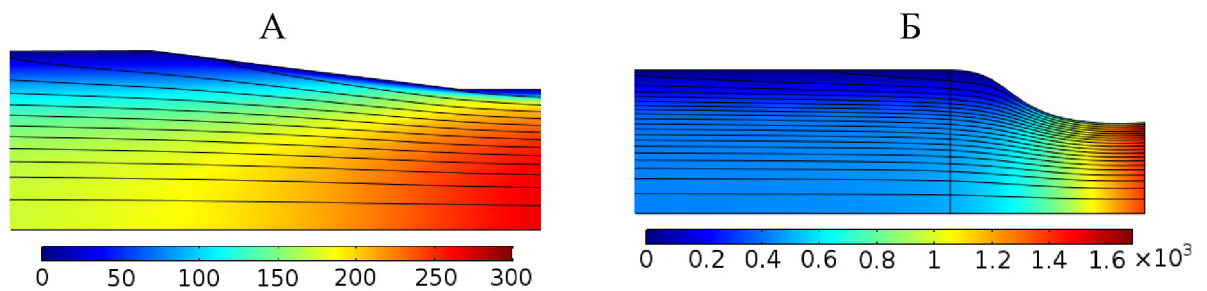


Рис. 4.35. Скорость основного течения (м/с) в КС ЭУТТ большого удлинения при $t = 2,5$ с.

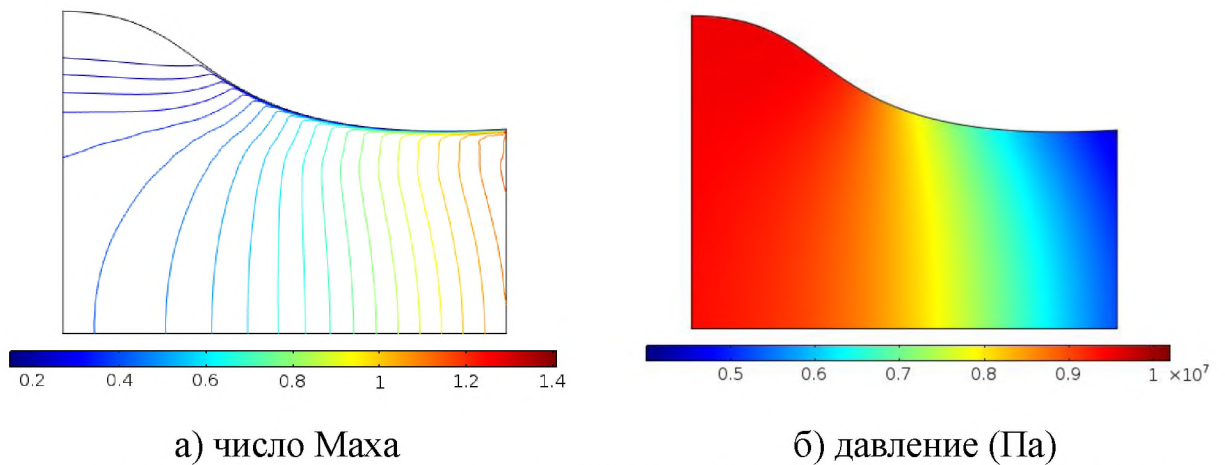


Рис. 4.36. Параметры ПС в сопловом блоке ЭУТТ большого удлинения при $t = 2,5$ с.

Как видно из рис. 4.37 и рис. 4.38, где представлено пространственное распределение радиальной и азимутальной компонент пульсационной составляющей скорости, результаты претерпели изменения по сравнению с результатами, полученными для ЭУТТ с цилиндрической проточной частью КС. Данное обстоятельство, в основном, связано с особенностями геометрии и отличием в акустической проводимости. Стоит обратить внимание, что полученные распределения параметров рассчитывались без учета воздействия конденсированной фазы на основное и пульсационное течения. Иными словами, результатам, представленным на рис. 4.37 и рис. 4.38, соответствует коэффициент затухания $\tilde{\alpha}$ в выражении (4.9). Для получения значения α необходимо рассчитать α_p с использованием выражения (4.10), в которое подставлялось значения частот реализуемых колебаний, представленных на рис. 4.39-б. Для диаметра частиц конденсированной фазы $d_q=5$ мкм и частоты колебаний $\nu = 107$ Гц, коэффициент затухания α_p равняется $-3,7$ 1/с. Итоговые значения α представлены на рис. 4.39-а. Как видно из рисунка, существует временной интервал, в котором рабочий процесс ЭУТТ большого удлинения неустойчив ($\alpha > 0$). При этом в начальный момент времени и в конце эксплуатации рабочий процесс ЭУ становится устойчивым.

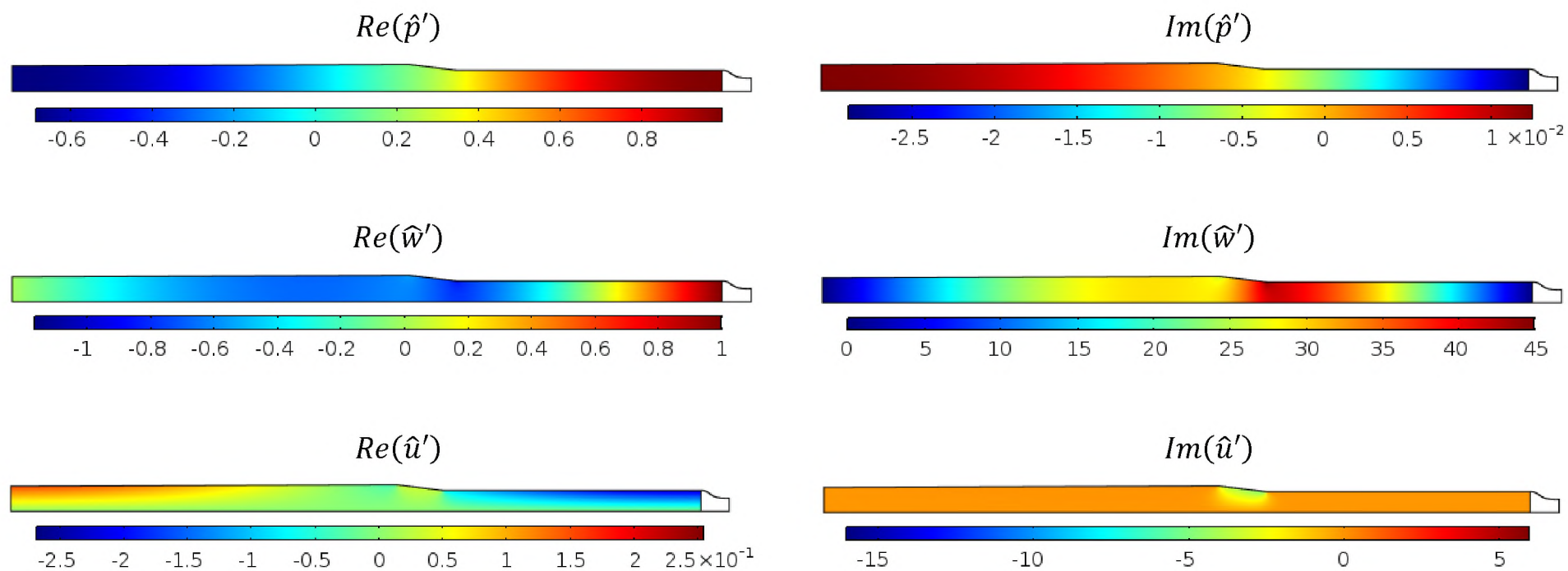
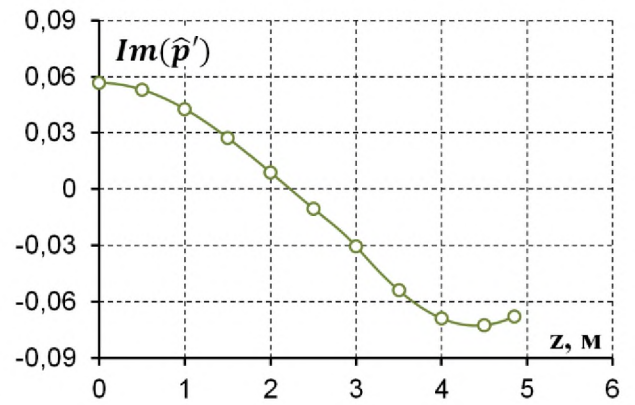
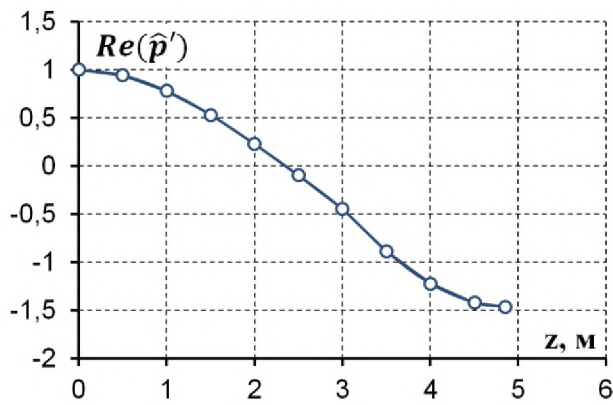
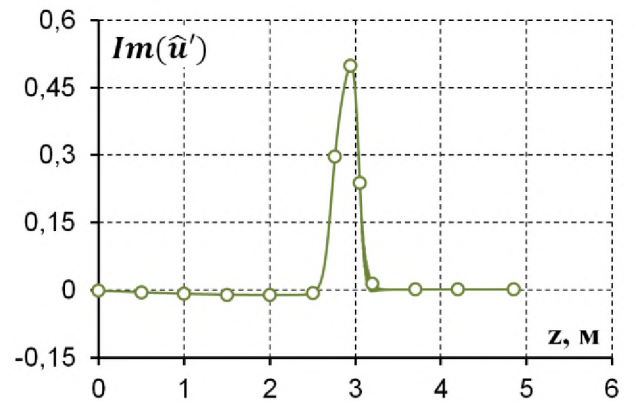
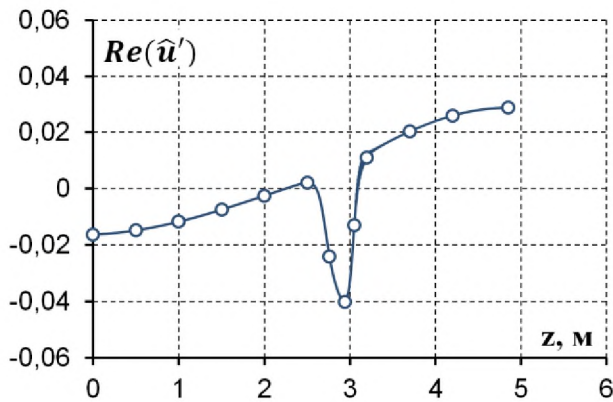


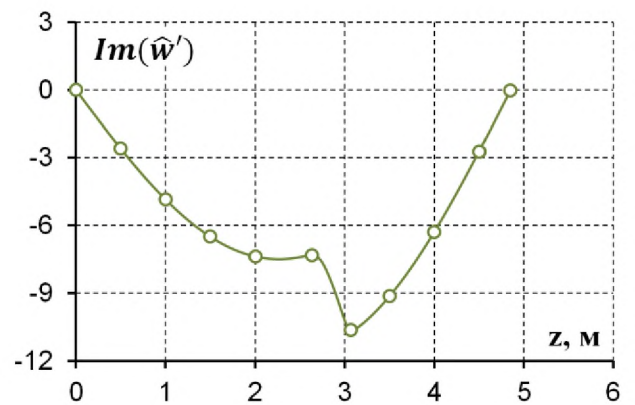
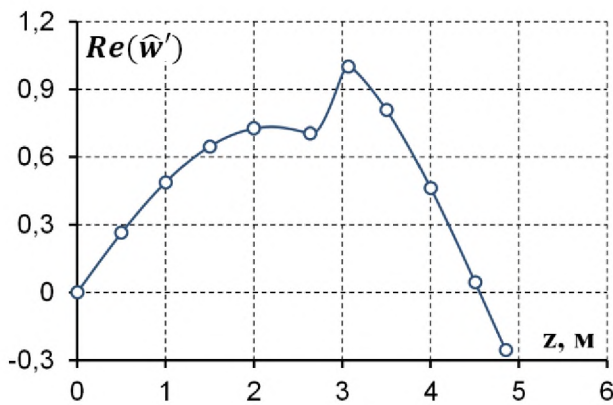
Рис. 4.37. Пространственное распределение пульсаций давления, радиальной и азимутальной компонент скорости в КС ЭУТТ большого удлинения при $t = 2,5$ с.



а) пульсации давления \hat{p} ($r = D_3 / 4$)



б) радиальная компонента пульсаций скорости \hat{u}' ($r = D_3 / 4$)



в) азимутальная компонента пульсаций скорости \hat{w}' ($r = D_3 / 4$)

Рис. 4.38. Пространственное распределение пульсаций давления и скорости для ЭУ большого удлинения.

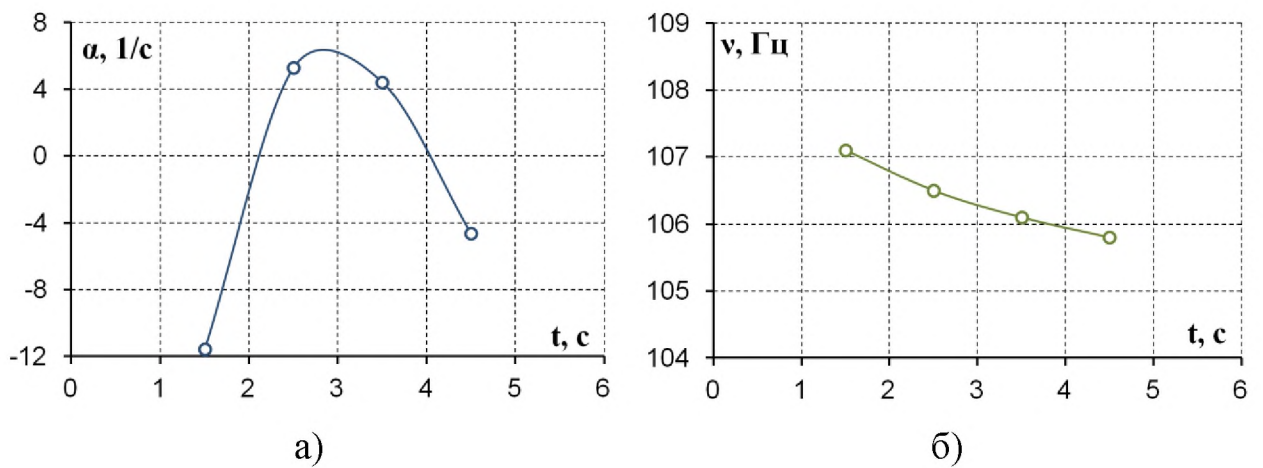


Рис. 4.39. Зависимость коэффициента затухания α (а) и частоты реализуемых колебаний ν (б) для ЭУТТ большого удлинения.

4.4.2 Двухкамерная ЭУТТ

Еще одной установкой, использующей состав близкий к №3-М в качестве топлива, является двухкамерная ЭУ. Камеры располагаются под углом к оси симметрии соплового блока. В качестве топлива используются два наполнителя с каналом в форме цилиндра. Для возможности использования осесимметричной реализации предлагаемой методики геометрия проточной части КС установки должна быть видоизменена: 1) обе камеры располагаются соосно; 2) сопловой блок, расположенный между КС, заменяется кольцевым соплом таким образом, чтобы площадь критического сечения нового сопла равнялась площади критического сечения исходного (рис. 4.41).

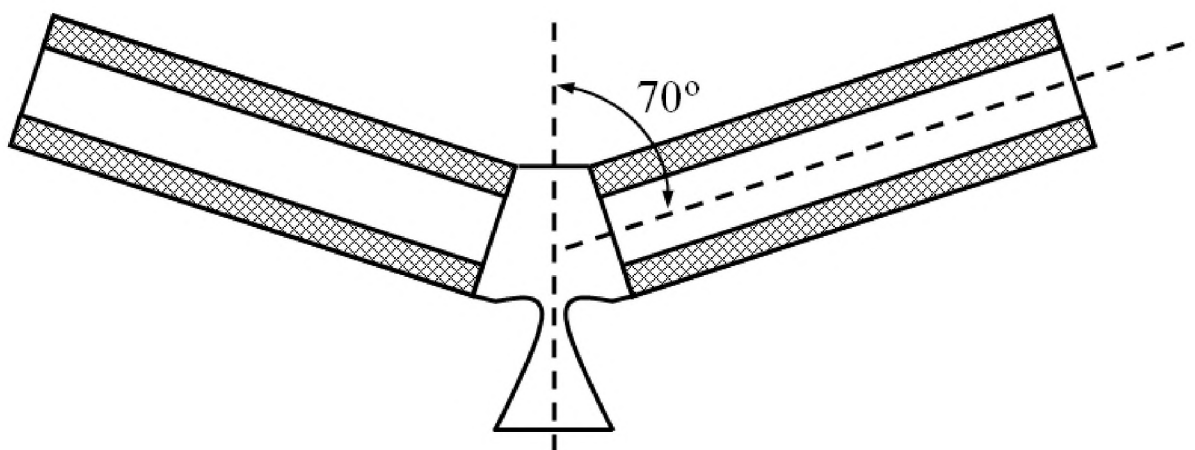


Рис. 4.40. Схема двухкамерной ЭУТТ.

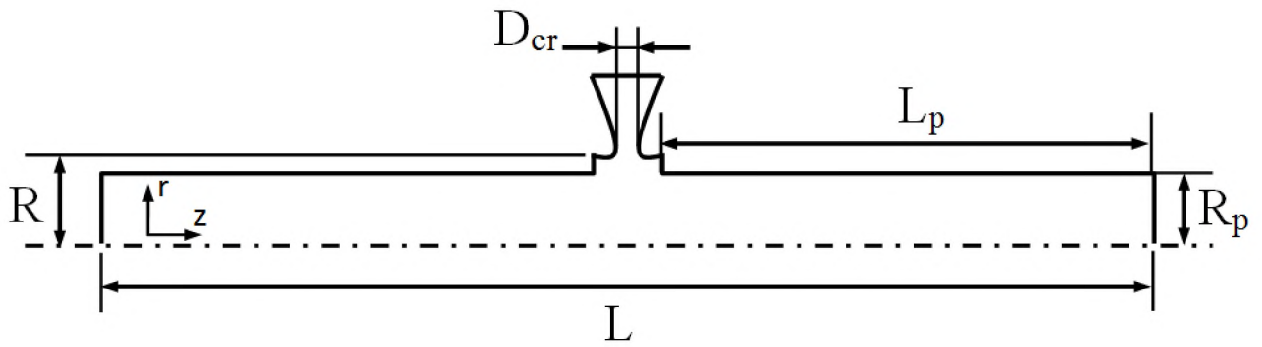


Рис. 4.41. Схема расчетной области для двухкамерной ЭУ $L = 145,8$; $R = 10,58$.

Как и для ЭУТТ большого удлинения, параметры расчетной области для КС двухкамерной ЭУ рассчитывались с использованием алгоритма [12] и представлены в таб. 4.10 в безразмерном виде относительно диаметра критического сечения кольцевого сопла.

Таб. 4.10. Параметры проточной части КС двухкамерной ЭУ в различные моменты времени.

t, c	R_p	L_p	t, c	R_p	L_p
0,25	8,5	66,5	0,75	9,5	65,3
0,5	9	66	1	10,3	64,7

На рис. 4.43 – рис. 4.46 представлены результаты расчетов основного и пульсационного течений в КС. Расчетная сетка дополнительно измельчалась в области соплового блока (рис. 4.42-б).

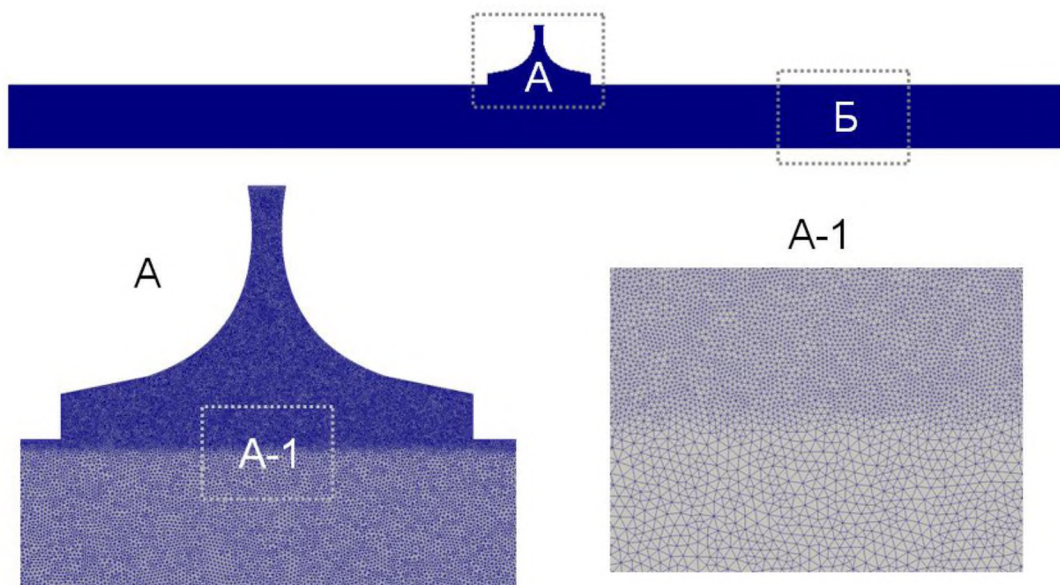


Рис. 4.42. Расчетная сетка для двухкамерной ЭУ.

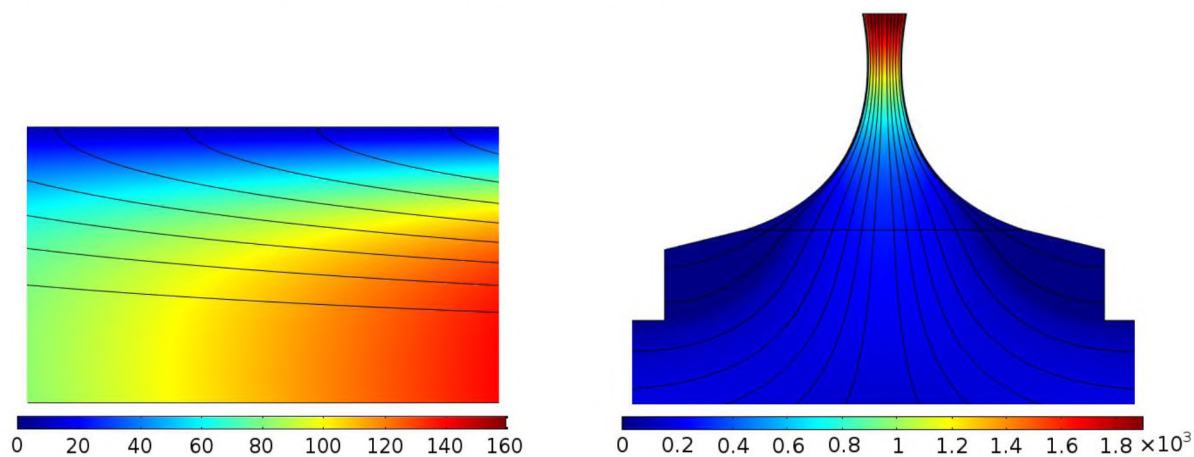
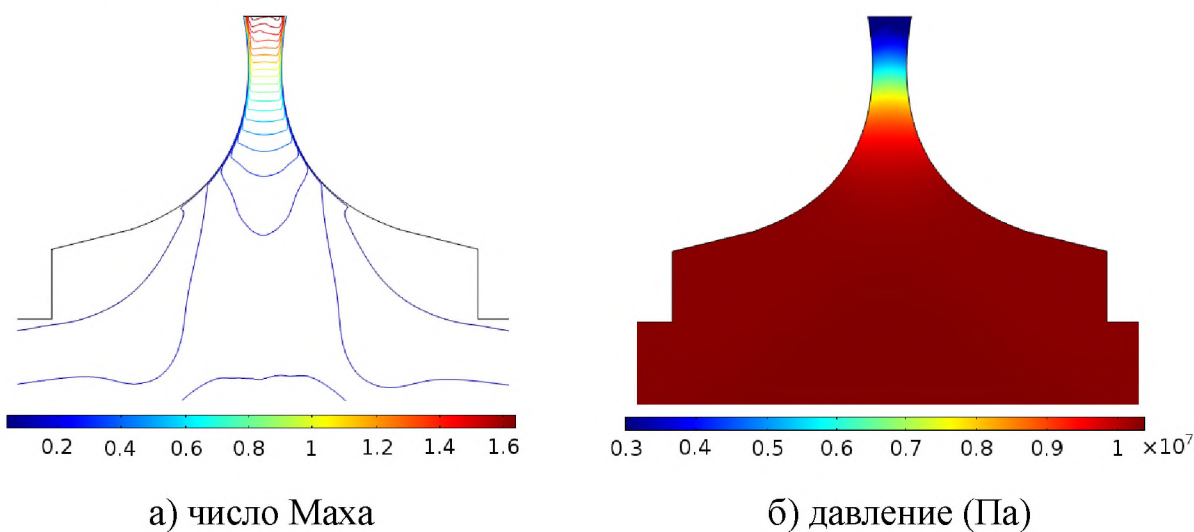


Рис. 4.43. Скорость основного течения (м/с) в КС двухкамерной ЭУ при $t = 0,5$ с.



а) число Маха

б) давление (Па)

Рис. 4.44. Параметры ПС в сопловом блоке двухкамерной ЭУ при $t = 0,5$ с.

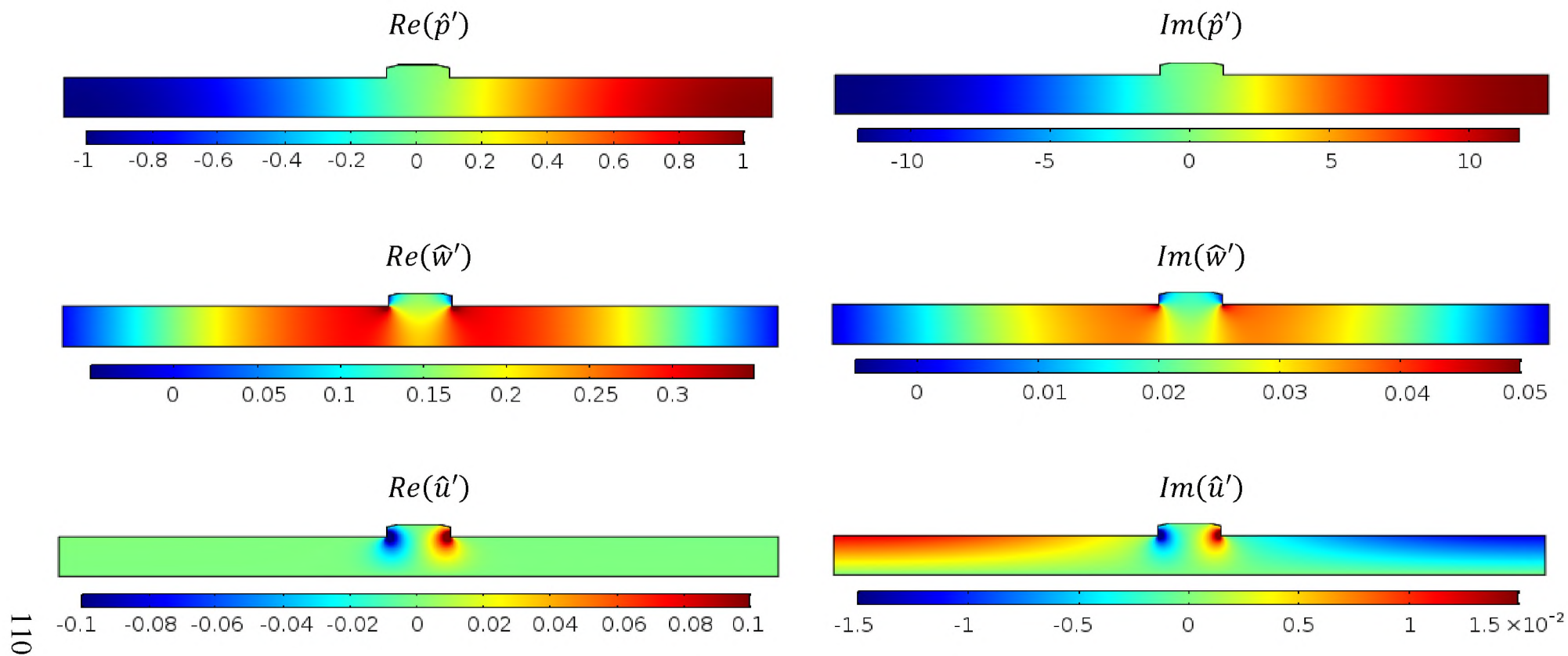
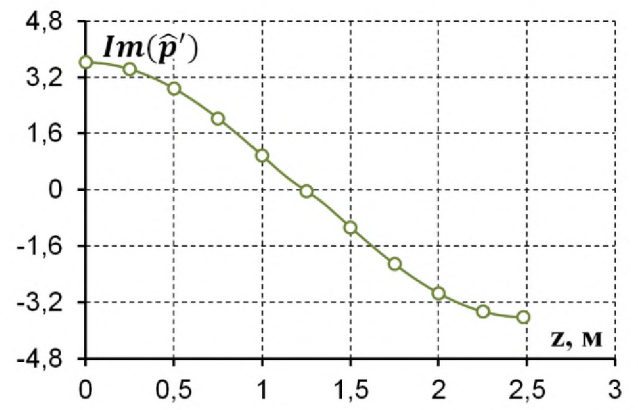
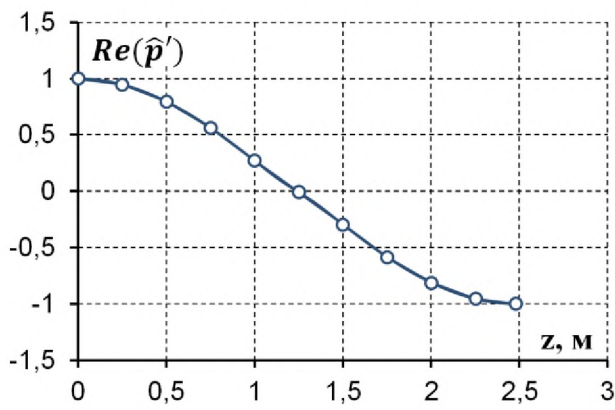
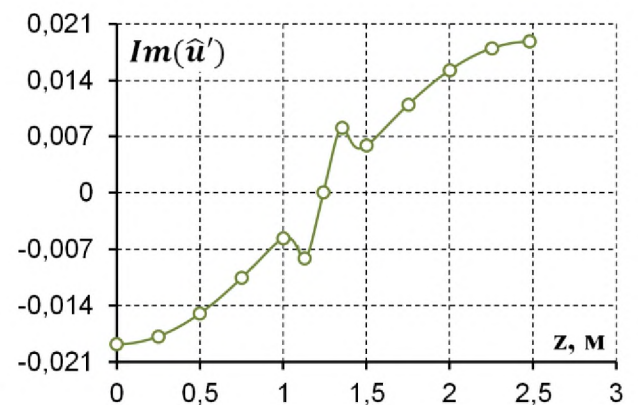
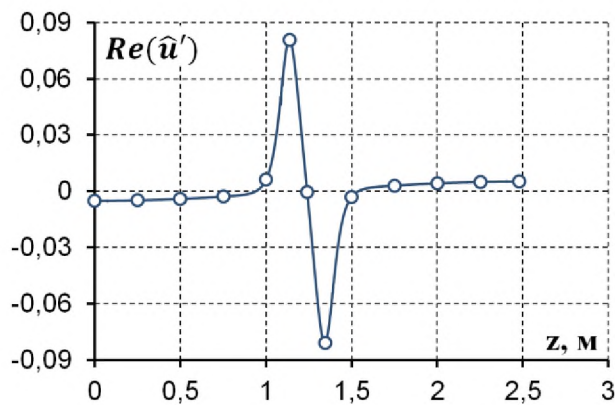


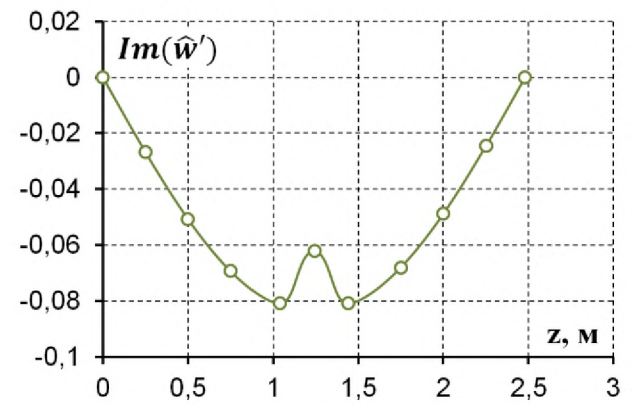
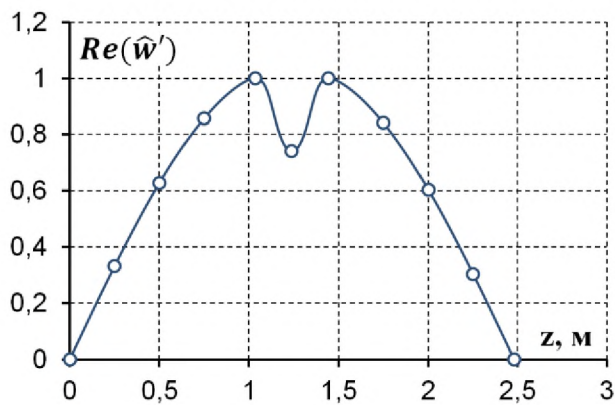
Рис. 4.45. Распределение пульсаций давления, радиальной и азимутальной компонент скорости в КС двухкамерной ЭУ при $t = 0,5$ с.



а) пульсации давления \hat{p}' ($r = R_p/2$)



б) радиальная компонента пульсаций скорости \hat{u}' ($r = R_p/2$)



в) азимутальная компонента пульсаций скорости \hat{w}' ($r = R_p/2$)

Рис. 4.46. Пространственное распределение пульсаций давления и скорости для двухкамерной ЭУ при $t = 0,5$ с.

Для диаметра частиц конденсированной фазы $d_q=5$ мкм и частоты колебаний $\nu = 253$ Гц, коэффициент затухания α_p равняется $-20,7$ 1/с. Итоговые значения α представлены на рис. 4.47-а. Как видно из рисунка, в указанном временном интервале $\alpha > 0$, т.е. рабочий процесс в установке является неустойчивым. При этом по мере выгорания наполнителя рабочий процесс в ЭУ становится менее неустойчивым.

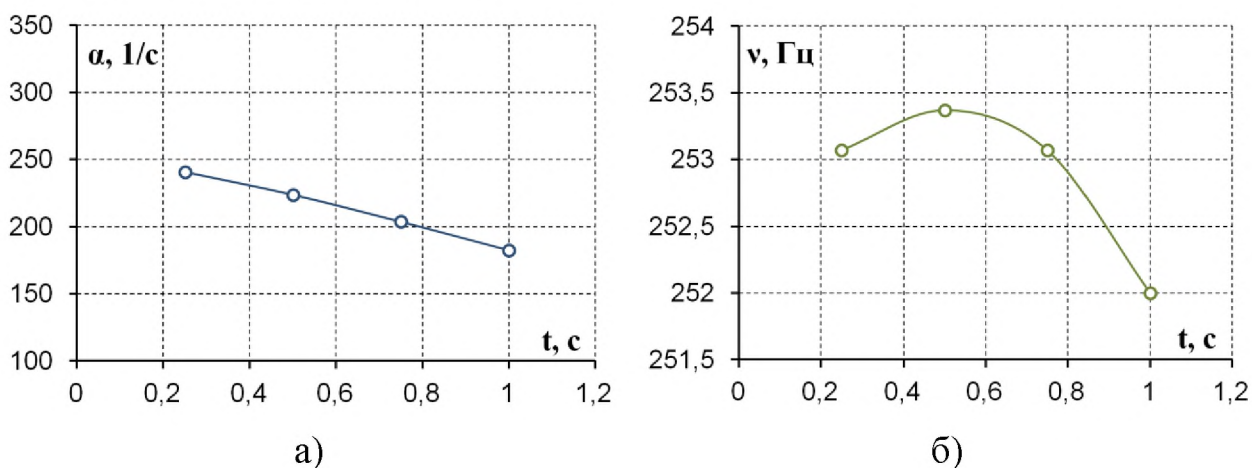
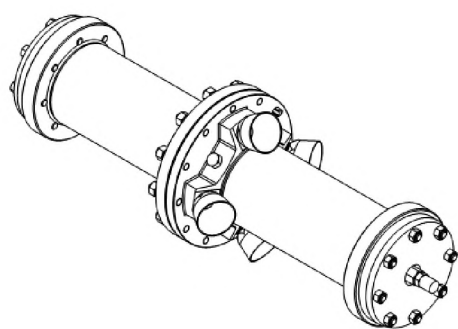


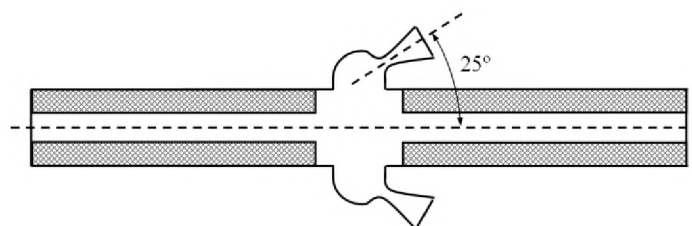
Рис. 4.47. Зависимость коэффициента затухания α (а) и частоты реализуемых колебаний ν (б) для двухкамерной ЭУ.

4.5 Устойчивость рабочего процесса в двухкамерной многосопловой ЭУТТ

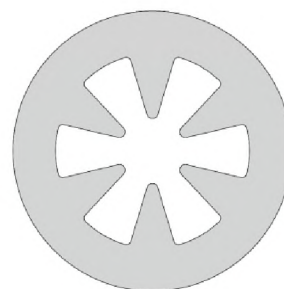
Рассматриваемый в данном пункте ЭУ представляет собой две соосно расположенные КС, между которыми размещается сопловой блок, состоящий из четырех сопел. В КС размещаются два наполнителя, имеющие канал в форме звезды (рис. 4.48). В качестве топлива рассматривается состав №1-Б, характеристики которого представлены в Главе 3.



а) общий вид ЭУ



б) схема проточной части КС



в) форма наполнителя

Рис. 4.48. Двухкамерная многосопловая ЭУТТ.

Проточная часть КС рассматриваемого ЭУТТ является существенно трехмерной, что не позволяет использовать осесимметричную реализацию методики для расчета её устойчивости на начальных этапах работы. Однако по мере выгорания наполнителя поперечное сечение проточной части КС стремится к форме круга (рис. 4.49). Об этом свидетельствует уменьшение разности радиусов $r_L - r_S$ после десятой секунды работы ЭУ (рис. 4.50), где $l = 2\pi r_L$ – длина кривой, соответствующей зоне горения в произвольном поперечном сечении проточной части КС; $s = \pi r_S^2$ площадь поперечного сечения проточной части КС. Расчет выгорания наполнителя проводился с использованием алгоритма, предложенного в [12]. Для проведения расчетов течения в осесимметричной постановке сопловой блок заменяется кольцевым соплом так, чтобы выполнялось равенство площадей критических сечений.

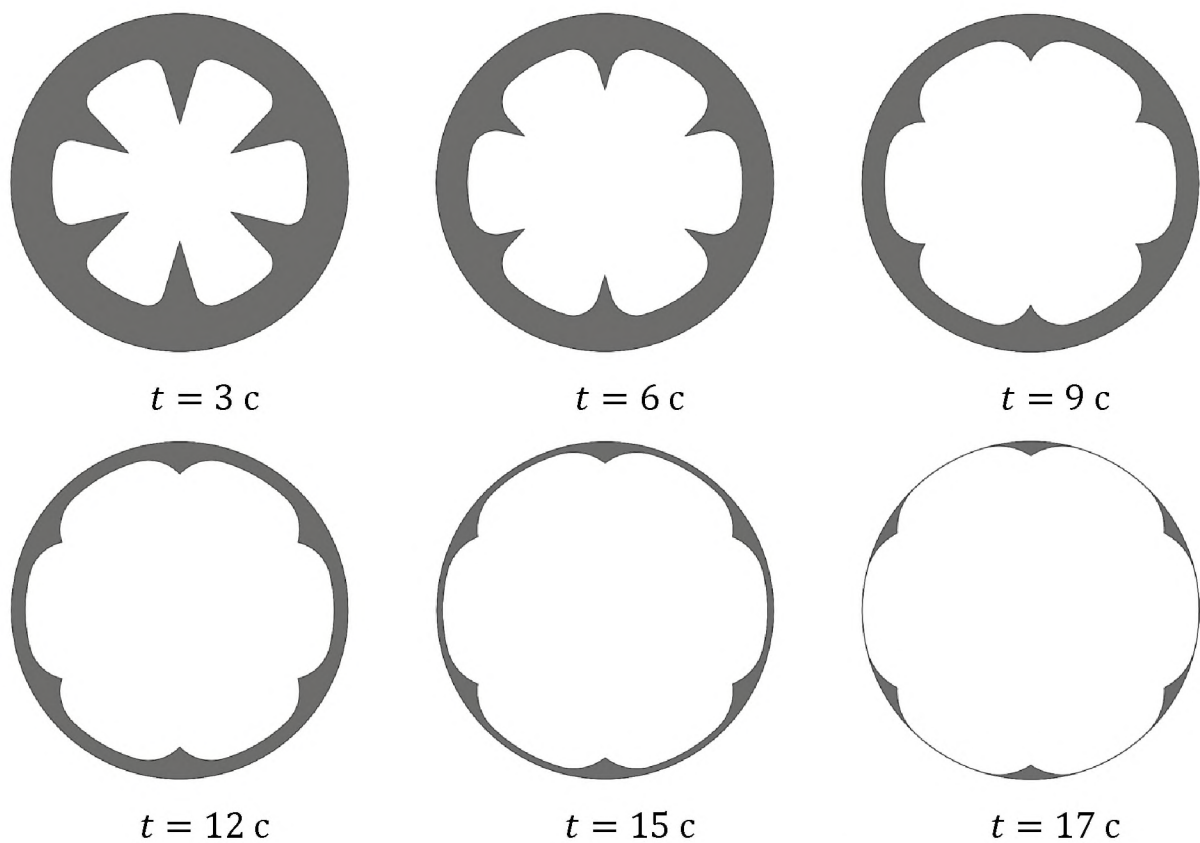


Рис. 4.49. Поперечное сечение проточной части КС многосопловой ЭУТТ в различные моменты времени.

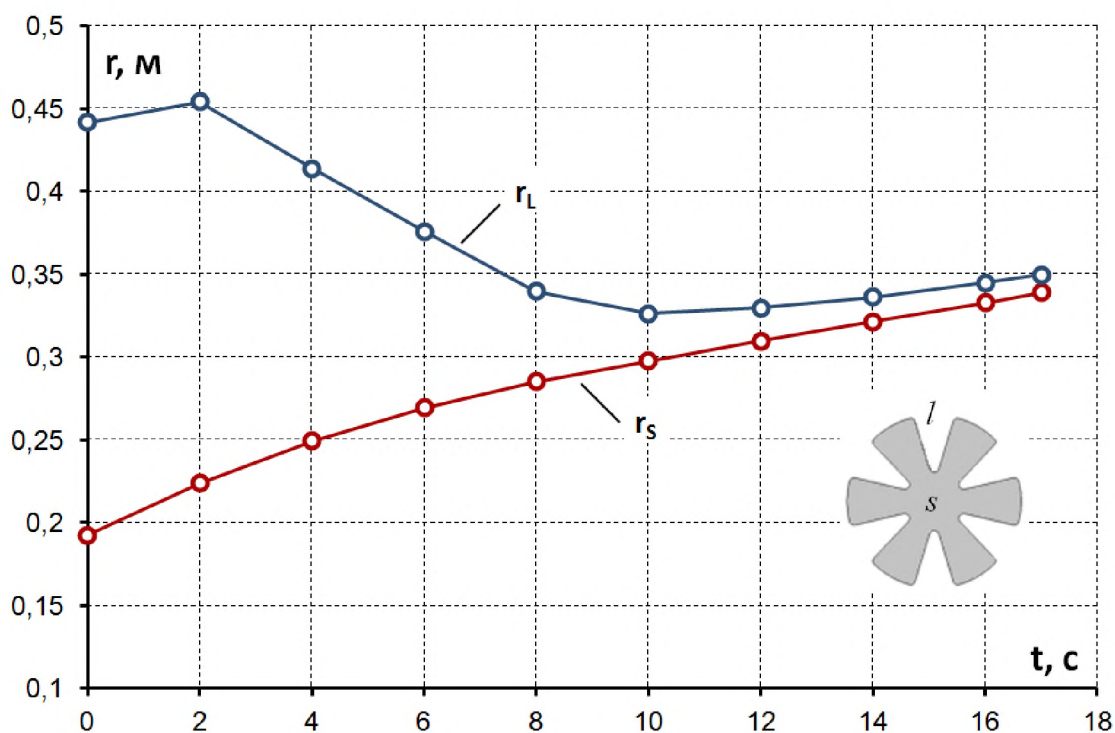


Рис. 4.50. Зависимость эффективных радиусов r_L и r_S от времени.

В рамках сделанных предположений относительно рабочего процесса в рассматриваемой ЭУТТ и упрощений, связанных с особенностями строения соплового блока, расчетная область принимает вид, представленный на рис. 4.51.

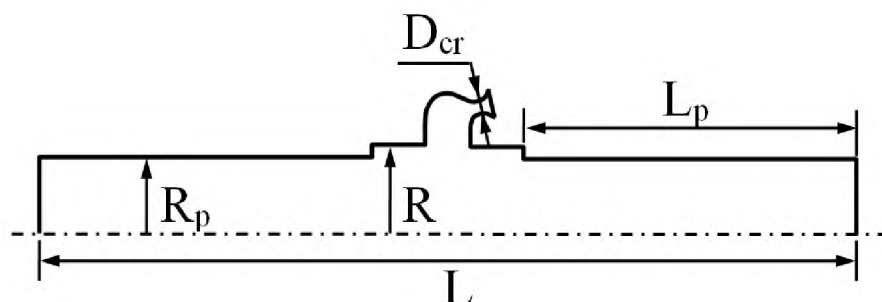


Рис. 4.51. Общая схема расчетной области проточной части двухкамерной ЭУ $L = 500$; $R = 34,5$.

Расчет коэффициента затухания α проводились для четырех моментов времени – 10, 12, 14 и 16 с. Параметры проточной части для указанных моментов времени представлены в таб. 4.11 в безразмерном виде относительно диаметра критического сечения D_{cr} кольцевого сопла.

Таб. 4.11. Параметры проточной части двухкамерной многосопловой ЭУ в различные моменты времени.

t, c	R_p	L_p	t, c	R_{pM}	L_p
10	31,2	227	14	32,8	225
12	31,9	226	16	33,8	224

Зависимость акустической проводимости A_b топлива №1-Б от частоты для различного давления ПС определяется аналогично, как это делалось для топлив Харриса и Бломшильда. Результаты расчетов представлены на рис. 4.52.

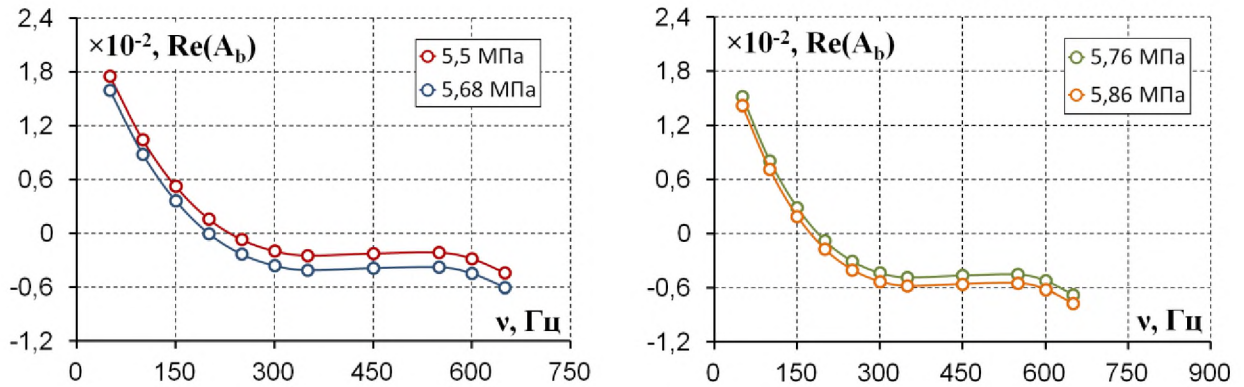


Рис. 4.52. Зависимость акустической проводимости A_b состава №1-Б от частоты для различных давлений в КС.

На рис. 4.54 – рис. 4.57 представлены результаты расчетов основного и пульсационного течений в КС.

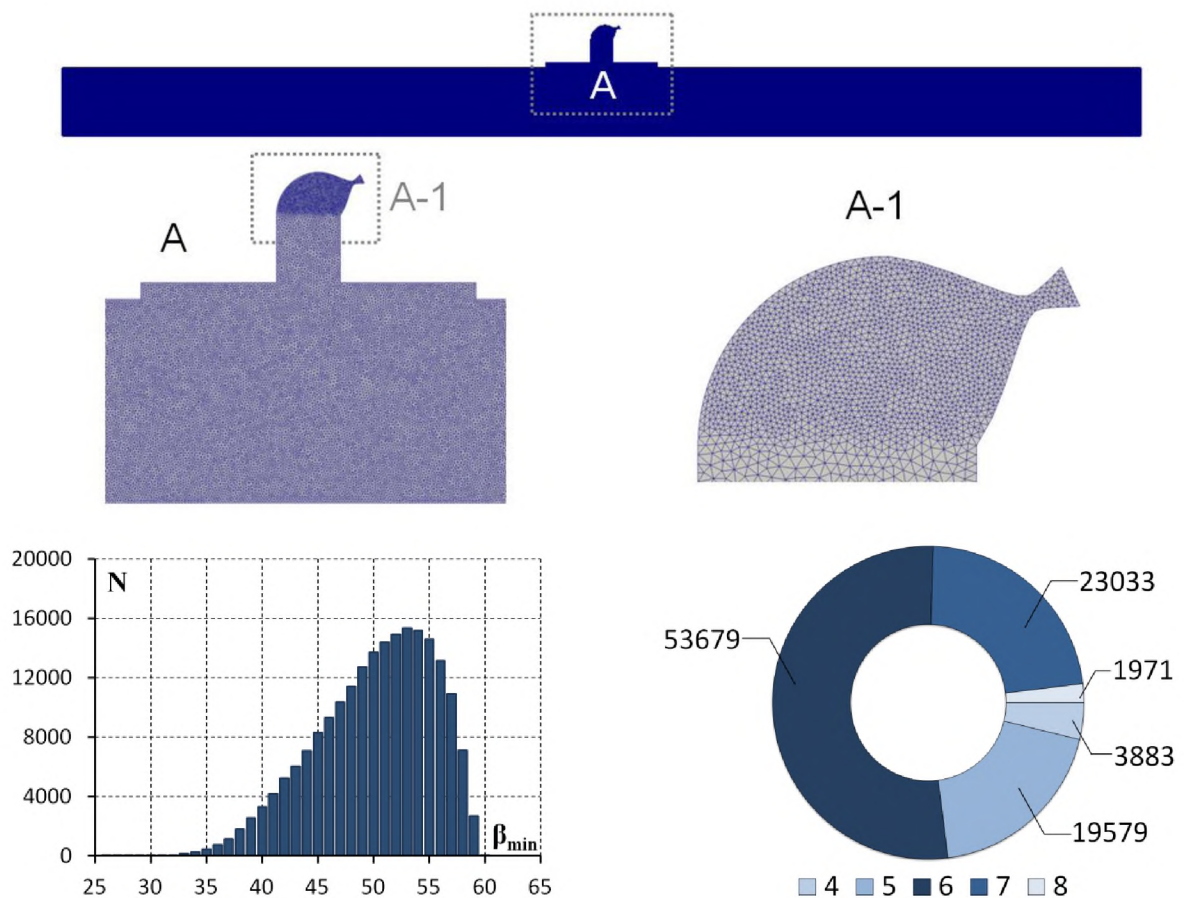


Рис. 4.53. Расчетная сетка для двухкамерной многосопловой ЭУ.

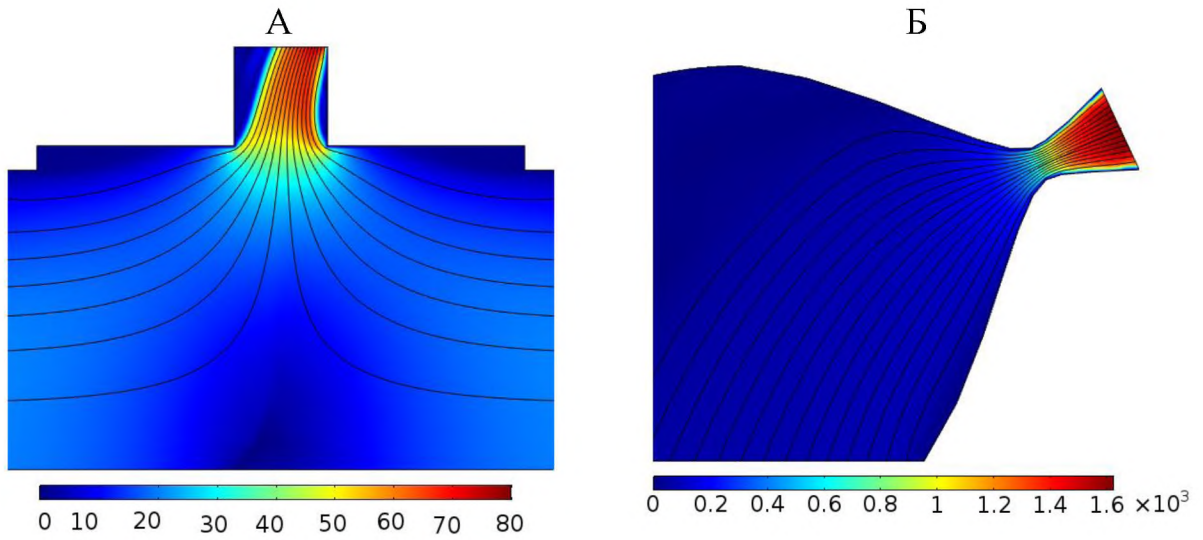


Рис. 4.54. Скорость основного течения (м/с) в двухкамерной многосопловой ЭУ при $t = 12$ с.

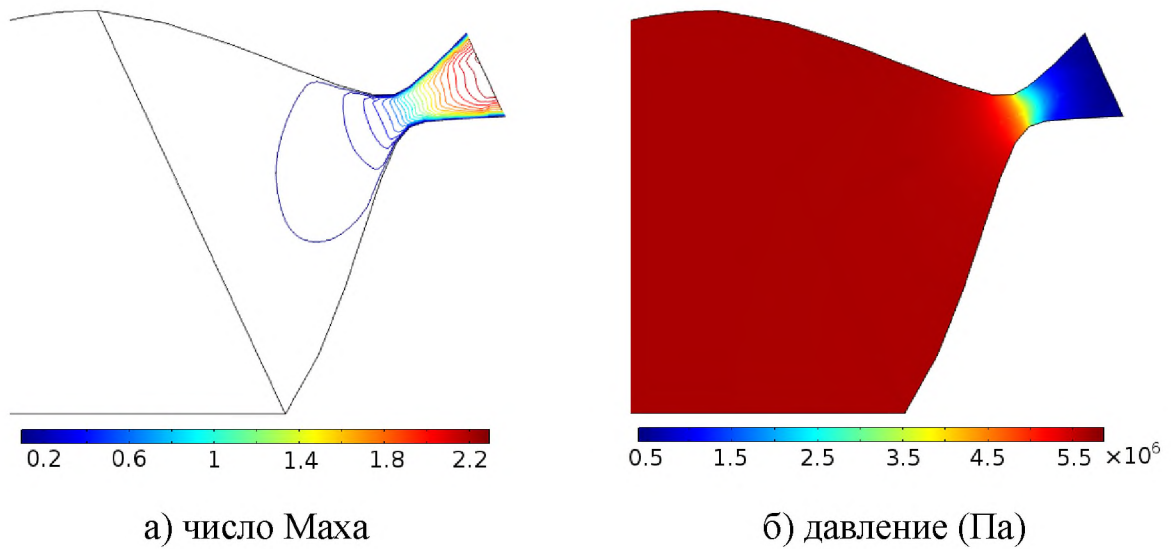


Рис. 4.55. Параметры ПС в сопловом блоке двухкамерной многосопловой ЭУ при $t = 12$ с.

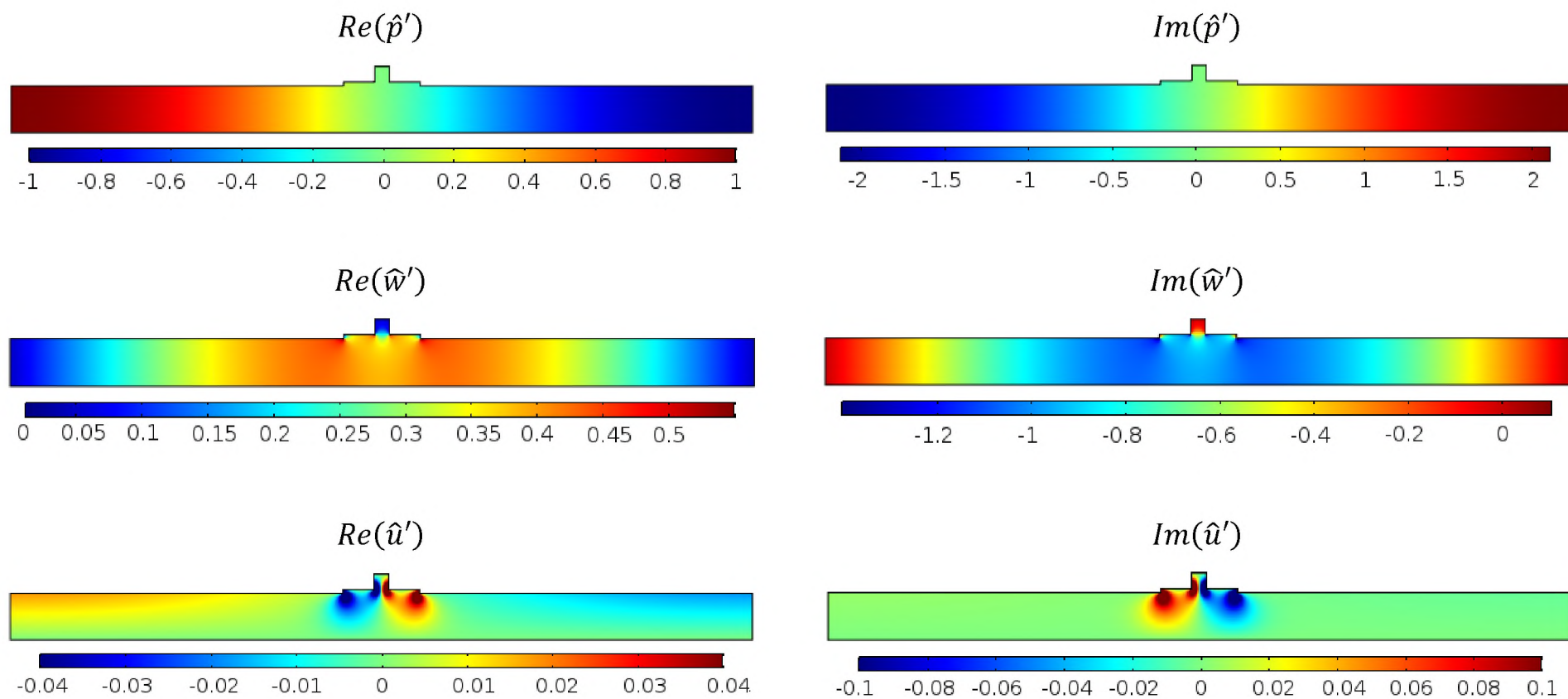
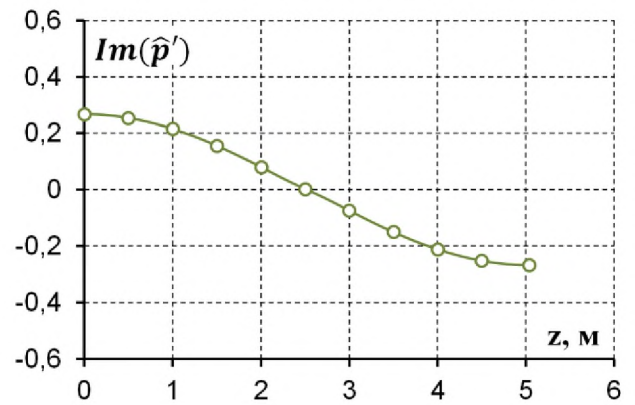
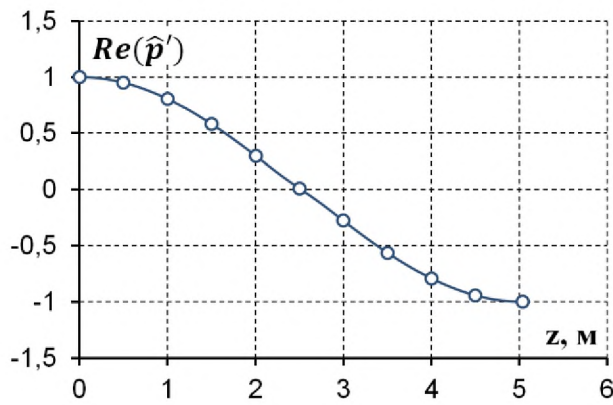
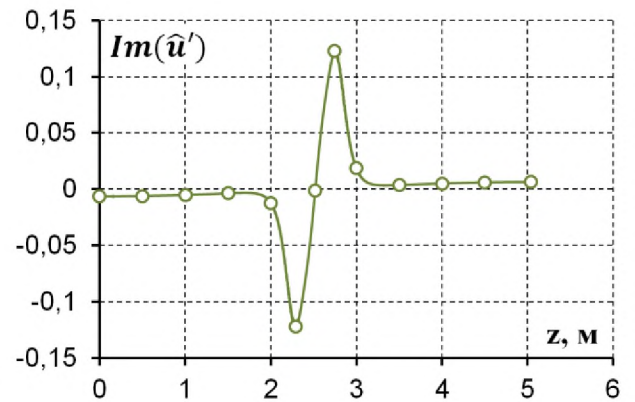
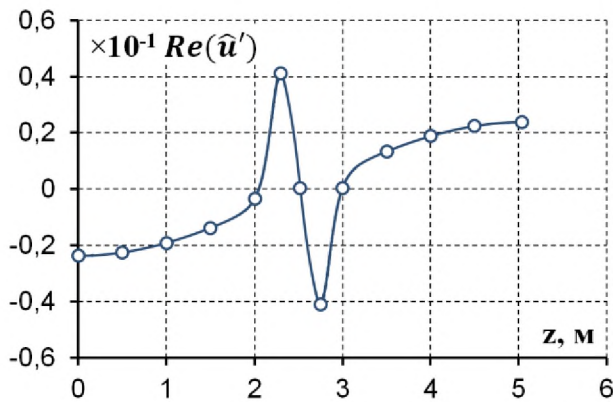


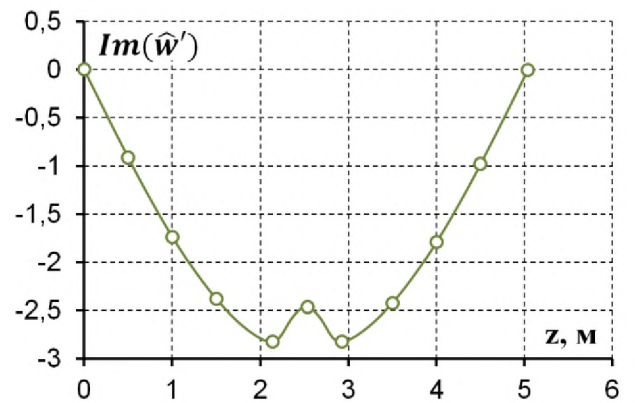
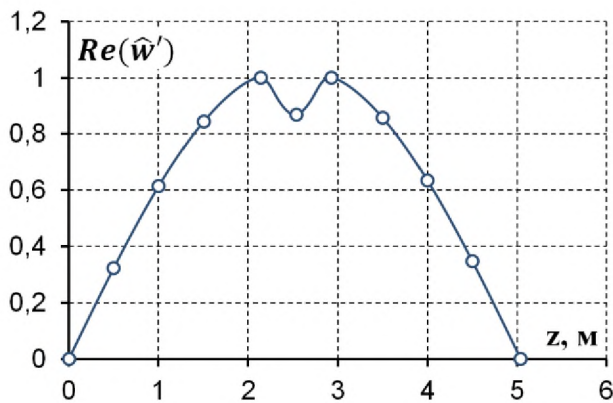
Рис. 4.56. Распределение пульсаций давления, радиальной и азимутальной компонент скорости в двухкамерной многосопловой ЭУ при $t = 12$ с.



а) пульсации давления \hat{p} ($r = R_p/2$)

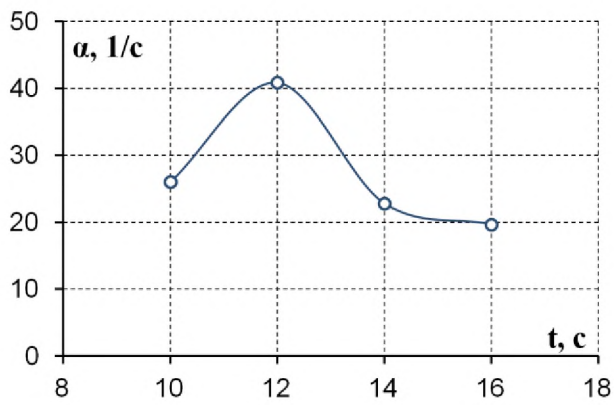


б) радиальная компонента пульсаций скорости \hat{u}' ($r = R_p/2$)

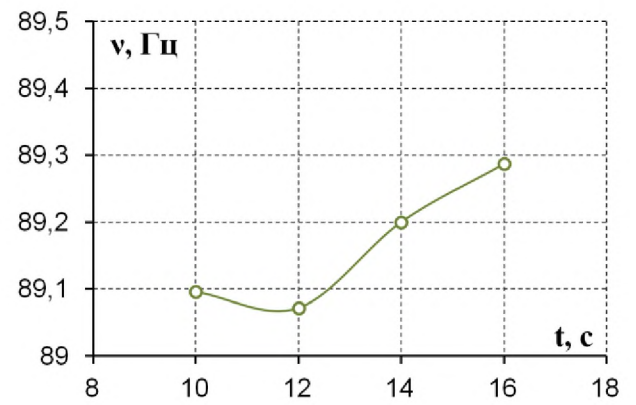


в) азимутальная компонента пульсаций скорости \hat{w}' ($r = R_p/2$)

Рис. 4.57. Пространственное распределение пульсаций давления и скорости для двухкамерной многосопловой ЭУ при $t = 12$ с.



а)



б)

Рис. 4.58. Зависимость коэффициента затухания α (а) и частоты реализуемых колебаний ν (б) для двухкамерной многосопловой ЭУ.

Согласно рис. 4.58 рабочий процесс в двухкамерной многосопловой ЭУ является неустойчивым на рассматриваемом временном интервале.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования были получены следующие основные результаты:

1. Разработана методика определения продольной линейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ, в которую входит методика экспериментального определения акустической проводимости зоны горения топлива. Осуществлена верификация методики для шести ЭУТТ, работающих на безметалльных составах. Для всех установок полученные расчетные значения коэффициентов затухания лежат в пределах 25%-ой погрешности по сравнению с экспериментальными данными.
2. Определены акустическая проводимость и функция отклика зоны горения по давлению для безметалльного и металлизированного топлив в диапазоне частот 150...800 Гц и давлений 0,7...8 МПа с использованием разработанной экспериментальной установки.
3. Проведены расчеты устойчивости двух ЭУТТ, использующих металлизированное топливо. В результате численного эксперимента была показана неустойчивость указанных установок. Проведены расчеты устойчивости двухкамерной ЭУ, работающей на безметалльном топливе. Продемонстрирована возможность возникновения продольной неустойчивости на заключительном этапе работы установки.
4. Предложена модификация энергетической методики по определению линейной неустойчивости рабочего процесса в ЭУТТ. Проведены расчеты для трёх типов ЭУ, в рамках которых установлено, что известная ранее реализация методики завышает устойчивость установок, по сравнению с реализацией, предложенной в работе. Данное обстоятельство указывает на целесообразность использования предложенной реализации энергетической методики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Энергетическая методика

В данном пункте Приложения более подробно рассматривается энергетическая методика, описанная в пункте 1 Главы 2. Представлена схема получения основных соотношения методики и конкретный вид коэффициентов $\alpha_1 \dots \alpha_{10}$ для случая усреднения (2.9), а также вид коэффициентов в уравнении (2.12) для случая усреднения (2.10).

Отправной точкой методики является разложение уравнений, описывающих динамику единицы объёма газа (1) по двум малым параметрам и получение выражения для изменения энергии возмущений.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right) - \vec{u} \times \nabla \times \vec{u} \right) = -\nabla p + \delta_a^2 \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \delta^2 \nabla \times \nabla \times \vec{u} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\delta^2 = \mu/\rho_0 a_0 L$; μ – коэффициент динамической вязкости; L – длина камеры сгорания; $\delta_a^2 = \delta^2(\zeta/\mu + 4/3)$; ζ – коэффициент объёмной вязкости.

Данные выражения записаны в безразмерном виде. Операция обезразмеривания выполняется следующим образом:

$$p = \frac{p^*}{\gamma p_0}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{u}^*}{a_0}, \quad t = \frac{t^*}{R/a_0}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{r}^*}{R}, \quad (2)$$

где a_0 – скорость звука в невозмущенном потоке; γ – показатель адиабаты; R – радиус канала; верхним индексом * обозначены размерные величины; нижним индексом 0 обозначены параметры основного течения.

Переменные p , \vec{u} и ρ представляются в виде суперпозиции величин, описывающих основное стационарное несжимаемое течение и величин, описывающих нестационарное (возмущённое) течение:

$$\begin{aligned} p &= p_{st} + p_{nst}, & p_{st} &= 1 + M_b^2 P + O(M_b^4), & p_{nst} &= p' + O(\varepsilon^2) \\ \rho &= \rho_{st} + \rho_{nst}, & \rho_{st} &= 1, & \rho_{nst} &= \rho' + O(\varepsilon^2) \\ \vec{u} &= \vec{u}_{st} + \vec{u}_{nst}, & \vec{u}_{st} &= M_b \vec{u}_0 + O(M_b^2), & \vec{u}_{nst} &= \vec{u}' + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Величины, описывающие основное течение представляются в виде разложения по числу Маха у поверхности горения²¹ $M_b = V_b/a_0$ (V_b – скорость вдува с поверхности горения). Величины, описывающие нестационарное течение имеют следующий общий безразмерный вид:

$$q'(r, \varphi, z, t) = \varepsilon \hat{q}'(r, \varphi, z) e^{\alpha t} e^{i\omega t} \quad (4)$$

где ε – амплитуда колебаний величины q , делённая на величину q_0 для основного течения; α – коэффициент затухания. После подстановки выражений (3) в систему (1) и группировки членов одного порядка малости исходная система распадется на две:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{u}_0 = 0 \\ \nabla \left(\frac{\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_0}{2} \right) - \vec{u}_0 \times \nabla \times \vec{u}_0 = -\nabla p_0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \vec{u}' = -M_b^2 \vec{u}_0 \nabla \rho' \\ \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + M_b \{ \nabla (\vec{u}' \cdot \vec{u}_0) - \vec{u}_0 \times \nabla \times \vec{u}' - \vec{u}' \times \nabla \times \vec{u}_0 \} = \\ -\nabla p' + \delta_a^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{u}') - \delta^2 \nabla \times \nabla \times \vec{u}' \end{cases} \quad (6)$$

Система (5) имеет приближённое аналитическое решение для случая течения в цилиндре [73] (вдув осуществляется с боковой поверхности цилиндра, скорость вдува V_b), имеющее хорошее совпадение с результатами экспериментов с рабочим телом воздух [87]:

$$\begin{aligned} u_{0r} &= -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2} r^2\right) \\ U_\theta &= 0 \\ u_{0z} &= \pi z \cos\left(\frac{\pi}{2} r^2\right) \end{aligned} \quad (7)$$

²¹ Число Маха у поверхности горения выступает в качестве малого параметра ($M_b = 10^{-3} \dots 10^{-2}$).

Складывая первое уравнение системы (6), умноженное на p' , и второе уравнение, скалярно умноженное на \vec{u}' можно получит уравнение, которое можно интерпретировать как закон изменения энергии возмущения малой амплитуды, распространяемого в неоднородном потоке [100]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p' \cdot p'}{2} + \frac{\vec{u}' \cdot \vec{u}'}{2} \right] = & -\nabla(p' \vec{u}') - M_b \frac{\vec{u}_0}{2} \nabla(p' \cdot p') - \\ & -M_b \vec{u}' \cdot [\nabla(\vec{u}' \vec{u}_0)] + M_b \vec{u}' \cdot (\vec{u}' \times \nabla \times \vec{u}_0 + \vec{U} \times \nabla \times \vec{u}') + \\ & + \delta_d^2 \vec{u}' \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u}') - \delta^2 \vec{u} \cdot [\nabla \times \nabla \times \vec{u}'] \end{aligned} \quad (8)$$

В дальнейшем безразмерные параметры p' и \vec{u}' представляется в виде суммы акустической (p'_{ac}, \vec{u}'_{ac}) и вихревой (p'_{rot}, \vec{u}'_{rot}) составляющих:

$$\begin{aligned} p' &= p'_{ac} + p'_{rot} \\ \vec{u}' &= \vec{u}'_{ac} + \vec{u}'_{rot} \\ \rho' &= p'_{ac} \end{aligned} \quad (9)$$

При рассмотрении продольных колебаний в канале цилиндрической формы при осуществлении вдува с боковой стенки предполагается, что пространственное распределение возмущений имеет следующий вид [65]:

$$\begin{aligned} \hat{p}'_{ac} &= \cos(kz), \\ \hat{p}'_{rot} &= i M_b \sin(\pi r^2) e^{\phi+i\psi} \left(\frac{1}{2} \pi z \right) \sin \left(\frac{1}{2} \pi z \right) \sin \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right) kz \right) \\ \hat{u}'_{ac} &= i \sin(kz) \vec{e}_z, \\ \hat{u}'_{rot} &= i r U_r e^{\phi+i\psi} \sin \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} r^2 \right) kz \right) \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\psi(r) = -\frac{k}{\pi M_b} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi r^2}{4} \right) \right),$$

$$\phi(r) = \frac{k^2 \delta^2}{\pi^2 M_b^3} \left[1 - \frac{1}{\sin x} - x \frac{\cos x}{\sin^2 x} + I(x) - I\left(\frac{1}{2}\right) \right],$$

$$I(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2(2^{2k-1} - 1)}{(1+2k)(2k)!} B_{2k} x^{1+2k} = x + \frac{x^3}{18} + \frac{7x^5}{1800} + \dots,$$

B_k – числа Бернулли.

Подставляя выражения (10) в уравнение для энергии возмущения, группируя соответствующие члены, получается следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(p'_{ac})^2}{2} + \frac{\vec{u}'_{ac} \cdot \vec{u}'_{ac}}{2} \right] = I_{ac} + I_{ac}^0 + I_{rot} + I_{rot}^0 + I_{rot}^{ac} + I_{rot}^{0,ac},$$

$$I_{ac} = -\nabla(p'_{ac} \vec{u}'_{ac}) + \delta_d^2 \vec{u}'_{ac} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}'_{ac}),$$

$$I_{ac}^0 = -M_b \frac{\vec{u}_0}{2} \nabla(p'_{ac} \cdot p'_{ac}) - M_b \vec{u}'_{ac} \nabla(\vec{u}'_{ac} \cdot \vec{u}_0), \quad (11)$$

$$I_{rot} = -\nabla(\hat{p}'_{rot} \vec{u}'_{rot}) - \delta^2 \vec{u}'_{rot} \cdot [\nabla \times \vec{\omega}'_{rot}],$$

$$I_{rot}^0 = -M_b (\vec{u}'_{rot} \nabla) \cdot (\vec{u}'_{rot} \cdot \vec{u}_0) + M_b \vec{u} \cdot (\vec{u}_0 \times \vec{\omega}'_{rot}),$$

$$I_{rot}^{ac} = -M_b (\vec{u}'_{rot} \nabla) \cdot (\vec{u}'_{rot} \cdot \vec{u}_0) + M_b \vec{u}'_{rot} \cdot (\vec{u}_0 \times \vec{\omega}'_{rot}),$$

$$I_{rot}^{0,ac} = -M_b \vec{u}'_{rot} \nabla(\vec{u}'_{ac} \cdot \vec{u}_0) - M_b \vec{u}'_{ac} \nabla(\vec{u}'_{rot} \cdot \vec{u}_0) + M_b \vec{u}'_{ac} \cdot (\vec{u}_0 \times \vec{\omega}'_{rot}),$$

где $\vec{\omega}'_{rot} = \nabla \times \vec{u}'_{rot}$

В дальнейшем необходимо проинтегрировать уравнение (11) по всему объёму канала и усреднить полученное выражение по времени. Операция усреднения по времени физической величины q осуществляется следующим образом:

$$\langle q \rangle = \frac{k}{2\pi} e^{\alpha t} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} q(t) \cdot e^{-\alpha t} dt \quad (12)$$

Данная операция усреднения отличается от классической:

$$\langle q \rangle = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} q(t) dt \quad (13)$$

Стоит отметить, что для корректного расчёта объёмных интегралов от величин вида $p'_{ac} \cdot p'_{ac}$, $\vec{u}'_{ac} \cdot \vec{u}'_{ac}$, $p'_{ac} \vec{u}'_{ac}$ и т.д., необходимо перейти от комплексной формы записи отмеченных величин к действительной (заменить комплексные величины на действительную часть от комплексного числа):

$$\begin{aligned} Re(p'_{ac}) &= \cos(kz) \cos(\omega t) e^{\alpha t} \\ Re(\vec{u}'_{ac}) &= \sin(kz) \sin(\omega t) e^{\alpha t} \vec{e}_z \\ Re(\hat{u}'_{rot}) &= e^{\alpha t} r U_r \sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} r^2\right) kz\right) [-\sin \psi \cos \omega t) + \cos \psi \sin(\omega t)] \vec{e}_z \end{aligned} \quad (14)$$

Левая часть уравнения (11) для случая цилиндрического канала при использовании усреднения (12) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(p'_{ac})^2}{2} + \frac{\vec{u}'_{ac} \cdot \vec{u}'_{ac}}{2} \right] = \alpha e^{2\alpha t} \frac{5}{8} \pi \frac{L}{R} \quad (15)$$

Принято следующее обозначение $E^2 = \frac{5}{8} \pi \frac{L}{R}$. Проводя те же операции усреднения для правой части (11), получается итоговое выражение для α :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i, \quad (16)$$

где α_i отвечают за коэффициенты затухания различной физической природы. α_i могут принимать как отрицательные, так и положительные значения. Данные коэффициенты затухания для случая наполнителя с цилиндрическим каналом имеют следующий вид [65, 130]:

- 1) Расширенная связь по давлению (Extended pressure coupling)

$$\alpha_1 = \frac{1}{e^{2\alpha t} E^2} \int_V \langle -\nabla [p'_{ac} \vec{u}'_{ac}] + M_b \frac{\vec{u}_0}{2} \nabla (p'_{ac}{}^2) - M_b \vec{u}'_{ac} \nabla (\vec{u}'_{ac} \cdot \vec{u}_0) \rangle dV \quad (17)$$

- 2) Невихревая вязкая поправка (Dilatational energy correction)

$$\alpha_2 = \frac{1}{e^{2\alpha t} E^2} \int_V \langle \delta_d^2 \vec{u}'_{ac} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}'_{ac}) \rangle dV \quad (18)$$

- 3) Поправка, учитывающая разворот потока у поверхности горения топлива (Flow turning correction)

$$\alpha_4 = \frac{1}{e^{2\alpha t} E^2} \int_V \langle \vec{u}'_{ac} \cdot (\vec{u}_0 \times \vec{\omega}'_{rot}) \rangle dV \quad (19)$$

Слагаемое, отвечающее за α_3 ,

$$\int_V \langle M_b \cdot (\vec{u}'_{ac} \cdot (\vec{u}'_{ac} \times \nabla \times \vec{u}_0)) \rangle dV \quad (20)$$

в уравнении (16) не приводится т.к. оно тождественно равно нулю (скалярное произведение ортогональных векторов). Однако в литературе это слагаемое приводится для сохранения исходной нумерации.

- 4) Поправка, связанная с завихренностью пульсационного течения (Rotational flow correction)

$$\alpha_5 = -\frac{1}{e^{2\alpha t} E^2} \int_V \langle \vec{u}'_{rot} \cdot \nabla p'_{ac} \rangle dV \quad (21)$$

- 5) Учёт взаимодействия пульсационного завихренного и основного течений (Mean vortical correction)

$$\alpha_6 = \frac{1}{e^{2\alpha t} E^2} \int_V \langle M_b \cdot (\vec{u}'_{rot} \cdot (\vec{u}_0 \times \vec{\omega}'_{rot})) \rangle dV \quad (22)$$

- 6) Учёт вязкости (Viscous correction)

$$\alpha_7 = \frac{1}{e^{2\alpha t} E^2} \int_V \langle \delta_d^2 (\vec{u}'_{rot} \nabla) (\nabla \vec{u}'_{ac}) - \delta^2 \vec{u}'_{ac} [\nabla \times \vec{\omega}'_{rot}] - \delta^2 \vec{u}'_{rot} [\nabla \times \vec{\omega}'_{rot}] \rangle dV \quad (23)$$

где $\xi = k^2 \delta^2 / M_b^3$.

- 7) Псевдо-акустическая поправка (Pseudo acoustical correction)

$$\alpha_8 = \frac{1}{e^{2\alpha t} E^2} \int_V \langle -\vec{u}'_{ac} \cdot \nabla p'_{rot} \rangle dV \quad (24)$$

8) Псевдо-вращательная поправка (Pseudo rotational correction)

$$\alpha_9 = \frac{1}{e^{2\alpha t} E^2} \int_V \langle -\vec{u}'_{rot} \cdot \nabla p'_{rot} \rangle dV \quad (25)$$

9) Нестационарная поправка сопла (Unsteady nozzle correction)

$$\alpha_{10} = -\frac{1}{e^{2\alpha t} E^2} \int_V \langle (\vec{u}'_{rot} \nabla) \cdot (\vec{u}'_{rot} \cdot \vec{u}_0) + (\vec{u}'_{ac} \nabla) \cdot (\vec{u}'_{rot} \cdot \vec{u}_0) \rangle dV \quad (26)$$

В случае применения операции усреднения (13) к (11), можно получить следующее уравнение относительно α :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{k}} e^{2\alpha t} [A \cos^2(\omega t) + B \sin^2(\omega t)] dt = D e^{2\alpha \frac{2\pi}{k}}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} A &= A_{ac}^0 + A_{rot}^{ac} + A_{rot} + A_{rot}^0 \\ B &= B_{ac} + B_{ac}^0 + B_{rot}^{ac} + B_{rot} + B_{rot}^0 + B_{rot}^{0,ac} \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$A_{ac}^0 = \int_V \left[-\frac{M_b}{2} \nabla [\vec{u}_0 \hat{p}'_{r,ac} \cdot \hat{p}'_{r,ac}] \right] dV,$$

$$A_{rot}^{ac} = \int_V [-\widehat{\vec{u}}'_{r,rot} \nabla \hat{p}'_{r,ac}] dV$$

(29)

$$A_{rot} = \int_V [-\delta^2 \widehat{\vec{u}}'_{r,rot} \cdot \widehat{\vec{\omega}}'_{r,rot} + \widehat{\vec{u}}'_{r,rot} \nabla \hat{p}'_{r,rot}] dV,$$

$$A_{rot}^0 = \int_V \left[M_b \widehat{\vec{u}}'_{r,rot} (\vec{u}_0 \cdot \widehat{\vec{\omega}}'_{r,rot} + \nabla (\vec{u}_0 \cdot \widehat{\vec{u}}'_{r,rot})) \right] dV$$

$$B_{ac} = \int_V \left[-\frac{4}{3} \delta^2 \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac} \nabla (\nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac}) \right] dV$$

$$B_{ac}^0 = \int_V -M_b \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac} (\nabla (\vec{\mathbf{u}}_0 \cdot \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac}) + \vec{\mathbf{u}}_0 \times \nabla \times \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac}) dV$$

$$B_{rot}^{ac} = \int_V \left[-\widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac} \nabla \hat{p}'_{i,rot} + M_b \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac} \nabla (\vec{\mathbf{u}}_0 \cdot \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac}) - \delta^2 \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}}'_{i,rot} \right] dV \quad (30)$$

$$B_{rot} = \int_V \left[M_b \widehat{\mathbf{u}}'_{i,rot} (\vec{\mathbf{u}}_0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}}'_{i,rot}) - \delta^2 \widehat{\mathbf{u}}'_{i,rot} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}}'_{i,rot} + \widehat{\mathbf{u}}'_{i,rot} \nabla \hat{p}'_{i,rot} \right] dV$$

$$B_{rot}^0 = \int_V \left[M_b \widehat{\mathbf{u}}'_{i,rot} (\vec{\mathbf{u}}_0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}}'_{i,rot}) + M_b \widehat{\mathbf{u}}'_{i,rot} \nabla (\vec{\mathbf{u}}_0 \cdot \widehat{\mathbf{u}}'_{i,rot}) \right] dV$$

$$B_{rot}^{0,ac} = \int_V \left[M_b \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac} (\nabla (\vec{\mathbf{u}}_0 \cdot \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac}) + \vec{\mathbf{u}}_0 \times \nabla \times \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac}) \right] dV$$

$$D = \int_V \left[\hat{p}'_{r,ac} \cdot \hat{p}'_{r,ac} + \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac} \cdot \widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac} \right] dV \quad (31)$$

В выражениях (29) – (31) приняты следующие обозначения:

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}}'_{r,rot} = \nabla \times \widehat{\mathbf{u}}'_{r,rot}, \quad \widehat{\boldsymbol{\omega}}'_{i,rot} = \nabla \times \widehat{\mathbf{u}}'_{i,rot} \quad (32)$$

$$\hat{p}'_{r,ac} = \cos(k_m z) \quad (33)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}'_{i,ac} = \sin(k_m z) \vec{\mathbf{e}}_z \quad (34)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}'_{r,rot} = -ru_{0r} \sin \left(\sin \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) k_m z \right) \sin(\psi(r)) \vec{\mathbf{e}}_z \quad (35)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}'_{i,rot} = ru_{0r} \sin \left(\sin \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) k_m z \right) \cos(\psi(r)) \vec{\mathbf{e}}_z \quad (36)$$

$$\hat{p}'_{r,rot} = -M_b \sin(\pi r^2) e^\varphi \sin(\psi) \left(\frac{1}{2}\pi z\right) \sin\left(\frac{1}{2}\pi z\right) \sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}r^2\right) k_m z\right) \quad (37)$$

$$\hat{p}'_{i,rot} = M_b \sin(\pi r^2) e^\varphi \cos(\psi) \left(\frac{1}{2}\pi z\right) \sin\left(\frac{1}{2}\pi z\right) \sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}r^2\right) k_m z\right) \quad (38)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов В.А., Волков С.А., Ревягин Л.Н. Экспериментальное исследование акустической проводимости горячей поверхности смесевых твердых топлив // Физика горения и взрыва. 2011.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков, М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.
3. Беккер Р. Теория теплоты / Р. Беккер, М.: Энергия, 1974. 504 с.
4. Бовтрикова А.С., Мордвинцев Г.Г. Расчетное исследование газодинамических процессов при запуске двигательной установки системы аварийного спасения // Инженерный журнал: наука и инновации. 2016. № 4. С. 1–11.
5. Волков А.В. Особенности применения метода Галеркина к решению пространственных уравнений Навье Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках // Ученые записки ЦАГИ. 2009. № 6 (40). С. 41–59.
6. Высоцкая С.А. Численное исследование вихревых структур и автоколебаний давления в ракетном двигателе твердого топлива с утопленным соплом: диссертация ... кандидата технических наук: 05.07.05 / Высоцкая Светлана Абдулмянафовна; [Место защиты: ФГБОУ ВО Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева – КАИ], 2017.
7. Гусаченко Л.К., Зарко В.Е. Анализ нестационарных моделей горения твердых топлив (обзор) // Физика горения и взрыва. 2008. № 1 (44). С. 35–48.
8. Гусаченко Л.К., Зарко В.Е., Зырянов В.Я. Моделирование процессов горения твердых топлив / Л.К. Гусаченко, В.Е. Зарко, В.Я. Зырянов, Наука. Сиб. отд-ние, 1985. 187 с.

9. Кашина И.А. Влияние диссипативных свойств конструктивных элементов РДТТ на амплитуду колебаний давления в камере сгорания при продольной акустической неустойчивости: диссертация...кандидата технических наук: 05.07.05 / Кашина Илона Анатольевна; [Место защиты: ФГБОУ ВО Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева – КАИ], 2017, 163 с.

10. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов, М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

11. Краснов М.Л. [и др.]. Вся высшая математика Том 6 / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин, М.: Едиториал УРСС, 2003. 256 с.

12. Лаптев И.В., Семёнов П.А., Дегтярёв С.А. Автоматизация моделирования процесса выгорания заряда твёрдого топлива в системе SOLIDWORKS // Автоматизация. Современные технологии. 2016. № 3. С. 14–18.

13. Морз Ф. Колебания и звук / Ф. Морз, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 497 с.

14. Морз Ф., Фишбах Г. Методы теоретической физики. Том 1 / Ф. Морз, Г. Фишбах, М.: Издательство иностранной литературы, 1958. 932 с.

15. Найфэ А.Х. Методы возмущения / А.Х. Найфэ, М.: Мир, 1976. 456 с.

16. Орлов Б.В., Мазинг Г.Ю. Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе / Б.В. Орлов, Г.Ю. Мазинг, М:Машиностр-е изд., 1979. 392 с.

17. Петрова Е.Н. Влияние высокочастотных колебаний газа в ракетном двигателе на твердом топливе на продольную акустическую неустойчивость : диссертация ...кандидата технических наук: 05.07.05 / Петрова Елена Николаевна; [Место защиты: Перм. гос. техн. ун-т.], 2010, 126 с.

18. Присняков В.Ф. Динамика ракетных двигателей твердого топлива / В.Ф. Присняков, М.:Машиностроение, 1984. 284 с.
19. Роджерс Д., Адамс Д. Математические основы компьютерной графики / Д. Роджерс, Д. Адамс, М.:Мир, 2001. 604 с.
20. Рошин А.С. Моделирование пространственных течений в газовых трактах с использованием адаптивных сеток: диссертация...кандидата физико-математических наук: 01.02.05 / Рошин Антон Сергеевич; [Место защиты: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)]. – Москва, 2014. – 128 с.
21. Суржиков С.Т., Краер Х. Квазиодномерная модель горения слоевого гетерогенного твердого топлива // Теплофизика высоких температур. 2001. № 4 (39). С. 629–639.
22. Суржиков С.Т., Краер Х. Вычислительные модели горения неметаллизированного гетерогенного ракетного топлива // Теплофизика высоких температур. 2003. № 1 (41). С. 106–142.
23. Тейлор Д. Введение в теорию ошибок / Д. Тейлор, М.: Мир, 1985. 272 с.
24. Б.Г.Трусов. Программная система TERRA для моделирования фазовых и химических равновесий. / Труды XIV Межд.конф.по хим.термодинамике, СПб, 2002.
25. Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива под ред. А.С. Коротеев, М.:Машиностроение, 2004. 512 с.
26. Внутренняя баллистика РДТТ под ред. А.М. Липанов, Ю.М. Милехин, М.:Машиностроение, 2007. 504 с.
27. Anderson F.A., Strand L.D., Strehlow R.A. Low pressure rocket extinction // AIAA Journal. 1963. № 11 (1). С. 2669–2671.
28. Andrepont W., Schoner R. The T-burner test method for determining the combustion response of solid propellants Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1972.

29. Andrepont W., Siuru J.W. Prediction of instability in solid rocket motors - A status report Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1975.
30. Angelus T.A., Yount R.A. Chuffing and nonacoustic instability phenomena in solid propellant rockets // AIAA Journal. 1964. № 7 (2). C. 1307–1313.
31. Atassi O.V. Computing the sound power in non-uniform flow // Journal of Sound and Vibration. 2003. № 1 (266). C. 75–92.
32. Atkins H.L., Shu C.-W. Quadrature-free implementation of discontinuous galerkin method for hyperbolic equations // AIAA Journal. 1998. № 5 (36). C. 775–782.
33. Awad E., Culick F.E.C. On the existence and stability of limit cycles for longitudinal acoustic modes in a combustion chamber // Combustion Science and Technology. 1986. № 3–6 (46). C. 195–222.
34. Baer A.D., Oberg C.L., Ryan N.W. A study of T-burner behavior. // AIAA Journal. 1968. № 6 (6). C. 1131–1137.
35. Ballereau S. [и др.]. Numerical simulations and searching methods of thrust oscillations for solid rocket motors Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
36. Barrère M., Williams F.A. Comparison of combustion instabilities found in various types of combustion chambers // Symposium (International) on Combustion. 1969. № 1 (12). C. 169–181.
37. Baum J.D., Daniel B.R., Zinn B.T. Determination of solid propellant admittances by the impedance tube method // AIAA Journal. 1981. № 2 (19). C. 214–220.
38. Baum J.D., Levine J.N. Modeling of nonlinear longitudinal instability in solid rocket motors // Acta Astronautica. 1986. № 6–7 (13). C. 339–348.
39. Beckstead M.W., Culick F.E.C. Investigations of novel energetic materials to stabilize rocket motors [Электронный ресурс]. URL: <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a441080.pdf>.

40. Beckstead M.W., Meredith K., Blomshield F.S. Examples of unsteady combustion in non-metallized propellants Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
41. Blomshield F.S. [и др.]. Stability testing of full-scale tactical motors // Journal of Propulsion and Power. 1997. № 3 (13). С. 349–355.
42. Blomshield F.S. [и др.]. Nonlinear stability testing of full-scale tactical motors // Journal of Propulsion and Power. 1997. № 3 (13). С. 356–366.
43. Blomshield F.S. [и др.]. High pressure pulsed motor firing combustion instability investigations Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1997.
44. Blomshield F.S. Historical perspective of combustion instability in motors - Case studies Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001.
45. Blomshield F.S. Lessons learned in solid rocket combustion instability Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007.
46. Blomshield F.S., Bicker C. Pressure oscillations in Shuttle Solid Rocket Motors Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1997.
47. Blomshield F.S., Mathes H.B. Pressure oscillations in post-Challenger Space Shuttle redesigned solid rocket motors (RSRMs) Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1991.
48. Blomshield F.S., Stalnaker R. Pulsed motor firings - Pulse amplitude, formulation, and enhanced instrumentation Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
49. Brear M.J. [и др.]. Disturbance energy transport and sound production in gaseous combustion // Journal of Fluid Mechanics. 2012. (707). С. 53–73.
50. Brewster M.Q. Solid propellant combustion response: quasi-steady (QSHOD) theory development and validation // Progress in Astronautics and Aeronautics. 2000. (185). С. 607–638.
51. Brown B. Pulsed T-burner testing of combustion dynamics of

aluminized solid propellants Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1971.

52. Brown R.S. [и др.]. Vortex shedding as a source of acoustic energy in segmented solid rockets // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1981. № 4 (18). С. 312–319.

53. Brown R.S., Erickson J.E., Babcock W.R. Combustion response function measurements by the rotating valve method // *AIAA Journal*. 1974. № 11 (12). С. 1502–1510.

54. Brownlee W.G. Nonlinear axial combustion instability in solid propellant motors // *AIAA Journal*. 1964. № 2 (2). С. 275–284.

55. Brownlee W.G., Kimbell G.H. Shock propagation in solid-propellant rocket combustors. // *AIAA Journal*. 1966. № 6 (4). С. 1132–1134.

56. Brownlee W.G., Marble F.E. An experimental investigation of unstable combustion in solid propellant rocket motors // *ARS Solid Propellant Rocket Research Symposium*. 1960. С. 455–494.

57. Brownlee W.G., Roberts A.K. Nonlinear longitudinal combustion instability - Influence of propellant composition // *AIAA Journal*. 1971. № 1 (9). С. 140–147.

58. Cantrell R.H., Hart R.W. Interaction between sound and flow in acoustic cavities: mass, momentum, and energy considerations // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1964. № 4 (36). С. 697–706.

59. Capener E.L., Kier R.J., Dickson L.. Driving processes of finite-amplitude axial mode instability in solid-propellant rockets. // *AIAA Journal*. 1967. № 5 (5). С. 938–945.

60. Cardiff E.H. Inconsistent definitions of pressure-coupled responses and admittances of solid propellants // *Journal of Propulsion and Power*. 2003. № 6 (19). С. 1217–1218.

61. Cardiff E.H., Pinkham J.D., Micci M. Magnetic flowmeter measurement of pressure-coupled response of a plateau solid propellant // *Journal of Propulsion and Power*. 1999. № 6 (15). С. 844–848.

62. Cheng S. High-frequency combustion instability in solid propellant rockets. Part 1 // Journal of Jet Propulsion. 1954. № 1 (24). C. 27–32.
63. Cheng S. High-frequency combustion instability in solid propellant rockets. Part 2 // Journal of Jet Propulsion. 1954. № 2 (24). C. 102–109.
64. Chew L. Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces New York, New York, USA: ACM Press, 1993. 274–280 c.
65. Chibli H., Majdalani J., Flandro G.A. Fundamental growth rate corrections in rocket motor stability calculations Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.
66. Coates R.L., Cohen N.S., Harvill L.R. An interpretation of L* combustion instability in terms of acoustic instability theory. // AIAA Journal. 1967. № 6 (5). C. 1097–1102.
67. Coates R.L., Horton M.D. Further considerations on the interaction of sound and flow in rocket motors and T-Burners // Combustion Science and Technology. 1974. № 3–4 (9). C. 95–102.
68. Coates R.L., Horton M.D., Ryan N.W. T-burner method of determining the acoustic admittance of burning propellants // AIAA Journal. 1964. № 6 (2). C. 1119–1122.
69. Crocco L. Verification of nozzle admittance theory by direct measurement of the admittance parameter // ARS Journal. 1961. № 6 (31). C. 771–775.
70. Culick F.E.C. T-burner testing of metallized solid propellants [Электронный ресурс]. URL: <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a001665.pdf>.
71. Culick F.E.C. Stability of high-frequency pressure oscillations in rocket combustion chambers // AIAA Journal. 1963. № 5 (1). C. 1097–1104.
72. Culick F.E.C. Acoustic oscillations in solid propellant rocket chambers // Astronautica acta. 1966. № 2 (12). C. 113–126.
73. Culick F.E.C. Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket. // AIAA Journal. 1966. № 8 (4). C. 1462–1464.

74. Culick F.E.C. Some nonacoustic instabilities in rocket chambers are acoustic. // *AIAA Journal*. 1968. № 7 (6). C. 1421–1423.

75. Culick F.E.C. Stability of longitudinal oscillations with pressure and velocity coupling in a solid propellant rocket // *Combustion Science and Technology*. 1970. № 4 (2). C. 179–201.

76. Culick F.E.C. Non-linear growth and limiting amplitude of acoustic oscillations in combustion chambers // *Combustion Science and Technology*. 1971. № 1 (3). C. 1–16.

77. Culick F.E.C. The stability of one-dimensional motions in a rocket motor // *Combustion Science and Technology*. 1973. № 4 (7). C. 165–175.

78. Culick F.E.C. Stability of three-dimensional motions in a combustion chamber // *Combustion Science and Technology*. 1975. № 3–4 (10). C. 109–124.

79. Culick F.E.C. Nonlinear behavior of acoustic waves in combustion chambers—I // *Acta Astronautica*. 1976. № 9–10 (3). C. 715–734.

80. Culick F.E.C. Nonlinear behavior of acoustic waves in combustion chambers—II // *Acta Astronautica*. 1976. № 9–10 (3). C. 735–757.

81. Culick F.E.C. Some recent results for nonlinear acoustics in combustion chambers // *AIAA Journal*. 1994. № 1 (32). C. 146–169.

82. Culick F.E.C. *Combustion instabilities - Mating dance of chemical, combustion, and combustor dynamics* Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.

83. Culick F.E.C. Unsteady motions in combustion chambers for propulsion systems // *Technology* [Электронный ресурс].

URL:<http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=ADA466461>.

84. Culick F.E.C., Perry E.H. T-burner data and combustion instability in solid propellant rockets. // *AIAA Journal*. 1969. № 6 (7). C. 1204–1205.

85. Dotson K.W., Koshigoe S., Pace K.K. Vortex shedding in a large solid rocket motor without inhibitors at the segment interfaces // *Journal of Propulsion and Power*. 1997. № 2 (13). C. 197–206.

86. Dowling A.P. [и др.]. Active control of reheat buzz // AIAA Journal. 1988. № 7 (26). С. 783–790.
87. Dunlap R., Willouchby P.G., Hermsen R.W. Flowfield in the combustion chamber of a solid propellant rocket motor // AIAA Journal. 1974. № 10 (12). С. 1440–1442.
88. Eberly D. Triangulation by Ear Clipping [Электронный ресурс]. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/5879/7027a881135ab729bb6e1702f773f7b6b562.pdf>.
89. Eisel J.L., Horton M.D., Price E.W. Low frequency acoustic oscillatory combustion // AIAA Journal. 1963. № 11 (1). С. 2652–2654.
90. Eversman W. The boundary condition at an impedance wall in a non-uniform duct with potential mean flow // Journal of Sound and Vibration. 2001. № 1 (246). С. 63–69.
91. Fabignon Y. [и др.]. Instabilities and pressure oscillations in solid rocket motors // Aerospace Science and Technology. 2003. № 3 (7). С. 191–200.
92. Ferretti V. [и др.]. Numerical simulations of acoustic resonance of Solid Rocket Motor Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010.
93. Fischbach S. [и др.]. Verification and validation of rocket stability integral transformations Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
94. Fischbach S. Streaming effects in liquid injection rocket engines with transverse mode oscillations 2007.
95. Fischbach S., Flandro G.A., Majdalani J. Volume-to-surface transformations of rocket stability integrals Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004.
96. Flandro G.A. Roll torque and normal force generation in acoustically unstable rocket motors // AIAA Journal. 1964. № 7 (2). С. 1303–1306.
97. Flandro G.A. Solid propellant acoustic admittance corrections // Journal of Sound and Vibration. 1974. № 3 (36). С. 297–312.

98. Flandro G.A., Fischbach S., Majdalani J. Nonlinear rocket motor stability prediction: Limit amplitude, triggering, and mean pressure shift // *Physics of Fluids*. 2007. № 9 (19). C. 094101.
99. Flandro G.A., Jacob E. Finite amplitude nonlinear waves in liquid rocket combustion chambers Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008. 1–23 c.
100. Flandro G.A., Majdalani J. Aeroacoustic Instability in Rockets // *AIAA Journal*. 2003. № 3 (41). C. 485–497.
101. Flandro G.A., Perry E.H., French J. Nonlinear rocket motor stability computations: understanding the brownlee-marble observations Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
102. Foner S.N., Hudson R.L., Nall B.H. Admittance measurements of solid propellants by an acoustic oscillator technique // *AIAA Journal*. 1964. № 6 (2). C. 1123–1129.
103. French J. A comparison of nonlinear combustion stability methods Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
104. Genot A., Gallier S., Schuller T. A numerical analysis of aluminum droplet combustion driven instabilities in solid rocket motors Milan, Italy:, 2017.
105. Grad H. Resonance burning in rocket motors // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1949. № 1 (2). C. 79–102.
106. Greatrix D. Correlation of pressure rise with radial vibration level in solid rocket motors Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1995.
107. Harris P.G. Experimental evaluation of one-dimensional design technology for linear combustion instability Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1994.
108. Harris P.G., Champlain A. Methodology for analysis of postshock oscillations during pulse-triggered instability // *Journal of Propulsion and Power*. 1999. № 5 (15). C. 719–728.

109. Harris P.G., Champlain A., Bourque C. Pulse-triggered nonlinear instability in solid rocket motors - An experimental study Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1997.
110. Harris P.G., Wong F. The influence of structural vibrations on pulse-triggered nonlinear instability in solid rocket motors - An experimental study Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
111. Hart R.W., McClure F.T. Combustion instability: acoustic interaction with a burning propellant surface // *The Journal of Chemical Physics*. 1959. № 6 (30). C. 1501–1514.
112. Hart R.W., McClure F.T. Theory of acoustic instability in solid-propellant rocket combustion // *Symposium (International) on Combustion*. 1965. № 1 (10). C. 1047–1065.
113. Horton M.D., Coates R.L. T-Burners: experiments compared with theory // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1974. № 1 (11). C. 48–51.
114. Inami Y.H., Shanfield H. Nonacoustic combustion pulsations of ammonium perchlorate containing aluminum // *AIAA Journal*. 1964. № 7 (2). C. 1314–1318.
115. Jackson T.L. Modeling of heterogeneous propellant combustion: A survey // *AIAA Journal*. 2012. № 5 (50). C. 993–1006.
116. Jackson T.L., Buckmaster J., Hoeflinger J. Three-dimensional flames supported by heterogeneous propellants // *Proceedings of the Combustion Institute*. 2000. № 1 (28). C. 895–902.
117. Jacob E. A study of nonlinear combustion instability // *Doctoral Dissertation*. 2009. C. 163.
118. Janardan B.A., Daniel B.R., Zinn B.T. Scaling of rocket nozzle admittances // *AIAA Journal*. 1975. № 7 (13). C. 918–923.
119. Karimi N., Brear M.J., Moase W.H. Acoustic and disturbance energy analysis of a flow with heat communication // *Journal of Fluid Mechanics*. 2008. (597).

120. Kochevets S. [и др.]. Random packs and their use in modeling heterogeneous solid propellant combustion // *Journal of Propulsion and Power*. 2001. № 4 (17). С. 883–891.
121. Kourta A. Vortex shedding in segmented solid rocket motors // *Journal of Propulsion and Power*. 1996. № 2 (12). С. 371–376.
122. Kubota N., Kimura J. Oscillatory burning of high-pressure exponent double-base propellants // *AIAA Journal*. 1977. № 1 (15). С. 126–127.
123. Kumar R.N. Some experimental results on the L-star instability of metallized composite propellants Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1975.
124. Kumar R.N., McNamara R.P. Some experiments related to L-star instability in rocket motors Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1973.
125. Leibovitz Z., Gany A. Investigation of solid propellant combustion instability by means of a T-burner // *Acta Astronautica*. 1984. № 9 (11). С. 603–606.
126. Lin A.-C., Wang S.-Y. Investigation of aluminized solid propellant combustion instability by means of a T-burner Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1995.
127. Lovine R. High frequency propellant response measurements Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1977.
128. Lupoglazoff N., Vuillot F. Numerical simulation of vortex shedding phenomenon in 2D test case solid rocket motors Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992.
129. Lupoglazoff N., Vuillot F. Comparison between firing tests and numerical simulation of vortex shedding in a 2-D test solid motor Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993.
130. Majdalani J., Fischbach S., Flandro G.A. Improved energy normalization function in rocket motor stability calculations // *Aerospace Science and Technology*. 2006. № 6 (10). С. 495–500.

131. Majdalani J., Flandro G.A., Fischbach S. Some rotational corrections to the acoustic energy equation in injection-driven enclosures // *Physics of Fluids*. 2005. № 7 (17). C. 074102.
132. Marxman G.A., Wooldridge C.E. Finite-amplitude axial instability in solid-rocket combustion // *Symposium (International) on Combustion*. 1969. № 1 (12). C. 115–127.
133. Mason D., Folkman S., Behring M. Thrust oscillations of the Space Shuttle solid rocket Booster motor during static tests Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1979.
134. Mathes H.B. Assessment of chamber pressure oscillations in the Shuttle SRB Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1980.
135. Matsui K. The response function of acoustic combustion instabilities of the solid propellant // *Journal of the Combustion Society of Japan*. 2017. № 188 (59). C. 116–131.
136. Micci M., Caveny L. MHD measurement of acoustic velocities in rocket motor chambers // *AIAA Journal*. 1982. № 4 (20). C. 516–521.
137. Muhlfeith C.M., Sayer L.H. Combustion instability of low smoke propellants in ballistic test motors and a T-burner Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1974.
138. Muhlfeith C.M., Sayer L.H. Novel high area ratio T-burner for characterizing metalized propellants // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1974. № 8 (11). C. 574–578.
139. Mitchel B.J., Pfahl R.C. Nonlinear regression methods for simultaneous property measurement // *AIAA Journal*. 1970. № 6 (8). C. 1046–1052.
140. Miyazaki S. [и др.]. Solid propellant combustion response measurements by the pulse/variable-area burner Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1994.
141. Morfey C.L. Acoustic energy in non-uniform flows // *Journal of Sound and Vibration*. 1971. № 2 (14). C. 159–170.

142. Morgenweck D. [и др.]. Influence of scaling rules on the loss of acoustic energy // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2011. № 3 (48). С. 498–506.
143. Myers M.K. An exact energy corollary for homentropic flow // *Journal of Sound and Vibration*. 1986. № 2 (109). С. 277–284.
144. Myers M.K. Transport of energy by disturbances in arbitrary steady flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 1991. № 1 (226). С. 383.
145. Oberg C.L. Combustion instability - The relationship between acoustic and nonacoustic instability. // *AIAA Journal*. 1968. № 2 (6). С. 265–271.
146. Orlandi O. [и др.]. Aluminium droplets combustion and SRM instabilities Milan, Italy:, 2017.
147. Perry E.H. Investigations of the T-burner and its role in combustion instability studies // *Doctoral Dissertation*. 1970. С. 182.
148. Phillippe E.A., Tchepidjian P. Prediction of longitudinal combustion instabilities in axisymmetrical propellant grains Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1984.
149. Pierce A.D. Aeroacoustic fluid dynamic equations and their acoustic energy conservation corollary with O₂ and N₂ vibrational relaxation effects included // *Journal of Sound and Vibration*. 1978. № 2 (58). С. 189–200.
150. Pinelli L. [и др.]. Validation of a 3D linearized method for turbomachinery tone noise analysis ASME, 2011. 1033–1042 с.
151. Prevost M., Vuillot F., Traineau J. Vortex shedding driven oscillations in subscale motors for the Ariane 5 MPS P230 Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
152. Price E.W., Flandro G.A. Combustion instability in solid propellant rockets [Электронный ресурс].
URL: https://archive.org/details/DTIC_ADA216740.
153. Raghunandan B.N., Bhaskariah P. Some new results of chuffing in composite solid propellant rockets // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1985. № 2 (22). С. 218–220.

154. Rao P.P. High order unstructured grid methods for computational aeroacoustics // Doctoral Dissertation. 2004. C. 156.
155. Rao P.P., Morris P.J. Use of finite element methods in frequency domain aeroacoustics // *AIAA Journal*. 2006. № 7 (44). C. 1643–1652.
156. Rice T.M. Effect of unsteady combustion on the stability of rocket engines // Doctoral Dissertation. 2011. C. 244.
157. Salikuddin M., Zinn B.T. Adaptation of the impedance tube technique for the measurement of combustion process admittances // *Journal of Sound and Vibration*. 1980. № 1 (68). C. 119–132.
158. Saretto S. [и др.]. Pressure-coupled response measurements of several aluminized and non-aluminized solid propellants using the magnetic flowmeter Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
159. Schöyer H.F. Results of experimental investigations of the L-star instability phenomenon Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1978.
160. Schöyer H.F., Korting P.A. Combustion behaviour of composite propellant at sub-atmospheric pressure // *Acta Astronautica*. 1986. № 2 (13). C. 55–61.
161. Scippa S., Pascal P., Zanier F. Ariane 5-MPS - Chamber pressure oscillations full scale firing results: Analysis and further studies Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1994.
162. Smith D., Clark M., Christie F. Combustion instability of nonaluminized propellants - The influence of propellant formulation Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1977.
163. Sotter G., Swithenbank J. Vortices in solid propellant rocket motors // *AIAA Journal*. 1963. № 7 (1). C. 1682–1684.
164. Stafford D.S., Jackson T.L. Using level sets for creating virtual random packs of non-spherical convex shapes // *Journal of Computational Physics*. 2010. № 9 (229). C. 3295–3315.

165. Strand L.D., Magiawala K.R., McNamara R.P. Microwave measurement of the solid-propellant pressure-coupled response function // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1980. № 6 (17). С. 483–488.
166. Su W. [и др.]. Improved method of measuring pressure coupled response for composite solid propellants // *Journal of Sound and Vibration*. 2014. № 8 (333). С. 2226–2240.
167. Talei M. [и др.]. Transport of disturbance energy in hot and cold turbulent jets Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007.
168. Wieczorek K. [и др.]. Assessing non-normal effects in thermoacoustic systems with mean flow // *Physics of Fluids*. 2011. № 10 (23). С. 107103.
169. Wilson J.R., Micci M. Direct measurement of high frequency, solid propellant, pressure-coupled admittances // *Journal of Propulsion and Power*. 1987. № 4 (3). С. 296–302.
170. Yang V., Culick F.E.C. On the existence and stability of limit cycles for transverse acoustic oscillations in a cylindrical combustion chamber. 1: Standing modes // *Combustion Science and Technology*. 1990. № 1–3 (72). С. 37–65.
171. Zhao D., Li S., Zhao H. Entropy-involved energy measure study of intrinsic thermoacoustic oscillations // *Applied Energy*. 2016. (177). С. 570–578.
172. Zinn B.T., Powell E.A. Application of the Galerkin method in the solution of combustion-instability problems Elsevier, 1970. 59–73 с.
173. Nonsteady burning and combustion stability of solid propellants под ред. M. Summerfield, E.W. Price, L. De Luca, Washington DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992.