МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

УДК 629.78

ПОДКОРЫТОВ АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

Высокоточное местоопределение в глобальных навигационных спутниковых системах в абсолютном режиме за счёт разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений

Специальность: 05.12.14 – «Радиолокация и радионавигация»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

д.т.н., Поваляев А. А.

Москва – 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

В последние годы в глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС) активно развивается метод высокоточного местоопределения потребителя в абсолютном режиме (Precise Point Positioning, PPP) [1, 2, 3]. Сегодня ошибки таких определений в режиме послесеансной обработки достигают 1см и менее для неподвижного приёмника и нескольких дециметров для подвижного. Традиционным стал подход Float PPP, при котором целочисленные неоднозначности псевдофазовых измерений вбирают в себя немоделируемые аппаратурные смещения и поэтому оцениваются как действительные числа.

Высокоточное абсолютное местоопределение в ГНСС находит применение во множестве промышленных приложений, таких как строительство и топографическая съёмка, добыча и разведка полезных ископаемых, мониторинг деформаций сооружений, изучение сейсмических процессов и др. Существенным недостатком методов Float PPP является недостаточная оперативность. Время определения высокоточных координат в зависимости от точности может длиться до нескольких часов, что неприемлемо для большого числа практических приложений. Использование в процессе местоопределения процедуры целочисленного разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений позволяет существенно сократить это время и приблизиться к местоопределению в режиме реального времени. По этой причине в настоящее время усилия ведущих космических агентств, коммерческих компаний и университетов в области абсолютной высокоточной спутниковой навигации сосредоточены на уменьшении времени определения высокоточных координат за счёт учёта в обработке целочисленной природы неоднозначностей псевдофазовых измерений. Таким образом, разработка методов высокоточного местоопределения в абсолютном режиме с использованием разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений является актуальной и востребованной задачей.

Объект исследования

Объектом исследования являются высокоточные абсолютные местоопределения в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений на основе использования корректирующей информации, формируемой по измерениям сети наземных станций.

Предмет исследования

Алгоритмы формирования корректирующей информации и алгоритмы высокоточных абсолютных местоопределений с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью диссертации являются разработка и исследование методов разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений при высокоточных местоопределениях в ГНСС с целью снижения времени определения высокоточных абсолютных координат потребителя. Для достижения поставленной цели в ходе диссертационного исследования были решены следующие задачи:

1. Разработаны математические модели измерений навигационного приёмника на исходных частотах, позволяющие осуществлять разрешение целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений при абсолютных местоопределениях в ГНСС.
2. Разработан и программно реализован алгоритм вычисления по локальной сети наземных навигационных станций поправок к показаниям спутниковых часов, позволяющих осуществлять высокоточное местоопределение в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений.
3. Разработаны теоретические и практические вопросы преодоления дефицита ранга систем линейных уравнений при высокоточном местоопределении в ГНСС в абсолютном режиме с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений (как в части пользовательского решения, так и при обработке измерений сети наземных станций).
4. Разработан и программно реализован алгоритм высокоточного местоопределения потребителя в ГНСС в абсолютном режиме с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений.
5. Проведено экспериментальное исследование эффективности использования процедуры разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений при высокоточном местоопределении в ГНСС в абсолютном режиме.
6. Разработан метод фильтрации (исключающий фильтр Калмана), позволяющий осуществлять высокоточное абсолютное местоопределение потребителя в ГНСС по предложенному алгоритму обработки измерений на исходных частотах с исключением влияния ионосферных искажений на оценки координат.

Методы исследования

Для решения поставленных в диссертационной работе задач были использованы методы теории вероятностей и математической статистики, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории оптимальной фильтрации случайных процессов, методы математического моделирования и теория матриц. При экспериментальном исследовании разработанных алгоритмов использовались программы компьютерного моделирования, программирование и специализированные прикладные программные продукты.

Научная новизна

Диссертационная работа посвящена методам снижения периода сходимости решения при высокоточном местоопределении в ГНСС в абсолютном режиме за счёт использования процедуры целочисленного разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений. Научная новизна результатов диссертационной работы состоит в следующем:

1. Выявлена ортогональность ядра информационной сингулярной матрицы системы линеаризованных уравнений для измерений ГЛОНАСС и GPS осям пространства оцениваемых параметров, по которым откладываются поправки к координатам навигационного приёмника. Это позволяет несмотря на сингулярность информационной матрицы линеаризованной системы уравнений оценивать поправки к координатам приёмника однозначно с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений.
2. Обосновано и экспериментально подтверждено снижение периода сходимости решения при высокоточном местоопределении в ГНСС в абсолютном режиме при использовании разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений.
3. Разработано приложение теории S-преобразования и теории графов для высокоточного абсолютного местоопределения в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений и вычисления разделённых поправок к показаниям спутниковых часов.
4. Разработан метод фильтрации, позволяющий при местоопределении в ГНСС работать с измерениями на исходных частотах без использования ионосферосвободных комбинаций измерений (исключающий фильтр Калмана).

Практическая значимость работы

Практическая значимость работы состоит в следующем:

1. Продемонстрировано существенное (в десятки и даже сотни раз) снижение периода сходимости решения высокоточного абсолютного местоопределении в ГНСС при использовании разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений.
2. Разработан и программно реализован алгоритм вычисления по локальной сети наземных навигационных станций разделённых поправок к показаниям спутниковых часов, позволяющих реализовать высокоточное местоопределение потребителя в ГНСС с разрешением неоднозначности псевдофазовых измерений.

Теоретическая значимость работы

Теоретическая значимость работы состоит в следующем:

1. Выявленная в работе ортогональность ядра матрицы сингулярной системы линеаризованных уравнений для измерений ГНСС может быть положена в основу новых перспективных методов алгоритмов обработки навигационных измерений в ГНСС.

2. Разработан алгоритм преодоления дефицита ранга в системах линейных уравнений в ГНСС при высокоточном местоопределнии в абсолютном режиме с разрешением неоднозначности псевдофазовых измерений (как в части пользовательского решения, так и при обработке измерений сети наземных станций).
3. Разработанный метод фильтрации (исключающий фильтр Калмана) предложено использовать в задачах квазиоптимального оценивания для исключения мешающих параметров.

Достоверность полученных научных результатов

Достоверность полученных результатов обеспечена строгим и корректным использованием адекватного математического аппарата, она подтверждается соответствием результатов исследований известным из литературы результатам по рассматриваемой тематике.

Алгоритм высокоточного абсолютного местоопределения потребителя в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений, алгоритм вычисления по локальной сети наземных навигационных станций разделённых поправок к показаниям спутниковых часов и исключающий фильтр Калмана протестированы на реальных измерениях навигационной системы GPS.

Внедрение результатов работы

Результаты работы использованы во ФГУП ЦНИИмаш при выполнении НИР «Системные и комплексные научные исследования направлений развития системы ГЛОНАСС» (шифр НИР «Развитие»), а также в ОАО «Российские космические системы» и учебном процессе МАИ, что подтверждается соответствующими актами внедрения. В дальнейшем планируется использование результатов при разработке программного обеспечения навигационной аппаратуры потребителя для высокоточных абсолютных определений по сигналам ГЛОНАСС с кодовым разделением, реализуемым на новых космических аппаратах системы ГЛОНАСС.

Апробация результатов

Результаты работы докладывались и обсуждались на международной рабочей группе GNSS Precise Point Positioning Workshop: Reaching Full Potential (Оттава, 2013), на IX и X Международной IEEE Сибирской конференции по управлению и связи SIBCON (Красноярск, 2011, 2013), на Московской молодёжной научно-практической конференции “Инновации в авиации и космонавтике” (Москва, 2012, 2013, 2014), на Научно-практической конференции студентов и молодых ученых МАИ “Инновации в авиации и космонавтике - 2011” (Москва, 2011), на III Международной научно-практической конференции “Научно-техническое творчество молодежи – путь к обществу, основанному на знаниях” (Москва, 2011).

Положения, выносимые на защиту

1. Часть координатных осей пространства переменных сингулярных систем линейных уравнений в ГНСС (ГЛОНАСС, GPS) ортогональны ядру информационной матрицы системы, и поэтому соответствующие таким осям переменные оцениваются однозначно.
2. Использование разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений позволяет существенно (в десятки и даже сотни раз) снизить период сходимости решения при высокоточном местоопределении в ГНСС.
3. Разработанный метод фильтрации (исключающий фильтр Калмана) позволяет при местоопределении в ГНСС работать с измерениями на исходных частотах без использования ионосферосвободных комбинаций измерений.
4. Разработанное на основе теории S-преобразования и теории графов правило формирования оцениваемых в сетевом решении линейных комбинаций параметров позволяет сохранить целочисленность комбинаций неоднозначностей псевдофазовых измерений.

Публикации

Основные результаты диссертационной работы изложены в 17 печатных работах, среди которых 7 статей в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертаций, 1 свидетельство о регистрации программы для ЭВМ в Роспатенте, тезисы 5 международных конференций, 4 публикации в сборниках докладов Всероссийских и региональных конференций. Публикации в изданиях из перечня ведущих рецензируемых изданий, рекомендованных ВАК:

1. Поваляев А. А., Подкорытов А. Н. К задаче высокоточного определения абсолютных координат в глобальных навигационных спутниковых системах. //Радиотехника, Радиотехника, Москва, 2014. – №1 – С. 15-19.
2. Дворкин В. В., Карутин С. Н., Глухов П. Б., Подкорытов А. Н. Перспективный высокоточный комплекс функционального дополнения глобальных навигационных систем на базе системы дифференциальной коррекции и мониторинга. //Успехи современной радиоэлектроники, Радиотехника, Москва, 2013. – № 1 – С. 23-31.
3. Подкорытов А. Н., Сорокин М. А. Высокоточное определение координат потребителя в абсолютном режиме в глобальных навигационных спутниковых системах с использованием разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений. //Информационно-измерительные и управляющие системы, Радиотехника, Москва, 2012. – Т. 10, №10 – С.45-51.
4. Подкорытов А. Н. Высокоточное местоопределение в абсолютном режиме в ГНСС с использованием разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений. //Электронный журнал Труды МАИ, Москва, 2012. – № 59.

5. Подкорытов А.Н. Математическая модель смещения фазовых центров антенн при высокоточном местоопределении в глобальных навигационных комплексах. //Электронный журнал Труды МАИ, Москва, 2012. – №50.

6. Подкорытов А.Н. Методы оценивания и компенсации систематических смещений в измерениях псевдодальностей и псевдофаз. //Информационно-измерительные и управляющие системы, Радиотехника, Москва, 2011. – Т. 9, №8 – С. 23-30.

7. Подкорытов А.Н. Высокоточное определение координат потребителя в глобальных навигационных спутниковых системах с использованием уточненной эфемеридно-временной информации. //Вестник Московского авиационного института, Москва, 2011. – Т. 18, №3 – С. 233-239.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и одного приложения. Работа изложена на 195 страницах машинописного текста, содержит 65 рисунков, 4 таблицы, список литературы включает 123 наименования.

Во введении кратко излагаются: состояние проблемы, поставленные задачи и характеристика предметной области. Определяются актуальность темы диссертационной работы, формулируются цели и задачи исследования, объект, предмет и методы исследования, оценивается научная новизна, научная и практическая значимость полученных результатов, формулируются основные положения работы, выносимые на защиту, указывается степень апробации результатов работы.

В первой главе рассматривается классификация основных методов местоопределения (позиционирования) в ГНСС, делается обзор литературы по истории появления, развитию и текущему состоянию методов высокоточного местоопределения в ГНСС в абсолютном режиме с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений, а также проводится обзор приложений высокоточного местоопределения в ГНСС.

Показано, что в настоящее время можно говорить о так называемых глобальных дифференциальных навигационных спутниковых системах, в которых можно выделить сетевое решение (обработка измерений сети наземных станций) и пользовательское решение, т.е. высокоточное абсолютное местоопределение потребителя. В связи с этим режим высокоточного абсолютного местоопределения не является автономным, т.к. требует дополнительной информации, вычисляемой по сети наземных станций.

Проведён обзор известных методов высокоточного абсолютного местоопределения в ГНСС. Отмечено, что в получившем широкое распространение методе Float PPP псевдофазовые неоднозначности спутников оцениваются как действительные величины, поскольку вбирают в себя немоделируемые аппаратурные смещения, которые в процессе оценивания не удаётся отделить от целых неоднозначностей. Период сходимости решения к сантиметровой точности режима Float PPP для многих приложений является неприемлемо большим. Для его уменьшения при обработке необходимо учитывать целочисленную природу неоднозначностей псевдофазы, такой режим высокоточного местоопределения называется Integer PPP. Рассмотрены основные подходы к реализации режима Integer PPP, для дальнейшего исследования выбран наиболее теоретически обоснованный подход, разработанный в Министерстве природных ресурсов Канады (Natural Resources Canada, NRCan) и основанный на модели разделённых часов.

Проведён обзор известных сервисов высокоточного местоопределения и приложений данной технологии.

Во второй главе рассматриваются основные принципы местоопределения в ГНСС в режиме Float PPP, большая часть которых используется и в режиме Integer PPP. Приведены модели измерений режима Float PPP, отмечены причины, по которым в данном режиме не используется целочисленная природа неоднозначностей псевдофазовых измерений.

Рассмотрена укрупненная блок-схема алгоритма высокоточного местоопределения в режиме Float PPP, описаны основные этапы обработки данных. Описаны методы компенсаций систематических смещений в измерениях псевдодальностей и псевдофаз, которые необходимо учитывать при высокоточном абсолютном местоопределении: смещения, порождаемые разрывами псевдофазовых измерений, релятивистскими и гравитационными эффектами, взаимной ориентацией антенн спутника и приемника, искажениями в ионосфере и тропосфере, вращением Земли, смещениями и вариациями фазовых центров антенн спутников и приемников, приливными эффектами.

Приведены результаты вычислительных экспериментов по высокоточному местоопределению в режиме Float PPP. Показано, что время достижения сантиметровой точности в данном режиме составляет от 6 до 20 часов, что является неприемлемым для ряда практических приложений.

В третьей главе рассматриваются модели измерений, основанные на разделении показаний часов спутников и приёмников для измерений псевдодальностей и псевдофаз (анализируются модели измерений с разделёнными часами для систем ГЛОНАСС и GPS), выявляются особые свойства систем линейных уравнений ГНСС, рассматривается проблема дефицита ранга в задаче местоопределения в ГНСС режиме Integer PPP, приводится алгоритм преодоления дефицита ранга при высокоточном местоопределении в режиме Integer PPP, описывается исключающий фильтр Калмана.

Рассмотренные модели измерений ГЛОНАСС и GPS с разделёнными часами порождают системы линейных уравнений, который являются сингулярными, то есть содержат дефицит ранга. Всё сингулярные системы уравнений в ГНСС с разделёнными часами являются несовместными недоопределёнными, т.е. имеют множество решений наименьших квадратов.

Выявлено, что часть координатных осей пространства переменных сингулярных систем линейных уравнений в ГНСС (ГЛОНАСС, GPS) ортогональны ядру информационной матрицы системы, и поэтому соответствующие таким осям переменные оцениваются однозначно. С учётом данного свойства и при использовании теории S-преобразования разработан алгоритм перехода от несовместной недоопределённой системы уравнений к совместной переопределённой, имеющей единственное решение наименьших квадратов. Оценки поправок к координатам приёмника потребителя при указанном переходе не изменяются, а неоднозначности оцениваются в виде комбинаций с сохранением целочисленности.

Для работы с моделью измерений на исходных частотах, содержащей ионосферные задержки сигнала, в работе разработан метод фильтрации, позволяющий не оценивать мешающие параметры (исключающий фильтр Калмана). Этот фильтр является квазиоптимальным и предназначен для фильтрации с исключением мешающих параметров, к которым относятся ионосферные задержки сигнала.

В четвёртой главе поясняется, за счёт чего снижается период сходимости решения при использовании процедуры разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений, рассматриваются детали данной процедуры, демонстрируется использование атмосферных ограничений при срыве слежения за фазой несущего сигнала, а также приводятся результаты местоопределения в режиме Integer PPP с анализом достоверности полученных результатов.

Рассмотрена укрупнённая блок-схема алгоритма высокоточного местоопределения в режиме Integer PPP. Описаны дополнительные процедуры, отсутствующие при местоопределении в режиме Float PPP: разрешение целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений, оценка достоверности найденных целочисленных значений, вычисление целочисленного решения с учётом найденных целых.

Показано, что для уменьшения периода сходимости решения после сбоя в измерениях (проезд через тоннель, срыв слежения за фазой несущей) можно использовать стабильность ионосферных и тропосферных задержек во времени, оценки которых в случае сбоя в измерениях могут быть спрогнозированы с достаточно высокой точностью. Описано понятие ионосферных ограничений, предложено использовать более общее понятие атмосферных данных. Описан вычислительный эксперимент, в котором моделировался сбой в измерениях и анализировался скачок в трёхмерной ошибке местоопределения для различных режимов работы. Продемонстрировано, что одновременное использования тропосферных и ионосферных ограничений наиболее эффективно уменьшает амплитуду и длительность скачка в координатах потребителя.

Приведены результаты вычислительного эксперимента по местоопределению в режиме Integer PPP с использованием разделённых поправок к показаниям часов спутников, вычисленных по глобальной сети станций и предоставленных для исследования и тестирования Министерством природных ресурсов Канады (NRCan) согласно договору, заключённому с Московским авиационным институтом (национальным исследовательским университетом). Показано, что период сходимости целочисленного решения режима Integer PPP до точности 1 см составил около 600 с, тогда как в режиме Float PPP – 18 часов.

Пятая глава посвящена вычислению разделённых поправок к показаниям спутниковых часов по сети наземных станций с использованием теории графов, приведены результаты сравнения эффективности местоопределения в режиме Integer PPP при использовании разделённых поправок к показаниям спутниковых часов, вычисленных NRCan по глобальной сети станций, и поправок, вычисленных автором работы по локальной сети станций.

Приведена система уравнений, соответствующая задаче сетевого решения, т.е. задаче вычисления разделённых поправок к показаниям спутниковых часов по сети станций. Описан алгоритм преобразования данной несовместной недоопределённой системы к виду совместной переопределённой системы с использованием теории S-преобразования и теории графов. При этом неоднозначности оцениваются в виде комбинаций с сохранением свойства целочисленности. В данном алгоритме разделённые поправки к показаниям спутниковых часов оцениваются целочисленно смещённо, что не является препятствием для их использования в режиме Integer PPP, т.к. целочисленные смещения при местоопределении потребителя учитываются при разрешении целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений.

Описана задача локального сетевого решения, т.е. задача вычисления разделённых поправок к показаниям спутниковых часов при обработке измерений сети европейских станций. Эффективность использования вычисленных разделённых поправок к показаниям часов спутников для местоопределения в режиме Integer PPP сравнивалась с таковой для разделённых поправок, вычисленных NRCan по глобальной сети станций. Показано, что вычисленные по локальной и глобальной сетям разделённые поправки обеспечивают сравнимый период сходимости решения при местоопределении в режиме Integer PPP.

В заключении приводится перечень и анализ основных результатов диссертационной работы. В работе продемонстрировано существенное (в десятки и даже сотни раз) снижение периода сходимости решения при местоопределении в режиме Integer PPP по сравнению с режимом Float PPP, предложена к обработке модель измерений на исходных частотах, разработаны теоретические и практические вопросы преодоления дефицита ранга в сингулярных системах ГНСС.

В приложении приводятся аналитические выводы некоторых линейных комбинаций измерений, широко используемых в ГНСС

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ, МЕТОДОВ И ПРИЛОЖЕНИЙ ВЫСОКОТОЧНОГО МЕСТООПРЕДЕЛЕНИЯ В ГНСС

1.1 Классификация методов местоопределения в ГНСС

Классификация основных методов местоопределения (позиционирования) в ГНСС представлена на Рис. 1.1. Верхняя часть Рис. 1.1 отображает теоретически достаточно хорошо разработанные методы местоопределения в ГНСС, в которых можно четко отделить абсолютный режим местоопределения в ГНСС от относительного (дифференциального). Нижняя часть рис. 1.1 относится к методам, теория которых находится в стадии развития.

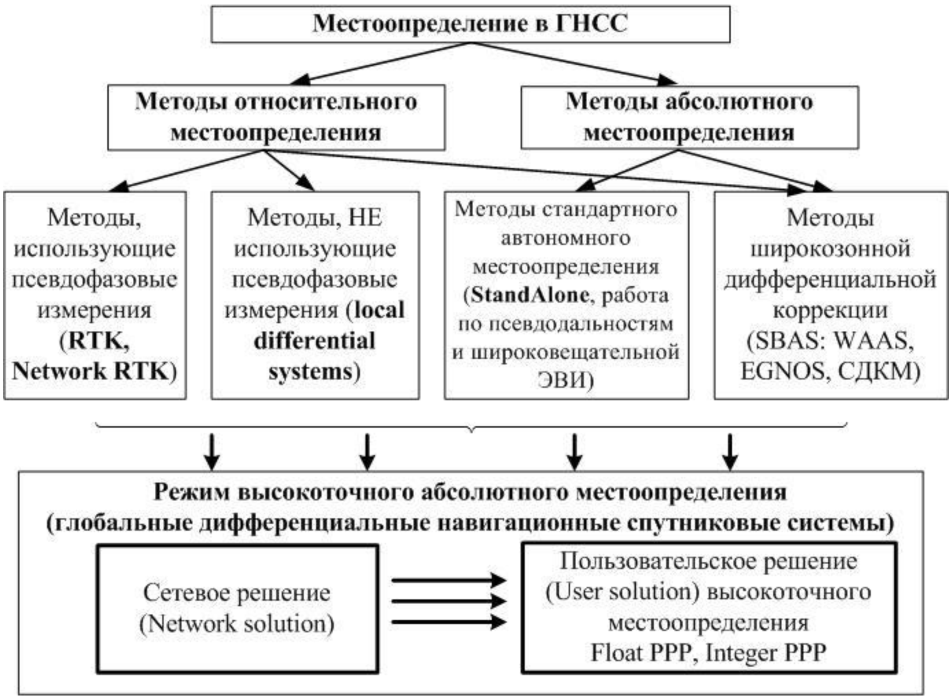

Рис. 1.1. Классификация технологий местоопределения в ГНСС

1.1.1 Стандартный автономный режим местоопределения

Под стандартным автономным режимом местоопределения понимается режим определения абсолютных координат потребителя в реальном масштабе времени по широковещательным эфемеридам, сообщаемым навигационными спутниками ГНСС (режим, известный также как Stand Alone). Навигационный приёмник при этом является полностью автономным и не требует для местоопределения ничего сверх измерений псевдодальностей и сообщаемой навигационными спутниками эфемеридно-временной информации (ЭВИ). Под абсолютными координатами потребителя понимаются координаты, определяемые относительно центра Земли (в гринвичской подвижной системе координат ECEF, Earth-

Centered-Earth-Fixed). Ошибка местоопределения потребителя в данном режиме составляет несколько метров [4]. Основными достоинствами данного режима местоопределения является оперативность (работа в реальном времени) и автономность

1.1.2 Относительный режим местоопределения без использования псевдофазовых измерений

В относительных или дифференциальных методах координаты потребителя определяются относительно координат базового приёмника, расположенного на опорной станции, т.е. определяются относительные координаты потребителя.

При относительном местоопределении без использования псевдофазовых измерений (использование только измерений псевдодальности) в режиме реального времени достигается точность около полуметра [4]. Системы, реализующие данный режим, получили название локальных дифференциальных систем (local differential systems, differential GNSS), а сам режим называется дифференциальным.

Уточнение в этих системах достигается за счёт использования потребителем локальных дифференциальных поправок к координатам либо измерениям псевдодальностей, передаваемых опорной станцией. Эта станция располагается в центре локальной зоны, размер которой характеризуется величиной $\approx 200\,\text{км}$ [4]. В центре локальной зоны точность абсолютного местоопределения составляет 0.5 м и менее, к границам локальной зоны точность постепенно понижается до точности стандартного местоопределения.

1.1.3 Относительный режим местоопределения с использованием псевдофазовых измерений

Режим RTK (Real Time Kinematic) основан на совместной обработке высокоточных псевдофазовых измерений приёмника потребителя и базового навигационного приёмника с разрешением их целочисленных неоднозначностей. Точность определения относительных координат приёмника потребителя в этом режиме характеризуется ошибками порядка 1 см и менее [4]. При одночастотных измерениях базовый приёмника не может быть удалён от приёмника потребителя более чем на ≈ 15 км, а при двухчастотных – более чем на ≈ 80 км. Эти ограничения являются серьёзными недостатками режима относительных определений RTK.

Режим одновременного использования распределённой локальной сети опорных станций для относительного местоопределения при использовании псевдофазовых измерений по методу RTK в литературе получил название Network RTK [5], [6]. В данном режиме в сети опорных станций для приёмника потребителя формируется несколько базовых линий с различными станциями сети с известными координатами. После определения нескольких базовых линий вычисляется некоторое взвешенное местоположение потребителя с учётом всех сформированных базовых линий рассматриваемой сети станций [5]. Поскольку станции опорной сети для режима Network RTK фиксированы и имеют известные абсолютные координаты, внутри такой сети доступна возможность определения высокоточных абсолютных координат потребителя, т.е. задача абсолютного местоопределения с высокой точностью также решается и методами Network RTK с той лишь оговоркой, что такой вариант местоопределения не может быть доступен глобально. Точность местоопределения в режиме Network RTK сравнима с точностью режима RTK и на порядок выше, чем точность локального дифференциального режима местоопределения.

1.1.4 Режим широкозонной дифференциальной коррекции

В отличие от режима локальной дифференциальной навигации, где передаются локальные дифференциальные поправки к координатам потребителя либо к измерениям псевдодальностей, в режиме широкозонной дифференциальной коррекции передаются глобальные поправки к параметрам моделей движения навигационных спутников, карты ионосферных задержек [4], параметры уточнённых моделей смещения шкал времени навигационных спутников. Двухчастотные измерения сети наземных станций оперативно собираются в центре управления системой, где на их основе определяются вышеперечисленные глобальные дифференциальные поправки. Далее эти поправки ретранслируются через геостационарные спутники всем потребителям, находящимся в зоне, покрываемой станциями сети. Примерами систем широкозонной дифференциальной коррекции являются системы WAAS [4] (Wide Area Augmentation System, США), EGNOS (European Geostationary Navigation Overlay Service, Европа) и СДКМ [7] (Система Дифференциальной Коррекции и Мониторинга, Россия). Указанные системы являются спутниковыми системами дифференциальной коррекции SBAS (Satellite-Based Augmentation System).

Системы широкозонной дифференциальной коррекции обеспечивают точность местоопределения потребителя в абсолютном режиме на уровне около 0.5 м (среднеквадратическая ошибка) на территории, охваченной используемой сетью опорных станций и в близлежащих областях [4, 8, 9].

Следует отметить, что в рассмотренных выше режимах относительного и абсолютного местоопределения разрешение неоднозначности псевдофазовых измерений применяется только в относительных режимах RTK и Network RTK.

1.1.5 Режим высокоточного абсолютного местоопределения

Нижняя часть рис. 1.1 иллюстрирует факт того, что в последние годы граница между относительными и абсолютными методами местоопределения постепенно стирается. С повышением точности абсолютные методы местоопределения уже не являются автономными и требуют дополнительной информации в виде атмосферных коррекций, высокоточной ЭВИ, параметров вращения Земли и т.д., которые могут быть вычислены только по сети наземных станций. В настоящее время можно говорить о появлении так называемых глобальных дифференциальных навигационных спутниковых систем (Global Differential Navigation Satellite Systems, GDNSS, нижняя часть схемы на рис. 1.1), в которых возможна реализация высокоточного местоопределения потребителя в абсолютном режиме. В таких системах можно выделить сетевое решение, которое осуществляется по сети наземных станций, как правило, глобальной или региональной; также можно выделить пользовательское решение, т.е. высокоточное местоопределение потребителя в абсолютном режиме без использования измерений от каких-либо опорных станций.

Высокоточное абсолютное местоопределение в ГНСС (Precise Point Positioning, высокоточное местоопределение) осуществляется при использовании высокоточной ЭВИ, компенсации ряда систематических смещений в измерениях и использовании точных, но неоднозначных псевдофазовых измерений. Одной из характерных особенностей местоопределения в режиме PPP является тот факт, что все необходимые для его реализации продукты сетевого решения ограничиваются высокоточными координатами спутников и поправками в показаниям часов спутников, которые и составляют необходимую ЭВИ (необходимые коэффициенты гармоник для расчёта смещений, связанных с океаническими приливными эффектами, а также коэффициенты смещения полюсов Земли на дату проведения измерений не являются продуктами сетевого решения и рассматриваются как доступные сторонние данные). Точность абсолютных координат потребителя в режиме PPP и оперативность их получения зависит от точности ЭВИ, условий приёма сигнала и математической модели используемых измерений, и может составлять от сантиметра и менее и до дециметров [10, 11].

Классическим или стандартным можно назвать режим высокоточного абсолютного местоопределения, при котором не учитывается целочисленная природа неоднозначностей псевдофазовых измерений, т.е. отсутствует разрешение целочисленной неоднозначности. Данный режим появился первым, в англоязычной литературе он обозначается как Float PPP. При использовании разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений режим высокоточного абсолютного местоопределения принято называть Integer PPP (PPP-AR).

В разделе 1.2 подробно рассмотрено развитие высокоточных методов абсолютного местоопределения в ГНСС с момента их появления и до настоящего времени.

Основным достоинством методов высокоточного местоопределения в абсолютном режиме является отсутствие ограничений на удаление приёмника потребителя от опорной станции, которые есть в методах RTK. Потребитель может находиться в сколь угодно удалённых и труднодоступных местах, единственным необходимым условием является возможность доступа к высокоточной ЭВИ и ряду геофизических параметров. При реализации высокоточного местоопределения в реальном времени в удалённых местах для доставки указанных необходимых внешних данных может использоваться канал спутниковой связи (например, с геостационарных спутников) или прогнозная высокоточная ЭВИ. При отсутствии возможности оперативной доставки необходимых внешних данных потребителю местоопределение реализуется в режиме постобработки. Основным недостатком высокоточного местоопределения в абсолютном режиме является долгий период сходимости к точному решению.

Рассмотренная классификация не является всеобъемлющей, т.к. многообразие технологий местоопределения в ГНСС и терминов для их обозначения временами затрудняет однозначное отнесение того или иного режима к конкретной группе методов. Например, в [12] описан режим местоопределения LADGNSS (Local-Area Differential GNSS), не вошедший ни в один из четырёх методов местоопределения, показанных в верхней части рис. 1.1 и рассмотренных ранее. Данный режим широко применяется в аэропортах в системах навигации и посадки летательных аппаратов. В [12] системы, использующие данный режим, называются LAAS (Local-Area Augmentation System) и включают в себя несколько опорных станций, расположенных в район взлётно-посадочной полосы. При этом используются как кодовые измерения, так и неоднозначные псевдофазовые измерения.

Ещё одним примером режима, не отражённого в классификации на рис. 1.1, является одночастотный режим высокоточного местоопределения Darts-SF, разработанный в компании Septentrio [13]. Для борьбы с ионосферными искажениями сигнала в нём используется ионосферосвободная кодово-фазовая комбинация одночастотных измерений. При этом неоднозначности псевдофазовых измерений моделируются динамическими величинами, т.е. не считаются константами. Это позволяет оптимизировать оценку систематических ошибок, включающих в себя в том числе ошибки орбит спутников и смещений показаний часов спутников. Двухчастотный вариант данного алгоритма был реализован и описан ранее [14], а также рассмотрен в [15] (в [15] также проведено сравнение абсолютных и относительных методов местоопределения по состоянию на 2005 год). При этом точность местоопределения потребителя снижается с примерно 1 м для двухчастотного режима до 1.5 м в одночастотном режиме. Однако возможность использования одночастотного приёмника является значительным преимуществом данного режима.

1.2 Обзор литературы по методам высокоточного местоопределения в абсолютном режиме

1.2.1 Постановка задачи высокоточного абсолютного местоопределения в ГНСС

Англоязычная аббревиатура высокоточного местоопределения в абсолютном режиме PPP (Precise Point Positioning) известна в сообществе ГНСС (Глобальные навигационные спутниковые системы) довольно давно. Одно из первых упоминаний данной аббревиатуры относится к 1997 году и работе [16], в которой авторами лаборатории JPL (Jet Propulsion Laboratory, лаборатория реактивного движения) из NASA (National Aeronautics and Space Administration, Национальное управление по воздухоплаванию и исследованию космического пространства, США) уже была поставлена задача вычисления ЭВИ высокой точности по распределённой сети станций с последующим её использованием для вычисления высокоточных координат потребителя, что практически полностью соответствует постановке задачи высокоточного местоопределения сегодня. Следует отметить также, что в работе [16] авторами описаны одни из первых в мире опытов по использованию неоднозначных псевдофазовых измерений для высокоточного местоопределения в ГНСС в абсолютном режиме. Ранее подавляющее большинство исследователей были сфокусированы на использовании дифференциальных (разностных) режимов местоопределения, а также однозначных измерений псевдодальности. Авторы [16] продемонстрировали, что высокоточная ЭВИ, включающая коррекции показаний часов спутников и спутниковые орбиты (координаты спутников), существенно повышает точность апостериорного местоопределения потребителя в абсолютном режиме. Для суточных файлов навигационных измерений и высокоточной ЭВИ от международной службы IGS (International GPS Service) была достигнута горизонтальная точность местоопределения на уровне миллиметров и вертикальная – на уровне сантиметра.

Однако сама идея повышения точности местоопределения в ГНСС за счёт использования ЭВИ повышенной точности вместо ЭВИ, вещаемой с бортов спутников в режиме реального времени, появилась значительно раньше. Например, в работе [17] для преодоления деградации точности дифференциального кодового режима местоопределения с ростом расстояния между станциями описано использование распределённой сети станций (CACS, Canadian Active Control System), по которой также вычислялась и ЭВИ повышенной точности. Использование уточнённой в режиме постобработки ЭВИ описано также в статье [18], где проводится сравнение точности местоопределения в абсолютном и дифференциальном режимах при использовании измерений псевдодальностей для потребителя с высокой динамикой (самолёт).

Одно из самых ранних упоминаний самого принципа использования уточнённой ЭВИ для местоопределения в абсолютном режиме описано в статье [19] 1976 года, когда ГНСС в мире отсутствовали. Режим определения абсолютных координат потребителя при использовании уточнённой ЭВИ в статье [19] называется point positioning и реализуется в спутниковой системе местоопределения с использованием эффекта Доплера (система TRANSIT, предшественница ГНСС Navstar или GPS).

Если к моменту публикации [16] важнейшая роль уточнённой ЭВИ в повышении точности местоопределения в абсолютном режиме многими в ГНСС-сообществе подвергалась сомнению, то после выхода работы [20] использование уточнённой ЭВИ, вычисленной по сети станций, в режиме PPP при постобработке стало общепризнанным подходом. В [20] были разработаны и описаны основные принципы уточнения ЭВИ по сети станций, а также методы компенсации потребителем ряда систематических смещений, необходимых для реализации высокоточного местоопределения. Таким образом, были сформулированы фундаментальные условия достижения высокой точности определения абсолютных координат потребителя – использование высокоточной ЭВИ, компенсация ряда систематических смещений в измерениях и использование псевдофазовых измерений. Режим высокоточного местоопределения в абсолютном режиме стал традиционным подходом, используемым повсеместно наряду с относительными методами.

1.2.2 Стандартный режим высокоточного абсолютного местоопределения (Float PPP)

Метод высокоточного местоопределения в абсолютном режиме (PPP) [20] получил широкое распространение и начал использоваться наряду с относительными методами местоопределения. Преимуществами технологии PPP было отсутствие необходимости использовать два навигационных приёмника и обеспечивать канал связи между ними. С появлением высокоточной ЭВИ от службы IGS (IGS Precise Products) точность определения абсолютных координат потребителя составляла дециметры и даже сантиметры, в зависимости от уровня точности используемой ЭВИ и времени обработки измерений [21]. Впервые предложенный в [16] метод использования ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей и псевдофаз стал применяться повсеместно и получил название традиционной модели измерений (traditional PPP model). Ещё одной известной моделью измерений для PPP стала разработанная в Университете Калгари модель P1-P2-CP (UofC model, University of Calgary model) [22], [23].

Основным недостатком традиционной модели измерений и местоопределения на её основе является длительный период сходимости - сантиметровый уровень точности достигается через несколько часов обработки измерений [24]. Известно, что высокая точность одномоментных относительных местоопределений, достигаемая в методах RTK, связана с фактом учёта целочисленной природы неоднозначности псевдофазовых измерений [16, 25]. Однако в традиционной модели измерений и в получившем широкое распространение основанном на ней методе Float PPP [26] псевдофазовые неоднозначности спутников оцениваются как действительные величины, поскольку в традиционной математической модели измерений псевдофазы присутствуют немоделируемые аппаратурные смещения, которые в процессе оценивания не удаётся отделить от целых значений неоднозначности. Строгие методы учёта немоделируемых смещений в безразностных измерениях (соответствующих абсолютному режиму местоопределения) до некоторого момента отсутствовали.

В исторической ретроспективе можно выделить следующие основные научные центры, которые внесли весомый вклад в появление, становление и развитие методов высокоточного местоопределения в том их виде, в котором они существуют в настоящее время: GFZ (German Research Centre for Geosciences, Германский центр исследования Земли), CNES (National Centre for Space Studies, Национальный центр космических исследований, Франция), NRCan (Natural Resources Canada, Министерство природных ресурсов Канады), University of Calgary (Canada).

1.2.3 Предпосылки появления методов разрешения целочисленной неоднозначности при высокоточном местоопределении в абсолютном режиме

Несмотря на повышение точности и доступности ЭВИ период сходимости до достижения сантиметровой точности при местоопределении в режиме Float PPP оставался неприемлемо большим [24, 26]. Для его уменьшения разрабатывались новые методы и подходы разделения немоделируемых смещений и целочисленных неоднозначностей с целью их разрешения и, как следствие, сокращения периода сходимости для достижения сантиметровой точности.

В [23] автором была предложена альтернативная традиционной модель P1-P2-CP для изучения целочисленных свойств неоднозначностей, а также так называемый частичный метод псевдоразрешения (partial pseudo—fixing method) для применения процедур разрешения неоднозначности в методах PPP. Модель P1-P2-CP позволяла достичь определённых результатов, но целочисленное решение всё же часто не было верным. Причиной этого в [23] были названы исходные частичные фазовые смещения (initial fractional phase bias), которые теоретически так и не были учтены в модели P1-P2-CP.

В 2006 году было предложено использовать калибровку исходных частичных фазовых смещений [27]. Для исследования влияния калибровки авторами [27] (University of Calgary) моделировались нулевые исходные фазовые смещения (initial phase bias) спутников и приёмников, а также нулевые исходные фазовые смещения спутников и ненулевые исходные фазовые смещения приёмников. Результаты моделирования показали, что целочисленное разрешение при высокоточном местоопределении в абсолютном режиме принципиально возможно, и ошибки местоопределения при этом снижаются. Однако авторы [27] не предложили методов фазовой калибровки реальных навигационных приёмников.

Те же авторы в [28] исследовали амплитудные значения и стабильность фазовых смещений спутников и приёмника (phase bias). Было обнаружено, что первые разности фазовых смещений между приёмниками (single-differenced between receivers phase bias, RRSD phase bias) были нестабильны, тогда как первые межспутниковые разности фазовых смещений (single-differenced between satellites phase bias, SSSD phase bias) были достаточно стабильными в течение нескольких дней. Был сделан вывод о том, что использование первых межспутниковых разностей фазовых смещений позволяют реализовать целочисленное разрешение неоднозначности в задаче PPP в случае калибровки указанных смещений. Однако авторы [28] не предложили методов такой калибровки.

В 2006 году авторы из GFZ также обнаружили стабильность первых межспутниковых разностей некалиброванных фазовых задержек на разностной шкале (частоте) GPS (wide-lane single-differenced between satellites, SDBS, un-calibrated phase delays, UPDs) и нестабильность первых межспутниковых разностей некалиброванных фазовых задержек на суммарной шкале (частоте) GPS (narrow-lane SDBS un-calibrated phase delays, UPDs) [29]. Было выявлено, что 98% неоднозначностей на разностной шкале (wide-lane ambiguities) и 94% неоднозначностей на суммарной шкале (narrow-lane ambiguities) могут быть зафиксированы (успешно целочисленно разрешены) при наличии описанных задержек wide-lane SDBS UPD и narrow-lane SDBS UPD. Описанный метод позднее был исследован более глубоко в [30], было продемонстрировано повышение точности горизонтальной компоненты на 30%. Следует отметить, что в [30] UPD задержки считаются стабильными во времени, их межспутниковые разности оцениваются по опорной сети станций для суммарной (narrow-lane) и разностной (wide-lane) шкал измерений, после чего отправляются потребителю.

В [31] авторами из CNES также проводится исследование свойств аппаратурных смещений (hardware biases) спутников и приёмника, которые не позволяют оценивать неоднозначности как целые числа. В частности, анализируются аппаратурные смещения на разностной шкале (wide-lane fractional parts).

Помимо рассмотренных выше исследований немоделируемых смещений в измерениях необходимо отметить также следующие причины, оказавшие своё влияние на достижение возможности целочисленного разрешения неоднозначности псевдофазы в абсолютных методах местоопределения:

1. Развитие комплексирования различных ГНСС в задачах местоопределения. Результаты экспериментов по совместному использованию систем ГЛОНАСС и GPS [32], а также

GALILEO и GPS [33] показали эффективность и целесообразность одновременного использования измерений различных ГНСС.

2. Повышение точности, оперативности и доступности высокоточной ЭВИ благодаря увеличению числа аналитических центров Международной службы IGS. Сравнив [21] и [26], [34] можно проследить постепенное развитие качества высокоточной ЭВИ и повышение точности местоопределения в абсолютном режиме.
3. Повышение доступности атмосферных данных в режиме реального времени в глобальных и широкозонных системах дифференциальной коррекции. Как показано далее в разделе 4.3, использование априорной информации о тропосферной и ионосферной задержке сигнала существенно снижает период сходимости.
4. Детальное изучение составляющих бюджета погрешностей при местоопределении в абсолютном режиме в ГНСС.

1.2.4 Обзор методов высокоточного местоопределения в абсолютном режиме с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений (Integer PPP)

В 2006-2008 годах стали появляться публикации о реализации режима высокоточного местоопределения в ГНСС с использованием разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений. В настоящее время известны различные аббревиатуры и сокращения для обозначения методов, в которых для определения высокоточных абсолютных координат потребителя используется факт целочисленности неоднозначностей в измерениях псевдофазы, т.е. тем или иным способом реализуется процедура разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений: Integer PPP, PPP-AR (ambiguity resolution), PPP-RTK, fixed solution.

В [35] (University of Nottingham) описан несколько усовершенствованный метод, приведённый в [30], при этом вместо термина некалиброванные фазовые задержки UPD используется термин некалиброванные аппаратурные задержки (UHD, uncalibrated hardware delays). Далее в работе [36] был проведён анализ длительности периода сходимости, необходимого для достижения сантиметрового уровня точности, а также определена длительность периода сходимости, необходимого для надёжного целочисленного разрешения и сантиметровой точности. Выявлено, что для достижения указанных характеристик достаточно обработки трёхчасового файла измерений.

Были описаны также и другие методы, во многом схожие с рассмотренными ранее. Например, в методе, описанном в [37] (компания GPS Solutions), использовались модифицированные спутниковые временные коррекции (modified satellite clock corrections, MSCCs), которые физически очень похожи на некалиброванные фазовые задержки UPDs, определённые в [30]. Метод [37] основан на расширении сетевого метода Network RTK применительно к абсолютному местоопределению. В лаборатории JPL был разработан метод [38], в котором потребителю для реализации местоопределения с разрешением целочисленной неоднозначности необходимо использовать оценённые по сети станций фазовые смещения и абсолютные значения действительных неоднозначностей на разностной шкале, тогда как в [30] и [35] потребителю предлагалось использовать межспутниковые разности некалиброванных фазовых задержек на разностной шкале UPD и межспутниковые разности некалиброванных аппаратурных задержек UHD.

Описанные выше методы [27], [30], [35], [37], [38] можно отнести к первому классу методов высокоточного местоопределения, в которых целочисленное разрешение неоднозначности осуществляется с использованием коррекций действительных неоднозначностей (ambiguity corrections) [39]. В этом классе методов в решении потребителя целочисленность псевдофазовых неоднозначностей восстанавливается потребителем после применения поступающих извне коррекций оценок действительных неоднозначностей, полученным потребителем в результате обработки. Однако в разных методах первого класса для обозначения поступающих потребителю извне коррекций неоднозначностей используются различные термины: исходные частичные фазовые смещения (initial fractional phase biases) [27], некалиброванные фазовые задержки (un-calibrated phase delay, UPD) [30], некалиброванные аппаратурные задержки (uncalibrated hardware delays, UHD) [35], модифицированные спутниковые временные коррекции (modified satellite clock corrections, MSCCs) [37], неоднозначности на разностной шкале и фазовые смещения (phase biases and wide-lanes) [38]. Вычисление указанных коррекций неоднозначностей осуществляется в сетевом решении.

Второй класс методов, описанных в литературе относительно задачи высокоточного местоопределения в абсолютном режиме с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений, был в [40] (компания Geo++) определён как PPP-RTK методы. Методы PPP-RTK отличаются от других Integer PPP методов тем, что имеют локальные или региональные ограничения в соответствии с используемыми сетями станций измерения, т.е. не пригодны для глобального использования. Таким образом, метод PPP-RTK имеет признаки как местоопределения в режиме PPP, так и сетевого метода Network RTK [6]. Характерным свойством методов PPP-RTK является использование потребителем атмосферных коррекций, вычисленных в пределах локальной или региональной сети [41-43]. В статье [42] (Curtin University) также описан метод PPP-RTK, в рамках которого реализовано местоопределение с разрешением неоднозначности псевдофазы по одночастотным измерениям. При этом по локальной сети станций оцениваются следующие параметры: разделённые смещения показаний часов спутников (термин поясняется далее), значения ионосферных задержек по спутникам, интерполированных для грубого априорного местоположения потребителя. Указанные параметры в режиме квазиреального времени доставляются потребителю, позволяя реализовать местоопределение в абсолютном режиме с использованием разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений. Важной особенностью работы [42] является использование в том числе одночастотных измерений кода и псевдофазы, сформированных относительно дешёвыми непрофессиональными навигационными приёмниками (категория low-grade-mass-market receiver). В [42] проводится сравнение эффективности предлагаемого метода при работе с одночастотными дешёвым непрофессиональным навигационным приёмником и профессиональным навигационным приёмником (категория high-grade-mass-market receiver). Следует отметить, однако, что результаты в работе [42] получены при ряде допущений. В статье осуществляется независимая оценка параметров на каждую эпоху, т.к. режим классической калмановской фильтрации при использовании дешёвых одночастотных приёмников ввиду частых срывов слежения за фазой несущей практически нереализуем. При этом тропосферные задержки станций локальной сети принимаются одинаковыми, что справедливо только при удалении станций не более чем на несколько десятков километров. Также в [42] отмечается, что в течение первых 5 минут обработки измерений потребителем разрешение неоднозначности не используется, а период сходимости для вновь появившегося спутника составляет порядка 25 минут. Для устранения сингулярности в исходных системах уравнений в [42] используется подход, называемый в англоязычной литературе S-basis [44, 45], основанный на формировании оцениваемых комбинаций из исходных оцениваемых параметров и уменьшении общего числа оцениваемых параметров (более подробно алгебраические методы решения систем линейных уравнений в ГНСС, лежащие в основе S-basis описаны в разделе 3.3). Важно подчеркнуть, что описанное в [42] местоопределение с использованием разрешения целочисленной неоднозначности реализуемо только в пределах используемой локальной сети станций. Тогда как сам по себе подход PPP, в принципе, предполагает возможность местоопределения потребителя в любой точке земного шара при условии наличия доступа к высокоточной ЭВИ, состав которой может быть различен. В этом проявляется принципиальная разница местоопределения в режимах PPP-RTK и PPP (Float PPP, Integer PPP).

Третий класс методов можно охарактеризовать использованием так называемых целочисленных часов, которые включают в себя целочисленные фазовые часы (integer phase clocks, CNES) [46] и так называемые разделённые часы (decoupled clocks, NRCan) [47]. В двух указанных методах данного класса осуществляется непосредственное оценивание неоднозначностей целыми числами.

В 2007 году авторы из CNES опубликовали работу [46], в которой представили двухэтапный алгоритм, использующий ионосферосвободные кодовые и псевдофазовые комбинации измерений и позволяющий оценить целочисленные неоднозначности псевдофазовых измерений на исходных частотах системы GPS. На первом этапе алгоритма по сети станций производится разрешение неоднозначности на разностной шкале (wide-lane ambiguity, разница неоднозначностей на несущих частотах GPS f_1^G и f_2^G , эквивалентная длина волны 0.86 м). При этом в рассмотрение вводятся частичные задержки разностной шкалы (fractional widelane delays) для спутников и приёмника. На втором этапе оценённые неоднозначности разностной шкалы (wide-lane ambiguity) используются в фильтрационной процедуре оценивания, основанной на обработке ионосферосвободной линейной комбинации псевдофазовых измерений приёмника потребителя. В процессе фильтрации оценивается действительная оценка неоднозначности на частоте f_1^G , связанная с эквивалентной длиной волны на суммарной шкале (narrowlane, сумма неоднозначностей на несущих частотах GPS f_1^G и f_2^G с эквивалентной длиной волны около 0.11 м), которая после достижения сходимости процесса фильтрации округляется до ближайшего целого. Позднее была опубликована работа [48] с описанием применения данного алгоритма к задаче определения спутниковых орбит. В 2010 году те же авторы опубликовали работу [49], где использовался описанный ранее алгоритм, но были приведены дополнительные стандартизованные структуры представления необходимых данных для работы алгоритма в режиме реального времени, а также демонстрировались результаты его применения для статического и динамического потребителя. В [49] величины, определённые в [46] как частичные задержки разностной шкалы (fractional widelane delays), называются задержками разностной шкалы (widelane delays). Достигаемая горизонтальная точность местоопределения составляет порядка 2 см. В настоящее время доступен демонстрационный проект, использующий описанные алгоритмы и работающий в реальном времени [50].

Альтернативный подход, также относящийся к третьему классу методов (использование целочисленных часов), был разработан в NRCan (Natural Resources Canada, Министерство природных ресурсов Канады). Осознание того, что наличие аппаратурных задержек на спутнике и в приёмнике потребителя является основной причиной, затрудняющей использование целочисленной природы неоднозначностей псевдофазы, привело к рождению нового подхода в высокоточном местоопределении, а именно – к разделению показаний часов спутника и приёмника потребителя в зависимости от типа измерения. В 2008 году в статье [47] была представлена модель измерений GPS с разделёнными временными поправками спутников и приёмника (decoupled clock model, далее обозначается как модель разделённых часов или модель с разделёнными часами), в рамках которой использовалось разделение показаний часов спутников и показаний часов приёмника потребителя в соответствии с типом и частотой используемых измерений. В модели предлагалось использовать псевдофазовые и кодовые ионосферосвободные комбинации (А.1), (А.2), а также ионосферосвободную кодово-фазовую комбинацию Мельбурна-Вуббена (А.5). В рамках данной модели в [47] было продемонстрировано, что в режиме Float PPP оценки неоднозначностей псевдофазовых измерений смещаются на величину комбинации аппаратурных задержек. В частности, в [47] было показано, что в указанную комбинацию аппаратурных задержек входят не только фазовые смещения, но также и кодовые. Это является одной из основных причин длительного периода сходимости режима Float PPP при использовании ставшего традиционным подхода, основанного на оценивании неоднозначностей псевдофазы действительным числом (раздел 2.3). В [47] проведён подробный анализ свойств разделённых часов предложенной к обработке модели измерений. В [51] кратко описан процесс вычисления разделённых поправок к показаниям спутниковых часов по глобальной сети станций измерений, а местоопределение анализируется для часовых файлов измерений. В результате, корректное целочисленное решение получается в 90% случаев, достигается горизонтальная точность местоопределения около 2 см. В [51] отмечено, что горизонтальная точность местоопределения существенно повышается с использованием разрешения неоднозначностей, тогда как высотная компонента практически не меняется. В [52] также отмечается, что высотная компонента местоопределения не подвержена изменениям при использовании разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений, тогда как для горизонтальной точности местоопределения в среднем наблюдается повышение на 70%.

Таким образом, в отличие от стандартного режима высокоточного местоопределения, где всем измерениям (разного типа и разного частотного диапазона) по данному спутнику соответствует одно значение смещения показаний его часов и разные аппаратурные смещения, в модели разделённых часов каждому измерению соответствует своё значение смещения показаний часов спутника и приёмника, включающее в себя аппаратурные смещения. Иными словами, в рамках разделённой модели часов, описанной в [47], для реализации местоопределения потребителю необходимо получить доступ к трём различным коррекциям по каждому отслеживаемому спутнику, а не к одной, как ранее в традиционной модели измерений. В [53] приведён подробный анализ поправок к показаниям часов спутников разного типа из модели разделённых часов.

Следует отметить, что сама идея разделения показаний часов в зависимости от типа и частоты измерений высказывалась и раньше. Например, в [54] и [55] модели измерений с разделёнными часами уже приводились, но использовались они в дальнейшем для относительных местоопределений, что позволяло избавиться от дефицита ранга. В [47] же разделение часов впервые было описано в применении к безразностным измерениям, т.е. к режиму высокоточного местоопределения в абсолютном режиме.

В Таблице 1 приводятся рассмотренные методы с разделением их на три различных класса.

Таблица 1. Методы местоопределения в режиме Integer PPP

Название класса методов	Автор\соавтор метода (место разработки), термины
Методы коррекций неоднозначностей	Ge (GFZ), UPD
	Wang, Gao (Universty of Calgary), initial phase bias, phase bias
	Geng (University of Nottingham), UHD
	Bertiger (JPL), phase biases and widelanes
Методы PPP-RTK	Wubbena (Geo++), group delays for codes and phases
	Mervart (GPS Solutions), MSCC
	Odijk, Teunissen (Delft University, Curtin University), phase bias
Методы целочисленных часов	Collins (NRCan), equipment delays, decoupled clocks
	Mercier, Laurichesse (CNES), widelane delays, integer phase clocks

Среди всех упомянутые ранее методов целочисленного разрешения неоднозначности псевдофазы при высокоточном местоопределении можно выделить три наиболее известных направления (в скобках указаны фамилии основных авторов, а также агентства, компании или институты, чей метод относится к данному направлению): методы, использующие первые межспутниковые разности (Ge, GFZ; Geng, University of Nottingham); методы, использующие целочисленные часы (Laurichesse, Mercier, CNES), методы, использующие разделённые часы (Collins, NRCan).

При ещё более общем рассмотрении все указанные выше методы можно разделить на две группы:

1. Методы, в которых аппаратурные смещения оцениваются в сетевом решении отдельно от целочисленных неоднозначностей (FCB, fractional-cycle biases в [55]), а потребитель затем корректирует оценённые неоднозначности FCB-поправками от сети, восстанавливая там самым целочисленное свойство неоднозначностей ([27], [30], [35], [37], [38] и др.). В [55] данные методы называются FCB-based methods.
2. Методы, в которых используемые коррекции к показаниям спутниковых часов в модели измерений таковы, что аппаратурные смещения отделены от целочисленных

неоднозначностей – [42], [49], [47], [56]. Для данной группы методов в [55] вводится термин IRC (Integer recovery clock) и IRC-based methods.

В Таблице 2 приводится указанное разделение рассмотренных методов на два больших группы.

Таблица 2. Классификация методов местоопределения в режиме Integer PPP

Название класса методов	Автор\соавтор метода (место разработки), термины
Методы корректирующих поправок (FCB-based methods)	Ge (GFZ), UPD
	Wang, Gao (Universty of Calgary), initial phase bias, phase bias
	Geng (University of Nottingham), UHD
	Bertiger (JPL), phase biases and widelanes
	Mervart (GPS Solutions), MSCC
	Wubbena (Geo++), group delays for codes and phases
	Odijk, Teunissen (Delft University, Curtin University), phase bias
Методы корректирующих часов (IRC-based methods)	Collins (NRCan), equipment delays, decoupled clocks
	Mercier, Laurichesse (CNES), widelane delays, integer phase clocks

В [55] показана эквивалентность методов из двух различных классов.

Реализация целочисленного разрешения неоднозначностей псевдофазовых измерений применительно к ГНСС ГЛОНАСС осложняется использованием в системе частотного разделения каналов [57]. С появлением модели разделённых часов и развитием её применения при обработке измерений системы GPS появились подходы к реализации целочисленного разрешения неоднозначностей псевдофазовых измерений системы ГЛОНАСС [58], [59].

В [39], [60] и [61] отмечается, что при использовании различных методов реализации целочисленного разрешения в PPP основной сложностью являются алгоритмы оценки достоверности того или иного целочисленного решения (fixed solution). Широко используемые и хорошо зарекомендовавшие себя в RTK методы оценки достоверности того или иного целочисленного набора неоднозначностей псевдофазы (например, использование контрастного отношения, ratio test) не могут быть напрямую использованы в Integer PPP. В [61] описана альтернативный метод оценки надёжности целочисленного решения - fixed failure rate ratio test. Вопрос достоверности целочисленного решения при работе в режиме Integer PPP более подробно рассмотрен далее в подразделе 4.2.3.

1.2.5 Использование атмосферных ограничений

Для методов PPP-RTK [40]-[42], [43] характерен меньший период сходимости по сравнению с другими методами Integer PPP [49, 56]. Это достигается за счёт использования атмосферных данных, доступных внутри сети. В статье [62] автором модели разделённых часов [47] представлена расширенная модель разделённых часов (подробно описана в подразделе 3.2.2), в рамках которой кодово-фазовая комбинация измерений Мельбурна-Вуббена (А.5) расщепляется на кодовую и фазовую составляющие с целью добавления к числу оцениваемых параметров смещённых наклонных ионосферных задержек. Стремление оценивать смещённые наклонные ионосферные задержки связано с их высокой стабильностью во времени. В случае срыва слежения за фазой несущей в приёмнике или кратковременного отсутствия измерений вследствие затенения приёмника фильтрационный процесс не требуется начинать с начала – использование прогнозных значений ионосферных параметров, вычисленных путём интерполирования полученных ранее оценок, позволяет существенно сократить период сходимости после срыва слежения (re-initialization). Априорная информация о состоянии ионосферы, доступная в фильтре в виде прогнозных значений смещённых наклонных ионосферных задержек, в работе [62] называется ионосферными ограничениями (ionospheric constraints). В работах [62], [63] показано, что применение ионосферных ограничений при использовании разрешения целочисленной неоднозначности в модели измерений с разделёнными часами существенно сокращает период повторной сходимости.

В работе [64] рассматривается режим местоопределения потребителя в некоторой локальной сети с другими потребителями, при котором ему доступны оценки наклонной ионосферы от этих потребителей, расположенных на удалении нескольких километров. Таким образом, между потребителями сети предполагается возможность обмена ионосферными оценками, которые используются как внешняя дополнительная информация (ионосферные ограничения) для ускорения периода сходимости решения при использовании разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений. Данный вариант работы имеет много общего с вариантом местоопределения PPP-RTK, описанным, например, в статье [42].

В [65] автором данной диссертации было проведено тестирование алгоритмов использования ионосферных ограничений. Также было предложено использовать в качестве ограничений дополнительно информацию о тропосферной задержке и вместо термина “ионосферные ограничения” использовать более общий термин “атмосферные ограничения”.

1.2.6 Критика известных методов Integer PPP

Следует отметить отсутствие единой терминологии в описанных ранее методах высокоточного местоопределения с использованием разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений. Так или иначе, во всех указанных выше работах авторами отмечается, что основной причиной, препятствующей оценке псевдофазовых неоднозначностей целым числом, являются аппаратурные задержки/смещения на спутнике и в приёмнике потребителя, называемые различными терминами: initial fractional phase bias [23], initial phase bias [27], phase bias [28], un-calibrated phase delays (UPD) [29, 30], wide-lane fractional parts [31], uncalibrated hardware delays (UHD) [35, 36], modified satellite clock corrections (MSCC) [37], phase biases and wide-lanes [38], phase bias [42], fractional widelane delays [46], widelane delays [49], code and phase hardware biases [47], hardware biases [56], hardware delays [62], equipment delays [63, 64].

В публикациях [46] и [49] можно отметить отсутствие какого-либо теоретического обоснования вычислительных процедур и эмпирический характер описанного алгоритма. Также следует отметить, что в [46] и [49] принимаются допущения о стабильности (постоянстве) задержек разностной шкалы на интервалах времени одного дня. Авторами в [46] и [48] вводится понятие целочисленных часов (integer clocks), а в [49] – понятие целочисленных фазовых часов (integer phase clocks) без какого бы то ни было объяснения их физической природы и причин выделения таких часов.

Для устранения сингулярности в исходных системах уравнений в [42] и [63] используется подход, называемый в англоязычной литературе S-basis [44, 45], основанный на использовании комбинаций исходных оцениваемых параметров (более подробно алгебраические методы решения систем линейных уравнений в ГНСС, лежащие в основе S-basis описаны в разделе 3.3). Однако в работе [44] подход S-basis описан лишь применительно к геодезическим сетям, тогда как ГНСС сетях необходимо учитывать особые свойства систем уравнений ГНСС, отсутствующие в геодезии. В работе [45] указанные свойства систем уравнений ГНСС косвенно используются при разделении оцениваемых параметров на геометрические и негеометрические, но никакого анализа или пояснения причин такого разделения не приводится (указанные свойства систем уравнений ГНСС подробно разобраны в разделе 3.3).

Детали алгебраических методов преодоления дефицита ранга в модели разделённых часов в [47], [51], [56], [62], [63], а также какое бы то ни было их теоретическое пояснение также практически отсутствуют.

В [62, 63] описана расширенная модель разделённых часов, в которой комбинация Мельбурна-Вуббена (А.5) расщепляется на отдельные фазовое и кодовое измерения, которые содержат в своём составе смещённую ионосферную задержку. Непосредственная оценка смещённых ионосферных задержек и применение ионосферных ограничений повышают качество разрешения целочисленной неоднозначности, а также снижают период сходимости после разрывов в измерениях псевдофазы либо их кратковременного отсутствия [62, 63]. При этом в такой расширенной модели с разделёнными часами по-прежнему используются ионосферосвободные кодовая и псевдофазовая комбинации. Однако образование ионосферосвободных линейных комбинаций измерений в модели разделённых часов и её расширенной версии имеет ряд негативных последствий. Во-первых, длина волны λ_3 , соответствующая ионосферосвободной комбинации псевдофазовых измерений (А.2), составляет всего около 6 мм, что существенно меньше длин волн λ_1 и λ_2 несущих колебаний на исходных частотах f_1 и f_2 (около 19 и 24 см соответственно). Процедура разрешения целочисленных неоднозначностей псевдофазы при этом не может быть реализована. По этой причине в [47, 51, 56, 62, 63] осуществляются дополнительные целочисленные преобразования, позволяющие осуществить целочисленное разрешение). Во-вторых, можно отметить некоторую нелогичность в расширенном варианте модели с разделёнными часами: с одной стороны, в обработке используются ионосферосвободные комбинации измерений, с другой стороны - производится непосредственное оценивание смещённых ионосферных задержек в комбинациях с применением ионосферных ограничений.

Более физически ясным и, по мнению автора данной работы, более перспективным из всех рассмотренных ранее, является метод, основанный на разделённой модели часов (decoupled clock model) [47, 63].

1.3 Приложения технологии высокоточного местоопределения

1.3.1 Обзор сервисов высокоточного местоопределения

Упоминавшиеся выше системы широкозонной дифференциальной коррекции (WAAS, EGNOS, СДКМ) являются примерами сервиса SBAS, доступного на бесплатной основе. Известны также полностью коммерческие варианты систем SBAS, имеющих практически глобальное покрытие – например, OmniSTAR, VERIPOS. Указанные сервисы широко используются для повышения точности местоопределения в прибрежных областях и в нефтегазовой отрасли. В сервисе OmniSTAR передаются дифференциальные коррекции в L-диапазоне частот близком к частотам GPS, что позволяет использовать для приёма спутниковых сигналов в том числе и одночастотные антенны. Сервис доступен практически глобально, за исключением полярных областей. Доступны следующие уровни точности абсолютного местоопределения [66]:

VBS (одночастотный режим GPS, коррекции доступны в реальном времени через спутниковый канал, горизонтальная точность местоопределения около 1 метра),

XP (двухчастотный режим GPS, горизонтальная точность местоопределения около 15 см, коррекции доступны в реальном времени через спутниковый канал),

G2 (двухчастотный режим ГЛОНАСС и GPS, точность местоопределения около 10 см),

HP (двухчастотный режим GPS, точность местоопределения 6-10 см, коррекции доступны в реальном времени).

Компанией Trimble также предоставляется ряд коммерческих сервисов высокоточного местоопределения, не требующих от потребителя использования измерений от дополнительных станций [67]:

CenterPoint RTX – Standard Initialization: режим PPP (WADGNSS, GDNSS), горизонтальная точность местоопределения 3.8 см доступна после периода сходимости 30 минут, коррекции доступны потребителю через спутниковый канал или канал сотовой связи, доступ к коррекциям практически в любой точке земного шара.

CenterPoint RTX 1 Minute Initialization: режим WADGNSS, горизонтальная точность местоопределения 3.8 см доступна после периода сходимости 1 минута, коррекции доступны потребителю через спутник в диапазоне L-band, сервис доступен на территории США в штатах Небраска, Айова, Иллинойс.

CenterPoint RTX-Post-Processing: режим PPP в постобработке, бесплатный сервис, горизонтальная точность около 2 см доступна глобально в режиме постобработки, файл измерений для обработки загружается на сайт сервиса.

RangePoint RTX: режим PPP (WADGNSS, GDNSS), горизонтальная точность 15-50 см доступна после периода сходимости 1-5 минут, коррекции доступны потребителю через спутник, сервис доступен практически по всему миру.

CenterPoint VRS (**Trimble VRS Now**): режим Network RTK, сантиметровый уровень точности местоопределения, доступный по запросу в режиме реального времени внутри сети опорных станций (сервис доступен в нескольких штатах США и на части территории Европы).

Trimble VRS Now Extended Coverage (TEC): режим Network RTK, точность местоопределения 5 см и выше после периода сходимости менее 1 минуты, сервис доступен в центральной и восточной Европе внутри сети опорных станций.

Ярким примером рынка предоставления услуг сервиса местоопределения в режиме Network RTK может служить южная часть провинции Онтарио в Канаде. На данной территории сервис местоопределения в режиме Network RTK предоставляется следующими провайдерами: компания Leica (сеть станций SmartNet, точность абсолютного местоопределения около 2 см) [68], компания Topcon (сеть станций TopNET) [69], компания Cansel (сеть Can-Net, горизонтальная точность местоопределения около 1 см, вертикальная точность местоопределения – около 2 см) [70]. В [5] проведён подробный сравнительный анализ трёх Network RTK сетей из южной части провинции Онтарио.

Сервис высокоточного местоопределения TERRASTAR [71] основан на сети станций одноимённой компании, включающей 80 станций, 55 из которых отслеживают не только спутники GPS, но и ГЛОНАСС. Сервис предоставляется в двух вариантах:

TERRASTAR-D: режим PPP, сервис предоставляется глобально в двухчастотном режиме, коррекции орбит и смещений показаний часов спутников сообщаются как для спутников ГЛОНАСС, так и для GPS, горизонтальная точность местоопределения в абсолютном режиме 10см и менее, вертикальная точность местоопределения в абсолютном режиме 20 см.

TERRASTAR-M: режим WADGNSS (GDNSS), сервис доступен глобально, но только в окрестностях опорных станций, сообщаются дифференциальные одночастотные коррекции для спутников GPS и ГЛОНАСС, точность местоопределения в абсолютном режиме 1 метр и менее.

Для доставки потребителю коррекций используется 7 геостационарных спутников, причём в любой точке зоны покрытия доступны коррекции как минимум от двух спутников (рис. 1.2). В обоих вариантах сервиса используются кодовые и псевдофазовые измерения. Период сходимости (время инициализации) составляет порядка 20 минут.

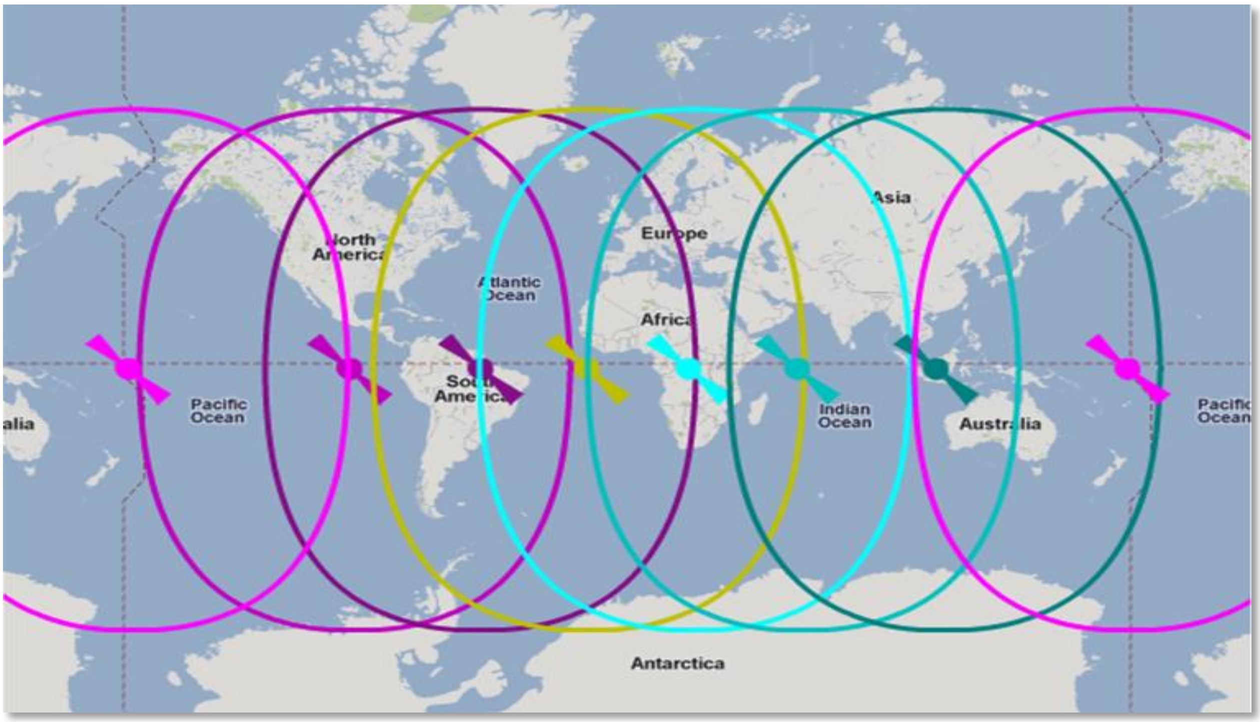

Рис. 1.2. Зона покрытия сервисов TERRASTAR-D (источник рисунка: [72])

Помимо упомянутых выше существует множество других сервисов высокоточного местоопределения (NavCom Global StarFire Service, Fugro's Precise (Point) Positioning Service и др.).

1.3.2 Обзор приложений технологии высокоточного местоопределения в абсолютном режиме

Сегодня при широком распространении методов высокоточного относительного местоопределения (RTK, Network RTK) в ряде случаев необходимость использования для их реализации дополнительного оборудования помимо приёмника потребителя и организация канала связи делает относительное местоопределение чрезмерно дорогим и нецелесообразным. При геодезических работах в труднодоступных и удалённых районах и осуществлении высокоточной привязки точек местности стационарные точки с известными координатами могут отсутствовать в принципе.

Отрасли использования технологий высокоточного местоопределения в абсолютном режиме в значительной степени пересекаются с приложениями относительных методов высокоточных местоопределений (режимы RTK, Network RTK). Методы PPP при этом широко применяются в регионах с низкой плотностью опорных станций либо в труднодоступных и удалённых областях, где отсутствует возможность установки базовой станции (RTK) или принятия данных от сети опорных станций (Network RTK).

Местоопределение в абсолютном режиме используется в следующих отраслях (большая часть приложений имеет устоявшиеся наименования на английском языке, которые приводятся в скобках):

Прибрежные работы (coastal operations, offshore positioning): подводная выемка грунта, прибрежная топографическая съёмка местности (inshore survey), прибрежная гидрография (inshore hydrography), драгирование (dredging), топографическая съёмка окружающей среды (environmental survey), управление баржами (barge quidance).

Строительство и топографическая съёмка, ГИС (construction and survey, GIS - геоинформационные системы): разметка границ (boundary mapping), разметка природных ресурсов, топографическая съёмка при ирригации и орошениях (irrigation surveys), топографическая съёмка (survey), прокладка кабелей (cable route surveys), планирование местности (landscape planning), деформация сооружений (deformation monitoring), изучение движения тектонических плит (plate tectonics studies), предупреждение чрезвычайных ситуаций (disaster monitoring).

Воздушные работы (aerial operations): топографическая съёмка местности с воздуха (aerial survey), фотограмметрия, воздушная геофизика (airborne geophysics), полётные испытания (avionics and flight testing), орошение с воздуха (crop and forestry spraying), определение орбит низкоорбитальных спутников (LEO orbit determination).

Поиск и разведка месторождений нефти и газа (Oil and gas exploration).

Сельское и лесное хозяйство (precision agriculture and forestry): орошение (spraying), обработка почвы (tillage), уборка урожая (harvesting), разметка урожая (yield mapping), взятие почвенных образцов (soil sampling), взятие почвенных образцов (drainage planning).

1.3.3 Высокоточное местоопределение морских буровых платформ

Под буровыми платформами (морскими буровыми установками) понимается набор оборудования для осуществления бурения нефтяных и газовых скважин в зоне шельфа моря или океана. Примеры морских буровых платформ изображены на рис. 1.3, рис. 1.4.

Рис. 1.3. Полупогружная морская буровая платформа (источник фото: [73]).

Рис. 1.4. Полупогружная морская буровая платформа Doo Sung (источник фото: [74]).

Известны различные типы морских буровых платформ (буровое судно, полупогружная буровая платформа, стационарная буровая платформа и др.). Если стационарная буровая платформа тем или иным образом жёстко крепится к морскому дну, то полупогружная буровая платформа является подвижной и постоянно подвержена волновому воздействию (рис. 1.3, рис. 1.4). Полупогружные буровые платформы не поднимаются над водой, а фактически плавают над местом бурения, погруженные в воду на значительную глубину и удерживаемые тяжёлыми якорями. Далее рассматривается именной такой тип буровых платформ.

Специфика условий работы морской буровой платформы такова, что возможность использования относительных методов местоопределения в открытом море зачастую отсутствует. При этом задача мониторинга местоположения буровой станции является критически важной для её функционирования. Вследствие ветра и волн положение буровой платформы постоянно меняется. В решениях данной задачи при использовании ГНСС буровые платформы оборудуются навигационными приёмниками, которые в режиме реального времени решают задачу высокоточного местоопределения по сигналам ГНСС ГЛОНАСС и GPS.

В [75] описано использование методов Integer PPP для местоопределения морских буровых платформ в реальном времени.

1.3.4 Система предупреждения цунами

В последние горы многие исследователи анализируют возможности применения высокоточного местоопределения в ГНСС для систем предупреждения цунами (tsunami warning system) и мониторинга сейсмической активности [77-80]. Начиная с 2005 года в одном из сейсмоактивных районов на западном побережье Канады (остров Ванкувер, зона субдукции Каскадия, Cascadia Subduction Zone) был реализован проект по определению сейсмических сдвигов земной коры и предупреждении цунами с использованием сети станций GPS [12]. В ходе проекта была развёрнута система оповещения о цунами с использованием GPS (GPS-Augmented Tsunami Warning System). Целью данного проекта было использование местоопределения при помощи GPS для мониторинга смещений земной коры, вызванных землетрясениями, в режиме реального времени. Поскольку остров Ванкувер в результате землетрясений периодически подвергался наводнениям от цунами, было решено дополнить стандартные способы предупреждения цунами (сейсмическое оборудование, буи и мареографы) системой GPS.

Система была развёрнута на базе сети станций измерений GPS на острове Ванкувер WCDA (West Canada Deformation Array). Первоначально в проекте использовались относительные методы высокоточного местоопределения (RTK) с формированием вторых разностей измерений относительно выбранной опорной станции. Сформированные базовые линии составляли от 30 до 200 км, горизонтальная ошибка местоопределения составляла несколько сантиметров, вертикальная ошибка местоопределения была около 10 сантиметров. Данного уровня точности было достаточно для установления факта наличия значительных смещений земной коры, несущих угрозу возникновения цунами. Среди недостатков относительных методов были ограниченное покрытие территории сетью станций измерения, привязка результатов смещений земной коры к опорной станции и высокая стоимость расширения сети. Причиной использования относительных методов местоопределения была невозможность моделирования ряда смещений в исходных измерениях, связанных со спутниками и приёмникам. Использование вторых разностей в режиме RTK позволяло скомпенсировать указанные смещения.

Отделом геодезической съёмки (Geodetic Survey Division, GSD) Министерства природных ресурсов Канады (Natural Resources Canada, NRCan) также проводились исследования по анализу возможностей использования методов PPP в данном проекте. С разработкой методов учёта целочисленной природы псевдофазовых неоднозначностей при обработке измерений ([49], [47]), существенно сокращающих период сходимости решения до сантиметрового уровня точности, появилась возможность применения высокоточного местоопределения в абсолютном режиме с разрешением неоднозначности псевдофазовых измерений для мониторинга сейсмической активности. Отделом GSD было принято решение расширить эксперимент для проверки в режиме реального времени алгоритмов высокоточного местоопределения Float PPP и PPP-AR (Integer PPP) [52]. В [52] использовали прогнозную ЭВИ от NRCan, обновляемую каждый час, в результате горизонтальная точность местоопределения при использовании целочисленного разрешения неоднозначности повысилась примерно на 30%, тогда как вертикальная в среднем не изменилась, хотя наблюдались улучшения на отдельных станциях. Достигнутая горизонтальная точность местоопределения была сравнима с результатами относительного местоопределения в режиме RTK. По итогам работы был сделан вывод о том, что при работе в режиме Integer PPP очень критичным является алгоритм проверки надёжности того или иного целочисленного решения, были проанализированы различные алгоритмы. Решения для некоторых местоположений сходились к сантиметровому уровню в течение 10 минут и даже быстрее, тогда как среднее время периода сходимости менялось незначительно по сравнению с режимом Float PPP. Общим выводом в [52] отмечено, что местоопределения в режиме Integer PPP может дополнить систему предупреждения цунами после разработки наиболее оптимальных методов проверки надёжности полученных целочисленных решений.

1.4 Выводы по главе 1

В первой главе проведён обзор известных методов местоопределения в ГНСС. Показано, что высокоточное местоопределение в абсолютном режиме может быть достигнуто только в глобальных дифференциальных навигационных спутниковых системах, в которых разделяются понятия сетевого и пользовательского решений. Высокоточное абсолютное местоопределение (пользовательское решение) возможно только при использовании данных сетевого решения, т.е. дополнительной информации, сформированной путём обработки измерений сети наземных станций. Таким образом, абсолютное высокоточное местоопределение (режимы Float PPP, Integer PPP) не является автономным, поскольку для его реализации необходимо иметь данные сетевого решения.

Проведён обзор литературы по методам высокоточного абсолютного местоопределения в ГНСС. Рассмотрена история их появления, развитие и текущее состояние. Описан получивший широкое распространение метод Float PPP, в котором целочисленные псевдофазовые неоднозначности спутников оцениваются как действительные величины, поскольку вбирают в себя немоделируемые аппаратурные смещения. Также описаны известные эмпирические методы Integer PPP, в которых используется разрешение целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений. Проведён их анализ и критика. Для дальнейшего исследования выбран подход, основанный на наиболее адекватной реальным измерениям модели разделённых часов, который предложен в Министерстве природных ресурсов Канады (NRCan).

Рассмотрены различные известные из Интернета сервисы высокоточного местоопределения с указанием их особенностей, зон покрытия и характеристик качества.

Описаны приложения технологии высокоточного абсолютного местоопределения в ГНСС.

.

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ВЫСОКОТОЧНОГО МЕСТООПРЕДЕЛЕНИЯ В АБСОЛЮТНОМ РЕЖИМЕ

2.1 Математические модели исходных измерений навигационного приёмника

В навигационном приёмнике осуществляется три основных вида измерений – измерения псевдодальностей (псевдодальномерные, псевдодальностные или кодовые измерения), псевдофаз (псевдофазовые или фазовые измерения) и псевдодоплеровских смещений частот несущих колебаний спутниковых сигналов (псевдодоплеровские измерения). Физическая природа и методы формирования этих измерений в навигационных приёмниках подробно описаны в [4], [25], [2].

Использование указанных измерений для определения координат объектов в ГНСС основано на их математических моделях. Такие модели определяют связь измерений с координатами приёмника, показаниями его часов на момент проведения измерений, координатами навигационного спутника и показаниями его часов на момент предшествия (момент предшествия предшествует моменту измерения на время распространения сигнала от спутника до приёмника) и другими оцениваемыми параметрами и смещениями. Математические модели измерений псевдодальностей ρ^j, псевдофаз φ^j и псевдодоплеровских измерений F^j для j-го спутника описываются следующими зависимостями [4], [25], [2]:

$$\begin{aligned}\rho^j &= R^j + \Delta R^j_{ORBIT} + c\left(\Delta T_{REC} + \Delta\tau_{HARD}\right) - c\left(\Delta T^j_{SAT} + \Delta T^j_{REL} + \Delta\tau^j_{HARD}\right) + \\ &+ \Delta R^j_{APC} + c\left(\Delta\tau^j_{TROP} + \Delta\tau^j_{IONO}\right) + d^j_{\rho,MULT} + d^j_{TIDAL} + \Delta R_{APC} + \varepsilon_\rho\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\varphi^j &= \frac{R^j + \Delta R^j_{ORBIT}}{\lambda^j} + f^j \Delta T_{REC} + \Delta\psi_{HARD} + \psi_0 - f^j\left(\Delta T^j_{SAT} + \Delta T^j_{REL} + \Delta T^j_{GRAV}\right) - \Delta\psi^j_{HARD} - \psi^j_0 + \\ &+ \frac{\Delta R^j_{APC} + c\left(\Delta\tau^j_{TROP} - \Delta\tau^j_{IONO}\right) + d^j_{\varphi,MULT} + d^j_{TIDAL} + \Delta R_{APC} + \Delta R^j_{WIND-UP}}{\lambda^j} - N^j + \varepsilon_\varphi\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$F^j = -\frac{\dot{R}^j}{\lambda^j} - k^j \Delta f_{MO} + \varepsilon_F, \tag{2.3}$$

где ρ^j – измеренное значение псевдодальности для j-го спутника (м),

φ^j – измеренное значение псевдофазы для j-го спутника (циклы),

F^j – измеренное значение псевдодоплеровского смещения частоты несущего колебания j-го спутника (Гц),

c – скорость света (м/с),

f^j – частота несущего колебания j-го спутника (Гц),

$\lambda^j = \frac{c}{f^j}$ – длина волны несущего колебания j-го спутника (м),

R^j – расстояние (дальность) между точками, которые занимал приёмник в момент проведения измерения t_M и центр масс j-го спутника в момент предшествия t^j_{PREV} к моменту измерения t_M на время распространения сигнала от j-го спутника до приёмника (м),

ΔR^j_{ORBIT} - систематическое смещение в измерениях псевдодальностей и псевдофаз, связанное с неточностью знания орбит спутников (м),

ΔR^j_{APC} – систематическое смещение в измерениях псевдодальностей и псевдофаз, порождаемое смещением фазового центра антенны (antenna phase center, APC) j-го спутника относительно его центра масс (м),

ΔT^j_{SAT} – смещение показаний часов j-го спутника (satellite, SAT) относительно показаний часов системы (с),

ΔT^j_{REL} – релятивистская поправка (relativity, REL) к показаниям часов j-го спутника, порождаемая эллиптичностью его орбиты (с),

$\Delta\tau^j_{HARD}$ – задержка в аппаратуре (hardware, HARD) j-го спутника (с),

$\Delta\tau^j_{TROP}$ – наклонная тропосферная (troposphere, TROP) задержка сигнала j-го спутника (с),

$\Delta\tau^j_{IONO}$ – наклонная ионосферная (ionosphere, IONO) задержка сигнала j-го спутника (с),

$d^j_{\rho,MULT}$ – многолучевые (multipath, MULT) искажения измерений псевдодальности по j-му спутнику (м),

$d^{j}_{TIDAL} = d^{j}_{SOLID} + d^{j}_{OCEAN} + d^{j}_{POLE}$ - результирующие систематические смещения измерений псевдодальности по j-му спутнику, порождаемые приливными (tidal) эффектами в упругом теле Земли (d^{j}_{SOLID}), океаническими приливными эффектами (d^{j}_{OCEAN}) и смещениями полюсов Земли (d^{j}_{POLE}) (м),

ΔR_{APC} – систематическое смещение в измерениях псевдодальностей и псевдофаз, порождаемое смещением фазового центра антенны навигационного приёмника в пространстве относительно точки, координаты которой определяются (м),

ΔT_{REC} – смещение показаний часов навигационного приёмника (receiver, REC) относительно показаний часов системы (с),

$\Delta\tau_{HARD}$ – задержка в аппаратуре навигационного приёмника (с),

ε_{ρ} – шумовая ошибка измерений псевдодальности в навигационном приёмнике (м),

$\Delta R^{j}_{WIND-UP}$ – систематическое смещение измерений псевдофазы по j-му спутнику, определяемое взаимной ориентацией антенн j-го спутника и приёмника (wind-up эффект) (м),

ΔT^{j}_{GRAV} – систематическое смещение измерений псевдофазы по j-му спутнику, порождаемое изменениями гравитационного (gravitational, GRAV) поля Земли за время распространения сигнала (с),

$\Delta\psi^{j}_{HARD}$ – фазовые задержки несущего колебания в аппаратуре j-го спутника (циклы),

ψ^{j}_{0} – начальная фаза излучения несущего колебания генератором j-го спутника (циклы),

$d^{j}_{\varphi,\,MULT}$ – многолучевые искажения измерений псевдофазы по j-му спутнику (м),

$\Delta\psi_{HARD}$ – фазовые задержки несущего колебания в аппаратуре навигационного приёмника (циклы),

ψ_{0} – начальная фаза колебания на несущей частоте, формируемого в навигационном приёмнике (циклы),

N^{j} – неопределенное целое число, определяющее целочисленную неоднозначность измерения псевдофазы по j-му спутнику (б/р),

ε_{φ} – шумовая ошибка измерений псевдофазы в навигационном приёмнике (циклы),

$\dot{R}_{P}^{j}$ – радиальная скорость движения j-го спутника относительно навигационного приёмника (м/с),

k^{j} – постоянный коэффициент преобразования частоты f_{MO} задающего генератора навигационного приёмника на частоту несущего колебания j-го спутника (для системы GPS этот коэффициент одинаков для всех спутников системы) (б/р),

Δf_{MO} – смещение частоты f_{MO} задающего генератора навигационного приёмника относительно ее номинального значения $f_{MO,\,NOM}$ (Гц).

ε_{F} - шумовая ошибка измерений псевдодоплеровского смещения частоты (Гц).

Измерения псевдодальностей ρ^{j} (2.1), псевдофаз φ^{j} (2.2) и псевдодоплеровских смещений частот несущих колебаний спутниковых сигналов F^{j} (2.3) привязываются к показаниям часов навигационного приёмника $T_{REC}\left(t_{M}\right)$ на моменты проведения измерений t_{M}.

Характерной особенностью псевдофазовых измерений, которая порождает значительные трудности их обработки, является неоднозначность этих измерений. Неоднозначность порождается неопределенным целым числом циклов N^{j}, которое входит в математическую модель псевдофазовых измерений (2.2). Трудности обработки псевдофазовых измерений возрастают при появлении на интервале их измерения срывов слежения за фазами несущих колебаний спутниковых сигналов, которые описываются в модели псевдофазовых измерений (2.2) скачкообразным изменением на неопределённую целую величину целого числа циклов N^{j}.

При обработке псевдофазовых измерений необходимо учитывать как их неоднозначность, так и возможное целочисленное скачкообразное изменение этой неоднозначности. Учёт неоднозначности (учёт неопределённого целого N^{j}) в математической модели псевдофазы сводится к включению N^{j} в число оцениваемых параметров. Для определения факта наличия скачков в измерениях псевдофазы по отслеживаемому спутнику разработаны методы, основанные на использовании линейных комбинаций измерений (более подробно описаны в подразделе 2.4.2).

Основные сложности оценивания целочисленной неоднозначности псевдофазы N^{j} связаны с наличием в модели (2.2) немоделируемых смещений ψ_{0}, ψ_{0}^{j}, $\Delta\psi_{HARD}$ и $\Delta\psi_{HARD}^{j}$, которые должны быть отделены от N^{j}.

2.2 Модель измерений GPS на исходных частотах

Рассмотрим математические модели измерений псевдодальности (2.1) и псевдофазы (2.2) применительно к ГНСС GPS. На практике под моделью измерений часто понимают не математическую модель измерений (2.1)-(2.3), а некоторый набор измерений (комбинаций измерений) навигационного приёмника, который используется для решения поставленной задачи обработки измерений в ГНСС. Например, можно говорить о модели измерений, используемой для высокоточного местоопределения или для вычисления набора тех или иных спутниковых коррекций по сети наземных станций. Известно [4, 81], что спутники GPS излучают сигналы на одной и той же частоте f_i^G, соответствующей частотному диапазону L_i GPS ($L_1 : f_1^G = 1575.42$ МГц , $L_2 : f_2^G = 1227.60$ МГц , $L_5 : f_5^G = 1176.45$ МГц). Считая, что систематические смещения ΔR^j_{ORBIT}, ΔT^j_{REL}, ΔT^j_{GRAV}, ΔR^j_{APC}, $c\Delta\tau^j_{TROP}$, $d^j_{\rho,MULT}$, $d^j_{\varphi,MULT}$, d^j_{TIDAL}, ΔR_{APC}, $\Delta R^j_{WIND-UP}$ в математических моделях (2.1) и (2.2) скомпенсированны, можно записать двухчастотную модель измерений псевдодальностей и псевдофаз на исходных частотах системы GPS в следующем упрощённом виде:

$$\begin{cases} P_1^{G,j} = R^j + dT^G_{REC} + b^G_{r,P1} - dt^{G,j}_{SAT} - b^{j,G}_{P1} + m^j\Delta D_W + I_1^j + \varepsilon^G_{P1} \\ P_2^{G,j} = R^j + dT^G_{REC} + b^G_{r,P2} - dt^{G,j}_{SAT} - b^{j,G}_{P2} + m^j\Delta D_W + k^G I_1^j + \varepsilon^G_{P2} \\ L_1^{G,j} = R^j + dT^G_{REC} + b^G_{r,L1} - dt^{G,j}_{SAT} - b^{j,G}_{L1} + m^j\Delta D_W - I_1^j - \lambda_1^G N_1^{G,j} + \varepsilon^G_{L1} \\ L_2^{G,j} = R^j + dT^G_{REC} + b^G_{r,L2} - dt^{G,j}_{SAT} - b^{j,G}_{L2} + m^j\Delta D_W - k^G I_1^j - \lambda_2^G N_2^{G,j} + \varepsilon^G_{L2}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где:

$P_i^{G,j}$ и $L_i^{G,j}$ - измерения псевдодальности и псевдофазы для j-го спутника на частоте f_i^G (i=1,2), в которых скомпенсированы моделируемые систематические смещения моделей (2.1) и (2.2),

$dT^G_{REC} = c\Delta T_{REC}$ - смещение показаний часов приёмника относительно шкалы времени системы GPS (м),

$b^G_{r,P1} = c\Delta\tau_{HARD,P1}$, $b^G_{r,P2} = c\Delta\tau_{HARD,P2}$ - задержки в аппаратуре приёмника на частоте f_i^G (i=1,2) (м),

$\Delta\tau_{HARD,Pi}$ - задержка в аппаратуре приёмника на частоте f_i^G (i=1,2) (с),

$b^G_{r,L1} = \lambda_1^G(\Delta\psi_{HARD,L1} + \psi_{0,L1})$, $b^G_{r,L2} = \lambda_2^G(\Delta\psi_{HARD,L2} + \psi_{0,L2})$ - фазовые задержки несущего колебания в аппаратуре приёмника на частоте f_i^G (i=1,2) (м),

$\Delta\psi_{HARD,Li}$ - фазовая задержка несущего колебания в аппаратуре приёмника на частоте f_i^G (i=1,2) (циклы),

$\psi_{0,L1}$, $\psi_{0,L2}$ - начальные фазы колебаний на несущих частотах f_i^G (i=1,2), формируемых в навигационном приёмнике (циклы),

$\lambda_1^G = \frac{c}{f_1^G} \approx 0.19$, $\lambda_2^G = \frac{c}{f_2^G} \approx 0.24$ - длины волн несущих колебаний спутников на частоте f_i^G (i=1,2) (м),

$dt_{SAT}^{G,j} = c\Delta T_{SAT}^j$ - смещение показаний часов j-го спутника относительно шкалы времени системы GPS (м),

$b_{P1}^{j,G} = c\Delta\tau_{HARD,P1}^j$ и $b_{P2}^{j,G} = c\Delta\tau_{HARD,P2}^j$ - задержки в аппаратуре j-го спутника на частоте f_i^G (м),

$\Delta\tau^j{}_{HARD,Pi}$ - задержка в аппаратуре j-го спутника на частоте f_i^G (i=1,2) (с),

$b_{L1}^{j,G} = \lambda_1^G\left(\Delta\psi_{HARD,L1}^j + \psi_{0,L1}^j\right)$ и $b_{L2}^{j,G} = \lambda_2^G\left(\Delta\psi_{HARD,L2}^j + \psi_{0,L2}^j\right)$ - фазовые задержки несущего колебания в аппаратуре j-го спутника на частоте f_i^G (i=1,2) (м),

$\Delta\psi_{HARD,Li}^j$ - фазовая задержка несущего колебания в аппаратуре j-го спутника на частоте f_i^G (i=1,2) (циклы),

$\psi_{0,L1}^j$, $\psi_{0,L2}^j$– начальные фазы излучения несущих колебаний на частоте f_i^G (i=1,2) генератором j-го спутника (циклы),

ΔD_W - нескомпенсированная компонента влажной составляющей вертикальной тропосферной задержки (м);

m^j - функция отображения для j-го спутника,

$I_1^j = c\Delta\tau_{IONO,L1}^j$ - наклонная ионосферная задержка сигнала j-го спутника на частоте f_1^G (м),

$\Delta\tau_{IONO,L1}^j$ - наклонная ионосферная задержка сигнала j-го спутника на частоте f_1^G (с),

$k^G = \frac{\left(f_1^G\right)^2}{\left(f_2^G\right)^2} = \left(\frac{77}{60}\right)^2$ - константа, связывающая несущие частоты f_1^G и f_2^G и широко используемая в GPS (б/р),

$N_1^{G,j}$, $N_2^{G,j}$ - целочисленные неоднозначности псевдофазовых измерений (целые числа) по j-му спутнику на частоте f_i^G (i=1,2) (б/р или циклы),

ε_{Pi}^G, ε_{Li}^G (i=1,2) - шумовые ошибки измерений псевдодальности и псевдофазы в навигационном приёмнике (м).

Смещения ΔT_{REL}^j , ΔT_{GRAV}^j , $c\Delta\tau_{TROP}^j$, ΔR_{APC}^j , d_{TIDAL}^j , ΔR_{APC} , ΔR_{ORBIT}^j , $\Delta R_{WIND-UP}^j$ вычисляются и компенсируются на предварительных этапах высокоточного местоопределения (более подробно описаны в разделе 2.5), а многолучевые искажения измерений $d_{\rho,MULT}^j$, $d_{\varphi,MULT}^j$

могут не рассматриваться в предположении отсутствия эффекта многолучёвости в точке расположения антенны потребителя (что соответствует благоприятным окружающим условиям расположения антенны приёмника на достаточной высоте при отсутствии в округе высотных конструкций, способных вызвать переотражение сигнала). При наличии многолучёвости данные искажения могут подавляться специальными аппаратурными и программными методами или включаться в состав немоделируемых ошибок измерений. Смещение показаний часов приёмника dT^{G}_{REC} включается в число оцениваемых параметров, наклонная тропосферная задержка сигнала T^{j} частично вычисляется и компенсируется, а остаточная нескомпенсированная составляющая также включается в число оцениваемых параметров (более подробно описано в подразделе 2.4.5).

Система уравнений (2.4), записанная в линеаризованном виде, имеет дефицит ранга, т.е. является сингулярной (число оцениваемых параметров превосходит ранг информационной матрицы системы, связывающей оцениваемые параметры с измерениями). Указанный дефицит ранга связан с наличием немоделируемых задержек (смещений) в аппаратуре приёмника $b^{G}_{r,P1}$, $b^{G}_{r,P2}$, $b^{G}_{r,L1}$, $b^{G}_{r,L2}$ и спутника $b^{j,G}_{P1}$, $b^{j,G}_{P2}$, $b^{j,G}_{L1}$, $b^{j,G}_{L2}$, которые не могут быть оценены отдельно от смещений показаний часов приёмника dT^{G}_{REC} и спутника $dt^{G,j}_{SAT}$, а также наличием ионосферных задержек сигнала I^{j}_{1} и $k^{G}I^{j}_{1}$.

2.3 Традиционная ионосферосвободная модель измерений GPS

Как было показано выше, одной из причин наличия дефицита ранга в модели (2.4) является наличие ионосферных задержек. Известно [4, 2], что ионосферная задержка сигнала определяется зависимостью концентрации свободных электроном от высоты. Данная зависимость нестабильна во времени и существенно меняется в течение суток. По этой причине точность описания ионосферной задержки математической моделью при отсутствии метеорологических данных в реальном времени недостаточна для режима высокоточного местоопределения в абсолютном режиме (более подробно ионосферная задержка сигнала описана в подразделе 2.5.1). В 1997 году в [16] была предложена двухчастотная ионосферосвободная модель измерений системы GPS, которая до настоящего времени широко используется при высокоточном местоопределении в режиме Float PPP и часто называется традиционной или стандартной моделью измерений (в англоязычной литературе - traditional PPP model [39]). Ионосферосвободная модель измерений GPS записывается следующим образом:

$$\begin{cases} P_3^{G,j} = \dfrac{77^2 P_1^{G,j} - 60^2 P_2^{G,j}}{77^2 - 60^2} = R^j + m^j \Delta D_W + dT_{REC}^G - dt_{SAT}^{G,j} + b_{r,P3}^G - b_{P3}^{j,G} + \varepsilon_{P3}^G, \\ L_3^{G,j} = \dfrac{77^2 L_1^{G,j} - 60^2 L_2^{G,j}}{77^2 - 60^2} = R^j + m^j \Delta D_W + dT_{REC}^G - dt_{SAT}^{G,j} + b_{r,L3}^G - b_{L3}^{j,G} - \lambda_3^G N_3^{G,j} + \varepsilon_{L3}^G; \end{cases} \tag{2.5}$$

где:

$P_3^{G,j}$ и $L_3^{G,j}$ - ионосферосвободные комбинации измерений псевдодальности и псевдофазы, в которых скомпенсированы моделируемые систематические смещения моделей (2.1) и (2.2) (м),

$b_{r,P3}^G = \dfrac{77^2 b_{r,P1}^G - 60^2 b_{r,P2}^G}{77^2 - 60^2}$ - аппаратурная задержка в аппаратуре приёмника, соответствующая ионосферосвободной комбинации кодовых измерений (м),

$b_{r,L3}^G = \dfrac{77^2 b_{r,L1}^G - 60^2 b_{r,L2}^G}{77^2 - 60^2}$ - аппаратурная задержка в аппаратуре приёмника, соответствующая ионосферосвободной комбинации псевдофазовых измерений (м),

$b_{P3}^{j,G} = \dfrac{77^2 b_{P1}^{j,G} - 60^2 b_{P2}^{j,G}}{77^2 - 60^2}$ - аппаратурная задержка в аппаратуре j-го спутника, соответствующая ионосферосвободной комбинации кодовых измерений (м),

$b_{L3}^{j,G} = \dfrac{77^2 b_{L1}^{j,G} - 60^2 b_{L2}^{j,G}}{77^2 - 60^2}$ - аппаратурная задержка в аппаратуре j-го спутника, соответствующая ионосферосвободной комбинации псевдофазовых измерений (м),

$\lambda_3^G = \dfrac{60\lambda_2^G}{77^2 - 60^2} = \dfrac{77\lambda_1^G}{77^2 - 60^2} = \dfrac{\lambda_1^G \lambda_2^G}{77\lambda_1^G - 60\lambda_2^G} \approx 0.006\text{м}$ - эквивалентная длина волны несущих колебаний спутников, соответствующая комбинации измерений $L_3^{G,j}$ (м),

$N_3^{G,j} = 77N_1^{G,j} - 60N_2^{G,j}$ - целочисленная неоднозначность ионосферосвободной комбинации псевдофазовых измерений (б/р или циклы),

$\varepsilon_{P3}^G = \dfrac{77^2 \varepsilon_{P1}^G - 60^2 \varepsilon_{P2}^G}{77^2 - 60^2}$, $\varepsilon_{L3}^G = \dfrac{77^2 \varepsilon_{L1}^G - 60^2 \varepsilon_{L2}^G}{77^2 - 60^2}$ - шумовые ошибки ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальности и псевдофазы (м).

Подробный вывод ионосферосвободных комбинаций измерений (2.5) представлен Приложении А. Аппаратурные смещения приёмника $b_{r,P3}^G$, $b_{r,L3}^G$ и спутника $b_{P3}^{j,G}$, $b_{L3}^{j,G}$ входят в модель измерений (2.1) с одними и теми же знаками, что и смещения показаний часов приёмника dT_{REC}^G и спутника $dt_{SAT}^{G,j}$, данные аппаратурные смещения не могут быть оценены по отдельности от указанных смещений показаний часов. В традиционной модели измерений GPS используются одни и те же смещения показаний часов приёмника и спутника для кодовых и псевдофазовых измерений, более общую модель (2.5) можно записать упрощённо следующим образом в виде традиционной ионосферосвободной модели измерений GPS:

$$\begin{cases} P_3^{G,j} = R^j + m^j \Delta D_W + dT^G - dt^{G,j} + \varepsilon_{P3}^G, \\ L_3^{G,j} = R^j + m^j \Delta D_W + dT^G - dt^{G,j} + A_{P3}^j + \varepsilon_{L3}^G, \end{cases} \tag{2.6}$$

где:

$dT^G = \left(dT_{REC}^G + b_{r,P3}^G\right)$ - смещение показаний часов приёмника относительно показаний часов системы GPS в традиционной модели измерений GPS (м),

$dt^{G,j} = \left(dt_{SAT}^{G,j} + b_{P3}^{j,G}\right)$ - смещение показаний часов j-го спутника относительно показаний часов системы GPS в традиционной модели измерений GPS (м),

$$A_{P3}^j = b_{r,L3}^G - b_{r,P3}^G - b_{L3}^{j,G} + b_{P3}^{j,G} - \lambda_3^G N_3^{G,j} \tag{2.7}$$

- действительная неоднозначность, соответствующая традиционной модели измерений GPS (м).

Модель (2.6) в линеаризованном виде записывается:

$$\begin{cases} P_3^{G,j} = R_C^j + h_x^j \Delta x + h_y^j \Delta y + h_z^j \Delta z + m^j \Delta D_W + dT^G - dt^{G,j} + \varepsilon_{P3}, \\ L_3^{G,j} = R_C^j + h_x^j \Delta x + h_y^j \Delta y + h_z^j \Delta z + m^j \Delta D_W + dT^G - dt^{G,j} + A_{P3}^j + \varepsilon_{L3}, \end{cases} \tag{2.8}$$

где:

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - поправки к грубым координатам потребителя x_C, y_C, z_C (м);

R_C^j - грубая дальность от потребителя до j-го спутника;

h_x^j, h_y^j, h_z^j - направляющие косинусы j-го спутника.

Традиционная модель измерений GPS (2.8) широко используется для высокоточного местоопределения в режиме Float PPP [15, 24, 26]. Как видно, в модели (2.8) отсутствует возможность использования целочисленной природы неоднозначности псевдофазовых измерений, т.к. целочисленная неоднозначность $\lambda_3^G N_3^{G,j}$ (выраженная в метрах) вбирает в себя немоделируемые кодовые и фазовые смещения, формируя действительную величину A_{P3}^j (2.7). По этой причине использование в рамках традиционной модели измерений (2.8) разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений невозможно. Для краткости записи далее традиционная ионосферосвободная модель измерений GPS (2.8) обозначается как P3L3.

2.4 Основные этапы алгоритма определения координат потребителя

Укрупненная блок-схема стандартного алгоритма высокоточного местоопределения в режиме Float PPP приведена на рис. 2.1. Все указанные на рис. 2.1 блоки операций выполняются на каждый момент измерений. В последующих подразделах каждый из блоков данной блок-схемы описан более подробно.

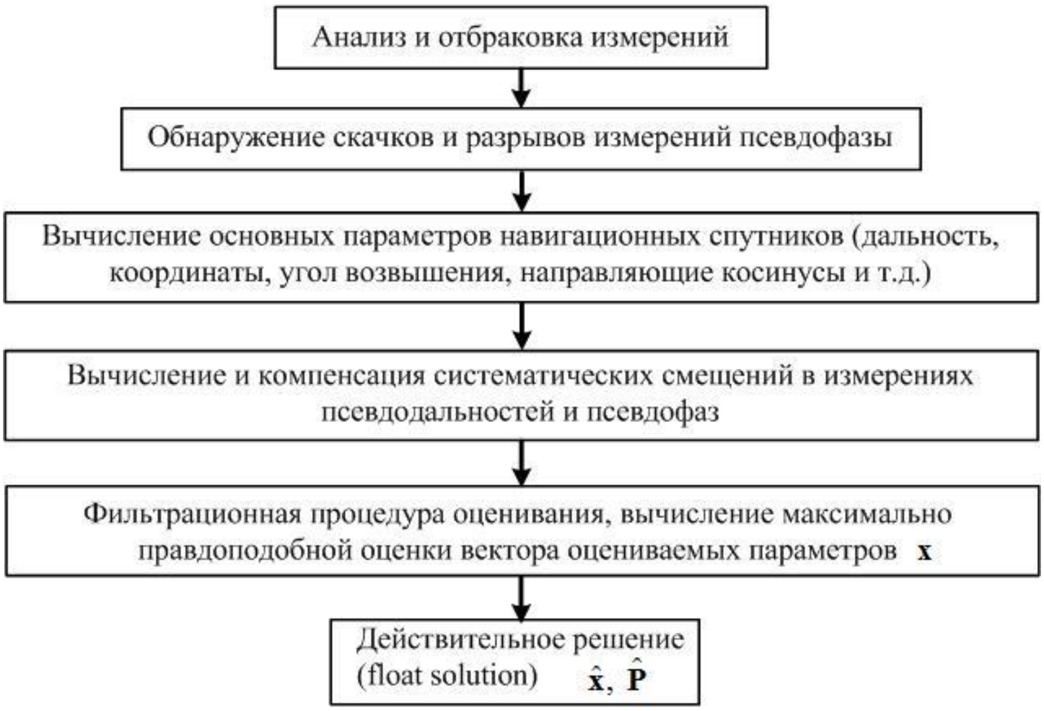

Рис. 2.1. Укрупненная блок-схема стандартного алгоритма высокоточного местоопределения потребителя (Float PPP)

2.4.1 Анализ и отбраковка измерений

На начальном этапе работы алгоритма на текущую эпоху (момент) измерений производится чтение/распаковка/загрузка измерений навигационных спутников. В приложениях высокоточного местоопределения в режиме постобработки для хранения измерений, как правило, используется формат данных RINEX (Receiver Independent Exchange Format). Версия 3.01 данного формата поддерживает измерения навигационных систем ГЛОНАСС, GPS, Galileo, Compass (Beidou), а также данные систем SBAS. При реализации в ГНСС высокоточного местоопределения в режиме реального времени (либо близком к реальному времени – в режиме так называемого квазиреального времени) для передачи измерений навигационных спутников могут использоваться форматы RTCM (Radio Technical Commission for Maritime Services) и NMEA (National Marine Electronics Association).

Далее проводится анализ доступных измерений и отбраковка некоторых спутников из обработки. Причиной для отбраковки спутника может послужить аномальное значение измерения, отсутствие каких-либо измерений по данному спутнику либо низкое значение отношения сигнал/шум. Например, спутник может быть исключён из обработки в случае, если для него доступны измерения только в одном диапазоне частот (в режиме Float PPP в модели (2.8) используются ионосферосвободные линейные комбинации измерений на исходных частотах).

2.4.2 Обнаружение скачков и разрывов измерений псевдофазы

На данном этапе реализуется процедура обнаружения скачков и разрывов псевдофазовых измерений. Скачки и разрывы в измерениях псевдофазы возникают при срыве слежения за фазами несущих колебаний спутниковых сигналов в приёмнике. Указанные срывы могут возникать в случае появления резких затенений сигналов некоторых спутников, при высокой многолучёвости, при высокой динамике навигационного приёмника в случае подвижного потребителя, в ситуациях значительного ослабления спутниковых сигналов (под листвой деревьев) или из-за сбоя в программном обеспечении навигационного приёмника. Срывы слежения приводят к появлению целочисленных скачков или разрывов в измерениях псевдофазы (рис. 2.2). Эти скачки появляются вследствие возможного изменения целочисленной неоднозначности N^j модели измерения псевдофазы (2.2), т.е. значение N^j до срыва слежения и после повторного вхождения в синхронизм петли слежения за фазой несущего колебания в приёмнике может отличаться на неопределённое целое число длин волн.

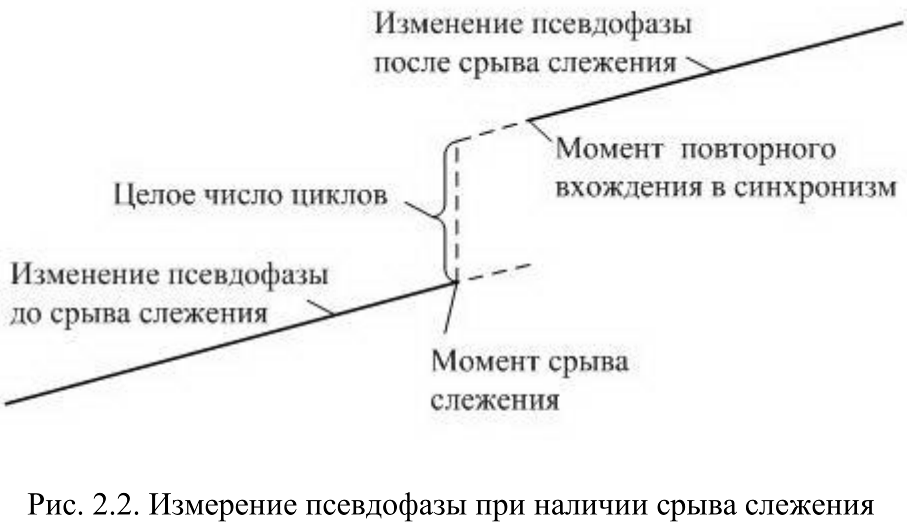

Рис. 2.2. Измерение псевдофазы при наличии срыва слежения

Задача обнаружения разрывов в измерениях псевдофазы является статистической задачей. Для определения факта наличия разрывов в измерениях псевдофазы, как правило, в течение определённого интервала времени анализируются такие линейные комбинации измерений, которые как можно более чувствительны к разрывам измерений, но при этом как можно менее чувствительны к мешающим факторам (к числу мешающих факторов относятся систематические смещения в измерениях - ионосферная задержка сигнала тропосферная задержка сигнала, смещения показаний часов спутников и приёмника и др.) [82, 83]. Далее приводятся наиболее известные линейные комбинации измерений, широко используемые в задачах высокоточного местоопределения для обнаружения разрывов псевдофазовых измерений.

1. Кодово-фазовая безгеометрическая комбинация

Данная комбинация вычисляется согласно выражению [82, 83]

$$PL^{j}_{GF,i} = P^{j}_{i} - L^{j}_{i}, \tag{2.9}$$

где P^{j}_{i} и L^{j}_{i} - кодовые и псевдофазовые измерения j-го спутника на некоторой частоте f_i (i – номер частотного диапазона). Для модели измерений на исходных частотах системы GPS (2.4) комбинация (2.9) может быть записана как

$$\begin{aligned} PL^{G,j}_{GF,1} &= P^{G,j}_{1} - L^{G,j}_{1} = \\ &b^{G}_{r,P1} - b^{G}_{r,L1} - b^{j,G}_{P1} + b^{j,G}_{L1} + 2I^{j}_{1} + \lambda^{G}_{1} N^{G,j}_{1} + \varepsilon^{G}_{P} - \varepsilon^{G}_{L}, \\ PL^{G,j}_{GF,2} &= P^{G,j}_{2} - L^{G,j}_{2} = \\ &b^{G}_{r,P2} - b^{G}_{r,L2} - b^{j,G}_{P2} + b^{j,G}_{L2} + 2k^{G} I^{j}_{1} + \lambda^{G}_{2} N^{G,j}_{2} + \varepsilon^{G}_{P} - \varepsilon^{G}_{L} \end{aligned} \tag{2.10}$$

2. Кодовая и фазовая безгеометрические комбинации

Данные комбинация вычисляется согласно выражениям [82, 83]

$$\begin{aligned} P^{j}_{GF,1,2} &= P^{j}_{1} - P^{j}_{2}, \\ L^{j}_{GF,1,2} &= L^{j}_{1} - L^{j}_{2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для модели измерений на исходных частотах системы GPS (2.4) комбинации (2.11) могут быть записаны как

$$\begin{aligned} P^{G,j}_{GF,1,2} &= P^{G,j}_{1} - P^{G,j}_{2} = \\ &b^{G}_{r,P1} - b^{G}_{r,P2} - b^{j,G}_{P1} + b^{j,G}_{P2} + I^{j}_{1}\left(1 - k^{G}\right), \\ L^{G,j}_{GF,1,2} &= L^{G,j}_{1} - L^{G,j}_{2} = \\ &b^{G}_{r,L1} - b^{G}_{r,L2} - b^{j,G}_{L1} + b^{j,G}_{L2} + I^{j}_{1}\left(k^{G} - 1\right) - \lambda^{G}_{1} N^{G,j}_{1} + \lambda^{G}_{2} N^{G,j}_{2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

3. Комбинация Мельбурна-Вуббена

Данная комбинация вычисляется согласно выражению (А.5) [82, 83]

$$\begin{aligned} A_{41,2}^{G,j} &= \frac{1}{f_1^G - f_2^G}\left(f_1^G L_1^{G,j} - f_2^G L_2^{G,j}\right) - \frac{1}{f_1^G + f_2^G}\left(f_1^G P_1^{G,j} + f_2^G P_2^{G,j}\right) = \\ &b_{r,A4}^G - b_{A4}^{j,G} - \lambda_4^G\left(N_1^{G,j} - N_2^{G,j}\right) + \varepsilon_{A4}^G, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $\left(N_1^{G,j} - N_2^{G,j}\right)$ - значение неоднозначности на разностной шкале (wide-lane ambiguity) в метрах (значения аппаратурных смещений $b_{r,A4}^G$ в приёмнике и $b_{A4}^{j,G}$ в спутниках, а также шумовой компоненты ε_{A4}^G описаны в Приложении А).

Приведённые линейные комбинации измерений в процессе обнаружения разрывов измерений псевдофазы анализируются последовательно (на первом этапе – безгеометрические, на втором – комбинация Мельбурна-Вуббена). Поэтапное использование указанных комбинаций позволяет определить наличие разрыва в измерениях псевдофазы не только на одной из частот, но и на двух частотах одновременно. Более подробно обнаружение разрывов в измерениях псевдофазы описано, например, в [83].

2.4.3 Вычисление основных параметров навигационных спутников

После получения доступных измерений навигационных спутников и отбраковки части измерений осуществляется чтение\распаковка\загрузка высокоточной ЭВИ. Далее осуществляется вычисление координат спутников и смещений показаний спутниковых часов на моменты предшествия эпохам измерений (такие моменты, которые отстоят от эпохи измерений на время распространения сигнала от спутников до приёмника потребителя), а также производится учёт эффекта вращения Земли (в англоязычной литературе эффект называется Sagnac effect). С этой целью, как правило, используются алгоритмы интерполяции данных высокоточной ЭВИ. Далее на моменты предшествия для всех спутников в обработке рассчитываются геометрические дальности, углы возвышения, направляющие косинусы (коэффициенты информационной матрицы связи оцениваемых параметров с измерениями для поправок к грубым координатам потребителя).

После описанных вычислений, как правило, реализуется процедура отбраковки спутников с углами возвышения менее 10-15 градусов (применяется, так называемая, маска по углу возвышения). Это связано с тем, что шумы измерений обратно пропорциональны углу возвышения, т.е. наиболее грубые измерения исключаются из обработки.

2.4.4 Вычисление и компенсация систематических смещений в измерениях псевдодальностей и псевдофаз

Одним из основных условий достижения высокой точности местоопределения в ГНСС в абсолютном режиме является тщательная компенсация ряд систематических смещений в исходных измерениях псевдодальностей и псевдофаз. К данным систематическим смещениям относятся таковые, порождаемые разрывами псевдофазовых измерений (подраздел 2.4.2), релятивистскими и гравитационными эффектами (подраздел 2.5.5), взаимной ориентацией антенн спутника и приемника (подраздел 2.5.4), искажениями в ионосфере (подраздел 2.5.1) и тропосфере (подраздел 2.5.2), вращением Земли, смещениями и вариациями фазовых центров антенн спутников и приемников (подраздел 2.5.3), твердотельными, полярными, океаническими и атмосферными приливами (подраздел 2.5.6) (полный набор смещений отражён в математических моделях измерений псевдодальностей и псевдофаз в разделе 2.1). Большая часть приведённых смещений игнорируется при работе в стандартном автономном режиме местоопределения, но для режимов PPP учёт указанных смещений является обязательным. На данном этапе осуществляется вычисление и компенсация указанных систематических смещений в измерениях по всем спутникам в обработке.

Геофизические эффекты, вызывающие указанные выше смещения, а также способы их компенсации при высокоточном местоопределении в ГНСС в абсолютном режиме подробнее рассмотрены в разделе 2.5.

2.4.5 Фильтрационная процедура оценивания

Непосредственное определение поправок к грубым координатам потребителя на практике, как правило, осуществляется путём вычисления максимально правдоподобной оценки вектора оцениваемых параметров в фильтре Калмана. Процедура оценивания при этом распадается на процедуру прогноза и процедуру вычисления текущей оценки в соответствии с хорошо известными формулами калмановской фильтрации [12].

В данной работе при стандартном режиме местоопределения (Float PPP) используется ковариационная форма фильтра Калмана [84]. Вектор оцениваемых параметров включает следующие величины:

$$\mathbf{X}_{(5+\mathrm{Msat})\times 1} = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z & \Delta D_W & dT^G & \mathbf{A}_{\mathbf{P3}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}, \qquad (2.14)$$

где:

$\mathbf{A}_{\mathbf{P3}} = \begin{bmatrix} A_{P3}^1 & A_{P3}^2 & \ldots & A_{P3}^{\mathrm{Msat}} \end{bmatrix}$ - вектор действительных неоднозначностей (2.7), соответствующих традиционной модели измерений GPS (2.8),

Msat - число спутников в обработке.

В фильтре Калмана используется следующая линейная модель прогноза:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\mathbf{i+1}} = \mathbf{A}_{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{X}}_{\mathbf{i}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{i}}, \tag{2.15}$$

где:

i – индекс, обозначающий номер временного шага фильтрации;

~ – символ, используемый для обозначения величин, прогнозируемых на следующий шаг фильтрации;

^ – символ, используемый для обозначения величин, оцененных на каждом шаге фильтрации;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{i}}$ – случайный вектор ошибок прогноза с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{Q}_{\mathbf{i}}$,

$\mathbf{A}_{\mathbf{i}}$ - матрица прогноза;

и следующая линейная модель измерений:

$$\mathbf{z}_{\mathbf{i}} = \mathbf{H}_{\mathbf{i}}\mathbf{X}_{\mathbf{i}} + \boldsymbol{\Xi}_{\mathbf{i}}, \tag{2.16}$$

где:

$\mathbf{H}_{\mathbf{i}}$ - информационная матрица связи вектора оцениваемых параметров $\mathbf{X}$ (2.14) и вектора измерений $\mathbf{z}_{\mathbf{i}}$;

$\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{i}}$ – случайный вектор ошибок измерений с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{R}_{\mathbf{i}}$;

$\mathbf{z}_{\mathbf{i}}$ – вектор измерений, полученных на i-м временном шаге фильтрации и вычисляемый для традиционной модели измерений (2.8) как

$$\mathbf{z}_{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{G}} - \mathbf{R}_{\mathrm{COARSE}} + \mathbf{dt}^{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P3}} \\ \mathbf{L}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{G}} - \mathbf{R}_{\mathrm{COARSE}} + \mathbf{dt}^{\mathbf{G}} + \mathbf{A}_{\mathbf{P3}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L3}} \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

где:

$\mathbf{P}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{G}} = \left[\mathrm{P}_3^{\mathrm{G,1}} \quad \mathrm{P}_3^{\mathrm{G,2}} \quad \ldots \quad \mathrm{P}_3^{\mathrm{G,Msat}}\right]^{\mathbf{T}}$,

$\mathbf{L}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{G}} = \left[\mathrm{L}_3^{\mathrm{G,1}} \quad \mathrm{L}_3^{\mathrm{G,2}} \quad \ldots \quad \mathrm{L}_3^{\mathrm{G,Msat}}\right]^{\mathbf{T}}$,

$\mathbf{R}_{\mathrm{COARSE}} = \left[\mathrm{R}_{\mathrm{C}}^{1} \quad \mathrm{R}_{\mathrm{C}}^{2} \quad \ldots \quad \mathrm{R}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{Msat}}\right]^{\mathbf{T}}$,

$\mathbf{dt}^{\mathbf{G}} = \left[\mathrm{dt}^{\mathrm{G,1}} \quad \mathrm{dt}^{\mathrm{G,2}} \quad \ldots \quad \mathrm{dt}^{\mathrm{G,Msat}}\right]^{\mathbf{T}}$,

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P3}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L3}}$ - вектора размерности $\mathrm{Msat}\times 1$, все значения которых равны $\varepsilon_{\mathrm{P3}}$ и $\varepsilon_{\mathrm{L3}}$, соответственно.

При записи традиционной модели измерений (2.6) в виде линейной модели измерений РЗL3 (2.8) осуществляется линеаризация уравнений модели (2.6) для всех спутников в обработке. При этом дальности R^j раскладываются в ряд Тейлора в точке грубых координат потребителя следующим образом:

$$R^j = R_C^j - h_x^j \Delta x - h_y^j \Delta y - h_z^j \Delta z, \qquad (2.18)$$

где: $R_C^j = \sqrt{\left(x_C - x^j\right)^2 + \left(y_C - y^j\right)^2 + \left(z_C - z^j\right)^2}$,

x^j, y^j, z^j - доступные из высокоточной ЭВИ координаты j-го спутника на момент предшествия соответствующему моменту измерений;

h_x^j, h_y^j, h_z^j - направляющие косинусы ($h_x^j = \dfrac{x^j - x_C}{R_C^j}$).

Процедура оценки на каждом i-ом шаге фильтрации Калмана состоит в вычислении следующих величин [12]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K_i} &= \mathbf{\tilde{P}_i H_i^T}\left(\mathbf{H_i \tilde{P} H_i^T} + \mathbf{R_i}\right)^{-1}, \\ \mathbf{\hat{X}_i} &= \mathbf{\tilde{X}_i} + \mathbf{K_i}\left(\mathbf{z_i} - \mathbf{H_i \tilde{X}_i}\right), \\ \mathbf{\hat{P}_i} &= \mathbf{\tilde{P}_i} - \mathbf{K_i H_i \tilde{P}_i}, \end{aligned} \qquad (2.19)$$

где:

$\mathbf{\hat{X}_i}$ - оценка вектора $\mathbf{X}$;

$\mathbf{\hat{P}_i}$ - ковариационная матрица ошибок оценивания вектора $\mathbf{X}$, возникающих вследствие присутствия ошибок $\boldsymbol{\Xi}_i$ в модели измерений и ошибок $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{i}$ в модели прогноза;

$\mathbf{K_i}$ - коэффициент усиления фильтра Калмана.

Процедура прогноза на следующий (i+1)-ый шаг фильтрации Калмана состоит в следующих вычислениях [12]:

$$\begin{aligned} \mathbf{\tilde{X}_{i+1}} &= \mathbf{A_i \hat{X}_i}, \\ \mathbf{\tilde{P}_{i+1}} &= \mathbf{A_i \hat{P}_i A_i^T} + \mathbf{Q_i}, \end{aligned} \qquad (2.20)$$

где:

$\mathbf{\tilde{X}_{i+1}}$ - прогнозное значение вектора $\mathbf{X}$;

$\mathbf{\tilde{P}_{i+1}}$ - ковариационная матрица ошибок прогноза вектора $\mathbf{X}$, возникающих вследствие присутствия ошибок $\boldsymbol{\Xi}_i$ в модели измерений и ошибок $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{i}$ в модели прогноза.

Для статического потребителя поправки к грубым координатам приёмника $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и действительные неоднозначности A^{j}_{P3} оцениваются как константы, для оценки нескомпенсированной компоненты влажной составляющей вертикальной тропосферной задержки ΔD_W используется модель случайного блуждания (Random walk model), для оценки смещения показаний часов приёмника dT^G используется модель белого шума (White noise model). Местоопределение динамического потребителя в данной работе не рассматривается. Таким образом, на выходе фильтрационной процедуры оценивания (рис. 2.1) на текущую i-ую эпоху измерений доступно так называемое действительное решение, содержащее $\hat{\mathbf{X}}_{\mathbf{i}}$ и $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}$.

2.5 Компенсация систематических смещений в исходных измерениях

2.5.1 Ионосферная задержка сигнала

2.5.1.1 Математическая модель смещения в измерениях, порождаемого искажениями в ионосфере

К ионосфере принято относить слой атмосферы от 50 до 1200 км, включающий в себя мезосферу, мезопаузу и термосферу. В ионосфере содержится большое количество свободных электронов и ионов, что делает её диспергирующей средой (диэлектрическая проницаемость ионосферы зависит от частоты). Диспергирующие свойства ионосферы позволяют учесть эффекты рефракции за счёт использования измерений на разных частотах. Использование измерений на k различных частотах позволяет исключить влияние членов ионосферной задержки до (k-1)-го порядка для группового (кодового) и фазового времён запаздывания. Под ионосферной задержкой ($\Delta\tau^{j}_{IONO}$ в математических моделях измерений (2.1) и (2.2)) понимается дополнительное время запаздывания, обусловленное влиянием ионосферы и определяемое зависимостью концентрации свободных электронов от высоты. Зависимость концентрации свободных электронов от высоты зависит от времени суток, активности Солнца, геомагнитной активности и других факторов [2] и меняется в течение суток в широких пределах (ионосферная задержка $\Delta\tau^{j}_{IONO}$ может составлять от 10 нс ночью до 50 нс днём, т.е. величина $c\Delta\tau^{j}_{IONO}$ составляет от 3 м до 15 м).

Измерения псевдодальности и псевдофазы по-разному меняются под воздействием ионосферной рефракции. Значение первого члена ионосферной задержки (члена первого порядка) для фазовых измерений несущей частоты спутникового сигнала совпадает со значением первого члена ионосферной задержки для измерений псевдодальности, но имеет противоположный знак:

$$\Delta\tau^{j}_{IONO,CODE,1} = -\Delta\tau^{j}_{IONO,PHASE,1} = \frac{40.309 \cdot S}{\left(f^{\,j}\right)^2}, \tag{2.21}$$

где S - суммарная электронная концентрация (Slant Total Electron Content (STEC)), зависящая от концентрации свободных электронов. В математические модели измерений псевдодальности (2.1) и (2.2) входит наклонная ионосферная задержка $\Delta\tau^{j}_{IONO} = \Delta\tau^{j}_{IONO,CODE,1}$, которая зависит от угла возвышения спутника.

2.5.1.2 Компенсация ионосферной задержки в двухчастотном режиме

При наличии в приемнике измерений на двух различных частотах компенсация наклонной ионосферной задержки осуществляется путём образования линейной ионосферосвободной комбинации измерений. Использование ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальности и псевдофазы (модель измерений P3L3 (2.8)) является основным методом борьбы с ионосферными искажениями сигнала при высокоточном местоопределении в ГНСС.

Для упрощённой модели псевдодальности (2.4), пренебрегая шумами измерений и аппаратурными смещениями, можно записать соотношение [2]:

$$P_1^{G,j} - P_2^{G,j} = c \cdot \Delta\tau_{IONO}^{j}\left(1 - \frac{\left(f_1^{G}\right)^2}{\left(f_2^{G}\right)^2}\right) = c \cdot \Delta\tau_{IONO}^{j}\left(1 - k^{G}\right), \qquad (2.22)$$

Из (2.22) следуют выражения связи ионосферной задержки на частотах f_1^G и f_2^G с измерениями псевдодальности $P_1^{G,j}$ и $P_2^{G,j}$:

$$\Delta\tau_{IONO,f1}^{j} = \frac{P_1^{G,j} - P_2^{G,j}}{c} \cdot \frac{1}{1-k^{G}} \qquad (2.23)$$

$$\Delta\tau_{IONO,f2}^{j} = \frac{P_1^{G,j} - P_2^{G,j}}{c} \cdot \frac{k^{G}}{1-k^{G}}, \qquad (2.24)$$

Согласно интерфейсному контрольному документу (ИКД) системы GPS [81] ионосферосвободная линейная комбинация измерений псевдодальности может быть вычислена как (А.1)

$$P_3^{G,j} = \frac{P_1^{G,j}k^{G} - P_2^{G,j}}{k^{G} - 1} = \frac{\left(f_1^{G}\right)^2}{\left(f_1^{G}\right)^2 - \left(f_2^{G}\right)^2}P_1^{G,j} - \frac{\left(f_2^{G}\right)^2}{\left(f_1^{G}\right)^2 - \left(f_2^{G}\right)^2}P_2^{G,j} \qquad (2.25)$$

Ионосферосвободная линейная комбинация измерений псевдофазы вычисляется аналогично (А.2):

$$L_3^{G,j} = \frac{L_1^{G,j}k^{G} - L_2^{G,j}}{k^{G} - 1} = \frac{\left(f_1^{G}\right)^2}{\left(f_1^{G}\right)^2 - \left(f_2^{G}\right)^2}L_1^{G,j} - \frac{\left(f_2^{G}\right)^2}{\left(f_1^{G}\right)^2 - \left(f_2^{G}\right)^2}L_2^{G,j} \qquad (2.26)$$

Негативным последствием использования ионосферосвободных комбинаций (2.25) и (2.26) является увеличение шумов измерений примерно в 3 раза.

2.5.2 Тропосферная задержка сигнала

Тропосферой принято называть нижний слой нейтральной атмосферы (до 50 км), которая представляет собой почти сферическую оболочку до 100 км над уровнем Земли. Тропосфера содержит 99.9% всей атмосферной массы. Тропосферная задержка сигнала определяется влиянием нейтральных атомов и молекул, состояние которых зависит от метеорологических параметров данной области (температура, давление и относительная влажность). Аналогично ионосфере, тропосферная задержка зависит от угла возвышения спутника.

Тропосферную задержку сигнала принято делить на сухую (связанную с влиянием на сигнал сухого воздуха) и влажную (связанную с влиянием на сигнал водяного пара в нижней части тропосферы) составляющие [85]. Сухая составляющая хорошо моделируется, обладает значительной временной и высотной стабильностью и вбирает в себя до 90% всей тропосферной задержки. Влажная компонента тропосферной задержки характеризуется значительной нестабильностью, плохо моделируется и является основным фактором ухудшения точности определения тропосферной задержки.

Наклонная тропосферная задержка сигнала, выраженная в метрах, может быть записана как [86]

$$D_{TROP} = m_H(\alpha)D_H + m_W(\alpha)D_W, \tag{2.27}$$

где:

$m_H(\alpha)$ - функция отображения для сухой составляющей тропосферной задержки, зависящая от угла возвышения спутника α;

D_H - вертикальная (зенитная) сухая составляющая тропосферной задержки (м);

$m_W(\alpha)$ - функция отображения для влажной составляющей тропосферной задержки, зависящая от угла возвышения спутника α;

D_W - вертикальная (зенитная) влажная составляющая тропосферной задержки (м);

При высокоточном местоопределении в ГНСС широко распространён подход, описанный в [26]: сухая компонента в силу своей высокой временной стабильности считается известной и вычисляется по тропосферным моделям, а влажная составляющая включается в вектор оцениваемых параметров и оценивается фильтрационными методами. Известно больше количество тропосферных моделей (Saastamoinen-Bauersima [2], Hopfield [85, 87], Simple Black, Goad and Goodman, NB [88], Saastamoinen [87, 89], GCAT [87], MOPS [16], Neill [90]) для расчёта наклонной тропосферной задержки спутниковых сигналов $\Delta\tau^j_{TROP}$ при высокоточном местоопределении в ГНСС. Разные тропосферные модели отличаются друг от друга разными функциями отображения $m_H(\alpha)$ и $m_W(\alpha)$, а также разными данными, которые привлекаются для расчёта вертикальных тропосферных задержек D_H и D_W. Помимо привлечения метеорологических данных в некоторые моделях используются высота приёмника потребителя над уровнем моря и его географическая широта. Угол возвышения спутника, определяющий геометрию трассы распространения сигнала от спутника к приёмнику, является необходимым параметром независимо от используемой тропосферной модели.

2.5.3 Смещения и вариации фазовых центров

2.5.3.1 Смещения и вариации фазовых центров антенн спутников

Орбита навигационного спутника описывается как траектория движения материальной точки, отождествляемой с центром масс спутника. Высокоточные координаты, предоставляемые международной службой IGS в sp3-файлах, относятся к центрам масс спутников. При этом измерения псевдодальности и псевдофазы приемником производятся относительно фазового центра антенны спутника, который не совпадает с центром масс. Данное смещение необходимо учитывать при высокоточном местоопределении в абсолютном режиме [91].

Вы этой связи выделяют два вида коррекций: смещение фазового центра и вариации фазового центра. Смещение фазового центра антенны навигационного спутника представляет собой постоянный трёхмерный вектор, зафиксированный в системе координат, связанной с навигационным спутником (его компоненты могут достигать 2 м и более, рис. 2.3 [91]), т.е. ориентация этого вектора зависит от ориентации спутника относительно Земли. Ось Z указанной системы координат направлена к центру масс Земли. Ось Y направлена вдоль оси вращения солнечных панелей и совпадает с векторным произведением оси Z и направления на Солнце. Ось X направлена на Солнце и дополняет систему до правой. Вариация фазового центра антенны навигационного спутника – это скалярная величина, которая зависит от угла надира вектора «спутник-приёмник» (не превышает 10-15 мм). Геометрическая интерпретация угла надира θ приведена на рис. 2.4 [91].

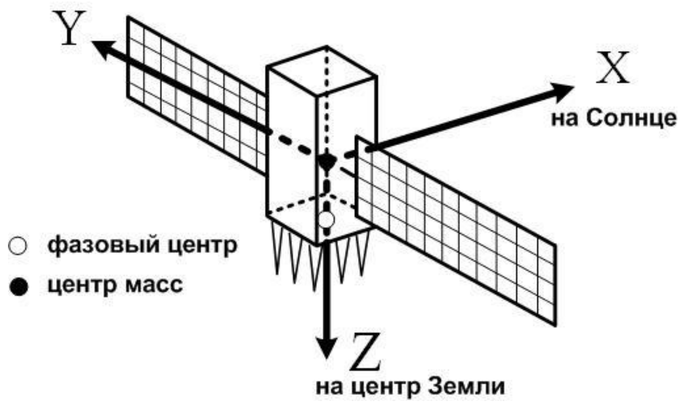

Рис. 2.3. Система координат, связанная с навигационным спутником

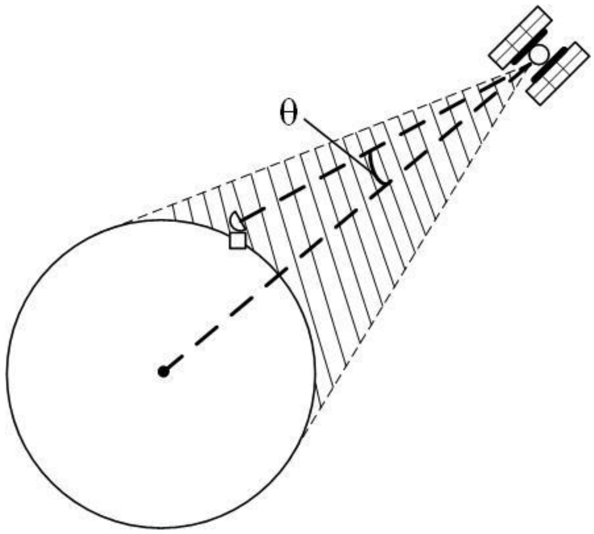

Рис. 2.4. Угол надира вектора «спутник-приёмник»

Смещение и вариации фазового центра для всех спутников систем ГЛОНАСС и GPS могут быть получены из файлов IGS формата ANTEX (ANTenna Exchange). Смещение ΔR^{j}_{APC} , связанное с эффектом смещения фазового центра антенны j-го спутника относительно его центра масс и входящее в математические модели измерений псевдодальности и псевдофазы (2.1, 2.2), есть сумма ортогональной проекции описанного трёхмерного вектора смещения фазового центра антенны спутника на линию, параллельную направлению “спутник-приёмник”, и вариации фазового центра антенны (скаляр).

2.5.3.2 Смещения и вариации фазовых центров антенн приёмника

Под точными координатами наземных станций сбора измерений сети службы IGS подразумеваются координаты точек, в которых устанавливаются антенны. Данные точки называются маркером станции (station marker). Измерения, фиксируемые приемником, производятся относительно фазового центра антенны. Под фазовым центром понимается точка в пространстве, в которой фиксируется высокочастотный спутниковый сигнал. Положение фазового центра в пространстве зависит от направления прихода сигнала и от его частоты. При этом возможность непосредственного измерения координат данной точки какими бы то ни было измерительными средствами отсутствует [91].

Аналогично информации о фазовых центрах спутниковых антенн смещения и вариации фазового центра антенн приёмника можно найти в ANTEX-файлах. Смещение фазового центра антенны приемника также представляет собой трёхмерный вектор, а вариация – скаляр.

Смещение ΔR_{APC}, связанное с эффектом смещения фазового центра антенны приёмника и входящее в математические модели измерений псевдодальности и псевдофазы (2.1), (2.2), есть разность ортогональной проекции трёхмерного вектора смещения фазового центра антенны приёмника на линию, параллельную направлению “спутник-приёмник”, и вариации фазового центра антенны приёмника (скаляр).

2.5.4 Взаимная ориентация антенн спутника и приёмника

Псевдофазовые измерения зависят от взаимной ориентации антенн приемника и спутника, а также от положения в пространстве линии прямой видимости между ними [92, 93]. В англоязычной литературе этот эффект называется wind-up эффектом. Смещение $\Delta R^{j}_{WIND-UP}$ в математической модели измерения псевдофазы (2.2) связано с проявлением данного эффекта.

В [92, 93] описаны два подхода к вычислению смещения $\Delta R^{j}_{WIND-UP}$ – на основании геометрических соотношений, связанных с вектором напряженности принимаемого электрического поля, а также на основании понятия эффективного диполя.

На рис. 2.5 приведены примеры зависимости смещения $\Delta R^{j}_{WIND-UP}$ для нескольких спутников от времени.

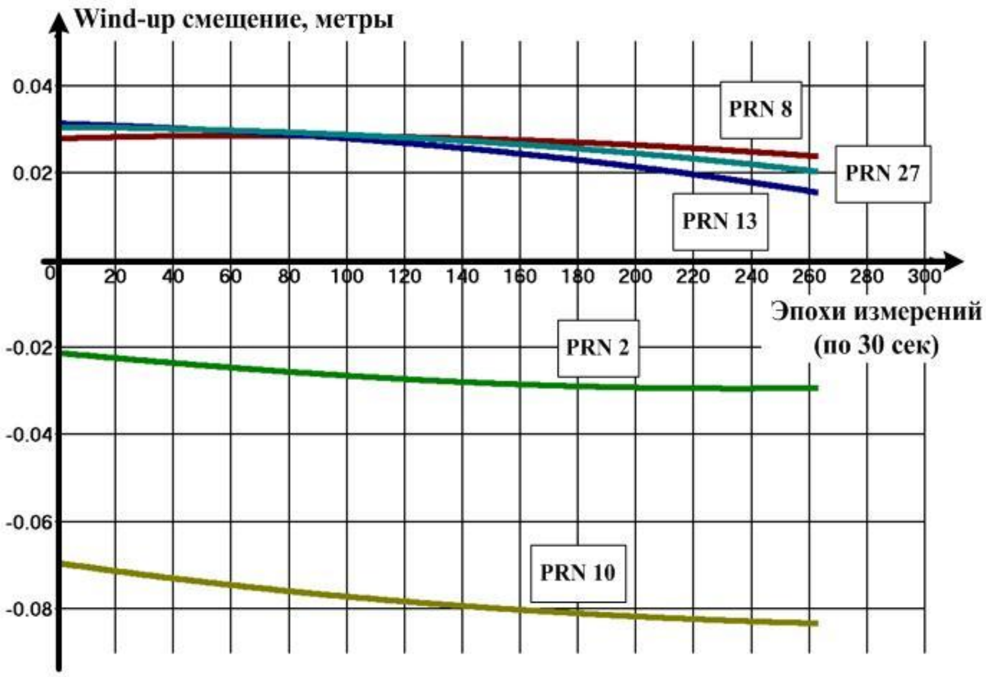

Рис. 2.5. Зависимость смещения $\Delta R^{j}_{WIND-UP}$ от времени для нескольких спутников

2.5.5 Релятивистские и гравитационные эффекты

Скорость движения навигационных спутников по орбитам настолько высока (около 14000 км/ч или 3.9 км/с), что пренебрегать релятивистскими эффектами и разностью гравитационных потенциалов в точках нахождения спутника и приёмника уже нельзя. Реальные спутниковые орбиты несколько отличаются от круговых, эллиптичность орбит спутников характеризуется значением эксцентриситета. Согласно ИКД системы GPS [81] учет указанного релятивистского эффекта входит в процедуру коррекции показаний спутниковых часов. Релятивистская поправка ΔT^{j}_{REL}, порождаемая эллиптичностью орбиты, входит в модели измерений (2.1) и (2.2) и вычисляется как [26]

$$\Delta T^{j}_{REL} = -\frac{2\vec{R}\cdot\vec{V}}{c^{2}}, \tag{2.28}$$

где:

$\vec{R}$ и $\vec{V}$ - вектора мгновенных координат и скорости спутника.

На рис. 2.6 приведены примеры зависимости смещений $c\Delta T^{j}_{REL}$ нескольких спутников от времени.

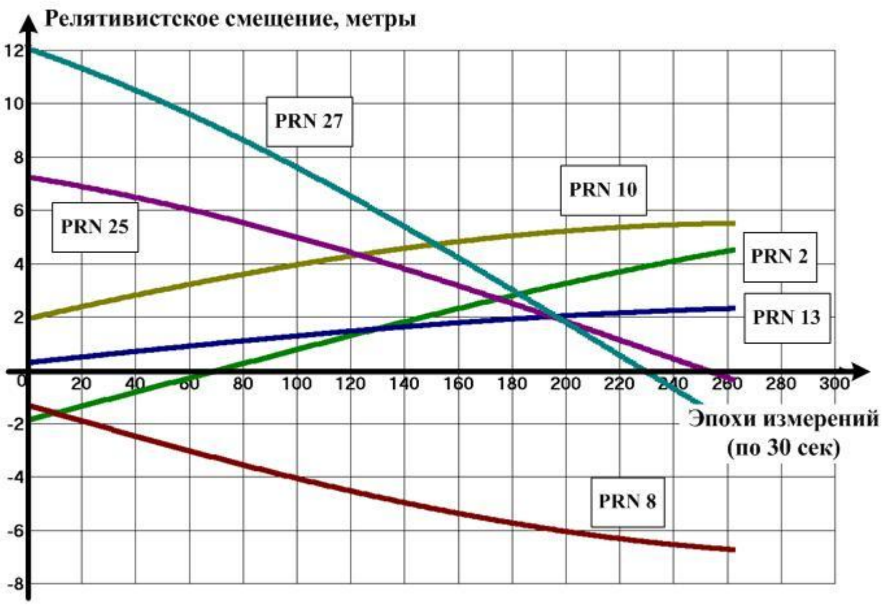

Рис. 2.6. Зависимость релятивистской поправки от времени

Гравитационная задержка сигнала обусловлена изменениями гравитационного поля небесного тела за время распространения сигнала от спутника до приемника. Гравитационная задержка сигнала $c\Delta T^{j}_{GRAV}$ (выраженная в метрах) в модели (2.2), связанная с гравитационным полем Земли, рассчитывается по формуле

$$c\Delta T^{j}_{GRAV} = \frac{2GM_E}{c^2} \cdot \ln\left(\frac{r_1 + r_2 + r_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}}\right), \qquad (2.29)$$

где r_2 - длина вектора $\mathbf{r_2}$, направленного от приемника к спутнику, r_1 - длина вектора $\mathbf{r_1}$, направленного из центра масс Земли к приемнику, $\mathbf{r_{12}}$ - длина вектора $\mathbf{r_{12}} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$. Гравитационная задержка (2.29) составляет величину порядка 1-2 см.

2.5.6 Приливные эффекты

К приливным эффектам (site displacement effects) принято относить периодические смещения, достигающие нескольких дециметров, которые не учтены международной земной системой отсчёта (International Terrestrial Reference Frame, ITRF). Указанные эффекты смещения возникают в результате периодических незначительных изменений геопотенциала Земли. В [26] рекомендуется учет следующих основных приливных эффектов: твердотельные приливы (приливы в упругом теле Земли, solid earth tides), полярные приливы (смещения полюсов Земли, polar tides), океанические приливы (ocean loading).

Твердотельные приливные эффекты заключаются в периодическом смещении областей на поверхности Земли в результате гравитационного влияния Луны и Солнца и вызванным им перераспределением масс внутри Земли [94]. При высокоточном местоопределении данные коррекции могут достигать 30 см по высоте и 5 см в горизонтальной плоскости [26]. На рис. 2.7 приводятся зависимости трех компонент вызванных твердотельными приливами смещений в метрах (в локальной системе координат UEN, Up-East-North, направления указаны на графике) для станции BRUS сети IGS от времени для суточного файла измерений за 3 марта 2008 г.

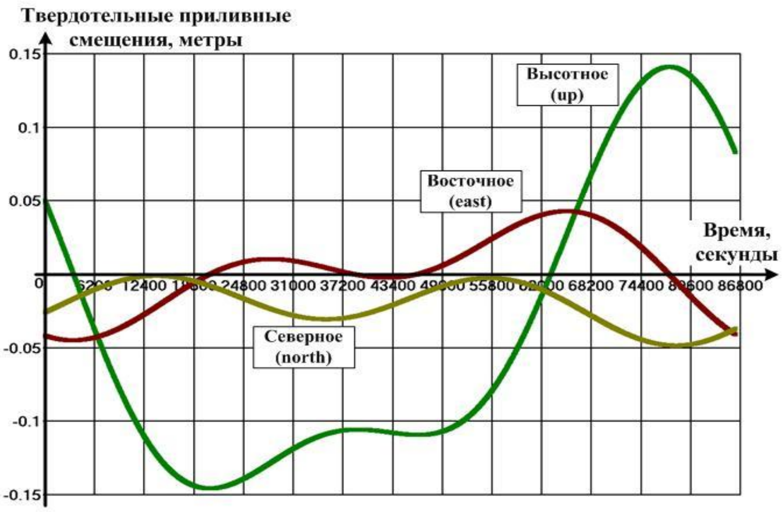

Рис. 2.7. Компоненты вызванного твердотельными приливами смещения в локальной системе координат UEN, станция BRUS, 3 марта 2008

Полярными приливами называются периодические смещения оси вращения Земли по отношению к ее поверхности (смещению полюсов Земли). Данные смещения вызваны изменениями гравитационного потенциала Земли под воздействием Солнца и Луны [94]. Максимальные значения коррекций, связанных со смещениями полюсов Земли, достигают 25 мм по высоте и 7 мм в горизонтальной плоскости [95].

Океанические приливы выражаются в деформации поверхности Земли под воздействием приливных океанических масс, т.е. возмущения в координатах приемника вызывается движением масс воды в океане во время приливов, что создает на поверхность Земли периодическую нагрузку [94]. В сравнении с твердотельными приливами, изменение геопотенциала Земли под воздействием океанических приливов оказывается меньше почти на порядок, но при абсолютном местоопределении с сантиметровой точностью океанические приливы следует учитывать [26].

Указанное в математических моделях (2.1), (2.2) приливное смещение d^j_{TIDAL} (включающее в себя твердотельное смещение d^j_{SOLID} , океаническое смещение d^j_{OCEAN} и коррекцию d^j_{POLE}, связанную со смещением полюсов Земли) отражает коррекцию измерений псевдодальности и псевдофазы навигационного приёмника. Может быть реализован иной способ учёта приливных коррекций, при котором вычисляются поправки непосредственно к положению навигационного приёмника в локальной системе координат.

2.6 Экспериментальные результаты местоопределения в режиме Float PPP

2.6.1 Зависимость точности местоопределения от длительности интервала обработки

Для многих практических приложений время получения координат потребителя с заданной точностью является одним из наиболее критичных показателей. Задержка формирования высокоточных координат в несколько часов может быть допустимой, например, при планировании местности, изучении движения тектонических плит и контроле деформации сооружений, но для некоторых приложений требуются высокоточное местоопределение практически в режиме реального времени (управление баржами, обработка почвы, местоопределение морских буровых платформ).

В данном подразделе исследуется зависимость точности вычисленных оценок координат потребителя от длительности интервала обработки. В ходе эксперимента обрабатывались измерения станции “TIXI” сети службы IGS за 11 января 2011 г, расположенной на севере республики Саха (Якутия). В качестве эталонных использовались высокоточные координаты станции, вычисленные службой IGS. Для обработки суточного файла измерений за 11 января 2011 года использовалась высокоточная ЭВИ службы IGS, формируемая с задержкой около двух недель. Использовались файлы формата *.sp3 со спутниковыми координатами с временным дискретом 15 минут, а также файлы формата *.clk с поправками к показаниям часов спутников с временным дискретом 5 минут. Интервал выдачи оценок координат потребителя был также 5 минут.

В ходе работы на базе библиотеки программ GPSTk [10, 96, 97] был реализован алгоритм высокоточного местоопределения в режиме Float PPP, в котором используется традиционная ионосферосвободная модель измерений GPS P3L3 (2.8). Вычисленные оценки координат сравнивались с результатами обработки того же файла измерений на том же временном интервале несколькими международными сервисами, предоставляющими услугу высокоточного местоопределения через Интернет: APPS (США), GAPS (Канада), magicGNSS (Испания), NRCan (Канада), Glavkosmos (Россия). Анализировалась зависимость средних трёхмерных ошибок местоопределения (3D-ошибок) $\langle 3D_{ER} \rangle$ при работе по измерениям системы GPS для реализованного алгоритма и указанных международных сервисов от длительности интервала измерений в часах. 3D-ошибка вычислялась согласно выражению

$$3D_{ER} = \sqrt{\left(X_{ET} - \hat{X}\right)^2 + \left(Y_{ET} - \hat{Y}\right)^2 + \left(Z_{ET} - \hat{Z}\right)^2}\,, \qquad (2.30)$$

где:

X_{ET}, Y_{ET}, Z_{ET} - эталонные высокоточные координаты станции;

$\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ - вычисленные оценки координат станции.

Средняя 3D-ошибка $\langle 3D_{ER} \rangle$ вычислялась согласно выражению

$$\langle 3D_{ER} \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} 3D_{ERi}}{N}, \qquad (2.31)$$

где:

$3D_{ERi}$ - 3D-ошибка в i-ом опыте высокоточного местоопределения на интервале измерений заданной длительности,

N – число опытов высокоточного местоопределения на интервале измерений заданной длительности.

На рис. 2.8 приводятся зависимости средних 3D-ошибок $\langle 3D_{ER} \rangle$ (2.31) для реализованного алгоритма (“PPP”) и международных сервисов при обработке измерений на интервалах длительностью 1, 2, 3, 6, 8, 12, 24 часа в течение суток [98, 99]. Следует отметить, что на рис. 2.8 достоверность средних ошибок для интервалов разных длительностей разная, т.к. усреднение производилось по различному числу опытов. Однако рис. 2.8 дает возможность оценить характер повышения точности местоопределения с ростом длительности интервала обработки измерений.

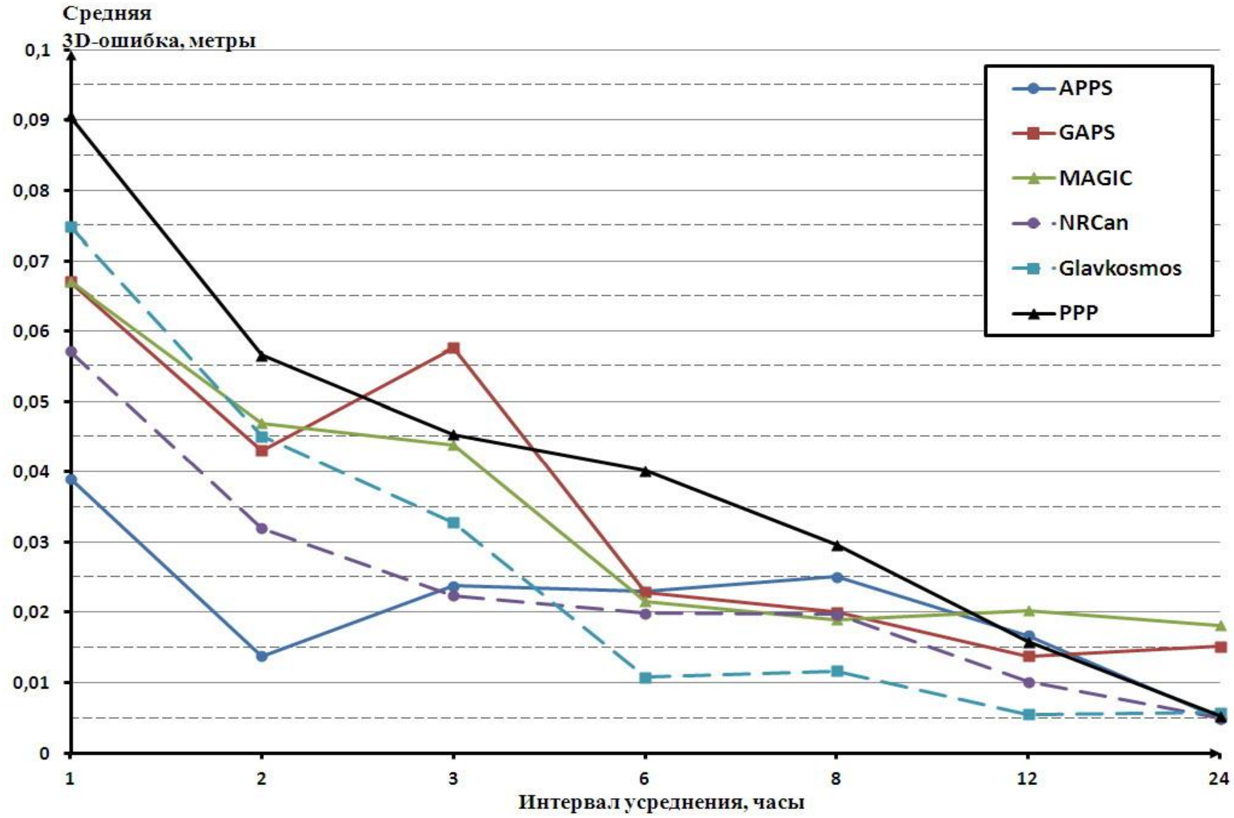

Рис. 2.8. Зависимость средних 3D-ошибок реализованного алгоритма и международных сервисов при обработке измерений на интервалах длительностью 1, 2, 3, 6, 8, 12, 24 часа в течение суток

Как видно из результатов на рис. 2.8, в режиме Float PPP сантиметровая точность местоопределения достигается только через несколько часов обработки (6-20 часов). Длительный период сходимости к точному решению на рис. 2.8 обусловлен тем, что в модели (2.8) целочисленная неоднозначность $\lambda_3^G N_3^{G,j}$ вбирает в себя немоделируемые кодовые и фазовые смещения, формируя действительную величину A_{P3}^j (2.7), что не позволяет учитывать в обработке целочисленную природу неоднозначности псевдофазовых измерений. Анализируя результаты графика на рис. 2.8, можно отметить, что для большей части проанализированных интервалов обработки реализованный алгоритм обеспечивает сравнимый с международными сервисами сантиметровый уровень точности, незначительно уступая им. При этом для суточного интервала измерений (24 часа) реализованный алгоритм показал наилучшие результаты.

2.6.2 Зависимость точности местоопределения от точности ЭВИ

В данном подразделе исследуется зависимость точности результатов местоопределения потребителя от точности используемой ЭВИ. Сравнивались четыре разных точности ЭВИ для системы GPS от IGS (“финальная”, “быстрая”, “сверхбыстрая (оценка)” (сверхоперативная наполовину наблюдаемая) и “сверхбыстрая (прогноз)” (сверхоперативная наполовину предсказанная). На рис. 2.9 приводится диаграмма зависимости 3D-ошибки местоопределения для реализованного алгоритма Float PPP от точности ЭВИ. Как видно из рис. 2.9, точность ЭВИ, сформированной по измерениям, несущественно влияет на точность местоопределения в режиме Float PPP. Однако это влияние резко усиливается при использовании прогнозной ЭВИ (в вычислительном эксперименте, к которому относится рис. 2.9, местоопределение осуществлялось на интервале измерений длительностью 3 часа того же файла измерений, что и в подразделе 2.6.1).

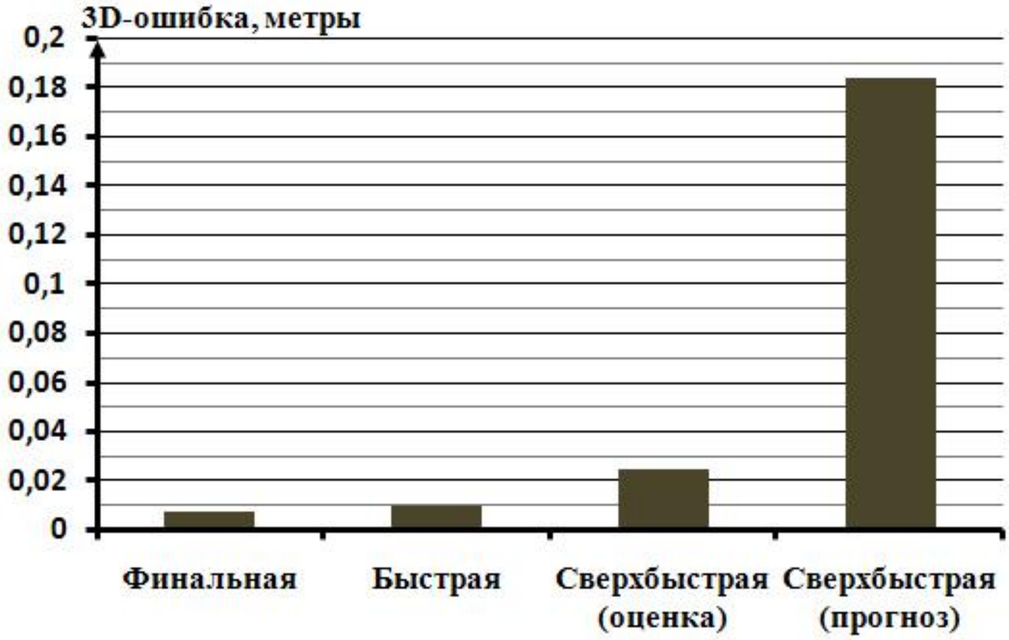

Рис. 2.9. Точность местоопределения при использовании ЭВИ различной точности

2.6.3 Сравнение ЭВИ от разных источников

В России в настоящее время развёрнута система СДКМ, по которой также формируется высокоточная ЭВИ. В работе было проведено сравнение точности местоопределения в режиме Float PPP с использованием ЭВИ от службы IGS и от сети СДКМ.

Местоопределение осуществлялось по измерениям станции “IRKJ” сети IGS, расположенной в городе Иркутск. В качестве эталонных использовались высокоточные координаты станции, вычисленные службой IGS. Для обработки суточного файла измерений за 24 мая 2011 года использовалась финальная ЭВИ службы IGS и ЭВИ, сформированная по сети СДКМ. Вычисление оценок координат потребителя осуществлялось через каждые 5 минут. Оценки координат сравнивались с результатами обработки того же файла измерений на том же временном интервале и той же ЭВИ российского сервиса высокоточного местоопределения ([100], на графиках аббревиатура Glavkosmos).

На рис. 2.10 показаны зависимости средних 3D-ошибок $\langle 3D_{ER} \rangle$ (2.31) для реализованного в диссертации алгоритма Float PPP (“PPP”) и российского сервиса (“Glavkosmos”) при обработке измерений на интервалах 1, 2, 3, 6, 8, 12, 24 часа в течение суток. На рис. 2.10 достоверность средних ошибок для интервалов разных длительностей разная, т.к. усреднение производилось по различному числу опытов. Однако график рис. 2.10 дает возможность оценить характер повышения точности местоопределения с ростом длительности интервала обработки измерений при разной ЭВИ.

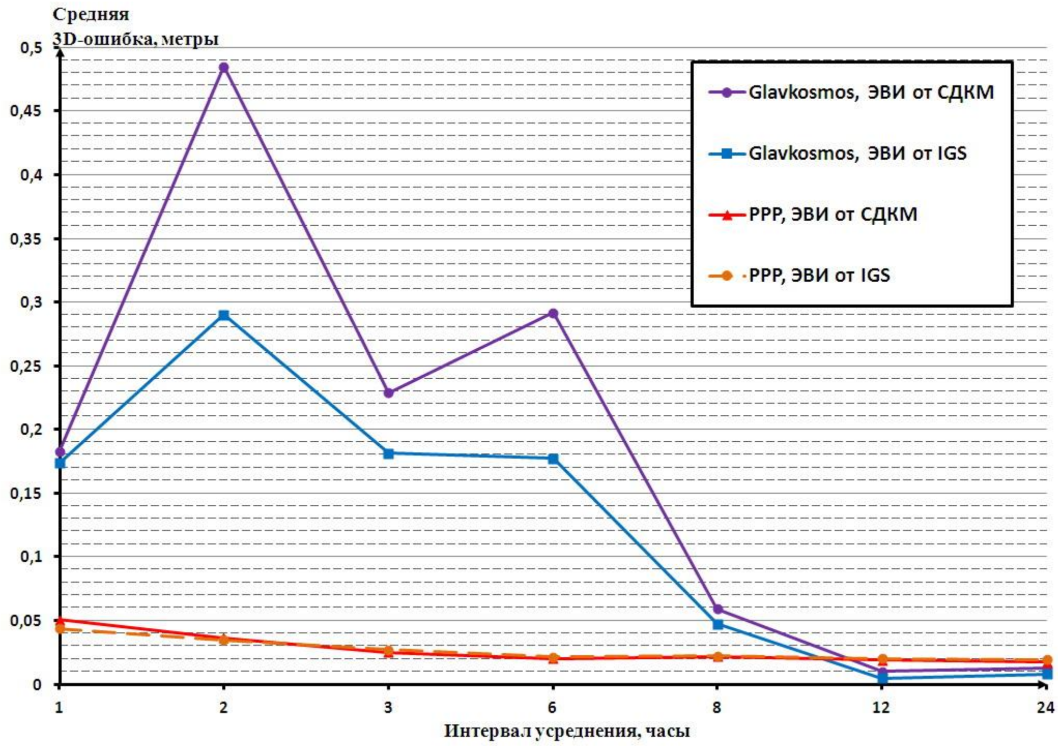

Рис. 2.10. Зависимость средних 3D-ошибок реализованного алгоритма и российского сервиса при обработке измерений на интервалах 1, 2, 3, 6, 8, 12, 24 часа в течение суток для двух вариантов ЭВИ (от службы IGS и от сети СДКМ)

Из рис. 2.10 можно сделать вывод о том, что в условиях проведенного эксперимента реализованный в диссертации алгоритм Float PPP оказался практически не чувствительным к источнику ЭВИ, т.е. при разных данных точность определения координат потребителя практически не изменилась. При этом хорошо видно, что для российского сервиса высокоточного местоопределения [100] ЭВИ от службы IGS обеспечивает более высокую точность определения координат, чем ЭВИ от сети СДКМ.

2.7 Выводы по главе 2

Во второй главе рассматриваются основные принципы местоопределения в ГНСС в режиме Float PPP (большая часть которых используется и в режиме Integer PPP). Приведена модель измерений на исходных частотах GPS, а также широко используемая в режиме Float PPP традиционная ионосферосвободная модель измерений GPS. Отмечены причины, по которым в данной модели оцениваются действительные неоднозначности.

Рассмотрена блок-схема алгоритма высокоточного местоопределения потребителя в режиме Float PPP, подробно расписаны основные этапы алгоритма, а также компенсация систематических смещений в измерениях. Все указанные процедуры применяются и в режиме местоопределения Integer PPP, но в рамках другой модели измерений.

Проанализирована зависимость точности местоопределения от длительности интервала обработки измерений. Проведено сравнение результатов работы реализованного в диссертации алгоритма Float PPP с результатами работы алгоритмов ряда международных сервисов. Установлено, что для достижения сантиметровой точности местоопределения в режиме Float PPP необходимо обрабатывать измерения в течение интервала времени от 6 до 20 часов. Также проанализирована зависимость точности местоопределения в режиме Float PPP от точности используемой ЭВИ. Выявлено, что точность местоопределения резко ухудшается при использовании прогнозных значений ЭВИ.

В вычислительных экспериментах по высокоточному местоопределению в режиме Float PPP с использованием ЭВИ от сети IGS и СДКМ выявлено, что реализованный в работе алгоритм местоопределения в режиме Float PPP практически не чувствителен к источнику ЭВИ.

ГЛАВА 3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРЕОДОЛЕНИЯ ДЕФИЦИТА РАНГА В ЗАДАЧАХ ВЫСОКОТОЧНОГО МЕСТООПРЕДЕЛЕНИЯ В АБСОЛЮТНОМ РЕЖИМЕ ЗА СЧЁТ РАЗРЕШЕНИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ПСЕВДОФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1 Классификация систем линейных уравнений

Задача местоопределения в ГНСС сводится к решению системы уравнений, которые, будучи линеаризованными, связывают измерения навигационного приёмника с оцениваемыми параметрами, в число которых входят поправки к грубым координатам потребителя. Для пояснения специфики решения систем линейных уравнений, соответствующих местоопределению в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений, проведём упрощённую классификацию таких систем.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\mathbf{y}_{m\times 1} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}, \tag{3.1}$$

где:

$\mathbf{y}$ - m-вектор измерений с известной ковариационной матрицей $\mathbf{W}^{-1}$,

$\mathbf{A}$ – информационная $m\times n$ матрица связи n-вектора оцениваемых параметров оцениваемых параметров $\mathbf{x}$ с измерениями (дизайн-матрица),

$r = \mathrm{rank}(\mathbf{A})$ – ранг матрицы $\mathbf{A}$.

Тип системы линейных уравнений (3.1) определяется числами m, n и r, а также фактом принадлежности вектора $\mathbf{y}$ линейному векторному пространству $R(\mathbf{A})$, образованному столбцами матрицы $\mathbf{A}$.

Классификация систем линейных уравнений может осуществляться по признаку однородности. Выделяют однородные системы линейных уравнений, для которых $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, и неоднородные, для которых $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Наиболее распространённая в литературе классификация систем линейных уравнений в качестве признака классификации использует понятие совместности. Говорят, что система линейных уравнений (3.1) совместна, если вектор измерений $\mathbf{y}$ может быть представлен в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}$, где коэффициентами этой линейной комбинации являются компоненты некоего вектора $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ - векторное пространство, образованное всеми действительными n-мерными векторами). В противном случае – система не совместна. То есть, система (3.1) совместна, если она имеет хотя бы одно строгое решение (или просто решение). Под строгим решением (или просто решением) здесь и далее понимается такой вектор $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, которой обращает все m уравнений системы

(3.1) в верные равенства. Совместную систему, имеющую единственное решение, далее будем называть совместной определённой ($m = n = r$). Совместную систему, имеющую множество решений, будем называть совместной недоопределённой ($m < n, r = m$). Несовместной переопределённой будем называть несовместную систему линейных уравнений, в которой $r = n, m > n,$. Несовместной недоопределённой будем называть несовместную систему, в которой $r < \min(m, n)$.

Введём в рассмотрение четыре основные векторные подпространства, связанные с матрицей $\mathbf{A}$ системы (3.1) [101]:

- Подпространство столбцов матрицы $\mathbf{A}$ ($\mathrm{R}(\mathbf{A})$),
- Нуль-пространство матрицы (ядро) $\mathbf{A}$ ($\mathrm{N}(\mathbf{A})$),
- Подпространство строк матрицы $\mathbf{A}$ ($\mathrm{R}(\mathbf{A}^\mathrm{T})$),
- Нуль-пространство (ядро) матрицы $\mathbf{A}^\mathrm{T}$ ($\mathrm{N}(\mathbf{A}^\mathrm{T})$).

Под $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ понимается линейное векторное подпространство, образованное столбцами матрицы $\mathbf{A}$. Подпространство строк матрицы $\mathbf{A}$ является подпространством столбцов матрицы $\mathbf{A}^\mathrm{T}$. Ядром (нуль-пространством, null-space) матрицы $\mathbf{A}$ является множество таких $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$, которые являются строгим решением однородной системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Связь между указанными основными подпространствами удобно изобразить следующей диаграммой [44]:

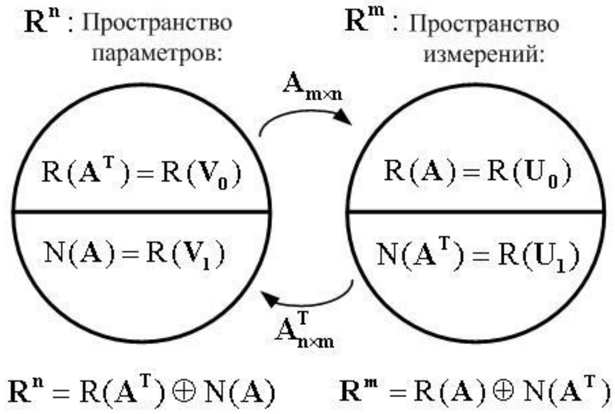

Рис. 3.1. Четыре основные векторные подпространства

На рис. 3.1 также приведены выражения для прямых сумм пространства измерений $\mathbf{R}^\mathbf{m}$ (векторное пространство, образованное всеми действительными m-мерными векторами) и пространства параметров $\mathbf{R}^\mathbf{n}$, образованных указанными выше основными векторными подпространствами.

Матрицы $\mathbf{U}_{\mathbf{0},m\times r}$, $\mathbf{U}_{\mathbf{1},m\times(m-r)}$, $\mathbf{V}_{\mathbf{0},n\times r}$, $\mathbf{V}_{\mathbf{1},n\times(n-r)}$ на рис. 3.1 соответствуют ортогональным матрицам, удовлетворяющим условиям сингулярного разложения матрицы $\mathbf{A}$ [44], т.е.

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{U_0} \;\vdots\; \mathbf{U_1}\right]\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{\Lambda_r^{1/2}} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{V_0}^{\mathbf{T}} \\ \hdashline \mathbf{V_1}^{\mathbf{T}} \end{array}\right] = \mathbf{U_0}\mathbf{\Lambda_r^{1/2}}\mathbf{V_0}^{\mathbf{T}}, \tag{3.2}$$

где:

$\mathbf{\Lambda_r^{1/2}} = \mathrm{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$ - диагональная матрица с упорядоченными по убыванию сингулярными числами σ_i (i=1,…,r) матрицы $\mathbf{A}$ (квадратные корни неотрицательных собственных значений матрицы $\mathbf{A^T A}$). Для указанных матриц справедливы следующие выражения [44]:

$$\begin{cases} \mathrm{R}(\mathbf{U_0}) = \mathrm{R}(\mathbf{A}),\ \mathrm{R}(\mathbf{U_1}) = \mathrm{R}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathrm{N}(\mathbf{A^T}) \\ \mathrm{R}(\mathbf{V_0}) = \mathrm{R}(\mathbf{A^T}),\ \mathrm{R}(\mathbf{V_1}) = \mathrm{R}(\mathbf{A^T})^{\perp} = \mathrm{N}(\mathbf{A}) \end{cases} \tag{3.3}$$

т.е. согласно рис. 3.1 и (3.3) $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{V}_{\mathbf{1},n\times(n-r)} = \mathbf{0}_{m\times(n-r)}$ и $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{n\times m}\mathbf{U}_{\mathbf{1},m\times(m-r)} = \mathbf{0}_{n\times(m-r)}$.

Дополняющие друг друга до прямой суммы (комплементарные друг другу) векторные подпространства на рис. 3.1 являются ортогональными друг к другу. Однако векторные подпространства, образующие прямые суммы пространств $\mathbf{R^m}$ и $\mathbf{R^n}$, не обязательно должны быть ортогональными. С привлечением понятия обобщённого обращения и без использования условия ортогональности рис. 3.1 в более общем виде может быть представлен следующим образом (свойства векторных подпространств $\mathrm{R}(\mathbf{S})$, $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}}^{\perp})$ и $\mathrm{R}(\mathbf{D})$ указаны в нижней части рис. 3.2):

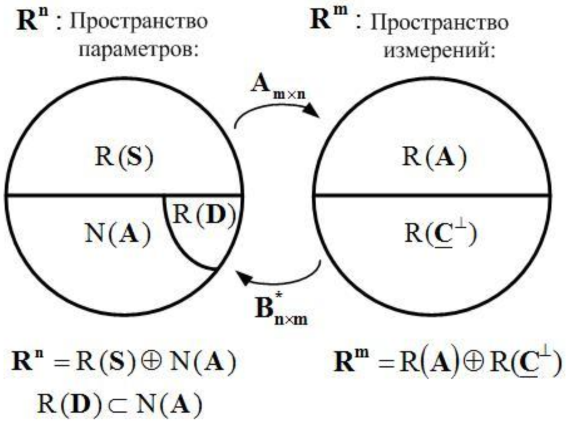

Рис. 3.2. Четыре основные векторные подпространства, наиболее общий случай с использованием понятия обобщённого обращения

Согласно [44] обобщённым обращением (обобщённо-обратной матрицей, generalized inverse) для матрицы $\mathbf{A_{m\times n}}$ называется матрица $\mathbf{B^*_{n\times m}}$ такая, что

$$\mathbf{AB^*A} = \mathbf{A} \tag{3.4}$$

Тогда для матрицы $\mathbf{B^*}$ выполняются также следующие условия [44]

$$\begin{cases} \mathbf{B}^*\mathbf{AS} = \mathbf{S} \\ \mathbf{B}^*\underline{\mathbf{C}}^{\perp} = \mathbf{D} \end{cases}, \qquad (3.5)$$

определяющие однозначное соответствие между векторными подпространствами $\mathrm{R}(\mathbf{AS}) = \mathrm{R}(\mathbf{A})$ и $\mathrm{R}(\mathbf{S})$, а также между подпространствами $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}}^{\perp})$ и $\mathrm{R}(\mathbf{D})$. Базисы $\mathbf{S}$ векторного подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ и $\underline{\mathbf{C}}^{\perp}$ векторного подпространства $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}}^{\perp})$ могут быть выбраны множеством различных способов. Единственным условием для этих базисов является дополнительность (комплементарность) подпространств $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ и $\mathrm{N}(\mathbf{A})$, а также $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ и $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}}^{\perp})$, т.е. требуется выполнение условий прямой суммы $\mathbf{R^n} = \mathrm{R}(\mathbf{S}) \oplus \mathrm{N}(\mathbf{A})$ и $\mathbf{R^m} = \mathrm{R}(\mathbf{A}) \oplus \mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}}^{\perp})$ (знак “ $\oplus$ ” используется для обозначения прямой суммы векторных подпространств, не обязательно ортогональной). Одна и та же матрица $\mathbf{A}_{\mathbf{m\times n}}$ может иметь множество различных обобщённо-обратных матриц $\mathbf{B}^*_{\mathbf{n\times m}}$, т.е. обобщённое обращение $\mathbf{B}^*$ для данной матрицы $\mathbf{A}$ в наиболее общем случае не является уникальным. Для однозначного определения матрицы $\mathbf{B}^*$ необходимо задать значения матриц $\underline{\mathbf{C}}^{\perp}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{S}$.

Ниже в Таблице 3 приводится упрощённая классификация систем линейных уравнений (3.1) с приведением конкретных примеров соотношения чисел m, n и r. Классификационным признаком при этом является соотношение чисел m, n и r, что определяет 4 взаимоисключающих типа систем линейных уравнений, которые рассматриваются далее. Для каждого типа в Таблице 3 приводится название (совместные определённые, совместные недоопределённые, несовместные переопределённые и несовместные недоопределённые). В таблице рассмотрены только основные типы систем линейных уравнений. Например, совместные системы уравнений, для которых r=n и m>n, не представляют практического интереса в контексте задачи местоопределения в ГНСС (из-за присутствия ошибок измерений системы уравнений в ГНСС несовместны), поэтому в Таблице 3 они не представлены. Приведённые в Таблице 3 4 аналитических примера систем линейных уравнений далее рассматриваются подробно. Подробное описание каждого типа систем линейных уравнений на примерах приводится после Таблицы 3, где приведены лишь основные соотношения.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию систем линейных уравнений различных типов. Такая интерпретация может быть построена в пространстве координат вектора оцениваемых параметров ($x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$), а также в векторном пространстве, задаваемом вектор-столбцами матрицы $\mathbf{A}$. Ниже приводятся оба варианта геометрической интерпретации с комментариями для примеров систем линейных уравнений из Таблицы 3. По причине ограниченности возможностей автора в изображении векторных пространств мерности больше трёх далее в примерах к Таблице 3 эта мерность не превышается, а геометрические интерпретации, требующие большей мерности, не рассматриваются.

Таблица 3. Упрощённая классификация систем линейных уравнений

Системы линейных уравнений			
Совместные		**Несовместные**	
Совместные определённые	**Совместные недоопределённые**	**Несовместные переопределённые**	**Несовместные недоопределённые**
$r = m = n$, $\mathbf{y} \in R(\mathbf{A}) = \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^{*}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ - единственное решение, $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{-1}$. **Пример 1**, r=2: $\begin{cases} B_1x_1 + C_1x_2 = y_1, \\ B_2x_1 + C_2x_2 = y_2; \end{cases}$	$m < n, r = m$, $y \in R(\mathbf{A}) = \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-}\mathbf{y} + \mathbf{V}_1\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n-r}}$, $R(\mathbf{V}_1) = N(\mathbf{A})$ - множество решений, определяемых $\mathbf{S}$ и $\boldsymbol{\alpha}_{(\mathbf{n-r})\times 1}$, $\mathbf{A}^{-} = \mathbf{S}(\mathbf{AS})^{-1}$ - правая обобщённо-обратная матрица. $\hat{\mathbf{x}}_{ПС} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{y}$ - нормальное псевдорешение, $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}(\mathbf{AA}^{\mathbf{T}})^{-1}$ **Пример 2**, r=m=2, n=3: $\begin{cases} B_1x_1 + C_1x_2 + D_1x_3 = y_1, \\ B_2x_1 + C_2x_2 + D_2x_3 = y_2; \end{cases}$	$r = n, m > n$, $\mathbf{y} \notin R(\mathbf{A})$, $R(\mathbf{A}) \subset \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ $\hat{\mathbf{x}}_{МНК} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$ - решение наименьших квадратов; $\mathbf{A}^{+} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{x}}_{О\_МНК} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{WA})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{Wy}$ - решение обобщённых наименьших квадратов; $\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}} \\ (\mathbf{U}_1^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{C}}^{\perp})^{-1}\mathbf{U}_1^{\mathbf{T}} \end{pmatrix}\mathbf{y}$ - множество решений расширенной системы, $(\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}$ - левая обобщённо-обратная матрица. **Пример 3**, r=n=2, m=3: $\begin{cases} B_1x_1 + C_1x_2 = y_1, \\ B_2x_1 + C_2x_2 = y_2, \\ B_3x_1 + C_3x_2 = y_3, \end{cases}$	$r < \min(m, n)$ $\mathbf{y} \notin R(\mathbf{A})$, $R(\mathbf{A}) \subset \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ $\hat{\mathbf{x}}_{ПС} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{y}$ - нормальное псевдорешение; $\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \underline{\mathbf{C}}^{\perp} \\ (\mathbf{S}^{\perp})^{\mathbf{T}} & \mathbf{X} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$ - множество решений наименьших квадратов **Пример 4**, r=1, m=3, n=2: $\begin{cases} B_1x_1 + C_1x_2 = y_1, \\ B_2x_1 + C_2x_2 = y_2, \\ B_3x_1 + C_3x_2 = y_3, \end{cases}$

Пример 1, совместная определённая система: $r = m = n$, r=2, $\begin{cases} B_1x_1 + C_1x_2 = y_1, \\ B_2x_1 + C_2x_2 = y_2; \end{cases}$

В пространстве координат вектора оцениваемых параметров (x_1, x_2) уравнения системы являются уравнениями двух прямых на плоскости (рис. 3.3). Единственным строгим решением $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ системы является вектор $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^T$, компонентами которого являются координаты точки пересечения данных прямых. В векторном пространстве $R(\mathbf{A})$ столбцов матрицы $\mathbf{A}$ вектор измерений $\mathbf{y}$ единственным образом раскладывается как линейная комбинация векторов $\mathbf{B} = [B_1 \quad B_2]^T$ и $\mathbf{C} = [C_1 \quad C_2]^T$ (рис. 3.4). Рис. 3.2 для данного примера упрощается и принимает вид рис. 3.5 (в системе примера 1 дефицита ранга нет, $N(\mathbf{A}) = 0$ и $R(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}) = 0$, поэтому $R(\mathbf{S}) = \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ и $R(\mathbf{A}) = \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$). Обобщённо-обратная матрица $\mathbf{B}^*$ для случая $r = m = n$ совпадает с обратной матрицей $\mathbf{A}^{-1}$ и является единственной (уникальной).

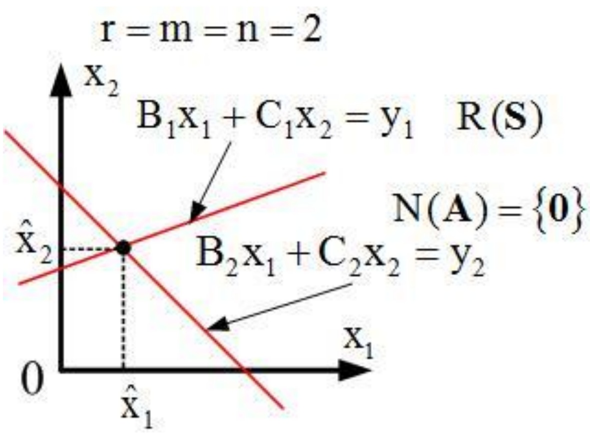

Рис. 3.3. Совместная определённая система

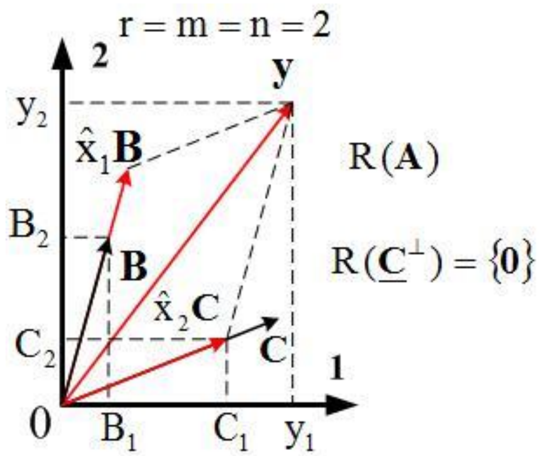

Рис. 3.4. Совместная определённая система

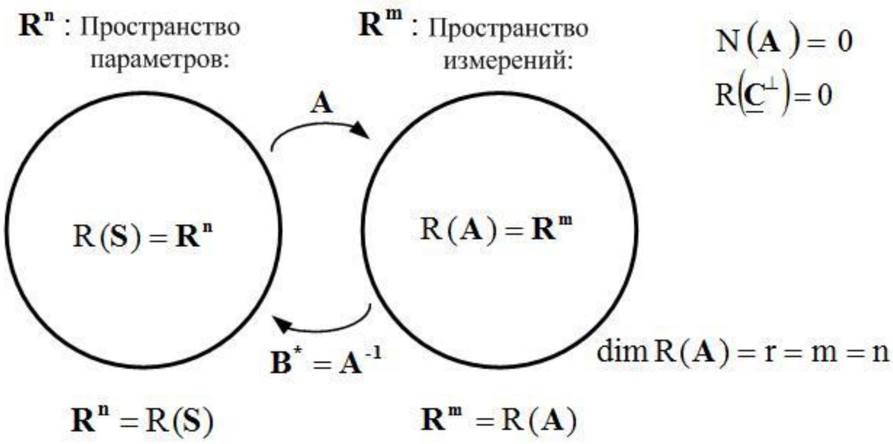

Рис. 3.5. Основные векторные подпространства, соответствующие примеру 1 из Таблицы 3

Пример 2, совместная недоопределённая система: r=m=2, n=3, $\begin{cases} B_1x_1 + C_1x_2 + D_1x_3 = y_1, \\ B_2x_1 + C_2x_2 + D_2x_3 = y_2; \end{cases}$

В пространстве координат вектора оцениваемых параметров (x_1, x_2, x_3) уравнения системы являются уравнениями двух плоскостей в трёхмерном пространстве. Множеством решений системы уравнений данного примера являются координаты точек прямой, по которой пересекаются указанные плоскости (рис. 3.6, красная линия). В общем случае бесконечное множество строгих решений совместной недоопределённой системы вычисляется следующим образом [44]

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-}\mathbf{y} + \mathbf{V_1}\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n-r}},\ \mathrm{R}(\mathbf{V_1}) = \mathrm{N}(\mathbf{A}), \tag{3.6}$$

где $\mathbf{A}^{-} = \mathbf{S}(\mathbf{AS})^{-1}$ - правая обобщённо-обратная матрица (частный случай обобщённого обращения $\mathbf{B}^{*}$ (3.4), соответствующий информационной матрице с линейно-независимыми строками, т.е. r=m; матрица $\mathbf{A}$, будучи умноженной справа на $\mathbf{A}^{-}$, равна единичной матрице: $\mathbf{AA}^{-} = \mathbf{AS}(\mathbf{AS})^{-1} = \mathbf{I}_{\mathbf{r=m}}$). Множество решений (3.6) есть сумма общего решения однородной системы уравнений $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} = 0$ (слагаемое $\mathbf{V_1}\boldsymbol{\alpha}$, которое также является и общим решением однородной системы $\mathbf{Ax} = 0$) и некоторого частного решения нормальной системы уравнений $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ (слагаемое $\mathbf{A}^{-}\mathbf{y}$) [102]. В качестве подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ можно выбрать любую плоскость, которая не содержит в себе вектора $\mathrm{N}(\mathbf{A})$, например, одну из координатных плоскостей - плоскость $(x_3 0 x_2)$ (на рис. 3.6 жирными чёрными точками показаны точки, лежащие в плоскости $\mathrm{R}(\mathbf{S})$). При выборе базиса $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ правая обобщённо-обратная матрица становится правой обратной матрицей: $\mathbf{A}^{-} = \mathbf{S}(\mathbf{AS})^{-1} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}(\mathbf{AA}^{\mathbf{T}})^{-1}$, т.е. $\mathbf{AA}^{\mathbf{T}}(\mathbf{AA}^{\mathbf{T}})^{-1} = \mathbf{I}_{\mathbf{m=r}}$.

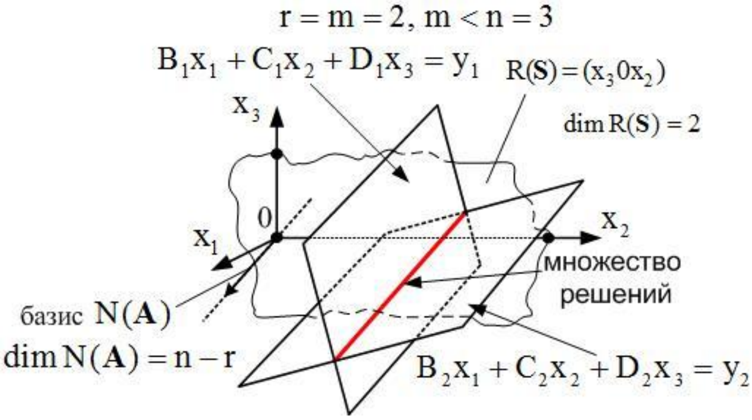

Рис. 3.6. Совместная недоопределённая система (r=m<n)

На рис. 3.7 более детально показан случай, когда в качестве векторного подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ выбрана произвольная плоскость (пересекающиеся плоскости, соответствующие уравнениями системы, не показаны, M – точка пересечения множества решений и плоскости

$R(\mathbf{S})$, N – точка пересечения координатной оси $0x_2$ и плоскости $R(\mathbf{S})$, P – точка пересечения множества решений и координатной плоскости $(x_3 0 x_2)$, Q – точка пересечения множества решений и координатной плоскости $(x_1 0 x_2)$).

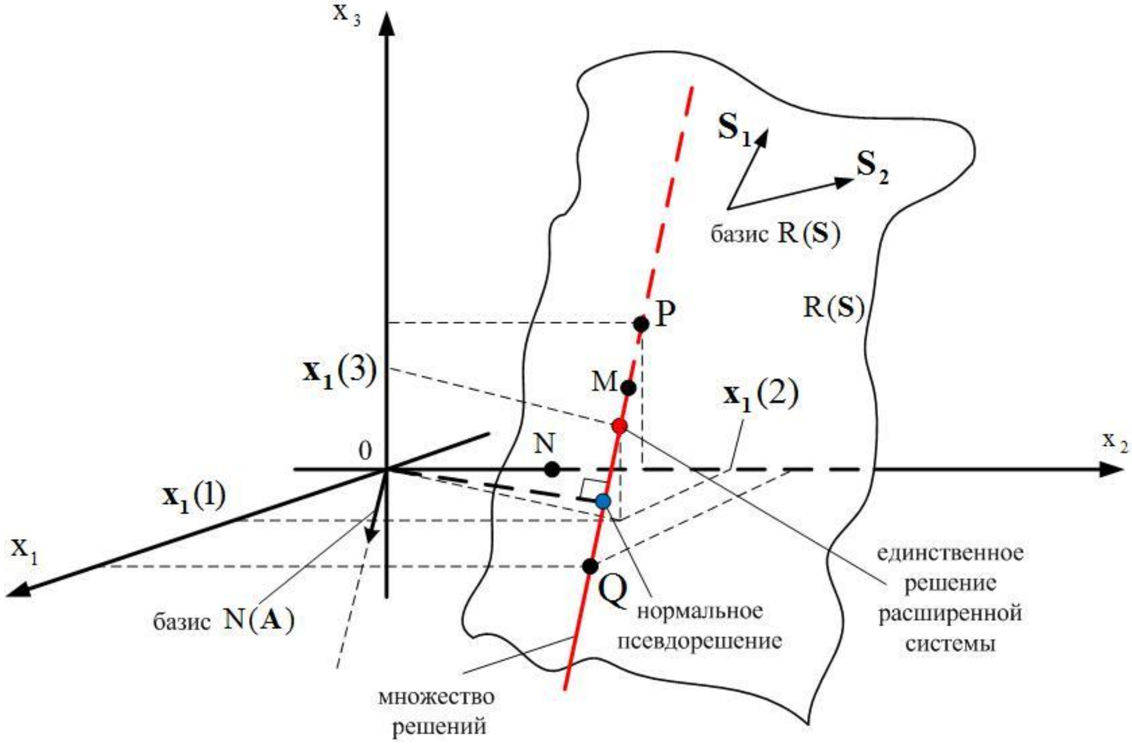

Рис. 3.7. Совместная недоопределённая система (r=m<n)

Из множества решений (3.6), показанных на рис. 3.7 для данного примера, принято выделять нормальное псевдорешение $\hat{\mathbf{x}}_{\text{ПС}}$, имеющее минимальную норму, т.е. удовлетворяющее критерию $\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \to \min$ [102]. Нормальное псевдорешение на рис. 3.7 показано голубой точкой, оно является единственным. Нормальное псевдорешение (оптимальное решение, для которого критерием оптимальности является $\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \to \min$) вычисляется как

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ПС}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{y}, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{A}^{+}$ - псевдообращение (псевдообратная матрица) по Муру-Пенроузу [101]. В отличие от обобщённого обращения $\mathbf{B}^{*}$, которое должно удовлетворять только условию (3.4), псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу $\mathbf{A}^{+}$ должна удовлетворять четырём следующим условиям [103],[104]:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{+} \\ \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)^{*} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+} \\ \left(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)^{*} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A} \end{cases}, \tag{3.8}$$

где $\left(\cdot\right)^*$ - эрмитово-сопряжённая матрица, которая в случае действительных чисел равна транспонированной матрице. Псевдообратная матрица $\mathbf{A}^+$ является уникальной (единственной), из чего следует единственность нормального псевдорешения (3.7). Таким образом, псевдообращение по Муру-Пенроузу $\mathbf{A}^+$ есть частный случай обобщённого обращения при использовании в (3.7) критерия оптимальности $\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \to \min$.

Псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу $\mathbf{A}^+$ для матрицы $\mathbf{A}$ может быть вычислена при помощи скелетного разложения матрицы [103] или сингулярного разложения матрицы [104]. Для случая линейно независимых столбцов матрицы $\mathbf{A}$ (r=n, рассматриваемый далее пример 3) псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу совпадает с левой обратной матрицей и вычисляется как [103]

$$\mathbf{A}^+ = \left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \tag{3.9}$$

В случае линейно независимых строк матрицы $\mathbf{A}$ (r=m, пример 2) псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу совпадает с правой обратной матрицей и вычисляется как [103]

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)^{-1} \tag{3.10}$$

Для совместной определённой системы (r=m=n, рассмотренный ранее пример 1) псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу равна обратной матрице $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$ [101].

Множество решений системы (3.1), записанной в нормальном виде ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$) для рассматриваемого примера совместной недоопределённой системы, также можно записать как [103]

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{y} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{c}, \tag{3.11}$$

где $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ - произвольный n-вектор действительных значений, $\mathbf{I}$ - единичная матрица.

Поскольку в (3.6) оба слагаемых определяются неоднозначно, любое решение из множества (3.6) может быть получено вариацией как значений $\boldsymbol{\alpha}_{(\mathbf{n}\text{-}\mathbf{r})\times 1}$ (изменение слагаемого $\mathbf{V}_1\boldsymbol{\alpha}$), так и изменением базиса $\mathbf{S}$ (слагаемое $\mathbf{A}^-\mathbf{y} = \mathbf{S}\left(\mathbf{A}\mathbf{S}\right)^{-1}\mathbf{y}$). В (3.11) неоднозначным является только второе слагаемое ($(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{c}$). Таким образом, множества решений (3.6) и (3.11) совпадают, но форма записи (3.6) для множества строгих решений совместной недоопределённой системы является более общей.

В векторном подпространстве $\mathrm{R}\left(\mathbf{A}\right)$ столбцов матрицы $\mathbf{A}$ вектор измерений $\mathbf{y}$ бесконечным числом вариантов раскладывается как линейная комбинация векторов $\mathbf{B} = \left[\mathrm{B}_1 \quad \mathrm{B}_2\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{C} = \left[\mathrm{C}_1 \quad \mathrm{C}_2\right]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{D} = \left[\mathrm{D}_1 \quad \mathrm{D}_2\right]^{\mathrm{T}}$. На рис. 3.8 показаны два варианта разложения (

$\hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \hat{x}'_3$ - коэффициенты первого варианта разложения, т.е. первое решение, $\hat{x}''_1, \hat{x}''_2, \hat{x}''_3$ - коэффициенты второго варианта разложения, т.е. второе решение).

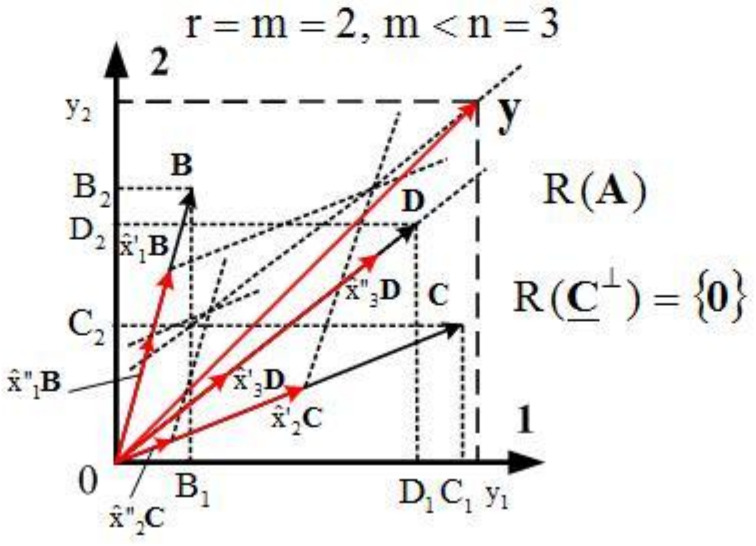

Рис. 3.8. Совместная недоопределённая система (r=m<n), 2 варианта разложения вектора измерений как линейной комбинации столбцов информационной матрицы **A**

Нормальное псевдорешение (3.7) (голубая точка на рис. 3.7) является частным случаем множества решений (3.6) (красная линия на рис. 3.7), соответствующим выбору базиса $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ и $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

Помимо записи решения в форме (3.6) или (3.11) всё множество решений совместной недоопределённой системы можно интерпретировать следующим образом. Любое решение из множества (3.6) является единственным решением совместной определённой системы уравнений, полученной из исходной (совместной недоопределённой) путём расширения по строкам. Таким образом, при выборе конкретных значений вектора $\boldsymbol{\alpha}$ и конкретного базиса $\mathbf{S}$ решение системы (3.1) для случая совместной недоопределённой системы является единственным решением следующей расширенной системы [44]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{c_1} \end{pmatrix}_{(m+n-r)\times 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}} \end{pmatrix}_{(m+n-r)\times n} \mathbf{x}_{n\times 1}, \qquad (3.12)$$

где $\mathrm{R}(\mathbf{S}) \oplus \mathrm{R}(\mathbf{S}^{\perp}) = \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, т.е. $\mathbf{S}^{\perp}$ - базис ортогонального дополнения $\mathrm{R}(\mathbf{S}^{\perp})$ к подпространству $\mathrm{R}(\mathbf{S})$. Задание определённого значения $\mathbf{c}_{\mathbf{1}(n-r)\times 1} = \left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{V}_{\mathbf{1}(n-r)\times(n-r)} \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}(n-r)\times 1} = \left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}_{(n-r)\times n} \mathbf{x}_{\mathbf{1}n\times 1}$, связанного с выбранным параметром $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}$ и выбранным базисом $\mathbf{S}$, однозначно определяет одно из возможных решений системы (3.1) для случая совместной недоопределённой системы. Таким образом, решение $\left[\mathbf{x_1}(1)\ \mathbf{x_1}(2)\ \mathbf{x_1}(3)\right]^{\mathrm{T}}$ системы уравнений рассматриваемого примера, показанное на рис. 3.7 красной точкой, является единственным решением расширенной системы (3.12) и вычисляется как [44]

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{c_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{AS})^{-1} & \mathbf{V_1}\left(\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{V_1}\right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{c_1} \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Добавление в исходную систему (3.1) уравнений вида $\mathbf{c}_{\mathbf{1}(n-r)\times 1} = \left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{x_1}$ (такое уравнение задаёт плоскость, ортогональную к вектору $\mathbf{S}^{\perp}$) обеспечивает квадратность и полноту ранга информационной матрицы расширенной системы $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}} \end{pmatrix}_{n\times n}$, т.е. в рамках рассматриваемой классификации расширенная система (3.12) является совместной определённой и имеет единственное решение (пример 1 в Таблице 3).

В векторном пространстве столбцов матрицы $\mathbf{A}$ (рис. 3.9) расширение исходной системы (3.1) до системы (3.12) означает введение дополнительной третьей оси, при этом вектор измерений $\mathbf{y}^*$ расширенной системы (3.12) однозначно раскладывается как линейная комбинация векторов $\mathbf{B} = [\mathrm{B}_1 \quad \mathrm{B}_2 \quad \mathrm{B}_3]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{C} = [\mathrm{C}_1 \quad \mathrm{C}_2 \quad \mathrm{C}_3]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{D} = [\mathrm{D}_1 \quad \mathrm{D}_2 \quad \mathrm{D}_3]^{\mathrm{T}}$. На рис. 3.9 показан единственный вариант разложения, соответствующий расширенной системе (3.12) для рассматриваемого примера 2. При этом векторное подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A}^*)$ на рис. 3.9 соответствует трёхмерному пространству столбцов расширенной системы для рассматриваемого примера 2. Для облегчения восприятия на рис. 3.9 некоторые компоненты вектор-столбцов матрицы $\mathbf{A}^*$ не показаны и/или не подписаны. Рис. 3.2 для примера 2 упрощается до рис. 3.10.

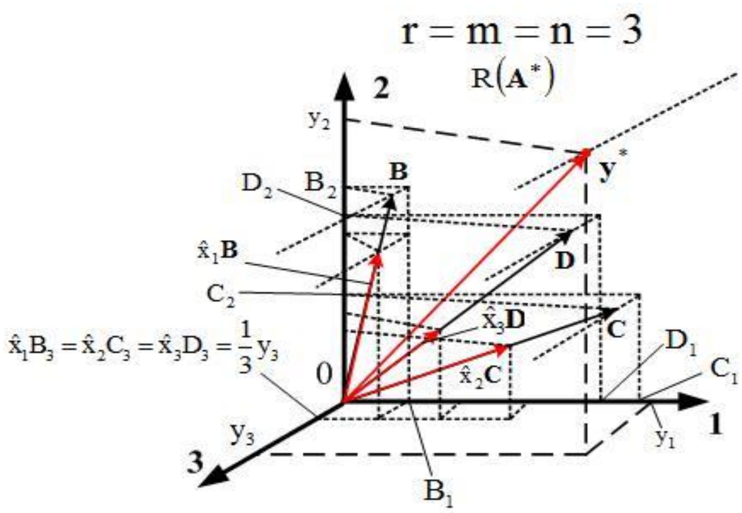

Рис. 3.9 Расширенная совместная определённая система, соответствующая примеру 2, единственный вариант разложения вектора измерений как линейной комбинации столбцов информационной матрицы $\mathbf{A}^*$

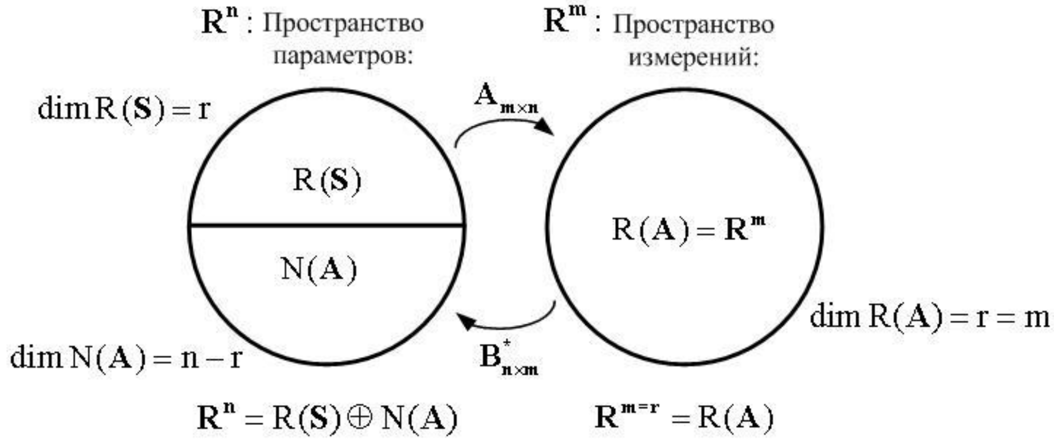

Рис. 3.10. Основные векторные подпространства, соответствующие примеру 2

Пример 3, несовместная переопределённая система: r=n=2, m=3, $\begin{cases} B_1x_1 + C_1x_2 = y_1, \\ B_2x_1 + C_2x_2 = y_2, \\ B_3x_1 + C_3x_2 = y_3, \end{cases}$

В пространстве координат вектора оцениваемых параметров (x_1, x_2) уравнения системы задают три прямые на плоскости (рис. 3.11, рис. 3.12). Решение системы отсутствует, т.к. прямые не пересекаются в одной точке. Для несовместных переопределённых систем можно говорить об оптимальном решении по критерию наименьших квадратов:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{МНК}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{y} = \left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}, \tag{3.14}$$

где:

$\hat{\mathbf{x}}_{\text{МНК}}$ - оптимальная оценка вектора $\mathbf{x}$ по методу наименьших квадратов;

$\mathbf{A}^{+} = \left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ - псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу, которая, как было показано ранее в (3.9), совпадает с левой обратной матрицей для случая линейно независимых столбцов матрицы $\mathbf{A}$ (r=n). Оценка $\hat{\mathbf{x}}_{\text{МНК}}$ (3.14) минимизирует сумму квадратов невязок $\left(\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\text{МНК}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\text{МНК}}\right)$. Применительно к рассматриваемой системе уравнений данного примера (r=n=2<m=3) оптимальное решение $\hat{\mathbf{x}}_{\text{МНК}}$ минимизирует сумму квадратов расстояний до трёх прямых, задаваемых уравнениями системы (рис. 3.11, рис. 3.12).

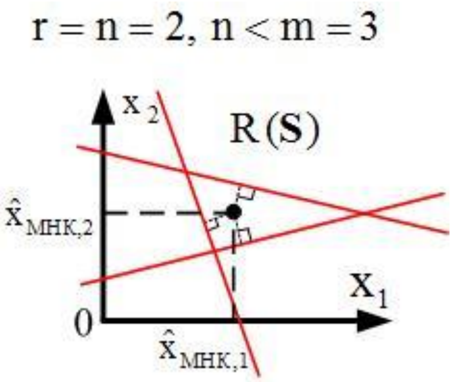

Рис. 3.11. Несовместная переопределённая система (r=n<m)

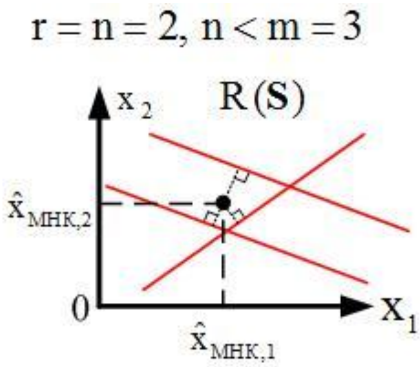

Рис. 3.12. Несовместная переопределённая система (r=n<m)

Матрица $\mathbf{A}^{+}=\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ является левой обратной матрицей, частным случаем левой обобщённо-обратной матрицы $\mathbf{A}^{\circ}=\left(\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}$ при выборе базиса $\underline{\mathbf{C}}=\mathbf{A}$ подпространства $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}})$, где $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}})$- ортогональное дополнение к подпространству $\mathrm{R}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)$, т.е. $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}})\oplus\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}}^{\perp})=\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, а $\mathrm{R}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)$ - дополнение (не обязательно ортогональное) к подпространству $\mathrm{R}(\mathbf{A})$, т.е. $\mathrm{R}(\mathbf{A})\oplus\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}}^{\perp})=\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$. Левая обобщённо-обратная матрица $\mathbf{A}^{\circ}=\left(\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}$ является частным случаем обобщённого обращения $\mathbf{B}^{*}$ (3.4) и соответствует информационной матрице с линейно-независимыми столбцами, т.е. r=n, что соответствует рассматриваемому примеру 3 из Таблицы 3. О выборе базиса $\mathbf{S}$ для подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ речь в данном случае не идёт, т.к. $\mathrm{N}(\mathbf{A})=\mathbf{0}$ и $\mathbf{R}^{\mathbf{n=r}}=\mathrm{R}(\mathbf{S})$. В условиях данного примера следует говорить о выборе базиса $\underline{\mathbf{C}}$ подпространства $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}})$. Рис. 3.2 для данного примера упрощается до рис. 3.13.

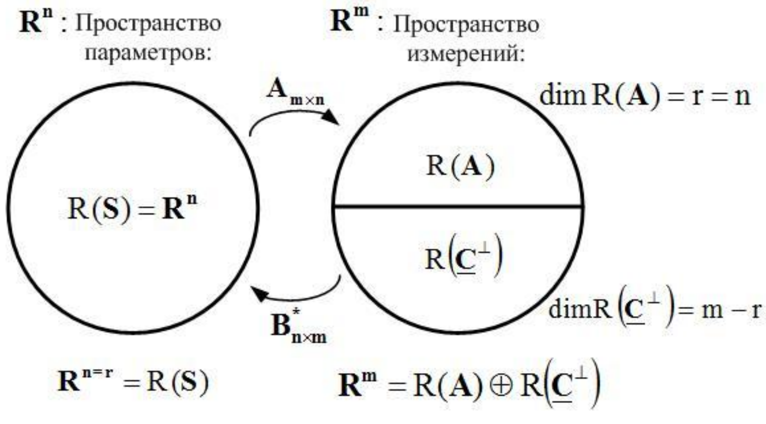

Рис. 3.13. Основные векторные подпространства, соответствующие примеру 3

Для рассматриваемого примера в векторном подпространстве $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ столбцов матрицы $\mathbf{A}$ вектор измерений $\mathbf{y}$ не может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{B} = [\mathrm{B}_1 \quad \mathrm{B}_2 \quad \mathrm{B}_3]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{C} = [\mathrm{C}_1 \quad \mathrm{C}_2 \quad \mathrm{C}_3]^{\mathrm{T}}$, поскольку не лежит в плоскости, определяемой векторным подпространством $\mathrm{R}(\mathbf{A})$, т.е. решение отсутствует (рис. 3.14). При этом вектора $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ задают плоскость $\mathrm{R}(\mathbf{A})$. Коэффициенты разложения ортогональной проекции вектора $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ по векторам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ являются оптимальным решением по критерию наименьших квадратов (3.14). На рис. 3.14 часть координат не показаны по причине ограниченности места, прямая f лежит в плоскости $\mathrm{R}(\mathbf{A})$.

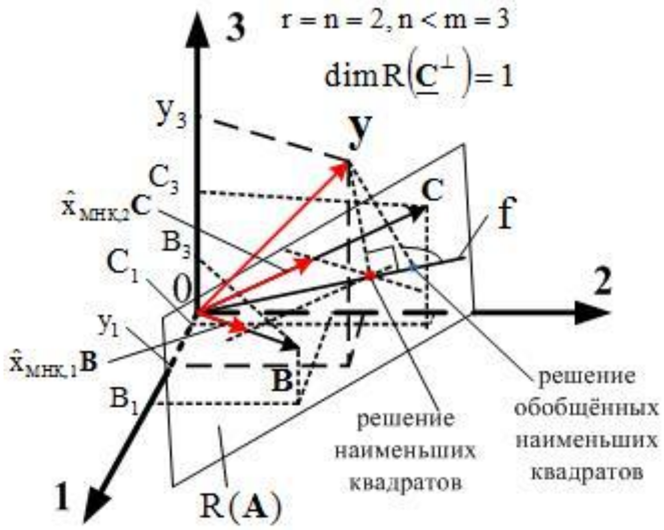

Рис. 3.14. Несовместная переопределённая система (r=n<m), разложение компоненты вектора $\mathbf{y}$, лежащей в $\mathrm{R}(\mathbf{A})$, по компонентам столбцов информационной матрицы $\mathbf{A}$ (решение наименьших квадратов)

Оптимальное решение по критерию обобщённого метода наименьших квадратов (который позволяет учесть неоднородность ошибок измерений при рассмотрении системы уравнений (3.1) применительно к ГНСС) вычисляется при известной ковариационной матрице $\mathbf{W}^{-1}$ вектора измерений $\mathbf{y}$ следующим образом [105]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{О\_МНК}} = \left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\mathbf{y}\,, \qquad (3.15)$$

где $\mathbf{W}$ - весовая матрица, равная обратной к известной ковариационной матрице вектора измерений $\mathbf{y}$ (3.1). Формула (3.15) соответствует такому базису $\underline{\mathbf{C}}$ подпространства $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}})$, что $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}}^{\perp})$ есть ортогональное дополнение к $\mathrm{R}(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})$, тогда можно принять $\underline{\mathbf{C}} = \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$ и $\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}$. При этом левая обобщённо-обратная матрица $\mathbf{A}^{\circ} = \left(\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}$ становится равной

$\left(\mathbf{A^T W A}\right)^{-1}\mathbf{A^T W}$, что соответствует формуле (3.15). При этом минимизируется квадратичная форма $\left(\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\text{О\_МНК}}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\left(\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\text{О\_МНК}}\right)$. Частным случаем обобщённого метода наименьших квадратов является метод взвешенных наименьших квадратов, которому соответствует строго диагональная ковариационная матрица вектора измерений $\mathbf{y}$. В этом случае минимизируется взвешенная сумма квадратов невязок $\left(\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\text{О\_МНК}}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{W}^{\circ}\left(\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\text{О\_МНК}}\right)$, где $\mathbf{W}^{\circ}$ - диагональная весовая матрица, равная обратной к диагональной ковариационной матрице вектора измерений $\mathbf{y}$. Таким образом, в обобщённом методе наименьших квадратов учитывается неоднородность ошибок измерений и их корреляция, а в методе взвешенных наименьших квадратов (частный случай обобщённого метода наименьших квадратов) учитывается только неоднородность ошибок измерений, а корреляция полагается нулевой.

Решению $\hat{\mathbf{x}}_{\text{О\_МНК}}$ (3.15) в векторном пространстве $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ столбцов матрицы $\mathbf{A}$ соответствуют коэффициенты разложения косоугольной проекции вектора $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ по векторам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Коэффициенты разложения косоугольной проекции вектора $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ по векторам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ являются решением обобщённых наименьших квадратов (косоугольная проекция показана на рис. 3.14 голубой точкой). Таким образом, решение по методу наименьших квадратов (коэффициенты разложения ортогональной проекции) является частным случаем решения обобщённых наименьших квадратов, при котором ошибки измерений (применительно к системам уравнений ГНСС) однородны и некоррелированы. На рис. 3.14 часть координат не показаны по причине ограниченности места, прямая f лежит в плоскости $\mathrm{R}(\mathbf{A})$.

Всё множество решений обобщённых наименьших квадратов (3.15) несовместной переопределённой системы уравнений (т.е. всё множество коэффициентов разложения всевозможных косоугольных проекций вектора $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ по векторам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ на рис. 3.14, соответствующих разным матрицам $\mathbf{W}$) можно интерпретировать следующим образом. Любое решение из указанного множества решений обобщённых наименьших квадратов несовместной переопределённой системы является единственным решением совместной определённой системы уравнений, полученной из исходной (несовместной переопределённой) путём расширения по столбцам. Расширенная по столбцам система записывается следующим образом [44]:

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \underline{\mathbf{C}}^{\perp}\end{pmatrix}_{\mathrm{m\times m}}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}_{\mathrm{m\times 1}},\ \mathrm{R}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)\oplus\mathrm{R}(\mathbf{A})=\mathbf{R^m}, \tag{3.16}$$

где $\boldsymbol{\lambda}_{(\mathbf{m-r})\times\mathbf{1}}$ - вектор новых дополнительно оцениваемых параметров. Решение совместной определённой системы (3.16) совпадает с решением следующей системы уравнений

$$\mathbf{y}-\mathbf{P}_{\mathrm{R}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right),\mathrm{R}(\mathbf{A})}\mathbf{y}=\mathbf{A}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}\mathbf{x}_{\mathrm{n}\times1},\ \mathrm{R}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)\oplus\mathrm{R}(\mathbf{A})=\mathbf{R}^{\mathbf{m}}, \tag{3.17}$$

где $\mathbf{P}_{\mathrm{R}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right),\mathrm{R}(\mathbf{A})}=\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\left(\mathbf{U}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)^{-1}\mathbf{U}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{T}}$ - проекционная матрица на векторное подпространство $\mathrm{R}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)$ параллельно подпространству $\mathrm{R}(\mathbf{A})$. Таким образом, расширение исходной системы по столбцам (3.16) эквивалентно вычитанию из вектора измерений $\mathbf{y}$ той его компоненты, которая лежит вне линейного подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ (рис. 3.15). Ортогональная проекция вектора измерений $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ соответствует случаю, когда в качестве базиса $\underline{\mathbf{C}}^{\perp}$ подпространства $\mathrm{R}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)$ выбирается $\mathbf{U}_{\mathbf{1}}$. При этом подпространство $\mathrm{R}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)$ становится ортогональным дополнением к подпространству $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ ($\mathrm{R}(\mathbf{U}_{\mathbf{1}})=\mathrm{R}(\mathbf{A})^{\perp}=\mathrm{N}\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)$,(3.3)), рис. 3.16. Косоугольная проекция вектора измерений $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ соответствует выбору такого $\underline{\mathbf{C}}^{\perp}$, что $\mathrm{R}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)\neq\mathrm{R}(\mathbf{U}_{\mathbf{1}})$, рис. 3.17.

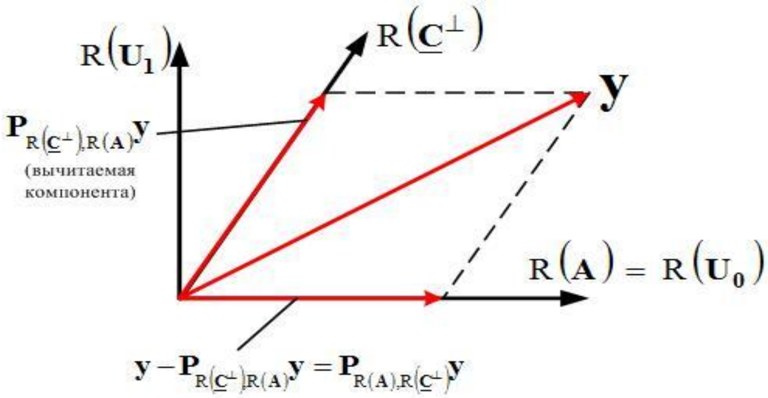

Рис. 3.15. Иллюстрация вычитаемой из вектора измерений $\mathbf{y}$ компоненты, соответствующей расширенной совместной определённой системе (3.16) примера 3

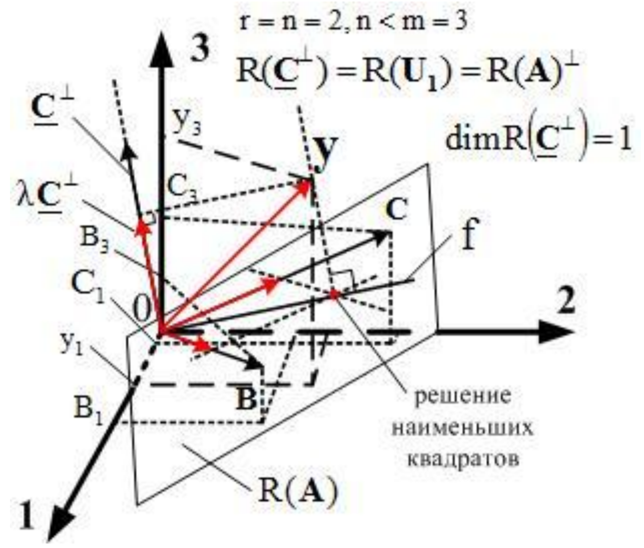

Рис. 3.16. Векторное пространство столбцов информационной матрицы расширенной системы (3.16) при ортогональном проектировании вектора измерений $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ (решение наименьших квадратов)

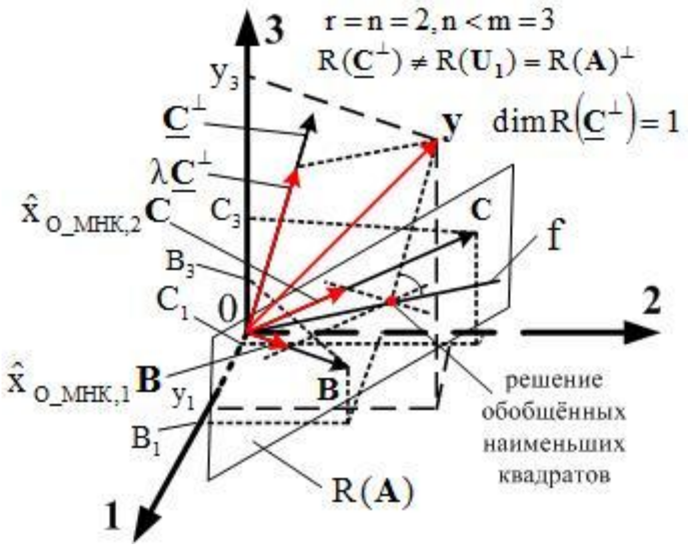

Рис. 3.17. Векторное пространство столбцов информационной матрицы расширенной системы (3.16) при косоугольном проектировании вектора измерений $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ (решение обобщённых наименьших квадратов)

Таким образом, любое из множества решений обобщённых наименьших квадратов несовместной переопределённой (r=n<m) системы линейных уравнений (3.1) является единственным решением совместной определённой системой (3.16), которое записывается

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{A} \quad \underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)^{-1} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \left(\underline{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\right)^{-1} \underline{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} \\ \left(\mathbf{U_1}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)^{-1} \mathbf{U_1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \mathbf{y}, \tag{3.18}$$

где $\mathrm{R}(\mathbf{U_1}) = \mathrm{R}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathrm{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.

В пространстве координат вектора оцениваемых параметров (x_1, x_2, λ) системы (3.16), записанной для рассматриваемого примера (r=n=2<m=3) уравнения системы (3.16) являются уравнениями трёх плоскостей, точка пересечения которых – решение (3.18) системы (3.16) – показана на рис. 3.18, рис. 3.19 красной точкой. Координатные плоскости $x_1 0 x_2$ рис. 3.18 и рис. 3.19 соответствуют рис. 3.11 и рис. 3.12.

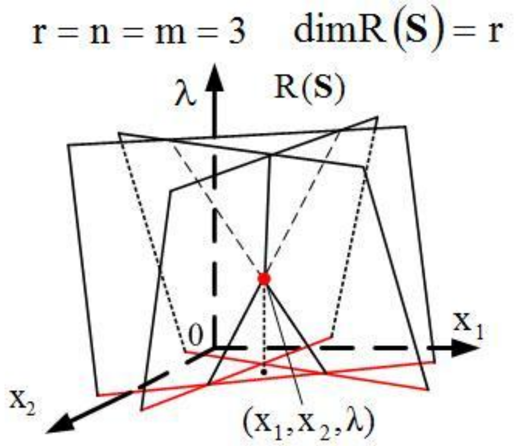

Рис. 3.18. Расширенная совместная определённая система (3.16) для примера 3 (r=n=2<m=3)

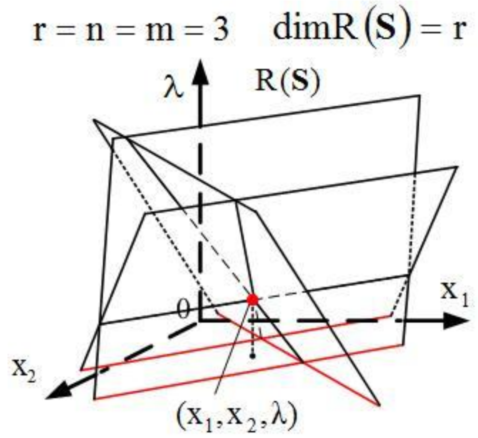

Рис. 3.19. Расширенная совместная определённая система (3.16) для примера 3 (r=n=2<m=3)

Пример 4, несовместная недоопределённая система: r=1, n=2, m=3, $\begin{cases} B_1 x_1 + C_1 x_2 = y_1, \\ B_2 x_1 + C_2 x_2 = y_2, \\ B_3 x_1 + C_3 x_2 = y_3; \end{cases}$

В пространстве координат вектора оцениваемых параметров (x_1, x_2) уравнения системы являются уравнениями трёх параллельных прямых на плоскости (рис. 3.20, красные линии). Параллельные прямые не пересекаются, т.е. решение отсутствует, система несовместна. В векторном пространстве столбцов матрицы $\mathbf{A}$ вектор измерений $\mathbf{y}$ не может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{B} = [B_1 \quad B_2 \quad B_3]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{C} = [C_1 \quad C_2 \quad C_3]^{\mathrm{T}}$, поскольку не лежит на прямой, представляющей собою векторное подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$. При этом вектора $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ лежат на прямой $\mathrm{R}(\mathbf{A})$, рис. 3.21.

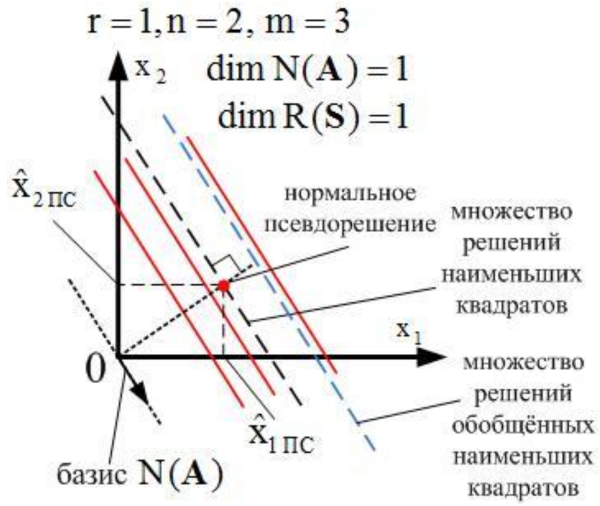

Рис. 3.20. Несовместная недоопределённая система (r=1, n=2, m=3). Пространство координат вектора оцениваемых параметров

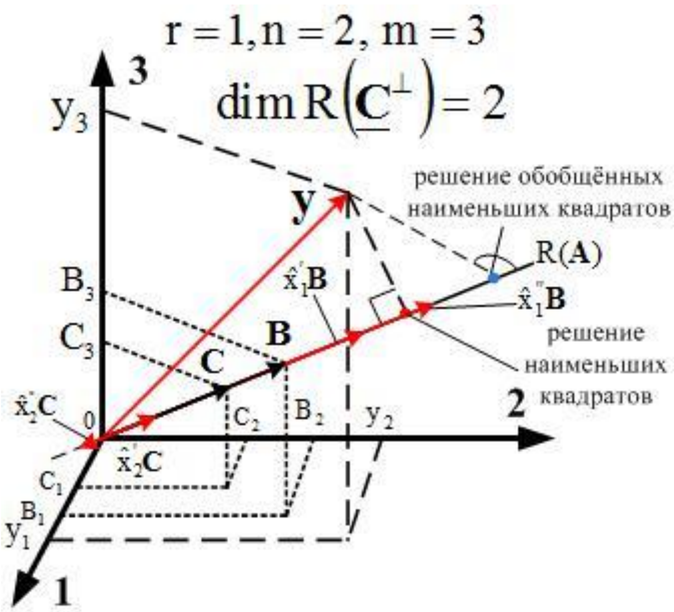

Рис. 3.21. Несовместная недоопределённая система (r=1, n=2, m=3), 2 варианта разложения проекции вектора измерений $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ как линейной комбинации столбцов информационной матрицы $\mathbf{A}$

В виде линейной комбинации векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ может быть представлена лишь проекция вектора измерений $\mathbf{y}$ на прямую $\mathrm{R}(\mathbf{A})$, линейных комбинаций указанных векторов для представления этой проекции бесконечно много. Коэффициенты разложения ортогональной проекции вектора $\mathbf{y}$ на прямую $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ по векторам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ являются оптимальным решением по критерию наименьших квадратов. Однако таких разложений ортогональной проекции вектора $\mathbf{y}$ бесконечно много. Все эти решения наименьших квадратов минимизируют сумму квадратов невязок $(\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})$. На рис. 3.21 показано только два варианта таких разложения: $(x_1^{'}, x_2^{'})$ и $(x_1^{''}, x_2^{''})$. Множество решений наименьших квадратов на рис. 3.20 показаны чёрной пунктирной прямой. Среди указанного множества решений наименьших квадратов принято выделять нормальное псевдорешение, удовлетворяющее критерию $\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \to \min$ [103]. Вычисление нормального псевдорешения согласно выражению (3.7) с использованием псевдообращения по Муру-Пенроузу $\mathbf{A}^{+}$ уже было рассмотрено в примере 2. Нормальное псевдорешение несовместной недоопределённой системы, как и в случае совместной недоопределённой системы (пример 2), является единственным [103], [104], [106]. Нормальное псевдорешение $(\hat{x}_{1ПС}, \hat{x}_{2ПС})$ показано на рис. 3.20, оно соответствует точке на прямой, лежащей на перпендикуляре, опущенном на множество решений наименьших квадратов (чёрная пунктирная линия) из начала координат.

Как было отмечено в примере 2, псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу $\mathbf{A}^{+}$ для матрицы $\mathbf{A}$ может быть вычислена при помощи скелетного разложения матрицы ([103]) или сингулярного разложения матрицы [104]). В случае рассматриваемой в данном примере системы (несовместная недоопределённая) формулы (3.9) и (3.10) с этой целью использоваться не могут.

Всё множество решений наименьших квадратов несовместной недоопределённой системы уравнений (т.е. всё множество коэффициентов разложения ортогональной проекции вектора $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ по векторам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, рис. 3.21) можно интерпретировать следующим образом. Любое решение из указанного множества решений наименьших квадратов несовместной недоопределённой системы является единственным решением совместной определённой системы уравнений, полученной из исходной (несовместной недоопределённой) путём расширения по строкам и по столбцам. Расширенная по строкам и по столбцам система записывается следующим образом [44]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}_{(m+n-r)\times 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \underline{\mathbf{C}}^{\perp} \\ (\mathbf{S}^{\perp})^{\mathbf{T}} & \mathbf{X} \end{pmatrix}_{(m+n-r)\times(m+n-r)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}_{(m+n-r)\times 1}, \tag{3.19}$$

где $\mathbf{c} = (\mathbf{S}^{\perp})^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}$ - дополнительные уравнения, вносимые в исходную систему, $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}}^{\perp}) \oplus \mathrm{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, $\mathrm{R}(\mathbf{S}) \oplus \mathrm{N}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, $\mathbf{X}$ - произвольная матрица соответствующей размерности. Информационная матрица расширенной системы (3.19) является квадратной матрицей полного ранга. Согласно [44] решение системы (3.19) записывается в следующем виде:

$$\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{x}}\\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c:c}\mathbf{S}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}\mathbf{AS}\right)^{-1}\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}-\mathbf{V_1}\left(\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{V_1}\right)^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{U_1}^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)^{-1}\mathbf{U_1}^{\mathbf{T}} & \mathbf{V_1}\left(\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{V_1}\right)^{-1}\\ \hdashline \left(\mathbf{U_1}^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{C}}^{\perp}\right)^{-1}\mathbf{U_1}^{\mathbf{T}} & 0\end{array}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ \mathbf{c}\end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Любое из множества решений наименьших квадратов (чёрная пунктирная линия на рис. 3.20) несовместной недоопределённой системы, являющихся коэффициентами разложения ортогональной проекций вектора измерений $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ по векторам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ на рис. 3.21, может быть вычислено как [44]

$$\hat{\mathbf{x}}^{\circ}_{\text{МНК}}=\mathbf{B}^{*}\mathbf{y}=\left(\mathbf{S}\left(\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}\mathbf{AS}\right)^{-1}\underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}+\mathbf{D}\left(\left(\left(\mathbf{AS}\right)^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{C}}\right)^{-1}\left(\left(\mathbf{AS}\right)^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{y}, \tag{3.21}$$

где $\mathbf{D}=-\mathbf{V_1}\left(\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{V_1}\right)^{-1}\mathbf{X}$ или $\mathbf{X}=-\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{D}$. Матрица обобщённого обращения $\mathbf{B}^{*}$ в (3.21) при этом не является уникальной, а зависит от выбранных базисов $\mathbf{S}$ и $\underline{\mathbf{C}}$ для векторных подпространств $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ и $\mathrm{R}(\underline{\mathbf{C}})$. Нормальное псевдорешение несовместной недоопределённой системы уравнений является частным случаем решения (3.21) наименьших квадратов, соответствующее выполнению требования $\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\rightarrow\min$.

Аналогично примеру 3, для несовместной недоопределённой системы может быть использован обобщённый метод наименьших квадратов или метод Айткена [105]. Множество решений по критерию обобщённого метода наименьших квадратов (обозначено на рис. 3.20 голубой пунктирной прямой) вычисляется при известной весовой матрице $\mathbf{W}$ вектора $\mathbf{y}$ (3.1) по формуле (3.21) при выборе базиса $\underline{\mathbf{C}}=\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$:

$$\hat{\mathbf{x}}^{\circ}_{\text{О\_МНК}}=\mathbf{B}^{*}\mathbf{y}=\left(\mathbf{S}\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{WAS}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}+\mathbf{D}\left(\left(\left(\mathbf{AS}\right)^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\left(\mathbf{AS}\right)^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{y} \tag{3.22}$$

Коэффициенты показанной на рис. 3.21 синей точкой косоугольной проекции вектора $\mathbf{y}$ на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ являются одним из множества решений обобщённых наименьших квадратов (разным весовым матрицам $\mathbf{W}$ соответствую разные решения обобщённых наименьших квадратов).

Не представляется возможным привести геометрическую интерпретацию векторного пространства столбцов расширенной системы (3.19) для рассматриваемого примера, т.к. размерность информационной матрицы системы (3.19) равна $(\mathrm{m}+\mathrm{n}-\mathrm{r})\times(\mathrm{m}+\mathrm{n}-\mathrm{r})=4\times4$. Геометрическая интерпретация пространства координат расширенного вектора оцениваемых параметров системы (3.19) также недоступна, т.к. число оцениваемых параметров равно $(\mathrm{m}+\mathrm{n}-\mathrm{r})=4$. Основные векторные подпространства рис. 3.22 для несовместной недоопределённой системы аналогичны таковым на рис. 3.2.

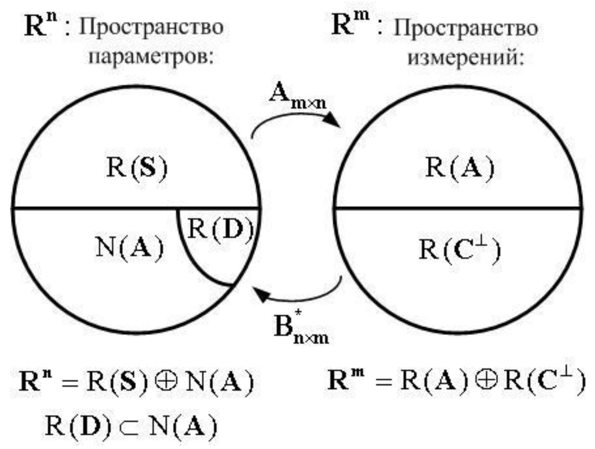

Рис. 3.22. Основные векторные подпространства, соответствующие примеру 3

3.2 Модели измерений с разделёнными часами

3.2.1 Модель измерений на исходных частотах GPS (P1P2L1L2)

В разделе 2.2 было отмечено, что модель измерений на исходных частотах GPS (2.4) содержит дефицит ранга и не может быть использована для местоопределения по следующим причинам: наличие немоделируемых задержек (смещений) на исходных частотах GPS в аппаратуре приёмника $b^{G}_{r,P1}$, $b^{G}_{r,P2}$, $b^{G}_{r,L1}$, $b^{G}_{r,L2}$ и спутника $b^{j,G}_{P1}$, $b^{j,G}_{P2}$, $b^{j,G}_{L1}$, $b^{j,G}_{L2}$, которые не могут быть оценены отдельно от смещений показаний часов приёмника dT^{G}_{REC} и спутника $dt^{G,j}_{SAT}$, а также присутствие в модели (2.4) наклонных ионосферных задержек сигнала I^{j}_{1} на частоте f^{G}_{1}. Автором работы предлагается к обработке следующая модель измерений на исходных частотах GPS с разделёнными часами:

$$\begin{cases} P^{G,j}_{1} = R^{j} + dT^{G}_{P1} - dt^{G,j}_{P1} + m^{j}\Delta D_{W} + I^{j}_{1} + \varepsilon^{G}_{P1}, \\ P^{G,j}_{2} = R^{j} + dT^{G}_{P2} - dt^{G,j}_{P2} + m^{j}\Delta D_{W} + k^{G} I^{j}_{1} + \varepsilon^{G}_{P2}, \\ L^{G,j}_{1} = R^{j} + dT^{G}_{L1} - dt^{G,j}_{L1} + m^{j}\Delta D_{W} - I^{j}_{1} - \lambda^{G}_{1} N^{G,j}_{1} + \varepsilon^{G}_{L1}, \\ L^{G,j}_{2} = R^{j} + dT^{G}_{L2} - dt^{G,j}_{L2} + m^{j}\Delta D_{W} - k^{G} I^{j}_{1} - \lambda^{G}_{2} N^{G,j}_{2} + \varepsilon^{G}_{L2}, \end{cases} \quad j = \overline{1, Msat} \tag{3.23}$$

где

$dT^{G}_{P1} = dT^{G}_{REC} + b^{G}_{r,P1}$ и $dT^{G}_{P2} = dT^{G}_{REC} + b^{G}_{r,P2}$ – кодовые смещения показаний часов приёмника потребителя относительно шкалы системы с учётом кодовых аппаратурных смещений $b^{G}_{r,P1}$ и $b^{G}_{r,P2}$ измерений $P^{G,j}_{1}$ и $P^{G,j}_{2}$,

$dT^{G}_{L1} = dT^{G}_{REC} + b^{G}_{r,L1}$ и $dT^{G}_{L2} = dT^{G}_{REC} + b^{G}_{r,L2}$ - фазовые смещения показаний часов приёмника потребителя относительно шкалы системы с учётом фазовых аппаратурных смещений $b^{G}_{r,L1}$ и $b^{G}_{r,L2}$ измерений $L^{G,j}_{1}$ и $L^{G,j}_{2}$,

$dt^{G,j}_{P1} = dt^{G,j}_{SAT} + b^{j,G}_{P1}$ и $dt^{G,j}_{P2} = dt^{G,j}_{SAT} + b^{j,G}_{P2}$ - кодовые смещения показаний часов j-го спутника с учётом аппаратурных смещений $b^{j,G}_{P1}$, $b^{j,G}_{P2}$ измерений $P^{G,j}_{1}$ и $P^{G,j}_{2}$,

$dt^{G,j}_{L1} = dt^{G,j}_{SAT} + b^{j,G}_{L1}$ и $dt^{G,j}_{L2} = dt^{G,j}_{SAT} + b^{j,G}_{L2}$ - фазовые смещения показаний часов j-го спутника на исходных частотах с учётом аппаратурных смещений $b^{j,G}_{L1}$ и $b^{j,G}_{L2}$ измерений $L^{G,j}_{1}$ и $L^{G,j}_{2}$,

$Msat$ - число отслеживаемых спутников. Модель (3.23) отличается от модели (2.4) использованием разделённых кодовых и фазовых смещений показаний часов приёмника и спутников.

Линеаризованная модель измерений (3.23) имеет вид:

$$\begin{cases} P_1^{G,j} = R_C^j + h_x^j\Delta x + h_y^j\Delta y + h_z^j\Delta z + m^j\Delta D_W + dT_{P1}^G - dt_{P1}^{G,j} + I_1^j + \varepsilon_{P1}^G, \\ P_2^{G,j} = R_C^j + h_x^j\Delta x + h_y^j\Delta y + h_z^j\Delta z + m^j\Delta D_W + dT_{P2}^G - dt_{P2}^{G,j} + k^G I_1^j + \varepsilon_{P2}^G, \\ L_1^{G,j} = R_C^j + h_x^j\Delta x + h_y^j\Delta y + h_z^j\Delta z + m^j\Delta D_W + dT_{L1}^G - dt_{L1}^{G,j} - I_1^j - \lambda_1^G N_1^{G,j} + \varepsilon_{L1}^G, \\ L_2^{G,j} = R_C^j + h_x^j\Delta x + h_y^j\Delta y + h_z^j\Delta z + m^j\Delta D_W + dT_{L2}^G - dt_{L2}^{G,j} - k^G I_1^j - \lambda_2^G N_2^{G,j} + \varepsilon_{L2}^G, \end{cases} \tag{3.24}$$

Для реализации режима Integer PPP по модели (3.24) из сетевого решения потребителю необходимо получить величины смещений показаний спутниковых часов по коду $dt_{P1}^{G,j}, dt_{P2}^{G,j}$ и по фазе $dt_{L1}^{G,j}, dt_{L2}^{G,j}$. К числу оцениваемых потребителем параметров модели (3.24) относятся следующие величины: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, ΔD_W, dT_{P1}^G, dT_{P2}^G, dT_{L1}^G и dT_{L2}^G, $\lambda_1^G N_1^{G,1} \ldots \lambda_1^G N_1^{G,Msat}$, $\lambda_2^G N_2^{G,1} \ldots \lambda_2^G N_2^{G,Msat}$, $I_1^1 \ldots I_1^{Msat}$. В матричном виде система (3.24) записывается следующим образом (известные из сетевого решения разделённые поправки (коррекции/смещения) к показаниям спутниковых часов $dt_{P1}^{G,j}, dt_{P2}^{G,j}, dt_{L1}^{G,j}, dt_{L2}^{G,j}$ считаются уже перенесёнными в левую часть системы):

$$\mathbf{y}_{4Msat\times 1} = \mathbf{A}_{4Msat\times(8+3Msat)}\mathbf{X}_{(8+3Msat)\times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{4Msat\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{y_{P1}} \\ \mathbf{y_{P2}} \\ \mathbf{y_{L1}} \\ \mathbf{y_{L2}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A_r} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & k^G\mathbf{I} \\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & -k^G\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{4Msat\times(8+3Msat)} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ dT_{P1}^G \\ dT_{P2}^G \\ dT_{L1}^G \\ dT_{L2}^G \\ \boldsymbol{\lambda_1^G N_1^G} \\ \boldsymbol{\lambda_2^G N_2^G} \\ \mathbf{I_1} \end{bmatrix}_{(8+3Msat)\times 1} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_{P1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{P2}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{L1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{L2}} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

где:

$\mathbf{y} = [\mathbf{y_{P1}} \quad \mathbf{y_{P2}} \quad \mathbf{y_{L1}} \quad \mathbf{y_{L2}}]^\mathbf{T}$ - вектор измерений, соответствующих измерениям $P_1^{G,j}, P_2^{G,j}, L_1^{G,j}, L_2^{G,j}$ с учётом перенесённых в левую часть (3.25) разделённых спутниковых поправок и дальностей R_C^j;

$\mathbf{r} = [\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z \quad \Delta D_W]^\mathbf{T}$ - вектор геометрических оцениваемых параметров,

$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon_{P1}} \quad \boldsymbol{\varepsilon_{P2}} \quad \boldsymbol{\varepsilon_{L1}} \quad \boldsymbol{\varepsilon_{L2}}]^\mathbf{T}$ - вектор ошибок измерений, соответствующих измерениям $P_1^{G,j}, P_2^{G,j}, L_1^{G,j}, L_2^{G,j}$;

$\boldsymbol{\lambda}_1^G \mathbf{N}_1^G$ и $\boldsymbol{\lambda}_2^G \mathbf{N}_2^G$ - вектора целочисленных неоднозначностей $\lambda_1^G N_1^{G,j}$ и $\lambda_2^G N_2^{G,j}$, соответствующие измерениям $L_1^{G,j}$ и $L_2^{G,j}$ (м);

$\mathbf{I}_1$ - вектор ионосферных задержек;

$\mathbf{X}$ - вектор оцениваемых параметров;

$\mathbf{A}$ - информационная матрица связи оцениваемых параметров $\mathbf{X}$ с измерениями $\mathbf{y}$;

$\mathbf{A}_r$ - информационная матрица связи геометрических параметров $\mathbf{r}$ с измерениями $\mathbf{y}$,

$\mathbf{1}$ - столбец единиц соответствующей размерности,

$\mathbf{I}$ - единичная матрица соответствующей размерности,

$\mathbf{0}$ - нулевая матрица соответствующей размерности,

Всего в модели (3.25) $8+3\mathrm{Msat}$ оцениваемых параметров. В силу присутствия разделённых часов и ионосферных задержек система уравнений (3.25) является сингулярной и имеет дефицит ранга равный трём. Для краткости далее модель измерений на исходных частотах GPS (3.25) обозначается как P1P2L2L2.

3.2.2 Ионосферосвободные модели измерений GPS (P3L3A4, P3L3P4L4)

В разделе 2.3 было отмечено, что в ионосферосвободной модели измерений GPS P3L3 (2.8) оцениваются действительные неоднозначности A_{P3}^j (2.7), что делает невозможным разрешение целочисленной неоднозначности при использовании этой модели. В NRCan для устранения влияния ионосферных задержек была предложена ионосферосвободная модель измерений GPS с разделёнными часами (модель разделённых часов, decoupled clock model) [47]:

$$\begin{cases} P_3^{G,j} = R^j + m^j \Delta D_W + dT_{P3}^G - dt_{P3}^{G,j} + \varepsilon_{P3}^G, \\ L_3^{G,j} = R^j + m^j \Delta D_W + dT_{L3}^G - dt_{L3}^{G,j} - \lambda_3^G N_3^{G,j} + \varepsilon_{L3}^G, \\ A_4^{G,j} = \qquad b_{r,A4}^G - b_{A4}^{j,G} - \lambda_4^G N_4^{G,j} + \varepsilon_{A4}^G, \end{cases} \tag{3.26}$$

где:

$A_4^{G,j}$ - ионосферосвободная комбинация измерений Мельбурна-Вуббена (А.5),

$\lambda_4^G N_4^{G,j} = \lambda_1^G N_1^{G,j} - \lambda_2^G N_2^{G,j}$ - целочисленная неоднозначность, соответствующая разностной шкале измерений (widelane ambiguity), выраженная в метрах ($\lambda_4^G \approx 0.86\,\text{м}$),

$dT_{P3}^G = \left(dT_{REC}^G + b_{r,P3}^G\right)$, $dt_{P3}^{G,j} = \left(dt_{SAT}^{G,j} + b_{P3}^{j,G}\right)$ - кодовые смещения показаний часов приёмника потребителя и спутников относительно показаний часов системы в измерениях, учитывающие аппаратурные смещения ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей (смещения $b^{G}_{r,P3}$ и $b^{j,G}_{P3}$ описаны в разделе 2.3),

$dT^{G}_{L3} = \left(dT^{G}_{REC} + b^{G}_{r,L3}\right)$, $dt^{G,j}_{L3} = \left(dt^{G,j}_{SAT} + b^{j,G}_{L3}\right)$ - фазовые смещения показаний часов приёмника потребителя и спутников относительно показаний часов системы в измерениях псевдофазы, учитывающие аппаратурные смещения ионосферосвободных комбинаций измерений псевдофаз (смещения $b^{G}_{r,L3}$ и $b^{j,G}_{L3}$ описаны в разделе 2.3),

$b^{G}_{r,A4} = \frac{77}{17}b^{G}_{r,L1} - \frac{60}{17}b^{G}_{r,L2} - \frac{77}{137}b^{G}_{r,P1} - \frac{60}{137}b^{G}_{r,P2}$, $b^{j,G}_{A4} = \frac{77}{17}b^{j,G}_{L1} - \frac{60}{17}b^{j,G}_{L2} - \frac{77}{137}b^{j,G}_{P1} - \frac{60}{137}b^{j,G}_{P2}$ - аппаратурные смещения приёмника потребителя и спутников в комбинации Мельбурна-Вуббена (А.5) (для общности изложения данные аппаратурные смещения могут рассматриваться как разделённые смещения показаний часов некоторой виртуальной шкалы системы, соответствующей комбинации измерений Мельбурна-Вуббена $A^{G,j}_{4}$ (А.5)),

$\varepsilon^{G}_{A4} = \frac{77}{17}\varepsilon^{G}_{L1} - \frac{60}{17}\varepsilon^{G}_{L2} - \frac{77}{137}\varepsilon^{G}_{P1} - \frac{60}{137}\varepsilon^{G}_{P2}$ - шумовая ошибка комбинации измерений Мельбурна-Вуббена (А.5).

В линеаризованном виде система (3.26) имеет вид

$$\begin{cases} P^{G,j}_{3} = R^{j}_{C} + h^{j}_{x}\Delta x + h^{j}_{y}\Delta y + h^{j}_{z}\Delta z + m^{j}\Delta D_{W} + dT^{G}_{P3} - dt^{G,j}_{P3} + \varepsilon^{G}_{P3}, \\ L^{G,j}_{3} = R^{j}_{C} + h^{j}_{x}\Delta x + h^{j}_{y}\Delta y + h^{j}_{z}\Delta z + m^{j}\Delta D_{W} + dT^{G}_{L3} - dt^{G,j}_{L3} - \lambda^{G}_{3}N^{G,j}_{3} + \varepsilon^{G}_{L3}, \\ A^{G,j}_{4} = b^{G}_{r,A4} - b^{j,G}_{A4} - \lambda^{G}_{4}N^{G,j}_{4} + \varepsilon^{G}_{A4}, \end{cases} \tag{3.27}$$

При местоопределении в режиме Integer PPP разделённые спутниковые часы $dt^{G,j}_{P3}, dt^{G,j}_{L3}, b^{j,G}_{A4}$ считаются известными из сетевого решения (рассматривается в пятой главе диссертации). К числу оцениваемых параметров модели (3.27) относятся следующие величины: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, ΔD_{W}, $dT^{G}_{P3}, dT^{G}_{L3}, b^{G}_{r,A4}$, $\lambda^{G}_{3}N^{G,1}_{3} \ldots \lambda^{G}_{3}N^{G,Msat}_{3}$, $\lambda^{G}_{4}N^{G,1}_{4} \ldots \lambda^{G}_{4}N^{G,Msat}_{4}$. В матричном виде система (3.27) записывается следующим образом (известные из сетевого решения разделённые поправки к показаниям спутниковых часов $dt^{G,j}_{P3}, dt^{G,j}_{L3}, b^{j,G}_{A4}$ считаются уже перенесёнными в левую часть):

$$\mathbf{y}_{3Msat\times1}=\mathbf{A}_{3Msat\times(7+2Msat)}\mathbf{X}_{(7+2Msat)\times1}+\boldsymbol{\varepsilon}_{3Msat\times1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{y}_{P3}\\ \mathbf{y}_{L3}\\ \mathbf{y}_{A4}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A_r} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}\end{bmatrix}}_{3Msat\times(7+2Msat)}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ dT^G_{P3}\\ dT^G_{L3}\\ b^G_{r,A4}\\ \boldsymbol{\lambda}^G_3\mathbf{N}^G_3\\ \boldsymbol{\lambda}^G_4\mathbf{N}^G_4\end{bmatrix}_{(7+2Msat)\times1}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{P3}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{L3}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{A4}\end{bmatrix} \qquad (3.28)$$

где:

$\mathbf{y}=[\mathbf{y}_{P3}\quad \mathbf{y}_{L3}\quad \mathbf{y}_{A4}]^T$ - вектор измерений, соответствующих измерениям $P^{G,j}_3, L^{G,j}_3, A^{G,j}_4$ с учётом перенесённых в левую часть разделённых спутниковых поправок $dt^{G,j}_{P3}, dt^{G,j}_{L3}, b^{j,G}_{A4}$ и дальностей R^j_C;

$\boldsymbol{\varepsilon}=[\boldsymbol{\varepsilon}_{P3}\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{L3}\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{A4}]^T$ - вектор ошибок измерений, соответствующих измерениям $P^{G,j}_3, L^{G,j}_3, A^{G,j}_4$;

$\boldsymbol{\lambda}^G_3\mathbf{N}^G_3$ и $\boldsymbol{\lambda}^G_4\mathbf{N}^G_4$ - вектора целочисленных неоднозначностей $\lambda^G_3 N^{G,j}_3$ и $\lambda^G_4 N^{G,j}_4$, соответствующие измерениям $L^{G,j}_3$ и $A^{G,j}_4$ (м);

Длина волны λ^G_3, соответствующая неоднозначности $N^{G,j}_3$, составляет всего около 0.006 м, что затрудняет поиск целых чисел $N^{G,j}_3$ с учетом уровня шумов в измерениях $L^{G,j}_3$ (дисперсия шумов при образовании ионосферосвободной комбинации $L^{G,j}_3$ возрастает почти в 9 раз). По этой причине в [47] предлагается до процедуры разрешения целочисленной неоднозначности из целочисленного пространства $\{N^{G,j}_3, N^{G,j}_4\}$ осуществлять переход в целочисленное пространство $\{N^{G,j}_1, N^{G,j}_4\}$ или $\{N^{G,j}_1, N^{G,j}_2\}$ согласно следующим выражениям:

$$\begin{cases}N^{G,j}_3=77N^{G,j}_1-60N^{G,j}_2=17N^{G,j}_1+60N^{G,j}_4\\ N^{G,j}_4=N^{G,j}_1-N^{G,j}_2\end{cases} \qquad (3.29)$$

С учетом (3.29) можно записать:

$$\lambda^G_3 N^{G,j}_3=\lambda^G_3\left(17N^{G,j}_1+60N^{G,j}_4\right)=17\lambda^G_3 N^{G,j}_1+60\lambda^G_3 N^{G,j}_4, \qquad (3.30)$$

где $17\lambda^G_3\approx 0.107$м , что существенно повышает вероятность правильного разрешения целочисленной неоднозначности. Разрешение целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений осуществляется в целочисленном пространстве $\{N^{G,j}_1, N^{G,j}_4\}$ или $\{N^{G,j}_1, N^{G,j}_2\}$.

Если в (3.26)-(3.28) из целочисленного пространства $\{N^{G,j}_3, N^{G,j}_4\}$ в соответствии с (3.29), (3.30) перейти к целочисленному пространству $\{N^{G,j}_1, N^{G,j}_4\}$, то неоднозначности $N^{G,j}_1$ будут входить в измерения $L_3^{G,j}$ с длиной волны $\lambda_6^G = 17\lambda_3^G \approx 0.107$м, а неоднозначности $N_4^{G,j}$ будут входить в измерения $L_3^{G,j}$ с длиной волны $\frac{60}{137}\lambda_4^G = 60\lambda_3^G \approx 0.37$м и в измерения $A_4^{G,j}$ с длиной волны $\lambda_4^G \approx 0.86$м.

Система линеаризованных уравнений (3.28) является сингулярной с дефицитом ранга равным двум. Всего в модели (3.28) $7+2\text{Msat}$ оцениваемых параметров. Для краткости записи далее ионосферосвободная модель измерений GPS (3.28) обозначается как P3L3A4.

В [62] описана расширенная ионосферосвободная модель измерений GPS с разделёнными часами, где комбинация измерений $A_4^{G,j}$ (A.5) расщепляется на отдельные кодовую $P_4^{G,j}$ (A.4) и фазовую $L_4^{G,j}$ (A.3) комбинации, содержащие смещённую наклонную ионосферную задержку:

$$\begin{cases} P_3^{G,j} = R^j + m^j \Delta D_W + dT_{P3}^G - dt_{P3}^{G,j} + \varepsilon_{P3}^G, \\ L_3^{G,j} = R^j + m^j \Delta D_W + dT_{L3}^G - dt_{L3}^{G,j} - \lambda_3^G \left(17N_1^{G,j} + 60N_4^{G,j}\right) + \varepsilon_{L3}^G, \\ P_4^{G,j} = R^j + m^j \Delta D_W + dT_{L3}^G - dt_{L3}^{G,j} + b_{r,A4}^G - b_{A4}^{j,G} + I^{*j}_1 + \varepsilon_{P4}^G, \\ L_4^{G,j} = R^j + m^j \Delta D_W + dT_{L3}^G - dt_{L3}^{G,j} - \lambda_4^G N_4^{G,j} + I^{*j}_1 + \varepsilon_{L4}^G, \end{cases} \tag{3.31}$$

где:

$I^{*j}_1 = \frac{77}{60} I_1^j + b_{r,L4}^G - b_{r,L3}^G - b_{L4}^{j,G} + b_{L3}^{j,G}$ - линейная комбинация масштабированной (с коэффициентом $\frac{77}{60}$) наклонной ионосферной задержки сигнала j-го спутника на частоте f_1^G и фазовых аппаратурных смещений (смещённая наклонная ионосферная задержки сигнала j-го спутника на частоте f_1^G);

$b_{r,L4}^G$ и $b_{L4}^{j,G}$ - смещения в аппаратуре приёмника потребителя и j-го спутника в комбинации измерений $L_4^{G,j}$ (A.3);

ε_{P4}^G и ε_{L4}^G - шумовые ошибки комбинации измерений $P_4^{G,j}$ (A.4) и $L_4^{G,j}$ (A.3).

К числу оцениваемых параметров модели (3.31) относятся следующие величины: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, ΔD_W, $dT_{P3}^G, dT_{L3}^G, b_{r,A4}^G$, $\lambda_1^G N_1^{G,1} \ldots \lambda_1^G N_1^{G,Msat}$, $\lambda_4^G N_4^{G,1} \ldots \lambda_4^G N_4^{G,Msat}$, $I^{*1}_1 \ldots I^{*Msat}_1$ (к оцениваемым параметрам модели P3L3A4 (3.28) добавлены Msat смещённых наклонных ионосферных задержек).

В матричном виде система (3.31) после линеаризации записывается следующим образом (известные из сетевого решения разделённые поправки к показаниям спутниковых часов $dt_{P3}^{G,j}, dt_{L3}^{G,j}, b_{A4}^{j,G}$ уже перенесены в левую часть):

$$\mathbf{y}_{4\mathrm{Msat}\times1} = \mathbf{A}_{4\mathrm{Msat}\times(7+3\mathrm{Msat})}\mathbf{X}_{(7+3\mathrm{Msat})\times1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{4\mathrm{Msat}\times1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathbf{P3}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{L3}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{P4}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{L4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{r}} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{r}} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & -\frac{60}{137}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{r}} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{r}} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ dT_{P3}^{G} \\ dT_{L3}^{G} \\ b_{r,A4}^{G} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{6}}^{\mathbf{G}}\mathbf{N}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{G}} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{4}}^{\mathbf{G}}\mathbf{N}_{\mathbf{4}}^{\mathbf{G}} \\ \mathbf{I}^{*}{}_{\mathbf{1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P3}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L3}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P4}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L4}} \end{bmatrix} \qquad (3.32)$$

где:

$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}\mathbf{y}_{\mathbf{P3}} & \mathbf{y}_{\mathbf{L3}} & \mathbf{y}_{\mathbf{P4}} & \mathbf{y}_{\mathbf{L4}}\end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ - вектор измерений, соответствующий измерениям $P_3^{G,j}, L_3^{G,j}, P_4^{G,j}, L_4^{G,j}$ с учётом перенесённых в левую часть разделённых спутниковых поправок $dt_{P3}^{G,j}, dt_{L3}^{G,j}, b_{A4}^{j,G}$ и дальностей R_C^j;

$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P3}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L3}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P4}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L4}}\end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ - вектор ошибок измерений, соответствующий измерениям $P_3^{G,j}, L_3^{G,j}, P_4^{G,j}, L_4^{G,j}$.

Вектор $\mathbf{X}$ и матрица $\mathbf{A}$ в (3.32) учитывают, что целочисленные неоднозначности $N_1^{G,j}$ в измерениях $L_3^{G,j}$ связаны с длиной волны $\lambda_6^G \approx 0.107\,\text{м}$, а целочисленные неоднозначности $N_4^{G,j}$ в измерениях $L_3^{G,j}$ связаны с длиной волны $\frac{60}{137}\lambda_4^G = 60\lambda_3^G \approx 0.37\,\text{м}$ и в измерениях $L_4^{G,j}$ - с длиной волны $\lambda_4^G \approx 0.86\,\text{м}$.

Система (3.32) является сингулярной, дефицит ранга равен двум. Всего в модели (3.32) $7+3\mathrm{Msat}$ оцениваемых параметров. Для краткости записи далее расширенная ионосферосвободная модель измерений GPS с разделёнными часами (3.32) обозначается как P3L3P4L4.

Как видно, в моделях P3L3A4 (3.28) и P3L3P4L4 (3.32) используется один и тот же набор разделённых поправок к показаниям часов спутников $dt_{P3}^{G,j}, dt_{L3}^{G,j}, b_{A4}^{j,G}$.

3.2.3 Расширенная модель измерений на исходных частотах GPS (EX_P1P2L1L2)

Местоопределение потребителя с использованием модели измерений на исходных частотах P1P2L1L2 (3.25) требует наличия разделённых поправок к показаниям часов спутников на исходных частотах $dt_{P1}^{G,j}$, $dt_{P2}^{G,j}$, $dt_{L1}^{G,j}$, $dt_{L2}^{G,j}$. В настоящее время такие поправки не вычисляются каким-либо космическим агентством, поэтому модель P1P2L1L2 (3.25) не может быть использована для местоопределения потребителя без реализации соответствующего сетевого решения. В процессе работы над диссертацией рассматривались различные варианты преодоления указанного ограничения по использованию модели измерений P1P2L1L2 (3.25). При наличии ионосферосвободных разделённых поправок к показаниям часов спутников из моделей P3L3A4 (3.28), P3L3P4L4 (3.32) одним из таких вариантов может быть расширение модели измерений P1P2L1L2 (3.25). При этом ионосферосвободные разделённые поправки к показаниям спутниковых часов $dt_{P3}^{G,j}$, $dt_{L3}^{G,j}$, и $b_{A4}^{j,G}$ из моделей P3L3A4 (3.28), P3L3P4L4 (3.32) могут быть использованы в модели (3.25) как псевдоизмерения, т.е. модель (3.25) может быть расширена добавлением следующих линейных уравнений относительно переменных $dt_{P1}^{G,j}$, $dt_{P2}^{G,j}$, $dt_{L1}^{G,j}$, $dt_{L2}^{G,j}$:

$$\begin{cases} dt_{P3}^{G,j} = \dfrac{77^2 dt_{P1}^{G,j} - 60^2 dt_{P2}^{G,j}}{77^2 - 60^2} \\ dt_{L3}^{G,j} = \dfrac{77^2 dt_{L1}^{G,j} - 60^2 dt_{L2}^{G,j}}{77^2 - 60^2} \\ b_{A4}^{j,G} = \dfrac{77}{17} dt_{L1}^{G,j} - \dfrac{60}{17} dt_{L2}^{G,j} - \dfrac{77}{137} dt_{P1}^{G,j} - \dfrac{60}{137} dt_{P2}^{G,j} \end{cases} \tag{3.33}$$

В результате возникает следующая расширенная модель измерений на исходных частотах GPS:

$$\begin{cases} P_1^{G,j} = R^j + dT_{P1}^G - dt_{P1}^{G,j} + I_1^j + \varepsilon_{P1}^G, \\ P_2^{G,j} = R^j + dT_{P2}^G - dt_{P2}^{G,j} + k^G I_1^j + \varepsilon_{P2}^G, \\ L_1^{G,j} = R^j + dT_{L1}^G - dt_{L1}^{G,j} - I_1^j - \lambda_1^G N_1^{G,j} + \varepsilon_{L1}^G, \\ L_2^{G,j} = R^j + dT_{L2}^G - dt_{L2}^{G,j} - k^G I_1^j - \lambda_2^G N_2^{G,j} + \varepsilon_{L2}^G, \\ dt_{P3}^{G,j} = \dfrac{77^2 dt_{P1}^{G,j} - 60^2 dt_{P2}^{G,j}}{77^2 - 60^2} \\ dt_{L3}^{G,j} = \dfrac{77^2 dt_{L1}^{G,j} - 60^2 dt_{L2}^{G,j}}{77^2 - 60^2} \\ b_{A4}^{j,G} = \dfrac{77}{17} dt_{L1}^{G,j} - \dfrac{60}{17} dt_{L2}^{G,j} - \dfrac{77}{137} dt_{P1}^{G,j} - \dfrac{60}{137} dt_{P2}^{G,j} \end{cases} \tag{3.34}$$

Оцениваемыми параметрами модели (3.34) являются следующие величины: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, ΔD_W, $dt_{P1}^{G,1} ... dt_{P1}^{G,Msat}$, $dt_{P2}^{G,1} ... dt_{P2}^{G,Msat}$, $dt_{L1}^{G,1} ... dt_{L1}^{G,Msat}$, $dt_{L2}^{G,1} ... dt_{L2}^{G,Msat}$, $\lambda_1^G N_1^{G,1} ... \lambda_1^G N_1^{G,Msat}$, $\lambda_2^G N_2^{G,1} ... \lambda_2^G N_2^{G,Msat}$, $I_1^1 ... I_1^{Msat}$.

После линеаризации система (3.34) записывается в следующем матричном виде:

$$\mathbf{y}_{7\mathrm{Msat}\times 1} = \mathbf{A}_{7\mathrm{Msat}\times(8+7\mathrm{Msat})}\mathbf{X}_{(8+7\mathrm{Msat})\times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{7\mathrm{Msat}\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathbf{P1}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{P2}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{L1}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{L2}} \\ \mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{P3}} \\ \mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L3}} \\ \mathbf{b}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{A4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_r} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{A_r} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{k}^{\mathrm{G}}\mathbf{I} \\ \mathbf{A_r} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & -\mathbf{I} & 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A_r} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & -\mathbf{I} & -\mathrm{k}^{\mathrm{G}}\mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f\mathbf{I} & g\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f\mathbf{I} & g\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a\mathbf{I} & b\mathbf{I} & c\mathbf{I} & d\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{P1}} \\ \mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{P2}} \\ \mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L1}} \\ \mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L2}} \\ \mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{P1}} \\ \mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{P2}} \\ \mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L1}} \\ \mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L2}} \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}\mathbf{N}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}} \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{2}}\mathbf{N}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{2}} \\ \mathbf{I_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P2}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L2}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{dt\_P3}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{dt\_L3}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b\_A4}} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

где:

$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathbf{P1}} & \mathbf{y}_{\mathbf{P2}} & \mathbf{y}_{\mathbf{L1}} & \mathbf{y}_{\mathbf{L2}} & \mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{P3}} & \mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L3}} & \mathbf{b}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{A4}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ - вектор измерений, соответствующий измерениям $\mathrm{P}^{\mathrm{G,j}}_{1}, \mathrm{P}^{\mathrm{G,j}}_{2}, \mathrm{L}^{\mathrm{G,j}}_{1}, \mathrm{L}^{\mathrm{G,j}}_{2}, \mathrm{dt}^{\mathrm{G,1}}_{\mathrm{P3}}, \mathrm{dt}^{\mathrm{G,1}}_{\mathrm{L3}}, \mathrm{b}^{\mathrm{j,G}}_{\mathrm{A4}}$ с учётом перенесённых в левую часть дальностей $\mathrm{R}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{C}}$;

$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P1}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P2}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L1}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L2}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{dt\_P3}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{dt\_L3}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{b\_A4}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ - вектор ошибок измерений, соответствующий измерениям $\mathrm{P}^{\mathrm{G,j}}_{1}, \mathrm{P}^{\mathrm{G,j}}_{2}, \mathrm{L}^{\mathrm{G,j}}_{1}, \mathrm{L}^{\mathrm{G,j}}_{2}, \mathrm{dt}^{\mathrm{G,1}}_{\mathrm{P3}}, \mathrm{dt}^{\mathrm{G,1}}_{\mathrm{L3}}, \mathrm{b}^{\mathrm{j,G}}_{\mathrm{A4}}$;

$\mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{P1}}$, $\mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{P2}}$, $\mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L1}}$, $\mathbf{dt}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L2}}$ - вектора разделённых смещениё показаний часов спутников на исходных частотах $\mathrm{dt}^{\mathrm{G,j}}_{\mathrm{P1}}$, $\mathrm{dt}^{\mathrm{G,j}}_{\mathrm{P2}}$, $\mathrm{dt}^{\mathrm{G,j}}_{\mathrm{L1}}$, $\mathrm{dt}^{\mathrm{G,j}}_{\mathrm{L2}}$, $\mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{Msat}}$;

$$f = \frac{\left(\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{1}\right)^2}{\left(\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{1}\right)^2 - \left(\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{2}\right)^2} = \frac{77^2}{77^2 - 60^2}, \quad g = -\frac{\left(\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{2}\right)^2}{\left(\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{1}\right)^2 - \left(\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{2}\right)^2} = -\frac{60^2}{77^2 - 60^2}, \quad a = -\frac{\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{1}}{\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{1} + \mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{2}} = -\frac{77}{137},$$

$$b = -\frac{\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{2}}{\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{1} + \mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{2}} = -\frac{60}{137}, \quad c = \frac{\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{1}}{\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{1} - \mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{2}} = \frac{77}{17}, \quad d = -\frac{\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{2}}{\mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{1} - \mathrm{f}^{\mathrm{G}}_{2}} = -\frac{60}{17}.$$

Система (3.35) является сингулярной, дефицит ранга при $\mathrm{Msat} > 4$ равен $\mathrm{Msat} + 3$. Всего в модели (3.35) $8 + 7\mathrm{Msat}$ оцениваемых параметров. Для краткости записи далее расширенная модель измерений на исходных частотах GPS с разделёнными часами (3.35) обозначается как EX_P1P2L1L2.

3.2.4 Модель измерений на исходных частотах ГЛОНАСС (GL_P1P2L1L2)

Модель измерений на исходных частотах ГЛОНАСС с разделёнными часами в линеаризованном виде записывается как

$$
\begin{cases}
P_1^{R,j} = R_C^j + h_x^j \Delta x + h_y^j \Delta y + h_z^j \Delta z + m^j \Delta D_W + dT_{P1}^R - dt_{P1}^{R,j} + I_1^{R,j} + \varepsilon_{P1}^R, \\
P_2^{R,j} = R_C^j + h_x^j \Delta x + h_y^j \Delta y + h_z^j \Delta z + m^j \Delta D_W + dT_{P2}^R - dt_{P2}^{R,j} + k^R I_1^{R,j} + \varepsilon_{P2}^R, \\
\dfrac{L_1^{R,j}}{\lambda_1^{R,j}} = \dfrac{R_C^j}{\lambda_1^{R,j}} + \dfrac{h_x^j}{\lambda_1^{R,j}} \Delta x + \dfrac{h_y^j}{\lambda_1^{R,j}} \Delta y + \dfrac{h_z^j}{\lambda_1^{R,j}} \Delta z + \dfrac{m^j}{\lambda_1^{R,j}} \Delta D_W + \dfrac{dT_{L1}^R}{\lambda_1^{R,j}} + \dfrac{1}{c} d\dot{T}_{L1}^R - \dfrac{dt_{L1}^{R,j}}{\lambda_1^{R,j}} - \dfrac{1}{\lambda_1^{R,j}} I_1^{R,j} - N_1^{R,j} + \dfrac{\varepsilon_{L1}^R}{\lambda_1^{R,j}}, \\
\dfrac{L_2^{R,j}}{\lambda_2^{R,j}} = \dfrac{R_C^j}{\lambda_2^{R,j}} + \dfrac{h_x^j}{\lambda_2^{R,j}} \Delta x + \dfrac{h_y^j}{\lambda_2^{R,j}} \Delta y + \dfrac{h_z^j}{\lambda_2^{R,j}} \Delta z + \dfrac{m^j}{\lambda_2^{R,j}} \Delta D_W + \dfrac{dT_{L2}^R}{\lambda_2^{R,j}} + \dfrac{1}{c} d\dot{T}_{L2}^R - \dfrac{dt_{L2}^{R,j}}{\lambda_2^{R,j}} - \dfrac{k^R}{\lambda_2^{R,j}} I_1^{R,j} - N_2^{R,j} + \dfrac{\varepsilon_{L2}^R}{\lambda_2^{R,j}},
\end{cases}
\quad (3.36)
$$

где индекс “R” означает принадлежность соответствующих переменных к системе ГЛОНАСС; нижние индексы измерений $P_1^{R,j}$, $P_2^{R,j}$, $L_1^{R,j}$, $L_2^{R,j}$ соответствуют номеру частотного диапазона системы ГЛОНАСС (номинальные частоты диапазонов ГЛОНАСС, $L1: f_{L1}^R = 1602\,МГц$, $L2: f_{L2}^R = 1246\,МГц$); j – номер частотной литеры спутника; $\lambda_1^{R,j}$ и $\lambda_2^{R,j}$ - длины волн несущих колебаний спутниковых сигналов на частотах $f_1^{R,j} = f_{L1}^R + j \cdot \Delta f_1$ и $f_2^{R,j} = f_{L2}^R + j \cdot \Delta f_2$, $j = -7 \ldots 6$; $\Delta f_1 = 0.5625$ (МГц), $\Delta f_2 = 0.4375$ (МГц); $I_1^{R,j}$ - ионосферная задержка сигнала на частоте $f_1^{R,j}$; dT_{P1}^R, dT_{P2}^R - смещения показаний часов приёмника в измерениях $P_1^{R,j}$, $P_2^{R,j}$ (м); dT_{L1}^R, dT_{L2}^R - смещения показаний часов приёмника в измерениях $L_1^{R,j}$, $L_2^{R,j}$ для нулевой частотной литеры (м); $d\dot{T}_{L1}^R$, $d\dot{T}_{L2}^R$ - тангенсы угла наклона линейных зависимостей смещений показаний часов приёмника $dT_{L1}^R + \dfrac{1}{f_1^{R,j}} d\dot{T}_{L1}^R$, $dT_{L2}^R + \dfrac{1}{f_2^{R,j}} d\dot{T}_{L2}^R$ в измерениях $L_1^{R,j}$, $L_2^{R,j}$ от номера частотной литеры спутника j (м/с); $dt_{P1}^{R,j}$, $dt_{P2}^{R,j}$, $dt_{L1}^{R,j}$, $dt_{L2}^{R,j}$ - смещения показаний часов спутника с j-ой частотной литерой, учитывающие аппаратурные смещения в измерениях $P_1^{R,j}$, $P_2^{R,j}$, $L_1^{R,j}$, $L_2^{R,j}$ (м); $k^R = (9/7)^2 = \left(\dfrac{f_1^{R,j}}{f_2^{R,j}}\right)^2$; $N_1^{R,j}$ и $N_2^{R,j}$ - целочисленные неоднозначности измерений $\dfrac{L_1^{R,j}}{\lambda_1^{R,j}}$ и $\dfrac{L_2^{R,j}}{\lambda_2^{R,j}}$ (циклы).

Как известно [2], в ГЛОНАСС в каждом из частотных диапазонов L1 и L2 сигналы разными спутниками излучаются на различных частотах. В кодовых измерениях указанные особенности практически не проявляются в силу грубости измерений псевдодальностей [107], поэтому в измерениях псевдодальностей $P_1^{R,j}$, $P_2^{R,j}$ в (3.36) смещения показаний часов приёмника представлены слагаемыми dT_{P1}^R, dT_{P2}^R, которые не зависят от номера частотной литеры. В выраженных в циклах фазовых измерениях в (3.36) указанные особенности системы ГЛОНАСС проявляются так, что фазовые аппаратурные смещения, а также смещения показаний часов спутников и приёмника аппроксимируются линейной функцией с ошибками

$\approx (5-7)^\circ$ [107]. С учётом указанной линейной зависимости в (3.36) фазовые смещения показаний часов приёмника потребителя представлены как $\frac{dT_{L1}^{R}}{\lambda_1^{R,j}} + \frac{1}{c}\dot{dT}_{L1}^{R}$ и $\frac{dT_{L2}^{R}}{\lambda_2^{R,j}} + \frac{1}{c}\dot{dT}_{L2}^{R}$.

К числу оцениваемых параметров модели (3.36) относятся $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, ΔD_W, dT_{P1}^{R}, dT_{P2}^{R}, dT_{L1}^{R}, dT_{L2}^{R}, $\dot{dT}_{L1}^{R}$, $\dot{dT}_{L2}^{R}$, $N_1^{R,1} \dots N_1^{R,Msat}$, $N_2^{R,1} \dots N_2^{R,Msat}$, $I_1^{R,1} \dots I_1^{R,Msat}$. При местоопределении в режиме Integer PPP разделённые поправки к показаниям спутниковых часов $dt_{P1}^{R,j}, dt_{P2}^{R,j}, dt_{L1}^{R,j}, dt_{L2}^{R,j}$ считаются известными из сетевого решения.

В матричном виде система (3.36) записывается как

$$\mathbf{y}_{4Msat\times 1} = \mathbf{A}_{4Msat\times(10+3Msat)} \mathbf{X}_{(10+3Msat)\times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{4Msat\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{y_{P1}} \\ \mathbf{y_{P2}} \\ \mathbf{y_{L1}} \\ \mathbf{y_{L2}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A_r} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & k^R\mathbf{I} \\ \underline{\mathbf{A_r}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A_{\lambda1}} & \mathbf{0} & \frac{1}{c}\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{I_{\lambda1}} \\ \underline{\mathbf{A_r}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A_{\lambda2}} & \mathbf{0} & \frac{1}{c}\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & -k^R\mathbf{I_{\lambda1}} \end{bmatrix}}_{4Msat\times(10+3Msat)} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ dT_{P1}^{R} \\ dT_{P2}^{R} \\ dT_{L1}^{R} \\ dT_{L2}^{R} \\ \dot{dT}_{L1}^{R} \\ \dot{dT}_{L2}^{R} \\ \mathbf{N_1^R} \\ \mathbf{N_2^R} \\ \mathbf{I_1} \end{bmatrix}_{(10+3Msat)\times 1} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P2}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L1},\lambda\mathbf{1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L2},\lambda\mathbf{2}} \end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

где:

$\mathbf{y} = [\mathbf{y_{P1}} \quad \mathbf{y_{P2}} \quad \mathbf{y_{L1}} \quad \mathbf{y_{L2}}]^{\mathrm{T}}$ - вектор измерений, соответствующих измерениям $P_1^{R,j}, P_2^{R,j}, \frac{L_1^{R,j}}{\lambda_1^{R,j}}, \frac{L_2^{R,j}}{\lambda_2^{R,j}}$ с учётом перенесённых в левую часть разделённых спутниковых поправок $dt_{P1}^{R,j}, dt_{P2}^{R,j}, dt_{L1}^{R,j}, dt_{L2}^{R,j}$ и дальностей R_C^j;

$\underline{\mathbf{A_r}}$ - информационная матрица связи геометрических параметров $\mathbf{r}$ с измерениями $\mathbf{y_{L1}}$ и $\mathbf{y_{L2}}$, выраженными в циклах;

$\mathbf{A_{\lambda1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1^{R,1}} & \frac{1}{\lambda_1^{R,2}} & \dots & \frac{1}{\lambda_1^{R,Msat}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A_{\lambda2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2^{R,1}} & \frac{1}{\lambda_2^{R,2}} & \dots & \frac{1}{\lambda_2^{R,Msat}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ - информационные матрицы связи параметров dT_{L1}^{R}, dT_{L2}^{R} с измерениями $\mathbf{y_{L1}}$ и $\mathbf{y_{L2}}$, выраженными в циклах;

$$\mathbf{I}_{\lambda 1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1^{R,1}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda_1^{R,2}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_1^{R,Msat}}\end{bmatrix}$$
- информационная матрица связи ионосферных задержек $I_1^{R,j}$ с измерениями $\mathbf{y}_{L1}$, выраженными в циклах;

$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{P1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{P2} & \boldsymbol{\varepsilon}_{L1,\lambda 1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{L2,\lambda 2}\end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ - вектор ошибок измерений, соответствующих измерениям $P_1^{R,j}, P_2^{R,j}, \frac{L_1^{R,j}}{\lambda_1^{R,j}}, \frac{L_2^{R,j}}{\lambda_2^{R,j}}$;

$\mathbf{N}_1^{\mathbf{R}}$ и $\mathbf{N}_2^{\mathbf{R}}$ - вектора целочисленных неоднозначностей $N_1^{R,j}$ и $N_2^{R,j}$, соответствующие измерениям $\frac{L_1^{R,j}}{\lambda_1^{R,j}}$ и $\frac{L_2^{R,j}}{\lambda_2^{R,j}}$ (в записи векторов $\mathbf{N}_1^{\mathbf{R}}$ и $\mathbf{N}_2^{\mathbf{R}}$ нижние индексы обозначают номер частотного диапазона);

Всего в модели (3.37) $10+3Msat$ оцениваемых параметров. В силу присутствия разделённых часов и ионосферных задержек сигналов, а также в связи с малым отличием коэффициентов при параметрах dT_{L1}^{R}, dT_{L2}^{R} система уравнений (3.37) является сингулярной и при $Msat>4$ имеет дефицит ранга равный пяти. Для краткости записи далее модель измерений на исходных частотах ГЛОНАСС (3.37) обозначается как GL_P1P2L2L2.

3.3 Алгебраические методы решения систем линейных уравнений с дефицитом ранга в ГНСС

3.3.1 Особенности систем линейных уравнений в ГНСС

Системы (3.25), (3.28), (3.32) и (3.37) могут быть записаны в обобщённом матричном виде

$$\mathbf{y}_{m\times1} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times1}, \tag{3.38}$$

где $\mathbf{x}_{n\times1}$ - вектор оцениваемых параметров, $\mathbf{A}_{m\times n}$ - информационная матрица, $\mathbf{y}_{m\times1}$ - вектор измерений с известной ковариационной матрицей $\mathbf{W}^{-1}$. Согласно классификации раздела 3.1 система (3.38) является несовместной недоопределённой, т.е. $\mathbf{y} \notin \mathrm{R}(\mathbf{A})$, $\mathrm{R}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ и для ранга r матрицы $\mathbf{A}$ выполняется условие $\mathrm{r} < \min(\mathrm{m}, \mathrm{n})$. Это означает, что система (3.38) имеет бесконечное множество решений наименьших квадратов (МНК-решений), т.е. является сингулярной.

Множественные численные эксперименты с моделями реальных измерений псевдодальностей и псевдофаз с разделёнными часами как для системы ГЛОНАСС, так и для системы GPS показали, что для всех без исключения случаев в пространстве оцениваемых параметров оси системы координат, вдоль которых откладываются геометрические параметры ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и ΔD_W), являются ортогональными ядру $\mathrm{N}(\mathbf{A})$ матрицы $\mathbf{A}$ сингулярной системы линейных уравнений (3.38). Из этого свойства следует, что, несмотря на сингулярность системы (3.38), геометрические параметры могут быть оценены однозначно. В моделях измерений P3L3A4 (3.28), P3L3P4L4 (3.32) дополнительным параметром, оцениваемым однозначно, является смещение показаний часов приёмника потребителя dT_{P3}^{G}. Все остальные параметры системы (3.38), в том числе и целочисленные неоднозначности псевдофазовых измерений, вследствие сингулярности системы не могут быть оценены однозначно. В диссертации дефицит ранга предлагается преодолевать путём формирования линейных комбинаций неоднозначно оцениваемых параметров на основе теории S-преобразования [44], развитой применительно к геодезическим сетям, а также с использованием разработанного фильтрационного метода, описанного в разделе 3.4. Свобода, существующая в выборе S-преобразования, в диссертации используется для выбора таких комбинаций оцениваемых параметров, при которых комбинации целочисленных неоднозначностей сохраняют целочисленность.

Указанное свойство системы линейных уравнений (3.38) позволяет в задаче местоопределения использовать следующее блочное разбиение матрицы $\mathbf{A}$ (рассматривается на примере модели измерений P3L3A4 (3.28)):

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{y}_\mathrm{I}\\ \mathbf{y}_\mathrm{II}\end{bmatrix}=\left[\mathbf{A}_\mathrm{I}\;\vdots\;\mathbf{A}_\mathrm{II}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{x}_\mathrm{I}\\ \hdashline \mathbf{x}_\mathrm{II}\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{y}=\underbrace{\left[\begin{array}{cc:cccc}\mathbf{A_r} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{A_n} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{A_n}\end{array}\right]}_{3\mathrm{Msat}\times(7+2\mathrm{Msat})}\underbrace{\left[\begin{array}{c:c}\overbrace{\mathbf{r}\quad \mathrm{dT}^\mathrm{G}_\mathrm{P3}}^{\mathbf{x}_\mathrm{I}^\mathrm{T}} & \overbrace{\mathrm{dT}^\mathrm{G}_\mathrm{L3}\quad \mathrm{b}^\mathrm{G}_\mathrm{r,A4}\quad \boldsymbol{\lambda}^\mathbf{G}_\mathbf{3}\mathbf{N}^\mathbf{G}_\mathbf{3}\quad \boldsymbol{\lambda}^\mathbf{G}_\mathbf{4}\mathbf{N}^\mathbf{G}_\mathbf{4}}^{\mathbf{x}_\mathrm{II}^\mathrm{T}}\end{array}\right]^\mathbf{T}}_{(7+2\mathrm{Msat})\times 1} \qquad (3.39)$$

где вектор $\mathbf{x}_\mathbf{I}$ содержит геометрические параметры $\mathbf{r}$ и смещение $\mathrm{dT}^\mathrm{G}_\mathrm{P3}$ (параметры, оцениваемые однозначно), $\mathbf{A}_\mathbf{I}$ - соответствующий блок матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}_\mathbf{II}$ - неоднозначно оцениваемые параметры, которым соответствует блок $\mathbf{A}_\mathbf{II}$ матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{A_n}$ - блок матрицы $\mathbf{A}$, связывающий $\mathbf{y}$ с $\boldsymbol{\lambda}^\mathbf{G}_\mathbf{3}\mathbf{N}^\mathbf{G}_\mathbf{3}$ или $\boldsymbol{\lambda}^\mathbf{G}_\mathbf{4}\mathbf{N}^\mathbf{G}_\mathbf{4}$. Векторные пространства столбцов $\mathbf{A}_\mathbf{I}$ и $\mathbf{A}_\mathbf{II}$ образуют прямую сумму, т.е. $\mathbf{R}^{\mathbf{3Msat}}=\mathrm{R}(\mathbf{A}_\mathbf{I})\oplus\mathrm{R}(\mathbf{A}_\mathbf{II})$, что означает выполнение следующих двух условий:

1. Не существует линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{A}_\mathbf{I}$, равной линейной комбинацией столбцов матрицы $\mathbf{A}_\mathbf{II}$.
2. Ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен сумме рангов матриц $\mathbf{A}_\mathbf{I}$ и $\mathbf{A}_\mathbf{II}$, а дефицит ранга матрицы $\mathbf{A}$ равен сумме дефицитов ранга матриц $\mathbf{A}_\mathbf{I}$ и $\mathbf{A}_\mathbf{II}$.

Рис. 3.23 иллюстрирует указанное разбиение матрицы $\mathbf{A}$ на простейшем примере несовместной недоопределённой системы уравнений, в которой три оцениваемых параметра, $\mathrm{r}=2$, а координатная ось x_1 ортогональна ядру $\mathrm{N}(\mathbf{A})$. Красная линия отображает множество МНК-решений $\hat{\mathbf{x}}=[\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{I}\quad \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{II}]^\mathbf{T}$, имеющих неизменную координату $\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{I}$. Необходимо получить единственное решение $\hat{\mathbf{x}}^*=\left[\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{I}\quad \hat{\mathbf{x}}^*_\mathbf{II}\right]^\mathbf{T}$ (вектор $\hat{\mathbf{x}}^*_\mathbf{II}$ содержит оцениваемые однозначно линейные комбинации компонент вектора $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{II}$), т.е. перейти от несовместной недоопределённой системы к несовместной переопределённой ($\mathrm{r}=\mathrm{n},\mathrm{m}>\mathrm{n}$).

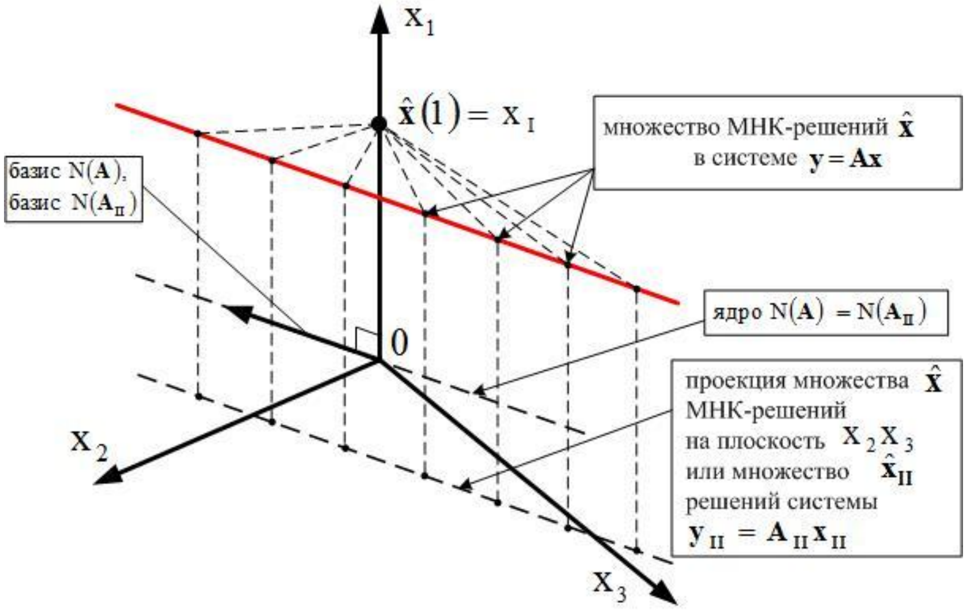

Рис. 3.23. Упрощённый геометрический пример,
поясняющий множество решений системы (3.38)

Для получения единственного решения вводятся в рассмотрение ортогональные базисы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}^{\perp}$ линейных векторных подпространств $R(\mathbf{S})$ и $R(\mathbf{S}^{\perp})$ такие, что

$$\begin{cases} \mathbf{R^n} = N(\mathbf{A_{II}}) \oplus R(\mathbf{S}), \\ \mathbf{R^n} = R(\mathbf{S}) \oplus R(\mathbf{S}^{\perp}) \end{cases} \tag{3.40}$$

Линейные векторные подпространства $R(\mathbf{S})$ и $R(\mathbf{S}^{\perp})$ для случая простейшего примера с $n = 2$ показаны на рис. 3.24. В плоскости x_2x_3 (рис. 3.24) для заданного базиса $\mathbf{S}$ всё множество векторов $\mathbf{x_{II}}$ системы $\mathbf{y_{II}} = \mathbf{A_{II}}\mathbf{x_{II}}$ может быть спроектировано на подпространство $R(\mathbf{S})$ вдоль ядра $N(\mathbf{A})$:

$$\mathbf{x}^{S} = \mathbf{P}_{R(\mathbf{S}),N(\mathbf{A})}\mathbf{x_{II}}, \tag{3.41}$$

где $\mathbf{x}^{S}$ - множество произвольных векторов, лежащих в $R(\mathbf{S})$, $\mathbf{P}_{R(\mathbf{S}),N(\mathbf{A})}$ - проекционная матрица на $R(\mathbf{S})$ вдоль $N(\mathbf{A})$ [44]:

$$\mathbf{P}_{R(\mathbf{S}),N(\mathbf{A})} = \mathbf{I}_{2\times2} - \mathbf{V}\left(\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{V}\right)^{-1}\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}, \tag{3.42}$$

где $\mathbf{I}_{2\times2}$ - единичная матрица, $\mathbf{V}_{m\times1}$ - базис ядра $N(\mathbf{A})$ ($N(\mathbf{A_{II}})$) матрицы $\mathbf{A_{II}}$. Функциональное преобразование (3.41) порождает те комбинации переменных системы

$$\mathbf{y_{II}} = \mathbf{A_{II}}\mathbf{x_{II}}, \tag{3.43}$$

которые оцениваются однозначно.

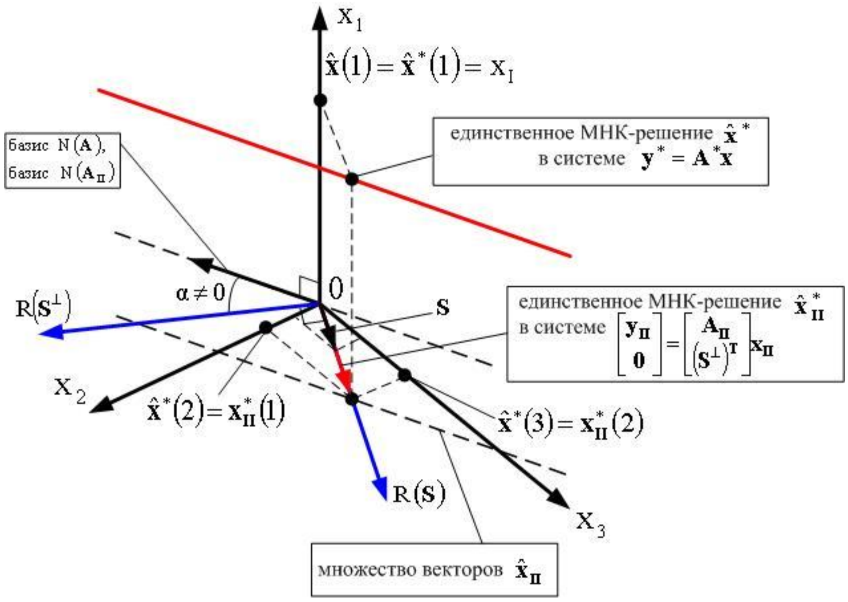

Рис. 3.24. Упрощённый геометрический пример, поясняющий наиболее общий случай выбора произвольного базиса $\mathbf{S}$ подпространства $R(\mathbf{S})$ в соответствии с (3.40)

Условие (3.41) может быть также записано в виде дополнительного ограничения на множество решений системы (3.43)

$$\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_{\mathbf{II}}=\mathbf{0}, \tag{3.44}$$

т.е. вектора $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ из множества двумерного пространства x_2x_3, удовлетворяющие (3.44), образуют всё множество векторов $\mathbf{x}^{S}$, лежащих в $R(\mathbf{S})$.

С учётом (3.44) система (3.43) расширяется до вида

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_{\mathbf{II}}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{\mathbf{II}}\\ \left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\end{bmatrix}\mathbf{x}_{\mathbf{II}}, \tag{3.45}$$

где матрица $\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{\mathbf{II}}\\ \left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\end{bmatrix}=\mathbf{A}^*_{\mathbf{II}}$ имеет полный ранг, т.е. система (3.45) является несовместной переопределённой системой с единственным МНК-решением $\hat{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{II}}$.

Для системы уравнений (3.45) из множества возможных векторов $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ в плоскости x_2x_3 на рис. 3.24 в качестве решения выбирается такой $\hat{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{II}}$, для которого выполняется (3.44) и (3.43), т.е. вектор $\hat{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{II}}$ лежит как в $R(\mathbf{S})$, так и в множестве векторов $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{II}}$. Вектор $\hat{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{II}}$ является подвектором искомого единственного МНК-решения $\hat{\mathbf{x}}^*=\left[\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{I}}\quad \hat{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{II}}\right]^{\mathbf{T}}$ системы

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_{\mathbf{I}}\\ \mathbf{y}_{\mathbf{II}}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{\mathbf{I}} & \mathbf{A}_{\mathbf{II}}\\ \mathbf{0} & \left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\end{bmatrix}}^{\mathbf{A}^*}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\mathbf{I}}\\ \mathbf{x}_{\mathbf{II}}\end{bmatrix}\Leftrightarrow \mathbf{y}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{x}, \tag{3.46}$$

которая является расширением системы (3.38).

Компоненты векторов $\mathbf{x}^{S}$ есть являются линейными комбинациями компонент векторов $\mathbf{x}_{\text{II}}$, образуемые умножением векторов $\mathbf{x}_{\text{II}}$ на проекционную матрицу $\mathbf{P}_{R(\mathbf{S}),N(\mathbf{A})}$ (3.42), а компоненты вектора $\hat{\mathbf{x}}^{*}_{\text{II}}$ есть количественные оценки указанных линейных комбинаций такие, что вектора $\mathbf{x}_{\text{II}}$, участвующие в этих комбинациях, удовлетворяют системе (3.45). Задание базиса $\mathbf{S}$ определяет те линейные комбинации составляющих вектора $\mathbf{x}_{\text{II}}$, которые оцениваются однозначно в системе (3.46).

В общем случае базис $\mathbf{S}$, удовлетворяющий условиям (3.40), может быть задан бесчисленным количеством способов (один из простейших вариантов показан на рис. 3.24). Однако на практике удобно выбирать базис $\mathbf{S}$ так, чтобы подпространство $R(\mathbf{S})$ было ортогонально такому числу координатных осей пространства оцениваемых параметров, которое равно дефициту ранга в системе уравнений вида (3.38). В этом случае компоненты векторов $\mathbf{x}^{S}$, соответствующие этим ортогональным координатным осям, являются нулевыми, а остальные компоненты векторов $\mathbf{x}^{S}$ смещаются на величину комбинации переменных, откладываемых вдоль ортогональных осей.

На рис. 3.25 показан такой выбор базиса $\mathbf{S}$, что подпространство $R(\mathbf{S})$ ортогонально оси x_3, т.е. $R(\mathbf{S}^{\perp})$ совпадает с осью x_3.

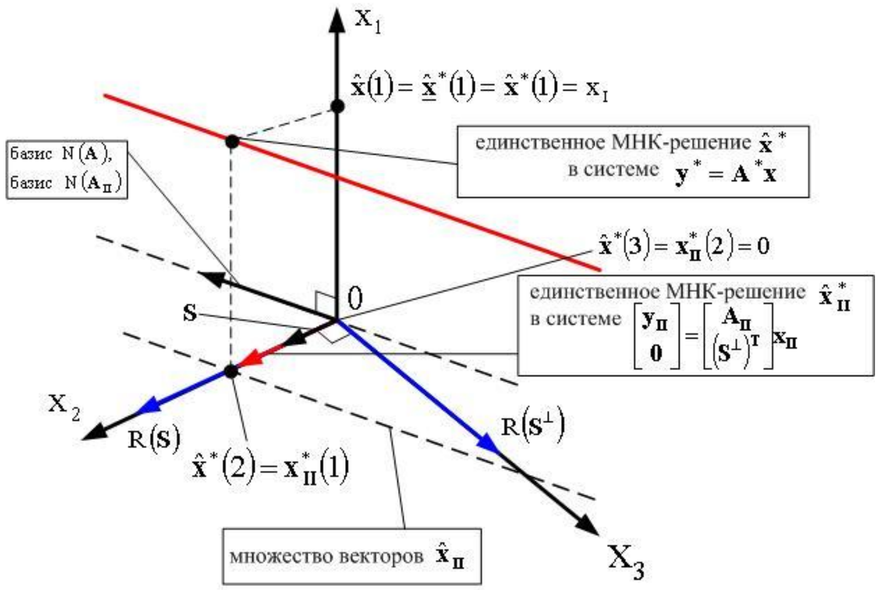

Рис. 3.25. Упрощённый геометрический пример, поясняющий удобный на практике выбор базиса $\mathbf{S}$ подпространства $R(\mathbf{S})$

В условиях, когда часть компонент вектора $\mathbf{x}^{S}$ равна нулю, компоненты вектора $\mathbf{x}_{\text{II}}$, удовлетворяющие условию $(\mathbf{S}^{\perp})^{T}\mathbf{x}_{\text{II}} = \mathbf{0}$ (3.44), будут совпадать с ненулевыми компонентами вектора $\mathbf{x}^{\mathrm{S}}$. Поскольку все компоненты вектора $\mathbf{x}^{\mathrm{S}}$ по определению удовлетворяют условию $\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_{\mathbf{II}}=\mathbf{0}$ (3.44), в условиях, когда часть компонент вектора $\mathbf{x}^{\mathrm{S}}$ равна нулю, система (3.46) может быть заменена более простой системой

$$\mathbf{y}=\underline{\mathbf{A}}^{*}\underline{\mathbf{x}}^{*}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{y}_{\mathbf{I}}\\ \mathbf{y}_{\mathbf{II}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{\mathbf{I}} & \underline{\mathbf{A}_{\mathbf{II}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\mathbf{I}}\\ \underline{\mathbf{x}_{\mathbf{II}}}\end{bmatrix}, \tag{3.47}$$

где $\underline{\mathbf{x}_{\mathbf{II}}}$ содержит только ненулевые компоненты вектора $\mathbf{x}^{\mathrm{S}}$ (3.41), координатные оси которых лежат в $\mathrm{R}(\mathbf{S})$, а в матрице $\underline{\mathbf{A}_{\mathbf{II}}}$ отсутствуют столбцы, соответствующие координатным осям, ортогональным к $\mathrm{R}(\mathbf{S})$. При этом матрица $\underline{\mathbf{A}_{\mathbf{II}}}$ является матрицей полного ранга, а размерность вектора $\underline{\mathbf{x}}^{*}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\mathbf{I}} & \underline{\mathbf{x}_{\mathbf{II}}}\end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ равна рангу матрицы $\underline{\mathbf{A}}^{*}$. То есть описанный выбор базиса $\mathbf{S}$ подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ позволяет от несовместной недоопределённой системы (3.38) перейти к несовместной переопределённой системе (3.47) без использования расширенной системы (3.46). При этом переход от системы (3.38) к (3.47) уменьшает число оцениваемых линейных комбинаций в векторе $\underline{\mathbf{x}_{\mathbf{II}}}$ до ранга матрицы $\underline{\mathbf{A}_{\mathbf{II}}}$.

Функциональные компоненты подвектора $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ в (3.39), ортогонально координатным осям которых выбрано подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{S})$, образуют линейные комбинации со всеми остальными функциональными компонентами подвектора $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ (3.39). Поэтому для сохранения целочисленности линейных комбинаций целочисленных функциональных компонент подвектора $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ в (3.39) подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ необходимо выбирать ортогонально координатным осям, соответствующим целочисленным неоднозначностям псевдофазовых измерений подвектора $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ в (3.39) (в противном случае целочисленность оцениваемых комбинаций функциональных компонент подвектора $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ (3.39), т.е. целочисленность соответствующих функциональных компонент вектора $\mathbf{x}^{\mathrm{S}}$, нарушается). При этом целочисленные псевдофазовые неоднозначности подвектора $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ (3.39), ортогонально которым выбирается подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{S})$, должны относиться к различным наборам неоднозначностей $\boldsymbol{\lambda}_{3}^{\mathbf{G}}\mathbf{N}_{3}^{\mathbf{G}}$ и $\boldsymbol{\lambda}_{4}^{\mathbf{G}}\mathbf{N}_{4}^{\mathbf{G}}$, т.к. дефицит ранга в системе (3.39) связан с каждым из них.

Для сохранения указанной целочисленности в модели P3L3A4 (3.28) (модели P3L3P4L4 (3.32)) базис $\mathbf{S}$ необходимо выбирать так, чтобы $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ было ортогонально двум координатным осям, соответствующим двум неоднозначностям $\lambda_{3}^{\mathrm{G}}\mathrm{N}_{3}^{\mathrm{G,j}}$ и $\lambda_{4}^{\mathrm{G}}\mathrm{N}_{4}^{\mathrm{G,j}}$ ($\lambda_{1}^{\mathrm{G}}\mathrm{N}_{1}^{\mathrm{G,j}}$ и $\lambda_{4}^{\mathrm{G}}\mathrm{N}_{4}^{\mathrm{G,j}}$)

выбранного j-го спутника. В этом случае указанные две неоднозначности будут формировать с остальными параметрами вектора $\mathbf{x_{II}}$ линейные комбинации.

В моделях измерений P1P2L1L2 (3.25) и GL_P1P2L1L2 (3.37) присутствуют ионосферные задержки сигнала, которые создают дополнительные сложности при обработке. Для указанных моделей при переходе от системы (3.38) к системе (3.47) без необходимости сохранить целочисленность комбинаций неоднозначностей в векторе $\underline{\mathbf{x_{II}}}$ можно выбрать базис **S** так, чтобы $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ было ортогонально трём и пяти координатным осям, соответствующим двум неоднозначностям $\lambda_1^G N_1^{G,j}$ и $\lambda_2^G N_2^{G,j}$ и одной ионосферной задержке I_1^j выбранного j-го спутника (модель P1P2L1L2 (3.25)) и двум неоднозначностям $\lambda_1^{R,j} N_1^{R,j}$ и $\lambda_2^{R,j} N_2^{R,j}$, параметрам dT_{L1}^R, dT_{L2}^R и одной ионосферной задержке $I_1^{R,j}$ выбранного j-го спутника (модель GL_P1P2L1L2 (3.37)). В этом случае три (пять) указанных параметров будут формировать линейные комбинации с остальными параметрами вектора $\mathbf{x_{II}}$, т.е. целочисленность комбинаций псевдофазовых неоднозначностей будет нарушена вследствие того, что ионосферные задержки I_1^j, $I_1^{R,j}$ и параметры dT_{L1}^R, dT_{L2}^R не являются целочисленными. При переходе от системы (3.38) к системе (3.47) с сохранением целочисленности комбинаций неоднозначностей в векторе $\underline{\mathbf{x_{II}}}$ следует выбрать базис **S** так, чтобы $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ было ортогонально двум координатным осям, соответствующим неоднозначностям $\lambda_1^G N_1^{G,j}$ и $\lambda_2^G N_2^{G,j}$ выбранного j-го спутника (модель P1P2L1L2 (3.25)) или двум неоднозначностям $\lambda_1^{R,j} N_1^{R,j}$ и $\lambda_2^{R,j} N_2^{R,j}$ выбранного j-го спутника (модель GL_P1P2L1L2 (3.37)). В этом случае два указанных параметра будут формировать линейные комбинации с остальными параметрами вектора $\mathbf{x_{II}}$. Для борьбы с ионосферными задержками и параметрами dT_{L1}^R, dT_{L2}^R в моделях P1P2L1L2 (3.25), GL_P1P2L1L2 (3.37) в диссертации разработан метод квазиоптимальной фильтрации (исключающий фильтр Калмана), позволяющий исключить влияние мешающих параметров, к которым относятся ионосферные задержки сигнала I_1^j (модель P1P2L1L2 (3.25)) и ионосферные задержки сигнала $I_1^{R,j}$ с параметрами dT_{L1}^R, dT_{L2}^R (модель GL_P1P2L1L2 (3.37)). Данный метод описан в разделе 3.4.

Для снижения дисперсий оцениваемых параметров на практике базис **S** выбирается так, чтобы $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ было ортогонально координатным осям неоднозначностей спутника с максимальным углом возвышения (так называемый базовый спутник). При обработке измерений значения углов возвышения спутников постоянно анализируются, и в случае смены базового спутника базис **S** также меняется. Данная процедура не вносит изменений в оценки поправок к координатам потребителя, т.к. в (3.39) выполняется условие $\mathbf{R}^{\mathbf{3Msat}} = \mathrm{R}(\mathbf{A_I}) \oplus \mathrm{R}(\mathbf{A_{II}})$.

3.3.2 Однозначное оценивание в системах ГНСС

В Таблице 4 для рассмотренных ранее моделей измерений с разделёнными часами P1P2L1L2 (3.25), P3L3A4 (3.28), P3L3P4L4 (3.32), EX_P1P2L1L2 (3.35), GL_P1P2L1L2 (3.37) для различного числа спутников в обработке Msat приводятся следующие величины: число измерений $\mathrm{N_m}$, число оцениваемых параметров $\mathrm{N_{est}}$, ранг r информационной матрицы $\mathbf{A}$, число однозначно оцениваемых параметров $\mathrm{N_{un}}$ (unambiguous), т.е. число параметров, координатные оси которых ортогональные ядру $\mathrm{N}(\mathbf{A})$ матрицы $\mathbf{A}$.

Таблица 4. Анализ моделей измерений с разделёнными часами

Число спутников Msat	Модель P1P2L1L2/ /GL_P1P2L1L2				Модель P3L3A4				Модель P3L3P4L4				Модель EX_P1P2L1L2			
	$\mathrm{N_m}$	$\mathrm{N_{est}}$	r	$\mathrm{N_{un}}$	$\mathrm{N_m}$	$\mathrm{N_{est}}$	r	$\mathrm{N_{un}}$	$\mathrm{N_m}$	$\mathrm{N_{est}}$	r	$\mathrm{N_{un}}$	$\mathrm{N_m}$	$\mathrm{N_{est}}$	r	$\mathrm{N_{un}}$
4	16	20/22	16	0	12	15	12	0	16	19	16	0	28	36	28	0
5	20	23/25	20	4	15	17	15	5	20	22	20	5	35	43	35	4
6	24	26/28	23	4	18	19	17	5	24	25	23	5	42	50	41	4
7	28	29/31	26	4	21	21	19	5	28	28	26	5	49	57	47	4
8	32	32/34	29	4	24	23	21	5	32	31	29	5	56	64	53	4
9	36	35/37	32	4	27	25	23	5	36	34	32	5	63	71	59	4
10	40	38/40	35	4	30	27	25	5	40	37	35	5	70	78	65	4
11	44	41/43	38	4	33	29	27	5	44	40	38	5	77	85	71	4
12	48	44/46	41	4	36	31	29	5	48	43	41	5	84	92	77	4

Анализируя Таблицу 4, можно отметить следующие особенности.

Модели P1P2L1L2, GL_P1P2L1L2:

$\mathrm{N_{est}} = 8 + 3\mathrm{Msat}$ (модель P1P2L1L2 (3.25)), $\mathrm{N_{est}} = 10 + 3\mathrm{Msat}$ (модель GL_P1P2L1L2 (3.37)), минимальное необходимое число видимых спутников, при котором в системе возможно однозначное оценивание части параметров, равно 5. При числе спутников $\mathrm{Msat} > 4$ число однозначно оцениваемых параметров постоянно и равно 4. К числу этих параметров относятся $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и ΔD_W. При $\mathrm{Msat} > 4$ разница между рангом r информационной матрицы и числом оцениваемых параметров $\mathrm{N_{est}}$ (дефицит ранга) постоянна и равна трём для модели P1P2L1L2 (3.25). После использования исключающего фильтра Калмана (раздел 3.4) применительно к

Msat ионосферным задержкам указанная разница для модели P1P2L1L2 (3.25) становится равна 2. Использование исключающего фильтра применительно к ионосферным задержкам в модели P1P2L1L2 (3.25) является альтернативой использованию ионосферосвободных комбинаций измерений в модели с разделёнными часами P3L3A4 (3.28), предложенной к обработке Министерством природных ресурсов Канады без каких бы то ни было пояснений. В рамках изложенной в подразделе 3.3.1 теории использование модели P3L3A4 (3.28) объясняется невозможностью устранения дефицита ранга модели P1P2L1L2 (3.25) только с использованием теории S-преобразования при сохранении целочисленности оцениваемых комбинаций псевдофазовых неоднозначностей. В модели P1P2L1L2 (3.25) следующие комбинации оцениваемых параметров из вектора $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ (3.39) соответствуют направлениям, которые ортогональны ядру $\mathrm{N}(\mathbf{A})$ информационной матрицы $\mathbf{A}$:

$$\begin{cases} \underline{a}\cdot\left(\dfrac{k^G}{k^G-1}\right)dT_{P1}^G-\underline{a}\cdot\left(\dfrac{1}{k^G-1}\right)dT_{P2}^G, \\ \underline{a}\cdot dT_{P1}^G+\underline{a}\cdot I_1^j, \\ \underline{a}\cdot dT_{P2}^G+\underline{a}\cdot k^G\cdot I_1^j, \\ \underline{a}\cdot dT_{L1}^G-\underline{a}\cdot\lambda_1^G N_1^{G,i}-\underline{a}\cdot I_1^j,\ i=1...Msat, j=1...Msat \qquad , \ \underline{a}\in R \\ \underline{a}\cdot dT_{L2}^G-\underline{a}\cdot\lambda_2^G N_2^{G,i}-\underline{a}\cdot k^G\cdot I_1^j,\ i=1...Msat, j=1...Msat \\ \underline{a}\cdot\lambda_1^G N_1^{G,i}-\underline{a}\cdot\lambda_1^G N_1^{G,j},\ i=1...Msat,\ j=1...Msat,\ i\neq j \\ \underline{a}\cdot\lambda_2^G N_2^{G,i}-\underline{a}\cdot\lambda_2^G N_2^{G,j},\ i=1...Msat,\ j=1...Msat,\ i\neq j \\ \underline{a}\cdot I_1^i-\underline{a}\cdot I_1^j,\ i=1...Msat,\ j=1...Msat,\ i\neq j, \end{cases} \qquad (3.48)$$

Направления, которые являются обратными направлениям, определяемым комбинациями параметров (3.48), т.е. такие, которые задаются комбинациями (3.48), взятыми с противоположным знаком, также ортогональны ядру $\mathrm{N}(\mathbf{A})$ информационной матрицы $\mathbf{A}$.

При $Msat>4$ разница между рангом r информационной матрицы и числом оцениваемых параметров N_{est} постоянна и равна пяти для модели GL_P1P2L1L2 (3.37). После использования исключающего фильтра Калмана (раздел 3.4) применительно к Msat ионосферным задержкам и параметрам dT_{L1}^R, dT_{L2}^R указанная разница для модели GL_P1P2L1L2 (3.37) становится равна 2. В модели GL_P1P2L1L2 (3.37) следующие комбинации оцениваемых параметров из вектора $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ (3.39) соответствуют направлениям, которые ортогональны ядру $\mathrm{N}(\mathbf{A})$ информационной матрицы $\mathbf{A}$:

$$\begin{cases} \underline{a}\cdot\left(\frac{k^R}{k^R-1}\right)dT_{P1}^R-\underline{a}\cdot\left(\frac{1}{k^R-1}\right)dT_{P2}^R, \\ \underline{a}\cdot dT_{P1}^R+\underline{a}\cdot I_1^{R,i}, \\ \underline{a}\cdot dT_{P2}^R+\underline{a}\cdot k^R\cdot I_1^{R,i}, \\ \underline{a}\cdot\frac{1}{\lambda_1^{R,i}}dT_{L1}^R+\underline{a}\cdot\frac{1}{c}d\dot{T}_{L1}^R-\underline{a}\cdot N_1^{R,i}-\underline{a}\cdot\frac{1}{\lambda_1^{R,i}}I_1^{R,i},\ i=1...Msat, \\ \underline{a}\cdot\frac{1}{\lambda_2^{R,i}}dT_{L2}^R+\underline{a}\cdot\frac{1}{c}d\dot{T}_{L2}^R-\underline{a}\cdot N_2^{R,i}-\underline{a}\cdot k^R\cdot\frac{1}{\lambda_2^{R,i}}I_1^{R,i},\ i=1...Msat, \\ \underline{a}\cdot N_1^{R,i}-\underline{a}\cdot N_1^{R,j},\ i=1...Msat,\ j=1...Msat,\ i\neq j \\ \underline{a}\cdot N_2^{G,i}-\underline{a}\cdot N_2^{G,j},\ i=1...Msat,\ j=1...Msat,\ i\neq j \\ \underline{a}\cdot\frac{1}{\lambda_1^{R,i}}\cdot I_1^{i}-\underline{a}\cdot\frac{1}{\lambda_1^{R,j}}\cdot I_1^{j},\ i=1...Msat,\ j=1...Msat,\ i\neq j, \\ \underline{a}\cdot k^R\cdot\frac{1}{\lambda_1^{R,i}}\cdot I_1^{R,i}-\underline{a}\cdot k^R\cdot\frac{1}{\lambda_1^{R,j}}\cdot I_1^{R,j},\ i=1...Msat,\ j=1...Msat,\ i\neq j, \end{cases} ,\quad \underline{a}\in R \qquad (3.49)$$

Направления, которые являются обратными направлениям, определяемым комбинациями параметров (3.49), т.е. такие, которые задаются комбинациями (3.49), взятыми с противоположным знаком, также ортогональны ядру $N(\mathbf{A})$ информационной матрицы $\mathbf{A}$.

При переходе в рамках моделей измерений P1P2L1L2 (3.25) и GL_P1P2L1L2 (3.37) от системы (3.38) к системе (3.47) оцениваемые комбинации параметров в $\underline{\mathbf{x}_{II}}$ (3.47) должны входить в множества (3.48) (модель P1P2L1L2 (3.25)) и (3.49) (модель GL_P1P2L1L2 (3.37)).

Модель P3L3A4:

$N_{est}=7+2Msat$, минимальное необходимое число видимых спутников, при котором в системе возможно однозначное оценивание части параметров, равно 5. При числе спутников $Msat>4$ число однозначно оцениваемых параметров постоянно и равно 5. К числу этих параметров относятся $\Delta x,\Delta y,\Delta z$, ΔD_W, dT_{P3}^G. При $Msat>4$ разница между рангом r информационной матрицы и числом оцениваемых параметров N_{est} постоянная и равна двум. В модели P3L3A4 (3.28) следующие комбинации оцениваемых параметров из вектора $\mathbf{x}_{II}$ (3.39) соответствуют направлениям, которые ортогональны ядру $N(\mathbf{A})$ информационной матрицы $\mathbf{A}$:

$$\begin{cases} \underline{a}\cdot dT_{L3}^G-\underline{a}\cdot\lambda_3^G N_3^{G,i},\ i=1...Msat, \\ \underline{a}\cdot b_{r,A4}^G-\underline{a}\cdot\lambda_4^G N_4^{G,i},\ i=1...Msat, \\ \underline{a}\cdot\lambda_3^G N_3^{G,i}-\underline{a}\cdot\lambda_3^G N_3^{G,j},\ i=1...Msat,\ j=1...Msat,\ i\neq j \\ \underline{a}\cdot\lambda_4^G N_4^{G,i}-\underline{a}\cdot\lambda_4^G N_4^{G,j},\ i=1...Msat,\ j=1...Msat,\ i\neq j \end{cases} ,\quad \underline{a}\in R \qquad (3.50)$$

Направления, которые являются обратными направлениям, определяемым комбинациями параметров (3.50), т.е. такие, которые задаются комбинациями (3.50), взятыми с противоположным знаком, также ортогональны ядру $N(\mathbf{A})$ информационной матрицы $\mathbf{A}$. При переходе в рамках модели измерений P3L3A4 (3.28) от системы (3.38) к системе (3.47) оцениваемые комбинации параметров в $\underline{\mathbf{x}_{\text{II}}}$ (3.47) должно входить во множество (3.50).

Модель P3L3P4L4:

$N_{est} = 7 + 3Msat$, минимальное необходимое число видимых спутников, при котором в системе возможно однозначное оценивание части параметров, равно 5. При числе спутников $Msat > 4$ число однозначно оцениваемых параметров постоянно и равно 5. К числу этих параметров относятся $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, ΔD_W, dT^G_{P3}. При $Msat > 4$ разница между рангом r информационной матрицы и числом оцениваемых параметров N_{est} постоянная и равна двум. В модели P3L3P4L4 (3.32) следующие комбинации оцениваемых параметров из вектора $\mathbf{x}_{\text{II}}$ (3.39) соответствуют направлениям, которые ортогональны ядру $N(\mathbf{A})$ информационной матрицы $\mathbf{A}$:

$$\begin{cases} \underline{a} \cdot dT^G_{L3} - \underline{a} \cdot \lambda^G_6 N^{G,i}_1 - \underline{a} \cdot \dfrac{60}{137} \lambda^G_4 N^{G,j}_4, \ i = 1...Msat, j = 1...Msat, \\ \underline{a} \cdot dT^G_{L3} + \underline{a} \cdot b^G_{r,A4} + \underline{a} \cdot I^{*i}_1, \ i = 1...Msat, \\ \underline{a} \cdot \lambda^G_6 N^{G,i}_1 - \underline{a} \cdot \lambda^G_6 N^{G,j}_1, \ i = 1...Msat, \ j = 1...Msat, \ i \neq j, \\ \underline{a} \cdot \lambda^G_4 N^{G,i}_4 - \underline{a} \cdot \lambda^G_4 N^{G,j}_4, \ i = 1...Msat, \ j = 1...Msat, \ i \neq j, \\ \underline{a} \cdot dT^G_{L3} - \underline{a} \cdot \lambda^G_4 N^{G,i}_4 + \underline{a} \cdot I^{*j}_1, \ i = 1...Msat, j = 1...Msat, \\ \underline{a} \cdot I^{*i}_1 - \underline{a} \cdot I^{*j}_1, i = 1...Msat, \ j = 1...Msat, \ i \neq j, \end{cases} \qquad \underline{a} \in R \qquad (3.51)$$

Модель EX_P1P2L1L2:

Модель отличается от рассмотренных ранее тем, что в ней оцениваются поправки к показаниям часов спутников $dt^{G,j}_{P1}$, $dt^{G,j}_{P2}$, $dt^{G,j}_{L1}$, $dt^{G,j}_{L2}$, $j = \overline{1, Msat}$, хотя в обработке участвуют измерения только одного приёмника. $N_{est} = 8 + 7Msat$, минимальное необходимое число видимых спутников, при котором в системе возможно однозначное оценивание части параметров, равно 5. При $Msat > 4$ число однозначно оцениваемых параметров постоянно и равно 4. К числу этих параметров относятся $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, ΔD_W. При $Msat > 4$ разница между рангом r информационной матрицы и числом оцениваемых параметров N_{est} не постоянна, а зависит от числа спутников $Msat$ и равна $Msat + 3$. В модели EX_P1P2L1L2 (3.35) следующие комбинации оцениваемых параметров из вектора $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ (3.39) соответствуют направлениям, которые ортогональны ядру $\mathrm{N}(\mathbf{A})$ информационной матрицы $\mathbf{A}$:

$$\begin{cases} \underline{a} \cdot \left(\dfrac{k^G}{k^G - 1}\right) dT_{P1}^G - \underline{a} \cdot \left(\dfrac{1}{k^G - 1}\right) dT_{P2}^G, \\ \underline{a} \cdot \left(\dfrac{k^G}{k^G - 1}\right) dt_{P1}^{G,j} - \underline{a} \cdot \left(\dfrac{1}{k^G - 1}\right) dt_{P2}^{G,j}, \\ \underline{a} \cdot \left(\dfrac{k^G}{k^G - 1}\right) dt_{L1}^{G,j} - \underline{a} \cdot \left(\dfrac{1}{k^G - 1}\right) dt_{L2}^{G,j}, \\ \underline{a} \cdot dT_{P1}^G - \underline{a} \cdot dt_{P1}^{G,i} + \underline{a} \cdot I_1^i,\ i = 1...Msat, \\ \underline{a} \cdot dT_{P2}^G - \underline{a} \cdot dt_{P2}^{G,i} + \underline{a} \cdot k^G \cdot I_1^i,\ i = 1...Msat, \\ \underline{a} \cdot dT_{L1}^G - \underline{a} \cdot dt_{L1}^{G,i} - \underline{a} \cdot \lambda_1^G N_1^{G,j} - \underline{a} \cdot I_1^i, i = 1...Msat,\ j = 1...Msat, \\ \underline{a} \cdot dT_{L2}^G - \underline{a} \cdot dt_{L2}^{G,i} - \underline{a} \cdot \lambda_2^G N_2^{G,j} - \underline{a} \cdot k^G \cdot I_1^i, i = 1...Msat,\ j = 1...Msat, \\ \underline{a} \cdot a \cdot dt_{P1}^{G,i} + \underline{a} \cdot b \cdot dt_{P2}^{G,i} + \underline{a} \cdot c \cdot dt_{L1}^{G,i} + \underline{a} \cdot d \cdot dt_{L2}^{G,i},\ i = 1...Msat, \\ \underline{a} \cdot \lambda_1^G N_1^{G,i} - \underline{a} \cdot \lambda_1^G N_1^{G,j},\ i = 1...Msat,\ j = 1...Msat, i \neq j \\ \underline{a} \cdot \lambda_2^G N_2^{G,i} - \underline{a} \cdot \lambda_2^G N_2^{G,j},\ i = 1...Msat,\ j = 1...Msat, i \neq j \end{cases}, \quad \underline{a} \in R \qquad (3.52)$$

После использования исключающего фильтра Калмана (раздел 3.4) применительно к $Msat$ ионосферным задержкам указанная разница становится равна 3. Описанными в подразделе 3.3.1 способами выбора базиса $\mathbf{S}$ подпространства $R(\mathbf{S})$ для данной модели измерений не удаётся устранить дефицит ранга полностью. Данная модель остаётся сингулярной с дефицитом ранга равным единице даже после исключения из числа оцениваемых параметров неоднозначностей по выбранному спутнику и формирования соответствующих линейных комбинаций оцениваемых параметров с сохранением их целочисленности. Сингулярность модели EX_P1P2L1L2 (3.35) связана с отсутствием поправок к показаниям часов спутников $dt_{P1}^{G,j}$, $dt_{P2}^{G,j}$, $dt_{L1}^{G,j}$, $dt_{L2}^{G,j}$ для исходных несущих частот GPS. Информационная матрица системы (3.35) не может иметь полный ранг, т.к. в данной модели для каждого спутника осуществляется оценка четырёх спутниковых поправок $dt_{P1}^{G,j}$, $dt_{P2}^{G,j}$, $dt_{L1}^{G,j}$, $dt_{L2}^{G,j}$ при использовании только трёх псевдоизмерений (3.33). Как видно из (3.35) в части информационной матрицы, связанной с псевдоизмерениями $dt_{P3}^{G,j}$, $dt_{L3}^{G,j}$, и $b_{A4}^{j,G}$, отсутствуют координатные оси, ортогонально которым может быть выбрано подпространство $R(\mathbf{S})$ (подпространство $R(\mathbf{S})$ не может быть выбрано ортогональным какой-либо из четырёх координатных осей, соответствующих оцениваемым поправкам $dt_{P1}^{G,j}$, $dt_{P2}^{G,j}$, $dt_{L1}^{G,j}$, $dt_{L2}^{G,j}$, т.к. при таком выборе будет нарушена подсистема (3.33), поскольку указанные поправки будут оцениваться в виде некоторых комбинаций, через которые псевдоизмерения $dt_{P3}^{G,j}$, $dt_{L3}^{G,j}$, и $b_{A4}^{j,G}$ не могут быть выражены). При этом, однако, в данной сингулярной модели по-прежнему сохраняется возможность однозначного оценивания параметров $\Delta x, \Delta y, \Delta z, dT_W$, а также применения алгоритмов разрешения целочисленной неоднозначности измерений псевдофазы. В [108] автором работы показано, что результаты высокоточного местоопределения по модели EX_P1P2L1L2 (3.35) практически полностью совпадают с результатами использования модели P3L3A4 (3.28). В разделе 3.4 также приводятся сравнительные результаты использования моделей EX_P1P2L1L2 (3.35) и P3L3A4 (3.28).

Отметим причины, по которым сингулярная модель измерений EX_P1P2L1L2 (3.35) при высокоточном местоопределении в режиме Integer PPP даёт результат. Во-первых, как было указано в подразделе 3.3.2, координатные оси геометрических параметров, к которым относятся поправки к грубым координатам потребителя, ортогональны к ядру информационной матрицы системы линейных уравнений. Во-вторых, при местоопределении вычисляется оценка по методу обобщённых наименьших квадратов, т.е. в формулах (2.19) при высокой точности вычислений определитель обращаемой матрицы используемой точности вычислений не равен нулю. Точность вычислений становится крайне критичной при использовании модели EX_P1P2L1L2 (3.35), поэтому сингулярная модель EX_P1P2L1L2 (3.35) рассматривается лишь с целью иллюстрации выявленных в диссертации свойств систем линейных уравнений в ГНСС и не рекомендуется к использованию на практике.

Следует отметить, что рассмотренные выше модели измерений, используемые в задаче высокоточного местоопределения потребителя, являются частным случаем более общей задачи оценивания параметров по измерениям сети наземных станций (задача сетевого решения). Особенностью задачи местоопределения потребителя является необходимость наличия в качестве исходных данных вычисленных заранее поправок к показаниям спутниковых часов. Данные поправки вычисляются в сетевом решении при обработке измерений сети наземных станций с известными координатами. Таким образом, возможность местоопределения потребителя при использовании рассмотренных пяти моделей измерений ограничена возможностью вычисления в сетевом решении соответствующих поправок к показаниям спутниковых часов для указанных моделей. В разделе 5.3 описано решение задачи вычисления поправок к показаниям спутниковых часов для модели измерений P3L3A4 (3.28) (сетевое решение).

3.4 Исключающий фильтр Калмана

Разрешение целочисленных неоднозначностей псевдофазовых измерений в [35, 46, 63] достигается путем использовании ионосферосвободных линейных комбинаций двухчастотных кодовых и фазовых измерений (модель измерений P3L3A4 (3.28)). Однако образование этих комбинаций влечёт за собой ряд негативных последствий - необходимость дополнительных целочисленных преобразований (подраздел (3.2.2)), рост шумов измерений (подраздел (3.2.2)), необходимость введения в модель P3L3A4 (3.28) дополнительных оцениваемых ионосферных параметров в случае использования ионосферных ограничений (модель P3L3P4L4 (3.32)). В связи с этим, в диссертации разработан фильтрационный метод [109], позволяющий исключить мешающие параметры (ионосферные задержки) из числа оцениваемых в рамках предложенной к обработке модели измерений на исходных частотах GPS P1P2L1L2 (3.25) и ГЛОНАСС GL_P1P2L1L2 (3.37).

Системы уравнений вида (3.38) применительно к ГНСС могут быть представлены в виде

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{\mathrm{a}} & \mathbf{A}_{\mathrm{b}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\mathrm{a}} \\ \mathbf{x}_{\mathrm{b}}\end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}_{\mathrm{a}} + \mathbf{A}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}_{\mathrm{b}}, \qquad (3.53)$$

где:

$\mathbf{x}_{\mathrm{a}}$ - вектор полезных оцениваемых параметров, в число которых входят неоднозначности псевдофазовых измерений,

$\mathbf{x}_{\mathrm{b}}$ - вектор мешающих оцениваемых параметров, к числу которых в рамках моделей измерений P1P2L1L2 (3.25), EX_P1P2L1L2 (3.35) и GL_P1P2L1L2 (3.37) можно отнести ионосферные задержки,

$\mathbf{A}_{\mathrm{a}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{b}}$ - блоки информационной матрицы $\mathbf{A}$ системы уравнений (3.53), соответствующие векторам $\mathbf{x}_{\mathrm{a}}$ и $\mathbf{x}_{\mathrm{b}}$.

Наиболее известным методом исключения мешающих параметров $\mathbf{x}_{\mathrm{b}}$ из системы линейных уравнений (3.53) является известный метод Гаусса (к которому относится формирование ионосферосвободных двухчастотных комбинаций измерений), который широко используется в ГНСС для исключения ионосферных задержек при обработке двухчастотных измерений псевдодальностей и псевдофаз. При этом происходит изменение как матрицы $\mathbf{A}_{\mathrm{a}}$ связи полезных оцениваемых параметров $\mathbf{x}_{\mathrm{a}}$ с измерениями $\mathbf{y}$, так и ковариационной матрицы $\mathbf{W}^{-1}$ измерений $\mathbf{y}$.

Для оценивания целочисленных неоднозначностей псевдофазовых измерений в ГНСС, которые входят в состав вектора $\mathbf{x}_{\mathrm{a}}$, требуется, чтобы коэффициенты при неоднозначностях в исходной либо измененной матрице $\mathbf{A}_a$ были целыми числами. В матрице $\mathbf{A}_a$, соответствующей исходным измерениям псевдофаз это условие выполняется. Однако в матрице $\mathbf{A}_a$, соответствующей ионосферосвободным комбинациям двухчастотных измерений псевдофаз это условие нарушается (имеются в виду коэффициенты $\frac{k^G}{k^G-1}$ и $\frac{1}{1-k^G}$ при неоднозначностях $\lambda_1^G N_1^{G,j}$ и $\lambda_2^G N_2^{G,j}$ в комбинации $L_3^{G,j}$), что влечёт за собой необходимость перехода к целочисленной неоднозначности $\lambda_3^G N_3^{G,j}$ с длиной волны $\lambda_3^G \approx 0.00629$м.

В данной работе для исключения мешающих параметров $\mathbf{x}_b$ из системы (3.53) используется метод, описанный в [25] (лемма частичного решения системы линейных уравнений) и [110]. В [25] показано, что оценка максимального правдоподобия $\hat{\mathbf{x}}_a$, получаемая из решения системы (3.53), может быть получена также из решения следующей редуцированной системы

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a, \tag{3.54}$$

при условии замены при максимально правдоподобном оценивании весовой матрицы $\mathbf{W}$ на модифицированную матрицу $\mathbf{W}_a = \mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{A}_b\left(\mathbf{A}_b^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\mathbf{A}_b\right)^{-1}\mathbf{A}_b^{\mathbf{T}}\mathbf{W}$. При этом, новая весовая матрица $\mathbf{W}_a$ является вырожденной. Таким образом, в предлагаемом методе меняется только весовая матрица. Матрица $\mathbf{A}_a$ при полезных параметрах $\mathbf{x}_a$ остается неизменной и, следовательно, коэффициенты перед целочисленными неоднозначностями в новой системе (**3.54**) остаются целыми числами.

На основе редуцированной модели наблюдения (3.54) и измененной весовой матрицы $\mathbf{W}_a$ возможно построение фильтра Калмана, осуществляющего фильтрацию только полезного параметра $\mathbf{x}_a$. Вычисление оценки $\hat{\mathbf{x}}_{av}$ полезного параметра на v-й момент времени в таком фильтре осуществляется по формуле ([111], с.375)

$$\hat{\mathbf{x}}_{a,v} = \mathbf{C}_{v-1}\hat{\mathbf{x}}_{a,v-1} + \mathbf{K}_v\left(\mathbf{y}_v - \mathbf{A}_{a,v}\mathbf{C}_{v-1}\hat{\mathbf{x}}_{a,v-1}\right) \tag{3.55}$$

где $\mathbf{C}_{v-1}$– матрица прогноза вектора $\mathbf{x}_a$ с (v-1)-го на v-й момент фильтрации, $\mathbf{K}_v = \mathbf{G}_v\mathbf{A}_{a,v}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}_{a,v}$, $\mathbf{G}_v^{-1} = \left(\mathbf{C}_{v-1}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}_{v-1}\mathbf{C}_{v-1} + \mathbf{F}_v\right)^{-1} + \mathbf{A}_{a,v}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}_{a,v}\mathbf{A}_{a,v}$, $\mathbf{F}_v$ - корреляционная матрица шумов прогноза, $\mathbf{G}_v$ – ковариационная матрица ошибок оценивания вектора $\hat{\mathbf{x}}_{av}$, $\mathbf{W}_{a,v}$ - модифицированная весовая матрица вектора измерений $\mathbf{z}_v$ на v-ый момент фильтрации. Описанный фильтрационный метод в диссертации назван Исключающим фильтром Калмана. В (3.53) вектор измерений $\mathbf{y}_v$ зависит не только от подвектора полезных оцениваемых параметров $\mathbf{x}_a$, но также и от подвектора мешающих параметров $\mathbf{x}_b$. Поскольку в данном фильтрационном методе отсутствуют оценка и прогноз мешающих параметров $\mathbf{x}_b$, исключающий фильтр Калмана является квазиоптимальным.

Форма записи исключающего фильтра Калмана (3.55) является разновидностью ковариационной формы записи фильтра Калмана и позволяет работать с модифицированной весовой матрицей $\mathbf{W}_{av}$, которая является сингулярной. Вследствие сингулярности весовой матрицы $\mathbf{W}_{av}$ наиболее распространённая ковариационная форма записи фильтра Калмана [84] не может быть использована.

Мешающими параметрами (вектор $\mathbf{x}_b$ в (3.53)) являются ионосферные задержки I_1^j по всем спутникам с матрицей $\mathbf{A}_b$ для каждого спутника вида

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} 1 & k^{G(R)} & -1 & -k^{G(R)} \end{bmatrix}^T \qquad (3.56)$$

Сравнительные зависимости трёхмерной ошибки определения координат потребителя от времени обработки измерений при использовании моделей измерений P3L3A4 (3.28) (кривая “Integer PPP P3L3A4”) и EX_P1P2L1L2 (3.35) (кривая “Integer PPP EX_P1P2L1L2”) приводятся на рис. 3.26. В модели EX_P1P2L1L2 (3.35) исключающий фильтр используется применительно к ионосферным задержкам спутниковых сигналов. На рисунке также приведены результаты высокоточного местоопределения в режиме Float PPP для модели измерений P3L3 (2.8) (кривая “Float PPP P3L3”). Как видно, использование исключающего фильтра Калмана при работе с измерениями на исходных частотах GPS не уступает использованию ионосферосвободных комбинаций измерений (модель P3L3A4 (3.28)). Отличия местоопределения в режиме Integer PPP от высокоточного местоопределения в режиме Float PPP описаны в четвёртой главе.

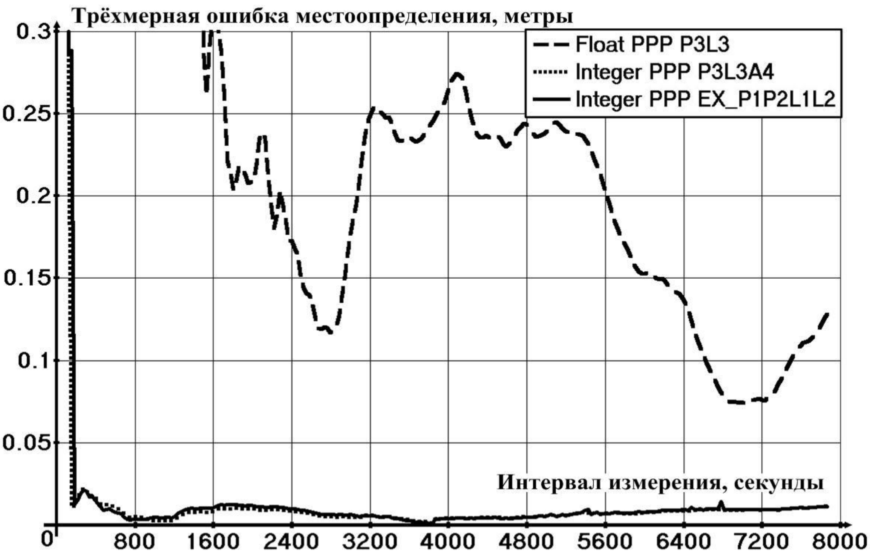

Рис. 3.26. Сравнение точности методов Integer PPP (модели P3L3A4 (3.28), EX_P1P2L1L2 (3.35)) и Float PPP (модель P3L3 (2.8))

3.5 Вычислительный пример преодоления дефицита ранга в ГНСС

Рассмотрим устранение сингулярности на примере модели измерений P1P2L1L2 (3.25) для случая $\mathrm{Msat}=5$. Система уравнений (3.25) с исключёнными при использовании исключающего фильтра Калмана ионосферными задержками имеет следующий вид:

$$\mathbf{y}_{20\times1}=\mathbf{A}_{20\times18}\mathbf{X}_{18\times1}+\boldsymbol{\varepsilon}_{20\times1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{y_{P1}}\\ \mathbf{y_{P2}}\\ \mathbf{y_{L1}}\\ \mathbf{y_{L2}}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A_r} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{A_n} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{A_n}\end{bmatrix}}_{20\times18}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ \mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{P1}}\\ \mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{P2}}\\ \mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L1}}\\ \mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L2}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}\mathbf{N}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{2}}\mathbf{N}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{2}}\end{bmatrix}_{18\times1}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P1}}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P2}}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L1}}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L2}}\end{bmatrix},\tag{3.57}$$

где $\mathbf{A_n}=-\mathbf{I}$. В связи с тем, что среди столбцов информационной матрицы $\mathbf{A}$ системы (3.57) можно выделить два столбца, которые являются линейно зависимыми от остальных, ранг r матрицы $\mathbf{A}$ равен 16, т.е. система (3.57) является сингулярной, дефицит ранга равен 2.

Далее приводится последовательность алгебраических действий, соответствующая выбору такого базиса $\mathbf{S}$ подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ (подраздел 3.3.1), при котором координатные оси целочисленных неоднозначностей $\lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},5}_{1}$ и $\lambda^{\mathrm{G}}_{2}\mathrm{N}^{\mathrm{G},5}_{2}$ пятого по порядку спутника ортогональны $\mathrm{R}(\mathbf{S})$, в результате чего система (3.57) преобразуется к системе полного ранга вида (3.47). Преобразования отдельных блоков матрицы $\mathbf{A}$ для подвекторов $\mathbf{y_{L1}}$ и $\mathbf{y_{L2}}$ можно осуществлять независимо:

$$\mathbf{y_{L1}}=\begin{bmatrix}\mathbf{A_r} & \mathbf{1} & \mathbf{A_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ \mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L1}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}\mathbf{N}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}\end{bmatrix}=\mathbf{A_r}\mathbf{r}+\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{A_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L1}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}\mathbf{N}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{A_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L1}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}\mathbf{N}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{array}{c}\overbrace{\quad}^{\mathbf{1}}\ \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\mathbf{A_n}}\\ \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}\mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L1}}\\ \lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},1}_{1}\\ \lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},2}_{1}\\ \lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},3}_{1}\\ \lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},4}_{1}\\ \lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},5}_{1}\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\mathbf{A_E}}\ \overbrace{\quad}^{\mathbf{A_N}}\\ \left[\begin{array}{ccccc:c}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]\end{array}\left[\begin{array}{c}\mathrm{dT}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L1}}\\ \lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},1}_{1}\\ \lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},2}_{1}\\ \lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},3}_{1}\\ \lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},4}_{1}\\ \hdashline \lambda^{\mathrm{G}}_{1}\mathrm{N}^{\mathrm{G},5}_{1}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A_E} & \mathbf{A_N}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x_E}\\ \mathbf{x_N}\end{bmatrix}=$$

$$
=\mathbf{A_E x_E}+\mathbf{A_E A_E^{-1} A_N x_N}=\mathbf{A_E}\left(\mathbf{x_E}+\mathbf{A_E^{-1}A_N x_N}\right)=\mathbf{A_E}\left(\begin{bmatrix} dT_{L1}^{G} \\ \lambda_1^{G}N_1^{G,1} \\ \lambda_1^{G}N_1^{G,2} \\ \lambda_1^{G}N_1^{G,3} \\ \lambda_1^{G}N_1^{G,4} \end{bmatrix}+\overbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A_E^{-1}A_N}}\lambda_1^{G}N_1^{G,5}\right)=\mathbf{A_E}\begin{bmatrix} dT_{L1}^{G}-\lambda_1^{G}N_1^{G,5} \\ \lambda_1^{G}\left(N_1^{G,1}-N_1^{G,5}\right) \\ \lambda_1^{G}\left(N_1^{G,2}-N_1^{G,5}\right) \\ \lambda_1^{G}\left(N_1^{G,3}-N_1^{G,5}\right) \\ \lambda_1^{G}\left(N_1^{G,4}-N_1^{G,5}\right) \end{bmatrix}=
$$

$$
=\mathbf{A_E}\left[\begin{array}{c} \overline{dT_{L1}^{G}} \\ \hline \boldsymbol{\lambda}_1^{\mathbf{G}}\mathbf{N}_1^{\mathbf{G}} \end{array}\right].
$$

Тогда
$$
\mathbf{y_{L1}}=\mathbf{A_r r}+\mathbf{A_E}\left[\begin{array}{c} \overline{dT_{L1}^{G}} \\ \hline \boldsymbol{\lambda}_1^{\mathbf{G}}\mathbf{N}_1^{\mathbf{G}} \end{array}\right]=\mathbf{A_r r}+\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\;}^{\mathbf{1}} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\mathbf{A_{\bar{n}}}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\left[\begin{array}{c} \overline{dT_{L1}^{G}} \\ \hline \boldsymbol{\lambda}_1^{\mathbf{G}}\mathbf{N}_1^{\mathbf{G}} \end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A_r} & \mathbf{1} & \mathbf{A_{\bar{n}}}\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c} \mathbf{r} \\ \hline dT_{L1}^{G} \\ \hline \boldsymbol{\lambda}_1^{\mathbf{G}}\mathbf{N}_1^{\mathbf{G}} \end{array}\right].
$$

Аналогичные действия могут быть выполнены для блока $\mathbf{y_{L2}}$. Окончательно, полная преобразованная система (полученная преобразованием системы (3.57)), в которой дефицит ранга отсутствует, может быть записана:

$$
\mathbf{y}_{20\times1}=\underline{\mathbf{A}}^{*}{}_{20\times16}\underline{\mathbf{X}}^{*}{}_{16\times1}+\boldsymbol{\varepsilon}_{20\times1}\Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{y_{P1}} \\ \mathbf{y_{P2}} \\ \mathbf{y_{L1}} \\ \mathbf{y_{L2}}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A_r} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{A_{\bar{n}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A_r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{A_{\bar{n}}} \end{bmatrix}}_{20\times16}\left[\begin{array}{c} \mathbf{r} \\ dT_{P1}^{G} \\ \hline dT_{P2}^{G} \\ \hline dT_{L1}^{G} \\ \hline dT_{L2}^{G} \\ \hline \boldsymbol{\lambda}_1^{\mathbf{G}}\mathbf{N}_1^{\mathbf{G}} \\ \hline \boldsymbol{\lambda}_2^{\mathbf{G}}\mathbf{N}_2^{\mathbf{G}} \end{array}\right]_{16\times1}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{P2}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L2}}\end{bmatrix}, \qquad (3.58)
$$

где матрица $\underline{\mathbf{A}}^{*}$ имеет полный ранг и соответствует матрице $\underline{\mathbf{A}}^{*}$ системы (3.47). Как видно, в системе уравнений полного ранга (3.58) сохранено свойство целочисленности комбинаций неоднозначностей псевдофазовых измерений, что позволяет использовать при обработке разрешение целочисленной неоднозначности.

Аналогично может быть выполнено преобразование системы линейных уравнений для моделей GPS P3L3A4 (3.28), P3L3P4L4 (3.32), EX_P1P2L1L2 (3.35) и ГЛОНАСС GL_P1P2L1L2 (3.37).

3.6 Альтернативные алгебраические подходы

3.6.1 Сравнение различных алгебраических подходов

В данном разделе проводится сравнение различных алгебраических подходов к устранению дефицита ранга в системах линейных уравнений ГНСС, содержание и смысл которых поясняются в подразделе 3.3.1. На рис. 3.27 приводится схема, поясняющая различия в трёх сравниваемых подходах, обозначенных римскими цифрами I (используется в [63]), II (используется в [112, 113]) и III (используется в [45]). Обведёнными в кружки цифрами на схеме указаны шаги, подробно описанные далее.

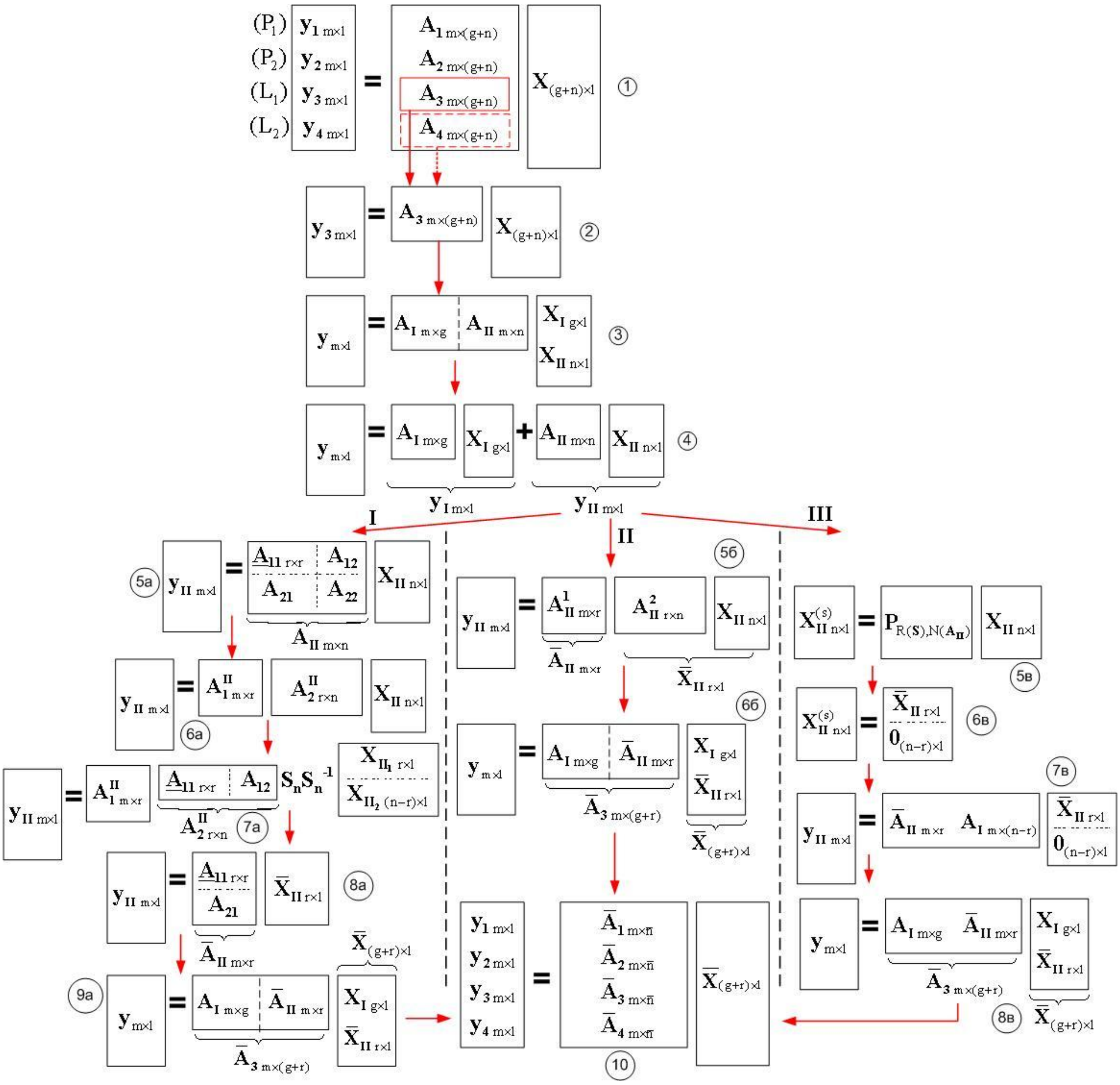

Рис. 3.27. Схема, поясняющая различные алгебраические подходы к устранению дефицита ранга в системах линейных уравнений в ГНСС

Шаг 1: записывается исходная полная система уравнений задачи высокоточного местоопределения. Схема рис. 3.27 соответствует системе уравнений по модели измерений на исходных частотах GPS с разделёнными часами P1P2L1L2 (3.25), т.е. блоки информационной матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{3}\,m\times(g+n)}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{4}\,m\times(g+n)}$ соответствуют неоднозначным псевдофазовым измерениям и являются матрицами неполного ранга. Дальнейшие преобразования на схеме проводятся именно с этими блоками, в которых имеет место дефицит ранга.

Шаг 2: записывается исходная сингулярная система уравнений, информационная матрица которой связана с неоднозначностями псевдофазовых измерений и содержит дефицит ранга.

Шаг 3: вектор оцениваемых параметров делится на подвектор геометрических параметров ($\mathbf{X}_{\mathbf{I}\,g\times1}$) и подвектор негеометрических параметров ($\mathbf{X}_{\mathbf{II}\,n\times1}$). К геометрическим параметрами относятся поправки к грубым координатам потребителя, а также нескомпенсированная составляющая влажной тропосферной задержки. К негеометрическим параметрам относятся разделённые смещения показаний часов приёмника потребителя, а также псевдофазовые неоднозначности. Информационная матрица также делится на соответствующие блоки.

Шаг 4: система переписывается таким образом, чтобы её правая часть была записана в виде двух слагаемых. Поскольку векторные пространства, определяемые подматрицами $\mathbf{A}_{\mathbf{I}\,m\times g}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{II}\,m\times n}$, образуют прямую сумму (подраздел 3.3.1), каждое из слагаемых может быть преобразовано независимо от второго. Следует отметить, что матрица $\mathbf{A}_{\mathbf{I}\,m\times g}$ является матрицей полного ранга. При этом в матрице $\mathbf{A}_{\mathbf{II}\,m\times n}$ присутствует дефицит ранга. В случае задачи высокоточного местоопределения потребителя дефицит ранга равен единице. Дальнейшие преобразования выполняются со слагаемым правой части, содержащим дефицит ранга. Далее описываются три возможных алгебраических подхода (нумерация шагов а, б и в соответствует вариантам I, II и III).

Подход I ([63]):

Шаг 5а: записывается исходная система уравнений, связанная с негеометрическими параметрами. Информационная матрица данной системы делится на 4 блока таким образом, чтобы был выделен квадратный блок $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}\,r\times r}$, соответствующий линейно независимой части информационной матрицы. Свойства информационной матрицы таковы, что блок столбцов $\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}$ является линейно зависимыми от блока $\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{A}}_{11}\\ \mathbf{A}_{21}\end{pmatrix}$, т.е. можно записать $\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{A}}_{11}\\ \mathbf{A}_{21}\end{pmatrix}\mathbf{S}_{\mathbf{N}}$, где матрица $\mathbf{S_N}$ - матрица линейной связи между указанными блоками, которая может быть вычислена как $\mathbf{S_N} = \left(\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}}\right)^{-1}\mathbf{A_{12}}$.

Шаг 6а: при помощи скелетного разложения матрицы информационная матрица $\mathbf{A}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times n}}$ представляется в виде произведения двух матриц $\mathbf{A}^{\mathbf{II}}_{\mathbf{1}\ \mathrm{m\times r}}$ и $\mathbf{A}^{\mathbf{II}}_{\mathbf{2}\ \mathrm{r\times n}}$, причём $\mathbf{A}^{\mathbf{II}}_{\mathbf{2}\ \mathrm{r\times n}} = \left(\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}\ \mathrm{r\times r}} \ \vdots\ \mathbf{A_{12}}\right)$, т.е. матрица $\mathbf{A}^{\mathbf{II}}_{\mathbf{2}\ \mathrm{r\times n}}$ содержит линейно независимые строки матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times n}}$. Матрица $\mathbf{A}^{\mathbf{II}}_{\mathbf{1}\ \mathrm{m\times r}}$ находится из решения соответствующего простейшего матричного уравнения.

Шаг 7а: между информационной матрицей и вектором оцениваемых параметров вводится сомножитель единичной матрицы, выраженной произведением матриц $\mathbf{S_n}\mathbf{S_n}^{\mathbf{-1}}$, где $\mathbf{S}_{\mathbf{n}\ \mathrm{n\times n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{S_N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}}^{\mathbf{-1}}\mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$. При этом блок столбцов $\begin{pmatrix} -\mathbf{S_N} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}$ матрицы $\mathbf{S_n}$ является базисом ядра исходной матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times n}}$. Действительно,

$$\mathbf{A}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times n}}\begin{pmatrix} -\mathbf{S_N} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathbf{S_N} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}} & \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}}\mathbf{S_N} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{21}}\mathbf{S_N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathbf{S_N} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}}\left(-\mathbf{S_N}\right) + \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}}\mathbf{S_N} \\ \mathbf{A_{21}}\left(-\mathbf{S_N}\right) + \mathbf{A_{21}}\mathbf{S_N} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{\mathrm{m\times(n-r)}}.$$

Шаг 8а: произведение матрицы $\mathbf{S_n}$ на стоящую слева информационную матрицу $\mathbf{A}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times n}}$ равно матрице $\left(\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}} \ \vdots\ \mathbf{0}_{\mathrm{m\times(n-r)}}\right)$, где $\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}}$ - редуцированная информационная матрица, а произведение матрицы $\mathbf{S_n}^{\mathbf{-1}}$ на вектор оцениваемых параметров $\mathbf{X}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n\times 1}}$ равно матрице $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times 1}} \\ \hdashline \mathbf{X}_{\mathbf{II_2}\ \mathrm{(n-r)\times 1}} \end{pmatrix}$, где $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times 1}}$ - редуцированный вектор оцениваемых параметров, который представляет собой вектор комбинаций составляющих исходного вектора $\mathbf{X}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n\times 1}}$. В результате система уравнений может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{gathered}
\mathbf{y}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times 1}} = \left(\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}} \ \vdots\ \mathbf{0}_{\mathrm{m\times(n-r)}}\right)\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times 1}} \\ \hdashline \mathbf{X}_{\mathbf{II_2}\ \mathrm{(n-r)\times 1}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \mathbf{y}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times 1}} = \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}}\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times 1}} + \mathbf{0}_{\mathrm{m\times(n-r)}}\mathbf{X}_{\mathbf{II_2}\ \mathrm{(n-r)\times 1}} \Leftrightarrow, \\
\Leftrightarrow \mathbf{y}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times 1}} - \mathbf{0}_{\mathrm{m\times(n-r)}}\mathbf{X}_{\mathbf{II_2}\ \mathrm{(n-r)\times 1}} = \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}}\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times 1}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \mathbf{y}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times 1}} = \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}}\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times 1}}
\end{gathered} \qquad (3.59)$$

При этом $\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m \times r}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{11}\ \mathrm{r \times r}} \\ \hdashline \mathbf{A}_{\mathbf{21}} \end{pmatrix}$. Вектор $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r \times 1}}$ также может быть получен как результат произведения $\left(\mathbf{A}^{\mathbf{II}}_{\mathbf{1}\ \mathrm{m \times r}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{X}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n \times 1}}$. Отметим, что согласно шагу **5а** матрица $\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m \times r}}$ является матрицей полного ранга.

Шаг 9а: записывается преобразованная система уравнений, соответствующая псевдофазовым измерениям, информационная матрица которой является матрицей полного ранга, т.е. дефицит ранга в записанной системе отсутствует.

Шаг 10: записывается исходная полная система с изменённой информационной матрицей полного ранга и редуцированным вектором оцениваемых параметров (этот шаг одинаков для всех трёх подходов).

Подход II ([112, 113]):

Шаг 5б: при помощи скелетного разложения матрицы информационная матрица $\mathbf{A}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m \times n}}$ представляется в виде произведения двух матриц $\mathbf{A}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m \times r}}$ и $\mathbf{A}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r \times n}}$, где матрица $\mathbf{A}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m \times r}}$ содержит линейно независимые столбцы матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m \times n}}$. Матрица $\mathbf{A}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r \times n}}$ находится из решения соответствующего простейшего матричного уравнения. При этом матрица $\mathbf{A}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m \times r}}$ является редуцированной информационной матрицей, которая соответствует редуцированному вектору оцениваемых параметров $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r \times 1}} = \mathbf{A}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r \times n}} \mathbf{X}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n \times 1}}$. Вектор $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r \times 1}}$ состоит из комбинаций параметров исходного вектора $\mathbf{X}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n \times 1}}$.

Шаг 6б: записывается преобразованная система уравнений, соответствующая псевдофазовым измерениям, информационная матрица которой является матрицей полного ранга, т.е. дефицит ранга в записанной системе отсутствует.

Шаг 10: записывается исходная полная система с изменённой информационной матрицей полного ранга и редуцированным вектором оцениваемых параметров (этот шаг одинаков для всех трёх подходов).

Подход III ([45]):

Шаг 5в: вектор оцениваемых комбинаций $\mathbf{X}^{(\mathrm{s})}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n \times 1}}$ находится как проекция вектора исходных оцениваемых параметров $\mathbf{X}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n \times 1}}$ на векторное подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ параллельно ядру $\mathrm{N}(\mathbf{A}_{\mathbf{II}})$ матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{II}}$: $\mathbf{X}^{(\mathrm{s})}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n \times 1}} = \mathbf{P}_{\mathrm{R}(\mathbf{S}),\mathrm{N}(\mathbf{A}_{\mathbf{II}})} \mathbf{X}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n \times 1}}$, где $\mathbf{P}_{\mathrm{R}(\mathbf{S}),\mathrm{N}(\mathbf{A}_{\mathbf{II}})}$ - матрица проектирования (проектор) на подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ параллельно $\mathrm{N}(\mathbf{A}_{\mathbf{II}})$, $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ - векторное подпространство, комплементарное к $\mathrm{N}(\mathbf{A_{II}})$, т.е. $\mathrm{N}(\mathbf{A_{II}})\oplus\mathrm{R}(\mathbf{S})=\mathbf{R^n}$ (более подробно данное проектирование описано в подразделе 3.3.1). Согласно [44], матрица проектирования $\mathbf{P}_{\mathrm{R}(\mathbf{S}),\mathrm{N}(\mathbf{A_{II}})}$ может быть вычислена следующим образом

$$\mathbf{P}_{\mathrm{R}(\mathbf{S}),\mathrm{N}(\mathbf{A_{II}})}=\mathbf{I_{n\times n}}-\mathbf{V}\left(\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{V}\right)^{-1}\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}},\tag{3.60}$$

где $\mathbf{I_{n\times n}}$ - единичная матрица, $\mathbf{V}_{\mathrm{m\times(n-r)}}$ - базис ядра $\mathrm{N}(\mathbf{A_{II}})$ матрицы $\mathbf{A_{II}}$, $\mathbf{S}^{\perp}{}_{\mathrm{m\times(n-r)}}$ - базис векторного подпространства, комплементарного и ортогонального подпространству $\mathrm{R}(\mathbf{S})$, т.е. $\mathrm{R}(\mathbf{S}^{\perp})\oplus\mathrm{R}(\mathbf{S})=\mathbf{R^n}$ и $\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_2=0$ для любых векторов $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ таких, что $\mathbf{z}_1\in\mathrm{R}(\mathbf{S})$ и $\mathbf{z}_2\in\mathrm{R}(\mathbf{S}^{\perp})$, $\mathbf{S}_{\mathrm{m\times r}}$ - базис векторного подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{S})$.

Шаг 6в: вектор $\mathbf{X}^{(\mathrm{s})}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n\times1}}$ содержит r оцениваемых комбинаций составляющих вектора $\mathbf{X}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n\times1}}$ (подвектор $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times1}}$) и (n-r) нулей. Меняя базис $\mathbf{S}$, можно определять, на каких именно позициях в векторе $\mathbf{X}^{(\mathrm{s})}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n\times1}}$ стоят нули. В случае задачи высокоточного местоопределения (n-r)=1, т.к. дефицит ранга равен единице. В подразделе 3.3.1 описан такой выбор базиса $\mathbf{S}$, при котором в комбинациях неоднозначностей вектора $\mathbf{X}^{(\mathrm{s})}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n\times1}}$ сохраняется свойство целочисленности.

Шаг 7в: информационная матрица $\mathbf{A}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times n}}$ делится на блоки $\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{I}\ \mathrm{m\times(n-r)}}$ в соответствии с делением на подвектора вектора $\mathbf{X}^{(\mathrm{s})}_{\mathbf{II}\ \mathrm{n\times1}}$. Тогда система уравнений может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathbf{y}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times1}}=\left(\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}}\ \vdots\ \mathbf{A}_{\mathbf{I}\ \mathrm{m\times(n-r)}}\right)\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times1}}\\ \hdashline \mathbf{0}_{\mathrm{(n-r)\times1}}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\mathbf{y}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times1}}=\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}}\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times1}}+\mathbf{A}_{\mathbf{I}\ \mathrm{m\times(n-r)}}\mathbf{0}_{\mathrm{(n-r)\times1}}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\mathbf{y}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times1}}-\mathbf{A}_{\mathbf{I}\ \mathrm{m\times(n-r)}}\mathbf{0}_{\mathrm{(n-r)\times1}}=\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}}\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times1}}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\mathbf{y}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times1}}=\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{m\times r}}\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}\ \mathrm{r\times1}}\end{gathered}\tag{3.61}$$

Шаг 8в: записывается преобразованная система уравнений, соответствующая псевдофазовым измерениям, информационная матрица которой является матрицей полного ранга, т.е. дефицит ранга в записанной системе отсутствует.

Шаг 10: записывается исходная полная система с изменённой информационной матрицей полного ранга и редуцированным вектором оцениваемых параметров (этот шаг одинаков для всех трёх подходов).

Далее безотносительно местоопределения в ГНСС приводится простейший пример задачи оценивания при дефиците ранга в системе уравнений [112, 113], демонстрирующий алгебраическую эквивалентность трёх рассмотренных подходов.

3.6.2 Вычислительный пример использования различных подходов

Рассматривается следующая часть исходной системы уравнений на шаге 4 (рис. 3.27):

$$\mathbf{y}_{\mathbf{II}\ m\times 1} = \mathbf{A}_{\mathbf{II}\ m\times n}\mathbf{X}_{\mathbf{II}\ n\times 1}\ , \tag{3.62}$$

где вектор случайных ошибок не представлен, т.к. не имеет значения в контексте рассматриваемых преобразований. Информационная матрица системы уравнений (3.62) имеет следующий вид

$$\mathbf{A}_{\mathbf{II}} = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ , \tag{3.63}$$

Вектор $\mathbf{X}_{\mathbf{II}} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ содержит неизвестные абсолютные высоты некоторых точек P_1, P_2 и P_3 ,

вектор измерений $\mathbf{y}_{\mathbf{II}} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ содержит разности высот между точками P_2, P_1 , P_3, P_2 и P_1, P_3 .

Система (3.63) сингулярна, т.к. $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{II}}\right) = 2$. Применим к системе (3.62) рассмотренные ранее три подхода в соответствии со схемой рис. 3.27.

Подход I:

Информационная матрица представляется в виде произведения

$$\mathbf{A}_{\mathbf{II}} = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ \hdashline +1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{II}}\mathbf{A}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{II}} = \mathbf{A}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{II}}\begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}, \tag{3.64}$$

тогда, решая простейшее матричное уравнение, можно записать:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{II}} = \mathbf{A}_{\mathbf{II}}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{II}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{II}}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{II}}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

Матрица $\mathbf{S}_{\mathbf{n}\ n\times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}}{}^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{12}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ имеет вид $\mathbf{S}_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}_{\mathbf{n}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Произведение $\mathbf{A}_{\mathbf{II}}$ на матрицу $\mathbf{S}_{\mathbf{n}}$ имеет вид

$$\mathbf{A}_{\text{П}}\mathbf{S}_{\text{п}} = \mathbf{A}_1^{\text{П}}\mathbf{A}_2^{\text{П}}\mathbf{S}_{\text{п}} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{\text{П}} & 0 \\ & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc:c} -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{3.66}$$

где $\bar{\mathbf{A}}_{\text{П}}$ - редуцированная информационная матрица полного ранга. Произведение $\mathbf{S}_{\text{п}}^{-1}$ на вектор $\mathbf{X}_{\text{П}}$ имеет вид

$$\mathbf{S}_{\text{п}}^{-1}\mathbf{X}_{\text{П}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}}_{\text{П}} \\ \hdashline h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 - h_3 \\ h_2 - h_3 \\ \hdashline h_3 \end{pmatrix}, \tag{3.67}$$

где $\bar{\mathbf{X}}_{\text{П}}$ - урезанный вектор оцениваемых параметров. Таким образом, преобразованная система уравнений полного ранга имеет вид

$$\mathbf{y}_{\text{П}} = \bar{\mathbf{A}}_{\text{П}}\bar{\mathbf{X}}_{\text{П}} \Leftrightarrow \mathbf{y}_{\text{П}} = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 - h_3 \\ h_2 - h_3 \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

Подход II:

Информационная матрица представляется в виде произведения

$$\mathbf{A}_{\text{П}} = \left(\begin{array}{cc:c} -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \mathbf{A}_{\text{П}}^1\mathbf{A}_{\text{П}}^2 = \bar{\mathbf{A}}_{\text{П}}\mathbf{A}_{\text{П}}^2 = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{A}_{\text{П}}^2, \tag{3.69}$$

где $\bar{\mathbf{A}}_{\text{П}}$ - редуцированная информационная матрица полного ранга. Тогда, решая простейшее матричное уравнение, можно записать

$$\mathbf{A}_{\text{П}}^2 = \left(\left(\mathbf{A}_{\text{П}}^1\right)^{\text{T}}\mathbf{A}_{\text{П}}^1\right)^{-1}\left(\mathbf{A}_{\text{П}}^1\right)^{\text{T}}\mathbf{A}_{\text{П}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

Редуцированный вектор оцениваемых параметров $\bar{\mathbf{X}}_{\text{П}}$ находится как произведение

$$\bar{\mathbf{X}}_{\text{П}} = \mathbf{A}_{\text{П}}^2\mathbf{X}_{\text{П}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 - h_3 \\ h_2 - h_3 \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

Таким образом, преобразованная система уравнений полного ранга имеет вид

$$\mathbf{y}_{\text{П}} = \bar{\mathbf{A}}_{\text{П}}\bar{\mathbf{X}}_{\text{П}} \Leftrightarrow \mathbf{y}_{\text{П}} = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 - h_3 \\ h_2 - h_3 \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

Подход III:

Пусть $\mathbf{V}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ - базис ядра $\mathrm{N}(\mathbf{A}_{\mathbf{II}})$ матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{II}}$, а $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ - базис векторного подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{S})$. Столбец вектора $\mathbf{V}$ и столбцы матрицы $\mathbf{S}$ линейно независимы, т.е. $\mathrm{N}(\mathbf{A}_{\mathbf{II}})\oplus\mathrm{R}(\mathbf{S})=\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$. Пусть $\mathbf{S}^{\perp}=\begin{pmatrix}0\\0\\q\end{pmatrix}$ - базис векторного подпространства, комплементарного и ортогонального подпространству $\mathrm{R}(\mathbf{S})$, т.е. $\mathrm{R}(\mathbf{S}^{\perp})\oplus\mathrm{R}(\mathbf{S})=\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$ и $\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_2=0$ для любых векторов $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ таких, что $\mathbf{z}_1\in\mathrm{R}(\mathbf{S})$ и $\mathbf{z}_2\in\mathrm{R}(\mathbf{S}^{\perp})$. Тогда матрица проектирования $\mathbf{P}_{\mathrm{R}(\mathbf{S}),\mathrm{N}(\mathbf{A}_{\mathbf{II}})}$ вычисляется как

$$\mathbf{P}_{\mathrm{R}(\mathbf{S}),\mathrm{N}(\mathbf{A}_{\mathbf{II}})}=\mathbf{I}_{3\times3}-\mathbf{V}\left(\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{V}\right)^{-1}\left(\mathbf{S}^{\perp}\right)^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{3.73}$$

Вектор оцениваемых комбинаций $\mathbf{X}_{\mathbf{II}}^{(s)}$ находится как

$$\mathbf{X}_{\mathbf{II}}^{(s)}=\mathbf{P}_{\mathrm{R}(\mathbf{S}),\mathrm{N}(\mathbf{A}_{\mathbf{II}})}\mathbf{X}_{\mathbf{II}}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}}\\ \hdashline 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1-h_3\\h_2-h_3\\ \hdashline 0\end{pmatrix} \tag{3.74}$$

Информационная матрица $\mathbf{A}_{\mathbf{II}}$ делится на блоки $\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{I}}$ в соответствии с делением на подвектора вектора $\mathbf{X}_{\mathbf{II}}^{(s)}$:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{II}}=\left(\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}}\;\vdots\;\mathbf{A}_{\mathbf{I}}\right)=\left(\begin{array}{cc:c}-1&+1&0\\0&-1&+1\\+1&0&-1\end{array}\right), \tag{3.75}$$

где $\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}}$ - редуцированная информационная матрица. Таким образом, преобразованная система уравнений полного ранга имеет вид

$$\mathbf{y}_{\mathbf{II}}=\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{II}}\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{II}}\Leftrightarrow\mathbf{y}_{\mathbf{II}}=\begin{pmatrix}-1&+1\\0&-1\\+1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1-h_3\\h_2-h_3\end{pmatrix} \tag{3.76}$$

Как видно, преобразованные системы уравнений (3.68), (3.72) и (3.76) совпадают для всех трёх рассмотренных алгебраических подходов, что демонстрирует их эквивалентность.

3.7 Выводы по главе 3

В третьей главе рассмотрены модели измерений, основанные на разделении поправок к показаниям часов спутников и приёмников для измерений псевдодальностей и псевдофаз. Такие модели являются более адекватными реальной природе измерений по сравнению с моделями измерений, используемыми в режиме Float PPP. Показано, что всё множество моделей измерений с разделёнными часами в ГНСС (как GPS, так и ГЛОНАСС) являются несовместными недоопределёнными (сингулярными) системами уравнений с множеством решений наименьших квадратов. Выявлено, что часть координатных осей пространства переменных сингулярных систем в ГНСС (ГЛОНАСС, GPS) ортогональны ядру информационной матрицы этих систем, и поэтому соответствующие таким осям переменные могут быть оценены однозначно. С учётом данного свойства и при использовании теории S-преобразования разработан алгоритм перехода от несовместных недоопределённых систем уравнений к совместным переопределённым, имеющим единственное решение наименьших квадратов. Показано, что оценки поправок к координатам приёмника потребителя при указанном переходе не изменяются, а целочисленные неоднозначности оцениваются в виде линейных целочисленных комбинаций.

Продемонстрировано, что разработанный для модели измерений с разделёнными часами на исходных частотах GPS метод фильтрации позволяет не оценивать ионосферные задержки, рассматривая их как мешающие параметры (исключающий фильтр Калмана).

Для модели измерений на исходных частотах GPS с разделёнными часами приведён алгебраический пример преодоления дефицита ранга согласно описанному алгоритму.

Показано, что такое преодоление дефицита ранга может быть реализовано различными алгебраическими подходами, выявленными из анализа литературы по этому вопросу. Продемонстрирована эквивалентность различных алгебраических подходов, выявленных из литературы.

ГЛАВА 4. ВЫСОКОТОЧНОЕ МЕСТООПРЕДЕЛЕНИЕ В ГНСС В АБСОЛЮТНОМ РЕЖИМЕ ЗА СЧЁТ РАЗРЕШЕНИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ПСЕВДОФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

4.1 Использование информации о целочисленности неоднозначностей псевдофазовых измерений для снижения периода сходимости к точному решению

В режиме высокоточного местоопределения Float PPP оцениваются действительные значения неоднозначности A^{j}_{P3} (2.7), включающие в себя нестабильные во времени немоделируемые аппаратурные смещения и целочисленные неоднозначности. Длительный период сходимости при этом связан с тем, что в фильтрационной процедуре оценивания отсутствуют какие-либо ограничения на значения оценок $\hat{A}^{j}_{P3}$. Начальное большое значение дисперсии оценок $\hat{A}^{j}_{P3}$ в процессе фильтрации постепенно уменьшается в течение переходного периода. Как следствие, в режиме Float PPP ошибки оценок поправок к грубым координатам потребителя $\hat{\Delta}x, \hat{\Delta}y, \hat{\Delta}z$ также постепенно уменьшаются (рис. 2.8).

На рис. 4.1 представлена геометрическая интерпретация процесса сходимости при местоопределении в режиме Float PPP для случая определения координат потребителя на плоскости.

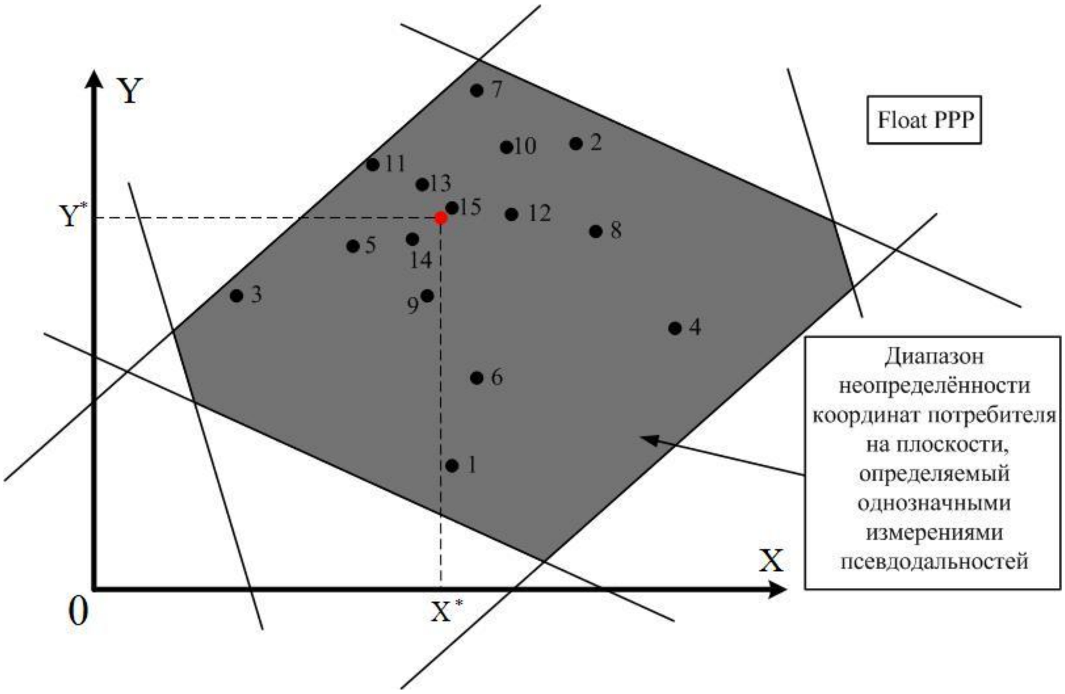

Рис. 4.1. Геометрическая интерпретация процесса сходимости при местоопределении в режиме Float PPP

На рис. 4.1 показаны истинные координаты потребителя (красная точка с координатами (X^*, Y^*)), следующие друг за другом оценки координат (X_i, Y_i) фильтра (чёрные точки, рядом с которым указан порядковый номер i момента фильтрации), а также область неопределённости координат потребителя (X, Y), задаваемая однозначными измерениями псевдодальностей (серая область). Как видно из рис. 4.1, разброс оценок координат потребителя уменьшается постепенно в течение длительного времени, т.к. оценки $\hat{A}^j_{P3}$ (2.7) могут принимать произвольные действительные значения.

На рис. 4.2 показана аналогичная графическая интерпретация для местоопределения в режиме Integer PPP, где на область неопределённости координат потребителя (X, Y), задаваемую однозначными измерениями псевдодальностей, наложена целочисленная решётка (3 набора параллельных линий), возникающая при учёте целочисленной природы неоднозначностей псевдофазовых измерений. В одном из центров плотных скоплений узлов этой решётки располагается потребитель. Указанные плотные скопления узлов располагаются дискретно и характеризуются наборами целочисленных неоднозначностей N^j в моделях измерений с разделёнными часами (модели P1P2L1L2 (3.25), P3L3A4 (3.28), P3L3P4L4 (3.32), EX_P1P2L1L2 (3.35), GL_P1P2L1L2 (3.37)).

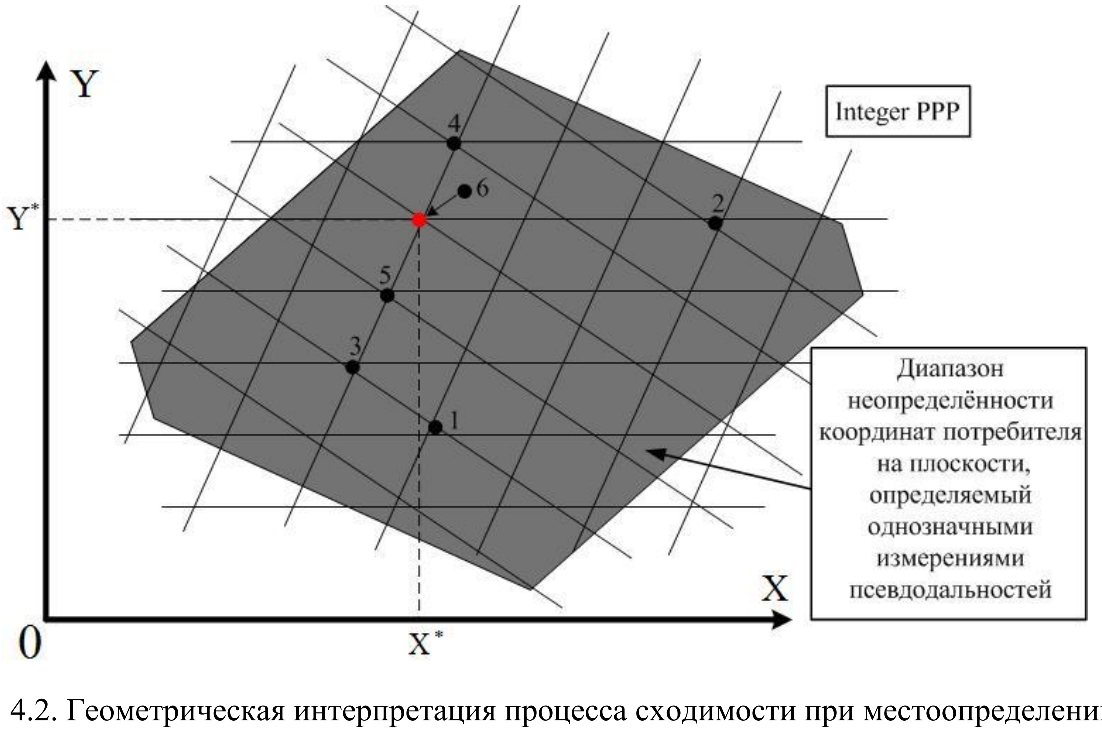

Рис. 4.2. Геометрическая интерпретация процесса сходимости при местоопределении в режиме Integer PPP

Оценки $\breve{N}^j$ псевдофазовых неоднозначностей в режиме Integer PPP являются целыми числами, которые определяют положение наиболее плотного скопления узлов решётки на рис.

4.2. На рис. 4.2 показано, что при дискретном изменении значений оценок $\breve{N}^{j}$ благодаря значительному удалению плотных скоплений узлов решётки друг от друга область неопределённости координат потребителя сужается гораздо быстрее, чем для режима Float PPP. В результате разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений будут выбираться такие оценки координат (X_i, Y_i), которые соответствуют самому плотному скоплению узлов решётки (более подробно процедура разрешения целочисленной неоднозначности в режиме Integer PPP описана в подразделе 4.2). Помимо снижения периода сходимости в режиме Integer PPP также наблюдается незначительное повышение точности по сравнению с точностью режима Float PPP.

Приведённые на рис. 4.1 и рис. 4.2 графические интерпретации процессов сходимости для режимов Float PPP и Integer PPP можно также проиллюстрировать с помощью графика на рис. 4.3, где показана зависимость оценки действительной неоднозначности $\hat{A}^{j}_{P3}$ (2.7) от времени измерений для одного из используемых в обработке спутников при местоопределении в режиме Float PPP (для наглядности эпохи измерений на рисунке следуют с интервалом 5 минут).

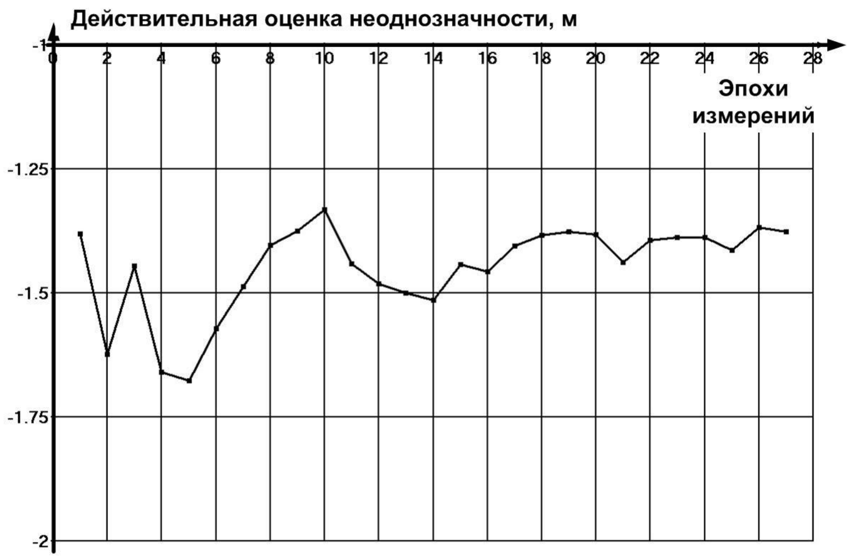

Рис. 4.3. Зависимость оценки действительной неоднозначности от времени обработки для одного из спутников в режиме Float PPP

Как видно, разброс значений оценки $\hat{A}^{j}_{P3}$ на рис. 4.3 снижается постепенно. Для сравнения на рис. 4.4 показана зависимость целочисленной оценки неоднозначности $\hat{N}^{G,j}_{1}$ модели с разделёнными часами P3L3P4L4 (3.32) от времени измерений для того же спутника при местоопределении в режиме Integer PPP. Из рис. 4.4 видно, что, начиная с третьей эпохи измерений, целочисленная оценка $\hat{N}^{G,j}_{1}$ становится постоянной. На рис. 4.5 показана зависимость трёхмерной ошибки местоопределения потребителя $3D_{ER}$ (2.30) от времени измерений для режимов Float PPP и Integer PPP (рис. 4.3 – рис. 4.5 соответствуют одному и тому же набору измерений и используемой ЭВИ). Из рис. 4.5 видно, что период сходимости режима Integer PPP гораздо короче, чем для режима Float PPP. Также на рис. 4.5 проиллюстрировано повышение точности местоопределения при использовании режима Integer PPP. Это повышение точности можно объяснить большей адекватностью моделей измерений, используемых в режиме Integer PPP по сравнению с моделями, используемыми в режиме Float PPP.

Рис. 4.4. Зависимость целочисленной оценки неоднозначности от времени обработки для одного из спутников в режиме Integer PPP

Рис. 4.5. Зависимость трёхмерной ошибки местоопределения от времени для режимов Float PPP и Integer PPP

4.2 Алгоритм высокоточного абсолютного местоопределения с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений

4.2.1 Блок-схема алгоритма

Укрупненная блок-схема алгоритма высокоточного местоопределения в режиме Integer PPP приведена на рис. 4.6. Данная блок-схема отличается от аналогичной схемы для режима Float PPP (рис. 2.1) наличием дополнительных блоков, связанных с разрешением целочисленной неоднозначности, оценкой достоверности полученного целочисленного вектора $\breve{\mathbf{N}}$ и вычислением целочисленного решения, учитывающего найденный целочисленный вектор $\breve{\mathbf{N}}$. Отличительным свойством блок-схемы на рис. 4.6 является также то, что фильтрационная процедура оценивания в режиме Integer PPP используется применительно к модели измерений с разделёнными часами (например, модели измерений P1P2L1L2 (3.25), P3L3A4 (3.28), P3L3P4L4 (3.32), EX_P1P2L1L2 (3.35), GL_P1P2L1L2 (3.37)), т.е. в фильтре вычисляются действительные оценки именно целочисленных неоднозначностей $\hat{\mathrm{N}}^j$, а не действительных $\hat{\mathrm{A}}^j_{P3}$, как в модели P3L3 (2.8), соответствующей режиму Float PPP.

В показанном на рис. 4.6 алгоритме местоопределения в режиме Integer PPP сохраняется параллельное вычисление действительных (float solution) и целочисленных (fixed solution) оценок координат потребителя, что даёт возможность их сравнительного анализа.

Согласно схеме на рис. 4.6 на выходе фильтрационной процедуры оценивания в режиме Integer PPP доступны вектор действительных оценок (так называемое действительное решение, float solution)

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{N}} \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

и соответствующая ему ковариационная матрица ошибок оценивания

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{aa}} & \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{aN}} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Na}} & \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}} \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

где $\hat{\mathbf{a}}$ - вектор действительных оценок всех параметров кроме неоднозначностей, $\hat{\mathbf{N}}$ - вектор действительных оценок целочисленных неоднозначностей $\hat{\mathrm{N}}^j$, выраженных в циклах. Например, для ионосферосвободной модели разделённых часов GPS P3L3A4 (3.28) используется следующий вектор $\hat{\mathbf{x}}$ действительных оценок на выходе фильтрационной процедуры оценивания

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hdashline \hat{\mathbf{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \widehat{\mathrm{dT}}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{P3}} & \widehat{\mathrm{dT}}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L3}} & \widehat{\mathrm{b}}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{r,A4}} & \vdots & \hat{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{3}} & \hat{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{4}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \tag{4.3}$$

Блок $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}}$ матрицы $\hat{\mathbf{P}}$ (4.2) является ковариационной матрицей вектора $\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_3^{\mathbf{G}} & \hat{\mathbf{N}}_4^{\mathbf{G}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$, содержащего действительные значения оценок для целочисленных векторов $\mathbf{N}_3^{\mathbf{G}}$ и $\mathbf{N}_4^{\mathbf{G}}$.

Рис. 4.6. Укрупненная блок-схема алгоритма высокоточного местоопределения потребителя с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений (Integer PPP)

Можно выделить три следующих этапа, отмеченных на схеме рис. 4.6, которые отсутствуют на схеме рис. 2.1 для режима Float PPP:

1. Разрешение целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений (поиск целочисленного вектора $\breve{\mathbf{N}}$, содержащего целочисленные оценки неоднозначностей всех спутников в обработке),
2. Оценка достоверности целочисленных значений неоднозначностей вектора $\breve{\mathbf{N}}$ (ambiguity validation),
3. Коррекция действительного решения ($\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{P}}$) и вычисление целочисленного решения, т.е. таких оценок $\breve{\mathbf{a}}$ и соответствующей ковариационной матрицы $\breve{\mathbf{P}}_{\mathbf{aa}}$, которые учитывают информацию о целых значениях вектора $\breve{\mathbf{N}}$.

В следующих подразделах указанные этапы рассматриваются более подробно.

4.2.2 Разрешение целочисленной неоднозначности при высокоточном абсолютном местоопределении

В процедуре разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений режима Integer PPP используется общая теория линейного оценивания при неоднозначных измерениях, которая широко применяется при высокоточных относительных методах местоопределения (RTK) и подробно описана в литературе ([25]). В соответствии с данной теорией осуществляется минимизация в целых числах $\mathbf{N}$ следующей квадратичной формы

$$D(\mathbf{N}) = \left(\mathbf{N} - \hat{\mathbf{N}}\right)^{\mathbf{T}} \left(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}}\right)^{-1} \left(\mathbf{N} - \hat{\mathbf{N}}\right) = d \xrightarrow[\mathbf{N}]{} \min \tag{4.4}$$

В предположении, что целочисленный вектор $\mathbf{N}$ может принимать произвольные действительные значения квадратичная форма (4.4) в пространстве с координатами $\mathbf{N}$ задаёт уравнение эллипсоида с центром в точке $\hat{\mathbf{N}}$ (вектор $\hat{\mathbf{N}}$ содержит действительные оценки искомых целочисленных неоднозначностей, доступных на выходе фильтрационной процедуры оценивания, рис. 4.6). Как правило, ищется не единственный целочисленный вектор $\breve{\mathbf{N}}$, минимизирующий квадратичную форму (4.4), а некоторое число k целочисленных векторов $\breve{\mathbf{N}}_i,\ i = \overline{1,k}$, которые задают последовательно нарастающие значения квадратичной формы (4.4).

Известно [25], что на практике матрица $\left(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}}\right)^{-1}$ является плохо обусловленной (отношение её максимального и минимального собственных чисел может доходить до нескольких десятков тысяч), что порождает сильную вытянутость (или сплюснутость) эллипсоида (4.4). С целью повышения эффективности поисковой процедуры минимизации квадратичной формы (4.4) применяется линейное целочисленное унимодулярное преобразование (ЦУМП [25], в англоязычной литературе известное как LAMBDA-method [114]), идея которого состоит в отображении эллипсоида (4.4) в другое целочисленное пространство $\mathbf{M}$ такое, что эллипсоид (4.4) в нём преобразуется в фигуру, близкую к шару, которая определяется преобразованной квадратичной формой $D^*(\mathbf{M})$. Близкая к шару форма преобразованного эллипсоида резко сокращает расходы машинного времени на поиск целочисленного минимума преобразованной квадратичной формы (4.4). Затем над k найденными целочисленными векторами $\breve{\mathbf{M}}_i, i = \overline{1,k}$, доставляющими последовательно нарастающие целочисленные минимумы преобразованному эллипсоиду $D^*(\mathbf{M})$, осуществляется обратное ЦУМП к целочисленному пространству $\mathbf{N}$. Результатом разрешения целочисленной неоднозначности являются k целочисленных векторов $\breve{\mathbf{N}}_i, i = \overline{1,k}$, доставляющих последовательно нарастающие целочисленные минимумы $d_i, i = \overline{1,k}$ квадратичной формы (4.4).

Общий алгоритм вычисления одного или нескольких целочисленных векторов, минимизирующих квадратичную форму (4.4), состоит из следующих трёх этапов[25]:

1. Осуществляется разложение Холецкого матрицы $\left(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}}\right)^{-1}$:

$$\left(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}}\right)^{-1} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{\mathbf{T}}, \tag{4.5}$$

где матрица $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ является верхнетреугольной. Затем над вектор-столбцами матрицы $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ осуществляется ортогонализация Грамма-Шмидта, далее с помощью специального LLL-алгоритма [25, 115] вычисляется матрица $\left(\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{NN}}\right)^{-1}$ преобразованной квадратичной формы

$$\mathrm{D}^*(\mathbf{M}) = \left(\mathbf{M}-\hat{\mathbf{M}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{NN}}\right)^{-1}\left(\mathbf{M}-\hat{\mathbf{M}}\right), \tag{4.6}$$

а также целочисленная унимодулярная матрица $\mathbf{U}$ и вектор действительных неоднозначностей $\hat{\mathbf{M}}$. Определитель матрицы $\mathbf{U}$ равен ± 1, и все элементы являются целыми числами. Целочисленные вектора $\breve{\mathbf{M}}$ и $\breve{\mathbf{N}}$, действительные вектора $\hat{\mathbf{M}}$ и $\hat{\mathbf{N}}$, а также матрицы $\left(\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{NN}}\right)^{-1}$ и $\left(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}}\right)^{-1}$ связаны между собой соотношениями $\breve{\mathbf{N}} = \mathbf{U}\breve{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{M}}$, $\left(\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{NN}}\right)^{-1} = \mathbf{U}^{\mathbf{T}}\left(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}}\right)^{\mathbf{-1}}\mathbf{U}$.

В предположении, что целочисленный вектор $\mathbf{M}$ может принимать произвольные действительные значения квадратичная форма (4.6), приравненная некоторому постоянному значению, в пространстве координат $\mathbf{M}$ задаёт эллипсоид, который по форме максимально приближен к шару.

2. Осуществляется поиск k целочисленных векторов $\breve{\mathbf{M}}_{\mathrm{i}}, \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{k}}$, доставляющих последовательно нарастающие целочисленные минимумы преобразованному эллипсоиду $\mathrm{D}^*(\mathbf{M})$ (4.6).

3. С использованием матрицы $\mathbf{U}$ осуществляется обратный переход к пространству координат $\mathbf{N}$, в котором вычисляются k целочисленных векторов $\breve{\mathbf{N}}_{\mathrm{i}} = \mathbf{U}\breve{\mathbf{M}}_{\mathrm{i}}, \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{k}}$, доставляющих последовательно нарастающие целочисленные минимумы квадратичной форме $\mathrm{D}(\mathbf{M})$ (4.4).

Более подробно этапы минимизации квадратичной формы (4.4) в целых числах описаны в [25].

4.2.3 Оценка достоверности результатов разрешения неоднозначности

Для оценки достоверности найденных целочисленных векторов $\breve{\mathbf{N}}_i, i=\overline{1,k}$ в работе используется величина контрастного отношения (ratio test), равная отношению второго по возрастанию значения квадратичной формы (4.4) d_2 к минимальному d_1:

$$k_{KONTR} = \frac{d_2}{d_1}, \tag{4.7}$$

которое сравнивается с некоторым постоянным пороговым значением $K_{THRESHOLD}$. Целочисленный вектор $\breve{\mathbf{N}}_1$ считается найденным достоверно, если $k_{KONTR} \geq K_{THRESHOLD}$. Типичными значениями порогового значения $K_{THRESHOLD}$ являются 1.5, 2, 2.5. Контрастное отношение k_{KONTR} (4.7) широко используется при высокоточных относительных местоопределениях для оценки достоверности результатов разрешения неоднозначности, но не является прямой характеристикой, позволяющей судить о достоверности, т.к. отражает степень близости действительной оценки $\hat{\mathbf{N}}$ к ближайшей целочисленной оценке $\breve{\mathbf{N}}_{NEAR}$, а не к истинному значению целочисленного вектора $\breve{\mathbf{N}}_{TRUE}$ [61, 116]. Известно [117], что метод использования контрастного отношения с фиксированным порогом $K_{THRESHOLD}$ не чувствителен к дисперсиям действительных оценок $\hat{\mathbf{N}}$ и не даёт надёжной оценки достоверности результатов разрешения неоднозначности (при высоких дисперсиях действительных оценок $\hat{\mathbf{N}}$ для целочисленных векторов $\breve{\mathbf{N}}_i, i=\overline{1,k}$, не являющихся истинными, может быть получено высокое значение k_{KONTR} (4.7)).

В [117] описан модифицированный метод использования контрастного отношения (4.7), при котором порог $K_{THRESHOLD}$ не являлся константой, а вычислялся для выбранной и фиксированной вероятности неправильного разрешения неоднозначности (fixed-failure rate, типичное значение 0.1%) на основании размерности целочисленного пространства (fixed-failure rate ratio test). В [117] приводится таблица, по которой для выбранного значения вероятности неправильного разрешения неоднозначности и размерности целочисленного пространства можно определить значение порога $K_{THRESHOLD}$.

В целом, как отмечается в [52, 62], используемые при относительных высокоточных местоопределениях методы оценки достоверности результатов целочисленного разрешения псевдофазовых неоднозначностей не дают надёжного результата применительно к режиму Integer PPP, а вопрос определения критерия достоверности результатов разрешения целочисленной неоднозначности в режиме Integer PPP требует дальнейших исследований. По этой причине при использовании некоторых эмпирических значений порога $K_{THRESHOLD}$ на практике проводится сравнение целочисленного и действительного решения, а также анализируется динамика изменения координат потребителя (с этой целью на схеме рис. 4.6 показано параллельное вычисление целочисленного и действительного решений, которые могут сравниваться при наличии скачков в координатах потребителя на определённую эпоху измерений).

На рис. 4.7 показана зависимость значений контрастного отношения $k_{KONTR} = \dfrac{d_2}{d_1}$ (4.7) от времени обработки, полученных в работе при высокоточном местоопределении в режиме Integer PPP с использованием моделей с разделёнными часами P3L3A4 (3.28) (кривая P3L3A4 на графике) и EX_P1P2L1L2 (3.35) (кривая EX_P1P2L1L2 на графике). Также на рис. 4.7 показано число спутников в обработке.

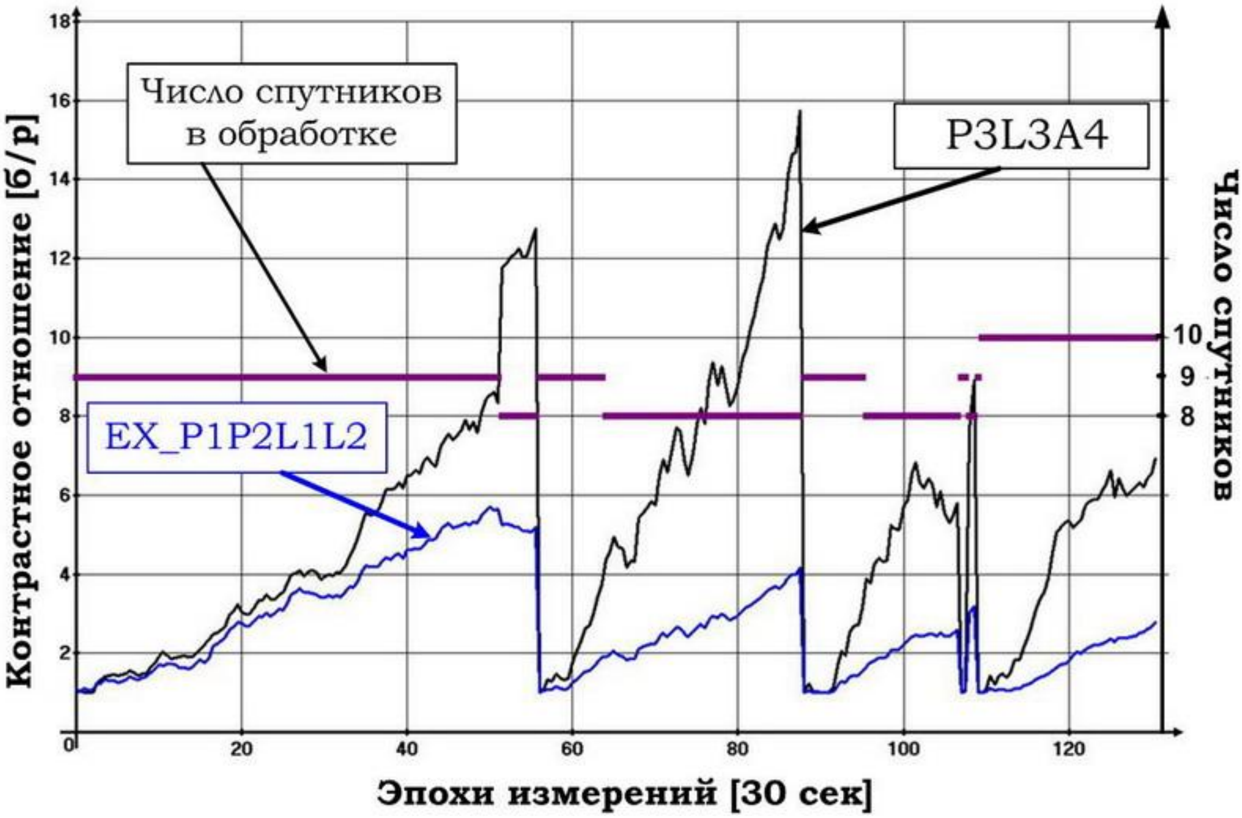

Рис. 4.7. Зависимость контрастного отношения (4.7) от времени при высокоточном местоопределения в режиме Integer PPP (маска по углу возвышения 10 градусов)

Как видно, значения контрастного отношения существенно превышают типичные для высокоточного относительного местоопределения значения (1,5-2,5). Можно отметить также, что при работе с неизменным набором спутников наблюдается непрерывный рост контрастного отношения. Но при появлении в зоне видимости нового спутника происходит мгновенное уменьшение контрастного отношения до единицы с последующим постепенным ростом.

Меньшие значения контрастного отношения для модели измерений EX_P1P2L1L2 (3.35) объясняются её особенностями, описанными в подразделе 3.3.2. Рис. 4.7 соответствует значению маски по углу возвышения 10 градусов. Зависимости, показанные на Рис. 4.8 аналогичны показанным на рис. 4.7, но соответствуют обработке измерений со значением маски по углу возвышения 15 градусов. Как видно из рис. 4.8, с повышением качества используемых измерений при уменьшении числа спутников в обработке значения контрастного отношения существенно увеличиваются по сравнению с рис. 4.7.

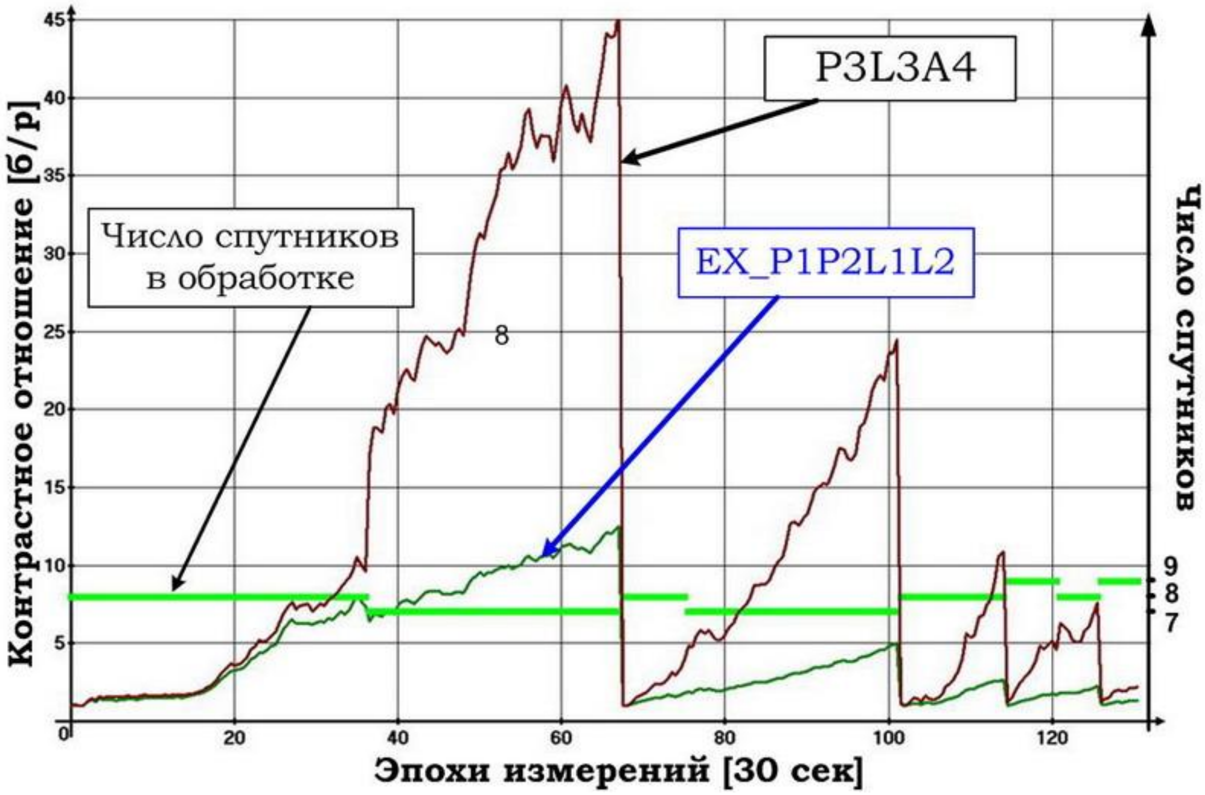

Рис. 4.8. Зависимость контрастного отношения (4.7) от времени при высокоточном местоопределения в режиме Integer PPP (маска по углу возвышения 15 градусов)

В рамках данной работы проводился анализ использования метода контрастного отношения (4.7) с постоянным пороговым значением применительно к режиму Integer PPP.

В [118] описан метод частичного разрешения неоднозначности (partial ambiguity resolution), при котором из числа псевдофазовых измерений, целочисленная неоднозначность которых разрешается, исключаются наиболее шумные измерения, т.е. разрешение целочисленной неоднозначности реализуется не для полного вектора $\hat{\mathbf{N}}$, а для его подвектора. Достоверность результатов целочисленного разрешения зависит от качества используемых измерений, но в рамках данной работы целочисленное разрешение выполнялось для полного вектора $\hat{\mathbf{N}}$.

4.2.4 Вычисление целочисленного решения

Оценки действительных значения параметров $\hat{\mathbf{a}}$ (действительное решение, float solution, схема на рис. 4.6) могут быть скорректированы с учётом найденного целочисленного вектора $\breve{\mathbf{N}}$, минимизирующего квадратичную форму (4.4), т.е. может быть вычислено целочисленное решение (fixed solution) [114, 2]:

$$\breve{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{aN}} \left(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}} \right)^{-1} \left(\breve{\mathbf{N}} - \hat{\mathbf{N}} \right), \tag{4.8}$$

Соответствующая ковариационная матрица вектора $\breve{\mathbf{a}}$ вычисляется

$$\breve{\mathbf{P}}_{\mathbf{aa}} = \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{aa}} - \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{aN}} \left(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Na}}, \tag{4.9}$$

Поскольку значения вектора $\breve{\mathbf{N}}$ в (4.8) принимаются истинными, соответствующая ему ковариационная матрица $\breve{\mathbf{P}}_{\mathbf{NN}}$ является нулевой, т.к. в векторе $\breve{\mathbf{N}}$ отсутствует неопределённость.

4.3 Использование атмосферных ограничений

В качестве дополнительной информации при высокоточном абсолютном местоопределении могут привлекаться данные о состоянии ионосферы [62, 64]. В модели измерений P3L3P4L4 (3.32) [62] комбинация измерений $A_4^{G,j}$ модели P3L3A4 (3.28) расщепляется на кодовую $P_4^{G,j}$ (A.4) и фазовую $L_4^{G,j}$ (A.3) составляющие. В результате к числу оцениваемых параметров добавляются смещённые наклонные ионосферные задержки I_1^{*j} (3.31) сигналов GPS на частоте f_1^G.

Идея использования данных о состоянии ионосферы заключается в том, что ионосферные параметры относительно стабильны во времени и не могут изменяться скачкообразно. В случае сбоя в измерениях (например, проезд через тоннель или под мостом, срыв слежения за фазой несущего сигнала) в навигационном приёмнике происходит практически мгновенная деградация оценок $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ поправок к грубым координатам потребителя, после чего вновь требуется время для сходимости решения. Для уменьшения периода сходимости этого "послесбойного" решения можно использовать стабильность ионосферных задержек во времени, оценки которых в случае сбоя в измерениях могут быть спрогнозированы с достаточно высокой точностью. Использование такого прогноза в [62] называется ионосферными ограничениями. Автором работы предложено помимо ионосферных данных использовать также данные о тропосфере (во всех рассмотренных в третьей главе моделях измерений с разделёнными часами в число оцениваемых параметров входит нескомпенсированная составляющая влажной компоненты тропосферной задержки ΔD_W), т.е. ввести более общее понятие атмосферных ограничений.

На рис. 4.9 приведена зависимость целочисленной и действительной оценок ΔD_W для модели P3L3A4 (3.28) от времени, на рис. 4.10 приведена зависимость действительной оценки смещённой ионосферной задержки сигнала одного из спутников в обработке I_1^{*j} (3.31) для модели P3L3P4L4 (3.32) от времени. Из рис. 4.9 и рис. 4.10 видно, что вне относительно короткого переходного периода атмосферные параметры ΔD_W и I_1^{*j} изменяются плавно, без резких скачков. На рис. 4.10 также показаны моменты смены базиса $\mathbf{S}$ (3.40), соответствующие смене базового спутника (то есть спутника с максимальным углом возвышения, координатные оси неоднозначностей по которому ортогональны подпространству $R(\mathbf{S})$, раздел 3.3.1). Целочисленные смещения в оценке I_1^{*j} (3.31), соответствующие таким моментам, не влияют на использование ионосферных ограничений при условии, что в течение времени использования прогнозных значений смена базиса $\mathbf{S}$ (3.40) не происходит.

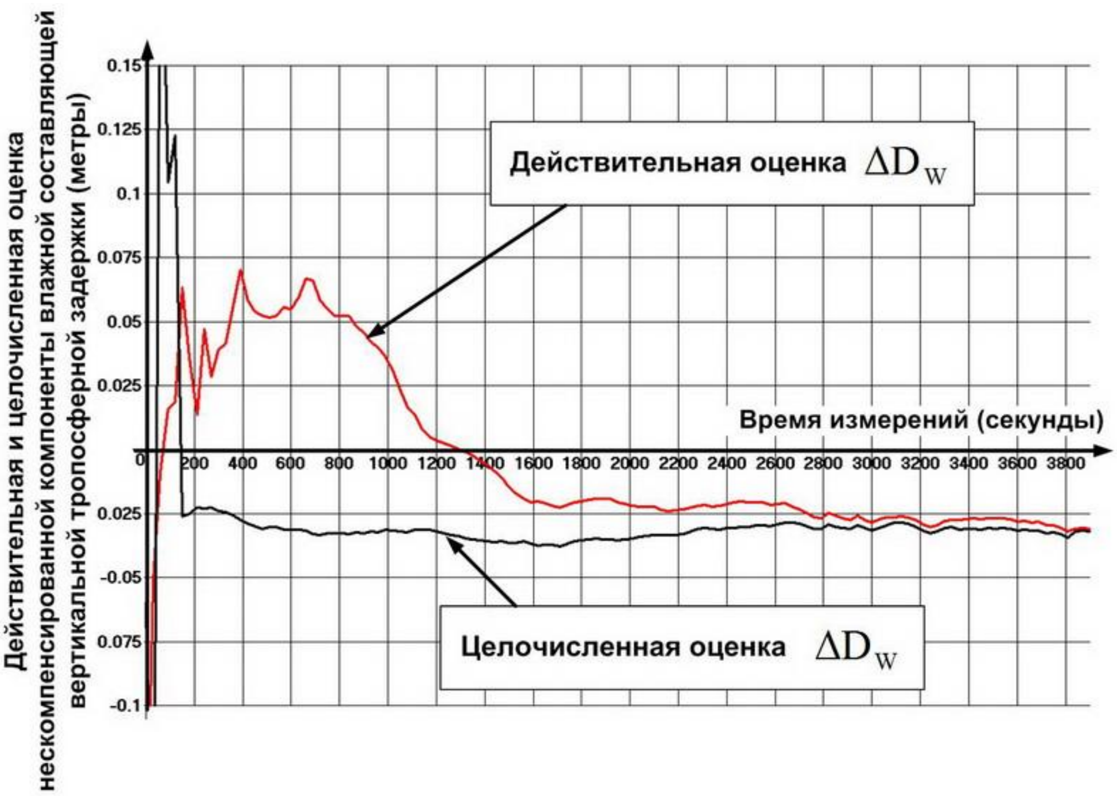

Рис. 4.9. Действительная и целочисленная оценки параметра ΔD_W

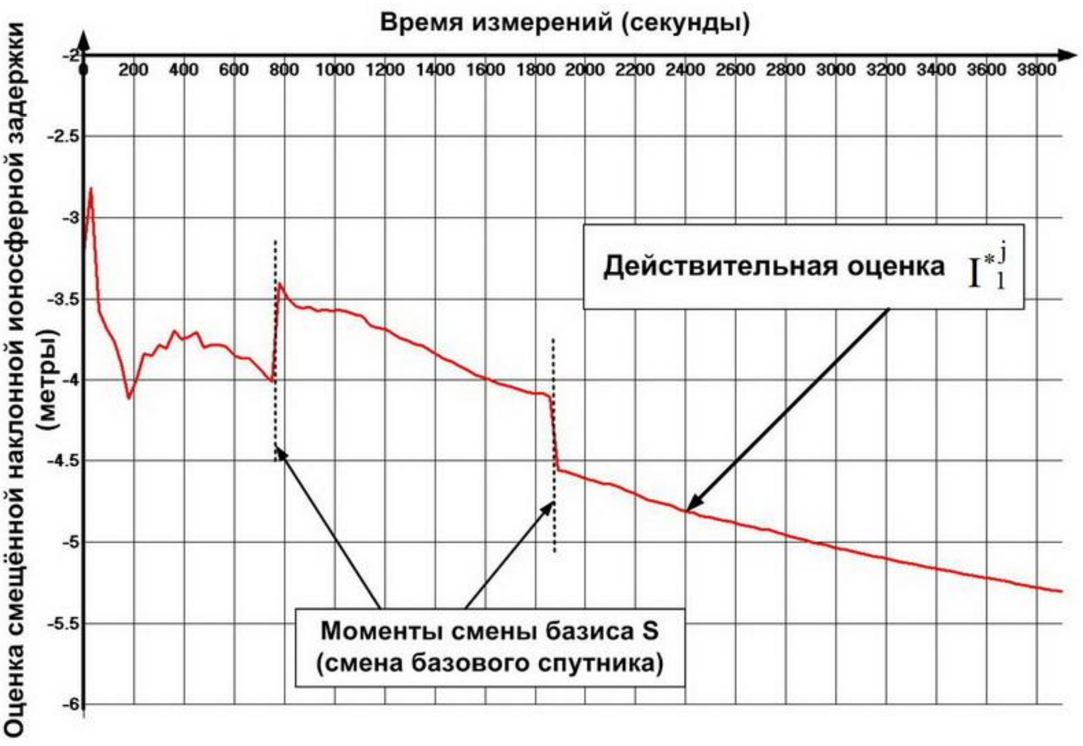

Рис. 4.10. Действительная оценка параметра I^{*j}_1

Для демонстрации использования атмосферных ограничений при обработке измерений в режиме Integer PPP по моделям измерений P3L3A4 (3.28) и P3L3P4L4 (3.32) в работе было произведено обнуление оценок всех не атмосферных параметров и изменение соответствующих блоков ковариационной матрицы с установкой априорных значений дисперсий (априорные значения дисперсии оценок для поправок $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - $100\,м^2$, для смещений dT^G_{P3} и dT^G_{L3} - $1500^2\,м^2$, для смещений $b^G_{r,A4}$ - $200^2\,м^2$, для целочисленных неоднозначностей - $10^5\,м^2$). Такое обнуление моделирует срыв слежения за сигналами по всем спутникам, т.е. кратковременную пропажу или сбой в измерениях. На рис. 4.11 показаны результаты зависимости трехмерных ошибок местоопределения $3D_{ER}$ (2.30) от времени обработки интервала измерений при наличии описанного выше срыва слежения для трёх случаев: использование тропосферных ограничений (кривая “P3L3A4 Tropo constraint”, модель P3L3A4 (3.28), использование атмосферных ограничений (тропосфера, ионосфера, кривая “P3L3P4L4 Tropo&Iono constraint” модель P3L3P4L4 (3.32)) и отсутствие ограничений (кривая “P3L3A4 Full reset”, модель P3L3A4 (3.28)). При отсутствии ограничений осуществлялось обнуление всех оцениваемых параметров и установка априорных значений дисперсий в ковариационных матрицах по всем параметрам, при тропосферных ограничениях сохранялись оценки ΔD_W с соответствующими строкой и столбцом ковариационной матрицы, при атмосферных ограничениях сохранялись оценки ΔD_W и I^{*j}_1.

Момент моделирования срыва слежения, а также скачки в оценке $3D_{ER}$, соответствующие различным вариантам обработки измерений, обозначены на рис. 4.11

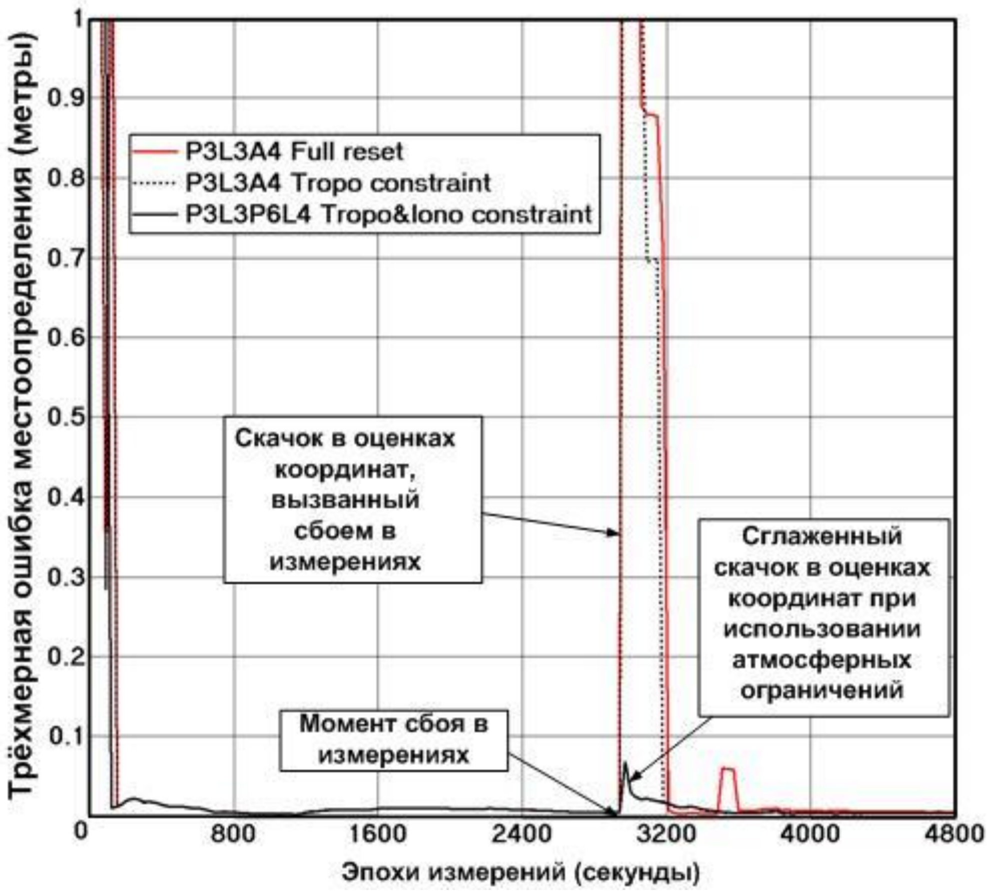

Рис. 4.11. Зависимость трёхмерной ошибки местоопределения от времени обработки при наличии смоделированного сбоя в измерениях и использовании атмосферных\ионосферных ограничений

Видно, что применение атмосферных ограничений существенно сглаживает скачок в трёхмерной ошибке местоопределения потребителя (без использования каких-либо атмосферных данных имеет место скачок величиной около 3.5 м, при использовании тропосферных ограничений имеет место скачок величиной около 2.8 м, при использовании атмосферных ограничений наблюдается существенно меньший по продолжительности скачок величиной около 0.06 м). Также из рис. 4.11 видно, что влияние тропосферных ограничений проявляется существенно меньше, чем ионосферных. Однако для ионосферосвободной модели измерений с разделёнными часами (например, модель P3L3A4 (3.28)) использование тропосферных ограничений также может быть целесообразным. Одновременное использование тропосферных и ионосферных ограничений оказывается наиболее эффективно в смысле снижения амплитуды и продолжительности скачка в трёхмерной ошибке координат потребителя при наличии сбоя в измерениях.

4.4 Экспериментальные результаты местоопределения в режиме Integer PPP

В работе был проведён сравнительный анализ местоопределения в режимах Float PPP и Integer PPP при обработке измерений навигационных приёмников с различным географическим положением, с использованием различных моделей измерений GPS и с использованием ЭВИ различной точности. Во время работы над диссертацией между Московским авиационным институтом (национальным исследовательским университетом) и Министерством природных ресурсов Канады (NRCan) был заключён договор о предоставлении Московскому авиационному институту для исследования и тестирования разделённых спутниковых поправок системы GPS, вычисленных NRCan по глобальной сети наземных станций. Указанные поправки использованы в диссертации для исследования местоопределения в режиме Integer PPP. Также в диссертации было реализовано сетевое решение по локальной сети наземных станций. В пятой главе диссертации проводится сравнение результатов местоопределения в режиме Integer PPP, осуществляемого при использовании разделённых спутниковых поправок, вычисленных в работе по локальной сети станций, а также разделенных спутниковых поправок, доступных от NRCan.

Для реализации местоопределения в режиме Ineteger PPP в работе использовалась библиотека программ GPSTk [82, 96] и программный пакет MATLAB [119].

На рис. 4.12 показаны зависимости трёхмерных ошибок местоопределения от времени обработки измерений в режимах Integer PPP и Float PPP. Обработке подвергались измерения станции BRUS Международной ГНСС службы IGS (International GNSS Service) с интервалом 30 секунд. Точность используемой ЭВИ (в данном случае для режима Integer PPP под ЭВИ понимаются спутниковые орбиты, а для режима Float PPP - спутниковые орбиты и смещения показаний часов спутников традиционной ионосферосвободной модели измерений P3L3 (2.8)) соответствует точности ЭВИ, которая использовалась при вычислении разделённых поправок к показаниям спутниковых часов по глобальной сети станций в NRCan (ЭВИ от IGS формата Rapid, доступная с задержкой 17-41 час, среднеквадратическое значение ошибок спутниковых орбит около 2.5 см, среднеквадратическое значение ошибок смещений показаний спутниковых часов около 75 пс, стандартное отклонение смещений показаний спутниковых часов около 25 пс [120]). Обрабатывались мартовские измерения 2008 года в соответствии с доступными датами разделённых спутниковых часов. На рис. 4.12 показаны зависимости трёхмерной ошибки местоопределения $3D_{ER}$ от времени для модели измерений с разделёнными часами P3L3A4 (3.28) (режим обработки Integer PPP) и для модели измерений P3L3 (2.8) (режим обработки Float PPP). Для сравнения на рисунке показана также зависимость, соответствующая модели измерений P3L3 (2.8) при использовании ЭВИ от IGS максимально возможной точности (апостериорная ЭВИ от IGS формата Final для координат спутников и смещений показаний спутниковых часов, доступная с задержкой 12-18 дней, среднеквадратическое значение ошибок спутниковых орбит около 2.5 см, среднеквадратическое значение ошибок смещений показаний спутниковых часов около 75 пс, стандартное отклонение смещений показаний спутниковых часов около 20 пс, кривая Float PPP P3L3 Final). Кривая P3L3 Final на рис. 4.12 характеризует предельно возможную точность и оперативность режима Float PPP в условиях апостериорной обработки измерений. Из графика видно, что переходный период в режиме Float PPP значительно больше, чем таковой для режима Integer PPP даже при сравнении со случаем использования максимально точной ЭВИ в режиме Float PPP (кривая Float PPP P3L3 Final) и ЭВИ формата Rapid для режима Integer PPP. Период сходимости целочисленного решения режима Integer PPP (кривая Integer PPP P3L3A4 fixed solution) до точности 1 см составил около 600с, тогда как в режиме Float PPP (кривая Float PPP P3L3) - 18 часов (через 1 час обработки измерений ошибка местоопределения была 0.23 м, показано на рис. 4.12).

Из рис. 4.12 также видно, что предельная точность и оперативность режима Float PPP (кривая P3L3 Final) уступает действительному решению (4.3), вычисленному по модели измерений с разделёнными часами (Integer PPP P3L3A4 float solution).

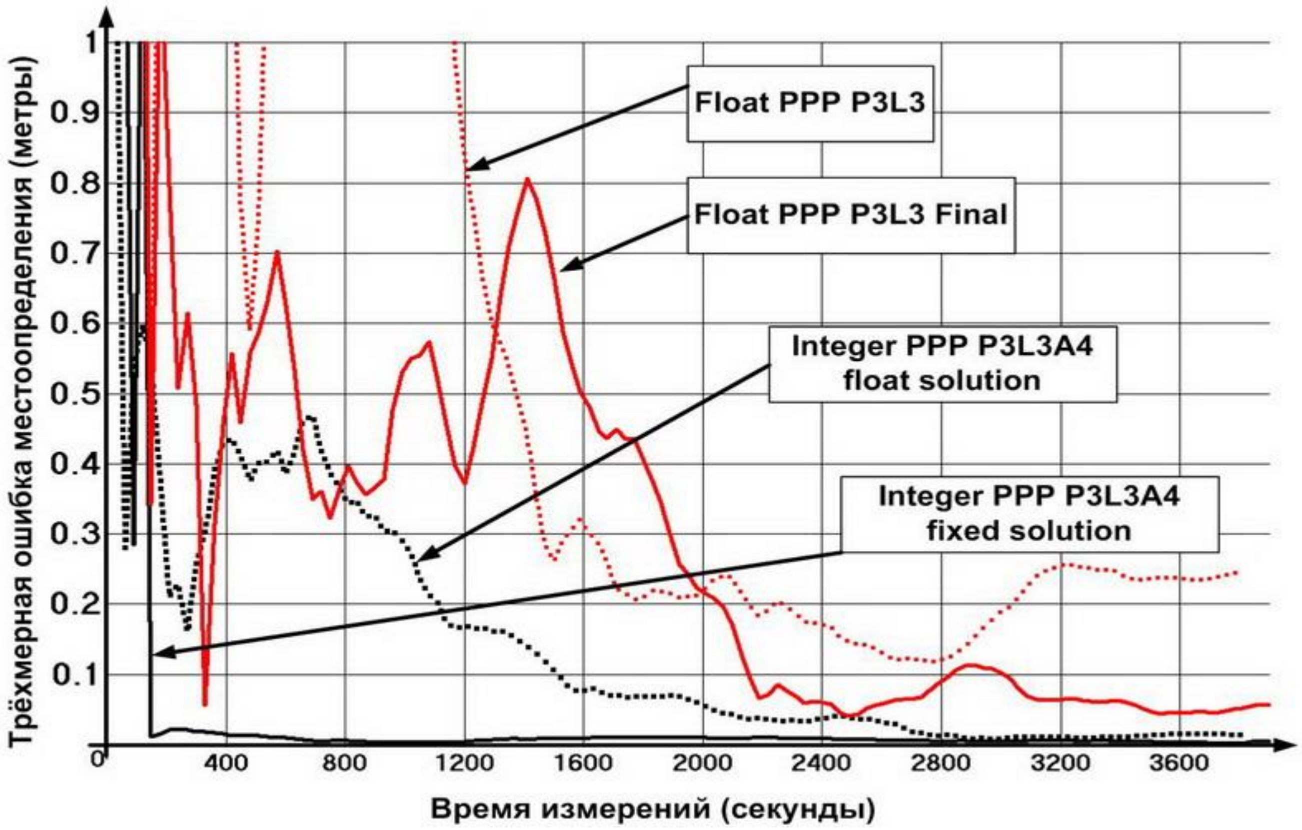

Рис. 4.12. Сравнение точности и оперативности местоопределения в режимах Integer PPP и Float PPP (модели измерений P3L3 (2.8), P3L3A4 (3.28))

При обработке измерений в аналогичных условиях по модели измерений P3L3P4L4 (3.32) результаты местоопределения по точности и оперативности практически полностью совпадают с результатами модели P3L3A4 (3.28), показанными на рис. 4.12.

В подразделе 3.3.2 и разделе 3.4 было отмечено, что, несмотря на сингулярность с дефицитом ранга равным единице, модель измерений EX_P1P2L1L2 (3.35) позволяет однозначно оценивать поправки к координатам приёмника, а также разрешать неоднозначность псевдофазовых измерений. На рис. 4.13 показана зависимость трёхмерной ошибки местоопределения от времени измерений для моделей измерений P3L3 (2.8), P3L3A4 (3.28), EX_P1P1L1L2 (3.35). Как видно, расширенная модель измерений на исходных частотах GPS EX_P1P2L1L2 (3.35) обеспечивает небольшое преимущество в оперативности по сравнению с моделью P3L3A4 (3.28). На рис. 4.13 показана зависимость доступного от NRCan ионосферосвободного кодового смещения показаний часов одного из спутников (PRN 10) $dt_{P3}^{G,j}$ от времени измерений (кривая NRCan). Также на рис. 4.13 приведена зависимость ионосферосвободного кодового смещения, вычисленного по оценённым в модели измерений EX_P1P2L1L2 (3.35) кодовым поправками $dt_{P1}^{G,j}$ и $dt_{P2}^{G,j}$ как $dt^{*G,j}_{P3} = \frac{77^2 dt_{P1}^{G,j} - 60^2 dt_{P2}^{G,j}}{77^2 - 60^2}$ (кривая “Вычисление по оценкам модели EX_P1P2L1L2”).

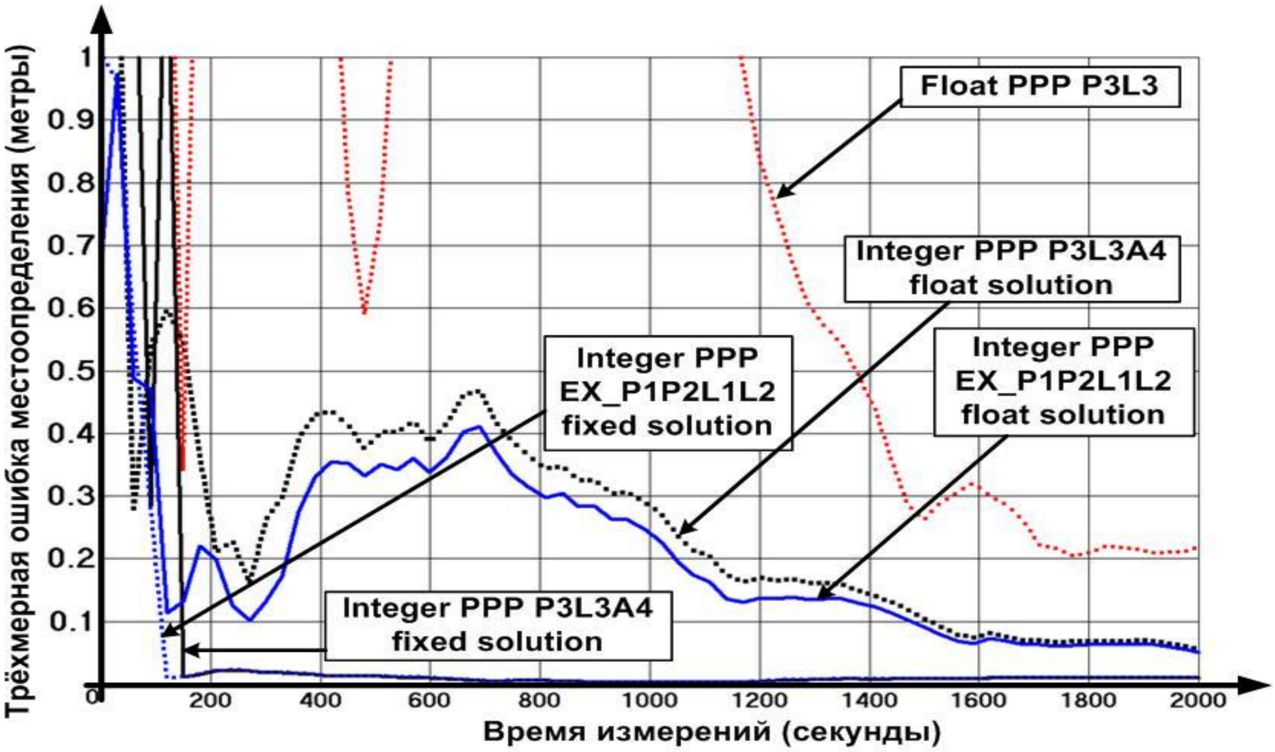

Рис. 4.13. Сравнение точности и оперативности местоопределения в режимах Integer PPP и Float PPP (модели измерений P3L3 (2.8), P3L3A4 (3.28), EX_P1P2L1L2 (3.35))

Как видно, величина $dt^{*G,j}_{P3}$ имеет нефизическую природу (в масштабе рис. 4.14 зависимость от времени измерений доступной от NRCan поправки $dt^{G,j}_{P3}$ выглядит практически константой по сравнению с зависимостью от времени измерений величины $dt^{*G,j}_{P3}$). Это является следствием того, что модель измерений EX_P1P2L1L2 (3.35) сингулярна и координатные оси, вдоль которых откладываются параметры $dt^{G,j}_{P1}$ и $dt^{G,j}_{P2}$ не ортогональны ядру матрицы системы. При этом действительные оценки неоднозначностей в модели EX_P1P2L1L2 (3.35) оцениваются корректно (с использованием которых далее реализуется процедура целочисленного разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений), поскольку дефицит ранга величиной в единицу в модели измерений EX_P1P2L1L2 (3.35) не связан с целочисленными неоднозначностями, а связан только с оценками разделённых поправок к показаниям спутниковых часов $dt^{G,j}_{P1}$, $dt^{G,j}_{P2}$, $dt^{G,j}_{L1}$, $dt^{G,j}_{L2}$.

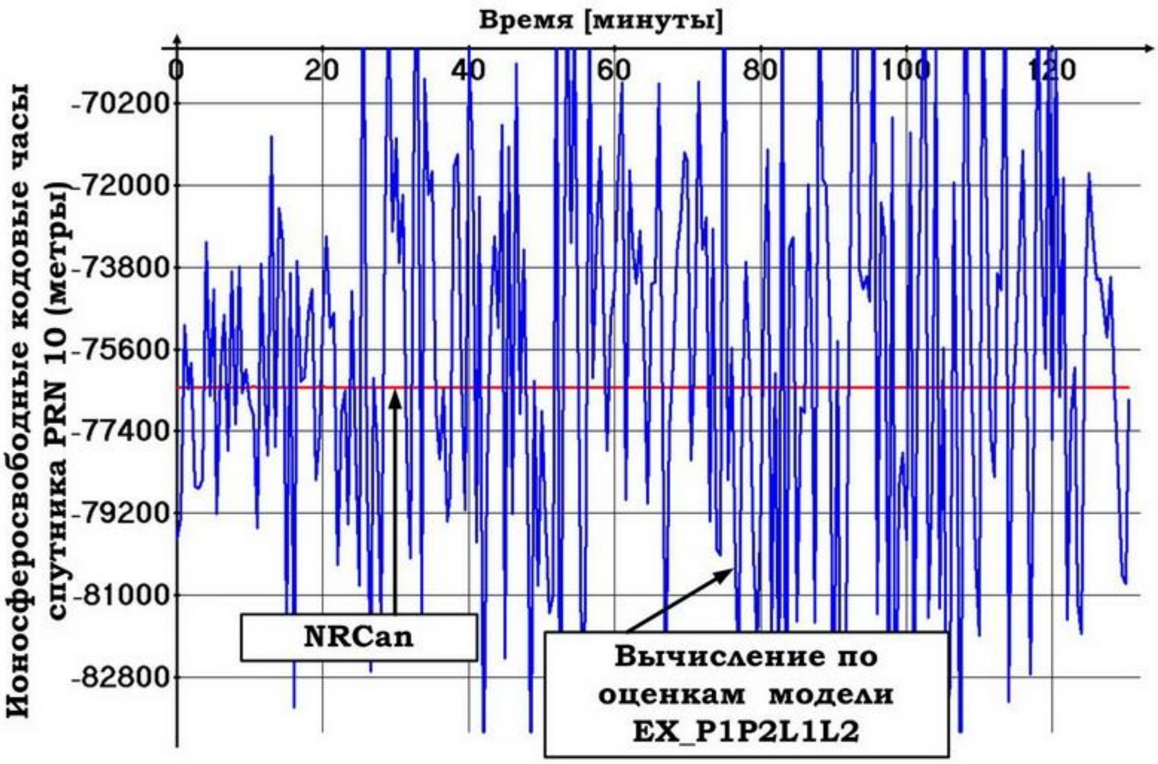

Рис. 4.14. Ионосферосвободные кодовые спутниковые поправки для модели измерений P3L3A4 (3.28) (NRCan) и оценённые по модели EX_P1P2L1L2 (3.35)

На рис. 4.15 для условий обработки измерений, аналогичных рис. 4.12, показана зависимость действительной $\hat{N}^j_1$ (float solution, кривая Float N1) и целочисленной $\breve{N}^j_1$ (fixed solution, кривая Integer N1) оценок неоднозначности N^j_1 одного из спутников в обработке для режима Integer PPP при использовании модели P3L3A4 (3.28) (осуществлён переход из целочисленного подпространства $\left\{N^{G,j}_3, N^{G,j}_4\right\}$ в целочисленное подпространство в соответствии с (3.29)). Целочисленная оценка $\breve{N}_1^j$ на рис. 4.15 принимает своё истинное значение уже на 6-ую порядковую эпоху обработки (т.е. через 180 секунд после начала обработки), что на рис. 4.12 соответствует резкому скачкообразному снижению трёхмерной ошибки местоопределения до уровня 1-2 см. На рис. 4.15 также показаны моменты смены базиса **S** (3.40), соответствующие смене базового спутника (то есть спутника с максимальным углом возвышения, координатные оси неоднозначностей по которому ортогональны подпространству $R(\mathbf{S})$, раздел 3.3.1) .

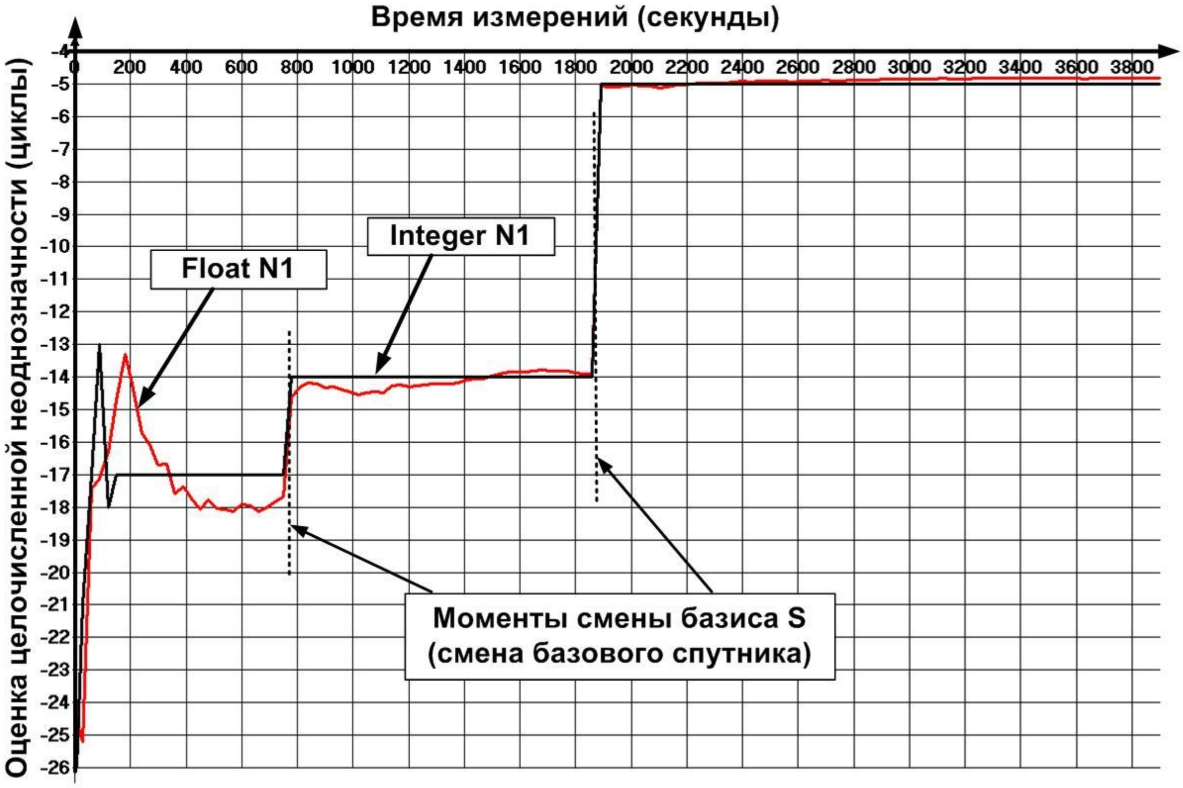

Рис. 4.15. Зависимость действительной и целочисленной оценок неоднозначности N_1^j спутника от времени

Из рис. 4.15 и рис. 4.12 видно, что целочисленные скачки в оценках неоднозначности N_1^j на моменты смены базового спутника не оказывают влияния на оценки поправок к координатам потребителя $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. В моменты смены базового спутника, показанные на рис. 4.15, имеет место также целочисленный скачок в оценках смещений показаний часов приёмника dT_{L3}^G и $b_{r,A4}^G$, соответствующих измерениям $L_3^{G,j}$ и $A_4^{G,j}$ (целочисленная и действительная оценки dT_{L3}^G показаны на рис. 4.16 в зависимости от времени обработки). Как видно, целочисленная оценка dT_{L3}^G представляет собой практически гладкую функцию с целочисленными скачками в моменты смены базового спутника, тогда как действительная оценка dT_{L3}^{G} существенно более нестабильна во времени. Действительное и целочисленное значения оценки кодового смещения показаний часов приёмника dT_{P3}^{G} практически совпадают, поэтому на рис. 4.16 приведена зависимость только целочисленной оценки dT_{P3}^{G}.

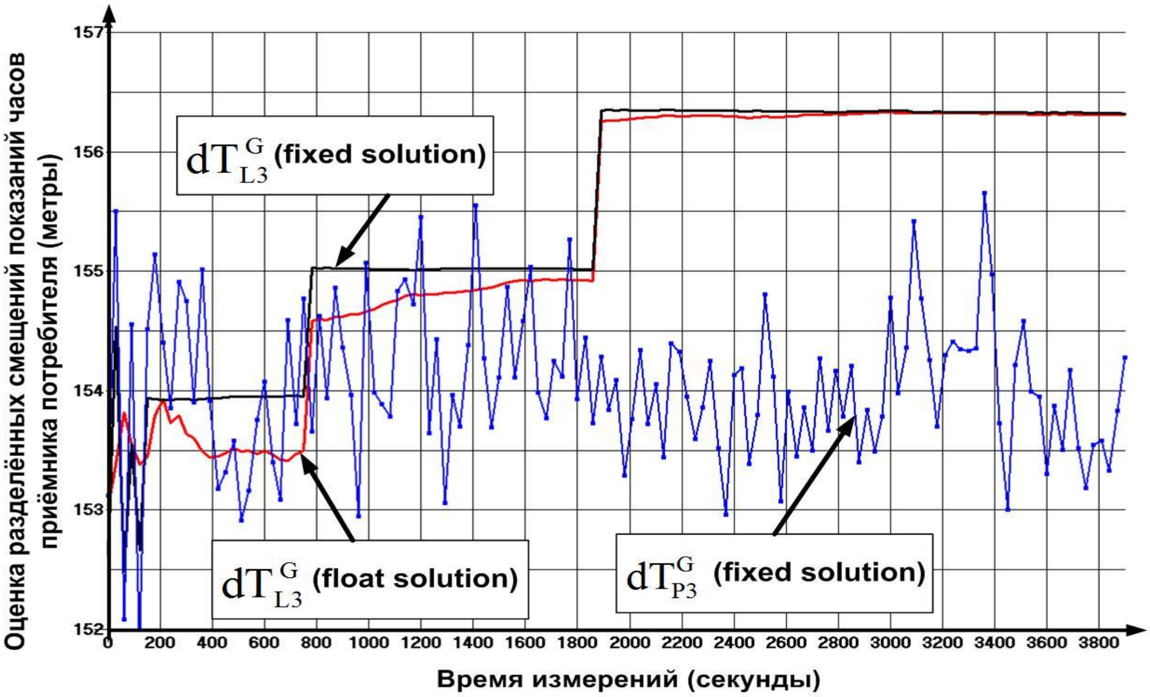

Рис. 4.16. Зависимость оценок разделённых смещений показаний часов приёмника от времени обработки

На рис. 4.17 приведена зависимость дисперсий действительной оценки поправки Δx (данная оценка входит в вектор $\hat{\mathbf{a}}$ (4.3)) и целочисленной оценки поправки Δx (которая входит в вектор $\breve{\mathbf{a}}$, показанный на схеме рис. 4.6) от времени.

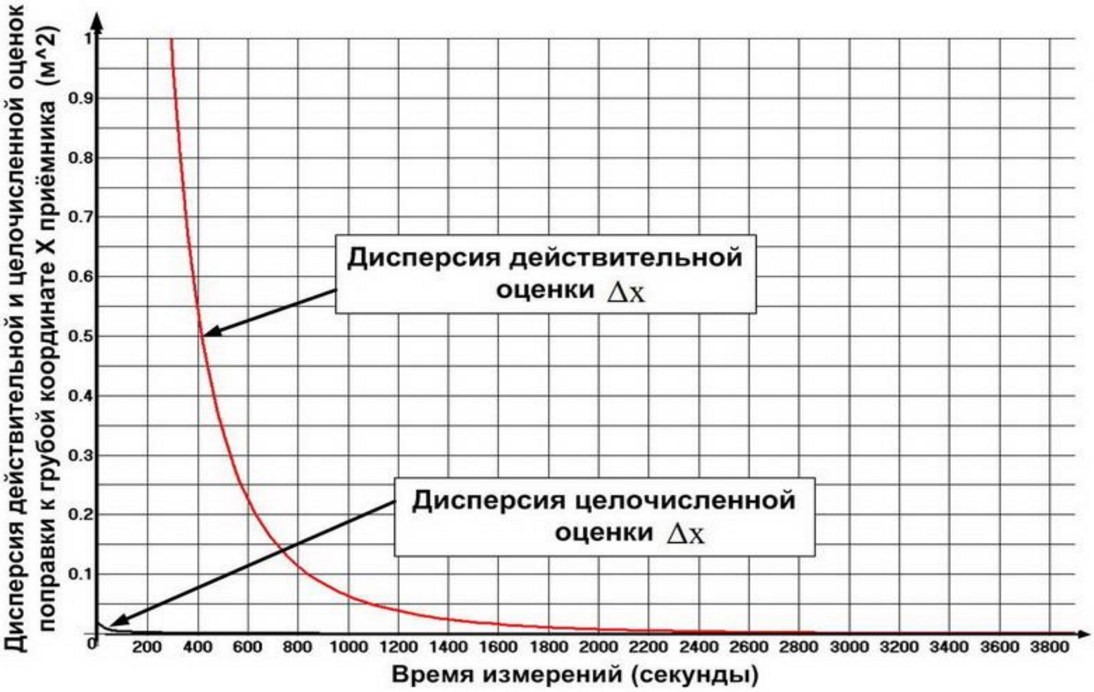

Рис. 4.17. Зависимость дисперсий действительной и целочисленной оценок поправки к грубой координате X приёмника потребителя от времени

Как видно, дисперсия целочисленной оценки поправки Δx имеет на порядок меньшее значение (на уровне нескольких мм), чем дисперсия действительной оценки.

Из приведённых выше сравнительных результатов местоопределения в режимах Float PPP и Integer PPP следует, что разрешение целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений при высокоточном абсолютном местоопределении существенно сокращает период сходимости к точному решению, т.е. повышает оперативность высокоточного местоопределения потребителя.

4.5 Выводы по главе 4

В четвёртой главе поясняется, за счёт чего снижается период сходимости решения при использовании процедуры разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений. Приведена блок-схема алгоритма разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений при высокоточном местоопределении в режиме Integer PPP, отмечены дополнительные блоки, отсутствующие в схеме режима Float PPP: блок разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений, блок оценки достоверности полученного целочисленного вектора, блок вычисления целочисленного решения, учитывающего найденные целые.

Вводится понятие атмосферных ограничений, которое обобщает описанное в литературе понятие ионосферных ограничений. Показано, что использование атмосферных ограничений позволяет существенно снизить амплитуду и длительность скачка в оценках координат потребителя при наличии сбоя в измерениях (проезд через тоннель, срыв слежения за фазой несущей).

Приведены результаты местоопределения в режиме Integer PPP с анализом достоверности полученных результатов, проведено сравнение скорости сходимости к точному решению режимов Integer PPP и Float PPP. На основе полученных результатов сделан вывод о том, что разрешение целочисленной неоднозначности существенно (в десятки и даже сотни раз) снижает период сходимости решения высокоточного местоопределения: период сходимости целочисленного решения режима Integer PPP до точности 1 см составил около 600 с, тогда как в режиме Float PPP – 18 часов.

ГЛАВА 5. СЕТЕВОЕ РЕШЕНИЕ – ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗДЕЛЁННЫХ СПУТНИКОВЫХ ПОПРАВОК ДЛЯ СИСТЕМЫ P3L3A4

5.1 Взаимосвязь пользовательской и сетевой процедур обработки измерений

Как показано на рис. 1.1, высокоточное абсолютное местоопределение возможно только при использовании поправок, вычисленных по сети наземных станций (продукты сетевого решения). Использование разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений при высокоточном абсолютном местоопределении (режим Integer PPP) помимо спутниковых орбит (высокоточных спутниковых координат) в качестве сетевых продуктов требует применения разделённых (в соответствии с частотным диапазоном и типом измерений) смещений к показаниям часов спутников (модели измерений P1P2L1L2 (3.25), P3L3A4 (3.28), P3L3P4L4 (3.32), EX_P1P2L1L2 (3.35), GL_P1P2L1L2 (3.37)), тогда как в режиме Float PPP (модель измерений P3L3 (2.8)) для каждого спутника в обработке используется единственное смещение показаний его часов, общее для обоих диапазонов частот, а также для кодовых и фазовых измерений. Высокоточные спутниковые орбиты далее не упоминаются, т.к. они являются одинаково необходимыми продуктами сетевого решения как для режима Float PPP, так и для режима Integer PPP. Под продуктами сетевого решения далее понимаются поправки, связанные с показаниями спутниковых часов.

При работе с моделью измерений P3L3 (2.8) (режим Float PPP) при $M\text{sat}$ спутниках в обработке продуктами сетевого решения являются смещения $dt^{G,j}$, $j=\overline{1,M\text{sat}}$, т.е. одна поправка на каждый спутник. При работе с моделью измерений P1P2L1L2 (3.25) (режим Integer PPP) при $M\text{sat}$ спутниках в обработке продуктами сетевого решения являются смещения $dt_{P1}^{G,j}$, $dt_{P2}^{G,j}$, $dt_{L1}^{G,j}$, $dt_{L2}^{G,j}$, $j=\overline{1,M\text{sat}}$, т.е. четыре поправки на каждый спутник. При работе с моделями измерений P3L3A4 (3.28) и P3L3P4L4 (3.32), EX_P1P2L1L2 (3.35) (режим Integer PPP) при $M\text{sat}$ спутниках в обработке продуктами сетевого решения являются смещения $dt_{P3}^{G,j}$, $dt_{L3}^{G,j}$, $b_{A4}^{j,G}$, $j=\overline{1,M\text{sat}}$, т.е. три поправки на каждый спутник. При работе с моделью измерений GL_P1P2L1L2 (3.37) (режим Integer PPP) при $M\text{sat}$ спутниках в обработке продуктами сетевого решения являются смещения $dt_{P1}^{R,j}, dt_{P2}^{R,j}, dt_{L1}^{R,j}, dt_{L2}^{R,j}$, $j=\overline{1,M\text{sat}}$, т.е. четыре поправки на каждый спутник.

Во второй и третьей главах для указанных моделей измерений приведены оцениваемые параметры при использовании этих моделей в пользовательском решении, т.е. для высокоточного абсолютного местоопределения с использованием продуктов сетевого решения. Эти же модели измерений могут быть записаны применительно к задаче сетевого решения, т.е.

к задаче вычисления указанных спутниковых поправок по измерениям сети наземных станций. В задаче сетевого решения для указанных моделей измерений вычисляются следующие оцениваемые параметры:

При работе с моделью измерений P3L3 (2.8) (режим Float PPP) в задаче сетевого решения при Nst станциях и Msat спутниках в обработке оцениваемыми параметрами являются нескомпенсированные компоненты вертикальной влажной тропосферной задержки станций сети $\Delta D_{W,i}, i=\overline{1,Nst}$, смещения показаний часов приёмников станций сети $dT_i^G, i=\overline{1,Nst}$, смещения показаний часов спутников $dt^{G,j}, j=\overline{1,Msat}$, действительные неоднозначности $A_{P3,i}^j, i=\overline{1,Nst}, j=\overline{1,Msat}$.

При работе с моделью измерений P1P2L1L2 (3.25) (режим Integer PPP) в задаче сетевого решения при Nst станциях и Msat спутниках в обработке оцениваемыми параметрами являются величины $\Delta D_{W,i}, i=\overline{1,Nst}$, разделённые смещения показаний часов приёмников станций сети $dT_{P1,i}^G, dT_{P2,i}^G, dT_{L1,i}^G, dT_{L2,i}^G, i=\overline{1,Nst}$, разделённые смещения показаний часов спутников смещения $dt_{P1}^{G,j}, dt_{P2}^{G,j}, dt_{L1}^{G,j}, dt_{L2}^{G,j}, j=\overline{1,Msat}$, целочисленные неоднозначности $\lambda_1^G N_{1,i}^{G,j}, \lambda_2^G N_{2,i}^{G,j}, i=\overline{1,Nst}, j=\overline{1,Msat}$, наклонные ионосферные задержки сигнала $I_i^j, i=\overline{1,Nst}, j=\overline{1,Msat}$.

При работе с моделью измерений P3L3A4 (3.28) и EX_P1P2L1L2 (3.35) (режим Integer PPP) в задаче сетевого решения при Nst станциях и Msat спутниках в обработке оцениваемыми параметрами являются величины $\Delta D_{W,i}, i=\overline{1,Nst}$, разделённые смещения показаний часов приёмников станций сети $dT_{P3,i}^G, dT_{L3,i}^G, b_{r,A4,i}^G, i=\overline{1,Nst}$, разделённые смещения показаний часов спутников $dt_{P3}^{G,j}, dt_{L3}^{G,j}, b_{A4}^{G,j}, j=\overline{1,Msat}$, целочисленные неоднозначности $\lambda_1^G N_{1,i}^{G,j}, \lambda_4^G N_{4,i}^{G,j}, i=\overline{1,Nst}, j=\overline{1,Msat}$ (переход от неоднозначностей $\{N_{3,i}^{G,j}, N_{4,i}^{G,j}\}$ к неоднозначностям $\{N_{1,i}^{G,j}, N_{4,i}^{G,j}\}$ осуществляется согласно (3.29)).

При работе с моделью измерений P3L3P4L4 (3.32) к оцениваемым параметрам задачи сетевого решения по модели (3.28) добавляются смещённые наклонные ионосферные задержки $I_{1,i}^{*j}, i=\overline{1,Nst}, j=\overline{1,Msat}$.

При работе с моделью измерений GL_P1P2L1L2 (3.37) (режим Integer PPP) в задаче сетевого решения при Nst станциях и Msat спутниках в обработке оцениваемыми параметрами являются величины $\Delta D_{W,i}, i=\overline{1,Nst}$, разделённые смещения показаний часов приёмников станций сети $dT^{R}_{P1,i}, dT^{R}_{P2,i}, dT^{R}_{L1,i}, dT^{R}_{L2,i},\ i=\overline{1,Nst}$, тангенсы угла наклона линейных зависимостей фазовых смещений показаний часов приёмника от номера частотной литеры $\dot{dT}^{R}_{L1,i}$, $\dot{dT}^{R}_{L2,i},\ i=\overline{1,Nst}$, разделённые смещения показаний часов спутников $dt^{R,j}_{P1}, dt^{R,j}_{P2}, dt^{R,j}_{L1}, dt^{R,j}_{L2},\ j=\overline{1,Msat}$, целочисленные неоднозначности $N^{R,j}_{1,i}, N^{R,j}_{2,i},\ i=\overline{1,Nst},\ j=\overline{1,Msat}$, наклонные ионосферные задержки сигнала $I^{R,j}_{i}, i=\overline{1,Nst}, j=\overline{1,Msat}$.

Особенностью продуктов сетевого решения для режима Integer PPP (набор разделённых спутниковых поправок) является то, что в настоящее время они не могут быть спрогнозированы на интервалы времени, сравнимые по длительности с интервалами прогноза спутниковых поправок традиционной ионосферосвободной модели измерений P3L3 (2.8), широко используемой при местоопределении в режиме Float PPP (несколько часов). Причиной этого является уровень нестабильности генераторов спутниковых часов.

5.2 Использование теории графов

В задаче сетевого решения рассматривается сеть из Nst наземных станций, навигационные приёмники которых проводят измерения сигналов от $Msat$ спутников. В общем случае может быть поставлена задача сетевого решения по глобальной сети станций, т. е. вычисление разделённых спутниковых поправок для всех спутников орбитальной группировки рассматриваемой навигационной системы по измерениям наземных станций, распределённых по всей территории Земли. В рамках данной работы рассматривается задача сетевого решения по локальной сети станций, распределённых внутри области с размером не более 1000 км.

Как было отмечено в разделе 5.1, при использовании моделей с разделёнными часами в задаче сетевого решения в число оцениваемых параметров входят два набора целочисленных неоднозначностей – $\lambda_1^G N_{1,i}^{G,j}$, $\lambda_2^G N_{2,i}^{G,j}$, $i = \overline{1, Nst}$, $j = \overline{1, Msat}$ для модели измерений P1P2L1L2 (3.25), $\lambda_1^G N_{1,i}^{G,j}$, $\lambda_4^G N_{4,i}^{G,j}$, $i = \overline{1, Nst}$, $j = \overline{1, Msat}$ для моделей P3L3A4 (3.28), P3L3P4L4 (3.32) и EX_P1P2L1L2 (3.35), $\lambda_1^{R,j} N_{1,i}^{R,j}$, $\lambda_2^{R,j} N_{2,i}^{R,j}$, $i = \overline{1, Nst}$, $j = \overline{1, Msat}$ для модели GL_P1P2L1L2 (3.37). Указанные два набора неоднозначностей из разных моделей измерений с разделёнными часами эквивалентны по своей структуре (неоднозначности в них относятся к одним и тем же спутникам и приёмникам), для дальнейшего рассмотрения используется набор целочисленных неоднозначностей $\lambda_1^G N_{1,i}^{G,j}$, $i = \overline{1, Nst}$, $j = \overline{1, Msat}$, соответствующий модели P3L3A4 (3.28).

Набор целочисленных неоднозначностей $\lambda_1^G N_{1,i}^{G,j}$, $i = \overline{1, Nst}$, $j = \overline{1, Msat}$ может быть представлен в виде двудольного графа [121, 122], вершины одной из частей которого относятся к станциям, вершины другой – к спутникам. Двудольным называется граф, множество вершин которого можно разбить на две части так, чтобы каждое ребро графа соединяло какую-либо вершину одной части графа с какой-либо вершиной другой части графа [123]. Двудольный граф для набора неоднозначностей $\lambda_1^G N_{1,i}^{G,j}$, $i = \overline{1, Nst}$, $j = \overline{1, Msat}$ при $Nst = 5$ и $Msat = 6$ показан на рис. 5.1, где станции относятся к одной части графа, а спутники – к другой. Рёбра графа соответствуют значениям целочисленных неоднозначностей в псевдофазовых измерениях между соответствующими станциям и спутниками. На рис. 5.1 красным цветом выделено ребро, соответствующее неоднозначности $\lambda_1^G N_{1,i}^{G,j}$, $i = 4$, $j = 6$.

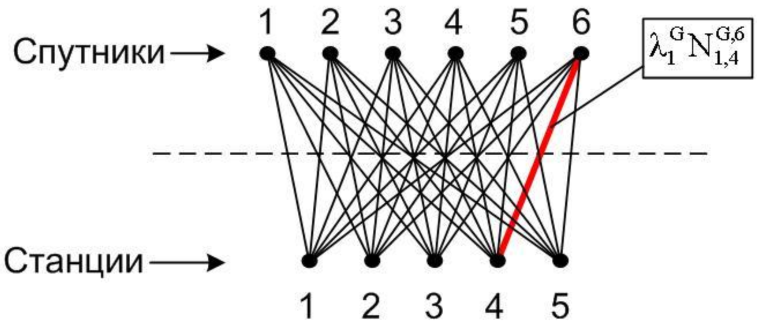

Рис. 5.1. Двудольный граф, используемый для работы с набором неоднозначностей сети станций при $Nst = 5$ и $Msat = 6$

Псевдофазовые измерения, к которым относятся целочисленные неоднозначности, составляющие рёбра графа на рис. 5.1, характеризуются разной точностью. Поэтому всем рёбрам графа на рис. 5.1 можно поставить в соответствие некоторые весовые значения α_i^j, обратно пропорциональные точности соответствующего псевдофазового измерения $L_{1,i}^{G,j}$ между i-ой станцией и j-ым спутником. На практике в качестве весов принимаются значения некоторой функции отображения, которая обратно пропорциональна углу возвышения спутника, к которому относится измерение $L_{1,i}^{G,j}$ (может быть использована функция отображения, которая используется в обработке для вычисления дисперсии измерений по спутникам в зависимости от угла их возвышения). Далее в работе двудольный граф, соответствующий набору неоднозначностей $\lambda_1^G N_{1,i}^{G,j},\ i = \overline{1, Nst},\ j = \overline{1, Msat}$, называется графом измерений $L_{1,i}^{G,j}$ или графом, соответствующим набору неоднозначностей $\lambda_1^G N_{1,i}^{G,j},\ i = \overline{1, Nst},\ j = \overline{1, Msat}$.

Для взвешенного двудольного графа измерений, т.е. графа, рёбра которого имеют веса α_i^j, может быть поставлена задача вычисления минимального остовного дерева (minimum spanning tree, MST), то есть такого дерева в графе измерений, которое имеет минимальную сумму весов всех входящих в него рёбер. Минимальное остовное дерево для графа измерений единственно и имеет, как любое другое остовное дерево графа, $Nspan = (Nst + Msat - 1)$ вершин. На рис. 5.2 показан пример двудольного графа измерений с выделенным красным цветом минимальным остовным деревом (MST).

Для пользовательского решения задачи Integer PPP двудольный граф измерений, соответствующий набору неоднозначностей $\lambda_1^G N_1^{G,j},\ j = \overline{1, Msat}$, показан на рис. 5.3, где красным цветом выделено ребро базового спутника. В пользовательском решении рассматриваются измерения одного приёмника, в таком случае для иллюстрации набора неоднозначностей удобнее использовать понятие базового спутника, описанное в главе 3. По этой причине в третьей главе для пояснения алгоритма выбора базиса $\mathbf{S}$ подпространства $\mathrm{R}(\mathbf{S})$, позволяющего сохранить целочисленность комбинаций неоднозначностей псевдофазовых измерений в пользовательском решении задачи Integer PPP , графы измерений не используются.

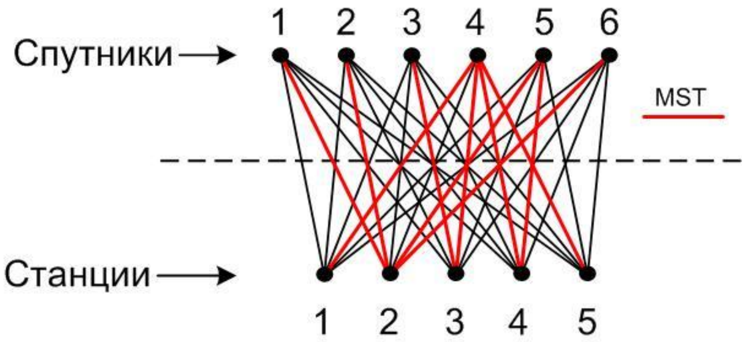

Рис. 5.2. Двудольный граф с выделенным красным цветом минимальным остовным деревом (MST), $\mathrm{Nst}=5$ и $\mathrm{Msat}=6$

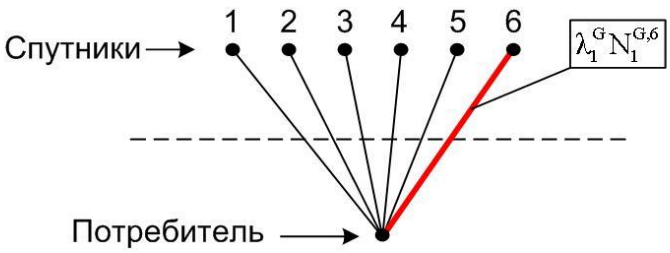

Рис. 5.3. Двудольный граф с выделенным красным цветом ребром, соответствующим базовому спутнику в пользовательском решении задачи Integer PPP, $\mathrm{Nst}=1$ и $\mathrm{Msat}=6$

5.3 Алгоритм вычисления разделённых спутниковых поправок по сети станций (сетевое решение)

Описанное в третьей главе правило выбора базиса $\mathbf{S}$, позволяющее сохранить целочисленность оцениваемых линейных комбинаций исходных неоднозначностей моделей P1P2L1L2 (3.25) и P3L3A4 (3.28) может быть применено к задаче сетевого решения, т.е. задаче вычисления разделённых спутниковых поправок по сети станций для осуществления потребителем своего местоопределения в режиме Integer PPP.

При использовании модели измерений P3L3A4 (3.28) система линейных уравнений, соответствующая сетевому решению при наличии Nst станций и Msat спутников в обработке, записывается в следующем матричном виде:

$$\mathbf{y}^{\mathbf{N}}_{\mathrm{Nmeas}} = \mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathrm{Nmeas}\times\mathrm{Nest}}\mathbf{X}^{\mathbf{N}}_{\mathrm{Nest}\times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{N}}_{\mathrm{Nmeas}\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y}^{\mathbf{N}} = \left[\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{I}} \;\vdots\; \mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{II}}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{X}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{I}}\\ \hdashline \mathbf{X}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{II}}\end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{N}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{y}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{P3}}\\ \mathbf{y}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{L3}}\\ \mathbf{y}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{A4}}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cccccccc}\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{r}} & \mathbf{A}_{\mathbf{P3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\mathbf{P3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{r}} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\mathbf{L3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\mathbf{L3}} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\mathbf{A4}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\mathbf{A4}} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{r}^{\mathbf{N}}\\ \hdashline \mathbf{dT}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{P3}}\\ \mathbf{dT}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{L3}}\\ \mathbf{b}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{r,A4}}\\ \mathbf{dt}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{P3}}\\ \mathbf{dt}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{L3}}\\ \mathbf{b}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{A4}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{3}}\mathbf{N}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{3}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{4}}\mathbf{N}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{4}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{P3}}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{L3}}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{A4}}\end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

где:

$\mathrm{Nmeas} = 3\mathrm{Nst}\cdot\mathrm{Msp}$ - число измерений $\mathbf{y}^{\mathbf{N}}$ в системе;

$\mathrm{Nest} = 3\mathrm{Msat} + 4\mathrm{Nst} + 2\mathrm{Msat}\cdot\mathrm{Nst}$ - число оцениваемых параметров;

$\mathbf{r}^{\mathbf{N}}_{\mathrm{Nst}\times 1}$ – вектор геометрических параметров сетевого решения, включающий в себя Nst нескомпенсированных составляющих влажной составляющей вертикальных тропосферных задержек сигнала $\Delta D_{W,i}\ (i = \overline{1,\mathrm{Nst}})$ для станций сети;

$\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{r},(\mathrm{Nst}\cdot\mathrm{Msp})\times\mathrm{Nst}}$ - блок информационной матрицы $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}$ сетевого решения, соответствующий геометрическим параметрам сетевого решения $\mathbf{r}^{\mathbf{N}}_{\mathrm{Nst}\times 1}$;

$\mathbf{dT}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{P3},\mathrm{Nst}\times 1}$, $\mathbf{dT}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{L3},\mathrm{Nst}\times 1}$ и $\mathbf{b}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{r,A4},\mathrm{Nst}\times 1}$ - вектора разделённых смещений показаний часов приёмников сети станций по измерениям $P_3^{G,j}$, $L_3^{G,j}$ и $A_4^{G,j}$, соответственно;

$\mathbf{A}_{\mathbf{P3},(\mathrm{Nst}\cdot\mathrm{Msat})\times\mathrm{Nst}} = \mathbf{A}_{\mathbf{L3}} = \mathbf{A}_{\mathbf{A4}}$ - блоки информационной матрицы $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}$ сетевого решения, соответствующие векторам $\mathbf{dT}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{P3},\mathrm{Nst}\times 1}$, $\mathbf{dT}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{L3},\mathrm{Nst}\times 1}$ и $\mathbf{b}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{r,A4},\mathrm{Nst}\times 1}$;

$\mathbf{dt}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{P3}}$, $\mathbf{dt}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{L3}}$ и $\mathbf{b}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{A4}}$ - вектора разделённых смещений показаний часов Msat спутников по измерениям $\mathrm{P}_3^{\mathrm{G,j}}$, $\mathrm{L}_3^{\mathrm{G,j}}$ и $\mathrm{A}_4^{\mathrm{G,j}}$, соответственно;

$\mathbf{A}^{\mathbf{P3}}_{(\mathrm{Nst}\cdot\mathrm{Msat})\times\mathrm{Msat}} = \mathbf{A}^{\mathbf{L3}} = \mathbf{A}^{\mathbf{A4}}$ - блоки информационной матрицы $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}$ сетевого решения, соответствующие векторам $\mathbf{dt}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{P3}}$, $\mathbf{dt}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{L3}}$ и $\mathbf{b}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{A4}}$;

$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{G}}\mathbf{N}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{3},(\mathrm{Nst}\cdot\mathrm{Msat})\times\mathrm{Msat}}$ и $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{4}}^{\mathbf{G}}\mathbf{N}^{\mathbf{G,N}}_{\mathbf{4},(\mathrm{Nst}\cdot\mathrm{Msat})\times\mathrm{Msat}}$ - вектора целочисленных неоднозначностей $\lambda_3^{\mathrm{G}}\mathrm{N}_{3,\mathrm{i}}^{\mathrm{G,j}}$ и $\lambda_4^{\mathrm{G}}\mathrm{N}_{4,\mathrm{i}}^{\mathrm{G,j}}$, соответствующие измерениям $\mathrm{L}_3^{\mathrm{G,j}}$ и $\mathrm{A}_4^{\mathrm{G,j}}$, соответственно.

Дефицит ранга матрицы $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}$ равен сумме дефицитов ранга её отдельных блоков $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{P3}}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{L3}}$ и $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{A4}}$, соответствующих векторам измерений $\mathbf{y}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{P3}}$, $\mathbf{y}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{L3}}$ и $\mathbf{y}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{A4}}$, т.е. $\mathbf{A}^{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{P3}} \\ \mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{L3}} \\ \mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{A4}} \end{bmatrix}$. Для снижения дефицита ранга в каждом из указанных блоков на единицу достаточно среди станций сети выбрать опорную станцию (reference, REF), оценка смещений разделённых показаний часов которой $\mathrm{dT}^{\mathrm{G,N}}_{\mathrm{P3,REF}}$, $\mathrm{dT}^{\mathrm{G,N}}_{\mathrm{L3,REF}}$ и $\mathrm{b}^{\mathrm{G,N}}_{\mathrm{r,A4,REF}}$ по измерениям $\mathrm{P}_3^{\mathrm{G,j}}$, $\mathrm{L}_3^{\mathrm{G,j}}$ и $\mathrm{A}_4^{\mathrm{G,j}}$ в сетевом решении не осуществляется. Согласно подразделу 3.3.1 это означает, что подпространство $\mathbf{R}(\mathbf{S})$ ортогонально координатным осям переменных $\mathrm{dT}^{\mathrm{G,N}}_{\mathrm{P3,REF}}$, $\mathrm{dT}^{\mathrm{G,N}}_{\mathrm{L3,REF}}$ и $\mathrm{b}^{\mathrm{G,N}}_{\mathrm{r,A4,REF}}$. При таком выборе базиса $\mathbf{S}$ дефицит ранга в (5.1) составляет величину $(\mathrm{Nst}+\mathrm{Msat}-1)$ для каждого из блоков $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{L3}}$ и $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{A4}}$.

В сетевом решении базис $\mathbf{S}$, дополняющий $\mathbf{N}(\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{II}})$ до $\mathbf{R}^{\mathbf{Nest}}$ ($\mathbf{N}(\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{II}}) \oplus \mathrm{R}(\mathbf{S}) = \mathbf{R}^{\mathbf{Nest}}$) выбирается так, чтобы $\mathbf{R}(\mathbf{S})$ было ортогонально такому числу координатных осей параметров $\mathbf{X}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{II}}$ (5.1), которое равно дефициту ранга матрицы $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}$. В этом случае все составляющие вектора оцениваемых параметров $\mathbf{X}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{I}}$ (т.е. геометрические параметры $\mathbf{r}^{\mathbf{N}}_{\mathrm{Nst}\times 1}$) оцениваются однозначно, т.к. соответствующие им координатные орты ортогональны $\mathbf{N}(\mathbf{A}^{\mathbf{N}})$, а все ненулевые составляющие вектора $\mathbf{X}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{II}}$ оцениваются неоднозначно в виде линейных комбинаций с теми из параметров вектора $\mathbf{X}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{II}}$, координатные орты которых ортогональны $\mathbf{R}(\mathbf{S})$. Таким образом, несовместная недоопределённая система уравнений (5.1), имеющая бесчисленное множество МНК-решений, может быть преобразована в несовместную переопределённую систему уравнений, имеющую единственное МНК-решение (раздел 3.1).

Для сохранения целочисленности оцениваемых линейных комбинаций неоднозначностей вектора $\mathbf{X}_{\mathbf{II}}^{\mathbf{N}}$, необходимо выбрать $\mathbf{R}(\mathbf{S})$ ортогональным $(\mathrm{Nst}+\mathrm{Msat}-1)$ координатным осям набора неоднозначностей $\lambda_3^{G}N_{3,i}^{G,j}$, а также $(\mathrm{Nst}+\mathrm{Msat}-1)$ координатным осям набора неоднозначностей $\lambda_4^{G}N_{4,i}^{G,j}$ рассматриваемой сети [45]. Указанное требование может быть описано в терминах теории графов. Блоки $\mathbf{A}_{\mathbf{L3}}^{\mathbf{N}}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{A4}}^{\mathbf{N}}$ определяют связь измерений с целочисленными наборами неоднозначностей $\lambda_3^{G}N_{3,i}^{G,j}$ и $\lambda_4^{G}N_{4,i}^{G,j}$, каждый из которых согласно подразделу 5.2 может быть описан графом измерений. Для устранения дефицита ранга в блоках $\mathbf{A}_{\mathbf{L3}}^{\mathbf{N}}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{A4}}^{\mathbf{N}}$ могут использоваться два одинаковых графа, т.к. наборы целочисленных неоднозначностей $\lambda_3^{G}N_{3,i}^{G,j}$ и $\lambda_4^{G}N_{4,i}^{G,j}$ полностью идентичны.

В каждом из графов, соответствующих данным наборам неоднозначностей $\lambda_3^{G}N_{3,i}^{G,j}$ и $\lambda_4^{G}N_{4,i}^{G,j}$, необходимо найти остовное дерево. Подпространство $\mathrm{R}(\mathbf{S})$ должно быть ортогонально координатным ортам тех неоднозначностей в наборах $\lambda_3^{G}N_{3,i}^{G,j}$ и $\lambda_4^{G}N_{4,i}^{G,j}$, которые соответствуют рёбрам остовного дерева. На практике для повышения точности оценок системы (5.1) следует работать с минимальным остовным деревом (minimum spanning tree, MST, выделено красным на рис. 5.2), т.е. с таким, сумма взвешенных рёбер которого минимальна (присваиваемые рёбрам веса обратно пропорциональны углу возвышения спутников).

В пространстве оцениваемых параметров системы (5.1) координатные оси, соответствующие разделённым спутниковым часам $\mathbf{dt}_{\mathbf{P3}}^{\mathbf{G,N}}$, $\mathbf{dt}_{\mathbf{L3}}^{\mathbf{G,N}}$ и $\mathbf{b}_{\mathbf{A4}}^{\mathbf{G,N}}$ не являются ортогональными ядру $\mathrm{N}(\mathbf{A}^{\mathbf{N}})$ матрицы $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}$. По этой причине оцениваемые разделённые спутниковые часы $\mathbf{dt}_{\mathbf{P3}}^{\mathbf{G,N}}$, $\mathbf{dt}_{\mathbf{L3}}^{\mathbf{G,N}}$ и $\mathbf{b}_{\mathbf{A4}}^{\mathbf{G,N}}$, входящие в вектор $\mathbf{X}_{\mathbf{II}}^{\mathbf{N}}$ (5.1), оцениваются целочисленно неоднозначно, в виде комбинаций $\overline{\mathbf{dt}_{\mathbf{P3}}^{\mathbf{G,N}}}$, $\overline{\mathbf{dt}_{\mathbf{L3}}^{\mathbf{G,N}}}$ и $\overline{\mathbf{b}_{\mathbf{A4}}^{\mathbf{G,N}}}$ с целочисленными компонентами вектора $\mathbf{X}_{\mathbf{II}}^{\mathbf{N}}$, т.е. оценки разделённых спутниковых поправок являются целочисленно смещёнными. Это не является препятствием для их использования потребителем в режиме Integer PPP потому, что указанные целочисленные смещения разделённых спутниковых часов $\overline{\mathbf{dt}_{\mathbf{P3}}^{\mathbf{G,N}}}$, $\overline{\mathbf{dt}_{\mathbf{L3}}^{\mathbf{G,N}}}$ и $\overline{\mathbf{b}_{\mathbf{A4}}^{\mathbf{G,N}}}$ учитываются потребителем в процессе разрешения целочисленной неоднозначности согласно модели измерений P3L3A4 (3.28).

5.4 Сравнение качества разделённых спутниковых поправок, вычисленных по локальной и глобальной сетям станций

Результаты местоопределения в режиме Integer PPP, приведённые в разделе 4.4, получены при использовании набора разделённых поправок к показаниям спутниковых часов модели P3L3A4 (3.28), предоставленных для тестирования и исследований Министерством природных ресурсов Канады (NRCan) согласно договору, заключённому с Московским авиационным институтом (национальным исследовательским университетом). Указанные разделённые спутниковые часы были вычислены по глобальной сети станций. Реализация сетевого решения по глобальной сети станций является чрезвычайно сложной алгоритмически и трудоёмкой в вычислительном смысле задачей. По этой причине в данной работе было реализовано локальное сетевое решение, т.е. были вычислены разделённые поправки к показаниям спутниковых часов для модели измерений P3L3A4 (3.28) по локальной сети европейских станций, показанных на рис. 5.4 красными точками ($Nst = 5$).

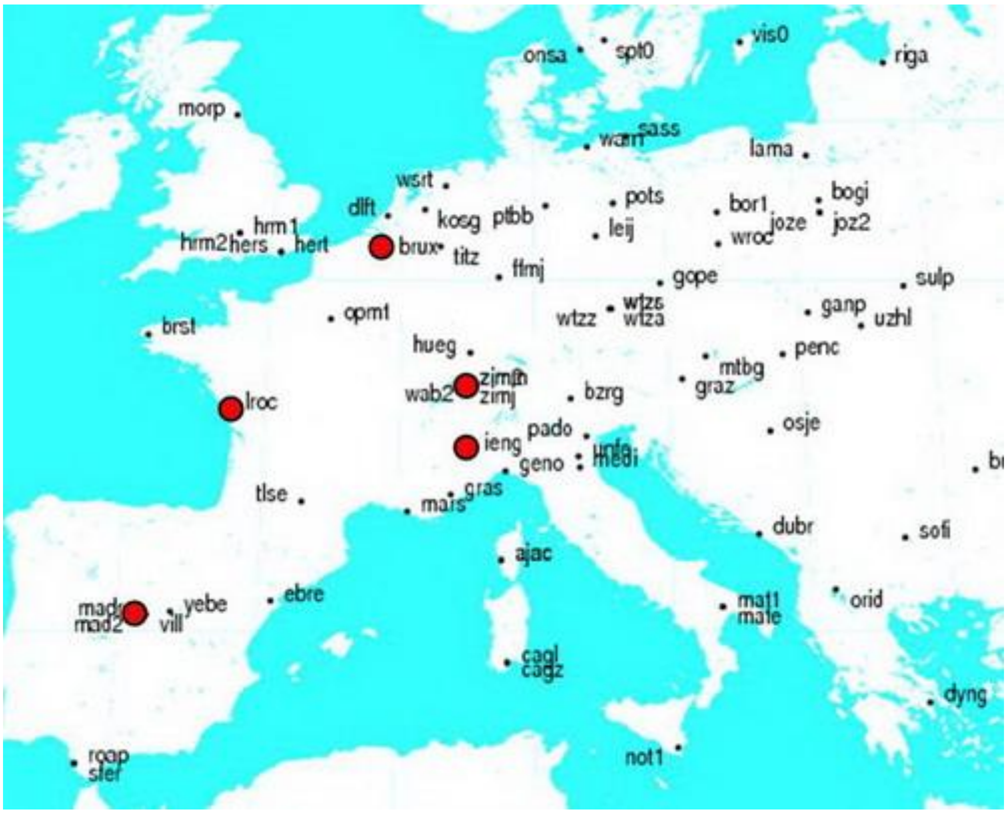

Рис. 5.4. Используемая в работе локальная сеть европейских станций

Для вычисления разделённых спутниковых часов по локальной сети станций в работе использовалась библиотека программ GPSTk [82, 96] и программный пакет MATLAB [119]. В целях упрощения вычислений было использовано допущение о том, что все $Nst = 5$ станций осуществляли измерения по одному и тому же набору $Msat = 6$ спутников. Интервал измерений, удовлетворяющих этому ограничению, составил 2 часа 10 минут. Эффективность использования вычисленных разделенных поправок к показаниям часов спутников при местоопределении в режиме Integer PPP сравнивалась с таковой для разделённых спутниковых поправок, вычисленных в NRCan по глобальной сети станций (т.е. вычисленные по локальной и глобальной сетям станций разделённые поправки к показаниям спутниковых часов использовались для местоопределения потребителя в режиме Integer PPP). На рис. 5.5 показаны зависимости трёхмерных ошибок местоопределения в режиме Integer PPP от времени при использовании разделённых спутниковых поправок, вычисленных в работе (на графике - MAI) и доступных от NRCan (на графике - NRCan). На рис. 5.5 показаны как целочисленное решение (fixed solution), так и действительное решение (float solution). Графики на рис. 5.5 получены при обработке измерений станции сети IGS BRUS (Брюссель, Бельгия), которые также были использованы для вычисления разделённых спутниковых поправок по локальной сети станций.

Как видно из рис. 5.5, вычисленные по локальной и глобальной сетям разделённые часы обеспечивают в целом сравнимый период сходимости при местоопределении в режиме Integer PPP. При этом разделённые часы, вычисленные по локальной станции, обеспечивают несколько меньшую длительность переходного периода как для целочисленного решения, так и для действительного.

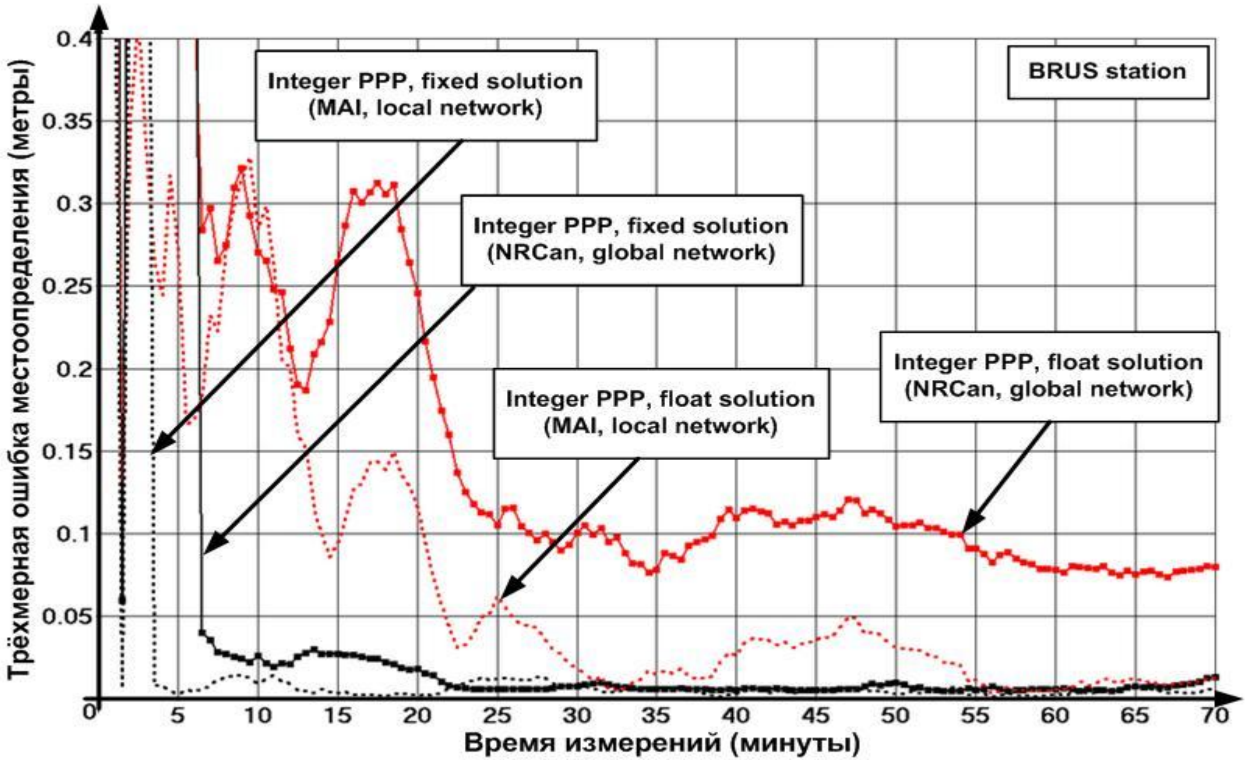

Рис. 5.5. Сравнение оперативности местоопределения режимов Float PPP и Integer PPP при использовании разделённых спутниковых часов, вычисленных по глобальной и локальной сетям (станция BRUS)

Следует отметить, что результат в смысле оперативности местоопределения в режиме Integer PPP при использовании разделённых часов локальной сети станций, показанный на рис. 5.5, является предельным в смысле точности. Это связано с тем, что в локальной сети по причине ограниченности интервала измерений (2 часа 10 мин) вычисленные разделённые поправки к показаниям спутниковых часов использовались в пользовательском решении, начиная со второго часа обработки, т.е. на сходимость решения был отведён один час измерений при интервале следования измерений и вычисления оценок 30 секунд. Такое время сходимости является недостаточным при используемом допущении о неизменности набора спутников в обработке, т.к. в начале и в конце данного часа измерений часть спутников имели достаточно низкие углы возвышения, что негативно сказывалось на оценках разделённых спутниковых часов. В условиях же сетевого решения по глобальной сети станций на сходимость решения может быть отведён значительно больший интервал времени (2-3 часа). С целью компенсации указанного различия в условиях вычисления продуктов сетевого решения по локальной сети станций в обработке были использованы наиболее точные спутниковые орбиты, вычисляемые международной службой IGS в режиме постобработки (тип IGS продуктов Final, орбиты спутников из *.sp3 файлов с интервалом следования координат 15 минут), тогда как для вычисления по глобальной сети станций разделённых спутниковых поправок в NRCan были использованы менее точные прогнозные спутниковые орбиты (тип продуктов IGS Rapid, орбиты и смещения показаний часов спутников из *.sp3 файлов с интервалом следования поправок 15 минут). Дополнительной причиной возможного повышения качества обработки измерений в режиме Integer PPP может являться то, что станция BRUS (рис. 5.5) входит в сеть станций, измерения которой использовались для вычисления разделённых спутниковых поправок по локальной сети станций. Поскольку по локальной сети станций в работе были вычислены разделённые часы только для $Msat = 6$ спутников, при местоопределении в режиме Integer PPP с разделёнными поправками от глобальной сети в обработке был использован тот же самый набор спутников.

Далее анализируются указанные два источника возможного повышения качества обработки измерений в режиме Integer PPP с разделёнными часами, вычисленными по локальной сети станций, по сравнению со случаем использования разделённых часов от глобальной сети станций.

На рис. 5.6 приводятся аналогичные рис. 5.5 зависимости для случая, когда разделённые спутниковые поправки по локальной сети вычислялись по ЭВИ той же точности, что и продукты сетевого решения по глобальной сети. Как видно, период сходимости для местоопределения в режиме Integer PPP при использовании разделённых часов спутников, вычисленных по локальной сети станций, практически не изменился. Таким образом, согласно рассмотренному вычислительному эксперименту точность ЭВИ, используемая для вычисления разделённых спутниковых поправок, практически не влияет на качество разделённых показаний спутниковых часов.

На рис. 5.7 приводятся зависимости, аналогичные рис. 5.6, но для случая обработки измерений станции сети IGS OPMT (Париж, Франция), которая не использовалась при вычислении разделённых поправок к показаниям спутниковых часов.

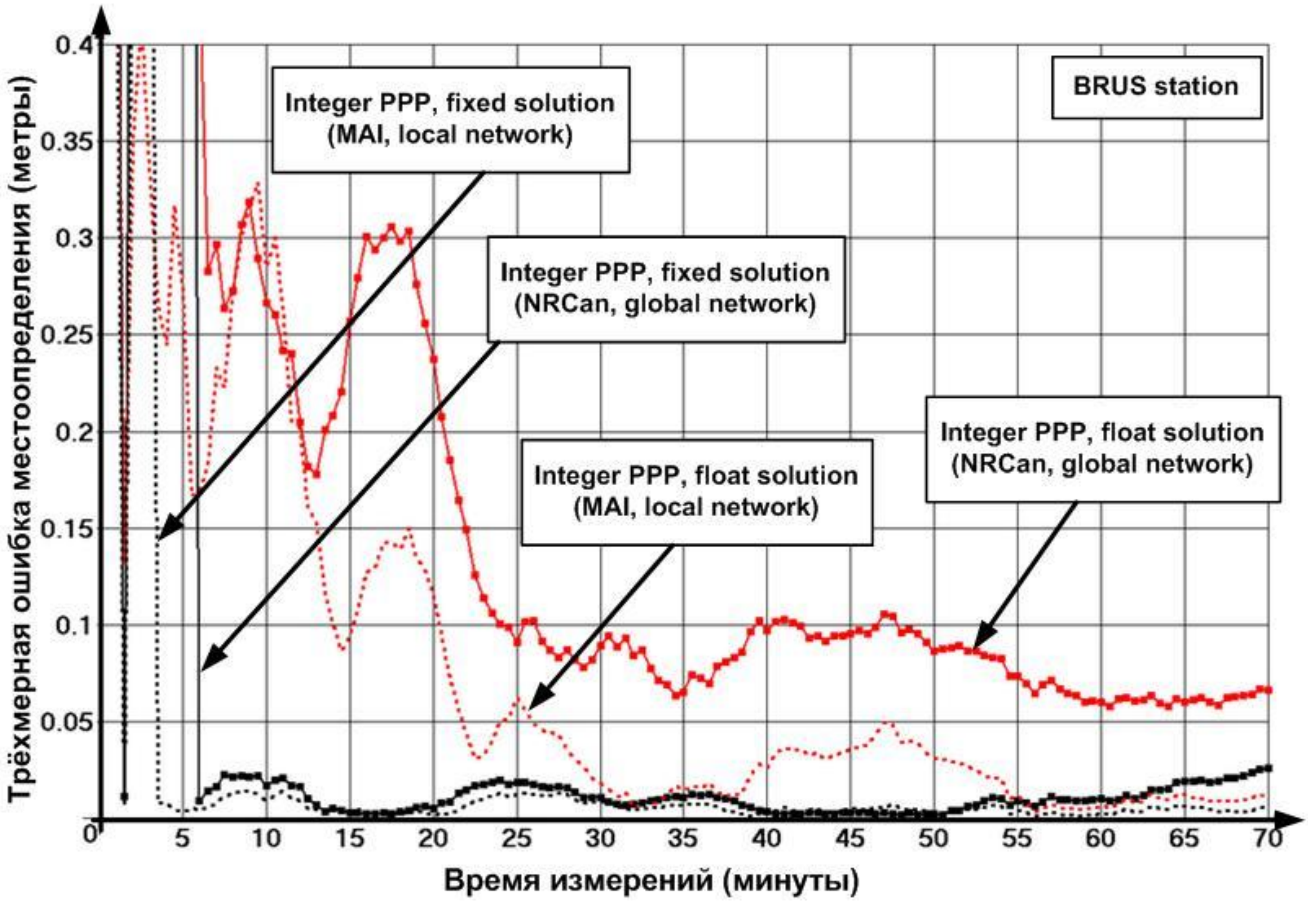

Рис. 5.6. Сравнение оперативности местоопределения режимов Float PPP и Integer PPP при использовании разделённых спутниковых часов, вычисленных по глобальной и локальной сетям (станция BRUS, случай использования одинаковой ЭВИ в глобальном и локальном сетевых решениях)

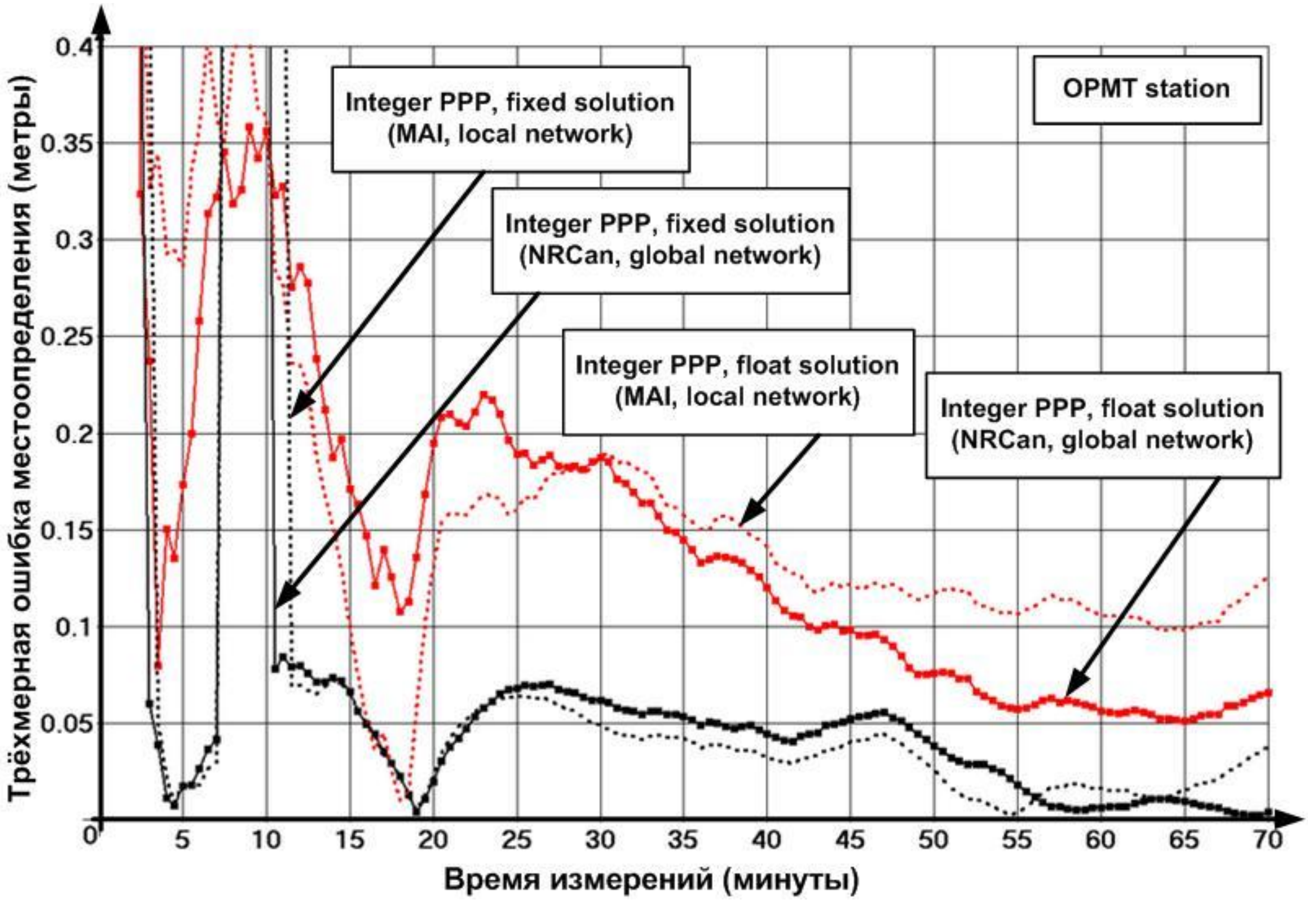

Рис. 5.7. Сравнение оперативности местоопределения режимов Float PPP и Integer PPP при использовании разделённых спутниковых часов, вычисленных по глобальной и локальной сетям (станция OPMT, случай использования одинаковой ЭВИ в глобальном и локальном сетевых решениях)

Как видно из рис. 5.7, при использовании разделённых часов для местоопределения станции OPMT, не включённой в рассматриваемую локальную сеть, качество местоопределения потребителя в режиме Integer PPP при использовании разделённых часов от локальной и глобальной станций остаётся сравнимым. Наблюдается лишь незначительное повышение периода сходимости для случая использования разделённых часов, вычисленных в работе по локальной сети станций. На рис. 5.7 виден скачок в целочисленном решении потребителя (fixed solution) при использовании разделённых часов как от глобальной, так и от локальной сетей станций. Поскольку скачок в трёхмерной ошибке местоопределения потребителя наблюдается при использовании разделённых часов от обеих рассматриваемых сетей, можно сделать вывод о том, что скачок в целочисленном решении потребителя был вызван временным ухудшением качества спутниковых орбит, или измерений навигационного приёмника, или условий приёма спутниковых сигналов на рассматриваемой станции.

Приведённые на рис. 5.5 – рис. 5.7 результаты местоопределения в режиме Integer PPP полностью подтверждают корректность разработанных и реализованных алгоритмов вычисления разделённых поправок к показаниям спутниковых часов и демонстрируют возможность их вычисления по локальной сети станций.

Точность и оперативность местоопределения в режиме Integer PPP помимо качества разделённых спутниковых часов также зависит от качества задающего генератора, используемого в приёмнике потребителя. При местоопределении потребителя по измерениям станций с менее стабильным задающим генератором, чем для рассмотренных станций BRUS и OPMT (оснащённых стабильными внешними цезиевым и водородным генераторами, соответственно), возможно снижение точности и оперативность местоопределения в режиме Integer PPP.

Для пояснения специфики разделённых спутниковых часов на рис. 5.8 приводится зависимость оценённых в работе по локальной сети станций разделённых кодовых и фазовых смещений показаний часов спутников $dt_{P3}^{G,j}$ и $dt_{L3}^{G,j}$ от времени для одного из спутников в обработке.

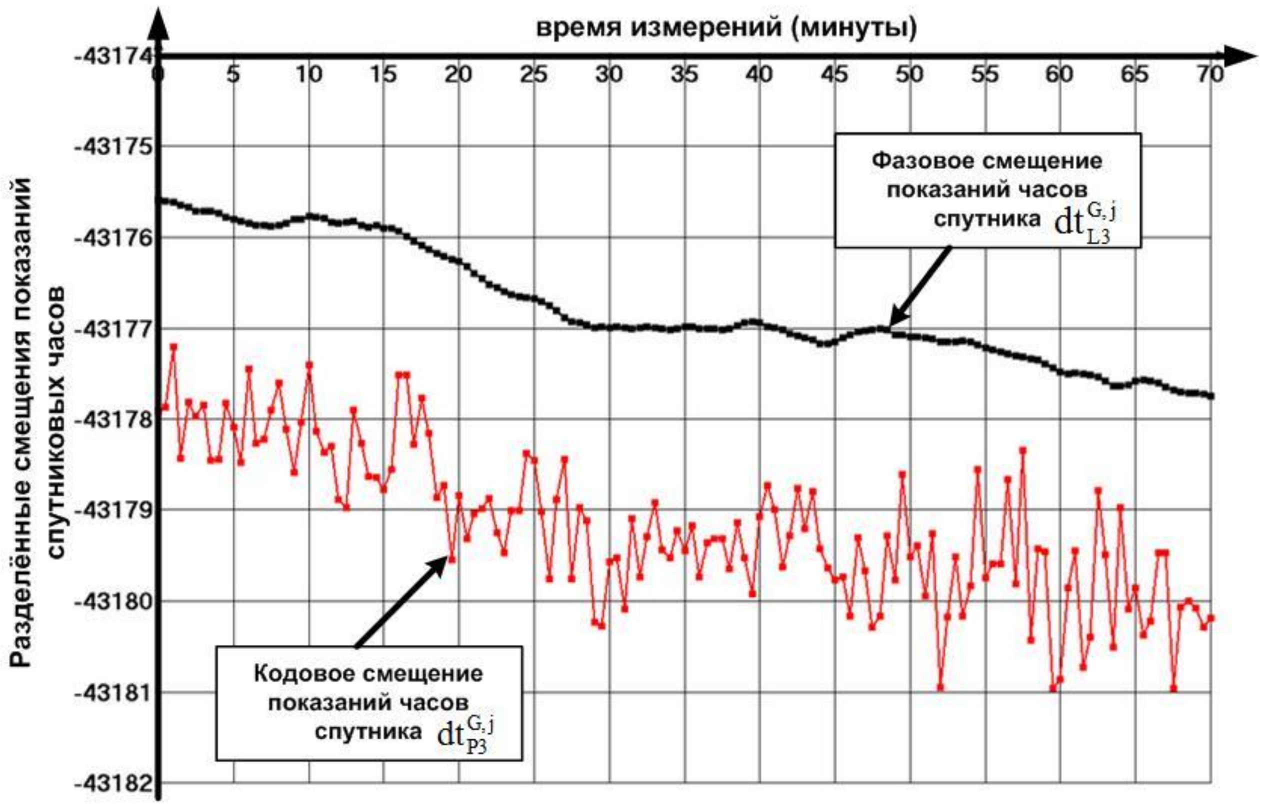

Рис. 5.8. Зависимость разделённых спутниковых смещений $dt_{P3}^{G,j}$ и $dt_{L3}^{G,j}$ от времени для одного из спутников в обработке.

Как видно из рис. 5.8, фазовая поправка к показаниям спутниковых часов $dt_{L3}^{G,j}$ смещена относительно кодовой поправки к показаниям спутниковых часов $dt_{P3}^{G,j}$ на величину порядка 2-2.5 м.

5.5 Выводы по главе 5

В пятой главе рассматривается вычисление разделённых кодовых и фазовых поправок к показаниям спутниковых часов по сети наземных станций с использованием теории графов. Набор неоднозначностей для измерений станций сети иллюстрируется двудольным графом измерений. Описанный ранее алгоритм преобразования несовместной недоопределённой системы уравнений к несовместной переопределённой обобщён для использования в задаче сетевого решения с сохранением целочисленности оцениваемых комбинаций псевдофазовых неоднозначностей.

Рассмотрен пример вычисления разделённых поправок к показаниям спутниковых часов по локальной сети европейских станций. Приведены результаты сравнения эффективности местоопределения в режиме Integer PPP при использовании разделённых поправок к показаниям спутниковых часов, вычисленных NRCan по глобальной сети станций, и разделённых поправок, вычисленных автором работы по локальной сети станций. Сделан вывод о том, что разделённые поправки к показаниям спутниковых часов с достаточным уровнем качества могут быть вычислены по локальной сети станций. С этой целью может использоваться российская сеть станций СДКМ.

Показано, что целочисленная смещённость разделённых поправок к показаниям часов спутников, оцениваемых в сетевом решении, не является препятствием для их использования потребителем при местоопределения в режиме Integer PPP, т.к. указанные целочисленные смещения учитываются потребителем в процессе разрешения целочисленной неоднозначности при местоопределении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Режим высокоточного местоопределения в ГНСС может быть реализован в глобальных дифференциальных навигационных спутниковых системах. Это означает, что определение потребителем своих высокоточных абсолютных координат возможно только при использовании внешних данных, сформированных путём обработки измерений сети наземных станций (высокоточные координаты спутников и смещения показаний спутниковых часов). Таким образом, можно выделить пользовательское решение, т.е. местоопределение потребителя в абсолютном режиме, и сетевое решение, т.е. вычисление по сети наземных станций дополнительной информации, необходимой потребителю для его высокоточного местоопределения.

Основным недостатком распространённого в настоящее время режима высокоточного абсолютного местоопределения Float PPP является длительный период сходимости – достижение сантиметровой точности местоопределения возможно через 6-20 часов обработки измерений. В диссертационной работе показано, что использование разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений, т.е. использование режима Integer PPP, позволяет сократить период сходимости к решению с сантиметровой точностью до нескольких минут. Для реализации процедуры целочисленного разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений при высокоточном абсолютном местоопределении используются смещения показаний часов спутников и приёмника, разделённые для измерений псевдодальностей и псевдофаз и частотных диапазонов.

Системы уравнений в ГНСС с разделёнными часами являются сингулярными. Для преодоления дефицита ранга в работе предложены алгоритмы, которые с использованием S-преобразования и теории графов позволяют преобразовать исходные несовместные недоопределённые системы уравнений к виду несовместных переопределённых, имеющих единственное решение наименьших квадратов. При этом поправки к координатам потребителя и нескомпенсированная тропосферная задержка оцениваются однозначно, а остальные параметры оцениваются в виде линейных комбинаций с сохранением целочисленности комбинаций неоднозначностей. Такое преобразование возможно благодаря выявленным в работе свойствам систем уравнений в ГНСС, заключающимся в том, что часть координатных осей пространства переменных сингулярных систем линейных уравнений в ГНСС (ГЛОНАСС, GPS) ортогональны ядру информационной матрицы системы, и поэтому соответствующие таким осям переменные оцениваются однозначно.

В работе продемонстрировано существенное (в десятки и даже сотни раз) снижение периода сходимости решения задачи абсолютного местоопределения для режима Integer PPP по сравнению с режимом Float PPP: период сходимости целочисленного решения режима Integer PPP до точности 1 см составил около 600 с, тогда как в режиме Float PPP – 18 часов.

Выявленные особенности систем уравнений в ГНСС могут применяться не только в задаче высокоточного местоопределения, но также в ряде других приложений как для системы GPS, так и для системы ГЛОНАСС (в задаче синхронизации шкал времени навигационных спутников со шкалами времени системы).

В работе продемонстрировано использование атмосферных ограничений, которые позволяют сократить период сходимости решения после сбоя в измерениях. Данные методы предложено использовать потребителям, находящимся в условиях частого возникновения сбоев в измерениях.

Разработанный метод фильтрации (исключающий фильтр Калмана) предложено использовать в задачах квазиоптимального оценивания для исключения мешающих параметров.

Разработаны алгоритмы вычисления разделённых поправок к показаниям спутниковых часов по измерениям локальной сети станций для реализации местоопределения в режиме Integer PPP. Продемонстрировано, что разделённые поправки к показаниям спутниковых часов, сформированные на основе обработки измерений по локальной и глобальной сетям станций, обеспечивают сравнимое качество местоопределения в режиме Integer PPP.

Исследованы методы оценки достоверности результатов разрешения целочисленной неоднозначности при высокоточном абсолютном местоопределении в режиме Integer PPP на основе отношения двух наименьших значений минимизируемой в целых числах квадратичной формы.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ГНСС	глобальные навигационные спутниковые системы
PPP	Precise Point Positioning, высокоточное местоопределение
Float PPP	режим высокоточного местоопределения в ГНСС без разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений
Integer PPP	режим высокоточного местоопределения в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений
ГЛОНАСС	глобальная навигационная спутниковая система
GPS	Global Positioning System, глобальная навигационная спутниковая система
GNSS	Global Navigation Satellite Systems, глобальные навигационные спутниковые системы
NRCan	National Resources Canada, Министерством природных ресурсов Канады
ЭВИ	эфемеридно-временная информация
ECEF	Earth-Centered-Earth-Fixed, подвижная геоцентрическая система координат
RTK	Real Time Kinematic, относительное высокоточное местоопределение
WAAS	Wide Area Augmentation System, американская система широкозонной дифференциальной коррекции
EGNOS	European Geostationary Navigation Overlay Service, европейская система широкозонной дифференциальной коррекции
СДКМ	Система Дифференциальной Коррекции и Мониторинга, российская система широкозонной дифференциальной коррекции
SBAS	Satellite-Based Augmentation System, спутниковая система дифференциальной коррекции
GDNSS	Global Differential Navigation Satellite Systems, глобальные дифференциальные навигационные спутниковые системы
PPP-AR	Precise Point Positioning with Ambiguity Resolution, режим высокоточного местоопределения в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений
LADGNSS	Local-Area Differential GNSS, локальная дифференциальная навигационная спутниковая система
LAAS	Local-Area Augmentation System, локальная система широкозонной дифференциальной коррекции
JPL	Jet Propulsion Laboratory, лаборатория реактивного движения
NASA	National Aeronautics and Space Administration, Национальное управление по

воздухоплаванию и исследованию космического пространства

IGS	International GPS Service/ International GNSS Service, Международная GPS служба/ Международная ГНСС служба
CACS	Canadian Active Control System, канадская активная система управления
GFZ	German Research Centre for Geosciences, германский центр исследования Земли
CNES	National Centre for Space Studies, французский национальный центр космических исследований
RRSD	single-differenced between receivers phase bias, фазовое смещение по первым разностям измерений между приёмниками
SSSD	single-differenced between satellites phase bias, фазовое смещение по первым межспутниковым разностям измерений
SDBS	single-differenced between satellites, первые межспутниковые разности
UPD	un-calibrated phase delay, некалиброванная фазовая задержка
PPP-RTK	Precise Point Positioning – Real Time Kinematic, режим высокоточного местоопределения в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений
UHD	uncalibrated hardware delay, некалиброванная аппаратурная задержка
MSCC	modified satellite clock correction, модифицированная спутниковая временная коррекция
FCB	fractional-cycle biases, частичные смещения
IRC	Integer recovery clock, сохраняющие целочисленность часы
WCDA	West Canada Deformation Array, сеть станций сбора измерений для мониторинга смещений земной коры в западной части Канады
GSD	Geodetic Survey Division, отдел геодезической съёмки
APC	antenna phase center, смещение фазового центра
SAT	satellite, спутник
REL	relativity, релятивизм
HARD	hardware, аппаратура
TROP	troposphere, тропосфера
IONO	ionosphere, ионосфера
MULT	multipath, многолучёвость
REC	receiver, приёмник
GRAV	gravitational, гравитационный
RINEX	Receiver Independent Exchange Format, формат данных навигационного приёмника

RTCM	Radio Technical Commission for Maritime Services, радиотехническая комиссия морских сервисов
NMEA	National Marine Electronics Association, протокол связи навигационного оборудования
STEC	Slant Total Electron Content, суммарная электронная концентрация
ИКД	интерфейсный контрольный документ
ANTEX	ANTenna Exchange, формат файлов с данными для антенн навигационных приёмников
ITRF	International Terrestrial Reference Frame, международная земная система отсчёта
UEN	Up-East-North, локальная система координат (высота-восток-север)
GPSTk	The GPS Toolkit, библиотека программ для спутниковой навигации
МНК	метод наименьших квадратов
ЦУМП	целочисленное унимодулярное преобразование

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дворкин В. В., Карутин С. Н., Глухов П. Б. Анализ состояния и перспектив развития технологии высокоточного местоопределения по сигналам ГНСС. //Радиотехника, Радиотехника, Москва, 2011. – № 3 – С. 4-13.
2. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования. Издание четвертое, переработанное и дополненное. Под ред. А.И. Перова и В.Н. Харисова. «Радиотехника», Москва, 2010.
3. Соловьев Ю. А. Системы спутниковой навигации. — М.: Эко-Трендз, 2000. — 270 с.
4. Parkinson B.W., Spilker J.J. (Eds.). Global Positioning System: Theory and Applications. Volume I and II. Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 370 L’Enfant Promenade, SW, Washington, DC 20024-2518. 1996.
5. Saeidi, A. Evaluation of Network RTK in southern Ontario, M.Sc. Thesis, York University, 2012.
6. Vollath U., Landau H., Chen X. Network RTK – concept and performance. Proceedings of the GNSS Symposium, Wuhan, China, November 2002.
7. Дворкин В. В., Карутин С. Н., Глухов П. Б., Подкорытов А. Н. Перспективный высокоточный комплекс функционального дополнения глобальных навигационных систем на базе системы дифференциальной коррекции и мониторинга. //Успехи современной радиоэлектроники, Радиотехника, Москва, 2013. – № 1 – С. 23-31.
8. Whitehead M.L., Penno G., Feller W.J., Messinger I., Bertiger W.I., Muellerschoen R.J., Iijma B.A., Piesinger G. A Close Look at Satloc's Real-Time WADGPS System. GPS Solutions, Vol. 2, No. 2, 1998, pp. 46-63.
9. Muellerschoen R.J., Bar-Sever Y.E., Bertiger W.I., Stovers D.A. Decimeter Accuracy. NASA’s Global DGPS for High-precision Users. GPS World. January 2001. Pp. 14-20.
10. Kouba Jan. Guide to using international GNSS service (IGS) products. Geodetic Survey Division. Natural Resources Canada. May 2009. http://igscb.jpl.nasa.gov/components/usage.html.
11. Подкорытов А. Н. Высокоточное определение координат потребителя в абсолютном режиме в глобальных навигационных спутниковых системах с использованием разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений. Информационно-измерительные и управляющие системы. “Радиотехника”, Москва, Т.10, №10, 2012, с.45-51.
12. Mohinder S. Grewal, Angus P. Andrews, Chris G. Bartone. Global navigation satellite systems, inertial navigation, and integration. Third edition. WILEY, 2013.

13. Simsky A. Standalone real-time navigation algorithm for single-frequency ionosphere-free positioning based on dynamic ambiguities (DARTS-SF). ION GNSS 2006, Fort Worth, USA, September 26-29 2006, Session D1.
14. Simsky A. Standalone real-time positioning algorithm based on dynamic ambiguities (DARTS). ION GPS/GNSS 2003, 9-21 September 2003, Portland, OR, - pp.1211-1221.
15. Abdel-salam M. Precise Point Positioning Using Un-Differenced Code and Carrier Phase Observations, Ph.D. Thesis, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, UCGE Report 20229, 2005.
16. Zumberge, J.F., M.B. Heflin, D.C. Jefferson, M.M. Watkins and F.H. Webb. Precise point positioning for the efficient and robust analysis of GPS data from large networks. Journal of Geophysical Research, Vol.102, No.B3, March 10, 1997, pp.5005-5017.
17. Heroux, P. and J. Kouba. GPS Precise Point Positioning with a Difference. Presented at: Geomatics '95, 13-15 June, Ottawa, Canada, 1995, 11pp.
18. Lachapelle G., Cannon M.E., Qiu W. and Varner C. Precise aircraft single-point positioning using GPS post-mission orbits and satellite clock corrections. Journal of Geodesy, Vol.70, 1996, pp.562-571.
19. Anderle, R.J. Point Positioning Concept Using Precise Ephemeris. Satellite Doppler Positioning, Proceedings of the International Geodetic Symposium, 12-14 October, Las Cruces, New Mexico, 1976, pp.47-76.
20. Heroux, P. and Kouba, J. (2001). GPS Precise Point Positioning Using IGS Orbit Products. Physics and Chemistry of the Earth (A), Vol. 26, No. 6-8, pp. 573-578.
21. Kouba J. A guide to using International GPS Service (IGS) products. 2003. http://igscb.jpl.nasa.gov/igscb/resource/pubs.
22. Gao Y., Shen X. A new method for carrier phase based precise point positioning. Navigation, Vol. 49, No.2, 2002, pp. 109-116.
23. Shen X. Improving Ambiguity Convergence in Carrier Phase-based Precise Point Positioning. M.Sc. Thesis, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, UCGE Report 20170, 2002.
24. Подкорытов А. Н. Методы оценивания и компенсации систематических смещений в измерениях псевдодальностей и псевдофаз. Информационно-измерительные и управляющие системы. №8, т.9, 2011г, Радиотехника. - стр.23-30.
25. Поваляев А. А.. Спутниковые радионавигационные системы. Время, показания часов, формирование измерений и определение относительных координат. «Радиотехника», Москва, 2008. – 328 с.

26. Kouba J. A guide to using International GNSS Service (IGS) products. 2009. http://igscb.jpl.nasa.gov/igscb/resource/pubs, http://igscb.jpl.nasa.gov/components/usage.html.
27. Wang M., Gao Y. GPS Un-Differenced Ambiguity Resolution and Validation. ION GNSS 19th International Technical Meeting of the Satellite Division, 26-29 September 2006, Fort Worth, TX, - pp. 292-300.
28. Wang M., Gao Y. An Investigation on GPS Receiver Initial Phase Bias and Its Determination. Proceeding of ION NTM 2007, 22-24 January 2007, San Diego, CA.
29. Ge M., G. Gendt, and M. Rothacher. Integer Ambiguity Resolution for Precise Point Positioning, presented in the VI Hotine-Marussi Symposium of Theoretical and Computational Geodesy: Challenge and Role of Modern Geodesy held in Wuhan China, May 29 - June 2, 2006.
30. Ge M., G. Gendt, M. Rothacher., C. Shi and J. Liu. Resolution of GPS carrier-phase ambiguities in Precise Point Positioning (PPP) with daily observations. Journal of Geodesy, 82, 2008, - pp. 389-399.
31. Mercier, F and D. Laurichesse. Receiver/Payload hardware bias stability requirements for undifferenced widelane ambiguity blocking. Paper presented at: ESA 1st Colloquium, Scientific and Fundamental Aspects of the Galileo Programme, 1-4 October, 2007, Toulouse, France, 12pp.
32. Cai C. Precise Point Positioning Using Dual-Frequency GPS and GLONASS Measurements, M.Sc. Thesis, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, UCGE Report 20291, 2009.
33. Cao W. Multi-frequency GPS and Galileo Kinematic Positioning with Partial Ambiguity Fixing, M.Sc. Thesis, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, UCGE Report 20285, 2009.
34. Dow J. M., Neilan R. E. and Rizos C. The International GNSS Service (IGS) in a Changing Landscape of Global Navigation Satellite System. Journal of Geodesy, 2009, 83, pp. 191-198.
35. Geng J., F. Teferle, C. Shi C, X. Meng, A. Dodson and J. Liu. Ambiguity resolution in precise point positioning with hourly data. GPS Solutions, 2009, 13(4), pp: 263–270.
36. Geng J., X. Meng, F. Teferle, and A. Dodson. Performance of precise point positioning with ambiguity resolution for 1- to 4-hour observation periods. Survey Review, 2010, 42, - pp. 155-165.
37. Mervart L., Z. Lukes, C. Rocken and T. Iwabuchi. Precise Point Positioning With Ambiguity Resolution In Real-Time. Proceedings of the ION GNSS 2008 Meeting, September 2008, Savannah, Georgia.

38. Bertiger W., Desai D. Shailen, Haines B., Harvey N., Moore W. Angelyn, Owen S., Weiss P. Jan. Single receiver phase ambiguity resolution with GPS data. Journal of Geodesy. May 2010, Vol.84, Issue 5, - pp. 327-337.
39. Shi J. Precise Point Positioning Integer Ambiguity Resolution with Decoupled Clocks, Ph.D. Thesis, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, UCGE Report 20367, 2012.
40. Wubbena, G., M. Schmitz, A. Bagge. PPP-RTK: Precise Point Positioning using state-space representation in RTK networks. Proceedings of the ION GNSS 2005, Long Beach, California, USA.
41. Teunissen P. J. G., D. Odijk and B. Zhang. PPP-RTK: Results of CORS network-based PPP with integer ambiguity resolution. Journal of Aeronautics, Astronautics and Aviation, Series A, 2010, Volume 42, No. 4, - pp. 223-230.
42. Odijk D., P. J. G. Teunissen, B. Zhang. Single-Frequency Integer Ambiguity Resolution Enabled GPS Precise Point Positioning. Journal of Surveying Engineering, November 2012, - pp. 193-202.
43. Zhang B., Teunissen P. J.G., Odijk D. A Novel Un-differenced PPP-RTK Concept. The Journal of Navigation, 2011, 64, - pp. 180-191.
44. Teunissen P. J. G. Zero Order Design: Generalized Inverses, Adjustment, the Datum Problem and S-Transformations. Optimization and Design of Geodetic Networks, E.W. Grafarend, F. Sansт (Eds), Springer-Verlag, 1985, - pp. 11-55.
45. P. J. de Jonge. A processing strategy for the application of the GPS in networks. Publications on Geodesy 46, Netherlands Geodetic Commission, Delft, Netherlands, 1998.
46. Laurichesse, D. and F. Mercier. Integer ambiguity resolution on undifferenced GPS phase measurements and its application to PPP. Proceedings of ION-GNSS-2007, September 25-28, Fort Worth, Texas, pp.839-848.
47. Collins, P. Isolating and Estimating Undifferenced GPS Integer Ambiguities. Proceedings of the National Technical Meeting of the Institute of Navigation, San Diego, California, January 28-30, 2008, pp. 720-732.
48. Laurichesse, D, F. Mercier, J-P. Berthias, P. Broca and L. Cerri. "Integer Ambiguity Resolution on Undifferenced GPS Phase Measurements and Its Application to PPP and Satellite Precise Orbit Determination." Navigation, 2009, Vol.56, No.2, pp.135-149.
49. Laurichesse, D. and F. Mercier. Real-time PPP with undifferenced integer ambiguity resolution, experimental results. 23rd International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, Portland, OR, September 21-24, 2010, pp. 2534-2544.
50. CNES The PPP-wizard Project. http://www.ppp-wizard.net/ppp.html.

51. Collins, P., F. Lahaye, P. Héroux and S. Bisnath. "Precise Point Positioning with Ambiguity Resolution using the Decoupled Clock Model." Proceedings of ION-GNSS-2008, Savannah, Georgia, 16-19 September 2008, pp.1315-1322.
52. Collins P., Henton J., Mireault Y., Héroux P., Schmidt M., Dragert H., Bisnath S. Precise Point Positioning for Real-Time Determination of Co-Seismic Crustal Motion. 22nd International Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, Savannah, GA, September 22-25, 2009, pp. 2479-2488.
53. Shi J., Y. Gao. Analysis of the integer property of ambiguity and characteristics of code and phase clocks in PPP using a decoupled clock model. 23rd International technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation, Portland, OR, September 21-24, 2010.
54. Odijk D. Fast precise GPS positioning in the presence of ionospheric delays. Publications on Geodesy 52, Netherlands Geodetic Commission, Delft, Netherlands, 2002.
55. Geng, J., X. Meng, A.H. Dodson and F.N. Teferle. Integer ambiguity resolution in precise point positioning: method comparison. Journal of Geodesy, 2010, Vol.84, pp.569-581.
56. Collins, P., S. Bisnath, F. Lahaye and P. Héroux. "Undifferenced GPS Ambiguity Resolution Using the Decoupled Clock Model and Ambiguity Datum Fixing." Navigation: Journal of the Institute of Navigation, 2010, Vol.57, No.2, Summer, pp.123-135.
57. Глобальная навигационная спутниковая система. ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ (редакция пятая). – М.: КНИЦ, 2002. http://glonass-center.ru/public_w.html
58. Banville S., Collins P., Lahaye F. Concepts for Undifferenced GLONASS Ambiguity Resolution. In proceeding of: ION GNSS 2013, At Nashville, TN.
59. Banville S., Collins P., Lahaye F. GLONASS ambiguity resolution of mixed receiver types without external calibration. GPS Solution, July 2013, Volume 17, Issue 3, - pp.275-282.
60. Shi J., Y. Gao. A fast integer ambiguity resolution method for PPP. 25th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation, Nashville TN, September 17-21, 2012.
61. Teunissen, P. J. G., and Verhagen, S. The GNSS ambiguity ratio-test revisited: a better way of using it. Survey review, 41, 312, April 2009, pp.138-151.
62. Collins P. and S. Bisnath. "Issues in Ambiguity Resolution for Precise Point Positioning," Proceedings of the 24th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2011), Portland, OR, September 2011, pp. 679-687.
63. Bisnath S., Collins P. Recent developments in precise point positioning. Geomatica, Vol.66, No.2, 2012, - pp.375-385.

64. Collins P., F. Lahaye, S. Bisnath. External ionospheric constraints for improved PPP-AR initialization and a generalized local augmentation concept. Proceedings of The Institute of Navigation International Technical Meeting ION GNSS 2012, 17-21 September, Nashville, Tennessee, The Institute of Navigation, pp. 3055-3065.
65. Podkorytov A. N. Precise Point Positioning in GNSS with Ambiguity Resolution and Atmospheric Constraints. 2013 International Siberian Conference on Control and Communication (SIBCON). Proceedings. – Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, September 12-13, 2013. ISBN: 978-1-4799-1060-1.
66. Спутниковая система дифференциальной коррекции Omnistar, http://www.omnistar.com
67. http://www.trimble.com/positioning-services/
68. https://www.smartnetna.com/index.cfm
69. http://www.topconpositioning.com/products/networks/network-products/topnet
70. Сеть станций сбора измерений Can-Net, http://www.can-net.ca/
71. Сервис TERRASTAR, http://www.terrastar.net/services.html
72. Зона покрытия сервиса TERRASTAR, http://www.terrastar.net/coverage.html
73. http://promplace.ru/article_single.php?arc=258
74. http://www.gazprom.ru/press/news/2013/june/article164938/
75. Geng J., F. N. Teferle, X. Meng and A. H. Dodson. “Kinematic precise point positioning at remote marine platforms”, GPS Solutions, September 2010, Volume 14, Issue 4 – pp. 343-350.
76. Kouba, J. “Measuring Seismic Waves Induced by Large Earthquakes with GPS.” Stud. Geophys. Geod., Vol. 47, 2003, pp. 741-755.
77. Kouba, J. “A Possible Detection of the 26 December 2004 Great Sumatra-Andaman Islands Earthquake with Solution Products of the International GNSS Service.” Stud. Geophys. Geod., Vol. 49, 2005, pp. 463-483.
78. Li M., Li W., Fang R., Shi C., Zhao Q. Real-time high-precision earthquake monitoring using single-frequency GPS receivers. GPS Solutions, January 2014.
79. Xu P., Shi C., Fang R., Liu J., Niu X., Zhang Q., Yanagidani T. High-rate precise point positioning (PPP) to measure seismic wave motions: an experimental comparison of GPS PPP with inertial measurement units. Journal of Geodesy, April 2013, Volume 87, Issue 4, pp. 361-372.
80. Dragert, H., M. Schmidt, Y. Lu, K. Wang and Y. Bock. “A Canadian Pilot Project for a GPS Augmented Tsunami Warning System.” Proceedings of the joint CIG/ISPRS Conference on Geomatics for Disaster and Risk Management, Toronto, Ontario, 23-25 May, 2007, 7 pp.
81. Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interfaces. Interface specification IS-GPS-200. Revision D. 7 March 2006.

82. Tolman B., Harris R. B., Gaussiran T., Munton D., Little J., Mach R., Nelsen S., Renfro B., ARL:UT; Schlossberg D., University of California Berkeley. The GPS Toolkit - Open Source GPS Software. Proceedings of the 17th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2004). Long Beach, California. September 2004.
83. GIPSY-OASIS II. How it works…Compiled & end edited by Thierry Gregorius. Department of Geomatics University of Newcastle upon Tyne. October, 1996, http://www.gps.caltech.edu/classes/ge167/file/gipsy-oasisIIHowItWorks.pdf.
84. Kaminski P.G., Bryson A.E. Schmidt S.F. Discrete square root filtering: a survey of current techniques. IEEE Trans., 1971, Dec., AC-16 , № 6, p. 727–735. Русский перевод. Каминский, Брайсон, Шмидт. Обзор современных методов дискретной фильтрации, использующих квадратные корни матриц. «Зарубежная радиоэлектроника», 1973, № 6, стр. 37–53.]
85. Hopfield H. S. Two-Quartic Tropospheric Refractivity Profile for Correcting Satellite Data. Journal of Geophysical Research. 1969. 18: Vol. 74, pp. 4487–4499.
86. Petit G. and Luzum B. (eds.). IERS Conventions (2010). (IERS Technical Note ; 36) Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. 179 pp., ISBN 3-89888-989-6.
87. Першин Д. Ю. Сравнительный анализ моделей тропосферной задержки в задаче определения местоположения высокой точности в спутниковых навигационных системах ГЛОНАСС/GPS. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2009. Том 7, выпуск 1, стр. 84-91.
88. Collins, J. P. Assessment and Development of a Tropospheric Delay Model for Aircraft Users of the Global Positioning System. M.Sc.E. thesis, Department of Geodesy and Geomatics Engineering Technical Report No. 203, University of New Brunswick, Fredericton, New Brunswick, Canada, 1999, 174 pp.
89. Saastamoinen J. Atmospheric Correction for the Troposphere and Stratosphere in Radio Ranging of Satellite. Int. Symp. on the Use of Artificial Satellites for Geodesy. Washington, 1971. Geophysical Monograph Series, Vol. 15, pp. 247–251.
90. Neill A. E. Global Mapping Functions for the Atmosphere Delay of Radio Wavelengths. J. Geophys. Res., 101, pp. 3227-3246.
91. Leandro R. F. Precise Point Positioning with GPS. A new approach for positioning, atmospheric studies, and signal analysis. Geodesy and Geomatics Engineering. Technical report NO.267. April 2009.

92. Wu J.T., Wu S.C., Hajj G.A., Bertiger W.I., Lichten S.M. Effects on antenna orientation on GPS carrier phase. Manuscripta Geodaetica. Vol 18, No. 2, 1993, pp 91-98.
93. Beyerle G. Carrier phase wind-up in GPS reflectometry. GPS Solutions, July 2009, Volume 13, Issue 3, pp. 191-198.
94. Малышев В. В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т., Нестеренко О.П., Федоров А.В.. Под ред. В.В.Малышева. Спутниковые системы мониторинга. Анализ, синтез и управление. В.В.Малышев, – М.: Изд-во МАИ, 2000.
95. McCarthy D. D., Petit G. (eds.) IERS Conventions (2003). IERS Technical Note; No. 32.
96. Библиотека программ GPSTk, http://www.gpstk.org/bin/view/Documentation/WebHome
97. Salazar D., Hernandez-Pajares M., Juan J.M. and J. Sanz. High accuracy positioning using carrier-phases with the open source GPSTk software. 4th. ESA Workshop on Satellite Navigation User Equipment Technologies NAVITEC 2008. Noordwijk. The Netherlands. December 2008.
98. Подкорытов А. Н. Высокоточное определение координат потребителя в глобальных навигационных спутниковых системах с использованием уточненной эфемеридно-временной информации. Вестник Московского авиационного института. №3, т.18, 2011г, МАИ. - стр.233-239.
99. Подкорытов А. Н. Методы оценивания и компенсации систематических смещений в измерениях псевдодальностей и псевдофаз. Информационно-измерительные и управляющие системы. №8, т.9, 2011г, Радиотехника. - стр.23-30.
100. Российская системы дифференциальной коррекции и мониторинга (СДКМ), Высокоточное местоопределение по ГНСС ГЛОНАСС/GPS http://www.sdcm.ru/smglo/staticpages?version=rus&site=inner&title=precisepositioning.
101. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения. – М.: Мир, 1980.
102. А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. Линейная алгебра. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 336 с., стр.118-119.
103. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.
104. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. Москва, авторское электронное издание, 2005.
105. Арженовский С.В., Федосова О.Н. Эконометрика Учебное пособие. - Ростов-на-Дону РГЭУ «РИНХ», 2002. - 102 с, стр. 49
106. Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. - СПб.: Наука, 1997. - 318 с., ил. 53.
107. Kozlov D., Tkachenko M., Tochilin A. Statistical characterization of hardware biases in GPS+GLONASS receivers. Proceedings of ION GPS 2000, pp 817–826.

108. Povalyaev A., Podkorytov A. Ambiguity resolution of phase measurements in Precise Point Positioning working on initial frequencies. GNSS Precise Point Positioning Workshop: Reaching Full Potential. 12-14 June 2013 – Ottawa, Canada.

109. Поваляев А. А., Подкорытов А. Н. К задаче высокоточного определения абсолютных координат в глобальных навигационных спутниковых системах. //Радиотехника, Радиотехника, Москва, 2014. – №1 – С. 15-19.

110. Teunissen P. J. G., Kleusberg (Eds.). GPS for Geodesy. 2nd Edition. Springer Berlin Heidelberg 1998.

111. В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.

112. Grafarend, E., Schaffrin B. Unbiased free net adjustment, Survey Review 22, 1974, pp. 200-218.

113. Grafarend, E., Schaffrin B. Equivalence of estimable quantities and invariants in geodetic networks. ZfV, №11, 1976, pp.485-491.

114. Teunissen P. J. G. The least-squares ambiguities decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation. Journal of Geodesy, 1995, 70, pp. 65-82.

115. Lenstra A. K., Lenstra H. W., Lovasz L. Factoring polynomials with rational coefficients. – Math. Ann., 1982, vol. 261, pp. 515-534.

116. Teunissen P. J. G. GNSS Integer Ambiguity Validation: Overview of Theory and Methods. Proceedings of The Institute of Navigation Pacific PNT 2013 Honolulu, Hawaii, April 23-25, 2013, pp. 673-684.

117. Verhagen S., Teunissen Peter J. G. The ratio test for future GNSS ambiguity resolution. GPS Solutions, October 2013, Volume 17, Issue 4, pp. 535-548.

118. Teunissen, P. J. G., Joosten, P., and Tiberius, C. C. J. M. Geometry-free ambiguity success rates in case of partial fixing. Proceeding of Nat. Tech. Meeting, The Institute of Navigation, Manassas, VA, 1999, pp. 201-210.

119. Дьяконов В. П. MATLAB 7.*/R2006/2007. Самоучитель. — Москва.: «ДМК-Пресс», 2008. — С. 768.

120. Таблица статистических характеристик продуктов международной ГНСС службы IGS, http://igscb.jpl.nasa.gov/components/prods.html.

121. Lannes A., Gratton S. GNSS Networks in Algebraic Graph Theory. Journal of Global Positioning Systems, 2009, Vol. 8, No. 1, pp. 53-75.

122. Lannes A., Teunissen P. J. G. GNSS algebraic structures. Journal of Geodesy. May 2011, Volume 85, Issue 5, pp. 272-290.

123. Харари Ф. Теория графов / Пер. с англ. и предисл. В. П. Козырева. Под ред. Г. П. Гаврилова. Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Линейные комбинации измерений в ГНСС

1. **Ионосферосвободная комбинация кодовых измерений GPS** (здесь и далее используются упрощённые математические модели измерений (2.4)):

$$P_3^{G,j} = \frac{P_1^{G,j}k^G - P_2^{G,j}}{k^G - 1} = \frac{\left(f_1^G\right)^2}{\left(f_1^G\right)^2 - \left(f_2^G\right)^2}P_1^{G,j} - \frac{\left(f_2^G\right)^2}{\left(f_1^G\right)^2 - \left(f_2^G\right)^2}P_2^{G,j} = \frac{77^2 P_1^{G,j} - 60^2 P_2^{G,j}}{77^2 - 60^2} =$$

$$= \frac{77^2\left(R^j + dT_{REC}^G + b_{r,P1}^G - dt_{SAT}^{G,j} - b_{P1}^{j,G} + T^j + I_1^j + \varepsilon_{P1}^G\right)}{77^2 - 60^2} -$$

$$- \frac{60^2\left(R^j + dT_{REC}^G + b_{r,P2}^G - dt_{SAT}^{G,j} - b_{P2}^{j,G} + T^j + \frac{77^2}{60^2}I_1^j + \varepsilon_{P2}^G\right)}{77^2 - 60^2} =$$

$$= \frac{\left(77^2 - 60^2\right)\left(R^j + dT_{REC}^G - dt_{SAT}^{G,j} + T^j\right) + 77^2\left(b_{r,P1}^G - b_{P1}^{j,G} + \varepsilon_{P1}^G\right) - 60^2\left(b_{r,P2}^G - b_{P2}^{j,G} + \varepsilon_{P2}^G\right)}{77^2 - 60^2} =$$

$$= R^j + dT_{REC}^G - dt_{SAT}^{G,j} + T^j + \frac{77^2 b_{r,P1}^G - 77^2 b_{P1}^{j,G} + 77^2\varepsilon_{P1}^G - 60^2 b_{r,P2}^G + 60^2 b_{P2}^{j,G} - 60^2\varepsilon_{P2}^G}{77^2 - 60^2} =$$

$$= R^j + dT_{REC}^G - dt_{SAT}^{G,j} + T^j + b_{r,P3}^G - b_{P3}^{j,G} + \varepsilon_{P3}^G, \tag{A.1}$$

где $b_{r,P3}^G = \frac{77^2 b_{r,P1}^G - 60^2 b_{r,P2}^G}{77^2 - 60^2}$, $b_{P3}^{j,G} = \frac{77^2 b_{P1}^{j,G} - 60^2 b_{P2}^{j,G}}{77^2 - 60^2}$, $\varepsilon_{P3}^G = \frac{77^2\varepsilon_{P1}^G - 60^2\varepsilon_{P2}^G}{77^2 - 60^2}$.

2. **Ионосферосвободная комбинация псевдофазовых измерений GPS**:

$$L_3^{G,j} = \frac{L_1^{G,j}k^G - L_2^{G,j}}{k^G - 1} = \frac{\left(f_1^G\right)^2}{\left(f_1^G\right)^2 - \left(f_2^G\right)^2}L_1^{G,j} - \frac{\left(f_2^G\right)^2}{\left(f_1^G\right)^2 - \left(f_2^G\right)^2}L_2^{G,j} = \frac{77^2 L_1^{G,j} - 60^2 L_2^{G,j}}{77^2 - 60^2} =$$

$$= \frac{77^2\left(R^j + dT_{REC}^G + b_{r,L1}^G - dt_{SAT}^{G,j} - b_{L1}^{j,G} + T^j - I_1^j - \lambda_1^G N_1^{G,j} + \varepsilon_{L1}^G\right)}{77^2 - 60^2} -$$

$$- \frac{60^2\left(R^j + dT_{REC}^G + b_{r,L2}^G - dt_{SAT}^{G,j} - b_{L2}^{j,G} + T^j - \frac{77^2}{60^2}I_1^j - \lambda_2^G N_2^{G,j} + \varepsilon_{L2}^G\right)}{77^2 - 60^2} =$$

$$= \frac{\left(77^2 - 60^2\right)\left(R^j + dT_{REC}^G - dt_{SAT}^{G,j} + T^j\right) + 77^2\left(b_{r,L1}^G - b_{L1}^{j,G} - \lambda_1^G N_1^{G,j} + \varepsilon_{L1}^G\right) - 60^2\left(b_{r,L2}^G - b_{L2}^{j,G} - \lambda_2^G N_2^{G,j} + \varepsilon_{L2}^G\right)}{77^2 - 60^2} =$$

$$= R^j + dT_{REC}^G - dt_{SAT}^{G,j} + T^j + b_{r,L3}^G - b_{L3}^{j,G} - \lambda_3^G N_3^{G,j} + \varepsilon_{L3}^G, \tag{A.2}$$

где $b_{r,L3}^G = \frac{77^2 b_{r,L1}^G - 60^2 b_{r,L2}^G}{77^2 - 60^2}$, $b_{L3}^{j,G} = \frac{77^2 b_{L1}^{j,G} - 60^2 b_{L2}^{j,G}}{77^2 - 60^2}$, $\varepsilon_{L3}^G = \frac{77^2\varepsilon_{L1}^G - 60^2\varepsilon_{L2}^G}{77^2 - 60^2}$,

$$\lambda_3^G N_3^{G,j} = \frac{77^2\lambda_1^G N_1^{G,j} - 60^2\lambda_2^G N_2^{G,j}}{77^2 - 60^2} = \frac{77 \cdot 60\lambda_2^G N_1^{G,j} - 60^2\lambda_2^G N_2^{G,j}}{77^2 - 60^2} = \frac{60\lambda_2^G\left(77N_1^{G,j} - 60N_2^{G,j}\right)}{77^2 - 60^2},$$

$$\lambda_3^G = \frac{60\lambda_2^G}{77^2 - 60^2} = \frac{77\lambda_1^G}{77^2 - 60^2} = \frac{\lambda_1^G\lambda_2^G}{77\lambda_2^G - 60\lambda_1^G} \approx 0.00629\text{м}, \quad N_3^{G,j} = 77N_1^{G,j} - 60N_2^{G,j}.$$

3. Комбинация псевдофазовых измерений на разностной длине волны GPS (widelane phase combination):

$$L_4^{G,j}=\frac{f_1^G}{f_1^G-f_2^G}L_1^{G,j}-\frac{f_2^G}{f_1^G-f_2^G}L_2^{G,j}=\frac{77L_1^{G,j}-60L_2^{G,j}}{17}=$$

$$=\frac{77\left(R^j+dT_{REC}^G+b_{r,L1}^G-dt_{SAT}^{G,j}-b_{L1}^{j,G}+T^j-I_1^j-\lambda_1^G N_1^{G,j}+\varepsilon_{L1}^G\right)}{17}-$$

$$-\frac{60\left(R^j+dT_{REC}^G+b_{r,L2}^G-dt_{SAT}^{G,j}-b_{L2}^{j,G}+T^j-\dfrac{77^2}{60^2}I_1^j-\lambda_2^G N_2^{G,j}+\varepsilon_{L2}^G\right)}{17}=$$

$$=R^j+dT_{REC}^G-dt_{SAT}^{G,j}+T^j+\frac{\left(\dfrac{77^2}{60}-77\right)I_1^j+77\left(b_{r,L1}^G-b_{L1}^{j,G}-\lambda_1^G N_1^{G,j}+\varepsilon_{L1}^G\right)-60\left(b_{r,L2}^G-b_{L2}^{j,G}-\lambda_2^G N_2^{G,j}+\varepsilon_{L2}^G\right)}{17}=$$

$$=R^j+dT_{REC}^G-dt_{SAT}^{G,j}+T^j+\frac{77}{60}I_1^j+b_{r,L4}^G-b_{L4}^{j,G}-\frac{1}{17}\left(77\lambda_1^G N_1^{G,j}-60\lambda_2^G N_2^{G,j}\right)+\varepsilon_{L4}^G=$$

$$=R^j+dT_{REC}^G-dt_{SAT}^{G,j}+T^j+\frac{77}{60}I_1^j+b_{r,L4}^G-b_{L4}^{j,G}-\lambda_4^G N_4^{G,j}+\varepsilon_{L4}^G, \tag{A.3}$$

где $\lambda_4^G=\dfrac{77\lambda_1^G}{17}=\dfrac{60\lambda_2^G}{17}\approx 0.86191\text{м}$, $N_4^{G,j}=N_1^{G,j}-N_2^{G,j}$, $b_{r,L4}^G=\dfrac{77b_{r,L1}^G-60b_{r,L2}^G}{17}$,
$b_{L4}^{j,G}=\dfrac{77b_{L1}^{j,G}-60b_{L2}^{j,G}}{17}$, $\varepsilon_{L4}^G=\dfrac{77\varepsilon_{L1}^G-60\varepsilon_{L2}^G}{17}$.

4. Комбинация кодовых измерений на суммарной длине волны GPS (narrowlane code combination):

$$P_{4(6)}^{G,j}=\frac{f_1^G}{f_1^G+f_2^G}P_1^{G,j}+\frac{f_2^G}{f_1^G+f_2^G}P_2^{G,j}=\frac{77P_1^{G,j}+60P_2^{G,j}}{137}=$$

$$=\frac{77\left(R^j+dT_{REC}^G+b_{r,P1}^G-dt_{SAT}^{G,j}-b_{P1}^{j,G}+T^j+I_1^j+\varepsilon_{P1}^G\right)}{137}+$$

$$+\frac{60\left(R^j+dT_{REC}^G+b_{r,P2}^G-dt_{SAT}^{G,j}-b_{P2}^{j,G}+T^j+\dfrac{77^2}{60^2}I_1^j+\varepsilon_{P2}^G\right)}{137}=$$

$$=R^j+dT_{REC}^G-dt_{SAT}^{G,j}+T^j+\frac{\left(77+\dfrac{77^2}{60}\right)I_1^j+77\left(b_{r,P1}^G-b_{P1}^{j,G}+\varepsilon_{P1}^G\right)+60\left(b_{r,P2}^G-b_{P2}^{j,G}+\varepsilon_{P2}^G\right)}{137}=$$

$$=R^j+dT_{REC}^G-dt_{SAT}^{G,j}+T^j+\frac{77}{60}I_1^j+b_{r,P4(6)}^G-b_{P4(6)}^{j,G}+\varepsilon_{P4(6)}^G, \tag{A.4}$$

где $b_{r,P4(6)}^G=\dfrac{77b_{r,P1}^G+60b_{r,P2}^G}{137}$, $b_{P4(6)}^{j,G}=\dfrac{77b_{P1}^{j,G}+60b_{P2}^{j,G}}{137}$, $\varepsilon_{P4(6)}^G=\dfrac{77\varepsilon_{P1}^G+60\varepsilon_{P2}^G}{137}$.

5. Ионосферосвободная кодово-фазовая комбинация измерений Мельбурна-Вуббена (Melbourne-Wubbena combination):

$$A_4^{G,j}=\frac{77L_1^{G,j}-60L_2^{G,j}}{17}-\frac{77P_1^{G,j}+60P_2^{G,j}}{137}=L_4^{G,j}-P_{4(6)}^{G,j}=$$
$$=R^j+dT_{REC}^G-dt_{SAT}^{G,j}+T^j+\frac{77}{60}I_1^j+b_{r,L4}^G-b_{L4}^{j,G}-\lambda_4^GN_4^{G,j}+\varepsilon_{L4}^G-$$
$$-\left(R^j+dT_{REC}^G-dt_{SAT}^{G,j}+T^j+\frac{77}{60}I_1^j+b_{r,P4(6)}^G-b_{P4(6)}^{j,G}+\varepsilon_{P4(6)}^G\right)=$$
$$=\frac{77}{17}b_{r,L1}^G-\frac{60}{17}b_{r,L2}^G-\frac{77}{17}b_{L1}^{j,G}+\frac{60}{17}b_{L2}^{j,G}+\frac{77}{17}\varepsilon_{L1}^G-\frac{60}{17}\varepsilon_{L2}^G-\frac{77\lambda_1^G}{17}N_4^{G,j}-$$
$$-\left(\frac{77}{137}b_{r,P1}^G+\frac{60}{137}b_{r,P2}^G+\frac{77}{137}b_{P1}^{j,G}+\frac{60}{137}b_{P2}^{j,G}+\frac{77}{137}\varepsilon_{P1}^G+\frac{60}{137}\varepsilon_{P2}^G\right)=$$
$$=b_{r,A4}^G-b_{A4}^{j,G}-\lambda_4^GN_4^{G,j}+\varepsilon_{A4}^G, \qquad (A.5)$$

где $b_{r,A4}^G=\frac{77}{17}b_{r,L1}^G-\frac{60}{17}b_{r,L2}^G-\frac{77}{137}b_{r,P1}^G-\frac{60}{137}b_{r,P2}^G$, $b_{A4}^{j,G}=\frac{77}{17}b_{L1}^{j,G}-\frac{60}{17}b_{L2}^{j,G}-\frac{77}{137}b_{P1}^{j,G}-\frac{60}{137}b_{P2}^{j,G}$,
$\varepsilon_{A4}^G=\frac{77}{17}\varepsilon_{L1}^G-\frac{60}{17}\varepsilon_{L2}^G-\frac{77}{137}\varepsilon_{P1}^G-\frac{60}{137}\varepsilon_{P2}^G$.