На правах рукописи

РЕЙ ЧЖУНБУМ

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ОТСЕКОВ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ЖИДКОСТЬЮ

Специальности:
01.02.06-«Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»
05.07.03-«Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

МОСКВА - 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) »

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор, **Шклярчук Федор Николаевич**

Научный консультант: **Тютюнников Николай Петрович,** доктор технических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник Института прикладной механики РАН.

Официальные оппоненты: **Балакирев Юрий Георгиевич,** доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Центрального научно-исследовательского института машиностроения.

Антуфьев Борис Андреевич , доктор технических наук, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), главный научный сотрудник

Ведущая организация: **НИИ специального машиностроения МГТУ им. Н.Э.Баумана**

Защита состоится «11» декабря 2013 года в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 при ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу 125993, г.Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке «Московского авиационного института (национального исследовательского университета)» по адресу 125993, г.Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4.

Автореферат разослан «   » ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Федотенков Г.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Тонкостенные конструкции с полостями, частично заполненными жидкостью, широко используются в различных областях машиностроения и строительства сооружений. Это – нефтеналивные суда (танкеры), авто – и железнодорожные цистерны, самолеты, жидкостные ракеты, космические аппараты, аппараты химического производства, нефтехранилища, водонапорные башни, пр. Наличие тяжелой жидкости в подвижных полостях (баках) тонкостенных конструкций оказывает большое влияние на их динамические характеристики и на динамические нагрузки.

Для регулярных тонкостенных конструкций большого удлинения с отсеками, частично заполненными жидкостью, например таких как танкер, крыло и фюзеляж самолета, корпус жидкостной ракеты, при практических расчетах продольных, поперечных и изгибно–крутильных колебаний часто используются балочные модели, в которых относительное движение жидкости в подвижных и упругих полостях моделируется эквивалентными механическими осцилляторами.

Для больших составных осесимметричных тонкостенных конструкций, образованных из тонких упругих оболочек вращения с жидкостью или без жидкости, соединенных между собой упругими шпангоутами с упруго присоединенными к ним грузами, при расчете осесимметричных и неосесимметричных колебаний приходится использовать метод подконструкций (отсеков). Конструкция поперечными сечениями делится на составные части – подконструкций, в качестве которых можно использовать конструктивные модули – подвесные баки и грузы, несущие баки, отсеки различного типа и пр.

Упругодинамические характеристики отдельных отсеков в виде оболочек вращения могут быть определены аналитически (например, для оболочек простой формы и постоянной толщины) или численно (для оболочек сложной формы). Желательно, чтобы эти расчетные характеристики можно было проверить путем сравнения с экспериментальными результатами на отдельных отсеках.

Уравнения динамики составной упругой конструкции получаются путем синтеза упругодинамических характеристик отдельных подконструкций. Метод подконструкций (отсеков) является многовариантным как в плане определения характеристик отдельных отсеков, так и выполнения условий их сопряжения. При этом недостаточно исследованным является вопрос о влиянии на динамические характеристики системы формы поперечных сечений соединительных шпангоутов и эксцентриситетов их соединения с оболочками. Обычно считается, что кольцевой шпангоут соединяется с оболочками на одной линии или в упрощенном варианте шпангоут заменяется "упругой" линией.

Тема диссертации, посвященной разработке метода отсеков в приложении к динамике составных осесимметричных тонкостенных конструкций с баками, содержащими жидкость, является актуальной.

Целью работы является:

- разработка конечно-элементной модели в перемещениях для расчета осесимметричных и неосесимметричных колебаний ортотропных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью, с учетом предварительного осесимметричного напряженно-деформированного состояния.
- разработка метода отсеков для расчета колебаний составных тонкостенных конструкций в виде оболочек вращения с жидкостью и без жидкости, соединенных круговыми шпангоутами с произвольными поперечными сечениями с учетом эксцентриситетов соединений.

Научная новизна заключается в следующем:

- разработан новый вариант метода конечных элементов (МКЭ) в перемещениях для расчета осесимметричных и неосесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью;
- перемещения жидкости в тонком слое, ограниченном узким кольцевым КЭ оболочки, точно удовлетворяют уравнению неразрывности, условию безотрывности на поверхности оболочки, уравнениям движения в радиальном и окружном направлениях и в итоге выражаются через осевое перемещение жидкости, которое аппроксимируется асимптотически "подходящей" функцией радиальной координаты и линейной функцией по толщине слоя;
- получены матрицы присоединенных масс жидкости для осесимметричных и неосесимметричных колебаний оболочки вращения для обобщенных координат ее КЭ-модели (амплитудные значения осевого, радиального и окружного перемещений и угла поворота нормали в меридиональной плоскости);
- представлен алгоритм формирования уравнений колебаний составной осесимметричной конструкции по методу отсеков с использованием упругодинамических характеристик отдельных отсеков.

Практическая ценность диссертации состоит в разработанных с необходимыми обоснованиями алгоритмах МКЭ в перемещениях для расчета гидроупругих колебаний ортотропных оболочек вращения (баков, отсеков) и алгоритмов метода отсеков (подконструкций) для расчета колебаний составных осесимметричных тонкостенных конструкций с соединительными шпангоутами.

Алгоритм является эффективным с точки зрения точности и времени вычислений и пригоден для практических расчетов реальных конструкций. Для вычислений необходимы только стандартные программы линейной алгебры матриц.

Достоверность полученных результатов и выводов обосновывается строгостью и общностью математических формулировок и решений, оценками точности численных решений путем сравнения с точными решениями в отдельных случаях и с численными и экспериментальными результатами других авторов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Международных конференциях "Инновации в авиации и космонавтике", 2012 (МАИ, 17-20 апреля 2012 г.); 2013 (МАИ, 16-18 апреля 2013г.); на Международном XIX-ом симпозиуме "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" имени А.Г.Горшкова (Ярополец, 18-22 февраля 2013г.).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 6-ти печатных работах из которых 3- в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Объем работы. Диссертация состоит из введения четырех глав, заключения и списка использованных источников из 129 наименований. Общий объем диссертации 138 страниц машинописного текста, 43 рисунков, 16 таблиц.

Краткое содержание работы

В введении дан анализ современного состояния исследований по теме диссертации. Обсуждаются используемые методы расчета упругих колебаний тонкостенных конструкций с полостями (баками), частично заполненными жидкостью.

Отмечаются ученые, внесшие большой вклад в разработку теории и методов расчета колебаний твердых и упругих тел с полостями, содержащими жидкость: Н.Е. Жуковский, К.С.Колесников, Н.Н.Моисеев, Б.И.Рабинович, В.В.Румянцев, Р.Е.Лампер, И.А.Луковский, Ю.Г.Балакирев, В.П.Шмаков, C.Stokes, H.N.Abramson, H.F.Bauer, Y.W.Miles и др.

Обсуждаются работы, в которых предложены и разработаны различные приближенные, вариационные и численные методы расчета колебаний упругих оболочек с жидкостью: методы Ритца, Бубнова – Галеркина, конечных разностей; коллокаций, конечных и граничных элементов, а также методы сведения пространственных задач о гидроупругих колебаниях оболочек к обыкновенным дифференциальным уравнениям и их численному интегрированию.

Отмечаются решения частных задач гидроупругости для конкретных форм оболочек(в том числе – точные решения), основанные на безмоментной, полубезмоментной и моментной теориях тонких оболочек.

Особое внимание уделяется работам, в которых рассматриваются различные варианты МКЭ для расчета колебаний оболочек с жидкостью и метода подконструкций для расчета больших составных конструкций.

На основании проведенного анализа состояния вопросов, близких к теме диссертации, сформулирована цель исследования. Изложено краткое содержание работы по главам.

В первой главе получены редуцированные уравнения колебаний отсека как подконструкции. Пусть $\mathbf{q}$ представляет вектор обобщенных координат свободного отсека, для которого кинетическая и потенциальная энергии и вариация работы внешних сил, а также уравнения движения, например, на основании МКЭ записываются в виде

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q}, \quad \delta A = \delta\mathbf{q}^T\mathbf{Q};$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}. \tag{1}$$

Перегруппируем вектор $\mathbf{q}$ и представим его в виде двух составляющих: $\mathbf{q}_I$ - вектор обобщенных координат, представляющих перемещения границ отсека, по которым он соединяется с другими частями конструкции; $\mathbf{q}_{II}$ - вектор обобщенных координат, представляющих перемещения внутренних узлов отсека. Тогда

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_{II} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_I \\ \mathbf{Q}_{II} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Так как масса тонкостенной оболочки мала, то при "медленных" колебаниях отсека в составе конструкции (как системы отсеков), перемещения, характеризуемые вектором $\mathbf{q}_{II}$ будем считать квазистатическими. Тогда, полагая $\mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{q}}_{II} \approx 0,\ \mathbf{M}_{21}\ddot{\mathbf{q}}_{I} \approx 0,\quad \mathbf{M}_{22}\ddot{\mathbf{q}}_{II} \approx 0,\quad \mathbf{Q}_{II} \approx 0$, будем иметь

$$\mathbf{q}_{II} = \mathbf{S}\mathbf{q}_I, \qquad \mathbf{S} = -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{\ \ 2} \tag{3}$$

С учетом инерции "квазистатического" движения (3) получим редуцированную систему:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_I^T\mathbf{M}_I\dot{\mathbf{q}}_I, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\mathbf{q}_I^T\mathbf{K}\mathbf{q}_I, \qquad \delta A = \delta\mathbf{q}_I^T\mathbf{Q}^*;$$

$$\mathbf{M}_I\ddot{\mathbf{q}}_I + \mathbf{K}_I\mathbf{q}_I = \mathbf{Q}_I^*, \qquad \mathbf{Q}_I^* = \mathbf{Q}_{\ I} - \mathbf{S}\mathbf{Q}\ \ ; \tag{4}$$

$$\mathbf{M}_I = \mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{12}\mathbf{S} + (\mathbf{M}_{12}\mathbf{S})^T + \mathbf{S}^T\mathbf{M}_{22}\mathbf{S}, \qquad \mathbf{K}_I = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}.$$

В случае, когда s низших собственных частот колебаний закрепленного отсека (при $\mathbf{q}_I = 0$) лежат в диапазоне рассматриваемых частот колебаний составной конструкции в целом, то (3) уточним как

$$\mathbf{q}_{II} = \mathbf{S}\mathbf{q}_I + \sum_{\nu=1}^{s} f_\nu \mathbf{Y}_\nu, \tag{5}$$

где f_ν - нормальные координаты, представляющие движения по s собственным формам колебаний (векторам $\mathbf{Y}_\nu$) закрепленного отсека, которые получаются из решения следующей задачи:

$$\mathbf{q}_I = 0, \quad \mathbf{q}_{II} = \mathbf{Y}\sin\omega t; \tag{6}$$

$$\left[\mathbf{K}_{22} - \omega^2\mathbf{M}_{22}\right]\mathbf{Y} = 0 \to \omega_\nu^2, \mathbf{Y}_\nu, \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

В этом случае выражения $T, \Pi, \delta A$ (1) для редуцированной подконструкции (отсека) с учетом условий ортогональности собственных векторов $\mathbf{Y}_\nu$ записываются в виде:

$$T = \frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{q}}_I^T\mathbf{M}_I\dot{\mathbf{q}}_I + 2\dot{\mathbf{q}}_I^T\sum_{\nu=1}^{s}\mathbf{M}_\nu \dot{f}_\nu + \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \dot{f}_\nu^2\right], \tag{7}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[\mathbf{q}_I^T\mathbf{K}_I\mathbf{q}_I + \sum_{\nu=1}^{s} k_\nu f_\nu^2\right], \quad \delta A = \delta\mathbf{q}_I^T\mathbf{Q}_I^* + \sum_{\nu}\delta f_\nu F_n;$$

$$m_\nu = \mathbf{Y}_\nu^T\mathbf{M}_{22}\mathbf{Y}_\nu, \quad k_\nu = \mathbf{Y}_\nu^T\mathbf{K}_{22}\mathbf{Y}_\nu = m_\nu\omega_\nu^2, \quad \mathbf{M}_\nu = \left(\mathbf{M}_{12} + \mathbf{S}^T\mathbf{M}_{22}\right)\mathbf{Y}_\nu, \quad F_n = \mathbf{Y}_n^T\mathbf{Q}_{II}.$$

Колебания осесимметричной конструкции по одной из гармоник ряда Фурье в окружном направлении в поперечном сечении оболочки вращения или на окружности кольцевого шпангоута характеризуются осевым, радиальным и окружным перемещениями, а также углом поворота нормали в меридиональной плоскости, которые, соответственно, распределяются как $\xi\cos n\theta,$ $\eta\cos n\theta,$ $V\sin n\theta$ и $\vartheta\cos n\theta$ при $n = 0, 1, 2, \ldots.$

Амплитудные значения этих функций на контактных окружностях (границах отсека) принимаются за основные обобщенные координаты, образующие вектор $\mathbf{q}_I$.

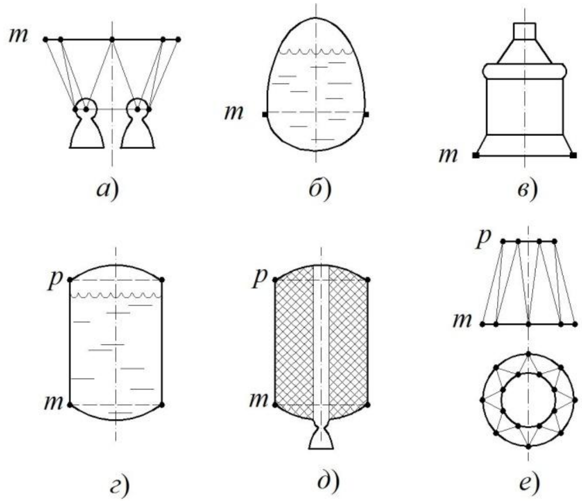


Рис.1

Некоторые отсеки осесимметричной конструкции типа ракеты-носителя показаны на рис.1. Векторы основных обобщенных координат таких отсеков, соединенных с несущим телом в сечении m (рис.1,*а,б,в*) или в сечениях m и p (рис.1,*г,д,е*), соответственно будут:

$$\mathbf{q}_I = \begin{bmatrix} \xi_m & \eta_m & \vartheta_m & V_m \end{bmatrix}^T; \tag{8}$$

$$\mathbf{q}_I = \begin{bmatrix} \xi_m & \eta_m & \vartheta_m & V_m & \xi_p & \eta_p & \vartheta_p & V_p \end{bmatrix}^T;$$

в случае осесимметричных продольно радиальных колебаний ($n = 0$) следует опустить V_m и V_p.

Таким образом для осесимметричных отсеков, как подконструкций, при фиксированном n размерность вектора $\mathbf{q}_I$ сравнительно невелика; к числу компонент $\mathbf{q}_I$ могут добавиться еще некоторые компоненты в других сечениях, если в них присоединяются дополнительные отсеки или подвесные блоки.

Во второй главе предложен оригинальный вариант конечно-элементной модели для расчета колебаний тонких ортотропных упругих оболочек вращения с учетом предварительного осесимметричного напряженно-деформированного состояния с усилиями $N_s^0(s)$, $N_\theta^0(s)$ и перемещениями $u^0(s)$, $w^0(s)$ с целью использования его для расчета колебаний составных оболочек вращения, содержащих жидкость и имеющих дискретно расположенные круговые шпангоуты с поперечным сечением произвольной формы.

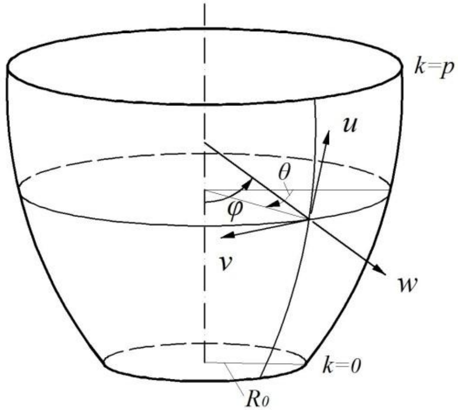


Рис.2

Перемещения и деформации срединной поверхности, углы поворота нормали и изменения кривизн оболочки вращения (рис.2) для n-ой гармоники разложения их в ряды Фурье по окружной координате записываются в виде

$$\left\{u, w, \varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \vartheta_s, \kappa_s, \kappa_\theta\right\} = \left\{U, W, \bar{\varepsilon}_s, \bar{\varepsilon}_\theta, \bar{\vartheta}_s, \bar{\kappa}_s, \bar{\kappa}_\theta\right\} \cos n\theta, \tag{9}$$

$$\left\{v, \gamma_{s\theta}, \vartheta_\theta, \kappa_{s\theta}\right\} = \left\{V, \bar{\gamma}_{s\theta}, \bar{\vartheta}_\theta, \bar{\kappa}_{s\theta}\right\} \sin n\theta; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

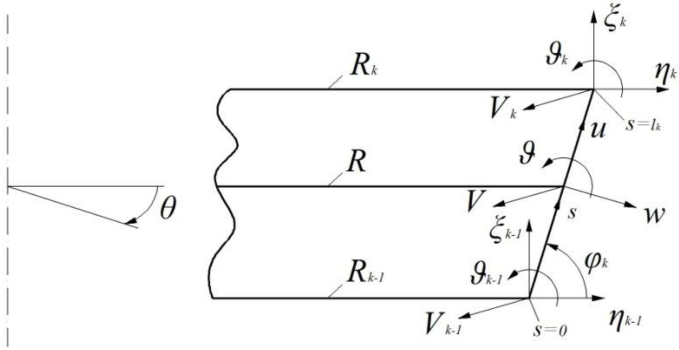


Рис.3

В качестве КЭ рассматриваются узкие кольцевые конические полоски оболочки (рис.3), т.е. меридиан оболочки аппроксимируется кусочно-линейной функцией; $R = R_{k-1}\left(1 - {}^{s}\!/_{l_k}\right) + R_k\left({}^{s}\!/_{l_k}\right)$.

Потенциальная энергия деформации кольцевой конической полоски ортотропной оболочки k-го КЭ шириной l_k с учетом (9) записывается в виде

$$\Pi_o^{(k)} = \frac{1}{2}\delta_n \pi \int_0^{l_k} \Big[B_s \bar{\varepsilon}_s^2 + 2B_s \mu_\theta \bar{\varepsilon}_s \bar{\varepsilon}_\theta + B_\theta \bar{\varepsilon}_\theta^2 + B_{s\theta} \bar{\gamma}_{s\theta}^2 +$$

$$+ D_s \bar{\kappa}_s^2 + 2D_s \mu_\theta \bar{\kappa}_s \bar{\kappa}_\theta + D_\theta \bar{\kappa}_\theta^2 + D_{s\theta} \bar{\kappa}_{s\theta}^2 + N_s^0 \bar{\vartheta}_s^2 + N_\theta^0 \bar{\vartheta}_\theta^2 \Big] R ds, \quad (10)$$

где $\delta_n = 2$ при $n = 0$, $\delta_n = 1$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$;

$B_s, B_\theta, B_{s\theta}$ – жесткости оболочки на растяжение и сдвиг в срединной поверхности, а $D_s, D_\theta, D_{s\theta}$ – на изгиб и кручение.

Амплитудные значения деформаций и изменений кривизн выражаются через U, W, V на основании теории Кирхгофа-Лява, а последние аппроксимируются степенными функциями меридиональной координаты s с неизвестными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_8$:

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 s, \quad W = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3, \quad V = \alpha_7 + \alpha_8 s. \quad (11)$$

В результате (10) записывается в матричном виде:

$$\Pi_o^{(k)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{K}_\alpha^{(k)} \boldsymbol{\alpha}; \quad \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_8 \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_\alpha^{(k)} = \delta_n \pi \int_0^{l_k} \Big[B_s \boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s^T + B_s \mu_\theta \left(\boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_\theta^T + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \right) + \cdots N_\theta^0 \boldsymbol{\vartheta}_\theta \boldsymbol{\vartheta}_\theta^T \Big] R ds$$

-матрица жесткости k-го КЭ для вектора $\boldsymbol{\alpha}$. Здесь использовались следующие преобразования (на примере $\bar{\varepsilon}_s$):

$$\bar{\varepsilon}_s = \frac{dU}{ds} - \vartheta_s^0 \frac{dW}{ds} = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \varepsilon_{s,i} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\varepsilon}_s; \quad \bar{\varepsilon}_s^2 = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \boldsymbol{\alpha}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \{\varepsilon_{s,i}\};$$

$$\varepsilon_{s,1} = \varepsilon_{s,3} = \varepsilon_{s,7} = \varepsilon_{s,8} = 0, \quad \varepsilon_{s,2} = 1, \quad \varepsilon_{s,4} = -\vartheta_s^0, \quad \varepsilon_{s,5} = -2\vartheta_s^0 s, \quad \varepsilon_{s,6} = -3\vartheta_s^0 s^2.$$

Далее с помощью соотношений

$$U = \xi c_k + \eta s_k, \quad W = -\xi s_k + \eta c_k, \quad \text{где} \quad s_k = \sin\varphi_k, \quad c_k = \cos\varphi_k$$

осуществляется преобразование к основным обобщенным координатам КЭ, представляющим осевое, радиальное и окружное перемещения и угол поворота $\vartheta_s \to \vartheta$ на его краях $k-1 (s = 0)$ и $k (s = l_k)$, рис.2:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{G}_k \mathbf{q}_k; \quad \mathbf{q}^{(k)} = [\xi_{k-1} \quad \eta_{k-1} \quad \vartheta_{k-1} \quad V_{k-1} \quad \xi_k \quad \eta_k \quad \vartheta_k \quad V_k]^T. \quad (13)$$

С учетом (13) потенциальная энергия КЭ (12) записывается в виде

$$\Pi_o^{(k)} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{(k)^T} \mathbf{K}_o^{(k)} \mathbf{q}^{(k)}, \quad \mathbf{K}_o^{(k)} = \mathbf{G}_k^T \mathbf{K}_\alpha^{(k)} \mathbf{G}_k \quad (14)$$

Аналогичным образом получается кинетическая энергия оболочки k-го КЭ:

$$T_o^{(k)} = \frac{1}{2}\delta_n\pi\int_0^{l_k}\rho_o h\left(\dot{U}^2+\dot{W}^2+\dot{V}^2\right)Rds = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{(k)^T}\mathbf{M}_o^{(k)}\dot{\mathbf{q}}^{(k)}. \qquad (15)$$

Кроме этого, для матрицы инерции получено более простое приближенное выражение при использовании в (15) линейной аппроксимации $W = W_{k-1}\left(1-{}^{s}\!/_{l_k}\right)+W_k\left({}^{s}\!/_{l_k}\right)$.

Для осесимметричных ($n=0$) продольно-радиальных колебаний: $V=0,\quad \alpha_7=\alpha_8=0,$ в выражении $\mathbf{q}^{(k)}$ опускаются V_{k-1}, V_k и, соответственно, изменяются матрицы $\mathbf{G}_k, \mathbf{K}_o^{(k)}, \mathbf{M}_o^{(k)}$.

В КЭ-модели полюс оболочки вращения, где $R \to 0$, заменяется круглой пластинкой или отверстием достаточно малого радиуса R_0.

Путем суммирования (14), (15) по всем КЭ получаются выражение потенциальной и кинетической энергий оболочки:

$$\Pi_o = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}_o\mathbf{q}, \quad T_o = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{M}_o\mathbf{q} \qquad (16)$$

В качестве примера рассмотрены собственные осесимметричные ($n=0$) и неосесимметричные ($n=1,2,\ldots,8$) колебания полусферической оболочки постоянной толщины для трех вариантов граничных условий на краю оболочки, при которых имеются точные решения. Выполнены сравнения результатов расчета по МКЭ с точными значениями для нескольких низших собственных частот: при различных толщинах оболочки (${}^{R_c}\!/_{h} = 100, 400, 800$); при различном числе конечных элементов с одинаковыми длинами образующей (200, 400, 800); при различных радиусах пластинки или отверстия, заменяющих полюс (${}^{R_0}\!/_{R_c} = 0.02, 0.05$).

Результаты расчета для всех рассмотренных вариантов граничных условий и чисел *n* при различных комбинациях указанных выше параметров обладают высокой точностью.

Замена согласованных матриц инерции КЭ оболочки их приближенными выражениями, полученными при аппроксимации нормальных перемещений КЭ по их длине линейными функциями, а также замена полюса оболочки плоским дном или отверстием достаточно малого радиуса R_0 практически (с точностью до четырех значащих цифр) не влияют на расчетные значения собственных частот.

Третья глава посвящена разработке КЭ-модели для расчета осесимметричных и неосесимметричных колебаний упругих оболочек вращения, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью. В качестве КЭ рассматривается узкая кольцевая коническая полоска оболочки вместе с содержащимся в ней тонким слоем жидкости. Гидродинамическая задача о движении жидкости в упругой оболочке решается в перемещениях. При этом необходимо, чтобы перемещения жидкости удовлетворяли уравнению неразрывности и кинематическому граничному условию совместности нормальных перемещений жидкости и упругой оболочки при $r = R$.

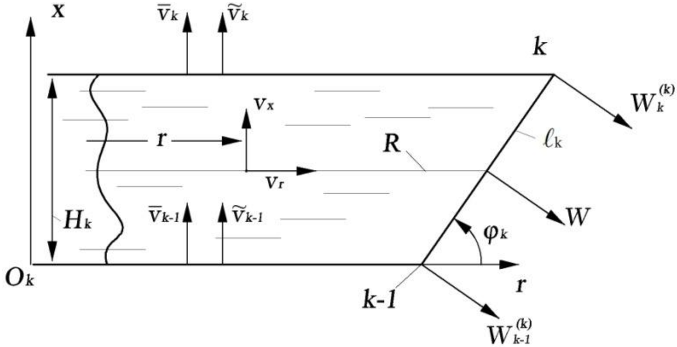


Рис.4

а) Осесимметричные колебания жидкости, рис.4

На основании вариационного метода в перемещениях для осесимметричных колебаний несжимаемой жидкости в упругой оболочке вращения осевые и радиальные перемещения в слое жидкости k-го КЭ, удовлетворяющие уравнению неразрывности и граничному условию при $r = R,$ в двучленном приближение записываются в виде:

$$v_x = \bar{v}(x,t) + \tilde{v}(x,t)(1-2\alpha^2), \quad v_r = -\frac{1}{r}\int_0^r \frac{dv_x}{dx} r dr;$$

$$\bar{v}(x,t) = \frac{R_{k-1}^2}{R^2}\bar{v}_{k-1}(t) - \frac{2}{R^2}\int_0^x \frac{WR}{\sin\varphi}dx; \quad \alpha = \frac{r}{R(x)}; \tag{17}$$

$$\int_0^1 \left(1-2\alpha^2\right)\alpha d\alpha = 0.$$

Здесь первое слагаемое $\bar{v}(x,t)$ в выражении v_x представляет плоское вытеснение поперечного сечения жидкости $x = const$, а второе слагаемое – его депланацию по форме параболы.

Кинетическая энергия осесимметричных колебаний k-го слоя жидкости $0 \le x \le H_k$ с учетом (17) будет

$$T_{ж}^{(k)}=\frac{\pi\rho}{2}\int_0^{H_k}\left[\dot{\bar{v}}^2+\frac{R^2}{8}\dot{\bar{v}}^{'2}-\frac{1}{12}\dot{\bar{v}}^{'}R\left(4R^{'}\tilde{v}+R\frac{d\tilde{v}}{dx}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(2+R^{'2}\right)\dot{\tilde{v}}^2+\frac{1}{48}\left(2R^{'}\dot{\tilde{v}}+R\frac{d\dot{\tilde{v}}}{dx}\right)^2\right]R^2dx. \qquad (18)$$

Функции W и $\tilde{v}$ в пределах толщина тонкого k-го слоя жидкости аппроксимируем линейными функциями:

$$W=\sum_i W_i^{(k)}\chi_i^{(k)}(x),\qquad \tilde{v}=\sum_\nu \tilde{v}_\nu\chi_\nu^{(k)}(k),\qquad (i,\nu=k-1,k) \qquad (19)$$

$$\chi_{k-1}^{(k)}=1-\frac{x}{H_k},\qquad \chi_k^{(k)}=\frac{x}{H_k}.$$

При этом на основании (17)

$$\bar{v}=\frac{R_{k-1}^2}{R^2}\bar{v}_{k-1}-\sum_i W_i^{(k)}X_i^{(k)};\qquad X_i^{(k)}(x)=\frac{2}{R^2s_k}\int_0^x\chi_i^{(k)}R\,dx\quad (i=k-1,k).\ (20)$$

Таким образом $T_{ж}^{(k)}$ (18) с учетом (19), (20) выражается через перемещения $\bar{v}_{k-1},\tilde{v}_{k-1},\tilde{v}_k,W_{k-1}^{(k)},W_k^{(k)}$, рис.4.

Дно оболочки с полюсом заменим абсолютно жесткой пластинкой малого радиуса R_0 при $k=0$; тогда $\eta_0=\vartheta_0=0,\quad \bar{v}_0=\xi_0,\quad \tilde{v}_0=0.$

Введем векторы

$$\bar{\mathbf{v}}=\begin{bmatrix}\bar{v}_0 & \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_{r-1}\end{bmatrix}^T;\qquad \tilde{\mathbf{v}}=\begin{bmatrix}\tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \cdots & \tilde{v}_r\end{bmatrix}^T;$$

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\xi_o & W_o^{(1)} & W_1^{(1)} & W_1^{(2)} & W_2^{(2)} & \cdots & W_{r-1}^{(r)} & W_r^{(r)}\end{bmatrix}^T. \qquad (21)$$

Тогда кинетическая энергия всех слоев жидкости $T_{ж}=\sum_{k=1}^r T_{ж}^{(k)}$ может быть записана в виде:

$$T_{ж}=\frac{\pi\rho}{2}\left[\dot{\bar{\mathbf{v}}}^T\boldsymbol{\mu}\dot{\bar{\mathbf{v}}}+2\dot{\bar{\mathbf{v}}}^T\boldsymbol{\lambda}\dot{\tilde{\mathbf{v}}}+\dot{\tilde{\mathbf{v}}}^T\boldsymbol{\tau}\dot{\tilde{\mathbf{v}}}+2\dot{\bar{\mathbf{v}}}^T\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{Z}}+2\dot{\tilde{\mathbf{v}}}^T\boldsymbol{\beta}\dot{\mathbf{Z}}+\dot{\mathbf{Z}}^T\boldsymbol{\kappa}\dot{\mathbf{Z}}\right], \qquad (22)$$

где $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\kappa}$ - матрицы коэффициентов.

Потенциальная энергия системы не зависит от перемещений $\tilde{v}_k$ ($k=1,2,\ldots,r$), представляющих депланации слоев жидкости, и поэтому они являются циклическими координатами и удовлетворяют уравнениям $\frac{\partial T_{ж}}{\partial\dot{\tilde{v}}_k}=0$

или

$$\frac{\partial T_{ж}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}} = \pi\rho\left[\boldsymbol{\lambda}^T\dot{\bar{\mathbf{v}}} + \boldsymbol{\tau}\dot{\tilde{\mathbf{v}}} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{Z}\right] = 0 .$$

Откуда

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -\boldsymbol{\tau}^{-1}\left[\boldsymbol{\lambda}^T\dot{\bar{\mathbf{v}}} + \boldsymbol{\beta}\dot{\mathbf{Z}}\right]. \qquad (23)$$

Плоские перемещения слоев жидкости на основании (20) при $x = H_k$ выражаются через нормальные перемещения оболочки:

$$\bar{v}_k = \sum_{j=0}^{k}\frac{R_j^2}{R_k^2}\Delta_j\ , \quad k = 0,1,2,\ldots,r-1; \qquad (24)$$

$$\bar{v}_0 = \Delta_0 = \xi_0\,, \quad \Delta_j = \gamma_{j-1}W_{j-1}^{(j)} + \pi_j W_j^{(j)}\,, \quad j = 1,2,\ldots,r\,;$$

$$\gamma_{j-1} = -X_{j-1}^{(j)}\left(H_j\right), \quad \pi_j = -X_j^{(j)}\left(H_j\right).$$

Условия (24) с учетом обозначений для векторов (21) записываются в матричном виде

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{BZ}\,. \qquad (25)$$

Исключая векторы $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}$ и $\dot{\bar{\mathbf{v}}}$ с использованием (23),(25), выражение (22) приведем к виду

$$T_{ж} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{Z}}^T\mathbf{M}_{ж}^z\dot{\mathbf{Z}}\,; \qquad (26)$$

$$\mathbf{M}_{ж}^z = \pi\rho\left[\mathbf{B}^T\boldsymbol{\mu}\mathbf{B} - \left(\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{B}+\boldsymbol{\beta}\right)^T\boldsymbol{\tau}^{-1}\left(\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{B}+\boldsymbol{\beta}\right) + \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{B} + \left(\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{B}\right)^T + \boldsymbol{\kappa}\right]$$

-матрица присоединенных масс жидкости для вектора $\mathbf{Z}$. Этот вектор с учетом соотношений

$$W_{k-1}^{(k)} = s_k\eta_{k-1} - c_k\xi_{k-1}\,, \quad W_k^{(k)} = s_k\eta_k - c_k\xi_k \quad (k = 1,2,\ldots,r) \qquad (27)$$

выражается через вектор основных обобщенных координат КЭ-модели для осесимметричных колебаний

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix}\xi_0 & \xi_1 & \eta_1 & \vartheta_1 & \xi_2 & \eta_2 & \vartheta_2 & \cdots & \xi_r & \eta_r & \vartheta_r\end{bmatrix}^T : \qquad (28)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Cq} \qquad (29)$$

Тогда будем иметь:

$$T_{ж} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}_{ж}\dot{\mathbf{q}}\,; \quad \mathbf{M}_{ж} = \mathbf{C}^T\mathbf{M}_{ж}^z\mathbf{C}\,. \qquad (30)$$

Матрица присоединенных масс жидкости $\mathbf{M}_{ж}$ для основных обобщенных координат КЭ-модели оболочки складывается с матрицей инерции оболочки (16):

$$T = T_o + T_ж = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}; \qquad \mathbf{M} = \mathbf{M}_o + \mathbf{M}_ж . \tag{31}$$

б) Неосесимметричные колебания жидкости ($n = 1, 2, \ldots$).

В этом случае осевое перемещение жидкости представляется в виде одночленного приближения, обладающего высокой точностью:

$$v_x = \tilde{v}(x,t)\alpha^n \cos n\theta; \qquad \alpha = \frac{r}{R(x)};$$

$$v_r = \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\cos n\theta, \qquad v_\theta = -\frac{n}{R\alpha}\psi \sin n\theta \tag{32}$$

$$\psi = \frac{R}{n}\left[\frac{W}{\sin\varphi} + R'\tilde{v} + \frac{R}{4(n+1)}\left(\tilde{v}' - n\frac{R'}{R}\tilde{v}\right)\left\langle (n+2) - n\alpha^2 \right\rangle\right]\alpha^n ,$$

где функция $\psi(x,\alpha,t)$, представляющая гидродинамическое давление ($p = -\rho\ddot{\psi}\cos n\theta$), является точным решением уравнения неразрывности жидкости с граничным условием безотрывного движения в направлении нормали на подвижной поверхности оболочки.

Кинетическая энергия жидкости при неосесимметричных колебаниях в k-ом слое записывается в виде:

$$T_ж^{(k)} = \frac{\pi\rho}{4n(n+1)}\int_0^{H_k}\left[2(n+1)\left(\frac{\dot{W}}{\sin\varphi}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{W}}{\sin\varphi}\right)\left\langle R\frac{d\dot{\tilde{v}}}{dx} + (n+2)\dot{\tilde{v}}\right\rangle + \right.$$

$$\left. + \left\langle n + (R')^2\left(2 + n^3\beta_n^{-2}\right)\right\rangle \dot{\tilde{v}}^2 + 2\left(1 - n^2\beta_n^{-2}\right)RR'\frac{d\dot{\tilde{v}}}{dx}\dot{\tilde{v}} + n\beta_n^{-2}R^2\left(\frac{d\dot{\tilde{v}}}{dx}\right)^2\right]R^2 dx; \tag{33}$$

$$\beta_n^{-2} = \frac{3n+4}{4n(n+1)(n+2)} .$$

Функции W и $\tilde{v}$ в пределах толщины тонкого k-го слоя жидкости аппроксимируются линейными функциями как (19).

В результате $T_ж^{(k)}$ записывается в виде квадратичной формы от $\dot{\tilde{v}}_{k-1}, \dot{\tilde{v}}_k, \dot{W}_{k-1}, \dot{W}_k$.

Для общего случая при наличии дна с отверстием радиуса R_0 со свободными краями и свободной поверхностью жидкости введем векторы:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \cdots & \tilde{v}_r \end{bmatrix}^T; \ \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_0 & W_0^{(1)} & W_1^{(1)} & W_1^{(2)} & W_2^{(2)} & \cdots & W_{r-1}^{(r)} & W_r^{(r)} \end{bmatrix}^T; \tag{34}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_0 & \xi_0 & \eta_0 & \vartheta_0 & \xi_1 & \eta_1 & \vartheta_1 & \cdots & \xi_r & \eta_r & \vartheta_r \end{bmatrix}^T .$$

Кинетическая энергия жидкости записывается зависимости от $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}, \dot{\mathbf{Z}}$:

$$T_{ж} = \sum_{k=1}^{r} T_{ж}^{(k)} = \frac{\pi\rho}{2}\left[\dot{\tilde{\mathbf{v}}}^T \boldsymbol{\tau}\dot{\tilde{\mathbf{v}}} + 2\dot{\tilde{\mathbf{v}}}^T \boldsymbol{\beta}\dot{\mathbf{Z}} + \dot{\mathbf{Z}}^T \boldsymbol{\kappa}\dot{\mathbf{Z}}\right], \tag{35}$$

где $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}$ -матрицы коэффициентов.

Без учета гравитационных волн на свободной поверхности ($k = r$) $\tilde{v}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, r$) будут циклическими координатами: $\partial T_{ж} / \partial \dot{\tilde{v}}_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$ или

$$\frac{\partial T_{ж}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{v}}}} = \pi\rho\left[\boldsymbol{\tau}\dot{\tilde{\mathbf{v}}} + \boldsymbol{\beta}\dot{\mathbf{Z}}\right] = 0 .$$

Откуда

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -\boldsymbol{\tau}^{-1}\boldsymbol{\beta}\dot{\mathbf{Z}} . \tag{36}$$

Тогда (35) будет

$$T_{ж} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{Z}}^T \mathbf{M}_{ж}^{z} \dot{\mathbf{Z}}; \quad \mathbf{M}_{ж}^{z} = \pi\rho\left(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\tau}^{-1}\boldsymbol{\beta}\right). \tag{37}$$

Вектор $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{q}$ (34) с учетом (27) связаны как

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{q} . \tag{38}$$

Тогда (37) будет

$$T_{ж} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{ж}\dot{\mathbf{q}}; \quad \mathbf{M}_{ж} = \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{ж}^{z}\mathbf{C}; \tag{39}$$

$\mathbf{M}_{ж}$ - матрица присоединенных масс жидкости для основных обобщенных координат КЭ-модели оболочки при неосесимметричных колебаниях.

В случае, когда дном оболочки вращения вместо отверстия является абсолютно жесткая пластинка радиуса R_0 , то в векторах (34) следует учесть:

$$\xi_0 = \tilde{v}_0 = R_0\vartheta_0 , \ V_0 = -\eta_0 \ \text{ при } \ n = 1 ;$$

$$\xi_0 = \eta_0 = \vartheta_0 = V_0 = \tilde{v}_0 = 0 \ \text{ при } \ n = 2, 3, \ldots$$

При учете гравитационных волн циклическими будут координаты $\tilde{v}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, r-1$); координата $\tilde{v}_r$, через которую определяется потенциальная энергия гравитационных волн, включается в состав вектора $\mathbf{q}$.

Рассмотрено несколько примеров расчета собственных частот колебаний различных оболочек с жидкостью с оценками точности и влияния различных параметров и возможных упрощений: полусферическая оболочка с шарнирно опертым краем; коническая оболочка с защемленным верхним краем; усеченная коническая оболочка с защемленными краями; цилиндрическая оболочка с защемленным верхним краем и с днищем в виде конической оболочки.

Здесь приведем только некоторые результаты.

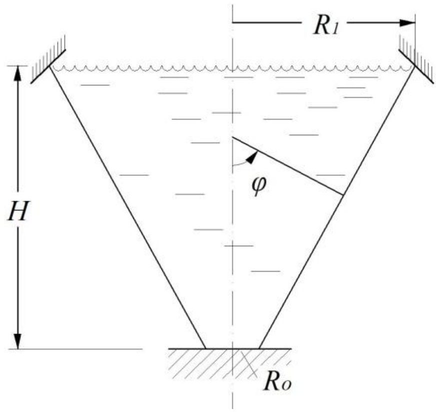
1) Полусферическая оболочка постоянной толщины, полностью заполнена жидкостью со свободной поверхностью. Параметры: $R_c/h = 100$, $\mu = 0.3125$, $\rho_o/\rho = 2.7$; $\lambda^2 = E^{-1}\left(1-\mu^2\right)R_c^2\rho_o\omega^2$.

В табл.1 приведены результаты расчета двух низших безразмерных частот колебаний при $n = 0,1,2,3,4,5,6$: *а*-результаты точного решения в рядах по функциям Лежандра; *б*-результаты расчета по МКЭ при делении образующей оболочки с равномерным угловым шагом на 100 КЭ и при замене полюса абсолютно жесткой пластинкой радиуса $R_0 = 0.01R_c$.

Таблица 1

λ_m	n / Вар.	0	1	2	3	4	5	6
λ_1	а	0.1839	0.1819	0.2589	0.2996	0.3325	0.3615	0.3882
	б	0.1838	0.1819	0.2588	0.2994	0.3323	0.3612	0.3879
λ_2	а	0.2764	0.2833	0.3302	0.3623	0.3901	0.4163	0.4420
	б	0.2760	0.2783	0.3271	0.3600	0.3883	0.4144	0.4399

2) Усеченная коническая оболочка с защемленными краями, полностью заполненная жидкостью



$R_0 = 0.3м$, $H = 0.6м$, $\varphi = 105^o$,
$h = 0.00053м$, $\mu = 0.29$,
$E = 6.9\cdot 10^{10}\,Па$, $\rho_o = 2700\,кг/м^3$,
$\rho = 1000\,кг/м^3$.

Рис.5

В табл.2 приведены низшие частоты неосесимметричных колебаний оболочки в Гц при $n = 3,4,5,6,7,8,10$: $\omega_1^э$ – экспериментальные частоты; ω_1^p – расчетные частоты, полученные В.П.Шмаковым численным методом; $\tilde{\omega}_1^p$ – расчетные частоты, полученные Ф.Н.Шклярчуком путем сведения гидродинамической задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые интегрировались численно совместно с обыкновенными дифференциальными уравнениями оболочки вращения; $\omega_1^м$ – частоты, полученные разработанным вариантом МКЭ при делении образующей оболочки с равномерным шагом на 400 КЭ.

Таблица 2

ω, *Гц*	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=10$
$\omega_1^э$	100.0	76.0	-	-	51.0	54.0	69.8
ω_1^p	101.0	78.7	63.6	54.4	50.8	52.8	67.3
$\tilde{\omega}_1^p$	101.76	79.29	63.99	54.64	51.02	52.87	67.51
$\omega_1^м$	101.63	79.16	63.82	54.41	50.70	52.44	66.86

В четвертой главе рассмотрены колебания составных осесимметричных тонкостенных конструкций с соединительными шпангоутами с произвольной формой поперечного сечения с учетом эксцентриситетов соединений.

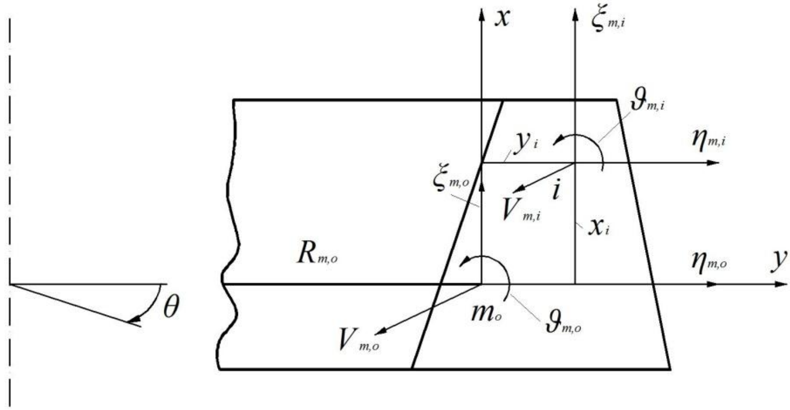


Рис.6

Тонкостенные шпангоуты с произвольным деформируемым контуром поперечного сечения рассматриваются также как оболочки вращения путем деления их на несколько кольцевых конических КЭ. Нетонкостенные шпангоуты рассматриваются как кольца с недеформируемым поперечным сечением, рис.6. Начало координат *x*,*y* поперечного сечения *m*-го шпангоута располагается в его произвольной точке m_0. Размеры поперечного сечения шпангоута считаются малыми по сравнению с радиусом $R_{m,0}$.

Осевое, радиальное и окружное перемещения на окружности радиуса $R_{m,0}$ и угол поворота поперечного сечения в меридиональной плоскости представляются в виде:

$\xi_{m,0}\cos n\theta,\ \eta_{m,0}\cos n\theta,\ \vartheta_{m,0}\cos n\theta,\ V_{m,0}\sin n\theta.$

Вектор обобщенных координат такого шпангоута обозначается как

$$\mathbf{X}_{m,0} = [\xi_{m,0} \quad \eta_{m,0} \quad \vartheta_{m,0} \quad V_{m,0}]^T \tag{40}$$

Получены выражения потенциальной и кинетической энергии m-го шпангоута в виде

$$\Pi_{ш}^{(m)} = \frac{1}{2}\mathbf{X}_{m,0}^T\mathbf{K}_{ш}^{(m)}\mathbf{X}_{m,0}, \quad T_{ш}^{(m)} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}_{m,0}^T\mathbf{M}_{ш}^{(m)}\dot{\mathbf{X}}_{m,0}; \tag{41}$$

$\mathbf{K}_{ш}^{(m)}, \mathbf{M}_{ш}^{(m)}$ -матрицы жесткости и инерции m-го шпангоута.

Вектор перемещений на i-ой окружности с координатами x_i, y_i (рис.6), на которой шпангоут может соединяться с краем оболочки, определяется как

$$\mathbf{X}_{m,i} = \mathbf{C}_{m,i}\mathbf{X}_{m,0}; \tag{42}$$

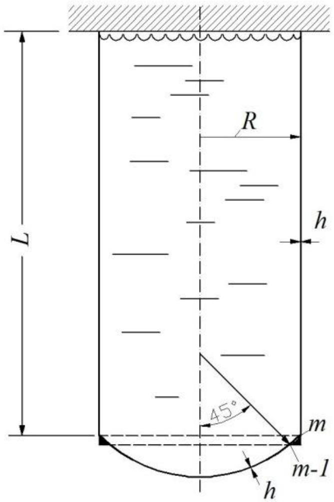
$$\mathbf{X}_{m,i} = \begin{bmatrix} \xi_{m,i} \\ \eta_{m,i} \\ \vartheta_{m,i} \\ V_{m,i} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{m,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i & 0 \\ 0 & 1 & -x_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ n\dfrac{x_i}{R_{m,0}} & n\dfrac{y_i}{R_{m,0}} & 0 & \dfrac{R_i}{R_{m,0}} \end{bmatrix}.$$

Шпангоут с матрицей жесткости $\mathbf{K}_{ш}^{(m)}$ и с матрицей инерции $\mathbf{M}_{ш}^{(m)}$ включается в КЭ-модель оболочки вращения с учетом условия сопряжения (42) по перемещениям и углу поворота.

Если точки соединения шпангоута с краями оболочек "разнесены" в направлении оси, то эти токчи мысленно соединяются между собой прямой абсолютно жесткой линией и слой жидкости, ограниченный шпангоутом, рассматривается также, как если бы он был ограничен коническим КЭ с недеформируемой образующей.

В случае осесимметричных колебаний ($n = 0$) в векторе (40) и в матрицах $\mathbf{K}_{ш}^{(m)}, \mathbf{M}_{ш}^{(m)}, \mathbf{C}_{m,i}$ следует опустить коэффициенты, строки и столбы, соответствующие компонентам $V_{m,0} = 0$.

На примере оценено влияние соединительного шпангоута на собственные осесимметричные колебания цилиндрического бака со сферическим днищем, заполненного жидкостью, рис.7



Параметры бака:

$R = 1м;$ $R/h = 400;$ $L/R = 4;$

$R/c = 20$; $\rho_o/\rho = 2.7$, $\mu = 0.3$;

c- характерный размер шпангоута.

Рис.7

Полюс сферической оболочки заменялся недеформируемой пластинкой с радиусом $R_0 = 0.04R$, на краю которой ($k = 0$) $\eta_0 = \vartheta_0 = 0$. На верхнем защемленном краю цилиндрической оболочки ($k = p$) $\xi_p = \eta_p = \vartheta_p = 0$. Сферическая и цилиндрическая оболочки делились на 1000 КЭ. Угловой раствор сферической оболочки между осью и точкой *m-1* составляет 45^o .

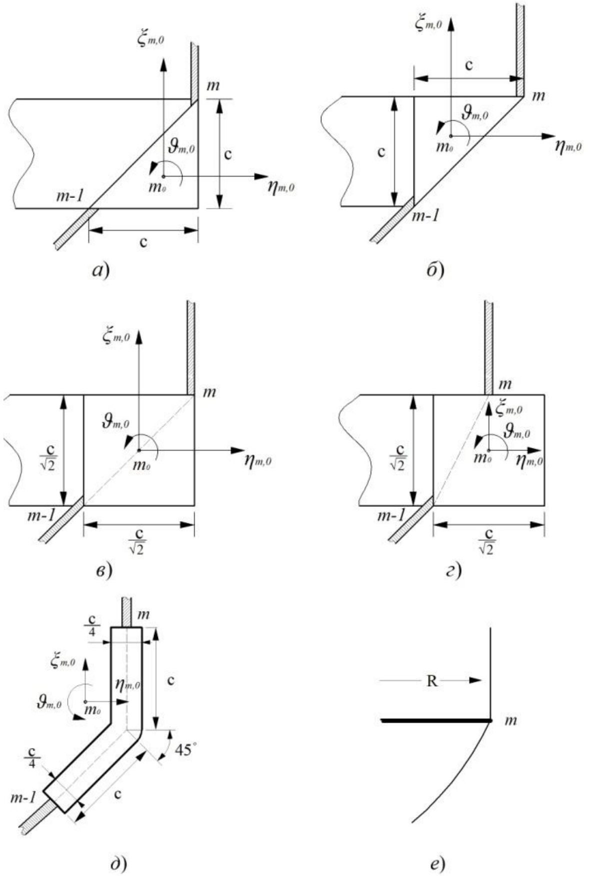


Рис.8

На рис.8 приведены 6 вариантов поперечных сечений соединительных шпангоутов, которые имеют одинаковую площадь $F_m = 0.5c^2$ и отличаются только формой и расположением по отношению к соединяемым в точках *m-1* и *m* оболочкам. В варианте ∂_1 шпангоут, поперечное сечение которого показано на рис.8,*д*, считался тонкостенным и деформируемым и моделировался 2-мя оболочечными КЭ, соединенными под углом. В варианте *е* (рис.8,*е*) шпангоут заменялся упругой линией (окружностью), которая наделялась такой же жесткостью на растяжение EF_m, как и в других вариантах (т.е. в данном варианте не учитывались эксцентриситеты соединений краев оболочек). В варианте e_0 шпангоут отсутствует ($EF_m \to 0$) и оболочки соединяются непосредственно друг с другом под углом 45^o на $m-$ой узловой окружности.

В табл.3 приведены квадраты трех низших безразмерных собственных частот осесимметричных колебаний бака $\Omega_\nu^2 = \left(\rho_o R^3 / Eh\right)\omega_\nu^2, \quad \nu = 1, 2, 3.$

Таблица 3

вар.	Ω_1^2	Ω_2^2	Ω_3^2
а	0.1086	0.8040	2.4628
б	0.1251	0.8351	2.5332
в	0.1210	0.8286	2.5140
г	0.1368	0.8520	2.5363
д	0.1424	0.8488	2.5178
$д_1$	0.1390	0.8443	2.5051
е	0.1306	0.8611	2.6036
e_0	0.0741	0.7654	2.3724

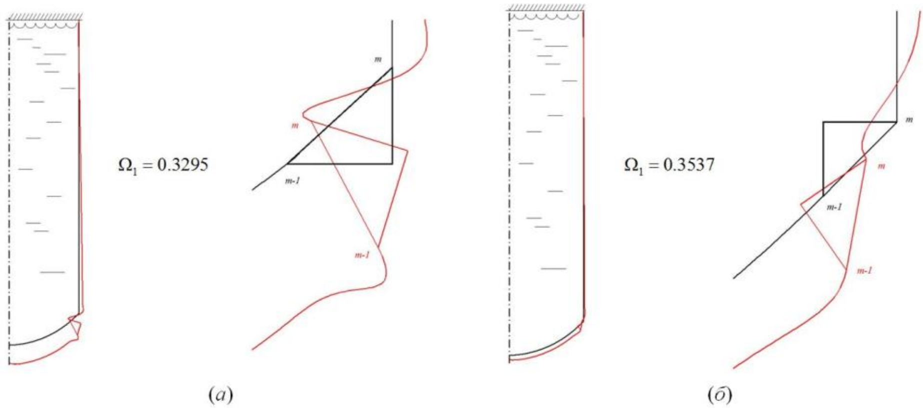


Рис.9

На рис.9 приведены низшие формы колебаний бака для вариантов *а* и *б*. Как видно, в варианте *а* происходит сильное "выворачивание" шпангоута и сильные краевые изгибы оболочек, что приводит к существенному снижению низшей частоты колебаний.

Для этого бака с деформируемым тонкостенным шпангоутом (вариант $д_1$, рис.8,*д*) также были выполнены расчеты собственных неосесимметричных колебаний при $n = 1, 2, 3, 4$.

Рассмотрены несущий и подвесной баки с жидкостью, имеющие отверстие на дне, по краю которого к оболочке днища присоединен упругий трубопровод для подачи жидкости. Для этих баков, как подконструкций, выделены обобщенные координаты, по которым оболочки баков или их шпангоуты, а также поверхность жидкости в отверстии, соединяются с другими подконструкциями - частями несущего тела (корпуса) и трубопроводов с жидкостью.

Представлен алгоритм формирования по методу отсеков с использованием редуцированных моделей уравнений колебаний составных осесимметричных конструкций, имеющих в своем составе несущие и подвесных баки жидкостью, переходные отсеки, подвесные блоки, отсеки с аппаратурой и пр. Приведен пример структуры матриц жесткости и инерции такой составной конструкции.

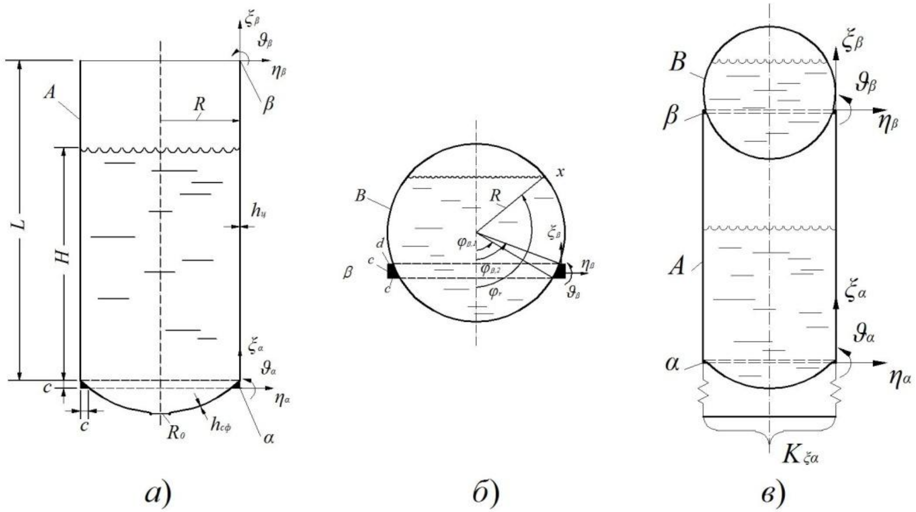


Рис.10

В качестве примера расчета рассмотрены продольно-радиальные колебания составной конструкции в виде несущего цилиндрического бака А со сферическим днищем и подвесного сферического бака В, частично заполненных жидкостью и имеющих упругие соединительные шпангоуты, рис.10.

Размеры бака А, характеристики материала и жидкости (рис.10,*а*): $R = 1м$, $L = 4м$, $H = 2м$, $c = 0.05м$, $R_0 = 0.01м$, $E = 72 \cdot 10^9\, Па$, $\mu = 0.3$, $h_ц = h_{сф} = 0.0025м$, $\rho_o = 2700\, кг/м^3$, $\rho = 1000\, кг/м^3$.

Три низших собственных частоты осесимметричных колебаний закрепленного бака А при $\xi_\alpha = \eta_\alpha = \vartheta_\alpha = 0$ и $\xi_\beta = \eta_\beta = \vartheta_\beta = 0$: $\omega_1^{(A)} = 203.66 c^{-1}$;

$\omega_2^{(A)} = 510.32 c^{-1}$; $\omega_3^{(A)} = 556.20 c^{-1}$. Остальные упругодинамические характеристики бака, как подконструкции, здесь не приводим.

Размеры бака В, характеристики материала и жидкости (рис.10,*б*): $R = 1 м$, $h = 0.0025 м$, $c = 0.05 м$, $d = 0.671 c$, $R_0 = 0.01 м$, $\varphi_{m,1} = 71.8^o$, $\varphi_{m,2} = 74.8^o$, $\varphi_r = 120^o$, $E = 72 \cdot 10^9 Па$, $\mu = 0.3$, $\rho_o = 2700 \, кг/м^3$, $\rho = 1000 \, кг/м^3$.

Три низших собственных частоты осесимметричных колебаний закрепленного бака В при $\xi_\beta = \eta_\beta = \vartheta_\beta = 0$: $\omega_1^{(B)} = 391.61 c^{-1}$; $\omega_2^{(B)} = 615.89 c^{-1}$; $\omega_3^{(B)} = 844.84 c^{-1}$.

Для расчета по методу отсеков продольно-радиальных колебаний составной конструкции (рис.10,*в*) с упругой продольной связью шпангоута α, имеющей коэффициент жесткости $K_{\xi\alpha}$ используются редуцированные модели отсеков А и В с обобщенными координатами:

$\xi_\alpha, \eta_\alpha, \vartheta_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta, \vartheta_\beta, f_1^{(A)}, f_2^{(A)}, f_3^{(A)}$ - для бака А и

$\xi_\beta, \eta_\beta, \vartheta_\beta, f_1^{(B)}, f_2^{(B)}, f_3^{(B)}$ - для бака В. Здесь $f_\nu^{(A)}$ и $f_\nu^{(B)}$ - нормальные координаты, представляющие собственные формы колебаний закрепленных баков А и В с собственными частотами $\omega_\nu^{(A)}$ и $\omega_\nu^{(B)}$.

В табл.4 приведены результаты расчета трех низших собственных частот продольно-радиальных колебаний составной системы (рис.10,*в*) при $K_{\xi\alpha} = 10^{10} \, Н/м$ для трех расчетных вариантов : а) для каждого бака учитывается по одной нормальной координате - $f_1^{(A)}, f_1^{(B)}$, б) для каждого бака учитывается по две нормальных координаты - $f_1^{(A)}, f_2^{(A)}, f_1^{(B)}, f_2^{(B)}$; в) для каждого бака учитывается по три нормальных координаты - $f_1^{(A)}, f_2^{(A)}, f_3^{(A)}, f_1^{(B)}, f_2^{(B)}, f_3^{(B)}$.

Таблица 4

вар.	ω_1	ω_2	ω_3
а	172.86	177.02	718.80
б	172.29	176.91	451.28
в	171.97	176.91	451.09

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан новый вариант МКЭ в перемещениях для расчета осесимметричных и неосесимметричных колебаний тонких ортотропных оболочек вращения с учетом их предварительного напряженно-деформированного состояния, частично заполненных жидкостью. В качестве КЭ рассматривается узкая кольцевая полоска оболочки с содержащимся в ней тонким слоем жидкости.

2. Движение несжимаемой жидкости в слое описывается аналитически в перемещениях с точным удовлетворением уравнения неразрывности и кинематического граничного условия на поверхности оболочки вращения. На основании вариационного метода В.З.Власова гидродинамическая задача сводится к одномерной задаче для осевого перемещения жидкости, которое в одночленном приближении аппроксимируется линейной функцией по толщине слоя.

3. Получены выражения для вычисления матриц присоединенных масс жидкости для обобщенных координат КЭ-модели оболочки.

4. Разработан алгоритм расчета колебаний оболочек вращения по МКЭ со шпангоутами, имеющими недеформируемое поперечное сечение с учетом эксцентриситетов их соединений с оболочками. Показано значительное влияние эксцентриситетов шпангоутов на динамические характеристики отсека оболочки.

5. Разработан алгоритм метода отсеков для получения уравнений колебаний составных осесимметричных конструкций в виде системы соединенных отсеков (подконструкций, модулей).

Список опубликованных работ

1. Рей Чжунбум, Применение метода конечных элементов к расчету осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью. Инновации в авиации и космонавтике-2012 (17-20 апреля 2012г.),-С.280.

2. Шклярчук Ф.Н., Рей Чжунбум, Расчет осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью методом конечных элементов, Вестник МАИ, т.19, № 5, 2012, -С.197-204.

3. Шклярчук Ф.Н. , Рей Чжунбум., Колебания составных оболочек вращения, соединенных упругими шпангоутами и частично заполненных жидкостью, Материалы XIX международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" имени А.Г.Горшкова (18-22 февраля 2013г.), т. 1.-С.205-207.

4. Рей Чжунбум, Применение метода отсеков к расчету колебаний составных конструкций жидкостных ракет-носителей. Инновации в авиации и

космонавтике-2013 (16-18 апреля 2013г.),-С.140-141.

5. Шклярчук Ф.Н., Рей Чжунбум, Расчет неосесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью методом конечных элементов , Вестник МАИ, т.20, № 2, 2013, -С.49-58.

6. Рей Чжунбум, Расчет колебаний составных оболочек вращения с соединительными шпангоутами по методу конечных элементов, Труды МАИ, 2013, № 69.