

Тепловые процессы в технике. 2026. Т. 18. № 4. С. 166–173
Thermal processes in engineering, 2026, vol. 18, no. 4, pp. 166–173

Научная статья
УДК 536.212
URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=188542>
EDN: <https://www.elibrary.ru/GAUNLI>

Температурное поле цилиндра и оболочки эллиптических сечений при граничных условиях третьего рода

А.И. Канарейкин✉

*Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе (МГРИ),
Москва, Российская Федерация
kanareykins@mail.ru*

Аннотация. В статье производится расчет температурного поля цилиндра и окружающего его оболочки эллиптических сечений при граничных условиях четвертого рода. Граничные условия заданы законом теплообмена между поверхностью оболочки и окружающей средой. Рассматриваемые эллипсы являются конфокальными. При этом сама задача является стационарной. Решение находится аналитически при переходе к системе эллиптических координат. Из решения получено соотношение для расчета распределения температуры по поверхности окружающей оболочки. Предложенная математическая модель и алгоритм ее решения предназначен для проведения в инженерных расчетах теплообменных аппаратов и топливных стержней ядерных реакторов, использующих каналы эллиптической формы.

Ключевые слова: теплообмен, температурное поле, эллиптическое сечение, граничные условия третьего рода, граничные условия четвертого рода, эллиптический интеграл

Для цитирования. Канарейкин А.И. Температурное поле цилиндра и оболочки эллиптических сечений при граничных условиях третьего рода // Тепловые процессы в технике. 2026. Т. 18. № 4. С. 166–173. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=188542>

Original article

The temperature field of the cylinder and shell of elliptical sections under boundary conditions of the third kind

A.I. Kanareykin✉

*Russian State Geological University named after Sergo Ordzhonikidze (MGRI), Moscow, Russian Federation
kanareykins@mail.ru*

Abstract. The processes of heat exchange and the resulting mass transfer currently play an important role both in the technical field and in nature. The temperature regime of the environment directly depends on this group of processes. In addition, this group of processes determines the working process in various kinds of technological installations. This leads to the active development of the theory of heat

transfer, especially in recent decades. The active development of the theory is also conditioned by the needs of such spheres of human activity as cosmonautics, thermal power engineering, and nuclear energy. Thus, thermal processes and phenomena are the most common after mechanical motion. The discovery of processes and laws of thermal phenomena made it possible to effectively use them in the development of practical technical solutions, as well as in the design of heat engines and specialized installations.

The main provisions of the theory of heat and mass transfer have been developed for a long time. In the mathematical theory of thermal conductivity, an important place is occupied by studies of heat transfer processes in solids with a cylindrical channel, the surface of which is subject to a given mode of thermal action. Separately, heating elements made in the form of a cylinder can be distinguished. Such elements have great mechanical strength and are widely used in heat exchangers. They can be both electrical and fuel-generating elements of a nuclear reactor.

Elliptical tube heat exchangers occupy a special place. Elliptical tube heat exchangers are increasingly being used in various industrial products. Their peculiarity lies in the fact that by manipulating the length change of the semi-axes of the ellipse, it is possible to obtain accurate analyses of stationary thermal conductivity problems for a very wide range of shape changes: from a cylinder (the semi-axes of the ellipse are equal) to a thin plate (one of the semi-axes significantly exceeds the other).

However, the temperature distribution in a body of elliptical cross-section under given boundary conditions has not been sufficiently studied. The paper calculates the temperature field of the cylinder and the elliptical cross-section shell surrounding it under boundary conditions of the fourth kind. It is assumed that the thermal contact between the solid-coating system is ideal. The boundary conditions are set by the law of heat exchange between the shell surface and the environment. The ellipses in question are confocal. At the same time, the task itself is stationary. The solution is found analytically when moving to the elliptical coordinate system. From the solution, a ratio is obtained for calculating the temperature distribution over the surface of an elliptical channel. The proposed mathematical model and its solution algorithm are intended for engineering calculations of heat exchangers and fuel rods of nuclear reactors using elliptical channels.

Keywords: heat transfer, temperature field, elliptical cross section, boundary conditions of the third kind, boundary conditions of the fourth kind, elliptic integral

For citation. Kanareykin A.I. The temperature field of the cylinder and shell of elliptical sections under boundary conditions of the third kind. *Thermal processes in engineering*. 2026, vol. 18, no. 4, pp. 166–173. (In Russ.). URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=188542>

1. Введение

Процессы теплообмена и вытекающего из него массообмена выполняют на сегодняшний день важную роль как в технической сфере, так и в природе. От данной группы процессов напрямую зависит температурный режим окружающей среды. Помимо этого, данная группа процессов определяет рабочий процесс в различного рода технологических установках. Это обуславливает активное развитие теории теплообмена, особенно в течение последних десятилетий. Активное развитие теории также обусловлено потребностями таких сфер жизнедеятельности человека как космонавтика, теплоэнергетика, атомная энергия [1].

Особое место занимают теплообменники с эллиптическими трубами. Эллиптические трубчатые теплообменники находят все большее применение в различных промышленных изделиях. При этом в технике часто используются многослойные системы, состоящие из разных материалов [2–11].

В работах автора [1, 12–17] получены решения уравнения теплопроводности в эллиптических координатах для одного тела при разных граничных условиях. В статье [18] рассматривался нестационарный нагрев эллиптического кольца. На его внутренней поверхности задавались граничные условия первого или второго рода. На внешней поверхности эллиптического

кольца задавалась постоянная температура (то есть условия первого рода). Уравнение теплопроводности решалось с использованием рядов Фурье и методов разделения переменных. Результаты представлены в виде ряда по функциям Матье. [19] Теплопроводность в эллиптическом корпусе с внутренним источником тепла. Следует отметить работу Голембиовского и Зарембы [20], в которой представлен аналитико-численный метод итерации для определения стационарного двумерного температурного поля в многослойном эллиптическом цилиндре с граничными условиями третьего рода, что подчеркивает актуальность дальнейшего развития аналитических подходов для систем подобной геометрии.

Основной задачей данной работы является нахождение распределения температурного поля цилиндра с эллиптическим поперечным сечением с внутренним источником теплоты, а также окружающей его оболочки. При этом предполагается, что тепловой контакт между цилиндром и оболочкой в системе твердое тело – покрытие является идеальным [21]. Также между оболочкой и окружающей средой происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона. При этом сама задача является стационарной.

Научная новизна исследования заключается в том, что в работе учтены граничные условия четвертого рода, а само решение получено аналитически.

2. Материалы и методы

В качестве материала исследования использованы публикации в научных журналах по теме статьи. Решение поставленной задачи проводится аналитически при переходе от декартовой системы к системе эллиптических координат. Основными методами решения являются метод дифференцирования, интегрирования, подстановки и разложения в ряд.

3. Результаты

В решении, в качестве элемента конструкции рассматривается цилиндр бесконечной длины, сечение которого представляет собой эллипс с полуосями a_1 и b_1 , внутри которого действует источник теплоты с удельной мощностью q_v . При этом эллиптический цилиндр окружен эллипти-

ческой оболочкой, на поверхности которой происходит конвективный теплообмен с окружающей средой (рис. 1).

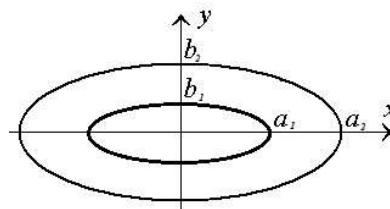


Рис. 1. Эллиптический цилиндр в оболочке

Чтобы найти распределение температуры по сечению цилиндра, необходимо решить дифференциальное уравнение Пуассона в частных производных в виде:

$$\Delta T + \frac{q_v}{\lambda_1} = 0, \quad (1)$$

где: λ_1 – коэффициент теплопроводности материала цилиндра.

Температурное поле оболочки описывается следующим уравнением

$$\Delta T = 0. \quad (2)$$

При этом при теплообмене граничные условия являются граничными условиями четвертого рода. В этом случае температуры соприкасающихся поверхностей одинаковы

$$T_1 \Big|_{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1} = T_2 \Big|_{\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1}, \quad (3)$$

где T_1 и T_2 – температуры цилиндра и оболочки соответственно. А также должны быть одинаковы тепловые потоки на границе их раздела

$$-\lambda_1 \frac{dT_1}{dn} \Big|_{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1} = -\lambda_2 \frac{dT_2}{dn} \Big|_{\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1}, \quad (4)$$

где: λ_2 – коэффициент теплопроводности материала, из которого изготовлена оболочка.

Также на поверхности оболочки происходит конвективный теплообмен с окружающей средой

$$-\lambda_2 \frac{dT_2}{dn} \Big|_{\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1} = \alpha(T_2 - T_0), \quad (5)$$

где: T_0 – температура окружающей среды.

Для получения соотношения, описывающего температурное поле цилиндра, перейдем к эллиптической системе координат. Уравнение Пуассона (1) в эллиптических координатах (μ, ν) имеет вид [16]

$$\frac{1}{c^2(\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \nu)} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \nu^2} \right) = -\frac{q_v}{\lambda_1}, \quad (6)$$

где $c = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$.

Подстановка вида [17]

$$T = U(\mu, \nu) - \frac{q_v c^2}{4\lambda_1} (\operatorname{sh}^2 \mu + \cos^2 \nu) \quad (7)$$

преобразует уравнение Пуассона (6) в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2} = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) будем искать в виде ряда

$$U(\mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} n \mu \cos n \nu + B_n \operatorname{sh} n \mu \sin n \nu). \quad (9)$$

Из соображений симметрии следует положить $B_n = 0$, тогда

$$U(\mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{ch} n \mu \cos n \nu. \quad (10)$$

В этом случае выражение для определения температурного поля цилиндра примет вид

$$T_1(\mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{ch} n \mu \cos n \nu - \frac{q_v c^2}{4\lambda_1} (\operatorname{sh}^2 \mu + \cos^2 \nu). \quad (11)$$

Решение уравнения Лапласа (2) будем искать в виде

$$T_2(\mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \operatorname{ch} n \mu \cos n \nu + E \mu. \quad (12)$$

Воспользуемся условием (3), которое в эллиптических координатах имеет вид

$$T_1|_{\mu=\mu_1} = T_2|_{\mu=\mu_1}, \quad (13)$$

тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{ch} n \mu_1 \cos n \nu - \frac{q_v c^2}{4\lambda_1} (\operatorname{sh}^2 \mu_1 + \cos^2 \nu) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \operatorname{ch} n \mu_1 \cos n \nu + E \mu_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Откуда выражение для определения температурных полей цилиндра и оболочки примут вид

$$T_1(\mu, \nu) = A \operatorname{ch} 2 \mu \cos 2 \nu - \frac{q_v c^2}{4\lambda_1} (\operatorname{sh}^2 \mu + \cos^2 \nu) + C, \quad (15)$$

$$T_2(\mu, \nu) = D \operatorname{ch} 2 \mu \cos 2 \nu + E \mu + F, \quad (16)$$

где с учетом тригонометрических формул коэффициенты C и A равны

$$C = F + E \mu_1 + \frac{q_v c^2}{4\lambda_1} \left(\operatorname{sh}^2 \mu_1 + \frac{1}{2} \right), \quad (17)$$

$$A = \frac{q_v c^2}{8\lambda_1 \operatorname{ch} 2 \mu_1} + D. \quad (18)$$

Теперь воспользуемся условием (4), которое в эллиптических координатах имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu_1 - \cos^2 \nu}} \frac{\partial T_1}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_1} = \\ = -\frac{\lambda_2}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu_1 - \cos^2 \nu}} \frac{\partial T_2}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_1}, \end{aligned} \quad (19)$$

Имеем

$$\begin{aligned} -2\lambda_1 A \operatorname{sh} 2 \mu_1 \cos 2 \nu - \frac{q_v c^2 \operatorname{sh} 2 \mu_1}{4} = \\ = \lambda_2 [-2D \operatorname{sh} 2 \mu_1 \cos 2 \nu + E]. \end{aligned} \quad (20)$$

Откуда

$$A = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} D, \quad (21)$$

$$E = -\frac{q_v c^2 \operatorname{sh} 2 \mu_1}{4\lambda_2}. \quad (22)$$

Тогда остальные коэффициенты равны

$$F = \frac{q_v c^2}{4} \left[\frac{\mu_1 \operatorname{sh} 2\mu_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \left(\operatorname{sh}^2 \mu_1 + \frac{1}{2} \right) \right] + C, \quad (23)$$

$$D = \frac{q_v c^2}{8 \operatorname{ch} 2\mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (24)$$

$$A = \frac{q_v c^2 \lambda_2}{8 \lambda_1 \operatorname{ch} 2\mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (25)$$

Теперь воспользуемся условием (5), которое в эллиптических координатах имеет вид

$$-\frac{\lambda_2}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu_2 - \cos^2 \nu}} \frac{\partial T_2}{\partial \mu} \bigg|_{\mu=\mu_2} =, \quad (26)$$

$$= \alpha (T_2 - T_0)$$

тогда

$$-\frac{\lambda_2}{\alpha} \frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu_2 - \cos^2 \nu}} \times$$

$$\times [-2D \operatorname{sh} 2\mu_2 \cos 2\nu + E] =$$

$$= D \operatorname{ch} 2\mu_2 \cos 2\nu + E \mu_2 + F - T_0. \quad (27)$$

Для упрощения дальнейших вычислений разложим иррациональное выражение в ряд

$$\sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu_2 - \cos^2 \nu} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos 2n\nu. \quad (28)$$

Сами коэффициенты a_{2n} определяются по формуле

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu_2 - \cos^2 \nu} \cos 2n\nu d\nu =$$

$$= \frac{2 \operatorname{ch} \mu_2}{\pi} \left[B \left(\frac{2n+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \right.$$

$$\times F_1 \left(\frac{2n+1}{2}, -\frac{1}{2}, n+1, \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \mu_2} \right) -$$

$$\left. - C_{2n} B \left(\frac{2n-1}{2}, \frac{3}{2} \right) \times F_1 \left(\frac{2n-1}{2}, -\frac{1}{2}, n+1, \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \mu_2} \right) + \dots \right], \quad (29)$$

где: $B(y, z)$ – бэта-функция, $F_1(y, z, m; k)$ – гипергеометрическая функция. В этом случае формула (27) примет вид

$$-\frac{\lambda_2}{c} [-2D \operatorname{sh} 2\mu_2 \cos 2\nu + E] =$$

$$= \frac{\alpha a_0}{2} D \operatorname{ch} 2\mu_2 \cos 2\nu + \frac{\alpha a_0}{2} (E \mu_2 + F - T_0) +$$

$$+ \alpha D \operatorname{ch} 2\mu_2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos 2n\nu \cos 2\nu +$$

$$+ \alpha (E \mu_2 + F - T_0) \sum_{n=0}^{\infty} \cos 2n\nu, \quad (30)$$

и интегрируя по углу ν от 0 до π , получим

$$-\frac{\pi \lambda_2}{c} E = \frac{\pi \alpha}{2} D \operatorname{ch} 2\mu_2 + \frac{\pi \alpha a_0}{2} (E \mu_2 + F - T_0), \quad (31)$$

откуда

$$C = T_0 + \frac{q_v c^2}{4} \left[\frac{1}{\lambda_1} \left(\operatorname{sh}^2 \mu_1 + \frac{1}{2} \right) + \right.$$

$$+ \frac{(\mu_2 - \mu_1) \operatorname{sh} 2\mu_1}{\lambda_2} + \frac{2 \operatorname{sh} 2\mu_1}{\alpha c a_0} -$$

$$\left. - \frac{\operatorname{ch} 2\mu_2}{2 \operatorname{ch} 2\mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} \right]. \quad (32)$$

Тогда выражение для определения температурного поля цилиндра примет вид

$$T_1(\mu, \nu) = T_0 + \frac{q_v c^2}{4} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2 \lambda_1} \left(\frac{\lambda_2 \operatorname{ch} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} - 1 \right) \cos 2\nu + \right.$$

$$+ \frac{\operatorname{sh}^2 \mu_1 - \operatorname{sh}^2 \mu}{\lambda_2} + \frac{\operatorname{sh} 2\mu_1}{\lambda_2} (\mu_2 - \mu_1) +$$

$$\left. \frac{2 \operatorname{sh} 2\mu_1}{\alpha c a_0} - \frac{\operatorname{ch} 2\mu_2}{2 a_0 \operatorname{ch} 2\mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} \right], \quad (33)$$

а для оболочки

$$T_2(\mu, \nu) = T_0 + \frac{q_v c^2}{4} \times$$

$$\times \left[\frac{\operatorname{ch} 2\mu \cos 2\nu}{2 \operatorname{ch} 2\mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{\operatorname{sh} 2\mu_1}{\lambda_2} (\mu_2 - \mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \operatorname{sh} 2\mu_1}{\alpha c a_0} - \frac{\operatorname{ch} 2\mu_2}{2 a_0 \operatorname{ch} 2\mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} \right]. \quad (34)$$

4. Обсуждение

Как следует из полученных выражений (33) и (34) температурное поле цилиндра и оболочки по углу меняется по закону косинуса. Также можно получить распределение температуры по поверхности эллиптической оболочки $T_{пов}$

$$T_{пов}(\nu) = T_0 + \frac{q_v c^2}{4} \left[\frac{\text{ch} 2\mu_2 (a_0 \cos 2\nu - 1)}{2a_0 \text{ch} 2\mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{2\text{sh} 2\mu_1}{\alpha c a_0} \right]. \quad (35)$$

Произведем проверку полученного решения. Рассмотрим случай отсутствия внутреннего источника теплоты. В этом случае температуры цилиндра и оболочки будут одинаковыми по сечению и равны температуре окружающей среды T_0 .

Далее для наглядности изобразим поведение температурного поля для двух тел по их сечению (рис. 2). Для этого зафиксируем угол ν . В случае $\nu = \pi/4$ выражение для определения температурного поля цилиндра примет вид

$$T_1(\mu) = T_0 + \frac{q_v c^2}{4} \left[\frac{\text{sh}^2 \mu_1 - \text{sh}^2 \mu}{\lambda_2} + \frac{\text{sh} 2\mu_1}{\lambda_2} (\mu_2 - \mu_1) + \frac{2\text{sh} 2\mu_1}{\alpha c a_0} - \frac{\text{ch} 2\mu_2}{2a_0 \text{ch} 2\mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} \right], \quad (36)$$

а для оболочки

$$T_2(\mu) = T_0 + \frac{q_v c^2}{4} \left[\frac{\text{sh} 2\mu_1}{\lambda_2} (\mu_2 - \mu) + \frac{2\text{sh} 2\mu_1}{\alpha c a_0} - \frac{\text{ch} 2\mu_2}{2a_0 \text{ch} 2\mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} \right]. \quad (37)$$

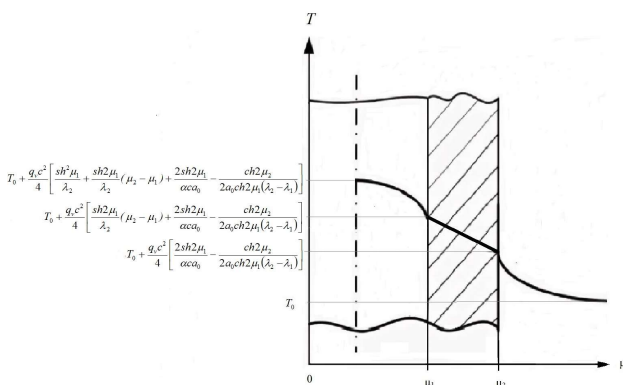


Рис. 2. График поведения температурного поля цилиндра и оболочки при $\nu = \pi/4$

Как видим, температурное поле оболочки меняется линейно.

Для применения полученных формул в инженерных расчетах перейдем к декартовым координатам по следующим формулам

$$x = a \cos \nu = c \text{ch} \mu \cos \nu, \quad (38)$$

$$y = b \cos \nu = c \text{sh} \mu \sin \nu. \quad (39)$$

Тогда выражение для определения температурного поля цилиндра в декартовых координатах примет вид

$$T_1(x, y) = T_0 + \frac{q_v c^2}{4} \times \left[\frac{1}{2\lambda_1} \left(\frac{\lambda_2 (x^2 - 4c^2)}{8(2a_1^2 - c^2)(\lambda_2 - \lambda_1)} - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right) + \frac{b_1^2 - b^2}{c^2 \lambda_2} + \frac{2a_1 b_1}{c^2 \lambda_2} \left(\text{arsh} \left(\frac{b_2}{c} \right) - \text{arsh} \left(\frac{b_1}{c} \right) \right) + \frac{4a_1 b_1}{\alpha c^3 a_0} - \frac{2a_2^2 - c^2}{2a_0 (2a_1^2 - c^2)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right], \quad (40)$$

а для оболочки

$$T_2(x, y) = T_0 + \frac{q_v c^2}{4} \left[\frac{x^2 - 4c^2}{8(2a_1^2 - c^2)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{2a_1 b_1}{c^2 \lambda_2} \left(\text{arsh} \left(\frac{b_2}{c} \right) - \text{arsh} \left(\frac{b_1}{c} \right) \right) + \frac{4a_1 b_1}{\alpha c^3 a_0} - \frac{2a_2^2 - c^2}{2a_0 (2a_1^2 - c^2)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right], \quad (41)$$

где $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

5. Заключение

В настоящей работе получено решение задачи о распределении температурного поля цилиндра с эллиптическим поперечным сечением и окружающей его оболочки при граничных условиях третьего и четвертого рода. Решение получено для стационарного случая в системе эллиптических координат. Установлено, что температурное поле по углу обоих тел меняется по закону косинуса. Также в результате решения задачи

получено соотношение для расчета распределения температуры по поверхности эллиптической стенки. Математическая модель, представленная в работе, и полученные соотношения предназначены для расчета температурного поля теплообменных аппаратов, солнечных коллекторов и топливных стержней ядерных реакторов, использующих каналы эллиптической формы.

Список источников

1. Канарейкин А.И. Распределение температурного поля в твэле с эллиптическим поперечным сечением // Научные труды Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского, серия: естественные науки, 2016. С. 230–231.
2. Tatsiy R.M., Pazen O.Y., Vovk S.Y. et al. Simulation of heat transfer process in a multilateral cylindrical shell taking into account the internal heat sources. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. 2020. № 3. pp. 27–32.
3. Видин Ю.В., Казаков Р.В., Злобин В.С. Процесс переноса тепла в двухслойном цилиндрическом теле // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2018. Т. 20. № 11–12. С. 93–98.
4. Eremin A.V., Stefanyuk E.F., Kurganova O.Y. et al. A generalized function in heat conductivity problems for multilayer structures with heat sources. *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2018, Vol. 47. 249–255.
5. Tatsii R.M., Pazen O.Y. Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2018. Vol. 91. 1373–1384.
6. Singh S., Jain P.K. Rizwan-uddin. Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction. *Int J Therm Sci.* 2008. Vol. 47. 261–273.
7. Jain P.K., Singh S. Rizwan-uddin, Analytical solution to transient asymmetric heat conduction in a multilayers annulus. *J. Heat Transfer.* 2009, Vol. 131. 1–7.
8. Jain P.K., Singh S., Rizwan-uddin. An exact analytical solution for two-dimensional, unsteady, multilayer heat conduction in spherical coordinates. *Int. J. Heat Transfer.* 2010, Vol. 53. 2133–2142.
9. Norouzi M., Delouei A., Seilsepour M. A general exact solution for heat conduction in multilayer spherical composite laminates. *Compos. Struct.* 2013. Vol. 106. 288–295.
10. Dalir N., Nourazar S.S. Analytical solution of the problem on the tree-dimensional transient heat conduction in a multilayer cylinder. *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2014, Vol. 87. 89–97.
11. Haji-Sheikh A., Beck J.V. Temperature solution in multi-dimensional multilayer bodies. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2002. Vol. 45. 1865–1877.
12. Канарейкин А.И. Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренним источником тепла при граничных условиях первого рода // Вестник Калужского университета, серия: естественные науки, 2020. № 2. С. 74–76.
13. Kanareykin A.I. Energy calculation of the temperature field of an elliptical body without internal heat sources under boundary conditions of the third kind // *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*. 2022. № 1045. DOI: 10.1088/1755-1315/1045/1/012068
14. Kanareykin A. Temperature distribution in an elliptical body with an internal heat source with partial adiabatic isolation, *E3S Web of Conferences*, 2021. Vol. 258. DOI: 10.1051/e3sconf/202125809071
15. Канарейкин А.И. Распределение температуры в теле эллиптического сечения без внутренних источников тепла при граничных условиях третьего рода // *Научосфера*, 2022. № 7-2. С. 96–100.
16. Канарейкин А.И. Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренним источником тепла при граничных условиях третьего рода // Вестник Калужского университета. 2021. № 2 (51). С. 107–109. DOI: 10.54072/18192173_2021_2_107
17. Канарейкин А.И. Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренними стационарными источниками теплоты при граничных условиях третьего рода // *Тепловые процессы в технике*. 2021. Т. 13. № 5. С. 226–229. DOI: 10.34759/TPT-2021-13-5-226-229
18. Dhakate T., Varghese V., Khalsa L. An analytical solution for transient asymmetric heat conduction in a multilayer elliptic annulus and its associated thermal stresses. *Int. J. Math. And Appl.* 2018. 6(1). 29–42.
19. Fathi M. Heat Conduction within elliptic enclosure with internal heat generation. *ERJ Engineering Research Journal*. 2020. 43(2): 93–98. DOI: 10.21608/erjm.2020.83837
20. Golebiowski J., Zareba M. The Stationary Thermal Field in a Multi-layer Elliptic Cylinder. *Appl. Sci.* 2023. Vol. 13. DOI: 10.3390/app13042354
21. Канарейкин А.И. Теплообмен между нагревательным элементом цилиндрической формы и его оболочкой при граничных условиях четвертого рода // Вестник Международной академии холода. 2023. № 3. С. 68–73. DOI: 10.17586/1606-4313-2023-22-3-68–73.

References

1. Kanareikin AI. *Temperature field distribution in a fuel element with an elliptical cross-section*. Nauchnye trudy Kaluzhskogo gosudarstvennogo universiteta im. K.Eh. Tsiolkovskogo, seriya: estestvennye nauki, 2016: 230–231. (In Russ.).
2. Tatsiy RM, Pazen OY, Vovk SY et al. *Simulation of heat transfer process in a multilateral cylindrical shell taking into account the internal heat sources*. Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. 2020; (3):27–32. (In Russ.).
3. Vidin YuV, Kazakov RV, Zlobin VS. *Heat transfer process in a two-layer cylindrical body*. Izvestiya vysshikh

- uchebnykh zavedenii. Problemy ehnergetiki. 2018; 20(11–12):93–98. (In Russ.).
4. Eremin AV, Stefanyuk EF, Kurganova OY et al. A generalized function in heat conductivity problems for multilayer structures with heat sources. *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2018;47:249–255.
 5. Tatsii RM, Pazen OY. *Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder.* *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2018;91:1373–1384.
 6. Singh S, Jain PK, Rizwan-uddin. Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction. *Int J Therm Sci.* 2008; 47:261–273.
 7. Jain PK, Singh S, Rizwan-uddin. *Analytical solution to transient asymmetric heat conduction in a multilayers annulus.* *J. Heat Transfer.* 2009;131:1–7.
 8. Jain PK, Singh S, Rizwan-uddin. *An exact analytical solution for two-dimensional, unsteady, multilayer heat conduction in spherical coordinates.* *Int. J. Heat Transfer.* 2010;53:2133–2142.
 9. Norouzi M, Delouei A, Seilsepour M. A general exact solution for heat conduction in multilayer spherical composite laminates. *Compos. Struct.* 2013. Vol. 106. 288–295.
 10. Dalir N, Nourazar SS. *Analytical solution of the problem on the three-dimensional transient heat conduction in a multilayer cylinder.* *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2014;87: 89–97.
 11. Haji-Sheikh A, Beck JV. *Temperature solution in multidimensional multi-layer bodies.* *Int. J. Heat Mass Transf.* 2002;45:1865–1877.
 12. Kanareikin AI. *Temperature distribution in a body of elliptical cross-section with an internal heat source under boundary conditions of the first kind.* *Vestnik Kaluzhskogo universiteta, seriya: estestvennye nauki.* 2020; (2):74–76. (In Russ.).
 13. Kanareykin AI. *Energy calculation of the temperature field of an elliptical body without internal heat sources under boundary conditions of the third kind.* *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science.* 2022;(1045). DOI: 10.1088/1755-1315/1045/1/012068
 14. Kanareykin A. *Temperature distribution in an elliptical body with an internal heat source with partial adiabatic isolation.* *E3S Web of Conferences.* 2021;258. DOI: 10.1051/e3sconf/202125809071
 15. Kanareikin AI. *Temperature distribution in a body of elliptical cross-section without internal heat sources under boundary conditions of the third kind.* *Naukosfera.* 2022; (7–2):96–100. (In Russ.).
 16. Kanareikin AI. *Temperature distribution in a body of elliptical cross-section with an internal heat source under boundary conditions of the third kind.* *Vestnik Kaluzhskogo universiteta.* 2021;(2 (51)):107–109. DOI: 10.54072/18192173_2021_2_107
 17. Kanareikin AI. *Temperature distribution in a body of elliptical cross-section with internal steady-state heat sources under boundary conditions of the third kind.* *Thermal processes in engineering.* 2021;13(5):226–229. DOI: 10.34759/TPT-2021-13-5-226-229
 18. Dhakate T, Varghese V, Khalsa L. An analytical solution for transient asymmetric heat conduction in a multilayer elliptic annulus and its associated thermal stresses. *Int. J. Math. And Appl.* 2018;6(1):29–42.
 19. Fathi M. *Heat Conduction within elliptic enclosure with internal heat generation.* *ERJ Engineering Research Journal.* 2020;43(2):93–98. DOI: 10.21608/erjm.2020.83837
 20. Golebiowski J, Zareba M. *The Stationary Thermal Field in a Multi-layer Elliptic Cylinder.* *Appl. Sci.* 2023;13. DOI: 10.3390/app13042354
 21. Kanareikin A.I. *Heat transfer between a cylindrical heating element and its sheath under boundary conditions of the fourth kind.* *Vestnik Mezhdunarodnoi akademii kholoda.* 2023;(3):68–73. DOI: 10.17586/1606-4313-2023-22-3-68–73 (In Russ.).