

На правах рукописи



Николичев Илья Андреевич

**ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВОГО МЕЖОРБИТАЛЬНОГО
ПЕРЕЛЕТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ
ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ
ВОЗМУЩЕНИЙ**

Специальность 05.07.09

«Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Москва - 2017

Работа выполнена на кафедре 601 «Космические системы и ракетостроение» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Константинов Михаил Сергеевич**,
доктор технических наук, профессор кафедры 601
«Космические системы и ракетостроение» Московского
Авиационного Института (национального
исследовательского университета)

Официальные оппоненты: **Овчинников Михаил Юрьевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий сектором №4 «Ориентация и управление
движением» Отдела №5 «Механика космического полета и
управление движением» Института прикладной
математики им. М.В. Келдыша РАН

Симонов Александр Владимирович,
кандидат технических наук, заместитель начальника отдела
АО «Научно-производственное объединение им. С.А.
Лавочкина»

Ведущая организация: АО «Информационные спутниковые системы» имени
академика М.Ф. Решетнёва»

Защита состоится «27» декабря 2017 года в 12:00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.12 ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ), и на сайте института <http://www.mai.ru>.

Автореферат разослан «___» _____ 2017 года.

Отзывы, заверенные печатью, просим направлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.12,
кандидат технических наук, доцент

 Старков Александр Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена рассмотрению ряда методических вопросов, связанных с решением и качественным исследованием задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ при учете влияния возмущений. Предлагаемая в работе методика решения возмущенных задач позволяет (на примере рассмотрения конкретного вида межорбитального перелета) качественно ответить на вопрос о целесообразности рассмотрения сложных математических моделей, описывающих управляемое возмущенное движение центра масс КА с ЭРДУ, при баллистическом проектировании номинальной траектории межорбитального перелета.

Объектом исследования являются траектории управляемого возмущенного движения центра масс КА с ЭРДУ при межорбитальном перелете в окрестности гравитирующего тела.

Предметом исследования являются математические модели оптимального возмущенного движения КА с ЭРДУ.

Актуальность тематики исследования продиктована следующими основными факторами:

- общим и повсеместным ростом числа использования ЭРД в качестве штатной маршевой или корректирующей двигательной установки при различных видах маневрирования КА в окрестности Земли, что связано как с комплексным развитием и совершенствованием бортовых систем аппаратов в целом, так и с улучшением ряда характеристик самих ЭРДУ;
- дальнейшее развитие и оптимизация схемы комбинированного выведения КА требует рассмотрения все более сложных задач баллистического проектирования траекторий межорбитального перелета, в особенности на участке довыведения, на котором КА с ЭРДУ должен длительное время активно управляться. Очевидно, что ввиду специфики управляемого движения КА с двигателем малой тяги, необходимо рассматривать задачи проектирования траекторий в постановке задач оптимизации управляемых динамических систем, решение которых, в общем случае, представляется весьма нетривиальным. А методы и подходы, предлагаемые в рамках настоящей работы, позволяют получать решения подобных проблем при значительном усложнении (или уточнении) их постановок, при этом используя для этих целей все тот же классический математический аппарат.

Целью диссертационной работы является увеличение эффективности космических транспортных систем при реализации межорбитальных перелетов. Для достижения этой цели проведена разработка и апробация универсальной методики решения задач оптимизации многовиткового межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом влияния действующих возмущений. Методика основана на применении нового математического аппарата. При рассмотрении конкретных типов межорбитального перелета ставится задача выявления степени влияния возмущений на полученное оптимальное решение и оценка возможности его дальнейшего использования при построении номинальной траектории межорбитального перелета.

Методы проведения исследования – расчетно-теоретические. В настоящей работе в качестве основного метода решения рассматриваемых задач оптимизации выступает непрямой метод – принцип максимума Понтрягина. Во многом, его применение является основополагающим, т.к. из его формализма напрямую вытекает основная идея, используемая автором работы. К тому же в диссертации весьма подробно освещены методы численного дифференцирования, так как они также составляют неотъемлемую часть предлагаемой методики решения возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ. Изложение соответствующей теории носит преимущественно обзорный характер, хотя ряд ее результатов были получены лично автором.

Достоверность полученных результатов обоснована точностью и строгостью общей математической формализации рассматриваемых в работе оптимизационных проблем с помощью известных методов, повсеместно использующихся при решении аналогичного типа

задач оптимизации межорбитального перелета и широко освещенных в многочисленных работах и книгах по данной тематике. Результаты, полученные в данной работе (по возможности) сравнивались с опубликованными результатами решения аналогичных задач других авторов.

Соответствие паспорту специальности. Работа соответствует паспорту специальности 05.07.09 – «Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов». В качестве управляемой динамической системы (объекта) в работе непосредственно рассматривается КА с ЭРДУ. Основная часть исследования направлена на построение оптимальных траекторий возмущенного движения КА (описываемого в рамках сложной модели), а также проведение их качественного и количественного анализа. Для получения последних используются известные методы механики космического полета с малой тягой, теории оптимального управления, а также численные методы дифференцирования, решения краевых задач и задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Работа имеет выраженный прикладной характер и относится к отрасли технических наук.

Научная новизна диссертационной работы заключается:

- в создании универсальной методики решения и исследования задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом действия возмущений, построенной на использовании математического аппарата дуальных чисел и элементов теории функции дуального переменного, и вытекающей из канонического формализма принципа максимума;
- в проведении качественного анализа полученных с помощью этой методики решений возмущенных задач оптимизации конкретного типа межорбитального перелета;
- ряд новых результатов получен автором в рамках рассмотрения ряда теоретических аспектов используемых методов численного дифференцирования, основанных на применении аппарата дуальных чисел. К ним можно отнести:
 - определение условий аналитичности для функции многомерного (т.е. с векторной дуальной частью) дуального переменного (нескольких дуальных переменных) и установление «структуры» аналитической функции многомерного дуального переменного в целом;
 - выявление общего свойства, однозначно определяющего связь действительностнозначной функции действительного аргумента и ее «аналитического» продолжения на дуальную плоскость (и ее многомерные расширения), и дающего возможность полноценного теоретического обоснования применяемым в работе методам численного дифференцирования;
- в работе рассмотрен ряд новых постановок задачи оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, возникающих при исследовании проблемы оптимального маневрирования аппарата (на отдельных этапах его полета) в окрестности ГСО, предназначенного для буксировки на орбиты захоронения более нефункционирующих КА (объектов космического мусора (КМ)).
- реализация предлагаемой в работе общей методики решения возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета потребовала от автора написания специального программного обеспечения на языке FORTRAN, с помощью которого производились необходимые вычисления над пространством дуальных чисел, посредством переопределения ряда основных элементарных функций и перегрузки базовых процедур.

Практическая значимость настоящей работы состоит в следующем. Во-первых, разработана и теоретически обоснована методика и общий базовый подход к решению специального класса задач траекторной оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ. Разработанная методика весьма универсальна и может быть широко использована при решении различных задач баллистического проектирования для КА произвольного типа. Во-

вторых, разработаны алгоритмы и создан пакет программ, реализующих предложенную в работе методику. Они могут быть использованы при проектировании межорбитальных перелетов КА с двигателями малой тяги.

Выносимые на защиту результаты и положения:

- разработана и теоретически обоснована универсальная методика решения задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, управляемое движение центра масс которого описывается сложной математической моделью, учитывающей влияние различных возмущающих факторов на его траекторию;
- разработана и теоретически обоснована методика совместного использования метода продолжения по параметру и дуальных чисел, позволяющая расширить область применения последнего при численном решении невозмущенных задач межорбитального перелета КА с ЭРДУ;
- результаты качественного анализа полученных оптимальных решений возмущенной задачи при рассмотрении конкретного типа межорбитального перелета КА с ЭРДУ (с начальной круговой или эллиптической орбиты – на ГСО);
- ряд теоретических аспектов, связанных с элементами теории аналитической функции дуального переменного.

Личный вклад и публикации. Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично автором. Основные результаты опубликованы в 3 работах автора [1-3], входящих в рецензируемые издания из списка ВАК Минобрнауки России. Полученные в диссертационной работе результаты обсуждались на следующих российских и международных конференциях:

- XIII Международная конференция «Авиация и космонавтика», МАИ, Москва, ноябрь 2014
- XII конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные исследования» ИКИ РАН, Москва, апрель 2015
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным вопросам теоретической и прикладной механики, Симпозиум Механика, Казань, август 2015
- L научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга, сентябрь 2015
- XIV Международная конференция «Авиация и космонавтика», МАИ, Москва, ноябрь 2015
- 6th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques (ICATT), Darmstadt, март 2016

Также результаты работы неоднократно обсуждались на семинаре «Механика космического полета», проводимого кафедрой 601 «Космические системы и ракетостроение» в МАИ.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка используемых источников. Объем работы составляет 282 страницы (основная часть работы - 184 страницы, приложение – 91 страница). Работа содержит 80 рисунков и 3 таблицы. Список используемых источников содержит 103 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описываются и обосновываются базовые аспекты и положения, связанные с актуальностью тематики исследования настоящей диссертационной работы. Формулируются ее основные цели и результаты. Освещаются основные положения, позволяющие дать общее теоретическое описание сути предлагаемой в работе методики решения задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом влияния возмущений. Для этого приводится краткое описание существующих методов решения задач оптимизации управляемых динамических систем (объектов), в свою очередь, во многом формирующих (наравне с элементами небесной механики) основное теоретическое ядро методов механики космического полета с малой тягой как самостоятельной научной дисциплины, а также подчеркиваются их важные особенности и недостатки. Последнее осуществляется путем качественного сравнения базовых теоретических аспектов и формализма для двух основных классов, составляющих методы оптимизации управляемых

динамических систем – прямых и непрямых. Наиболее подробно освещаются характерные особенности формализма, общие для непрямых методов вариационной группы, из которых непосредственно и вытекает основная методическая идея работы.

В **первой главе** диссертационной работы подробно освещаются математические модели, используемые для описания управляемого движения центра масс КА с ЭРДУ, а также для описания принимаемых во внимание (учитываемых) возмущающих факторов. Формулируются постановки трех базовых оптимизационных проблем межорбитального перелета КА с ЭРДУ, рассматриваемых в работе, и проводится их строгая математическая формализация. Для решения последних записывается полный набор необходимых условий оптимальности используемого в работе (в качестве основного) непрямого метода оптимизации вариационной группы – принципа максимума Понтрягина. Проводится подробный анализ полученных условий оптимальности. В явном виде приведены и сформулированы основные типы краевых задач, каждый из которых отвечает конкретному «базовому» типу межорбитального перелета (напрямую определяемого краевыми условиями), и решаемых в рамках настоящей диссертационной работы.

Управляемое возмущенное движение центра масс КА с ЭРДУ описывается системой дифференциальных уравнений в равноденственных элементах:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = 2 \frac{p^{3/2}}{b_1} T^\Sigma, \\ \frac{de_x}{dt} = \frac{p^{1/2}}{b_1} \left(((1+b_1)\cos(l) + e_x) T^\Sigma + b_1 \sin(l) S^\Sigma - e_y b_2 W^\Sigma \right), \\ \frac{de_y}{dt} = \frac{p^{1/2}}{b_1} \left(((1+b_1)\sin(l) + e_y) T^\Sigma - b_1 \cos(l) S^\Sigma + e_x b_2 W^\Sigma \right), \\ \frac{di_x}{dt} = \frac{1}{2} \frac{p^{1/2}}{b_1} b_3 \cos(l) W^\Sigma, \quad \frac{di_y}{dt} = \frac{1}{2} \frac{p^{1/2}}{b_1} b_3 \sin(l) W^\Sigma, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{b_1^2}{p^{3/2}} + p^{1/2} \frac{b_2}{b_1} W^\Sigma, \end{cases} \quad (1)$$

где b_1 , b_2 , и b_3 : $b_1=1+e_x\cos(l)+e_y\sin(l)$, $b_2=i_x\sin(l)-i_y\cos(l)$, $b_3=1+i_x^2+i_y^2$. В правых частях системы (1) S^Σ , T^Σ , W^Σ - компоненты суммарных возмущающих ускорений (записанные в орбитальной системе координат): $S^\Sigma=S_a+S_\phi$, $T^\Sigma=T_a+T_\phi$, $W^\Sigma=W_a+W_\phi$, где S_ϕ , T_ϕ , и W_ϕ - радиальная, трансверсальная и бинормальная компоненты возмущающего ускорения (суммарные), а S_a , T_a , и W_a – соответствующие компоненты вектора реактивного ускорения.

При исследовании движения КА к системе (1) необходимо присоединить дифференциальное уравнение относительно массы КА. Правая часть данного уравнения разнится в зависимости от используемой математической модели функционирования ЭРДУ. В настоящей работе рассматривается *две модели функционирования*:

- нерегулируемый двигатель ограниченной тяги (ОТ): в этом случае, величина тяги ЭРД вместе со скоростью истечения рабочего тела предполагаются постоянными, при этом двигатель может быть только включен или выключен (эта модель является наиболее реалистичной);
- идеально-регулируемый двигатель ограниченной мощности (ОМ): в этом случае предполагается лишь постоянство реактивной мощности струи ЭРД; регулирование величины тяги и скорости истечения подчиняется лишь общему ограничению на мощность.

Дифференциальное уравнение относительно текущей массы КА в случае рассмотрения первой математической модели функционирования ЭРДУ дается следующим выражением:

$$\frac{d}{dt} m^{or} = -\delta \frac{P}{w}, \quad (2)$$

где P – фиксированное значение тяги ЭРДУ (Н), w – фиксированная скорость истечения рабочего тела (м/с). Параметр δ (безр.) определяет режим работы нерегулируемого двигателя,

т.е. включен он или выключен: $\delta = \{0,1\}$. Дифференциальное уравнение относительно массы КА при рассмотрении второй математической модели функционирования ЭРДУ:

$$\frac{d}{dt} m^{OM} = -\frac{m^2 a^2}{2N_r}, \quad (3)$$

где m – масса КА (кг), N_r – реактивная мощность струи ЭРД (Вт), a – модуль вектора реактивного ускорения (м/с^2): $a = \|a_r, a_n, a_b\|_E$, где a_r, a_n и a_b – радиальная, трансверсальная и бинормальная компоненты реактивного ускорения в орбитальной системе координат.

В случае рассмотрения модели нерегулируемого двигателя компоненты реактивного ускорения в осях орбитальной системы координат определяются следующими выражениями:

$$S_a^{OT} = \delta \frac{P}{m} \sin(\vartheta) \cos(\psi), T_a^{OT} = \delta \frac{P}{m} \cos(\vartheta) \cos(\psi), W_a^{OT} = \delta \frac{P}{m} \sin(\psi).$$

В свою очередь, они также получают индекс «OT». В приведенных выражениях ϑ – угол тангажа КА, который изменяется в диапазоне $[-180^\circ, 180^\circ]$; ψ – угол рысканья, диапазон его значений составляет $[-90^\circ, 90^\circ]$ градусов. Заданием пары значений (ϑ, ψ) непосредственно определяется направление вектора реактивного ускорения тяги ЭРДУ в каждый момент времени.

В случае рассмотрения модели идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности, компоненты реактивного ускорения определяются как

$$S_a^{OM} = a_r, T_a^{OM} = a_n, W_a^{OM} = a_b.$$

Фазовый вектор \mathbf{x} системы дифференциальных уравнений управляемого движения КА с ЭРДУ будем обозначать (для OT и OM модели функционирования ЭРДУ):

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^7, \mathbf{x} = \mathbf{x}^{OT} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, l, m^{OT})^T, \mathbf{x} = \mathbf{x}^{OM} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, l, m^{OM})^T,$$

В приведенных выражениях символом \mathbf{X} обозначено фазовое пространство системы.

Полагаем, что действующие на КА с ЭРДУ возмущающие ускорения в общем случае могут быть представлены в следующем виде:

$$S_\Phi = S_\Phi(\mathbf{x}, t), T_\Phi = T_\Phi(\mathbf{x}, t), W_\Phi = W_\Phi(\mathbf{x}, t), S_\Phi(\cdot), T_\Phi(\cdot), W_\Phi(\cdot) \in C^1((\mathbf{X} \times \mathbf{R}), \mathbf{R}),$$

т.е. как непрерывные вместе со своими частными производными по совокупности переменных функции от фазовых координат КА и времени.

В качестве основных критериев качества проектируемого межорбитального перелета рассматривались три терминальных функционала, которые требовалось минимизировать:

$$J_m = -m(t_f), \quad (4)$$

$$J_T = t_f - t_0, \quad (5)$$

$$J_P = P(t_f). \quad (6)$$

Минимизации функционала (4) отвечает максимизация массы КА в конечный момент времени, что, в свою очередь, часто эквивалентно минимизации затрат топлива на выполнение требуемого маневра. Моменты времени t_0 и t_f , определяющие границы отрезка времени Δ , на котором рассматривается движение КА с ЭРДУ, в данном случае предполагаются зафиксированными, или, по крайней мере, зафиксирован сам отрезок Δ . Функционал (4) рассматривается в работе для обеих математических моделей функционирования ЭРДУ, и, как будет показано далее, порождает две различные задачи оптимального управления: «OT-задача» и «OM-задача».

Минимизация функционала (5), очевидно, отвечает минимизации времени перелета КА с ЭРДУ. Другими словами, следуя общепринятой терминологии задач оптимального управления, функционалу (5) соответствует т.н. задача быстрогодействия. Моменты времени t_0 и t_f в наиболее общем случае предполагаются заданными. Функционалы (4) и (5) являются основными критериями качества для рассматриваемых в настоящей работе задач оптимизации траекторий межорбитальных перелетов КА с ЭРДУ. Задачи с функционалом (5) рассматриваются в работе только для модели нерегулируемого двигателя (OT).

Решению соответствующей задачи оптимального управления с функционалом (6) отвечает определение минимально возможного значения тяги ЭРДУ, потребного для осуществления заданного маневра. Функционал (6) также рассматривается только для модели нерегулируемого двигателя (ОТ).

В работе записываются условия оптимальности для рассматриваемых типов задач траекторной оптимизации – для этого используется принцип максимума Понтрягина. Следуя его общему формализму, получаем соответствующие выражения оптимального управления для обеих математических моделей функционирования ЭРДУ, вне зависимости от вида конкретного функционала (4) – (6). Это возможно вследствие рассмотрения задач траекторной оптимизации, формализованных именно в постановке Майера (что представляется весьма удобным в данном конкретном случае, ввиду наличия различных дифференциальных связей). Необходимо отметить, что задача определения минимальной потребной тяги (6) рассматривается в работе исключительно в контексте модели нерегулируемого двигателя. Ей будет отвечать тот же вид оптимального управления, что и для соответствующих ОТ-задач с функционалами (4) или (5).

Для модели нерегулируемого двигателя («ОТ»-задача для функционалов (4) - (6)) к системе дифференциальных уравнений (1) присоединяется уравнение для массы (2). В качестве управления рассматривается следующая тройка функций: $\mathbf{u}^{OT}(t)=(\vartheta(t),\psi(t),\delta(t))$. Множество допустимых управлений определяется как

$$U^{OT} \subset \mathbf{R}^3 = \{(\vartheta(t), \psi(t), \delta(t)) : \forall t \in \Delta \ \vartheta(t) \in [-180^\circ, 180^\circ], \psi(t) \in [-90^\circ, 90^\circ], \delta(t) \in [0, 1]\}.$$

В работе в качестве множества значений, принимаемых параметром δ , рассматривается не пара точек $\{0, 1\}$, а весь отрезок $[0, 1]$. Это облегчает рассмотрение ОТ задач оптимального управления с методической точки зрения, т.к. в этом случае все управление может быть представлено в «гладкой» форме, т.е. описываться некоторым набором «функциональных» ограничений. Функция Понтрягина $H^{OT}(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^{OT}(t), \mathbf{u}^{OT}(t), t)$ вводится следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} H^{OT} &= H^{OT}_1 + H_2 + H_3 + \psi_t, \\ H^{OT}_1 &= \delta \frac{P}{m} [a_1 \sin(\vartheta) \cos(\psi) + a_2 \cos(\vartheta) \cos(\psi) + a_3 \sin(\psi)] - \psi_m \delta \frac{P}{w}, \\ H_2 &= a_1 S_\Phi(\mathbf{x}^{OT}, t) + a_2 T_\Phi(\mathbf{x}^{OT}, t) + a_3 W_\Phi(\mathbf{x}^{OT}, t), \quad H_3 = \psi_l \frac{b_1^2}{p^{3/2}}, \end{aligned} \right\}$$

где $\boldsymbol{\psi}(t)=(\boldsymbol{\psi}_x(t), \psi_t(t))$ – вектор функция сопряженных переменных, $\boldsymbol{\psi}(t) \in BV(\Delta, \mathbf{R}^8)$, $\boldsymbol{\psi}_x(t)=(\psi_p(t), \psi_{ex}(t), \psi_{ey}(t), \psi_{ix}(t), \psi_{iy}(t), \psi_l(t), \psi_m(t))^T$, H^{OT}_1 – часть функции Понтрягина, зависящая только от управления, H_2 – часть, содержащая возмущения, H_3 – часть, пропорциональная мгновенному среднему движению КА. Выражения для a_1, a_2, a_3 определяются следующим образом: $a_1 = \sqrt{p}(\psi_{ex} \sin(l) - \psi_{ey} \cos(l))$, $a_2 = \sqrt{p/b_1}(2p\psi_p + \psi_{ex}((1+b_1)\cos(l) + e_x) + \psi_{ey}((1+b_1)\sin(l) + e_y))$, $a_3 = \sqrt{p/b_1}(b_2(\psi_l - \psi_{ex}e_y + \psi_{ey}e_x) + 0.5b_3(\psi_{ix}\cos(l) + \psi_{iy}\sin(l)))$.

Следуя формализму принципа максимума, получаем выражения для оптимального управления при рассмотрении модели нерегулируемого двигателя («ОТ-задача»):

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vartheta)^* &= a_2 / \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \sin(\vartheta)^* &= a_1 / \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \cos(\psi)^* &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} / \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ \sin(\psi)^* &= a_3 / \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{aligned} \right\}, \quad \delta(t)^* = \begin{cases} 1, & \Pi > 0; \\ 0, & \Pi < 0; \\ \forall \delta \in [0, 1], & \Pi = 0, \end{cases}$$

$$\Pi(t) = \frac{1}{m} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \frac{\psi_m}{w}$$

и выражение для оптимального гамильтониана H^{OT*} :

$$H^{OT*} = H^{OT} \left(\boldsymbol{\psi}(t)^*, \mathbf{x}^{OT}(t)^*, \mathbf{u}^{OT_1}(t)^*, t \right) = \delta^* P \left[\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{m} - \frac{\psi_m}{w} \right] + H_2 + H_3 + \psi_t. \quad (7)$$

Для модели идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности («ОМ-задача» с функционалом (4)) в качестве вектор-функции управления в работе рассматривается следующая тройка функций: $\mathbf{u}^{OM}(t) = (a_r(t), a_n(t), a_b(t))$. Множество допустимых управлений U в этом случае определяется как $U^{OM} \equiv \mathbf{R}^3$. Функция Понтрягина $H^{OM}(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^{OM}(t), \mathbf{u}^{OM}(t), t)$:

$$\left. \begin{aligned} H^{OM} &= H^{OM}_1 + H_2 + H_3 + \psi_t, \quad H^{OM}_1 = a_1 a_r + a_2 a_n + a_3 a_b - \psi_m \frac{m^2 (a_r^2 + a_n^2 + a_b^2)}{2N_r} \\ H_2 &= a_1 S_\Phi(\mathbf{x}^{OM}, t) + a_2 T_\Phi(\mathbf{x}^{OM}, t) + a_3 W_\Phi(\mathbf{x}^{OM}, t), \quad H_3 = \psi_l \frac{b_1^2}{p^{3/2}}. \end{aligned} \right\}$$

Соответствующие выражения для оптимального управления и оптимального гамильтониана H^{OM*} : $a_r^* = a_1(N_r/m^2\psi_m)$, $a_n^* = a_2(N_r/m^2\psi_m)$, $a_b^* = a_3(N_r/m^2\psi_m)$,

$$H^{OM*} = H^{OM} \left(\boldsymbol{\psi}(t)^*, \mathbf{x}^{OM}(t)^*, \mathbf{u}^{OM}(t)^*, t \right) = \frac{1}{2} \frac{N_r (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{m^2 \psi_m} + H_2 + H_3 + \psi_t. \quad (8)$$

При рассмотрении «ОТ-задачи» с функционалом (6) фазовый вектор «расширенной» системы дифференциальных уравнений есть: $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^{7+1}$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^{OT} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, m^{OT}, P)^T$. Функция Понтрягина рассматриваемой задачи:

$$\left. \begin{aligned} H_p^{OT} &= H_p^{OT_1} + H_2 + H_3 + \psi_t, \\ H_p^{OT_1} &= \delta \frac{P}{m} [a_1 \sin(\vartheta) \cos(\psi) + a_2 \cos(\vartheta) \cos(\psi) + a_3 \sin(\psi)] - \psi_m \delta \frac{P}{w} + \psi_p \frac{dP}{dt}. \end{aligned} \right\}$$

В приведенном выражении H_2 и H_3 определяются как и ранее. Очевидно, что $H_p^{OT_1} = H^{OT_1}$, и оптимальное управление определяется аналогично «ОТ-задачи» с функционалами (4) и (5). Выражение для оптимального гамильтониана совпадает с (7). Фазовому вектору \mathbf{x}_1 отвечает следующая вектор-функция сопряженных переменных: $\boldsymbol{\psi}_1(t) = (\boldsymbol{\psi}_{x_1}(t), \psi_t(t))$, $\boldsymbol{\psi}_{x_1}(t) = (\psi_p(t), \psi_{e_x}(t), \psi_{e_y}(t), \psi_{i_x}(t), \psi_{i_y}(t), \psi_l(t), \psi_m(t), \psi_p(t))^T$.

В работе предполагается, что концевой блок для рассматриваемых типов задач с функционалами (4) - (6) всегда описывается выражениями следующего общего вида: $\mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) \leq \mathbf{0}$, где \mathbf{G}_0 , \mathbf{G}_f , \mathbf{K}_0 , \mathbf{K}_f – непрерывные вместе со своими частными производными вектор-функции. В качестве примера явного определения последних, приведем соответствующие выражения, отвечающие краевым условиям для межорбитального перелета типа «орбита-орбита»: $\mathbf{G}_0(t_0, \boldsymbol{\beta}(t_0)) = \boldsymbol{\beta}(t_0) - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_0$, $\mathbf{G}_f(t_f, \boldsymbol{\beta}(t_f)) = \boldsymbol{\beta}(t_f) - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_f$, $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_f = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) \setminus \{l\}$, $\boldsymbol{\beta}(t_f) = \mathbf{x}(t_f) \setminus \{l, m\}$, $\boldsymbol{\beta}(t_0), \widehat{\boldsymbol{\beta}}_0 \in \mathbf{R}^7$, $\boldsymbol{\beta}(t_f), \widehat{\boldsymbol{\beta}}_f \in \mathbf{R}^6$, где $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_0$, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_f$ – вектора, содержащие значения известных компонентов фазового вектора КА в начальный и конечный моменты времени. Тогда, согласно принятым обозначениям, для функционалов (4) и (5) терминант (концевая функция Лагранжа) определяется как ($\beta = \{m, T\}$):

$$l_\beta = \alpha_0 J_{(\beta)} + \lambda_0^T \mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \lambda_f^T \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \alpha_1^T \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \alpha_2^T \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)),$$

а для функционала (6)

$$\left. \begin{aligned} l_p &= \alpha_0 P(t_f) + \lambda_0^T \mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \lambda_f^T \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \alpha_1^T \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \alpha_2^T \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \\ &+ \alpha_p (-P(t_0)) + \alpha_{p_{\max}} (P(t_0) - P_{\max}). \end{aligned} \right\}$$

В работе условия трансверсальности записаны в следующем виде. Для функционалов (4)-(6):

$$\left. \begin{aligned}
& \psi_\eta(t_0) = \frac{\partial l_\beta}{\partial \eta} \Big|_{t_0}, \quad \psi_\eta(t_f) = \frac{\partial l_\beta}{\partial \eta} \Big|_{t_f}, \quad \eta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y, l\}, \quad \beta = \{m, T, P\}; \\
& \psi_m(t_0) = \frac{\partial l_m}{\partial m} \Big|_{t_0}, \quad \psi_m(t_f) = -\frac{\partial l_m}{\partial m} \Big|_{t_f} = \alpha_0, \quad \psi_t(t_0) = \frac{\partial l_m}{\partial t_0}, \quad \psi_t(t_f) = -\frac{\partial l_m}{\partial t_f} \leftarrow J_m; \\
& \psi_m(t_0) = \frac{\partial l_T}{\partial m} \Big|_{t_0}, \quad \psi_m(t_f) = -\frac{\partial l_T}{\partial m} \Big|_{t_f} = 0, \quad \psi_t(t_0) = -\alpha_0 + \frac{\partial}{\partial t_0} (\lambda_0^T \mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \mathbf{a}_1^T \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0))), \\
& \psi_t(t_f) = -\alpha_0 - \frac{\partial}{\partial t_f} (\lambda_f^T \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \mathbf{a}_2^T \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f))) \leftarrow J_T; \\
& \psi_m(t_0) = \frac{\partial l_P}{\partial m} \Big|_{t_0}, \quad \psi_m(t_f) = -\frac{\partial l_P}{\partial m} \Big|_{t_f} = 0, \\
& \psi_P(t_0) = \frac{\partial l_P}{\partial P} \Big|_{t_0} = -\alpha_P + \alpha_{P_{\max}}, \quad \psi_P(t_f) = -\frac{\partial l_P}{\partial P} \Big|_{t_f} = -\alpha_0, \quad \psi_t(t_0) = \frac{\partial l_P}{\partial t_0}, \quad \psi_t(t_f) = -\frac{\partial l_P}{\partial t_f} \leftarrow J_P.
\end{aligned} \right\}$$

К ним присоединяются соответствующие условия дополняющей нежесткости, неотрицательности и нетривиальности: $\alpha_1 \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}$, $\alpha_2 \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{0}$, $\alpha_P(-P(t_0)) = 0$, $\alpha_{P_{\max}}(P(t_0) - P_{\max}) = 0$, $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_P \geq 0$, $\alpha_{P_{\max}} \geq 0$, $\alpha_{1i} \geq 0$, $\alpha_{2j} \geq 0$, $i = 1..p$, $j = 1..q$, $\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_{1i} + \sum_{j=1}^q \alpha_{2j} + \|\lambda_0\|_E + \|\lambda_f\|_E > 0$, $\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_{1i} + \sum_{j=1}^q \alpha_{2j} + \alpha_{P_{\max}} + \alpha_P + \|\lambda_0\|_E + \|\lambda_f\|_E > 0$; и присоединяется условие максимума в виде: $H^{OT^*} \equiv 0$, $H^{OM^*} \equiv 0 \quad \forall t \in \Delta$.

Соответствующие рассматриваемым задачам дифференциальные уравнения для сопряженных переменных определены в работе в неявном виде: $d\psi_{\mathbf{x}}/dt = -\partial H^\mu / \partial \mathbf{x}^\mu$, $d\psi_t/dt = -\partial H^\mu / \partial t^\mu$, $\mu = \{OT^*, OM^*\}$ (согласно основной идеи предлагаемой методики), за исключением уравнений для сопряженных переменных к массе (безр.) КА и тяги (безр.) ЭРДУ.

Также в первой главе показано, что для всех рассматриваемых постановок задач оптимизации межорбитального перелета с функционалами вида (4) - (6) сопряженная переменная ψ_t всегда может быть исключена из рассмотрения. Получены и проанализированы условия оптимальности дат старта и финиша межорбитального перелета. В качестве нормирующего множителя для всех рассматриваемых постановок задач выбран $\alpha_0 = 1$. Показана справедливость использования данной нормировки.

Согласно формализму принципа максимума, полученные условия оптимальности редуцируют рассматриваемые оптимизационные проблемы к краевым задачам. Наборы краевых условий, описывающих рассматриваемые в работе типы межорбитального перелета, приведены в работе в явном виде. В частности, при перелете «точка - точка» предполагается что угловое положение КА с ЭРДУ на начальной и конечной орбитах (как и соответствующие элементы орбит), заранее известно и зафиксировано, путем задания соответствующих значений истинной аномалии - v_0 и v_f . Концевой блок задачи дополняется следующими условиями: $l(t_0) - (\Omega_0 + \omega_0 + v_0) = 0$, $\cos(l(t_f) - (\Omega_f + \omega_f + v_f)) - 1 = 0$.

Так же, в первой главе дается подробное описание принятой в работе модели возмущений. В качестве основных возмущающих факторов рассматриваются следующие:

- возмущения, связанные с нецентральностью гравитационного поля Земли;
- возмущения, вызванные притяжением Луны и Солнца.

Компоненты возмущающих ускорений, описывающих влияние нецентральности гравитационного поля Земли, определялись как частные производные от «возмущающей» части силовой функции U_P (геопотенциала) в гринвичской (связанной с Землей, вращающейся) системе координат ITRS:

$$a_x = \frac{\partial U_P}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial U_P}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial U_P}{\partial y}, \quad U_P = \frac{\mu}{r} \cdot \left[\sum_{n=2}^N c_{n0} \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_n^0 + \sum_{n=2}^M \left(\frac{R_e}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n (c_{nm} C_m + d_{nm} S_m) P_n^m \right],$$

где x , y , z – известные компоненты радиус-вектора КА в ITRS. Для определения компонент возмущающих ускорений от нецентральности гравитационного поля Земли в осях орбитальной системы координат, осуществлялась следующая цепочка переходов:

- переход из вращающейся гринвичской системы координат ITRS в геоцентрическую геоэкваatoriальную (невращающуюся) ICRS,
- переход из ICRS в равноденственную систему координат,
- переход из равноденственной системы координат в орбитальную,

Для осуществления подобных переходов между системами координат выполнялись надлежащие преобразования времени, посредством которых определяются элементы переходных матриц. Так, например, зная положения КА в орбитальной системе координат в какой-то текущий момент t по всемирному координатному времени (UTC), для определения соответствующих гринвичских координат КА необходимо осуществить переход к земному времени (ТТ) и т.д. При программной реализации решения для осуществления всех потребных преобразований координат и времени использовалась библиотека вычислительных процедур международного астрономического союза IAU SOFA (Standards of Fundamental Astronomy).

Вектор возмущающего ускорения КА \mathbf{a}_{pert} , вызванного влиянием притяжения Луны и Солнца в геоинерциальной геоэкваatoriальной системе координат (ICRS) определялся следующим образом: $\mathbf{a}_{pert} = \sum_{j=1}^2 \mu_j [(\mathbf{r}_j - \mathbf{r})/|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|^3] - (\mathbf{r}_j/|\mathbf{r}_j|^3)$, где \mathbf{r} – радиус-вектор КА, \mathbf{r}_j – радиус-вектор, определяющий положение j -ого небесного тела относительно Земли (Солнце и Луна) на некоторый текущий момент времени, μ_j – гравитационный параметр j -ого небесного тела. Для определения координат векторов \mathbf{r}_j на некоторый текущий момент времени использовалось эфемеридное обеспечение JPL DE421. Для вычисления компонент вектора \mathbf{a}_{pert} в орбитальной системе координат также применялась описанная ранее цепочка переходов между системами координат и соответствующие преобразования времен.

Во **второй главе** диссертационной работы описывается теоретическое ядро, формирующее основу для предлагаемой автором методики решения задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом влияния возмущений. В качестве базовой, в диссертационной работе используется следующая простая идея: численно определять правые части системы дифференциальных уравнений оптимального управляемого движения КА с ЭРДУ посредством использования известных соотношений, вытекающих из канонического формализма принципа максимума.

Сравнительно недавно, был предложен новый метод численного дифференцирования, использование которого полностью снимает всякую зависимость ошибки вычисления требуемой производной от величины шага. Более того, данный метод позволяет вычислять производную функции в точке с относительной точностью, равной общей относительной точности проводимых вычислений, так как ошибка усечения при его использовании всегда тождественно равна нулю. Данный метод численного дифференцирования функции основывается на использовании ряда алгебраических свойств т.н. *дуальных чисел*, представляющих собой одну из канонических систем самых общих комплексных чисел. Сам метод в настоящее время освещен в литературе лишь в минимально необходимой для понимания степени. При этом основные теоретические вопросы, связанные с алгеброй дуальных чисел и их многомерных расширений, а также связанные с построением аналитического продолжения действительнзначной функции действительного аргумента $f(x)$ на дуальную плоскость, нигде в подобных работах и вовсе не затрагиваются. Для строго обоснования метода численного дифференцирования необходимо использовать теорию функции дуального переменного, которая в полной мере в литературе нигде не изложена.

Во второй главе работы приводится понятие дуального числа, как упорядоченной пара действительных чисел $\langle x, x' \rangle$, $x, x' \in \mathbf{R}$ представимой (в соответствии с определением своих базовых алгебраических операций сложения и умножения) в виде $x^d = x + \varepsilon x'$. Здесь, как и для обыкновенных комплексных чисел, x – действительная часть числа, x' – дуальная (т.е. мнимая) часть, а ε – нильпотентный элемент рассматриваемой алгебры, точка, принадлежащая

дуальной плоскости D . Для последнего характерно следующее, важное для всего дальнейшего изложения свойство: $\varepsilon \neq 0, \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \dots = (\varepsilon^2) \cdot \varepsilon \cdot \dots = 0$.

Также, кратко приводится понятие многомерного дуального числа, или дуального числа с векторной дуальной частью: $x^d = x \cdot 1 + \varepsilon_1 x' + \varepsilon_2 x'' + \dots + \varepsilon_n x^{(n)}$, где, как и ранее, x – действительная часть числа, а x', x'', \dots – компоненты векторной дуальной части числа, ε_i – соответствующие нильпотентные элементы.

В главе приводится обоснование метода численного дифференцирования, основанного на применении алгебры дуальных чисел. Показано, что производная функции $f(x)$ равна дуальной части функции $f(x + \varepsilon \cdot 1)$. Приводится краткое обоснование методики численного определения производных скалярной функции нескольких аргументов с помощью использования многомерного варианта дуальных чисел.

Во второй главе показано, что методы численного дифференцирования функций, основанные на применении математического аппарата дуальных чисел, в отличие от разностных методов и метода комплексного шага:

- обеспечивают относительную точность вычисления производных равную относительной точности вычисления функции;
- их результат не зависит от величины шага дифференцирования h , т.е. полностью снимаются вопросы относительно его выбора;
- в отличие от метода комплексного шага порядки действительной и мнимой (дуальной) частей совпадают.

Для использования метода численного дифференцирования функций, основанного на математическом аппарате дуальных чисел, необходимо проводить все вычисления над элементами дуальной плоскости (или над вариантами ее многомерных расширений). Для этого требуется программно реализовать новый тип чисел (дуальных), определить все необходимые алгебраические и элементарные операции над ними, а также построить дуальное представление для основного набора из необходимых при проведении вычислений элементарных функций. Для всех вычислений над пространством дуальных чисел, осуществленных в рамках данной работы, автор использовал собственную реализацию программного модуля на языке FORTRAN, содержащего описание типа, алгебраических и элементарных операций и необходимого набора функций.

В главе проведено описание предлагаемой в работе методики решения возмущенных задач. Согласно каноническому формализму принципа максимума, искомые правые части системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА с ЭРДУ определяются через оптимальный гамильтониан ((7) или (8)) задачи следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H^*}{\partial \boldsymbol{\psi}}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{x}}. \quad (9)$$

Тогда, зная выражение для оптимального гамильтониана задачи H^* , для вычисления соответствующих правых частей в уравнениях (9) достаточно воспользоваться каким-либо методом численного дифференцирования. Для определения значений правых частей системы (9) необходимо вычислить все частные производные от одной скалярной функции $2 \cdot n$ аргументов H^* с помощью дуальных чисел. Как показано в работе, для этого наиболее удобно использовать числа с векторной дуальной частью. При этом, размерность векторной дуальной части, также следует положить равной $2 \cdot n$, в соответствии с общим количеством производных, подлежащих определению. Далее, дуальное представление для оптимального гамильтониана H^* . В результате, получим *аналитическую* функцию нескольких многомерных дуальных переменных, основные свойства и особенности структуры которой подробно описаны в приложении настоящей диссертационной работы. Приведем здесь кратко лишь общее определение для данной аналитической функции. Аналитической функцией m многомерных дуальных переменных с размерностью векторной дуальной части равной n будем называть следующую:

$$f_D(\mathbf{x}^d) = u(x_1, x_2, \dots, x_m) + \varepsilon_1 \left(\sum_{i=1}^m x_i' \frac{\partial u}{\partial x_i} + w_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \right) + \varepsilon_2 \left(\sum_{i=1}^m x_i'' \frac{\partial u}{\partial x_i} + w_2(x_1, \dots, x_m) \right) + \left. \begin{aligned} &\dots + \varepsilon_n \left(\sum_{i=1}^m x_i^{n'} \frac{\partial u}{\partial x_i} + w_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \right), \quad w_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^k c_j^{i'} \frac{\partial u}{\partial c_j}. \end{aligned} \right\} (10)$$

Где \mathbf{x}^d – векторный многомерный дуальный аргумент, D^m – m -мерное пространство дуальных чисел, u и w_i – действительнзначные функции действительных аргументов, которые предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам на соответствующих значениях элементов из некоторой области. Структура аналитической (в некоторой рассматриваемой области) функции дуального переменного получена автором исходя из условий D^m -дифференцируемости (см. Приложение). Также в Приложении показано, что для построения дуального представления $f_D(\mathbf{x}^d)$ для скалярной действительнзначной функции векторного действительного аргумента $f(\mathbf{x})$, достаточно всего лишь положить

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = u(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad c_j' = c_j'' = \dots = 0, \quad (11)$$

где c_j' и т.п. – компоненты дуальной части k действительных постоянных, входящих в функцию u . Таким образом, проводя вычисления над элементами m -мерного пространства многомерных дуальных чисел, с использованием специального программного модуля, соответствующее дуальное представление (аналитическое) для любой функции $f(\mathbf{x})$ будет всегда иметь вид (10). Правая часть выражения (10) явно содержит частные производные, значения которых удается легко получить на практике, просто приняв следующее дуальное представление для вектора $(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$:

$$\mathbf{x}^d = \{x_i^d\}, \quad x_i^d = x_i + \varepsilon_i \cdot 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (12)$$

Тогда, проводя всего лишь одно вычисление дуального представления $f_D(\mathbf{x}^d)$ для функции $f(\mathbf{x})$, для аргументов (12), удастся сразу же определить и само значение функции $f(\mathbf{x})$, и значение всех ее соответствующих частных производных. Для этого необходимо, согласно (10) и (11), всего лишь выделить действительную и дуальную (покомпонентно) части полученного выражения. Следовательно, для того чтобы определить *точные* значения правых частей системы дифференциальных уравнений (9), достаточно всего лишь один раз (!) вычислить дуальное представление оптимального гамильтониана, для рассматриваемых в работе типов задач траекторной оптимизации дающегося выражениями (7), (8): $H^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) \rightarrow H^*_D(\mathbf{x}^d, \boldsymbol{\psi}^d)$. Согласно приведенному выше алгоритму определения частных производных, значение функции H^*_D должно вычисляться для следующих значений ее векторных дуальных переменных:

$$\mathbf{x}^d = \{x_i^d\}, \quad x_i^d = x_i + \varepsilon_i \cdot 1, \quad \boldsymbol{\psi}^d = \{\psi_i^d\}, \quad \psi_i^d = \psi_i + \varepsilon_i \cdot 1, \quad (\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbf{R}^{2n}, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (13)$$

В выражениях (13) обозначение n – вновь соответствует размерности фазового вектора \mathbf{x} системы дифференциальных уравнений движения КА (1), (2) или (3). И рассматривая по отдельности действительную и дуальную (покомпонентно) части от вычисленного значения функции H^*_D , определяем значения искомых правых частей системы дифференциальных уравнений (9).

Предлагаемая методика решения подобных задач является универсальной по отношению к возмущениям, учет воздействия которых на траекторию аппарата необходим. Так, общее количество возмущающих факторов, действующих на КА, легко можно расширить при наличии соответствующих математических моделей.

Во второй главе диссертационной работы рассматривается еще один вариант применения дуальных чисел при решении задач оптимизации межорбитального перелета. В данном случае рассматривается возможность их совместного использования с методом продолжения при численном решении краевых задач принципа максимума. В работе дается краткое описание метода продолжения, а также формулировка нескольких вариантов *внешней* задачи Коши, используемых для организации какой-либо схемы решения или исследования

оптимизационной проблемы. Использование математического аппарата дуальных чисел совместно с методом продолжения предполагается только при решении или качественном исследовании *невозмущенных* задач оптимизации межорбитального перелета, ввиду необходимости аналитической записи правых частей системы дифференциальных уравнений вида (9).

Для того, чтобы описать рассматриваемую в работе методику совместного применения дуальных чисел с методом продолжения, необходимо дать краткое описание самого численного метода. Согласно его формализму, решение системы нелинейных уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{z})=\mathbf{0}$ (отвечающей краевой задаче принципа максимума), сводится к решению задачи Коши (*внешней*), которая (в зависимости от «техники» решения краевой задачи) может быть представлена в следующих базовых вариантах ($\mathbf{z}(0)=\mathbf{z}_0, \tau \in [0,1]$):

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}(\tau)}\right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{z}_0), \quad \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}(\tau)}\right)^{-1} \left(\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau}\right), \quad \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}(\tau)}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau}\right).$$

В правые части дифференциальных уравнений внешней задачи Коши входят производные, которые необходимо определять весьма точно (как показано в работе, точность вычисления данных производных может оказывать сильное влияние на сходимость метода продолжения). Использование дуальных чисел позволяет это сделать. Следуя общей методике вычисления производных с использованием дуальных чисел, очевидно, что необходимо просто вычислить дуальное представление для вектор-функции невязок краевой задачи $\mathbf{f}(\mathbf{z})$. Сделать это можно *двумя* путями. Первому из них отвечает применение обыкновенных дуальных чисел. Второму пути отвечает использование дуальных чисел с векторной дуальной частью.

Реализовать на практике предлагаемую методику определения производных, формирующих правые части метода продолжения оказывается непросто. Основной проблемой, возникающей при использовании дуальных чисел совместно с методом продолжения, является, непосредственно, сама *необходимость вычисления* дуального представления $\mathbf{f}_D(\mathbf{z}^d)$ для вектор-функции невязок краевой задачи. Так как для этого, очевидно, требуется численное интегрирование системы дифференциальных уравнений оптимального управляемого движения КА с ЭРДУ над элементами пространства D^n или D^n соответственно. В данной работе предлагается решение данной проблемы, основанное на известном методе решения системы N комплексных дифференциальных уравнений с действительной независимой переменной, суть которого состоит в переходе к некоторой эквивалентной $2N$ системе дифференциальных уравнений, полностью определенных над элементами действительного пространства. Итак, требуется численно проинтегрировать систему следующего вида:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}^d(t) = \mathbf{f}_D^{(x)}(\mathbf{x}^d(t), \boldsymbol{\psi}^d(t), t), \quad \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}^d(t) = \mathbf{f}_D^{(\psi)}(\mathbf{x}^d(t), \boldsymbol{\psi}^d(t), t) \quad (14)$$

где $\mathbf{f}_D^{(x)}, \mathbf{f}_D^{(\psi)}$ - функции дуальных переменных (и одной действительной - t), определяющие соответствующие правые части дуального представления системы дифференциальных уравнений оптимального управляемого движения КА с ЭРДУ. В работе показано, что эквивалентная система дифференциальных уравнений над элементами действительного пространства получается простым выделением действительных и дуальных составляющих компонент из правых частей системы (14). При этом, при проведении вычислений требуется на каждом шаге численного интегрирования вновь вычислять значения правых частей (14). В работе показано, что эквивалентная система дифференциальных уравнений представляет собой систему уравнений в вариациях для (9). Так же проанализированы вычислительные затраты при использовании предлагаемой методики определения производных (16) и отмечены ее достоинства.

В **третьей главе** рассматриваемой диссертационной работы приведены основные качественные и количественные результаты, полученные с помощью применения предлагаемых автором методик поиска и исследования решений траекторных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом влияния действия возмущений,

а также некоторые результаты качественного анализа невозмущенных задач с помощью метода продолжения.

В первом разделе третьей главы диссертационной работы приведены некоторые примеры решения *невозмущенных* задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ для функционалов (4) – (5), полученные с помощью совместного использования метода продолжения и дуальных чисел. Соответствующие им краевые задачи принципа максимума отвечают базовым типам межорбитального перелета: «орбита-орбита», «точка-точка», «орбита-точка» и т.д. Также приведена общая применяемая для всех рассматриваемых типов невозмущенных задач траекторной оптимизации схема решения (как правило, состоящая из двух этапов):

- на первом этапе определяется решение некоторой эквивалентной *вспомогательной* задачи, в качестве которой, для всех рассматриваемых функционалов вида (4) – (6), предлагается использовать *осредненный* вариант основной задачи (в процессе решения на каждом шаге численного интегрирования правые части системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА численно осредняются по времени, при этом согласно предлагаемой методике все вычисления проводятся над элементами пространства дуальных чисел);
- на втором этапе, в качестве начального приближения к решению основной задачи непосредственно используется полученное ранее решение вспомогательной.

В работе описанная схема решения (с использованием численного осреднения) невозмущенных задач оптимизации межорбитального перелета применялась повсеместно при рассмотрении их базовых постановок с функционалами вида (5) – (6) для обеих математических моделей функционирования ЭРДУ. Исключение здесь составляли только задачи траекторной оптимизации с функционалом (4), отвечающим максимизации конечной массы аппарата (т.е., в рамках принятой модели КА - минимизации топлива, затрачиваемого на перелет) при рассмотрении модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги (ОТ-задача с функционалом (4)). Для их решения в работе использовалась следующая схема:

- сначала решается эквивалентная осредненная задача для функционала (4) и ОМ-модели функционирования ЭРДУ;
- далее, полученное на предыдущем этапе решение используется в качестве начального приближения для решения соответствующей неосредненной ОМ-задачи;
- и, наконец, полученное решение неосредненной ОМ-задачи используется уже в качестве начального приближения для решения основной задачи (ОТ-задачи с функционалом (4)).

Описанный подход к решению невозмущенных ОТ-задач межорбитального перелета с функционалом вида (4) использует общую идею выбора начального приближения, которая обычно применяется при решении соответствующих ОТ-задач траекторной оптимизации межпланетного перелета. Практическая реализация описанного подхода к решению рассматриваемого типа задач при использовании метода продолжения может быть независимо проведена двумя различными путями, каждому из которых будет отвечать своя отдельная постановка *внешней* задачи Коши. Первый путь подразумевает использование базового варианта метода продолжения, на основе построения обычной ньютоновской гомотопии. В данном случае, найденное решение неосредненной ОМ-задачи непосредственно используется в качестве начального приближения. Второй путь подразумевает построение непрерывной гомотопии между вспомогательной (ОМ) и основной (ОТ) задачей. Тем самым обеспечивается непрерывное продолжение известного решения вспомогательной задачи в искомое. При этом рассматриваемый процесс продолжения непосредственно обеспечивается за счет простой параметризации системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА с ЭРДУ. Данная параметризация обеспечивает непрерывную трансформацию дифференциальной связи с отвечающей ей сопряженной системой уравнений ОМ-задачи в дифференциальную связь ОТ-задачи. В работе использовался следующий вариант параметризации:

$$\dot{\mathbf{x}} = (1 - \tau) \frac{\partial H^{OM*}}{\partial \Psi} + \tau \frac{\partial H^{OT*}}{\partial \Psi}, \quad \dot{\Psi} = -(1 - \tau) \frac{\partial H^{OM*}}{\partial \mathbf{x}} - \tau \frac{\partial H^{OT*}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (15)$$

Для организации процесса гладкого и непрерывного продолжения использовалось сглаживание правых частей рассматриваемой системы дифференциальных уравнений – посредством сглаживания управляющего параметра δ : $\delta(\Pi) = 0.5[(\Pi/\Pi + \varepsilon) + 1]$. Здесь Π – функция переключения тяги, ε – малый регуляризирующий параметр, $\varepsilon = 10^{-5} \dots 10^{-8}$.

Метод продолжения также использовался в работе (в рамках предлагаемой методики) и для проведения некоторого качественного анализа рассматриваемых задач оптимизации межорбитального перелета. Для этого организовывался процесс непрерывного (и гладкого) продолжения полученного решения задачи по каким-либо ее собственным характерным параметрам. Таким образом, удавалось построить качественную зависимость, описывающую изменение величины целевого функционала задачи от какого-либо внутреннего параметра ее дифференциальной связи, или, за счет соответствующей параметризации краевых условий задачи оценить влияние их непрерывного изменения на полученное значение критерия качества.

Приведем примеры решения и некоторый качественный анализ для невозмущенной задачи оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ между эллиптической орбитой и ГСО, полученные с помощью метода продолжения в рамках предлагаемой методики его совместного применения с дуальными числами.

Решение ОТ-задачи межорбитального перелета с функционалом (4). Параметры начальной орбиты полагались следующими: фокальный параметр $p = 20000$ км, эксцентриситет $e = 0.75$, наклонение $i = 25$ градусов. Долгота восходящего узла и аргумент перицентра полагались равными нулю. Значение истинной аномалии, определяющее положение КА на орбите в момент времени t_0 фиксировано и составляет 200 градусов. Параметры КА с ЭРДУ: начальная масса - 1320 кг, тяга ЭРД – 0.4 Н, удельный импульс – 1500 с. Угловая дальность перелета не ограничивалась. Время перелета - 90 суток.

Согласно предлагаемому в данном разделе подходу к решению ОТ-задачи межорбитального перелета с функционалом (4), рассмотрение начиналось с соответствующей осредненной ОМ-задачи. Полученное в результате решения последнее значение безразмерной конечной массы аппарата (целевого функционала) составило 0.902472 или 1191.263040 кг. Далее, решалась неосредненная ОМ-задача. Значение безразмерной конечной массы КА в данном случае составило 0.902268 или 1190.993760 кг. Полная угловая дальность перелета на оптимальном решении - 457.189294 радиан, или 72.764 витка. Наконец, полученное ранее решение неосредненной ОМ-задачи использовалось в качестве начального приближения к решению основной, т.е. ОТ-задачи с функционалом (4). Для решения последней использовалось построение численной гомотопии между ОМ и ОТ-задачей. Для этого рассматривалась параметризация системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА в виде (15). На полученном оптимальном решении рассматриваемой задачи значение безразмерной конечной массы КА составило ≈ 0.88850 , что соответствует 1173.018 кг. Угловая дальность перелета составила порядка 73.2 витка (459.93 радиана). Таким образом, с помощью предлагаемой в работе методики применения дуальных чисел совместно с методом продолжения, удалось получить искомое решение ОТ-задачи с функционалом (4). При решении рассматриваемой задачи с помощью метода продолжения критически важной оказывается точность вычисления производных (вследствие очень высокой чувствительности задачи к изменению начальных значений для элементов сопряженной системы), формирующих вектор и матрицу чувствительности (16), которые определяют правые части системы дифференциальных уравнений внешней задачи Коши. Использование дуальных чисел позволило определить элементы (16) с относительной точностью, равной относительной точности численного интегрирования системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА. Применение конечно-разностных методов численного дифференцирования или даже метода комплексного шага для определения необходимых производных вместо использования дуальных чисел при решении данной задачи методом продолжения не

приводит к положительному результату, т.к. в этом случае решение не удастся получить в принципе (для рассматриваемого примера перелета). На рисунке 1 (схематично) приведены зависимости, описывающие эволюцию ряда элементов орбиты и поведение некоторых сопряженных переменных в течении времени перелета для полученного оптимального решения задачи.

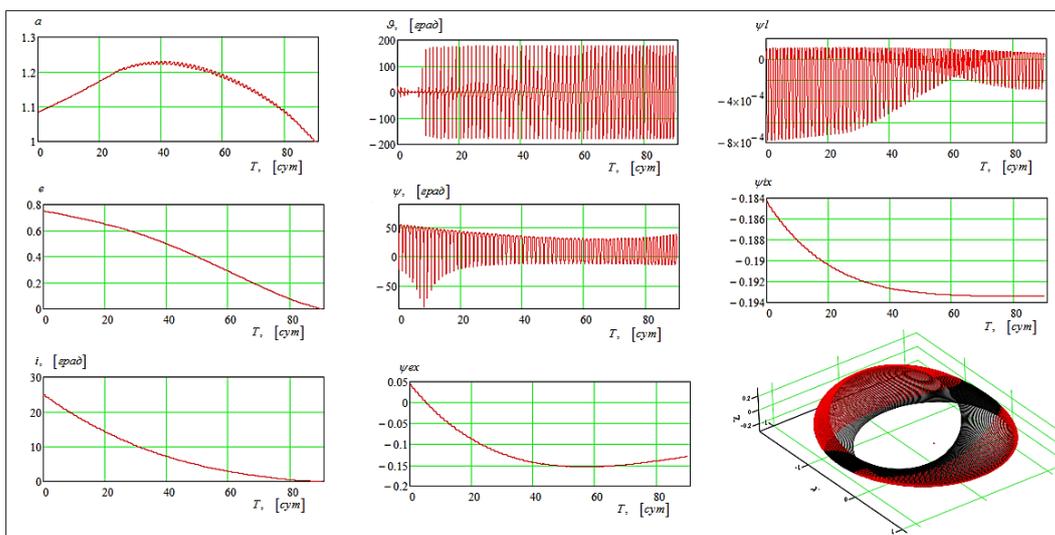


Рисунок 1 Пример решения невозмущенной ОТ-задачи с функционалом (4). Приведены зависимости, описывающие изменение ряда элементов орбиты КА, сопряженных к ним переменных, а также оптимальных программ управления по каналам рысканья и тангажа в течении времени межорбитального перелета. Показана оптимальная траектория перелета в геоцентрической геоэкуаториальной СК; на ней красным цветом отмечены активные участки движения КА с ЭРДУ.

Далее, в третьей главе приводится описание результатов качественного анализа рассматриваемой ОТ-задачи с функционалом (4), полученных на основе найденного оптимального решения, которое теперь будем рассматривать в качестве «опорного». С целью построения ряда зависимостей, описывающих поведение целевого функционала (4) при изменении некоторых характерных параметров данной задачи, было организовано соответствующее продолжение «опорного» решения. В качестве примера построения процедуры «продолжения решения» рассмотрим продолжение полученного «опорного» решения по истинной долготе. Продолжение решения было реализовано следующим образом: в краевой задаче условие трансверсальности $\psi_l(t_f)=0$ (свободная угловая дальность перелета) заменялось условием $l(t_f)-(l_f^0 \pm 2\pi N_{rev}\tau)=0$, определяющее значение истинной долготы $l(t_f)$ в зависимости от текущего значения параметра τ (N_{rev} - число целых витков, на которое может изменяться полная угловая дальность перелета в процессе рассматриваемого продолжения). Данное условие обеспечивало необходимую (для осуществления продолжения по угловой дальности) параметризацию исходной краевой задачи в виде $\mathbf{f}_m(\mathbf{z})=\mathbf{f}_m(\mathbf{z}(\tau),\tau)|_{\tau=1}=\mathbf{0}$, $\mathbf{z}(0)=\mathbf{z}^*$, $\mathbf{f}_m(\mathbf{z}^*,0)=\mathbf{0}$, $\tau \in [0,1]$, где \mathbf{z}^* - ее «опорное» решение. И решая внешнюю задачу Коши удается продолжить исходное решение ОТ-задачи с функционалом (4) по угловой дальности перелета (на заранее заданное количество целых витков). Так, полученное ранее решение ОТ-задачи с функционалом (4) было продолжено по величине полной угловой дальности перелета: на семь витков в сторону ее увеличения и на два витка в сторону уменьшения, считая от «опорного» значения истинной долготы l_f^0 . Основным результатом рассмотренного продолжения является зависимость, представленная на рисунке 2. Она позволяет качественно охарактеризовать изменение оптимального значения целевого функционала задачи (безразмерной конечной массы КА), при непрерывном увеличении или уменьшении полной угловой дальности.

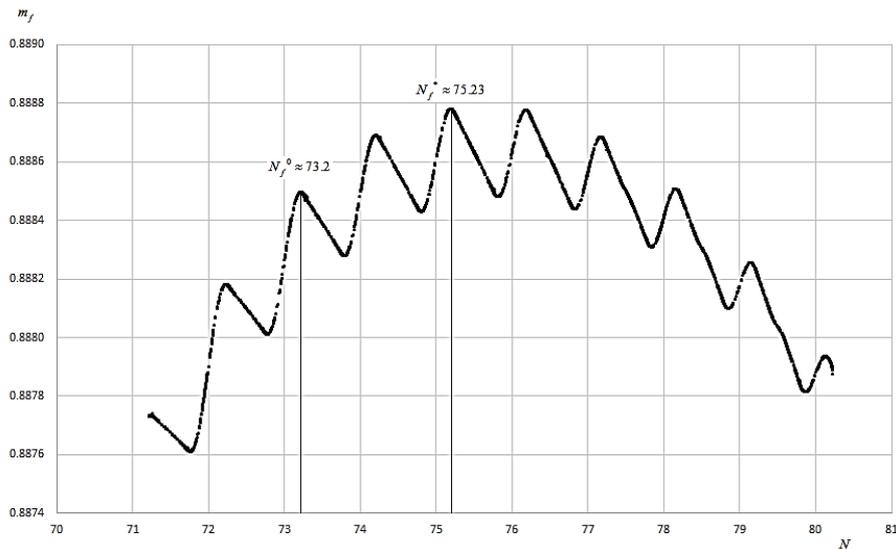


Рисунок 2 Зависимость конечной массы КА (безр.) от полной угловой дальности перелета N , выраженной в целых витках. На рисунке отмечено: оптимальное значение угловой дальности N_f^0 (в целых витках), соответствующее полученному «опорному» решению; глобально-оптимальное значение угловой дальности – N_f^* .

Из рисунка 2 следует, что зависимость функционала (4) от угловой дальности перелета существенно немонотонна и имеет, среди множества локально экстремальных значений (один минимум и один максимум в пределах каждого витка) один ярко-выраженный глобальный максимум. Методически, построение данной зависимости, позволяет определить наилучшее, с точки зрения величины целевого функционала (4), значение угловой дальности перелета, и выбрать соответствующую ему экстремаль. Также в первом разделе третьей главы были построены и другие варианты продолжения «опорного» решения.

Во втором разделе третьей главы приведены решения возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, полученные с помощью предлагаемой в работе методики. Они соответствуют рассмотрению полного и упрощенного варианта принятой модели действующих возмущений. Упрощенная модель рассматривается на примере решения задач межорбитального перелета с начальной круговой орбиты на ГСО для функционала (6) с использованием схемы численного осреднения. Полной модели соответствуют полученные решения неосредненных задач оптимального межорбитального перелета с начальной высокой эллиптической орбиты на ГСО. Приводится общая схема решения возмущенных задач траекторной оптимизации.

В качестве примера приведем численные результаты решения осредненной задачи определения минимального потребного значения тяги для реализации многовиткового межорбитального перелета КА с ЭРДУ за заданное время с учетом влияния возмущений. Были рассмотрены перелеты между двумя некомпланарными круговыми орбитами, из которых начальная – предполагалась произвольно ориентированной в окрестности Земли, а конечная орбита – ГСО. Начальная круговая орбита полностью определялась следующими своими параметрами – высотой h_0 и наклоном i_0 . Значение высоты начальной круговой орбиты изменялось в следующем диапазоне: от $h_{0min}=3630$ км до $h_{0max}=35793$ км (что соответствует высоте ГСО), а ее наклонение i_0 - от 0 до 70 градусов. Без потери общности рассмотрения, для всех анализируемых решений долгота восходящего узла начальной орбиты принималась равной 0 градусов. Рассматриваемый диапазон фиксированного времени перелета – от 90 до 250 суток. При расчетах принимались следующие параметры КА с ЭРДУ: начальная масса КА $m_0=1320$ кг, величина удельного импульса – $I_{y0}=1500$ с. Рассматривалась упрощенная модель возмущений – геопотенциал 4x4.

На рисунке 3 приведены изолинии значений минимальной тяги P , N при перелетах с низкой круговой орбиты на ГСО.

характеристик орбит в рамках принятой модели возмущенного движения. На рисунке 5 показана зависимость разности значений относительных конечных масс КА: $\Delta\mu_f = \mu_{fневозм} - \mu_{fвозм}$, вычисленная в рамках моделей невозмущенного и возмущенного движения КА с ЭРДУ, как функция наклона начальной орбиты для нескольких времен перелета. Представленные зависимости немонотонны. Но самое интересное, что положительный знак рассматриваемой разности при всех рассмотренных значениях времени перелета и наклоне. Учет возмущения приводит в рассматриваемом случае к уменьшению массы КА, выводимого на конечную орбиту. Таким образом, делается вывод о том, что учет влияния возмущений (в рамках принятой в настоящем разделе модели) в рассматриваемой осредненной задаче на минимум тяги не приводит к существенной разнице в значениях целевого функционала, но полученное решение - хуже. Из представленных рисунков видно, что для рассмотренной задачи траекторной оптимизации, относительная разница в значении целевого функционала при учете действия возмущений, выраженная в процентах, не превосходит величины 0.6%.

Далее в третьей главе дается общая универсальная схема решения неосредненных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом влияния возмущений, и приводятся полученные примеры решений. Рассматриваются преимущественно перелеты следующих типов: «орбита-орбита» и «точка-орбита», осуществляемые между начальной эллиптической орбитой (параметры которой известны) и ГСО.

Общая схема решения неосредненных возмущенных задач может быть описана следующим образом:

- на первом этапе ищется решение некоторой вспомогательной (эквивалентной) задачи, фактически представляющей собой осредненный вариант основной, при этом действие возмущений на КА не учитывается;
- на втором этапе ранее полученное решение используется в качестве начального приближения к решению осредненного варианта основной задачи, но уже с учетом действующих возмущений (в рамках принятой модели);
- наконец, полученное на втором этапе решение осредненной возмущенной задачи уже непосредственно используется в качестве начального приближения к решению основной (т.е. неосредненной возмущенной задачи для функционалов вида (4) – (6)).

Практическая реализация данной схемы фактически сводится к построению цепочки из решений вспомогательных задач, каждое из которых, в свою очередь, выступает в качестве начального приближения для следующего. В целом, предложенная схема может быть использована для любых постановок задач межорбитального перелета и обеих рассматриваемых в рамках настоящей работы моделей функционирования ЭРДУ. При этом, при решении возмущенных ОТ-задач с функционалом (4), цепочка вспомогательных задач для них будет строиться на основе эквивалентных им ОМ-задач.

На основе полученных таким способом решений возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ проводился их качественный анализ - посредством простого сравнения с решениями соответствующих им невозмущенных задач. Для этого была введена следующая величина, характеризующую относительную разницу значения целевого функционала задачи, полученную при ее решении с учетом и без учета действия возмущений, выраженную в процентах: $\Delta J_f = [|J - J_{pert}|/J] \cdot 100\%$. Где J – значение целевого функционала вида (4) – (6) полученное при решении невозмущенной задачи, а J_{pert} – с учетом влияния возмущений.

В качестве примера приведем полученное с помощью рассматриваемой методики решение ОТ-задачи с функционалом (4), отвечающее следующему межорбитальному перелету: требуется перевести аппарат с начальной высокоэллиптической орбиты с большим наклоном на ГСО. Параметры начальной орбиты следующие: радиус перигея составляет 6595 км, радиус апогея – 34171 км (эксцентриситет равен 0.67645), наклонение - 63 градуса. Аргумент перицентра и долготу восходящего узла начальной орбиты полагаем равными нулю. Угловое положение КА на начальной и конечной орбитах не фиксируется, т.е. рассматривается перелет типа «орбита-орбита». Сам КА имеет следующие характеристики:

начальная масса составляет 2500 кг, в качестве ЭРД используется два двигателя СПД-140 с тягой 0.29 Н и удельным импульсом 1770 с. В качестве даты старта КА примем, как и в предыдущем примере, 26 декабря 2015 года 1 час 32 минуты UTC. Время перелета задано и составляет 250 суток. Приведем основные результаты полученных решений, соответствующие цепочке вспомогательных задач. Решение осредненной ОМ-задачи без учета действия возмущений определяет значение целевого функционала равным 0.855654. Решение соответствующей задачи с учетом возмущений – 0.854784. Решение неосредненной возмущенной ОМ-задачи определяет безразмерную конечную массу аппарата равной 0.853929. Значение массы для неосредненной ОМ-задачи без учета возмущений (не входящей в цепочку) составляет 0.856208. Наконец, решение неосредненной возмущенной ОТ-задачи для функционала (1.2.7) (основная) дает 0.821188. А решение соответствующей задачи без учета влияния возмущений – 0.824259. Разница в значении целевого функционала (с учетом и без учета действия возмущений) для осредненных ОМ-задач составляет 0.000871, для неосредненных ОМ-задач – 0.002278, и для основных ОТ-задач – 0.003071 (т.е. 7.678204 кг). Им отвечают следующие значения ΔJ : 0.101734%, 0.266080% и 0.372611% соответственно.

Оптимальные программы для углов рысканья и тангажа, а также функция переключения приведены на рисунках 6 – 9 (красная линия соответствует невозмущенному решению, синяя - возмущенному). Видно, что общая структура оптимального управления углом рысканья остается в целом неизменной на возмущенном и невозмущенном решениях. Здесь вновь проявляются фазовый сдвиг колебаний по оси времени и небольшие изменения в их амплитуде. Но для оптимальной программы угла тангажа, соответствующей решению возмущенной задачи, отчетливо видно, что структура управления достаточно сильно поменялась на начальном этапе перелета – приблизительно до 50 суток. После этого, программы угла тангажа для возмущенного и невозмущенного решения задачи вновь практически совпадают. Что же касается функции переключения, определяющей режим работы двигателя по траектории межорбитального перелета, то как и в случае угла рысканья, разница между полученными решениями в данном случае проявляется только в виде незначительного фазового сдвига и локальных изменений амплитуды ее «колебаний». Фазовый сдвиг отчетливо виден на рисунке 9, представляющем собой укрупненный фрагмент приведенной зависимости для функции переключения.

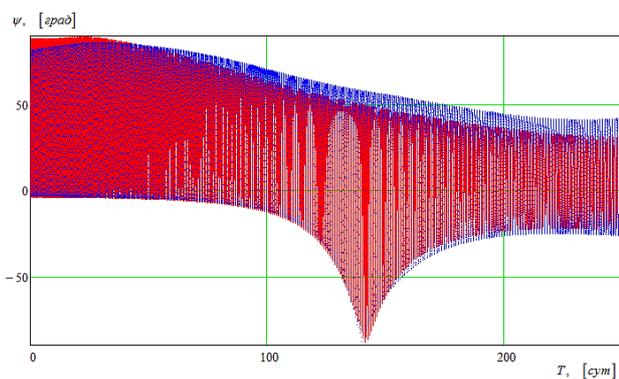


Рисунок 6 Зависимость изменения угла рысканья [град.] от времени перелета [сут.]

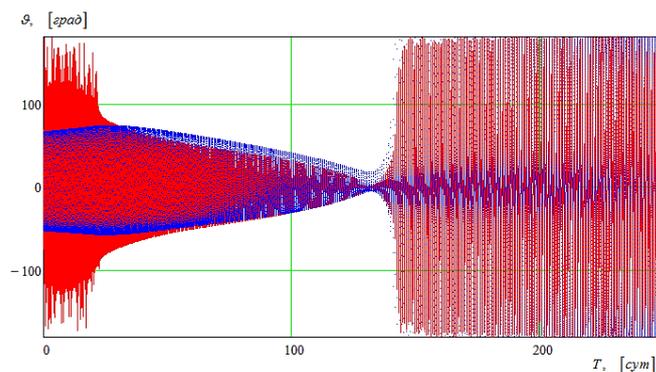


Рисунок 7 Зависимость изменения угла тангажа [град.] от времени перелета [сут.]

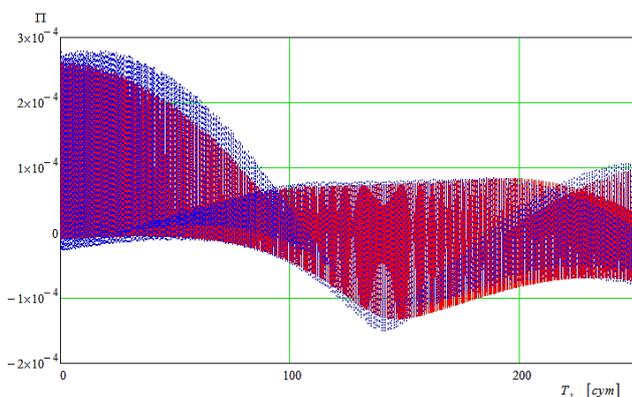


Рисунок 8 Функция переключения тяги ЭРДУ КА [безр.] от времени перелета [сут.]

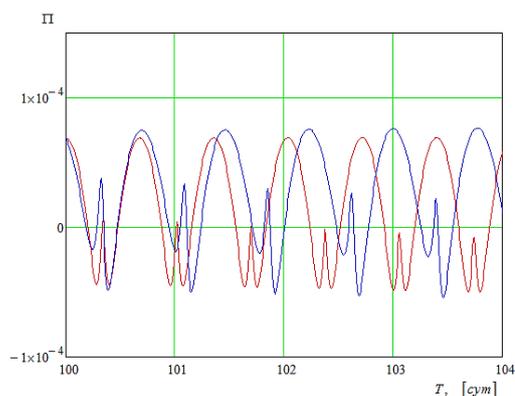


Рисунок 9 Функция переключения тяги ЭРДУ КА [безр.] от времени перелета [сут.] на интервале от 100 до 104 суток

В работе также подробно разобраны и другие примеры постановок задачи оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с ВЭО на ГСО.

В заключении данного раздела, на основе полученных результатов для ряда рассмотренных конкретных примеров задач траекторной оптимизации, можно сделать следующий вывод. Учет влияния возмущений при решении задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ практически не сказывается на значениях целевого функционала. Действительно, для всех полученных результатов данного раздела характерно то, что относительная разница значения целевого функционала ΔJ_r при решении соответствующих возмущенных и невозмущенных задач не превышает 0.5%. Но при этом структура оптимального управления вдоль траектории в некоторых случаях может довольно существенно различаться. Конечно же, озвученный вывод оказывается справедлив исключительно для рассмотренного в данном разделе конкретного типа межорбитального перелета – между начальной эллиптической обитой, линия апсид которой всегда принадлежит плоскости экватора, и ГСО. Причем для всех полученных результатов в главе 3, значение целевого функционала на возмущенном решении всегда оказывается чуть хуже, чем на невозмущенном.

В **четвертой главе** рассматривается отдельная задача межорбитального маневрирования, однако решается она с помощью той же базовой методики, предлагаемой автором работы. Итак, рассматривается *частная* задача оптимизации в рамках общей проблемы увода космического мусора из района ГСО, которая в последнее время представляется весьма актуальной. Конкретнее, это задача поиска оптимального (с точки зрения заданного критерия качества) межорбитального маневрирования КА с ЭРДУ, необходимого для обеспечения его встречи (рандеву) с некоторым заранее выбранным каталогизированным объектом (параметры движения которого известны), представляющим собой нефункционирующий более КА или же его крупный фрагмент – космический мусор (КМ). Приведена строгая формализация задачи встречи, получены необходимые условия оптимальности, для двух типов задач, соответствующих функционалам (4) и (5) (минимизация затрачиваемого топлива и быстрогодействие). Приведена общая методика решения, в целом повторяющая методику решения возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета. Приведены основные зависимости, характеризующие оптимальное управление и эволюцию элементов орбиты КА с ЭРДУ в течении времени перелета. Вновь приведено сравнение результатов, соответствующих возмущенному и невозмущенному решениям. Для рассмотренных примеров вновь значения целевого функционала задачи ((4) или (5)) оказались незначительно хуже в случае учета влияния действия возмущений. При этом также не происходит значительного изменения структуры полученного в результате решения оптимального управления. Также выявлен существенно многоэкстремальный характер рассматриваемой задачи встречи. Получены качественные результаты, характеризующие общие свойства рассматриваемого типа межорбитального перелета, а также зависимости,

описывающие динамику относительной разности значений целевого функционала задачи в зависимости от параметров перелета.

В **заключении** приводятся основные результаты и выводы по диссертационной работе.

В **Приложении** к диссертационной работе представлены основные элементы теории аналитической функции дуального переменного, а также алгебра дуальных чисел. Приложение носит скорее обзорный характер, но ряд важных теоретических результатов принадлежит лично автору.

ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

В рамках настоящей диссертационной работы была рассмотрена и полностью теоретически обоснована предлагаемая автором универсальная методика решения возмущенных задач траекторной оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, построенная на использовании математического аппарата дуальных чисел. Предлагаемая в диссертационной работе методика позволяет:

- существенно расширить сложность математической модели, описывающей управляемое возмущенное движение центра масс КА с ЭРДУ, при этом избегая дополнительных трудностей, связанных с формализмом используемого при решении задач оптимизации межорбитального перелета непрямого метода – принципа максимума;
- качественно оценить и исследовать влияние действия возмущений при решении задач траекторной оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ.

Предложенная методика решения возмущенных задач является универсальной, и при выполнении ряда условий, может применяться при рассмотрении различных задач оптимизации управляемых динамических систем с помощью непрямых методов вариационной группы.

В работе предлагается общая схема решения задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ при учете влияния возмущений использующая предложенную ранее методику. Данная схема основывается на построении некоторой цепочки приближений, состоящей из последовательности решений вспомогательных задач траекторной оптимизации, каждое из которых используется в качестве начального приближения к решению последующей (более сложной), что в итоге и приводит к искомому решению основной задачи.

На основе качественного анализа полученных с помощью предлагаемой методики (и схемы) результатов решений рассматриваемых в работе задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ при учете влияния возмущений, осуществляемого между произвольно ориентированной начальной круговой или эллиптической орбитой и ГСО, можно сделать следующие выводы:

- для рассматриваемого вида межорбитального перелета КА с ЭРДУ (на ГСО), решение, полученное при учете влияния возмущений (в рамках принятой модели), всегда оказывается незначительно хуже с точки зрения заданного критерия качества, по сравнению с соответствующим ему решением невозмущенной задачи;
- относительная разница в значениях целевых функционалов, полученных на соответствующих решениях при рассмотрении возмущенного и невозмущенного варианта задачи, не превышает нескольких процентов (а в подавляющем большинстве случаев составляет менее одного процента);
- оптимальное управление вдоль траектории КА, полученное при решении возмущенной задачи может довольно ощутимо отличаться от управления, соответствующего решению невозмущенной: как правило это выражается в виде фазового сдвига на оптимальных программах изменения углов тангажа и рысканья, а также функции переключения тяги, но в ряде случаев, возможно значительное изменение общей структуры полученной программы оптимального управления в целом, что целесообразно учитывать при баллистическом проектировании номинальной траектории довыведения КА с ЭРДУ на ГСО.

Приведенные выводы полностью отвечают только основному рассмотренному в работе (частному) виду межорбитального перелета КА с ЭРДУ – с произвольно ориентированной круговой или эллиптической орбитой на ГСО.

В работе предлагается еще одна базовая методика, основанная на использовании дуальных чисел, и предназначенная для проведения качественного анализа и решения невозмущенных задач оптимизации межорбитального перелета. Она подразумевает совместное использование метода продолжения и дуальных чисел, что позволяет расширить возможности этого численного алгоритма, используемого при решении краевых задач принципа максимума. Использование данной методики позволило:

- определить решение задачи с функционалом вида (4) для модели нерегулируемого двигателя (ОТ-задача) с помощью непрерывного продолжения из решения соответствующей задачи перелета для модели двигателя ограниченной мощности;
- организовать различные варианты процедуры продолжения полученного ранее решения ОТ-задачи с функционалом вида (4) по ряду ключевых параметров рассматриваемых задач оптимизации межорбитального перелета, с целью проведения ее качественного исследования, благодаря чему выявлен ряд ее важных свойств и особенностей (например, показана существенная многоэкстремальность).

В диссертационной работе рассмотрена задача оптимизации встречи, связанная с проблематикой маневрирования специального сервисного КА с ЭРДУ (буксира) с целью увода на орбиты захоронения объектов космического мусора, расположенных в близкой окрестности ГСО. Дано подробное описание и постановка рассматриваемой задачи, проведена ее полная формализация, получены необходимые условия оптимальности перелета. Решение задачи осуществлялось с помощью все той же основной предлагаемой в работе методики, следуя общей схеме, и с учетом принятой модели действия возмущений. На примере полученных решений проведен качественный анализ, характеризующий некоторые общие свойства оптимальных траекторий перелета КА с ЭРДУ при обеспечении его встречи с более нефункционирующим аппаратом.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Николичев И.А. Определение минимально-допустимых значений электрической мощности и тяги электроракетной двигательной установки при межорбитальных перелетах. Известия РАН. Энергетика, 2016, №2, с.129-145
2. Николичев И.А. Оптимизация многовитковых межорбитальных перелетов с двигателями малой тяги. Вестник московского авиационного института, 2013, Т.20, №5, с.66-76
3. Николичев И.А. Применение аппарата дуальных чисел при решении задач оптимизации межорбитального перелета. Вестник московского авиационного института, 2016, Т.23, №1, с.151-162.
4. Николичев И.А. Применение аппарата дуальных чисел при решении задач оптимизации многовитковых межорбитальных перелетов космического аппарата с электроракетной двигательной установкой. 14-ая Международная конференция «Авиация и Космонавтика – 2015». Сборник тезисов докладов, с. 439-441
5. Николичев И.А. Определение минимальной потребной величины электрической мощности космического аппарата с электроракетной двигательной установкой в рамках решения задачи баллистического проектирования. К.Э. Циолковский и этапы развития космонавтики. Материалы L научных чтений памяти К.Э. Циолковского, с. 160-161.
6. Konstantinov M.S., **Nikolichев I.A.**, Thein M. Optimization of low thrust multi-revolution orbital transfer using the method of dual numbers. Proceedings of the 6th International Conference on Astrodynamics Tools and Technics (ICATT-2016). URL: <https://indico.esa.int/indico/event/111/session/21/contribution/99/material/paper/0.pdf>