

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

*На правах рукописи*



Кривень Галина Ивановна

**ПРОЧНОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ С  
ВИСКЕРИЗОВАННЫМИ ВОЛОКНАМИ**

Специальность

01.02.06 «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
Доктор физико-математических наук  
Профессор Рабинский Лев Наумович

Москва 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	11
1.1 Виды композитных материалов.....	11
1.2 Прочность композитных материалов.....	14
1.2.1 Основные сведения.....	14
1.2.2 Критерии прочности композитных материалов.....	17
1.3 Об эффективных механических характеристиках композита.....	21
2 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО КОМПОЗИТА С ВИСКЕРИЗОВАННЫМИ ВОЛОКНАМИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ НАГРУЖЕНИЯ.....	26
2.1 Вводные замечания.....	26
2.1.1 Кинематические соотношения для композитного материала в цилиндрической системе координат.....	26
2.1.2 Соотношения напряжения-деформации композитного материала с цилиндрическими включениями в зависимости от условий симметрии.....	32
2.2 Постановка задачи.....	36
2.3 Описание элементов структуры модифицированного композита с вискеризованными волокнами.....	37
2.4 Моделирование эффективных свойств модифицированных композитов с вискеризованными волокнами.....	39
2.5 Определение напряжений и деформаций при одноосном растяжении. Определение эффективного модуля упругости.....	41
2.6 Определение напряжений и деформаций при чистом сдвиге вдоль волокна. Определение эффективного модуля продольного сдвига.....	44
2.7 Определение напряжений и деформаций при чистом сдвиге поперек волокна. Определение эффективного модуля поперечного сдвига.....	46
2.8 Новый способ определения эффективного поперечного модуля сдвига.....	50
2.9 Определение напряжений и деформаций при всесторонней нагрузке поперек волокна. Определение эффективного модуля плоской деформации.....	52
2.10 Выводы к главе 2.....	54
3 ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ОБЪЕМНОГО СОДЕРЖАНИЯ ВОЛОКНА И ДЛИНЫ ВИСКЕРСОВ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЭЛЕМЕНТАХ СТРУКТУРЫ. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.....	55
3.1 Общие положения.....	55
3.2 Численные значения упругих констант в элементах структуры.....	57
3.3 Анализ напряженно-деформированного состояния модифицированного композита при сдвиге в направлении вдоль волокон.....	60
3.4 Анализ напряженно-деформированного состояния модифицированного композита при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон.....	77

3.5 Анализ напряженно-деформированного состояния модифицированного композита при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон .....	93
3.6 Анализ напряженно-деформированного состояния модифицированного композита при чистом сдвиге в направлении поперек волокон .....	109
3.8 Выводы к главе 3 .....	126
4 МЕТОД ОЦЕНКИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО КОМПОЗИТА .....	129
4.1 Основные положения метода.....	129
4.2 Алгоритм оценки несущей способности модифицированного композита .....	131
4.3 Анализ несущей способности модифицированного композита.....	132
4.4 О приближенной оценке прочности межфазного слоя по сравнению с прочностью матрицы .....	137
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	146
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	147
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Интегральная формула Эшелби.....	153

## ВВЕДЕНИЕ

В современном мире широкое распространение получили композитные материалы. Они стали незаменимыми в авиации, ракетно-космических системах и медицине за счет своего малого веса и высоких прочностных характеристик. Композитные материалы представляют собой структуру, состоящую преимущественно из двух элементов – матрицы и включения. В зависимости от условий, в которых будет работать конечное изделие, структуру композитного материала изменяют таким образом, чтобы изделие служило эффективно.

Под изменением структуры здесь понимается изменение материалов матрицы и включения, изменение формы включения, его объемного содержания, модификация поверхности включения.

Каждый вид композитных материалов обладает своими особенностями. Например, стеклопластики представляют интерес из-за низкой себестоимости, высокой удельной прочности при растяжении, сжатии и изгибе, но они имеют низкий удельный модуль упругости. Напротив композит на основе углеродных волокон обладает рекордной удельной жесткостью, превышающую в 5-10 раз удельную жесткость металлов. На данный момент существуют суперпрочные углеродные волокна, в которых разрушающие напряжения достигают 5-7 ГПа, а ползучесть практически отсутствует. Кроме этого, из-за малого диаметра углеродных волокон и определенной анизотропии свойств препреги на основе этих волокон легко формуется в изделия.

Таким образом, на этапе проектирования изделия необходимо оценить каким видам нагрузок оно будет подвергаться, и подобрать такой композитный материал, который позволит изделию сохранять свою работоспособность, оставаясь прочным и жестким. Для такой оценки служат критерии прочности, позволяющие сопоставить напряженно-деформированное состояние изделия с допустимыми напряжениями и деформациями материала, из которого оно изготавливается, и обнаружить начальные проявления процессов разрушения.

Существует большое разнообразие критериев прочности, одни из которых основаны на экспериментальных методах, а другие имеют в своей основе теоретические рассуждения [1]. Экспериментальное определение констант, необходимых для оценки несущей способности композитного материала является сложной и дорогостоящей задачей. При этом при любом изменении структуры композитного материала, все эксперименты подлежат повторению. В работах [2, 3] представлены результаты экспериментальных исследований прочности волокнистых композитов в зависимости от объемного содержания волокна.

В настоящее время активно развиваются технологии изготовления модифицированных волокнистых композитов, в которых, для улучшения межфазных адгезионных свойств,

увеличения площади поверхности волокна, способствующей более эффективной передачи нагрузок между волокнами и матрицей, и, как следствие, повышения сдвиговой прочности, на круговой поверхности углеродных волокон выращиваются специальные наноструктуры. Наноструктуры представляют собой нановолокна (вискерсы) - нанопроволоки [4,5,6] и углеродные нанотрубки (волокна «Фуззи») [7,8,9]. Авторы работ [4,6], предлагающие на поверхности углеродных волокон выращивать нанопроволоки ZnO, описывают область, содержащую нанопроволоки и матрицу как межфазный слой между волокном и матрицей, а также два интерфейса – волокно-ZnO и ZnO-матрица. Эти интерфейсы по сравнению с начальным интерфейсом волокно-матрица обладают более высокой прочностью. Сообщалось, что интерфейс волокно- ZnO имеет лучшую адгезионную прочность, чем интерфейс волокно-матрица, а интерфейс ZnO-матрица обеспечивает лучшее адгезионное взаимодействие, не только за счет лучшей адгезии, но также и из-за большей поверхности контакта. Поэтому композит на их основе становится более прочным материалом. Как отмечается в работе [6] межфазная сдвиговая прочность волокнистого композита, модифицированного нанопроволокой ZnO, возрастает до 228 % и варьируется от 45,72 МПа до 154,64 МПа.

Испытания, проведенные авторами работы [10] показали, что вискеризация волокна углеродными нанотрубками (УНТ) приводит к увеличению межфазной прочности композитного материала при продольном сдвиге на 206 % по сравнению с классическим волокнистым композитом. Аналогичные испытания, проведенные авторами работ [11, 12] показали увеличение межфазной прочности у вискеризованных композитов по сравнению с классическими на 175 % и 150 % соответственно. А авторы работы [13] провели испытания на определение продольной и поперечной прочностей сжатия, и показали, что продольная прочность вискеризованного композита увеличивается на 43 % по сравнению с классическим композитом, а поперечная прочность в свою очередь увеличивается на 94 %.

В 90-х годах была запатентована технология нанесения нитевидных кристаллов карбида кремния на поверхность углеродных волокон с использованием различных добавок, позволяющая повысить прочностные характеристики волокон и углепластиков на их основе, но информации о дальнейшем развитии данной технологии найдено не было. Прочность углепластика, армированного углеродными волокнами марки ВМН-4 и нитевидными кристаллами из карбида кремния, согласно [14], при изгибе превышает прочность углепластика, армированного углеродным волокном марки ВМН-4 без нитевидных кристаллов из карбида кремния на 6-20 %, а при сдвиге на 100-300 %.

Таким образом, практическая реализация этих идей привела к созданию нового класса современных многофункциональных композитов. Согласно [15], многофункциональные

композиты предназначены для одновременного повышения прочности, жесткости, ударной вязкости, усталости, демпфирования и теплопроводности.

Необходимо понимать, что создание любого композитного материала ограничено конструкционной и технологической возможностями [16]. Под конструкционной возможностью понимают способность материала выдерживать прикладываемую нагрузку и способность сохранять работоспособность при заданных условиях эксплуатации. Под технологической возможностью понимают наличие техники и технологии, позволяющих получить спроектированный материал. В то же время, работоспособность композита обеспечивается как правильным выбором исходных компонентов, так и рациональной технологией производства, обеспечивающей прочную связь между компонентами при сохранении их первоначальных свойств. Так вискеризованные покрытия часто оказывались неоднородными и слоистыми в силу технологических причин, а механические процессы, которые порождали микровискерсы на поверхности углеродных волокон, существенно уменьшали прочность на растяжение базовых волокон, и поэтому, прочность композитов в направлении армирования значительно уменьшалась [8]. После первых, не очень удачных результатов, в этой области, исследования в рамках подобных технологий в течение достаточно долгого периода были приостановлены.

В последние 10-15 лет исследования процессов вискеризации углеродных волокон возобновились на основе новых технологий. Например, для производства волокна, с выращенными на его поверхности УНТ, именуемые «fuzzy fibers», Штейнер и др. [10] недавно предложили новые методики, позволяющие избежать повреждения базового волокна, связанного с высокой температурой, используемой в процессах выращивания нанотрубок.

Так как модифицированные композиты с вискеризованными волокнами получили свое применение только с 1990-х годов, поэтому влияние напряженно-деформированного состояния в элементах структуры при различных объемных содержаниях включений на прочностные характеристики композита полностью не изучено, также как и мало исследована применимость к ним известных критериев прочности. В связи с этим, тема диссертации, несомненно, является актуальной.

**Цель работы.** Целью работы является определение напряженно-деформированного состояния в элементах структуры модифицированного композита с вискеризованными волокнами при статическом нагружении. Целью работы также является разработка метода оценки прочности модифицированного композита с вискеризованными волокнами и оценка влияния объемного содержания волокна и длины вискерсов на прочностные характеристики модифицированного композита с последующим прочностным анализом структур модифицированного композита при воздействии определенного вида нагружения. Для

реализации методики расчета прочности необходимо использовать методы расчета жесткостных свойств модифицированных композитов на разных масштабных уровнях, поэтому разработка эффективных методов определения осредненных характеристик также является целью работы.

**Объектом исследований** являются модифицированные композиты с вискеризованными волокнами, особенно новые типы таких композитов, вискеризованный слой которых образован углеродными нановолокнами.

**Методы исследования.** Для определения напряженно-деформированного состояния в элементах структуры модифицированного композита с вискеризованными волокнами разрабатывалась и реализовывалась многомасштабная микромодель. На первом микроуровне рассматривалась модель межфазного слоя вокруг базового волокна. Следующий масштабный уровень связан с изучением неоднородной композитной структуры, состоящей из трех фаз: базового волокна, вискеризованного межфазного слоя и матрицы. Расчет эффективных свойств вискеризованного межфазного слоя, ячейки композита в целом и напряженно-деформированного состояния в элементах структуры проводился с использованием теории упругости ортотропного тела и процедуры, основанной на самосогласованном методе «трех фаз», реализованном в цилиндрических координатах для четырех фаз. Аналитические представления решений ортотропной теории упругости, полученные на промежуточном этапе в процедуре определения эффективных свойств, используются в работе для анализа влияния геометрических и физических характеристик структуры (объемного содержания базового волокна и длины вискерсов в межфазном слое) на напряженно-деформированное состояние в элементах структуры модифицированного композита.

**Научная новизна работы** заключается в следующем:

1 Предложен метод построения и реализации замыкающего соотношения в системе уравнений определяющих эффективные характеристики модифицированных композитов с использованием новой процедуры определения эффективного модуля поперечного сдвига;

2 Определены локальные поля напряжений во всех компонентах модифицированного композита для следующих видов нагружения: одноосное растяжение, чистый сдвиг в направлении вдоль волокна, чистый сдвиг в направлении поперек волокна, всесторонняя нагрузка в направлении поперек волокна;

3 Предложен метод оценки несущей способности модифицированного композита, согласно которому прочность композита определяется слабой фазой;

4 Оценено влияние параметров структуры на прочность, выявлены параметры, оказывающие основное влияние на прочность композита и, в зависимости от вида нагружения, предложена рациональная структура таких композитов.

**Практическая ценность работы заключается:**

- в разработке методики оценки прочности модифицированных композитов с вискеризованными волокнами, учитывающей структурные особенности таких композитов. Результаты, полученные с использованием предложенной методики, согласуются с результатами испытаний проведенными другими авторами [10-13], поэтому практическая значимость работы велика.

**Достоверность результатов** обосновывается использованием строгих подходов теории упругости, механики композитов и математических методов, а также совпадением результатов, полученных автором с экспериментальными данными, приведенными в литературе и результатами других авторов.

**Положения, выносимые на защиту:**

- аналитические и численно-аналитические решения задач определения эффективных свойств модифицированного композита и напряженно-деформированного состояния в элементах структуры модифицированного композита с вискеризованными волокнами при различных видах нагружения. В частности, предложен новый способ определения эффективного модуля поперечного сдвига в случае нагружения композита чистым сдвигом в плоскости перпендикулярной волокнам, который позволяет обойти, возникающую в общем случае, нелинейную алгебраическую проблему,

- метод оценки несущей способности модифицированного композита с вискеризованными волокнами, позволяющий оценить прочностную эффективность модифицированного волокнистого композита по сравнению с классическим волокнистым композитом при том же самом объемном содержании волокна,

- численные результаты по оценке несущей способности модифицированных композитов с учетом геометрических и жесткостных параметров - различных объемных содержаний волокон, длиной микро- наноразмерных вискерсов, свойств вискерсов для различных видах нагружения.

**Апробация работы и публикации.** Основные результаты были представлены на XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике. Также, результаты обсуждались на научном семинаре им. А.Г. Горшкова «Проблем механики деформируемого твердого тела и динамики машин», Московского авиационного института (Национального исследовательского университета) «МАИ» и на V международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». На научно-исследовательском семинаре факультета «Современные проблемы математики и механики» под руководством В.И. Горбачева МГУ имени М.В. Ломоносова. На междисциплинарном семинаре

с международным участием «Методы многомасштабного моделирования и их приложения» под руководством академика РАН Е.И. Моисеева, д.ф.-м.н. проф. С.А. Лурье, д.ф.-м.н. проф. С.Я. Степанова, ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в четырех статьях журналов, из них 2 – опубликовано в международных журналах, и 2 – в журнале, рекомендуемом ВАК:

1 Лурье С.А., Рабинский Л.Н., Кривень Г.И., Лыкосова Е.Д. Напряженное состояние в элементах структуры модифицированных волокнистых композиционных материалов с вискеризованными волокнами // Механика композиционных материалов, 2018, т.24, №1, стр. 122-144.

2 Volkov-Bogorodsky D.B., Lurie S.A., Kriven G.I.: Modeling the effective dynamic properties of fiber composites modified across length scales // Nanoscience and Technology: An International Journal, 2018, Vol.9, No 2, pp. 117-138.

3 Sergey A. Lurie, Dmitrii B. Volkov-bogorodskii, Galina I. Kriven and Lev N. Rabinskiy, 2018. On estimating structural stresses in composites with whiskerized fibers // International Journal of Civil Engineering & Technology (IJCIET), 2018, Volume:9, Issue:6, Pages: 294-308.

4 Лурье С.А., Кривень Г.И., Рабинский Л.Н. О прочности модифицированного композита с вискеризованными волокнами // Композиты и наноструктуры, 2019, т. 11, №1, стр. 1-15.

**Объем и структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения, и списка литературы. Она содержит 156 страниц, из них 6 занимает список использованных источников. Список используемой литературы включает 72 наименования (из них 50 на иностранном языке). В первой главе даются обзоры видов композитов, критериев прочности композитов, особенностей моделирования композитов. Во второй главе приводятся кинематические соотношения для композитного материала в цилиндрической системе координат в условиях базовых нагрузок и тензоры жесткости композитного материала с цилиндрическими включениями в зависимости от условий симметрии. Рассматриваются основные типы напряженных состояний для модифицированных композитов с вискеризованными волокнами, приведены сведения о физических свойствах элементов структуры, для каждого вида нагружения дано решение по определению напряженно-деформированного состояния в элементах структуры и по определению эффективных свойств, представлен новый метод вычисления эффективного модуля поперечного сдвига. В третьей главе приведены численные результаты физических характеристик элементов структуры и представлены графики, иллюстрирующие напряженно-деформированное состояние в элементах структуры при различных объемных содержаниях волокна и различных длинах вискерсов. В четвертой главе описан метод оценки несущей

способности модифицированного композита. Приведены численные результаты коэффициентов, определяющих несущую способность, и обоснован выбор слабой фазы, по которой рассчитывалась несущая способность с позиции прочности межфазного слоя. В пятой главе приводятся выводы к диссертационной работе.

## 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

### 1.1 Виды композитных материалов

Существует большое разнообразие определений композитных материалов. Например, композиционные материалы представляют собой гетерофазные системы, полученные из двух или более компонентов с сохранением индивидуальности каждого отдельного компонента [17]. Полилов [18], предложил под этим термином понимать материалы с рядом признаков присущих лишь композитным материалам, среди них:

1) композитные материалы – это искусственно созданные неоднородные материалы-конструкции, состоящие из двух или более компонентов, один из которых представляет собой связную область (связующее, матрицы), а другой (другие) – наполнитель;

2) компоненты в композитных материалах разделены явно выраженными поверхностями раздела, которые, как и каждый из компонентов, выполняют в нем определенные функции;

3) армирующие элементы реализуют масштабный эффект прочности (тонкие волокна значительно прочнее макрообразцов из того же материала);

4) свойства композитных материалов нельзя представить в виде суммы свойств компонентов – появляются новые, не присущие компонентам свойства, т.е. композитный материал это система, в которой появляются дополнительные свойства по сравнению со свойствами составляющих эту систему элементов;

5) композитные материалы – это материалы с управляемыми свойствами.

Композитные материалы представляют собой достаточно широкий класс материалов. В зависимости от формы армирующего элемента композиционные материалы могут быть разделены на три группы: нуль-мерные (все размеры малы, но сопоставимы, нет преимущественного направления); одномерные (один из размеров значительно превышает два других); двумерные (один размер значительно меньше двух других). Другими словами, композитные материалы могут иметь включения сферической, цилиндрической и пластинчатой форм. Кроме этого композитные материалы можно классифицировать по химическому составу матрицы, химическому составу волокон, типу полуфабриката, структуре армирования, технологии изготовления, области применения [18].

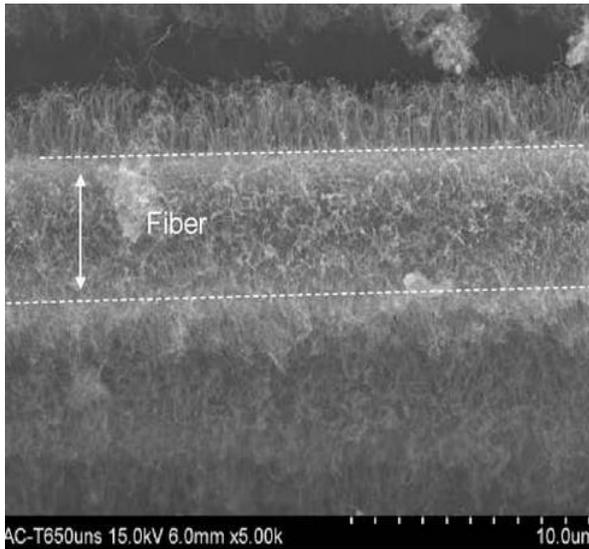
К композитным материалам с включениями сферической формы относятся дисперсно-упрочненные материалы, цилиндрической формы – волокнистые композитные структуры, пластинчатой формы – ленты, фольги, пленки. Особенностью волокнистой композиционной структуры является равномерное распределение высокопрочных, высокомодульных волокон в пластичной матрице (содержание их, т.е. объемная доля может достигать 75 %). В дисперсно-упрочненных материалах оптимальным содержанием дисперсной фазы считается 2-4 %.

Дисперсные частицы в указанных материалах в отличие от волокон создают только «косвенное» упрочнение, т.е. благодаря их присутствию стабилизируется структура, формирующаяся при термообработке. Другая отличительная особенность композиционной структуры – анизотропия свойств, обусловленная преимущественным расположением волокон в том или ином направлении. Дисперсно-упрочненные же материалы имеют одинаковые свойства во всех направлениях, так как упрочняющие дисперсные частицы имеют равновесную форму.

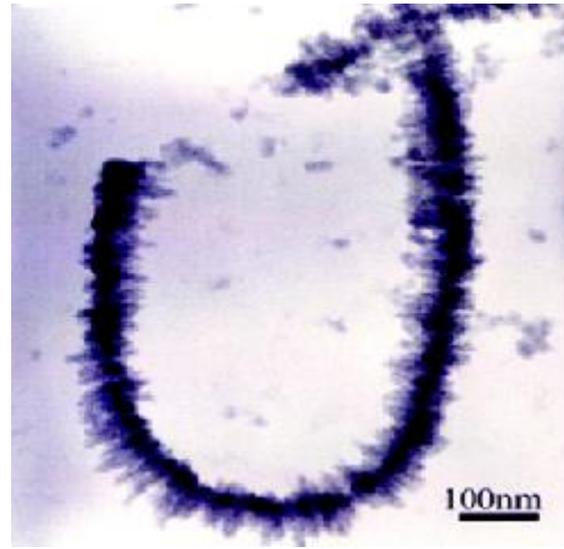
Композитные материалы постоянно претерпевают изменения, нацеленные на улучшение качества интерфейса (увеличения прочности) между включением и связующим, основного фактора, влияющего на механические свойства композита [17]. Такие улучшения могут быть достигнуты за счет модификации поверхности волокна – создания механической межфазной связи, а также за счет создания электростатической, химической или диффузионной связей [19].

В последнее время в отдельный вид композиционных материалов можно выделить модифицированные композиты с вискеризованными волокнами. В таких композиционных материалах на круговой поверхности волокна выращены микроструктуры, состоящие из нановолокон (вискерсов) и матрицы. Известны полимерные композиты, армированные вискеризованными стеклянными волокнами [20], углеродными волокнами [4, 6,7,8,9] и нанопроволоками теллурида кадмия [5]. Помимо полимерных композитов, армированных вискеризованными волокнами, существуют также композиционные материалы на основе металлических матриц, армированных вискеризованными металлическими волокнами. В то же время более 100 материалов, включая металлы, оксиды, карбиды, графит и органические соединения могут быть использованы для изготовления усов.

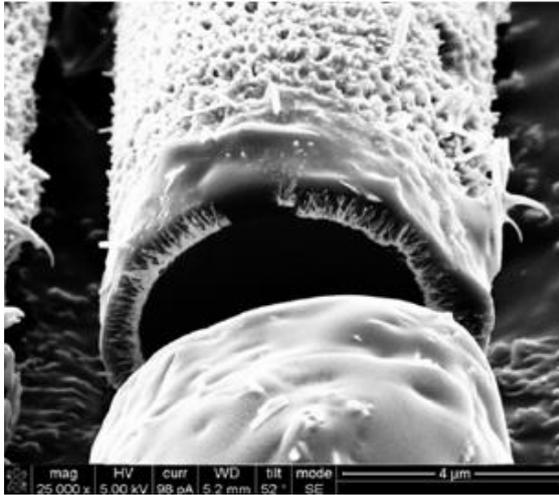
Например, в последнее время для создания вискеризованного слоя на поверхности углеродного волокна широко используются углеродные нанотрубки (УНТ) (Рисунок 1.1, а), которые стали вполне доступными с 1990-х годов. Такие волокна, с выращенными на их поверхности УНТ, именуется «fuzzy fibers» [4,5,6]. Ванг и др. [5] создали нанопроволоки теллурида кадмия (CdTe), вискеризованные нанопроволоками кремния оксида ( $\text{SiO}_2$ ) (Рисунок 1.1, б), которые назвали «the bristled nanocentipedes». Лин и др. [4] и Галан и др. [6] предложили модифицировать углеродное волокно нанопроволками оксида цинка (Рисунок 1.1, в). Также разрабатываются композиты на основе алюминия, армированные непрерывными волокнами оксида алюминия  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (Рисунок 1.1, г). Для улучшения механического контакта с матрицей, длинные волокна  $\text{Al}_2\text{O}_3$  подвергаются вискеризации вискерсами (карбид кремния  $\text{SiO}_2$ , титана оксида  $\text{TiO}_2$ , муллита  $3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$  и т.д.) непосредственно в процессе изготовления композита.



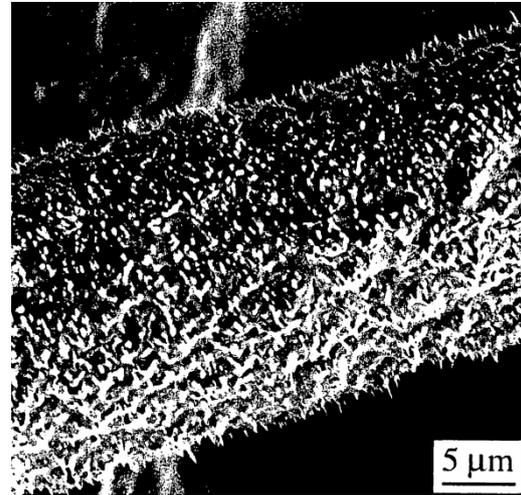
а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.1 - Различные виды модифицированных композитов с вискеризованными волокнами: а) волокно «Фуззи» — углеродное волокно, вискеризованное углеродными нанотрубками [7]; б) нанопроволоки теллурида кадмия, вискеризованные нанопроволоками кремния оксида [5]; в) углеродное волокно вискеризованное нанопроволками оксида цинка [4]; г) металлическое волокно с металлическими вискерсами [21].

## 1.2 Прочность композитных материалов

### 1.2.1 Основные сведения

Структура композитного материала понимается как двухуровневая, включающая в себя микроструктуру и макроструктуру. Микроструктура формируется при совмещении связующего материала с наполнителем. Свойства материала на этом уровне зависят от объемного содержания включения, интенсивности взаимодействия между связующим и наполнителем.

При повышении содержания наполнителя матрица постепенно переходит из объемного состояния в пленочное. При дальнейшем наполнении в объеме композиции пленочная матрица становится прерывистой и переходит в тонкие островки на участках поверхности наполнителя. В результате прочность композита снижается [22]. В то же время, необходимо учитывать, что при увеличении площади поверхности частиц наполнителя снижается вероятность изменения свойств матрицы и снижения прочности. Большое влияние на прочностные характеристики композитного материала с волокнистым включением оказывают когезионная прочность, поверхностная активность включения по отношению к связующему и шероховатость поверхности включения.

При взаимодействии матрицы и включения на их границе возникают несколько слоев – адсорбированный слой толщиной 1-10 нм, ориентированный слой толщиной до 0,7 мкм, переходный слой (Рисунок 1.2). Т.е. переход уплотненной структуры граничного слоя к объемному состоянию матрицы осуществляется через рыхлый дефектный (переходный) слой, который является наиболее слабым и разрушается в первую очередь.

Существуют различные механизмы разрушения композита – разрушение волокон, матрицы или границы раздела. Вследствие того, что частицы включений имеют высокую когезионную прочность, разрушение полимерных композитных материалов происходит преимущественно либо по полимерной матрице, либо имеет сложный адгезионный характер, т.е. разрушение проходит через матрицу и дефектные зоны, которые расположены на периферии граничных слоев полимера и охватывающие поверхность отдельных частиц наполнителя.

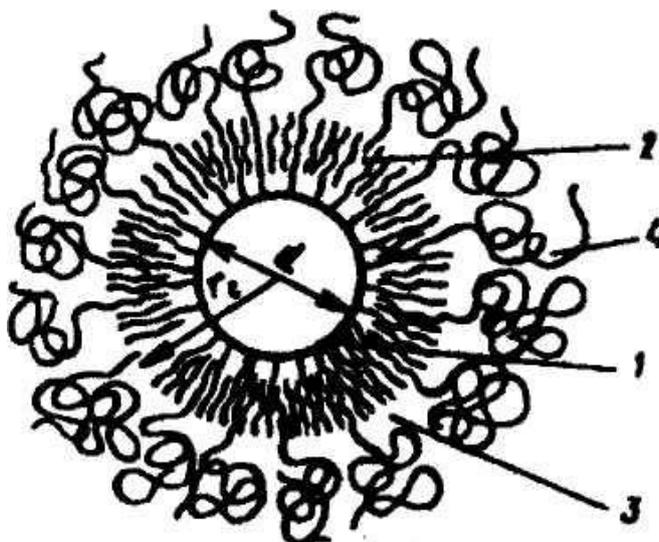


Рисунок 1.2 - Схема граничного слоя у поверхности частиц наполнителя:

1 – адсорбированный микрослой полимерной матрицы; 2 – ориентированный слой; 3 – переходный слой; 4 – объемная фаза матрицы; d – размер частицы наполнителя; r<sub>c</sub> – радиус ближней корреляции

Адгезионная прочность (межфазная прочность, прочность границы раздела, прочность сцепления) служит количественной мерой адгезии, т.е. количественной мерой сил сцепления адгезива и субстрата [23]. В композитах прочность сцепления компонентов определяет эффективность передачи напряжений через границу раздела [17, 23, 24]. От межфазной прочности в пластиках, армированных волокнами, зависит то, насколько полно в композите может быть использована прочность волокон и то, как будет происходить разрушение материала. Именно поэтому границу раздела часто рассматривают как третий компонент композита в дополнение к наполнителю и связующему. На рисунке 1.3 схематически представлена зависимость прочностных свойств волокнистых композитных  $\sigma_k$  материалов от адгезионной прочности  $\tau_0$ . Согласно рисунку 1.3 прочность композита является монотонно растущей функцией адгезионной прочности только в ограниченном интервале значений  $\tau_0$  (область 1). Зная границы области 2 можно дать ответ на вопрос о том, до каких пределов следует стремиться улучшать адгезию, чтобы можно было максимально использовать прочности волокнистых наполнителей. Область 3 – гипотетическая область, где рост адгезионной прочности может приводить к снижению прочности композитного материала. Если отсутствует адгезия, то не существует и композита. При достаточно высокой адгезии разрушению подвержены будут либо волокно, либо матрица.

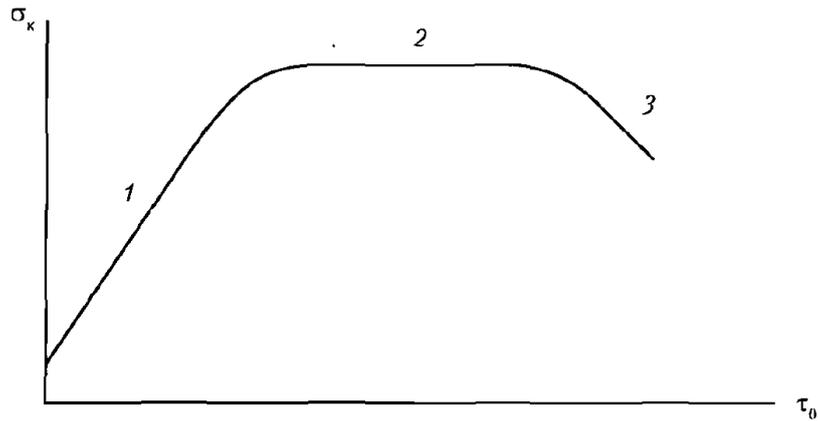


Рисунок 1.3 – Схема зависимости прочности волокнистых композитов  $\sigma_k$  от адгезионной прочности соединения волокно-матрица  $\tau_0$ .

Прочностные характеристики композитного материала обладают своими особенностями в зависимости от вида прикладываемой нагрузки. На рисунке 1.4 представлены несколько основных схем разрушения волокнистых композитов.

Поперечная прочность волокнистого композита, в отличие от продольной, которая почти полностью определяется волокнами, зависит от многих факторов, включая свойства волокон, матрицы и границы раздела, пористости и внутренних напряжений. При этом армирование волокнами приводит к росту поперечного модуля, в то время как прочность композитного материала падает – поперечная прочность композитного материала с волокнистыми включениями ниже прочности материала матрицы. При максимальном объемном содержании включения волокна соприкасаются, и прочность снижается до нуля. Если граница между волокном и матрицей не разрушается, то существует концентрация напряжений в матрице, которая принимает максимальное значение посередине между волокнами и приводит к примерно двукратному снижению прочности по сравнению с исходной матрицей.

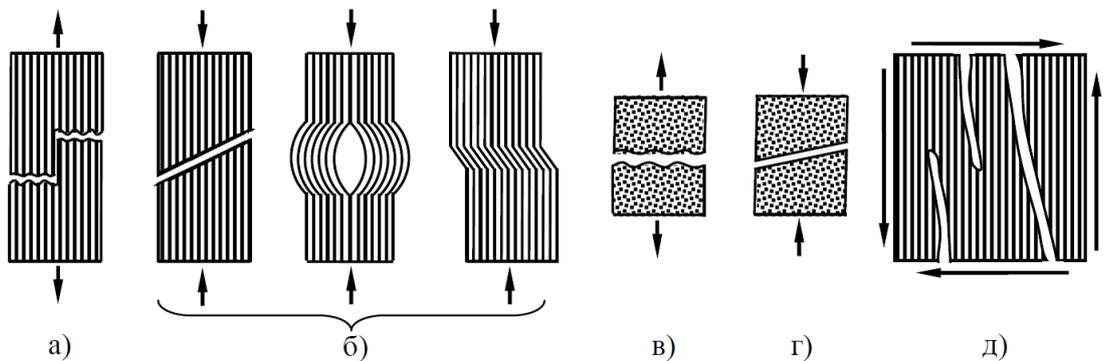


Рисунок 1.4 – Схемы разрушения волокнистых композитных материалов

а) – при растяжении вдоль волокон, б) – при сжатии вдоль волокон, в) – при растяжении поперек волокон, г) – при сжатии поперек волокон, д) – при чистом сдвиге в плоскости волокна.

Так как поперечная прочность имеет большое значение для конструкционных материалов, то были разработаны способы снижения концентрации напряжения при поперечном растяжении, к которым относится использование промежуточного слоя на границе раздела матрицы и волокна, который может существенно снизить концентрацию напряжения вблизи волокон.

Для продольного сдвига характерны разрушение матрицы или границы раздела. Прочность в этом случае определяется свойствами матрицы, и в первую очередь ее пределом текучести.

### **1.2.2 Критерии прочности композитных материалов**

Для базовых напряженных состояний – растяжение, сжатие, сдвиг, для простейших материалов могут быть получены пределы текучести и прочности путем эксперимента. В случае сложного напряженного состояния проведение эксперимента для определения пределов текучести и прочности связано с большими трудностями, а порой даже невозможно (например, в случае равномерного или неравномерного всестороннего растяжения) [1]. В связи с этим возникли некоторые гипотезы о характере напряженного состояния, при котором наступает разрушение или пластическая деформация. Данные гипотезы получили название критериев прочности и пластичности. Любой выдвинутый в виде гипотезы критерий прочности подлежит экспериментальной проверке. И чем больше проведено экспериментов по проверке гипотезы, тем она становится более надежной и тем яснее границы ее применимости.

Необходимо иметь в виду, что пределы прочности анизотропного материала, каковым зачастую является композитный материал, не являются скалярными величинами, так как они будут зависеть от направления. Существует два основных подхода для оценки прочности композитного материала: структурный и феноменологический [25]. Структурный подход учитывает особенности строения анизотропного композитного материала, а в случае феноменологического подхода композитный материал рассматривается как однородный, анизотропные свойства которого описываются тензорными величинами определенного вида. Структурный подход подразумевает под собой рассмотрение разрушения композитного материала с позиции микромеханики, в рамках которой прочностные характеристики композитного материала определяются прочностными характеристиками его компонентов. Для его реализации необходимо построить структурную модель материала, определить напряжения и деформации в компонентах структуры и сравнить их с предельными значениями. При феноменологическом подходе неоднородный композит рассматривается как сплошная среда (однородный анизотропный материал), математическая модель которой максимально учитывает экспериментальные данные о прочности. Феноменологические критерии разрушения

предлагаются на основе экспериментальных данных, а не выводятся аналитически. Для многослойных композитов часто используется структурно-феноменологическая модель, в рамках которой поведение однонаправленного монослоя описывается с использованием феноменологического подхода, а многослойный материал, составленный из разноориентированных монослоев, рассматривается с использованием структурного подхода.

Известно, что элементы структуры композитного материала не разрушаются одновременно. Напряжения, вызывающие разрушение элементов структуры, могут сильно отличаться от средних напряжений, участвующих в феноменологическом подходе. Кроме этого, феноменологический подход не учитывает напряжения в контактных слоях армированного композита, т.е. не учитываются адгезионные характеристики.

В случае феноменологического подхода критерий разрушения можно записать в виде

$$f(\sigma_{ij}, F) = 0,$$

где  $F$  – некоторые характеристики прочности материала. Для изотропного материала  $F$  представляет собой единственную скалярную константу (например, предел прочности  $\sigma_n$ ), а для анизотропного материала  $F$  может быть совокупностью многих параметров материала соответствующих конкретному критерию разрушения.

Геометрически феноменологический критерий разрушения можно представить в виде некоторой предельной поверхности разрушений (поверхности прочности) (Рисунок 1.5) согласно которой разрушение начинается в тот момент, когда заданный вектор пересекает эту поверхность.

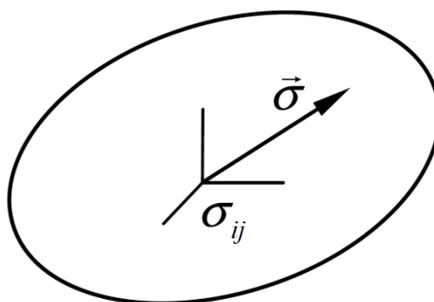


Рисунок 1.5 – Поверхность прочности.

Наибольшее распространение получили следующие феноменологические критерии прочности: критерий максимальных напряжений или деформаций, и квадратичные полиномиальные критерии, такие как критерии Хилла-Мизеса [26, 27] и Цзя-Ву[28].

Тензорно-полиномиальный критерий, являющийся общим среди перечисленных выше квадратичных полиномиальных критериев в матричных обозначениях, имеет вид:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1 \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, 6), \quad (1.1)$$

где  $\sigma_i$  - компоненты тензора напряжений (индекс  $i$  соответствует порядковому номеру компоненты в матрице  $[\sigma]$ ),  $F_i$ ,  $F_{ij}$ ,  $F_{ijk}$  - компоненты тензоров поверхности прочности второго, четвертого, шестого и последующих четных рангов.

Записав выражение (1.1) для плоского напряженного состояния характерного для монослоя ортотропного материала и дополнительно упростив за счет специальных условий получаемых, если оси координат направить по главным осям симметрии приходим к критерию разрушения Цая-Ву:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{44}\sigma_4^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1, \quad (1.2)$$

где  $F_1 = \frac{1}{\sigma_{1n}^+} + \frac{1}{\sigma_{1n}^-}$ ,  $F_2 = \frac{1}{\sigma_{2n}^+} + \frac{1}{\sigma_{2n}^-}$ ,  $F_{11} = -\frac{1}{\sigma_{1n}^+\sigma_{1n}^-}$ ,  $F_{22} = -\frac{1}{\sigma_{2n}^+\sigma_{2n}^-}$ ,  $F_{44} = -\frac{1}{\sigma_{12n}^2}$ ,  $F_{12}$

определяются из экспериментов при двухосном напряженном состоянии,  $\sigma_{1n}^+$ ,  $\sigma_{1n}^-$ ,  $\sigma_{2n}^+$ ,  $\sigma_{2n}^-$ ,  $\sigma_{12n} = \sigma_{12n}^+ = \sigma_{12n}^-$  - пределы прочности растяжения и сжатия в направлениях 1 и 2 и пределы прочности при сдвиге.

Так как в случае однонаправленного волокнистого композита возможны случаи разрушения как волокна, так и связующего, то критерий Цая-Ву можно разделить на два критерия:

$$F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2 = 1 - \text{критерий разрушения волокон,}$$

$$F_2\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{44}\sigma_4^2 = 1 - \text{критерий разрушения связующего.}$$

Если в выражении (1.2) линейные члены положить равными нулю ( $F_1 = F_2 = 0$ ), а

$$F_{11} = -\frac{1}{\sigma_{1n}^2}, \quad F_{22} = -\frac{1}{\sigma_{2n}^2}, \quad F_{44} = -\frac{1}{\sigma_{12n}^2}, \quad F_{12} = -\frac{F_{11}}{2}, \quad \sigma_{1n} = \begin{cases} \sigma_{1n}^+, & \text{если } \sigma_{11} \geq 0 \\ \sigma_{1n}^-, & \text{если } \sigma_{11} < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{2n} = \begin{cases} \sigma_{2n}^+, & \text{если } \sigma_{22} \geq 0 \\ \sigma_{2n}^-, & \text{если } \sigma_{22} < 0 \end{cases}, \text{ то выражение (1.2) примет вид выражения, описывающего критерий}$$

Хилла-Мизеса.

На основе гипотезы о поведении однонаправленного материала, состоящей в том, что существующие виды разрушения взаимно независимы, сформированы критерии максимальных напряжений и деформаций. Согласно критерию максимального напряжения материал разрушается, если хотя бы одна из компонент напряжения материала превышает соответствующее значение предела прочности. Аналогично по критерию максимальной деформации композитный материал разрушится, если хотя бы одна из компонент деформации превысит критическое значение.

Большой научный и практический интерес представляет структурный подход оценки прочности композитных материалов. Преимущественно существует три значения средних

напряжений, при которых происходит разрушение композитного материала – напряжение во включении, напряжение сцепления на границе включения и связующего, напряжение в связующем. Наименьшее из этих трех значений считается разрушающим средним напряжением для композита. В общем виде структурный критерий разрушения имеет вид:

$$R_1 = f_1(R \text{ включения}), \quad R_2 = f_2(R \text{ связующего}), \quad R_3 = f_3(R \text{ сцепления}). \quad (1.3)$$

Основной задачей структурной теории прочности композитных материалов является раскрытие зависимостей (1.3) для конкретных видов нагружения с учетом структуры материала и свойств его структурных элементов [29]. Скудрой [29] была разработана теория прочности армированных пластиков при одноосном растяжении и сжатии, учитывающая структуру материала и свойства его компонентов. Согласно этой теории, прочность армирующих волокон определяется их предельной деформацией, прочность полимерного связующего – энергетическим критерием, а прочность сцепления между связующим и арматурой – октаэдрическим критерием. Кроме этого в работе [29] было показано, что оптимальная зависимость между прочностями полимерного связующего и сцепления зависит от вида нагружения.

Ломакиным [30] для случая одноосного растяжения в направлении вдоль волокон был предложен критерий прочности, который имеет вид:

$$\sigma_B = \begin{cases} \sigma_{B1} [q + (1-q) \frac{\mu}{1 + \nu_1 \gamma}]; & \lambda(1 + \nu_1 \gamma) \geq \mu; \\ \sigma_{B1} \lambda [q \frac{1}{\mu} (1 + \nu_1 \gamma) + (1-q)]; & \lambda(1 + \nu_1 \gamma) \leq \mu, \end{cases}$$

где  $\sigma_{B1}$  - предел прочности волокна,  $q = V_1 / V$  - коэффициент, определяющий объемное содержание волокна в композите ( $V_1$  - объем волокна,  $V$  - объем композита),  $\nu_1$  - коэффициент Пуассона волокна,  $\mu = E_2 / E_1$  - параметр, определяющий отношение эффективного продольного модуля Юнга матрицы  $E_2$  к эффективному продольному модулю Юнга волокна

$$E_1, \quad \gamma = \frac{2\mu(\nu_1 - \nu_2)}{1 + \nu_2 + \mu(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}, \quad \nu_2 - \text{коэффициент Пуассона матрицы.}$$

Кроме структурного и феноменологического критериев прочности существуют еще энергетические критерии, например, гипотеза Бельтрами, согласно которой материал переходит в состояние пластического деформирования (а для хрупких материалов - разрушения) тогда, когда полная удельная энергия деформации достигает некоторого предельного значения или гипотеза Губера-Мизеса-Генки, согласно которой пластическое состояние (или разрушение) наступает тогда, когда удельная энергия формоизменения достигает некоторого предельного значения.

### 1.3 Об эффективных механических характеристиках композита

Механика сплошных сред основана на гипотезе однородного континуума. Эта гипотеза включает в себя процедуру статистического осреднения, посредством которой действительное состояние и структура материала идеализируются таким образом, что материал считается континуумом. При принятии модели континуума становится уместной концепция гомогенности, в рамках которой считается, что характерные свойства одинаковы во всех точках однородной среды. Что же касается композитных материалов, то, как было сказано ранее, в макромасштабе композитные материалы считаются однородными (гомогенными), а в микромасштабе неоднородными (гетерогенными), т.е. элементы структур или фазы композита различаются по свойствам, и между ними существует явная граница раздела [17]. Поэтому напряженно-деформированное состояние композитного материала зависит от характеристик структур, их физических свойств, объемного содержания, формы, размера, распределения и ориентации. Исходя из вышесказанного, основной проблемой при моделировании композитных материалов является подбор такой модели, которая учтет все характеристики композитного материала и позволит получить результат, согласующийся с экспериментальными данными.

В механике сплошных сред выделена область, называемая микромеханикой, которая изучает композитные материалы, учитывая свойства отдельных компонентов, посредством осреднения или гомогенизации. Основными задачами микромеханики являются моделирование деформаций и эффективных характеристик композитных материалов, а также локализация, которая направлена на оценку локальных напряжений и деформаций в структурных элементах композитного материала под воздействием нагрузки.

Модели микромеханики работают на уровне представительного элемента объема или элементарной ячейки, которая представляет собой малый объем материала, эффективные свойства которого можно обобщить на свойства всего материала, т.е. принимается, что элементарная ячейка соединяет микромасштабный уровень с макромасштабным [31].

Например (Рисунок 1.6), размер ячейки является бесконечно малым по сравнению с композитной средой:

$$d / D \ll 1,$$

где  $d$  – размер ячейки;  $D$  – размер композитной среды, но в то же время размер ячейки значительно больше характерного размера неоднородности:

$$\delta / d \ll 1$$

где  $\delta$  - характерный размер включения.

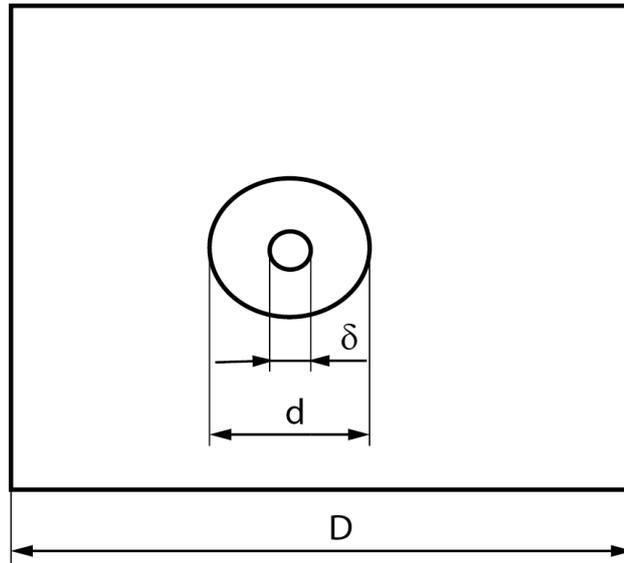


Рисунок 1.6 – Иллюстрация модели микромеханики

Очень благоприятен случай, когда существует размер ячейки  $d$ , который еще мал по сравнению с характерным размером тела. При этом условии материал можно идеализировать как эффективно однородный, и задача о нагружении тела может быть решена с использованием средних свойств, ассоциированных с масштабом размера  $d$ .

Гипотеза о существовании элементарной ячейки, в пределах которой осреднение свойств обосновано и которая может представлять поведение гетерогенной среды, называется эффективной, или эквивалентной однородности [31].

В настоящее время существует большое число микромоделей композитов, которые можно разделить по следующим группам [25]:

- 1) модели, которые учитывают лишь упругие свойства и объемное содержание компонентов;
- 2) самосопряженные модели, в которых композит представляет собой ячейку включения в матрице, окруженную бесконечной средой, имеющей эффективные свойства композита;
- 3) модели, которые учитывают форму и взаимное расположение включений,
- 4) энергетические модели, которые основаны на аппроксимации распределения напряжений и перемещений матриц и в которых используются вариационные принципы для определения верхней и нижней границ эффективных модулей;
- 5) статистические модели, которые основаны на предположении о случайном расположении включений и решении задачи теории упругости микронеоднородных сред, для которых структура описывается корреляционными функциями различного порядка.

Соотношения для определения напряженно-деформированного состояния в элементах структуры композита могут быть найдены с использованием какой-либо из микромоделей. Для

концентраций включений до 20-30 % расхождения между результатами, полученными при использовании различных моделей, незначительно, и результаты согласуются с экспериментальными данными. Для достаточно высоких концентраций включений самыми точными микромоделями определения характеристик композитов и напряженно-деформированного состояния в элементах структуры являются метод трех фаз [32], и асимптотического осреднения [33, 34, 35, 36], относящиеся к самоспряженным моделям.

Метод трех фаз был предложен в работах [31, 38, 39] и рассматривался в работах [40-44]. Кристенсен и Ло [39] показали, что этот метод позволяет найти все необходимые эффективные константы, включающие продольные и поперечные модули Юнга и сдвига, объемный модуль плоской деформации и коэффициенты Пуассона из решения задач в плоскости изотропии и в перпендикулярной к ней плоскости.

Метод решения задачи для трехфазной модели прямо следует решению для упругих сред с малой объемной долей сферических частиц. Выражения, определяющие перемещения во включении, матрице и эквивалентной гомогенной среде определяются из уравнений равновесия. Эти выражения содержат девять констант. Одна из констант рассматривается как заданная из условия наложения деформированного состояния чистого сдвига на большом расстоянии от начала координат. Оставшиеся восемь констант подлежат определению исходя из уравнений непрерывности напряжений и перемещений на радиусе  $r=a$  сферического включения и на радиусе  $r=b$ , т.е. на поверхности раздела между матрицей и эффективной гомогенной средой (Рисунок 1.7). Применение формулы Эшелби (А.15) с заданными перемещениями для вычисления энергии деформирования, запасаемой трехфазной средой позволяет получить решение для одной из констант –  $D_4=0$ . Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению системы восьми уравнений для  $D_4$ . Полученное решение полагается равным нулю. Это дает критерий для определения эффективного модуля сдвига  $\mu$ . Эффективный модуль сдвига  $\mu$  находится из квадратного уравнения. Сравнение теоретических результатов проведенное с экспериментальными данными, полученными Ричардом [2.9], показало, что использование трехфазной модели для определения модуля сдвига  $\mu$  дает приемлемые результаты.

Метод трех фаз был расширен на многофазную систему [41, 45], которая используется для изучения влияния межфазного слоя [46], покрытия [47], когезии и адгезии [48, 49].

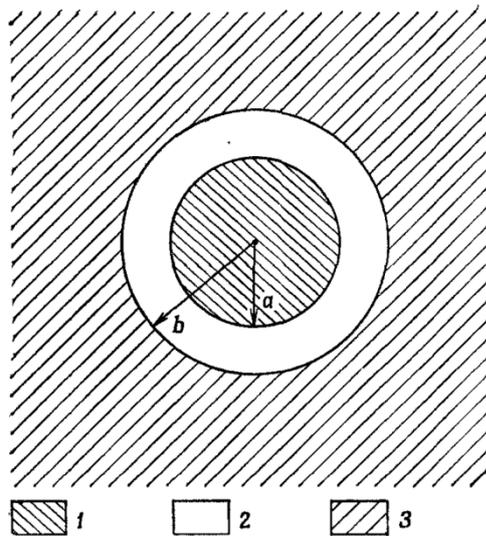


Рисунок 1.7 - Схема трехфазной модели: 1 – сферическое/цилиндрическое включение, 2 – матрица, 3 – эквивалентная гомогенная среда [4].

В работе [50] были представлены явные аналитические выражения для полей перемещений и напряжений в многослойном составном цилиндре с ортотропными слоями, подвергнутому однородным граничным условиям. На основе аналитических выражений [50] и с использованием метода трех фаз (обобщенный метод самосогласованных составных цилиндров) Чатзигеоргии и др. [51] получили решение для модуля сдвига. Кроме этого Чатзигеоргии и др. утверждают, что метод трех фаз можно использовать для нахождения других эффективных свойств, таких как объемный модуль, продольный модуль сдвига и модуль Юнга, но в данных случаях метод трех фаз приводит к нелинейным уравнениям. Уравнения для определения эффективного модуля поперечного сдвига, полученные в работе [52] соответствуют уравнениям предложенным Чатзигеоргии и др. Также наблюдается, что при определении эффективного модуля поперечного сдвига конечные уравнения являются нелинейными, и для решения этих уравнений действительно требуется итерационная схема. Однако в работе [52] показано, что для других эффективных модулей использование метода трех фаз не обязательно приводит к нелинейным уравнениям.

Для моделирования вискеризованных волокнистых композитов в настоящее время существует несколько аналитических моделей, целями которых является определение эффективных свойств композита с учетом физических особенностей его строения. Например, Гузь и др. [53,54] исследовали эффекты плотности графитовых вискерсов на эффективные упругие свойства конкретного вискеризованного углеродного волокнистого композита, у которого есть четыре слоя — базовое волокно, слой покрытия, вискеризованный межфазный слой и матрица. Рассматривались эффекты присутствия вискеризованного слоя и влияние трех различных плотностей (разреженных, средних, плотных) на модуль продольного сдвига.

Результаты показали, что из-за наличия вискеризованного межфазного слоя, модуль сдвига увеличивается существенно. Однако, показано, что влияние различных плотностей на эффективный модуль мало. Позже, они расширили свою модель для многофазных композитов [55, 56].

Кундавал и Рей [57], используя методы сопротивления материалов и Мори-Танака, рассмотрели влияние диаметра нанотрубки и влияние вискеризованного межфазного слоя на упругие константы и показали, что из-за присутствия вискеризованного слоя поперечные упругие константы композиты значительно повышаются, а диаметр нанотрубки мало влияет на эффективные свойства такого композита.

Чатзигеоргии и др. [51] с помощью комбинационных методов двух фаз и трех фаз показали, что из-за наличия вискеризованного межфазного слоя в композите, эффективные сдвиговые и поперечные свойства улучшены существенно, и длина и объемная доля нанотрубки играют большую роль при определении поведения вискеризованных волокнистых композитов.

В работе [52] была предложена модель, которая учитывают одновременно эффект плотности, диаметра, длины, объемной доли и свойства вискерсов в вискеризованном межфазном слое модифицированного композита с вискеризованными волокнами. Было показано, что присутствие вискерсов, приводит к увеличению эффективных механических свойств композитов, особенно, их сдвиговых и трансверсальных характеристик, а также для всех известных типов вискеризованных композитов длина и плотность вискерсов являются наиболее существенными параметрами структуры, влияющими на эффективные свойства.

## 2 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО КОМПОЗИТА С ВИСКЕРИЗОВАННЫМИ ВОЛОКНАМИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ НАГРУЖЕНИЯ

### 2.1 Вводные замечания

#### 2.1.1 Кинематические соотношения для композитного материала в цилиндрической системе координат

Для включений цилиндрической формы кинематические соотношения удобно строить в цилиндрических координатах. Приведем основные разрешающие уравнения.

Закон Гука для ортотропного материала

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{r\theta} & C_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{r\theta} & C_{\theta\theta} & C_{\theta z} & 0 & 0 & 0 \\ C_{rz} & C_{\theta z} & C_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{rz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Дифференциальные соотношения Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим четыре вида нагружения: одноосное растяжение вдоль оси цилиндрического включения, чистый сдвиг вдоль оси цилиндрического включения, чистый сдвиг в направлении поперек оси цилиндрического включения и всестороннюю нагрузку в направлении поперек оси цилиндрического включения. Для рассматриваемых видов нагружения полагаем, что ось цилиндрического включения направлена вдоль оси  $z$  (оси 3) (Рисунок 2.1), а вне ячейки задано однородное поле деформаций  $\varepsilon_0$ .

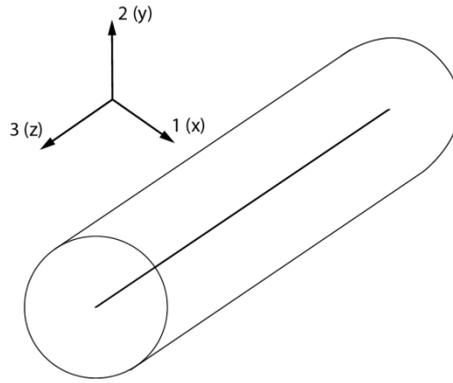


Рисунок 2.1 – Цилиндрическое включение

В случае одноосного растяжения вдоль оси цилиндрического включения перемещения вдали от включения имеют вид  $u_z(z) = \varepsilon_0 z$ .

При этом возникающие перемещения в декартовой системе координат имеют вид:  
 $u_z = \varepsilon_0 z, \quad u_x = u_y = 0$ .

Перепишем эти соотношения в цилиндрической системе координат:

$$u_r = 0, \quad u_z = \varepsilon_0 z, \quad u_\theta = 0.$$

Общее решение для неоднородной среды имеет вид:

$$u_r = u_r(r), \quad u_z = u_z(z), \quad u_\theta = 0,$$

где  $u_r(r)$ ,  $u_z(z)$  - неизвестные функции.

По соотношениям деформации Коши (2.3) находим

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_0, \quad (2.4)$$

и с помощью закона Гука (2.1) вместе с соотношениями (2.4) получаем определение не равных нулю компонент напряжений через перемещения

$$\sigma_{rr} = C_{rr}\varepsilon_{rr} + C_{r\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + C_{rz}\varepsilon_{zz} = C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r} + C_{rz}\varepsilon_0, \quad (2.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{r\theta}\varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + C_{\theta z}\varepsilon_{zz} = C_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r} + C_{\theta z}\varepsilon_0, \quad (2.6)$$

$$\sigma_{zz} = C_{rz}\varepsilon_{rr} + C_{\theta z}\varepsilon_{\theta\theta} + C_{zz}\varepsilon_{zz} = C_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta z} \frac{u_r}{r} + C_{zz}\varepsilon_0. \quad (2.7)$$

Напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$  должны удовлетворять одному из уравнений равновесия (2.2):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0. \quad (2.9)$$

Остальные два уравнения равновесия (2.2) выполняются тождественно.

Запишем уравнения равновесие (2.9) в перемещениях, учитывая соотношения (2.5)-(2.7):

$$r^2 u_r''(r) + r u_r'(r) - \lambda^2 u_r = -\beta \varepsilon_0 r. \quad (2.10)$$

где  $\lambda = \sqrt{C_{\theta\theta}/C_{rr}}$  и  $\beta = \frac{C_{rz} - C_{\theta z}}{C_{rr}}$ .

Решение дифференциального уравнения (2.10) имеет вид

$$u_r(r) = u_r^{(h)}(r) + u_r^{(p)}(r), \quad (2.11)$$

Где  $u_r^{(h)}(r)$  – общее решение однородного уравнения (14),  $u_r^{(p)}(r)$  – частное решение неоднородного уравнения (2.11).

Окончательно решение  $u_r(r)$  представим в виде

$$u_r(r) = D_1 r^\lambda + D_2 r^{-\lambda} + \nu \varepsilon_0 r^3, \quad (2.12)$$

где  $\nu = \frac{C_{rz} - C_{\theta z}}{C_{\theta\theta} - 9C_{rr}}$ .

В случае чистого сдвига вдоль оси цилиндрического включения перемещения вдали от включения имеют вид  $u_y(y) = \varepsilon_0 y$ ,  $u_z(z) = \varepsilon_0 z$ . или  $u_x(x) = \varepsilon_0 x$ ,  $u_z(z) = \varepsilon_0 z$ .

При этом возникающие перемещения в декартовой системе координат имеют вид:

$$u_y = \varepsilon_0 y, \quad u_z = \varepsilon_0 z, \quad u_x = 0 \quad \text{или} \quad u_x = \varepsilon_0 x, \quad u_z = \varepsilon_0 z, \quad u_y = 0,$$

Перепишем эти соотношения в цилиндрической системе координат:

$$u_r = \varepsilon_0 z \cos(\theta), \quad u_\theta = \varepsilon_0 z \sin(\theta), \quad u_z = 0,$$

при этом перемещения вдали от оси цилиндрического включения имеют вид

$$u_z = \varepsilon_0 r \cos(\theta), \quad u_r = u_\theta = 0.$$

Общее решение для неоднородной среды имеет вид:

$$u_z = u_z(r, \theta) \cos(\theta), \quad u_r = u_\theta = 0,$$

где  $u_z(r, \theta)$  - неизвестная функция.

По соотношениям деформации Коши находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

и с помощью закона Гука (2.1) вместе с соотношениями (2.3) получаем определение не равных нулю компонент напряжений через перемещения

$$\sigma_{\theta z} = G_{\theta z} 2\varepsilon_{\theta z} = G_{\theta z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad (2.14)$$

$$\sigma_{rz} = G_{rz} 2\varepsilon_{rz} = G_{rz} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (2.15)$$

Напряжения  $\sigma_{\theta z}$ ,  $\sigma_{rz}$  должны удовлетворять одному из уравнений равновесия (2.2):

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}^{(i)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(i)}}{\partial z} = 0. \quad (2.16)$$

Остальные уравнения равновесия (2.2) выполняются тождественно.

Запишем уравнения равновесия (2.16) в перемещениях, учитывая соотношения (2.14)-(2.15):

$$r^2 u_z''(r) + r u_z'(r) + \lambda^2 u_z''(\theta) = 0, \quad (2.17)$$

где  $\lambda = \sqrt{G_{\theta z}/G_{rz}}$ .

Решение дифференциального уравнения (2.17) представим в виде

$$u_z(r, \theta) = (D_1 r^\lambda + D_2 r^{-\lambda}) \cos \theta \quad (2.18)$$

где  $\lambda = \sqrt{G_{\theta z}/G_{rz}}$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  - константы.

В случае чистого сдвига в направлении поперек оси цилиндрического включения перемещения вдали от включения имеют вид  $u_x(x) = \varepsilon_0 x$ ,  $u_y(y) = -\varepsilon_0 y$ .

При этом возникающие перемещения в декартовой системе координат имеют вид:

$$u_x = \varepsilon_0 x, \quad u_y = -\varepsilon_0 y, \quad u_z = 0.$$

Повернем систему координат относительно оси  $z$  на угол  $\theta$  и перепишем перемещения как

$$u_x = \varepsilon_0 r \cos(\theta), \quad u_y = -\varepsilon_0 r \sin(\theta), \quad u_z = 0.$$

Перепишем эти соотношения в цилиндрической системе координат:

$$u_r = \varepsilon_0 r \cos(2\theta), \quad u_\theta = \varepsilon_0 r \sin(2\theta), \quad u_z = 0$$

Общее решение для неоднородной среды имеет вид:

$$u_r = u_r(r) \cos(2\theta), \quad u_\theta = u_\theta(r) \sin(2\theta), \quad u_z = 0,$$

где  $u_r(r)$ ,  $u_\theta(r)$  - неизвестные функции. Для простоты введем обозначение  $u_r(r) = u(r)$ ,  $u_\theta(r) = w(r)$ .

По соотношениям деформации Коши находим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = u', & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) = \frac{u - 2w}{r} \cos(2\theta), \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \left( -w' - \frac{2u + w}{r} \right) \sin(2\theta),\end{aligned}\tag{2.19}$$

и с помощью закона Гука (2.1) вместе с соотношениями (2.19) получаем определение не равных нулю компонент напряжений через перемещения

$$\sigma_{rr} = (C_{rr}u' + C_{r\theta} \frac{u - 2w}{r}) \cos(2\theta),\tag{2.20}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (C_{r\theta}u' + C_{\theta\theta} \frac{u - 2w}{r}) \cos(2\theta),\tag{2.21}$$

$$\sigma_{r\theta} = G_{r\theta} \left( -w' + \frac{w - 2u}{r} \right) \sin(2\theta).\tag{2.22}$$

Напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  должны удовлетворять двум уравнениям из уравнений равновесия (2.2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{(i)}}{r} &= 0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Оставшееся уравнение (2.2) равновесия выполняется тождественно.

Запишем уравнения равновесия (2.23) в перемещениях, учитывая соотношения (2.20)-(2.22):

$$\begin{aligned}C_{rr}(u''r^2 + u'r) - (4G_{r\theta} + C_{\theta\theta})u - 2(G_{r\theta} + C_{r\theta})w'r + 2(G_{r\theta} + C_{\theta\theta})w &= 0, \\ 2(G_{r\theta} + C_{r\theta})u'r + 2(G_{r\theta} + C_{\theta\theta})u + (w''r^2 + w'r)G_{r\theta} - (G_{r\theta} + 4C_{\theta\theta})w &= 0.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Решение дифференциальных уравнений (2.24) ищем в виде

$$\begin{aligned}u(r) &= Fr^\lambda, \\ w(r) &= Dr^\lambda,\end{aligned}$$

где  $F$  и  $D$  – неизвестные константы, для которых имеется линейная зависимость

$$F = 2 \frac{G_{r\theta}\lambda + C_{r\theta}\lambda - G_{r\theta} - C_{\theta\theta}}{C_{rr}\lambda^2 - 4G_{r\theta} - C_{\theta\theta}} D,$$

$\lambda$  определяется из характеристического уравнения, полученного из условия существования нетривиального нулевого решения системы уравнений (26), которое имеет вид

$$L\lambda^4 + M\lambda^2 + N = 0,\tag{2.25}$$

где  $L = G_{r\theta}C_{rr}$ ,  $M = 4(G_{r\theta} + C_{r\theta})^2 - C_{rr}(G_{r\theta} + 4C_{\theta\theta}) - G_{r\theta}(4G_{r\theta} + C_{\theta\theta})$ ,  $N = 9G_{r\theta}C_{\theta\theta}$ .

Очевидно, что корни  $\lambda$  выражения (2.25) зависят от свойств материалов. Согласно работе З. Хашина[58], имеется три варианта корней  $\lambda$ : 1) все корни представляют собой действительные числа, 2) все корни представляют собой комплексные корни, и 3) одна пара корней представляет собой действительные числа, а другая пара представляет собой комплексные. Однако, в классической теории упругости в соответствии с работами Хашина[58] и Цукрова [50] корни являются вещественными числами. В целом для любых действительных корней  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\lambda_4$  выражения  $u(r)$  и  $w(r)$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} u(r) &= F_1 r^{\lambda_1} + F_2 r^{\lambda_2} + F_3 r^{\lambda_3} + F_4 r^{\lambda_4}, \\ w(r) &= D_1 r^{\lambda_1} + D_2 r^{\lambda_2} + D_3 r^{\lambda_3} + D_4 r^{\lambda_4}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $\lambda^1, \lambda^3$  — положительные величины; и  $\lambda^2, \lambda^4$  — отрицательные величины.

В случае всесторонней нагрузки в направлении поперек оси цилиндрического включения перемещения вдали от включения имеют вид  $u_x(x) = \varepsilon_0 x$ ,  $u_y(y) = \varepsilon_0 y$ .

При этом возникающие перемещения в декартовой системе координат имеют вид:

$$u_x = \varepsilon_0 x, \quad u_y = \varepsilon_0 y, \quad u_z = 0.$$

Перепишем эти соотношения в цилиндрической системе координат:

$$u_r = \varepsilon_0 r, \quad u_\theta = u_z = 0.$$

Общее решение для неоднородной среды имеет вид:

$$u_r = u_r(r), \quad u_\theta = u_z = 0,$$

где  $u_r(r)$  - неизвестная функция.

По соотношениям деформации Коши находим

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (2.27)$$

С помощью закона Гука (2.1) вместе с соотношениями (2.27) получаем выражения для неравных нулю компонент напряжений через перемещения

$$\sigma_{rr} = C_{rr} \varepsilon_{rr} + C_{r\theta} \varepsilon_{\theta\theta} = C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r}, \quad (2.28)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{r\theta} \varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} = C_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r}. \quad (2.29)$$

Напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  должны удовлетворять одному из уравнений равновесия (2.2):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(i)}}{\partial z} = 0. \quad (2.30)$$

Остальные уравнения равновесия (2.2) выполняются тождественно.

Запишем уравнения равновесия (2.30) в перемещениях, учитывая соотношения (2.28)-(2.29):

$$r^2 u_r'' + r u_r' - \lambda^2 u_r = 0 \quad (2.31)$$

где  $\lambda = \sqrt{C_{\theta\theta}/C_{rr}}$ .

Решение дифференциального уравнения (2.31) имеет вид

$$u_r(r) = D_1 r^\lambda + D_2 r^{-\lambda}.$$

### 2.1.2 Соотношения напряжения-деформации композитного материала с цилиндрическими включениями в зависимости от условий симметрии

В общей форме закон Гука, описывающий соотношение напряжение-деформация, для анизотропных сред в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}$  – тензоры линейных напряжений и деформаций,  $C_{ijkl}$  – тензор упругих модулей четвертого ранга, тензор жесткостей. Тензор жесткости, как тензор четвертого ранга имеет 81 независимую компоненту. Симметрия тензоров  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{kl}$  уменьшает число независимых компонент до 36. Гипотеза о существовании упругого потенциала уменьшает число независимых компонент до 21. Дальнейшее уменьшение числа независимых компонент может быть произведено за счет наложения ограничений, связанных со свойствами симметрии среды.

В случае, когда цилиндрические включения располагаются параллельно, т.е. упаковка включений в поперечном сечении носит стохастический характер можно полагать, что в данном сечении среда эффективно гомогенна. Среды такого типа, обладающие симметрией свойств в плоскости, перпендикулярной направлению ориентации цилиндрических включений, называются трансверсально изотропными [31]. Для таких сред тензоры жесткостей зависят от положения центральной оси цилиндрического включения относительно системы координат.

Ниже будут приведены соотношения напряжения-деформация для трансверсально изотропной среды в зависимости от оси симметрии с учетом принятой компактной формы представления тензора деформаций  $C_{ijkl}$ , при которой пара индексов заменяется на один индекс: 11→1, 22→2, 33→3, 23→4, 31→5, 12→6.

Допустим, что ось 3 – ось плоскости изотропии (Рисунок 2.2). Тогда соотношение напряжения-деформации можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

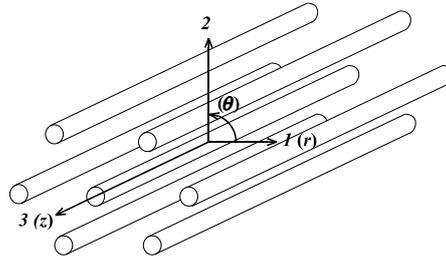


Рисунок 2.2 – Система трансверсально-изотропной среды, где ось 3 – ось симметрии

Пять упругих констант  $C_{11} = C_{22}, C_{12}, C_{13} = C_{23}, C_{33}$  и  $C_{44}$  определяют пять независимых эффективных свойств трансверсально-изотропной среды с осью плоскости симметрии, направленной вдоль оси 3 (z). Эти постоянные определяются через соответствующие модуль Юнга  $E_{33}$ , модули сдвига  $\mu_{12}, \mu_{23} = \mu_{13}$  объемный модуль плоской деформации  $K_{12}$  и коэффициент Пуассона  $\nu_{31}$  с помощью следующих равенств:

$$\begin{aligned} C_{33} &= E_{33} + 4\nu_{31}^2 K_{12}, & C_{13} &= 2K_{12}\nu_{31}, & C_{11} &= \mu_{12} + K_{12}, \\ C_{12} &= -\mu_{12} + K_{12}, & C_{44} &= \mu_{13} = \mu_{23}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для определения упругих констант (2.32) можно использовать и другие эквивалентные соотношения:

$$\begin{aligned} E_{33} &= E_L, & E_{11} &= E_{22} = E_T, & \mu_{13} &= \mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{32} = \mu_L, \\ \mu_{12} &= \mu_{21} = \mu_T, & \nu_{12} &= \nu_{21} = \nu_T, & \nu_{31} &= \nu_{32} = \nu_{LT}, \\ \nu_{13} &= \nu_{23} = \nu_{TL}. \end{aligned}$$

при этом, тензор податливости  $S_{ij}$  имеет форму

$$\begin{bmatrix} 1/E_T & -v_T/E_T & -v_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -v_T/E_T & 1/E_T & -v_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -v_{TL}/E_T & -v_{TL}/E_T & 1/E_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_T \end{bmatrix}$$

где  $\mu_T = E_T/2(1+v_T)$ . Таким образом, соотношения между упругими константами жесткости и инженерными константами можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= E_T(1 - v_{TL}v_{LT})Y, & C_{33} &= E_L(1 - v_T^2)Y, \\ C_{12} &= E_T(v_T + v_{TL}v_{LT})Y, & C_{13} = C_{23} &= E_T(v_{LT} + v_Tv_{LT})Y = \\ &= E_L(v_{TL} + v_Tv_{TL})Y, & C_{44} &= \mu_L, & C_{66} &= \mu_T, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\text{где } Y = \frac{1}{1 - v_T^2 - 2v_{TL}v_{LT} - 2v_Tv_{TL}v_{LT}}.$$

Допустим, что ось 1 – ось плоскости изотропии (Рисунок 2.3). Тогда соотношение напряжения-деформации можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

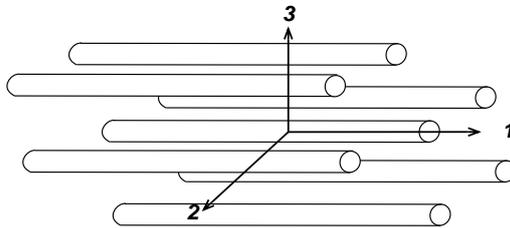


Рисунок 2.3 – Система трансверсально-изотропной среды, где ось 1 – ось симметрии

Пять упругих констант  $C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{23}$  и  $C_{66}$  определяют пять независимых эффективных свойств трансверсально-изотропной среды с осью плоскости симметрии, направленной вдоль

оси 1. Эти постоянные определяются через соответствующие модуль Юнга  $E_{11}$ , модули сдвига  $\mu_{12} = \mu_{13}$ ,  $\mu_{23}$ , объемный модуль плоской деформации  $K_{23}$  и коэффициент Пуассона  $\nu_{12}$ :

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_{11} + 4\nu_{12}^2 K_{23}, & C_{12} &= 2K_{23}\nu_{12}, & C_{22} &= \mu_{23} + K_{23}, \\ C_{23} &= -\mu_{23} + K_{23}, & C_{66} &= \mu_{12} = \mu_{13}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Имеет место и другая форма записи (2.34):

$$\begin{aligned} C_{22} &= C_{33} = E_T(1 - \nu_{TL}\nu_{LT})Y, & C_{11} &= E_L(1 - \nu_T^2)Y, \\ C_{23} &= E_T(\nu_T + \nu_{TL}\nu_{LT})Y, & C_{12} &= C_{13} = E_T(\nu_{LT} + \nu_T\nu_{LT})Y = \\ &= E_L(\nu_{TL} + \nu_T\nu_{TL})Y, & C_{66} &= \mu_L, & C_{44} &= \mu_T. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В случае полной изотропии остаются две независимые компоненты  $C_{ij}$  [21]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Учтем, что  $\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ , где  $\delta_{kl}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kk} = \Theta$  – объемная деформация;  $\delta_{kl}$  – дельта Кронекера ( $\delta_{kl} = 1$  если  $k = l$  и  $\delta_{kl} = 0$  если  $k \neq l$ );  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ламе. Тогда соотношение (2.36) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Сравнивая (2.36) с (2.37), находим:

$$C_{11} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = \lambda \quad (2.38)$$

Полезными могут также оказаться следующие отношения:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (2.39)$$

Учитывая (2.39) выражения (2.38) принимают вид:

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (2.40)$$

## 2.2 Постановка задачи

Рассматривается однонаправленный волокнистый композит с вискеризованными волокнами (Рисунок 2.4). Из-за наличия микро- или нановолокон (вискерсов или щетин), такой композит имеет дополнительный межфазный слой между базовым волокном и матрицей. Такие материалы можно отнести к волокнистым многофазным композитам, их принято называть модифицированными волокнистыми композитами. Считаем, что наш композит имеет только три слоя или фазы (т.е.  $N=3$ , где  $N$  – число слоев в композите).

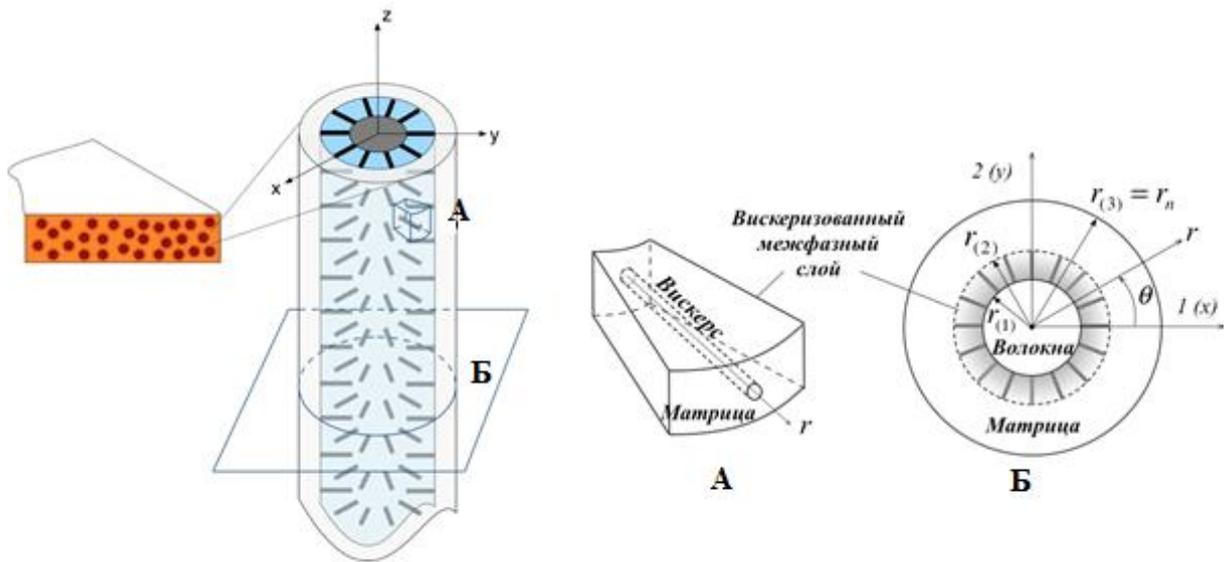


Рисунок 2.4 – Однонаправленный вискеризованный волокнистый композит  
 А – ячейка вискеризованного межфазного слоя, Б – ячейка вискеризованного  
 волокнистого композита

Волокнистый композит является основой монослоя, который работает на растяжение вдоль волокон, поперек волокон и сдвиг. Поэтому для определения напряженно-деформированных состояний в элементах структуры модифицированного волокнистого композита достаточно решить четыре задачи: задачу одноосного растяжения вдоль волокон, задачу чистого сдвига вдоль волокон, и две задачи - всесторонней нагрузки поперек волокон и чистого сдвига поперек волокон, комбинация которых позволяет определить напряженно-деформированное состояние при растяжении вдоль волокон. В общем виде произвольную нагрузку, действующую на монослой, можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix},$$

где  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  - компоненты, выходящие в задачу всесторонней нагрузки поперек волокон и задачу чистого сдвига вдоль волокон,

$\varepsilon_{xy}$  - компонента из задачи чистого сдвига в плоскости поперек волокна путем поворота системы координат на  $45^\circ$ ,

$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz}$  - компоненты, определяемые из задачи чистого сдвига вдоль волокна путем поворота системы координат на  $45^\circ$ ,

$\varepsilon_{zz}$  - компонента, входящая в задачу одноосного растяжения и в задачу чистого сдвига вдоль волокна.

Для определения напряженно-деформированного состояния в элементах структуры модифицированного композита при различных видах нагружения решаются контактные задачи, в которых заданными считаются перемещения на бесконечности, зависящие от деформации [60, 61]. Поэтому для проведения сравнительного анализа напряжений и деформаций в элементах структуры при различных объемных содержаниях волокон и длин вискерсов необходимо сохранять эквивалентность условий силового нагружения посредством пересчета деформаций через эффективные свойства композитного материала. Эффективные свойства модифицированных композитов с вискеризованными волокнами можно получить с использованием метода трех фаз, учитывающего геометрические и механические характеристики структур композита. Метод трех фаз может быть реализован в рамках классической теории упругости [52, 59] и в рамках градиентной теории упругости [62]. Дальнейшие рассуждения будут основаны на классической теории упругости.

Как будет показано в подразделе 2.7 для модифицированного композита с вискеризованными волокнами в задаче поперечного сдвига применение метода трех фаз, приводит к системе уравнений с 12 неизвестными, среди которых находится эффективный поперечный модуль сдвига. Решение системы уравнений, включающей в общем случае и нелинейные уравнения, является непростой задачей даже при использовании аппарата символической математики и соответствующего программного обеспечения. Поэтому предлагается новая методика, в соответствии с которой эффективный поперечный модуль сдвига находится аналитически как положительный корень квадратного уравнения.

### **2.3 Описание элементов структуры модифицированного композита с вискеризованными волокнами**

Модифицированные композиты с вискеризованными волокнами состоят из трех фаз (Рисунок 2.4): 1) базовое волокно, 2) вискеризованный межфазный слой, 3) матрица.

Вискеризованный межфазный слой является нанокомпозитом, который состоит из вискерсов и матрицы (Рисунок 2.4). В таблице 2.1 приведены геометрические и материальные характеристики композитного материала, волокна которого модифицированы вискерсами [51].

Волокна являются трансверсально-изотропными с плоскостью изотропии поперек волокна. Матрица и вискерсы считаются изотропными. Предполагается, что свойства вискерсов являются свойствами длинных микро- или нановолокон, так как они имеют высокой отношение поверхности к объему [51], а также вискеризованные межфазные слои не пересекаются и вискерсы выращены перпендикулярно волокну. Очевидно, что межфазный слой имеет переменные свойства в направлении длины вискерсов, однако, в связи с тем, что длина вискерсов довольно мала, полагаем, что вискеризованный межфазный слой является материалом с трансверсально изотропными свойствами с плоскостью изотропии поперек вискерсов и его свойства являются постоянными по длине вискерсов [51, 53, 54, 56].

Таблица 2.1

	<b>ФАЗА</b>		
	<b>Базовое Волокно</b>	<b>Вискерс</b>	<b>Матрица</b>
<b>Материалы</b>	Углеродное Т-650	УНТ	Эпоксидная
<b>Размеры</b>			
- Диаметр (мкм)	5 мкм	0,00051 – 0,00085	—
- Длина (мкм)	—	1 – 2	—
<b>Свойства</b>			
- Продольный модуль Юнга, $E_L$ (ГПа)	241	1100	3
- Поперечный модуль Юнга, $E_T$ (ГПа)	14,5	—	—
- Модуль продольного сдвига, $\mu_L$ (ГПа)	22,8	—	—
- Модуль поперечного сдвига, $\mu_T$ (ГПа)	4,8	—	—
- Коэффициент Пуассона, $\nu_{LT}$	0,27	0,14	0,3

## 2.4 Моделирование эффективных свойств модифицированных композитов с вискеризованными волокнами

На рисунке 2.5 представлены ячейка модифицированного композита с вискеризованными волокнами и ячейка эффективного (гомогенизированного композита), соответствующие микромоделли метода трех фаз.

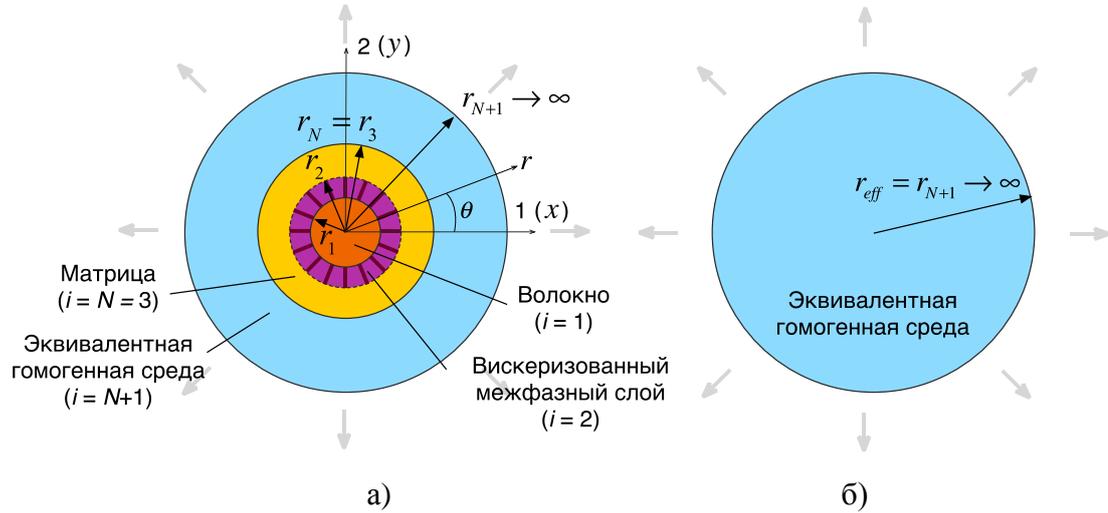


Рисунок 2.5 а) Ячейка вискеризованного волокнистого композита, и б) ячейка эффективного композита (гомогенизированный композит).

Для определения эффективных свойств модифицированного композита с вискеризованными волокнами используется двухэтапная гомогенизация. На первом этапе определяются эффективные свойства вискеризованного межфазного слоя по известным формулам метода трех фаз, приведенных в работе [31] для двухфазного композита:

продольный модуль Юнга  $E_{11}^{eff}$  :

$$E_{11}^{eff} = c_b E_b + (1 - c_b) E_m + \frac{4c_b (1 - c_b) (v_b - v_m)^2 \mu_m}{(1 - c_b) \mu_m / (k_b + \mu_b / 3) + c_b \mu_m / (k_m + \mu_m / 3) + 1}, \quad (2.41)$$

коэффициент Пуассона (вдоль волокон)  $\nu_{12}^{eff}$  :

$$\nu_{12}^{eff} = c_b \nu_b + (1 - c_b) \nu_m + \frac{c_b (1 - c_b) (v_b - v_m) (\mu_m / (k_m + \mu_m / 3) - \mu_m / (k_b + \mu_b / 3))}{(1 - c_b) (\mu_m / (k_b + \mu_b / 3)) + c_b (\mu_m / (k_m + \mu_m / 3)) + 1} \quad (2.42)$$

модуль продольного сдвига  $\mu_{12}^{eff}$  :

$$\frac{\mu_{12}^{eff}}{\mu_m} = \frac{\mu_b (1 + c_b) + \mu_m (1 - c_b)}{\mu_b (1 - c_b) + \mu_m (1 + c_b)}, \quad (2.43)$$

объемный модуль плоской деформации  $K_{23}^{eff}$ :

$$K_{23}^{eff} = k_m + \frac{\mu_m}{3} + \frac{c_b}{1/(k_b - k_m + \frac{1}{3}(\mu_b - \mu_m)) + (1 - c_b)/(k_m + 4\mu_m/3)}, \quad (2.44)$$

где  $c_b$  – объемная доля включения (вискерсов) в межфазном слое,  $E_b$  – модуль Юнга вискерса,  $E_m$  – модуль Юнга матрицы,  $\nu_b$  – коэффициент Пуассона вискерса,  $\nu_m$  – коэффициент Пуассона матрицы,  $\mu_b$  – модуль сдвига вискерса,  $\mu_m$  – модуль сдвига матрицы,  $k_b$  – объемный модуль вискерса,  $k_m$  – объемный модуль матрицы.

Модуль поперечного сдвига  $\mu_{23}^{eff}$  определяется как действительный корень уравнения

$$A \left( \frac{\mu_{23}^{eff}}{\mu_m} \right)^2 + 2B \left( \frac{\mu_{23}^{eff}}{\mu_m} \right) + C = 0, \quad (2.45)$$

где  $\eta = 3 - 4\nu$  и  $A = 3c_b(1 - c_b)^2 \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - \eta_b \right) +$

$$+ \left[ \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m + \eta_b \eta_m - \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right] \left[ c_b \eta_m \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) - \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m + 1 \right) \right],$$

$$B = -3c_b(1 - c_b)^2 \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b \right) + \frac{1}{2} \left[ \eta_m \frac{\mu_b}{\mu_m} + \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) c_b + 1 \right] \left[ (\eta_m - 1) \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b \right) - \right.$$

$$\left. - 2 \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right] + \frac{c_b}{2} (\eta_m + 1) \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left[ \frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b + \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right],$$

$$C = 3c_b(1 - c_b)^2 \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b \right) + \left[ \eta_m \frac{\mu_b}{\mu_m} + \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) c_b + 1 \right] \left[ \frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b + \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right].$$

На эффективные свойства вискеризованного межфазного слоя влияют плотность, длина, диаметр, ориентация и материал вискерсов. Информация об ориентации и материале вискерсов приведена в подразделе 2.2. Объемная доля включений учитывает влияние длины и диаметра вискерсов по формуле:

$$c_b = \frac{M_b^2 d_b^2}{4\pi(l_b + D)D}, \quad (2.46)$$

где  $M_b$  — число вискерсов, выращенных на поверхности волокна;  $d_b$  — диаметр вискерса;  $l_b$  — длина вискерса;  $D$  — диаметр базового волокна.

Плотность упаковки вискерсов связана с числом вискерсов, выращенных на единичной поверхности волокна. Однако для простоты мы определяем в расчете, что плотность упаковки вискерсов представляет собой соотношение числа вискерсов, выращенных на волокне к

максимальному допустимому числу вискерсов, умещающихся по длине окружности волокна. Имеем

$$\rho_b = (M_b / M_b^{\max}) 100\% , \quad (2.47)$$

где  $M_b^{\max} = \pi D / d_b$  - максимальное допустимое число вискерсов, которое может поместиться на длине окружности волокна.

На втором этапе на основе условий непрерывности перемещений и напряжений на границе фаз и условия на бесконечности (внешнего граничного условия) формируется система алгебраических уравнений, из которой с помощью интегральной формулы Эшелби (А.15) (Приложение А) находятся все неизвестные константы, в число которых включены эффективные модули.

## 2.5 Определение напряжений и деформаций при одноосном растяжении. Определение эффективного модуля упругости

В задаче об одноосном растяжении вдоль волокон (Рисунок 2.6) полагаем, что вне ячейки задано однородное поле деформаций  $\varepsilon_0$ , и перемещения вдали от включения имеют вид

$$u_z(z) = \varepsilon_0 z.$$

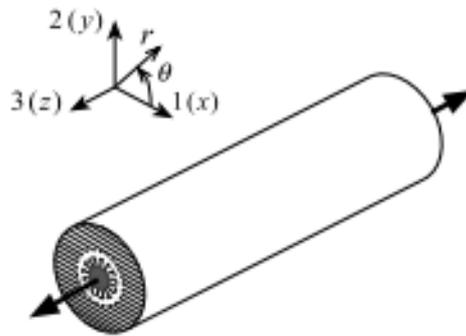


Рисунок 2.6 – Задача одноосного растяжения

Учитывая (2.12) поля перемещений ортотропных фаз в этой задаче принимают вид

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + v^{(i)} \varepsilon_0 r^3,$$

$$u_z^{(i)}(z) = \varepsilon_0 z,$$

где  $D_1^{(i)}$ ,  $D_2^{(i)}$  – неизвестные константы, которые определяются из граничных условий;

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)} / C_{rr}^{(i)}} \quad \text{и} \quad v^{(i)} = \left( \frac{C_{rz}^{(i)} - C_{\theta z}^{(i)}}{C_{\theta\theta}^{(i)} - 9C_{rr}^{(i)}} \right) - \text{константы.}$$

Следовательно, используя соотношения малых деформаций, можно записать поля деформаций ортотропных фаз в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + v^{(i)} \varepsilon_0 r^3 \right] = \\ &= \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} + 3v^{(i)} \varepsilon_0 r^2,\end{aligned}\quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= \frac{u_r}{r} = \frac{1}{r} \left[ D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + v^{(i)} \varepsilon_0 r^3 \right] = \\ &= D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} + 3v^{(i)} \varepsilon_0 r^2,\end{aligned}\quad (2.49)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(i)}(r) = \varepsilon_0. \quad (2.50)$$

Найдем выражения для напряжений в каждой фазе композита. Учтем, что волокно (фаза 1) считается трансверсально изотропным с осью симметрии, направленной вдоль оси волокна, межфазный слой (фаза 2) является трансверсально-изотропной средой с осью симметрии, направленной вдоль оси вискерса, а матрица является изотропной. В результате получим, что напряжения в волокне, в межфазном слое и в матрице соответственно определяются формулами:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{\theta z}^{(1)} \\ \sigma_{rz}^{(1)} \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(1)} & C_{11}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(2)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \\ \sigma_{zz}^{(2)} \\ \sigma_{\theta z}^{(2)} \\ \sigma_{rz}^{(2)} \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}^{(2)} - C_{23}^{(2)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(2)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} \\ \varepsilon_{zz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(3)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(3)} \\ \sigma_{zz}^{(3)} \\ \sigma_{\theta z}^{(3)} \\ \sigma_{rz}^{(3)} \\ \sigma_{r\theta}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(3)} & C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{11}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(3)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(3)} \\ \varepsilon_{zz}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Напряжения в эквивалентной гомогенной среде, в силу того, что эквивалентная гомогенная среда, также как и первая фаза модифицированного композита, обладает трансверсально-изотропными свойствами по оси симметрии, направленной вдоль базового волокна, определяются равенством (2.51).

В случае изотропной или трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, направленной вдоль волокон материальные константы равны

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{G_{\theta\theta}^{(i)} / G_{rr}^{(i)}} = \sqrt{C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}} = 1,$$

$$\nu^{(i)} = \left( \frac{C_{rz}^{(i)} - C_{\theta z}^{(i)}}{C_{\theta\theta}^{(i)} - C_{rr}^{(i)}} \right) = \left( \frac{C_{13}^{(i)} - C_{23}^{(i)}}{C_{22}^{(i)} - C_{11}^{(i)}} \right) = 0,$$

так как в этом случае, исходя из законов Гука, имеются равенства

$$C_{rr}^{(i)} = C_{\theta\theta}^{(i)} \text{ или } C_{11}^{(i)} = C_{22}^{(i)},$$

$$C_{rz}^{(i)} = C_{\theta z}^{(i)} \text{ или } C_{13}^{(i)} = C_{23}^{(i)}$$

С учетом соотношений для деформаций (2.48-2.50) выражения для определения напряжений в каждой из фаз приобретают явную форму как функции от координаты  $r$  и зависят от констант  $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_1^{(N+1)}$  и  $D_2^{(N+1)}$ .

Формулы для определения независимых компонент  $C_{ij}^{(i)}$  приведены в Подразделе 2.1.2 (2.32-2.40).

Неизвестные константы  $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_1^{(N+1)}$  и  $D_2^{(N+1)}$  находятся из условий:

- условия несингулярности напряжений в центре волокна ( $r=0$ ):

$$D_2^{(1)} = 0;$$

- условия непрерывности перемещений и напряжений на границах идеального контакта фаз:

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad (i=1,2,3,\dots,N);$$

- внешнего граничного условия на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$\sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1}) = 0.$$

- условия энергетической поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S (\sigma_{zz}^{N+1} u_z^{eff} - \sigma_{zz}^{eff} u_z^{N+1})_{r=r_N} dS = 0$$

где с учетом (2.32)  $\sigma_{zz}^{N+1}(r) = 4K_{12}^{N+1} \nu_{31}^{N+1} D_1^{N+1} + 4K_{12}^{N+1} (\nu_{31}^{N+1})^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{N+1} \varepsilon_0$ ,  $u_z^{N+1}(z) = \varepsilon_0 z$ ,

$$\sigma_{zz}^{eff}(r) = 4K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} D_1^{eff} + 4K_{12}^{eff} (\nu_{31}^{eff})^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{eff} \varepsilon_0, \quad u_z^{eff}(z) = \varepsilon_0 z.$$

Таким образом, получаем систему 6 уравнений с 6 неизвестными, среди которых

$D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  и  $v_{31}^{N+1}$ :

- 1)  $D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} + v^{(1)} \varepsilon_0 r_1 - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} - v^{(2)} \varepsilon_0 r_1 = 0,$
- 2)  $D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} + v^{(2)} \varepsilon_0 r_2 - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} - v^{(3)} \varepsilon_0 r_2 = 0,$
- 3)  $D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} + v^{(3)} \varepsilon_0 r_3 = -v_{31}^{N+1} \varepsilon_0 r_3$
- 4)  $D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r_1^{\lambda_{(1)}-1} + (C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) v^{(1)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(1)} \varepsilon_0 -$   
 $- D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{\lambda_{(2)}-1} - D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{-\lambda_{(2)}-1} -$   
 $- (C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) v^{(2)} \varepsilon_0 - C_{13}^{(2)} \varepsilon_0 = 0,$
- 5)  $D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{\lambda_{(2)}-1} + D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{-\lambda_{(2)}-1}$   
 $+ (C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) v^{(2)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(2)} \varepsilon_0 -$   
 $- D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{\lambda_{(3)}-1} - D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{-\lambda_{(3)}-1} -$   
 $- (C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) v^{(3)} \varepsilon_0 - C_{13}^{(3)} \varepsilon_0 = 0,$
- 6)  $D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{\lambda_{(3)}-1} + D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{-\lambda_{(3)}-1} +$   
 $+ (C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) v^{(3)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(3)} \varepsilon_0 = 0.$

Эффективный продольный модуль Юнга всего композита находится также с использованием метода трех фаз Эшелби [59] с учетом соотношения  $\varepsilon_{zz}^{eff} = \varepsilon_{zz}^{N+1} = \varepsilon_0$ :

$$E_{33}^{N+1} = \frac{2}{\varepsilon_0 r_N^2} \sum_{i=1}^N \int_{r_{i-1}}^{r_i} \sigma_{zz}^{(i)} r dr. \quad (2.54)$$

## 2.6 Определение напряжений и деформаций при чистом сдвиге вдоль волокна.

### Определение эффективного модуля продольного сдвига

В задаче чистого сдвига вдоль волокна (Рисунок 2.7) полагаем, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформаций  $\varepsilon_0$ , и перемещения вдали от включения имеют вид  $u_z(r, \theta) = 2\varepsilon_0 r \cos \theta$ .

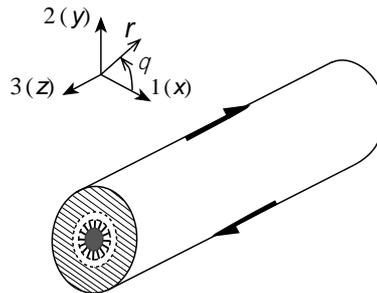


Рисунок 2.7 – Задача чистого сдвига вдоль волокна

Учитывая (2.17) поля перемещений ортотропных фаз в этой задаче принимают вид

$$u_z^{(i)}(r, \theta) = \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} \right) \cos \theta,$$

где  $D_1^{(i)}$ ,  $D_2^{(i)}$  – неизвестные константы, которые определяются из граничных условий;

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)} / C_{rr}^{(i)}} - \text{константы.}$$

Следовательно, используя соотношения малых деформаций, можно записать поля деформаций ортотропных фаз в виде

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} \frac{1}{r^{\lambda_{(i)}}} \right) \cos \theta \right] = \\ &= \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} \frac{1}{r^{\lambda_{(i)}}} \right) (-\sin \theta), \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{rz}^{(i)}(r, \theta) &= \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} \frac{1}{r^{\lambda_{(i)}}} \right) \cos \theta \right] = \\ &= \left( \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + (-\lambda) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Напряжения в каждой фазе определяются формулами (2.51-2.53).

В случае изотропной или трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, направленной вдоль волокон материальные константы равны

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{G_{\theta z}^{(i)} / G_{rz}^{(i)}} = \sqrt{C_{44}^{(i)} / C_{55}^{(i)}} = 1,$$

так как в этом случае, исходя из законов Гука, имеются равенства

$$G_{\theta z} = G_{rz} \quad \text{или} \quad C_{44}^{(i)} = C_{55}^{(i)}.$$

С учетом соотношений для деформаций (2.55-2.56) выражения для определения напряжений в каждой из фаз приобретают явную форму как функции от координаты  $r$  и зависят от констант и одного неизвестного модуля – эффективного продольного сдвига  $\mu_{23}^{N+1}$ .

Формулы для определения независимых компонент  $C_{ij}^{(i)}$  приведены в Подразделе 2.1.2 (2.32-2.40).

Неизвестные константы  $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_1^{(N+1)}, D_2^{(N+1)}$  находятся из условий:

- условия несингулярности напряжений в центре волокна ( $r=0$ ) для фазы 1:

$$D_2^{(1)} = 0;$$

- условия непрерывности перемещений и напряжений на границах идеального контакта фаз:

$$u_z^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = u_z^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad \sigma_{rz}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = \sigma_{rz}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad (i=1, 2, \dots, N);$$

- внешнего граничного условия на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$u_z^{N+1}(r_{N+1}) = 2\varepsilon_0 r_{N+1} \cos \theta,$$

- условия энергетического взаимодействия по поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S (\sigma_{rz}^{N+1} u_r^{eff} - \sigma_{rz}^{eff} u_z^{N+1})_{r=r_N} dS = 0,$$

где  $u_z^{eff}(r, \theta) = D_1^{eff} r \cos \theta$ ,  $\sigma_{rz}^{eff}(r, \theta) = \mu_{23}^{N+1} D_1^{eff} \cos \theta$ ,  $\sigma_{rz}^{N+1}(r, \theta) = \mu_{23}^{N+1} (D_1^{N+1} - D_2^{N+1} r^{-2}) \cos \theta$ ,  $\mu_{23}^{N+1}$  - эффективный модуль продольного сдвига.

Таким образом, получаем систему 6 уравнений с 6 неизвестными, среди которых

$D_1^{(1)}$ ,  $D_1^{(2)}$ ,  $D_2^{(2)}$ ,  $D_1^{(3)}$ ,  $D_2^{(3)}$  и  $\mu_{23}^{N+1}$ :

- 1)  $D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} = 0,$
- 2)  $D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} = 0,$
- 3)  $D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} - 2\varepsilon_0 r_3 = 0,$
- 4)  $C_{55}^{(1)} \lambda_{(1)} D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}-1} - C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}-1} + C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}-1} = 0,$
- 5)  $C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}-1} - C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}-1} - C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}-1} +$   
 $+ C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}-1} = 0,$
- 6)  $C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}-1} - C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}-1} - 2\varepsilon_0 \mu_{23}^{N+1} = 0.$

## 2.7 Определение напряжений и деформаций при чистом сдвиге поперек волокна.

### Определение эффективного модуля поперечного сдвига

В задаче чистого сдвига поперек волокна (Рисунок 2.8) полагаем, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформации  $\varepsilon_0$ , и перемещения вдали от включения имеют вид  $u_r(r, \theta) = \varepsilon_0 r \cos(2\theta)$ ,  $u_{r\theta}(r, \theta) = -\varepsilon_0 r \sin(2\theta)$ .

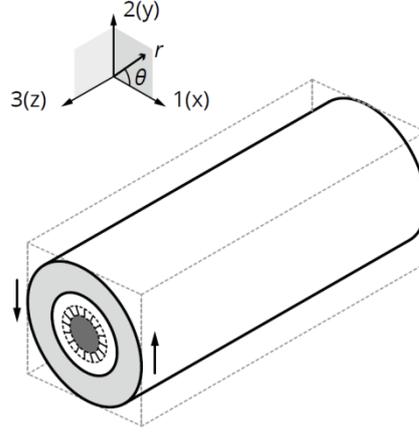


Рисунок 2.8 – Задача чистого сдвига поперек волокон

Учитывая (2.26) поля перемещений ортотропных фаз в этой задаче принимают вид

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r, \theta) &= \left( \phi_1^{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + \phi_2^{(i)} D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + \phi_3^{(i)} D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + \phi_4^{(i)} D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \cos(2\theta) = \\ &= \left( \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \cos(2\theta), \\ u_\theta^{(i)}(r, \theta) &= \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \sin(2\theta) = \\ &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \sin(2\theta). \end{aligned}$$

где  $D_1^{(i)}$ ,  $D_2^{(i)}$ ,  $D_3^{(i)}$ ,  $D_4^{(i)}$  – неизвестные константы, которые определяются из граничных

условий;  $\lambda_j^{(i)}$  и  $\phi_j^{(i)} = 2 \frac{G_{r\theta}^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} \lambda_j^{(i)} - G_{r\theta}^{(i)} - C_{\theta\theta}^{(i)}}{C_{rr}^{(i)} \lambda_j^{(i)2} - 4G_{r\theta}^{(i)} - C_{\theta\theta}^{(i)}}$  – константы.

Следовательно, используя соотношения малых деформаций, можно записать поля деформаций ортотропных фаз в виде

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r, \theta) = \left( \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} \right) \cos(2\theta), \quad (2.58)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r, \theta) = \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (\phi_j^{(i)} - 2) \right) \cos(2\theta), \quad (2.59)$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{(i)}(r, \theta) = \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (-\lambda_j^{(i)} - 2\phi_j^{(i)} - 1) \right) \sin(2\theta). \quad (2.60)$$

Напряжения в каждой фазе определяются формулами (2.51)-(2.53).

В случае изотропной или трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, направленной вдоль волокон материальные константы равны

$$\lambda_1^{(i)} = 1, \lambda_2^{(i)} = -1, \lambda_3^{(i)} = 3, \lambda_4^{(i)} = -3,$$

так как в этом случае, исходя из законов Гука, имеются равенства

$$C_{rr}^{(i)} = C_{\theta\theta}^{(i)} \text{ или } C_{11}^{(i)} = C_{22}^{(i)},$$

$$C_{rz}^{(i)} = C_{\theta z}^{(i)} \text{ или } C_{13}^{(i)} = C_{23}^{(i)}.$$

С учетом соотношений для деформаций (2.58)-(2.60) выражения для определения напряжений в каждой из фаз приобретают явную форму как функции от координат  $r$  и  $\theta$ , и зависят от констант  $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_3^{(1)}, D_4^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_3^{(2)}, D_4^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_3^{(3)}, D_4^{(3)}, D_1^{(N)}, D_2^{(N)}, D_3^{(N)}, D_4^{(N)}$ .

Неизвестные константы  $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_3^{(1)}, D_4^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_3^{(2)}, D_4^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_3^{(3)}, D_4^{(3)}, D_1^{(N+1)}, D_2^{(N+1)}, D_3^{(N+1)}, D_4^{(N+1)}$  находятся из условий:

- условия несингулярности напряжений в центре волокна ( $r=0$ ) для фазы 1:

$$D_2^{(1)} = D_4^{(1)} = 0;$$

- условия непрерывности перемещений и напряжений на границах идеального контакта фаз:

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= u_r^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), & u_\theta^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= u_\theta^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \\ \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), & \sigma_{r\theta}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, N);$$

- внешнего граничного условия на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1}, \theta) &= \cos(2\theta), \\ \sigma_{r\theta}^{N+1}(r_{N+1}, \theta) &= \sin(2\theta); \end{aligned}$$

- условия энергетической поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S \left( \sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} + \sigma_{r\theta}^{N+1} u_\theta^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1} - \sigma_{r\theta}^{eff} u_\theta^{N+1} \right)_{r=r_N} dS = 0,$$

где  $u_r^{eff}(r, \theta) = \varepsilon_0 r \cos(2\theta)$ ,  $u_\theta^{eff}(r, \theta) = -\varepsilon_0 r \sin(2\theta)$ ,  $\sigma_{rr}^{eff}(r, \theta) = 2\varepsilon_0 \mu_{12}^{N+1} \cos(2\theta)$ ,

$\sigma_{r\theta}^{eff}(r, \theta) = 2\varepsilon_0 \mu_{12}^{N+1} \sin(2\theta)$ ,  $\mu_{12}^{N+1}$  - эффективный поперечный модуль сдвига.

Таким образом, получаем систему 12 уравнений с 12 неизвестными, среди которых  $D_1^{(1)}, D_3^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_3^{(2)}, D_4^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_3^{(3)}, D_4^{(3)}, D_4^{(N+1)}$  и эффективный поперечный модуль сдвига  $\mu_{12}^{N+1}$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \phi_1^{(1)} D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}} + \phi_3^{(1)} D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}} - \\ & \phi_1^{(2)} D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}} - \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}} - \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}} - \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}} = 0, \\ 2) \quad & \phi_1^{(2)} D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}} + \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}} + \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}} + \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}} - \\ & \phi_1^{(3)} D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(13)}} - \phi_2^{(3)} D_2^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}} - \phi_3^{(3)} D_3^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}} - \phi_4^{(3)} D_4^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & \phi_1^{(3)} D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(13)}} + \phi_2^{(3)} D_2^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}} + \phi_3^{(3)} D_3^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}} + \phi_4^{(3)} D_4^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}} - \\
& (-D_4^{(N+1)} / r_3^3 + r_3 \varepsilon_0) = 0, \\
4) \quad & -D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}} - \phi_3^{(1)} D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}} - \\
& (-D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}} - D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}} - D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}} - D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}}) = 0, \\
5) \quad & -D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}} - \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}} - \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}} - \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}} - \\
& (-D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(13)}} - \phi_2^{(3)} D_2^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}} - \phi_3^{(3)} D_3^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}} - \phi_4^{(3)} D_4^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}}) = 0, \\
6) \quad & -D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(13)}} - \phi_2^{(3)} D_2^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}} - \phi_3^{(3)} D_3^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}} - \phi_4^{(3)} D_4^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}} - \\
& (-D_4^{(N+1)} / r_3^3 - r_3 \varepsilon_0) = 0, \\
7) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}-1} (C_{11}^{(1)} \lambda_{(11)} \phi_1^{(1)} + C_{12}^{(1)} (-2 + \phi_1^{(1)})) + D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}-1} (C_{11}^{(1)} \lambda_{(31)} \phi_3^{(1)} + C_{12}^{(1)} (-2 + \phi_3^{(1)})) - \\
& (D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(12)} \phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_1^{(2)})) + D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(22)} \phi_2^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_2^{(2)})) \\
& + D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(32)} \phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_3^{(2)})) + D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(42)} \phi_4^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_4^{(2)}))) = 0, \\
8) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(12)} \phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_1^{(2)})) + D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(22)} \phi_2^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_2^{(2)})) \\
& + D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(32)} \phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_3^{(2)})) + D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(42)} \phi_4^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_4^{(2)})) \\
& - (D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(13)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(13)} \phi_1^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_1^{(3)})) + D_2^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(23)} \phi_2^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_2^{(3)})) \\
& + D_3^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(33)} \phi_3^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_3^{(3)})) + D_4^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(43)} \phi_4^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_4^{(3)}))) = 0, \\
9) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(13)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(13)} \phi_1^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_1^{(3)})) + D_2^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(23)} \phi_2^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_2^{(3)})) \\
& + D_3^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(33)} \phi_3^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_3^{(3)})) + D_4^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(43)} \phi_4^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_4^{(3)})) - \\
& 2(3D_4^{(N+1)} r_3^{\lambda_{(4N+1)}-1} + \varepsilon_0) \mu_{12}^{N+1} = 0, \\
10) \quad & C_{66}^{(1)} (D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}-1} (-\lambda_{(11)} - 1 - 2\phi_1^{(1)})) + D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}-1} (-\lambda_{(31)} - 1 - 2\phi_3^{(1)}) - \\
& C_{66}^{(2)} (D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}-1} (-\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)})) + D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}-1} (-\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)}) \\
& + D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}-1} (-\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)}) + D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}-1} (-\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)}) = 0, \\
11) \quad & C_{66}^{(2)} (D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}-1} (-\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)})) + D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}-1} (-\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)}) \\
& + D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}-1} (-\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)}) + D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}-1} (-\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)}) - \\
& C_{66}^{(3)} (D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(13)}-1} (-\lambda_{(13)} - 1 - 2\phi_1^{(3)})) + D_2^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}-1} (-\lambda_{(23)} - 1 - 2\phi_2^{(3)}) \\
& + D_3^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}-1} (-\lambda_{(33)} - 1 - 2\phi_3^{(3)}) + D_4^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}-1} (-\lambda_{(43)} - 1 - 2\phi_4^{(3)}) = 0, \\
12) \quad & C_{66}^{(3)} (D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(13)}-1} (-\lambda_{(13)} - 1 - 2\phi_1^{(3)})) + D_2^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}-1} (-\lambda_{(23)} - 1 - 2\phi_2^{(3)}) \\
& + D_3^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}-1} (-\lambda_{(33)} - 1 - 2\phi_3^{(3)}) + D_4^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}-1} (-\lambda_{(43)} - 1 - 2\phi_4^{(3)}) - \\
& (4D_4^{(N+1)} \mu_{12}^{N+1} r_3^{\lambda_{(4N+1)}-1} - 4\varepsilon_0 \mu_{12}^{N+1}) = 0.
\end{aligned}$$

(2.61)

## 2.8 Новый способ определения эффективного поперечного модуля сдвига

Девятое и двенадцатое уравнения (2.61) являются нелинейными, а, как известно, решение системы уравнений, включающей в общем случае и нелинейные уравнения, является непростой задачей даже при использовании аппарата символьной математики и соответствующего программного обеспечения.

В работе Кристенсена [31] показано, что при использовании трехфазной модели, эффективный модуль сдвига композита, состоящего из включения и матрицы, определяется из квадратного уравнения, полученного путем последовательного выражения из линейных уравнений по одной переменной, и подстановкой их в следующее. Такой подход является трудоемким, особенно при дальнейшем расширении числа фаз композитного материала, а также имеет довольно громоздкую форму записи результата.

Положим, что  $\mu_{12}^{N+1} = x_i$ , где  $x_i$ ,  $i=1, 2, 3$  – подобранные численные значения, соизмеримые с искомым, при этом для простоты  $x_2 = (x_1 + x_3)/2$ , и подставим эти значения в (2.61). Получится система из 12 линейных уравнений с 11 неизвестными. Для того чтобы решить такую систему уравнений матричным методом, необходимо, чтобы количество уравнений совпадало с числом неизвестных переменных, поэтому примем однородное поле деформаций  $\varepsilon_0$  за неизвестную величину. Таким образом, систему уравнений (2.61) в матричной форме можно записать в следующем виде:

$$AX = B,$$

где  $A$  – матрица коэффициентов при неизвестных,  $X$  – столбец неизвестных,  $B$  – столбец правых частей равный нулю.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{210} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{310} & a_{311} & a_{312} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} & a_{510} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{67} & a_{68} & a_{69} & a_{610} & a_{611} & a_{612} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} & a_{810} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{97} & a_{98} & a_{99} & a_{910} & 6r_3^{\lambda(4N+1)-1} x_i & -2x_i \\ a_{101} & a_{102} & a_{103} & a_{104} & a_{105} & a_{106} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{113} & a_{114} & a_{115} & a_{116} & a_{117} & a_{118} & a_{119} & a_{1110} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{127} & a_{128} & a_{129} & a_{1210} & -4x_i r_3^{\lambda(4N+1)-1} & 4x_i \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

где  $a_{11} = \phi_1^{(1)} r_1^{\lambda(11)}$ ,  $a_{12} = \phi_3^{(1)} r_1^{\lambda(31)}$ ,  $a_{13} = -\phi_1^{(2)} r_1^{\lambda(12)}$ ,  $a_{14} = -\phi_2^{(2)} r_1^{\lambda(22)}$ ,  $a_{15} = -\phi_3^{(2)} r_1^{\lambda(32)}$ ,  $a_{16} = -\phi_4^{(2)} r_1^{\lambda(42)}$ ,

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \phi_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}}, & a_{24} &= \phi_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}}, & a_{25} &= \phi_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}}, & a_{26} &= \phi_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}}, & a_{27} &= -\phi_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(13)}}, & a_{28} &= -\phi_2^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}}, \\
a_{29} &= -\phi_3^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}}, & a_{210} &= -\phi_4^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}}, & a_{37} &= \phi_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(13)}}, & a_{38} &= \phi_2^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}}, & a_{39} &= \phi_3^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}}, & a_{310} &= \phi_4^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}}, \\
a_{311} &= -1/r_3^3, & a_{312} &= r_3, & a_{41} &= -r_1^{\lambda_{(11)}}, & a_{42} &= -\phi_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}}, & a_{43} &= r_1^{\lambda_{(12)}}, & a_{44} &= r_1^{\lambda_{(22)}}, & a_{45} &= r_1^{\lambda_{(32)}}, \\
a_{46} &= r_1^{\lambda_{(42)}}, & a_{53} &= -r_2^{\lambda_{(12)}}, & a_{54} &= -\phi_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}}, & a_{55} &= -\phi_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}}, & a_{56} &= -\phi_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}}, & a_{57} &= r_2^{\lambda_{(13)}}, \\
a_{58} &= \phi_2^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}}, & a_{59} &= \phi_3^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}}, & a_{510} &= \phi_4^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}}, & a_{67} &= -r_3^{\lambda_{(13)}}, & a_{68} &= -\phi_2^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}}, & a_{69} &= -\phi_3^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}}, \\
a_{610} &= -\phi_4^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}}, & a_{611} &= 1/r_3^3, & a_{612} &= r_3, & a_{71} &= r_1^{\lambda_{(11)}-1} \left( C_{11}^{(1)} \lambda_{(11)} \phi_1^{(1)} + C_{12}^{(1)} (-2 + \phi_1^{(1)}) \right), \\
a_{72} &= r_1^{\lambda_{(31)}-1} \left( C_{11}^{(1)} \lambda_{(31)} \phi_3^{(1)} + C_{12}^{(1)} (-2 + \phi_3^{(1)}) \right), & a_{73} &= -r_1^{\lambda_{(12)}-1} \left( C_{11}^{(2)} \lambda_{(12)} \phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_1^{(2)}) \right), \\
a_{74} &= r_1^{\lambda_{(22)}-1} \left( C_{11}^{(2)} \lambda_{(22)} \phi_2^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_2^{(2)}) \right), & a_{75} &= r_1^{\lambda_{(32)}-1} \left( C_{11}^{(2)} \lambda_{(32)} \phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_3^{(2)}) \right), \\
a_{76} &= r_1^{\lambda_{(42)}-1} \left( C_{11}^{(2)} \lambda_{(42)} \phi_4^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_4^{(2)}) \right), & a_{83} &= r_2^{\lambda_{(12)}-1} \left( C_{11}^{(2)} \lambda_{(12)} \phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_1^{(2)}) \right), \\
a_{84} &= r_2^{\lambda_{(22)}-1} \left( C_{11}^{(2)} \lambda_{(22)} \phi_2^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_2^{(2)}) \right), & a_{85} &= r_2^{\lambda_{(32)}-1} \left( C_{11}^{(2)} \lambda_{(32)} \phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_3^{(2)}) \right), \\
a_{86} &= r_2^{\lambda_{(42)}-1} \left( C_{11}^{(2)} \lambda_{(42)} \phi_4^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_4^{(2)}) \right), & a_{87} &= -r_2^{\lambda_{(13)}-1} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(13)} \phi_1^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_1^{(3)}) \right), \\
a_{88} &= -r_2^{\lambda_{(23)}-1} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(23)} \phi_2^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_2^{(3)}) \right), & a_{89} &= -r_2^{\lambda_{(33)}-1} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(33)} \phi_3^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_3^{(3)}) \right), \\
a_{810} &= -r_2^{\lambda_{(43)}-1} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(43)} \phi_4^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_4^{(3)}) \right), & a_{97} &= r_3^{\lambda_{(13)}-1} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(13)} \phi_1^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_1^{(3)}) \right), \\
a_{98} &= r_3^{\lambda_{(23)}-1} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(23)} \phi_2^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_2^{(3)}) \right), & a_{99} &= r_3^{\lambda_{(33)}-1} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(33)} \phi_3^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_3^{(3)}) \right), \\
a_{910} &= r_3^{\lambda_{(43)}-1} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(43)} \phi_4^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_4^{(3)}) \right), & a_{101} &= C_{66}^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}-1} \left( -\lambda_{(11)} - 1 - 2\phi_1^{(1)} \right), \\
a_{102} &= C_{66}^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}-1} \left( -\lambda_{(31)} - 1 - 2\phi_3^{(1)} \right), & a_{103} &= C_{66}^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}-1} \left( -\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)} \right), \\
a_{104} &= C_{66}^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}-1} \left( -\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)} \right), & a_{105} &= C_{66}^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}-1} \left( -\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)} \right), \\
a_{106} &= C_{66}^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}-1} \left( -\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)} \right), & a_{113} &= C_{66}^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}-1} \left( -\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)} \right), \\
a_{114} &= C_{66}^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}-1} \left( -\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)} \right), & a_{115} &= C_{66}^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}-1} \left( -\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)} \right), \\
a_{116} &= C_{66}^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}-1} \left( -\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)} \right), & a_{117} &= -C_{66}^{(3)} r_2^{\lambda_{(13)}-1} \left( -\lambda_{(13)} - 1 - 2\phi_1^{(3)} \right), \\
a_{118} &= -C_{66}^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}-1} \left( -\lambda_{(23)} - 1 - 2\phi_2^{(3)} \right), & a_{119} &= -C_{66}^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}-1} \left( -\lambda_{(33)} - 1 - 2\phi_3^{(3)} \right), \\
a_{1110} &= -C_{66}^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}-1} \left( -\lambda_{(43)} - 1 - 2\phi_4^{(3)} \right), & a_{127} &= C_{66}^{(3)} r_3^{\lambda_{(13)}-1} \left( -\lambda_{(13)} - 1 - 2\phi_1^{(3)} \right), \\
a_{128} &= C_{66}^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}-1} \left( -\lambda_{(23)} - 1 - 2\phi_2^{(3)} \right), & a_{129} &= C_{66}^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}-1} \left( -\lambda_{(33)} - 1 - 2\phi_3^{(3)} \right), \\
a_{1210} &= C_{66}^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}-1} \left( -\lambda_{(43)} - 1 - 2\phi_4^{(3)} \right).
\end{aligned}$$

Вычислим три значения детерминантов матрицы (2.62) для разных  $\lambda_i$  и на их основе сформируем систему из трех квадратных уравнений вида

$$\begin{cases} Lx_1^2 + Mx_1 + N = D_1, \\ Lx_2^2 + Mx_2 + N = D_2, \\ Lx_3^2 + Mx_3 + N = D_3, \end{cases} \quad (2.63)$$

где  $D_1, D_2, D_3$  - найденные значения детерминантов,  $L, M, N$  – константы, необходимые для решения квадратного уравнения вида:

$$Lx^2 + Mx + N = 0 \quad (2.64)$$

где  $x$  – искомое значение эффективного поперечного модуля сдвига  $\mu_{12}^{N+1}$ .

Таким образом, новый метод определения эффективного поперечного модуля сдвига включает следующие этапы:

- 1) Подбор трех приближенных значений эффективного поперечного модуля сдвига,
- 2) Расчет трех значений детерминантов системы уравнений, с учетом того, что вместо неизвестного эффективного поперечного модуля сдвига подставляются соответствующие подобранные значения,
- 3) На основе найденных значений детерминантов формируется система из трех квадратных уравнение вида (2.63), решением которой являются константы, необходимые для формирования квадратного уравнения (2.64),
- 4) На заключительной стадии эффективный модуль сдвига находится аналитически как положительный корень уравнения (2.64).

Предложенный метод подходит как для классических волокнистых композитов, так и для многофазных волокнистых композитов.

## 2.9 Определение напряжений и деформаций при всесторонней нагрузке поперек волокна.

### Определение эффективного модуля плоской деформации

В задаче всесторонней нагрузки поперек волокна (Рисунок 2.9) полагаем, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформаций  $\varepsilon_0$ , и перемещения вдали от включения имеют вид  $u_r = \varepsilon_0 r$ .

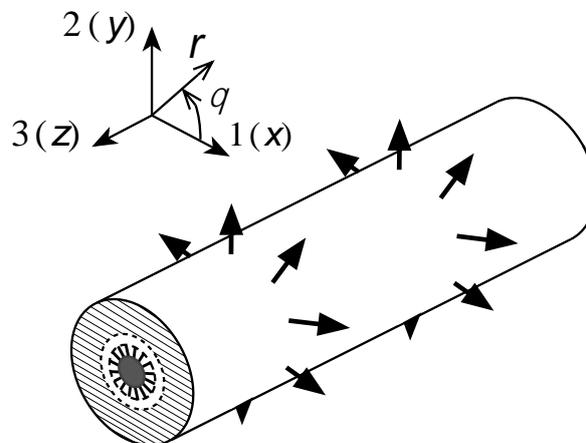


Рисунок 2.9 – Задача всестороннего нагружения

Учитывая (2.31) поля перемещений ортотропных фаз в этой задаче принимают вид

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}}$$

где  $D_1^{(i)}$ ,  $D_2^{(i)}$  – неизвестные константы, которые определяются из граничных условий;

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)} / C_{rr}^{(i)}} - \text{константы.}$$

Следовательно, используя соотношения малых деформаций, можно записать поля деформаций ортотропных фаз в виде

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) = \frac{\partial}{\partial r} (D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}}) = \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} - \lambda_{(i)} D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1}, \quad (2.65)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) = \frac{1}{r} (D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}}) = D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1}. \quad (2.66)$$

Напряжения в каждой фазе определяются формулами (2.51)-(2.53).

В случае изотропной или трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, направленной вдоль волокон материальные константы равны

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)} / C_{rr}^{(i)}} = \sqrt{C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}} = 1,$$

так как в этом случае, исходя из законов Гука, имеются равенства

$$C_{rr}^{(i)} = C_{\theta\theta}^{(i)} \text{ или } C_{11}^{(i)} = C_{22}^{(i)}.$$

С учетом соотношений для деформаций (2.65)-(2.66) выражения для определения напряжений в каждой из фаз приобретают явную форму как функции от координаты  $r$  и зависят от констант  $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_1^{(N+1)}, D_2^{(N+1)}$ . Неизвестные константы и модули находятся из условий:

- условия несингулярности напряжений в центре волокна ( $r=0$ ) для фазы 1:

$$D_2^{(1)} = 0;$$

- условия непрерывности перемещений и напряжений на границах идеального контакта фаз:

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad (i=1, 2, \dots, N);$$

- внешнего граничного условия на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$u_r^{N+1}(r_{N+1}) = \varepsilon_0 r_{N+1},$$

- условия энергетического взаимодействия по поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S (\sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1})_{r=r_N} dS = 0,$$

где  $u_r^{eff}(r) = D_1^{eff} r$ ,  $\sigma_{rr}^{eff}(r) = 2K_{12}^{N+1} D_1^{eff}$ ,  $\sigma_{rr}^{N+1}(r) = 2K_{12}^{N+1} D_1^{N+1} - 2\mu_{12}^{N+1} D_2^{N+1} r^{-2}$ ,  $K_{12}^{N+1}$  - эффективный объемный модуль плоской деформации.

Таким образом, получаем систему 6 уравнений с 6 неизвестными, среди которых

$D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  и  $K_{12}^{N+1}$ :

$$\begin{aligned}
 1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_1} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_2} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_2} = 0, \\
 2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_2} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_2} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_3} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_3} = 0, \\
 3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_3} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_3} - \varepsilon_0 r_3 = 0, \\
 4) \quad & D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r_1^{\lambda_1 - 1} - \\
 & \quad - D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{\lambda_2 - 1} + D_2^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{-\lambda_2 - 1} = 0, \\
 5) \quad & D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{\lambda_2 - 1} - D_2^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{-\lambda_2 - 1} - \\
 & \quad - D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{\lambda_3 - 1} + D_2^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{-\lambda_3 - 1} = 0, \\
 6) \quad & D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{\lambda_3 - 1} - D_2^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{-\lambda_3 - 1} - 2\varepsilon_0 K_{12}^{N+1} = 0
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

## 2.10 Выводы к главе 2

Таким образом, получены все необходимые соотношения для определения напряженного и деформированного состояний в каждой из фаз многофазного композита для четырех различных видов нагружения: чистого сдвига в направлении вдоль волокон, одноосного растяжения в направлении вдоль волокон, всесторонней нагрузки в направлении поперек волокон, чистого сдвига в направлении поперек волокон. Также получены все необходимые соотношения для определения эффективных характеристик модифицированных композитов с вискеризованными волокнами и предложен новый метод определения эффективного поперечного модуля сдвига.

### 3 ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ОБЪЕМНОГО СОДЕРЖАНИЯ ВОЛОКНА И ДЛИНЫ ВИСКЕРСОВ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЭЛЕМЕНТАХ СТРУКТУРЫ. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

#### 3.1 Общие положения

В зависимости от укладки волокон (Рисунок 3.1) в композитном материале изменяется максимальное допустимое объемное содержание волокна  $c_{\max}$ . Так, при квадратной упаковке  $c_{\max} = 0.78$ , а при гексагональной  $c_{\max} = 0.92$  [63].

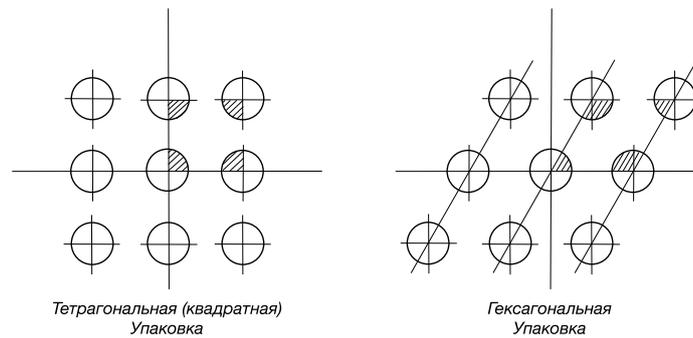


Рисунок 3.1 – распределение волокон в однонаправленном композите

Далее будем вести рассуждения для квадратной упаковки волокон.

При некотором объемном содержании включений в композитном материале, армирование не оказывают значительное влияние на прочностные свойства композитного материала.

Такое объемное содержание определяется по формуле:

$$\sigma_{\max}^c = \frac{4f\sigma_2}{\pi k \left(1 - \frac{4f}{\pi}\right)}, \quad (3.1)$$

где  $\sigma_{\max}^c$  - предельные напряжения в матрице в зависимости от объемного содержания включения  $f$ ,  $\sigma_2$  - приложенное напряжение к композиту на бесконечности,

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4f}{\pi}\right)^2}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1 + \frac{4f}{\pi}}{1 - \frac{4f}{\pi}}} - \frac{\pi}{4}.$$

График зависимости напряженного состояния в матрице композитного материала от объемного содержания включения, нормированный на приложенное напряжение на

бесконечности, полученный по формуле (3.1), в случае, когда радиус волокна составляет 2.5 мкм, представлен на Рисунке 3.2.

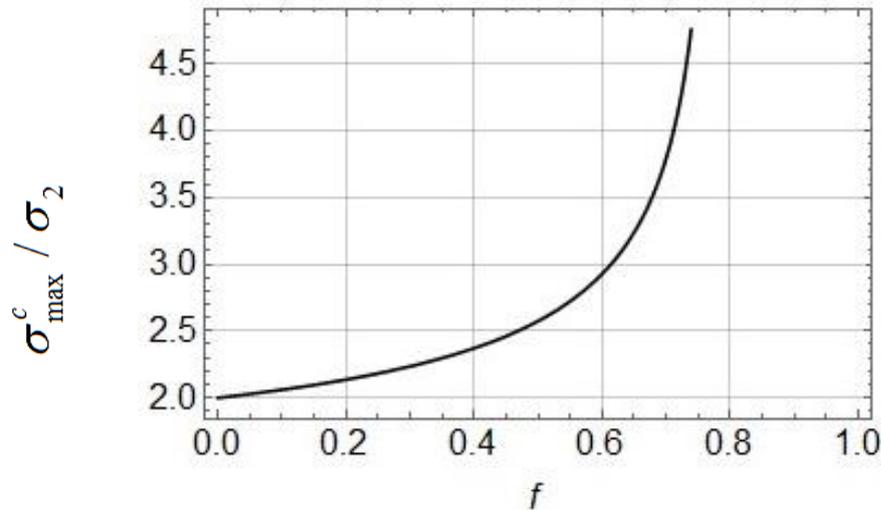


Рисунок 3.2 – График зависимости напряженного состояния в композитном материале от объемного содержания включения

Из графика видно, что при объемном содержании включений менее 10 % включения не оказывают значительного влияния на напряженное состояние материала, при объемном содержании от 10 % до 65 % напряженное состояние монотонно возрастает, а при объемном содержании от 65 % до 75 % напряженное состояние возрастает резко.

В случае модификации волокон – выращивании на их поверхности вискерсов, максимальное объемное содержание волокна определяется формулой:

$$c_{\max} = \frac{\pi}{4(1 + 2L/D)^2} \quad (3.2)$$

где  $L$  – длина вискерсов,  $D$  – диаметр базового волокна.

Согласно данным, приведенным в таблице 2.1, длина УНТ составляет 1-2 мкм, а диаметр углеродного волокна марки Т-650 составляет 5 мкм. Для такого композитного материала по формуле (3.2) находим, что максимальное объемное содержание волокна составляет 24 % в случае, когда длина УНТ равна 2 мкм, 30 % в случае, когда длина УНТ равна 1,5 мкм, 40 % в случае, когда длина УНТ равна 1 мкм.

Для исследования напряженно-деформированного состояния модифицированного композита с вискеризованными волокнами выберем несколько модификаций, обусловленных объемным содержанием волокна: модифицированные композиты с вискеризованными волокнами с объемным содержанием 10 %, 17 %, 24 %, 30 % и 40 %. Кроме этого будем варьировать длину вискерсов для модифицированных композитов с фиксированными объемными содержаниями включений. Так же будет исследоваться напряженно-

деформированное состояние классических волокнистых композитов с такими же объемными содержаниями волокон, что и у модифицированных композитов, и традиционного волокнистого композита с объемным содержанием 60 % (близким к предельному объемному содержанию). Для наглядности представим в таблице 3.1 виды модификаций композитных материалов, которые будут исследоваться.

Таблица 3.1

Наименование Композита	Объемное содержание включения, %	Длина вискерсов, мкм
Модифицированный композит 1	24	
Модификация 1.1	24	1
Модификация 1.2	24	2
Классический композит 1	24	0
Модифицированный композит 2	17	
Модификация 2.1	17	1
Модификация 2.2	17	2
Классический композит 2	17	0
Модифицированный композит 3	10	
Модификация 3.1	10	1
Модификация 3.2	10	2
Классический композит 3	10	0
Модифицированный композит 4	30	1,5
Классический композит 4	30	0
Модифицированный композит 5	40	1
Классический композит 5	40	0
Классический композит 6	60	0

Модифицированный композит 1 Модификация 1.2 и Модифицированные композиты 4 и 5 образованы только волокном и межфазным слоем, который в дальнейшем будет носить название модифицированная матрица или просто матрица.

### 3.2 Численные значения упругих констант в элементах структуры

Для каждой из фаз всех модификаций модифицированных композитов 1, 2, 3, 4 и 5 приведем упругие константы  $C_{ij}^{(l)}$ , где индекс  $l$  соответствует номеру слоя композита.

Эффективные свойства фаз 1 и 3 считаются заданными, а второй фазы вычисляются по формулам (2.41)-(2.45).

Ниже приведены упругие константы для случая, когда объемное содержание вискерсов в межфазном слое определено по формуле (2.46) и составляет 30 %, а плотность упаковки определена по формуле (2.47) и равна 68%.

На основе материальных параметров углеродного волокна композита, приведенных в таблице 2.1 и соотношений (2.32)-(2.33) упругие константы первой фазы (2.51) модифицированных композитов 1, 2, 3, 4 и 5 имеют вид

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} 19,8787 & 10,2787 & 8,1425 & 0 & 0 & 0 \\ 10,2787 & 19,8787 & 8,1425 & 0 & 0 & 0 \\ 8,1425 & 8,1425 & 245,397 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22,06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22,06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,8 \end{bmatrix}.$$

На основании материальных параметров УНТ и матрицы, приведенных в таблице 2.1 и соотношений (2.34)-(2.35) упругие константы второй фазы (2.52) модифицированных композитов 1, 2, 3, 4 и 5 имеют вид

$$C_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} 334,993 & 5,801 & 5,801 & 0 & 0 & 0 \\ 5,801 & 13,703 & 9,754 & 0 & 0 & 0 \\ 5,801 & 9,754 & 13,703 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,975 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,136 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,136 \end{bmatrix};$$

Эффективные свойства вискеризованного межфазного слоя модифицированных композитов 1, 2, 3, 4 и 5 определены по формулам (2.41)-(2.44), (2.35) и равны:

$$E_{11}^{(2)} = 332,124 \text{ ГПа}, \nu_{12}^{(2)} = 0,25, \mu_{12}^{(2)} = 2,136 \text{ ГПа},$$

$$\mu_{23}^{(2)} = 1,975 \text{ ГПа}, K_{23}^{(2)} = 11,728 \text{ ГПа}, E_{33}^{(2)} = 8,449 \text{ ГПа}.$$

На основе материальных параметров эпоксидной матрицы композита, приведенных в таблице 2.1 и соотношений (2.37)-(2.40) упругие константы третьей фазы (2.53) композитов имеют вид:

$$C_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4,0385 & 1,7308 & 1,7308 & 0 & 0 & 0 \\ 1,7308 & 4,0385 & 1,7308 & 0 & 0 & 0 \\ 1,7308 & 1,7308 & 4,0385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,1539 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,1539 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,1539 \end{bmatrix}.$$

Эффективный продольный модуль Юнга  $E_{33}^{N+1}$  определен по формуле (2.54), эффективный модуль продольного сдвига  $\mu_{23}^{N+1}$  определен из системы уравнений (2.57), эффективный модуль поперечного сдвига  $\mu_{12}^{N+1}$  определен по формулам (2.61)-(2.63), эффективный объемный модуль плоской деформации  $K_{12}^{N+1}$  определен из системы уравнений (2.67). Эффективные модули анализируемых модифицированных композитов приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Наименование Композита	Эффективный продольный модуль Юнга $E_{33}^{N+1}$ , МПа	Эффективный модуль продольного сдвига $\mu_{23}^{N+1}$ , МПа	Эффективный модуль поперечного сдвига $\mu_{12}^{N+1}$ , МПа	Эффективный объемный модуль плоской деформации $K_{12}^{N+1}$ , МПа
Модифицированный композит 1				
Модификация 1.1	84044	2609	2005	4823
Модификация 1.2	120283	3570	4015	14619
Классический композит 1	76477	2046	1492	3526
Модифицированный композит 2				
Модификация 2.1	60000	2001	1636	3887
Модификация 2.2	84764	2425	2267	5538
Классический композит 2	54029	1708	1371	3285
Модифицированный композит 3				
Модификация 3.1	37472	1593	1401	3368
Модификация 3.2	52078	1772	1628	3859
Классический композит 3	33369	1454	1276	3102
Модифицированный композит 4	116191	4152	3984	14706
Классический композит 4	96000	2413	1617	3784
Модифицированный композит 5	134884	5243	3975	14808
Классический композит 5	124449	3128	1843	4282
Классический композит 6	184875	6302	2643	6385

### 3.3 Анализ напряженно-деформированного состояния модифицированного композита при сдвиге в направлении вдоль волокон

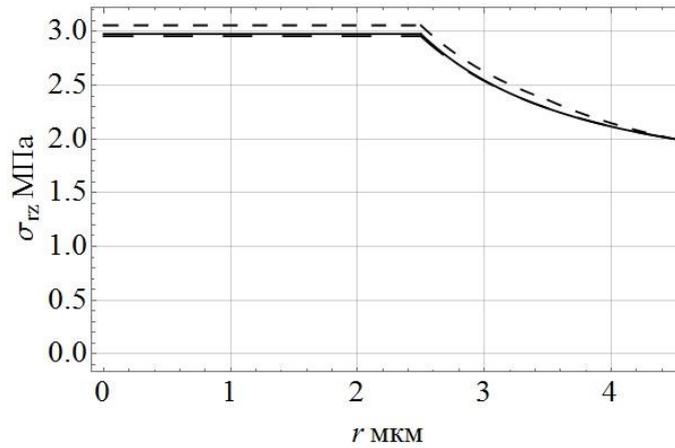
В данном разделе оцениваются напряженно-деформированные состояния модифицированных волокнистых композитов 1, 2 и 3 модификаций 1 и 2 (Таблица 3.1) и модифицированных волокнистых композитов 4 и 5, а также классических волокнистых композитов с теми же объемными содержаниями и объемным содержанием 60 % для случая сдвига в направлении вдоль волокон.

На рисунке 3.3 представлены графики напряженного состояния каждой из фаз Модифицированного композита 1 с его модификациями и Классического композита 1. На рисунке 3.4 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 2 с его модификациями и Классического композита 2. На рисунке 3.5 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 3 с его модификациями и Классического композита 3. На рисунке 3.6 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 4 и Классического композита 4. На рисунке 3.7 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 5 и Классического композита 5. На рисунке 3.8 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Классического композита 6.

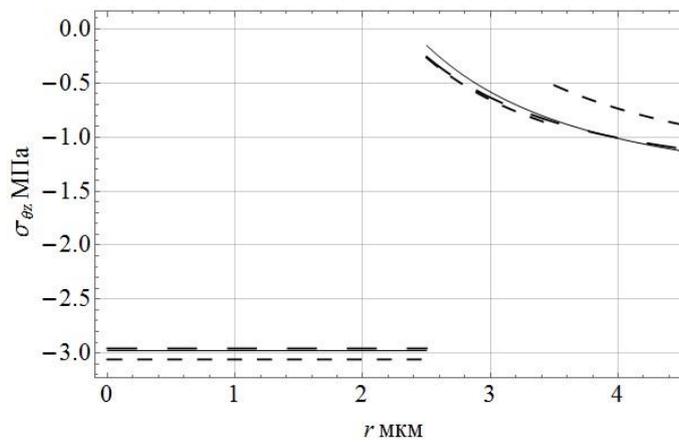
Согласно рисунку 3.3 а) в случае вискеризации волокнистого композита вискерсами длиной 2 мкм с объемным содержанием волокна 24 % сдвиговые напряженные состояния  $\sigma_{rz}(r)$  в волокне и матрице Модифицированного композита 1 несколько меньше аналогичных напряженных состояний Классического композита 1. В то время как при вискеризации волокна вискерсами длиной 1 мкм наблюдается прямо противоположный эффект. Согласно рисункам 3.4 а) и 3.5 а), в случае вискеризации волокнистого композита вискерсами длиной 1 и 2 мкм с объемными содержаниями волокна 10 и 17 %, сдвиговые напряженные состояния  $\sigma_{rz}(r)$  в волокне и матрице Модифицированного композита 1 растут по сравнению с аналогичными напряженными состояниями в Классическом композите 1. Согласно рисункам 3.6 и 3.7, в случае вискеризации волокнистого композита вискерсами длиной 1.5 мкм с объемным содержанием волокна 30 % вискеризации волокнистого композита вискерсами длиной 1 мкм с объемным содержанием волокна 40 %, сдвиговые напряженные состояния  $\sigma_{rz}(r)$  в волокне и матрице модифицированного композита несколько меньше аналогичных напряженных состояний классического композита. Согласно рисункам 3.3–3.7 в волокне напряженные состояния  $\sigma_{\theta z}(r)$  распределяются аналогично напряженным состояниям  $\sigma_{rz}(r)$ . Согласно

рисункам 3.4-3.5 б) напряженные состояния  $\sigma_{\theta_z}(r)$  в матрицах модифицированных композитов уменьшаются по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{\theta_z}(r)$  в матрицах аналогичных классических композитов, при этом чем больше длина вискерсов, тем меньше напряженное состояние  $\sigma_{\theta_z}(r)$ . В то же время, в случаях предельных объемных содержаний волокна, обусловленных длиной вискерсов, в матрицах модифицированных композитов возникают такие же напряженные состояния  $\sigma_{\theta_z}(r)$ , как и в матрицах аналогичных классических композитов (Рисунок 3.3 б), 3.6 б), 3.7б)).

В таблице 3.3 приведены значения максимальных напряжений в каждой из фаз, рассматриваемых композитов, для случая сдвига в направлении вдоль волокон.



а)

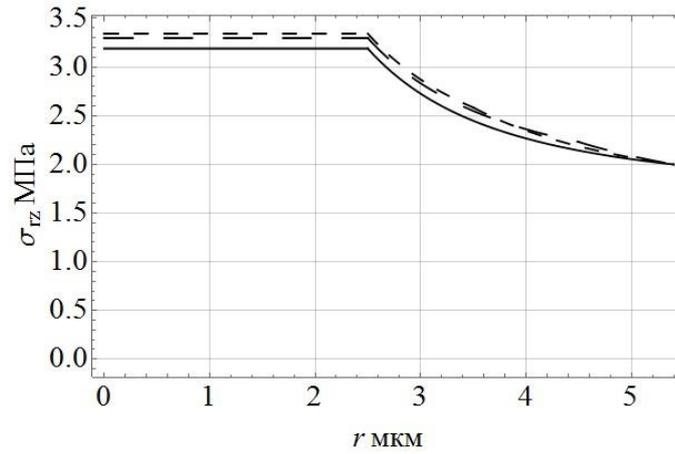


б)

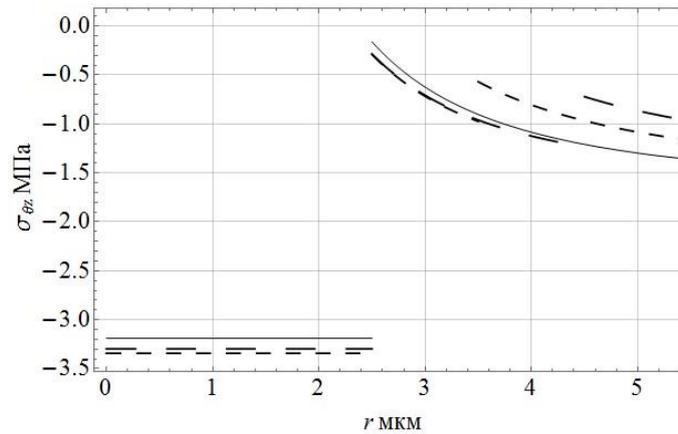
Рисунок 3.3 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении  
вдоль волокон:

а) зависимость сдвигового  $\sigma_{rz}(r)$  напряжения от радиуса, б) зависимость сдвигового  
 $\sigma_{\theta z}(r)$  напряжения от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 1, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1  
модификация 1.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.1.



а)

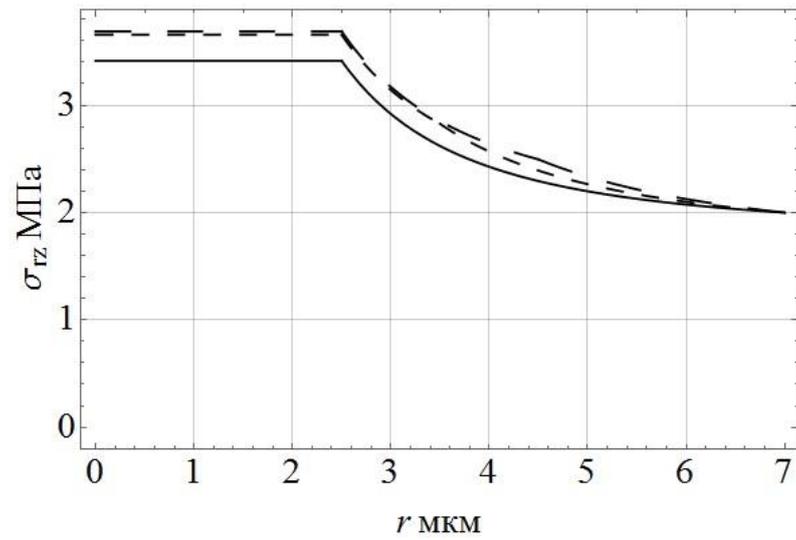


б)

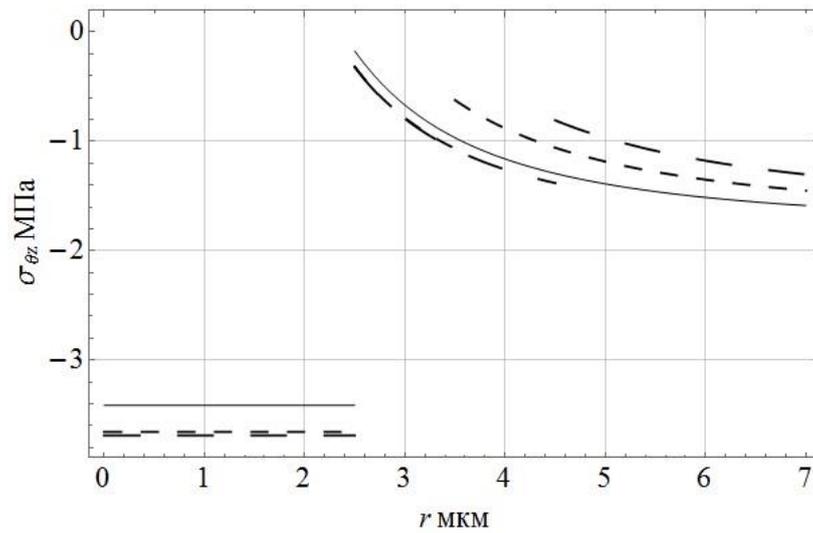
Рисунок 3.4 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении  
вдоль волокон:

а) зависимость сдвигового  $\sigma_{rz}(r)$  напряжения от радиуса, б) зависимость сдвигового  
 $\sigma_{\theta_z}(r)$  напряжения от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2  
модификация 2.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.1.



а)

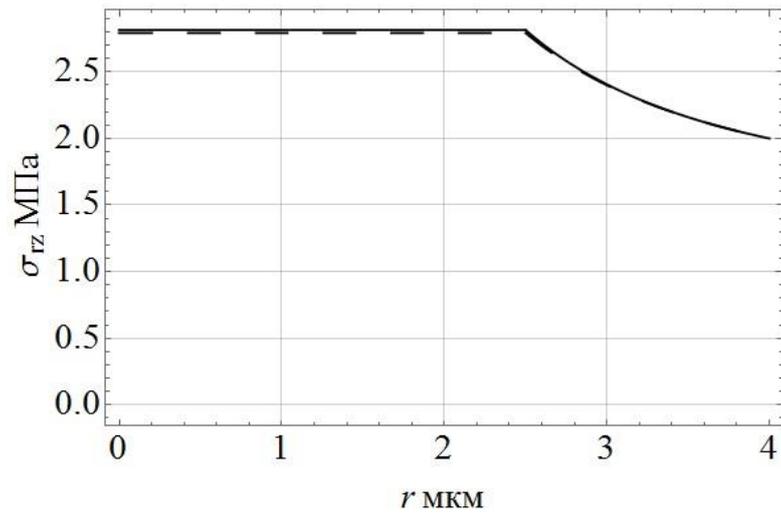


б)

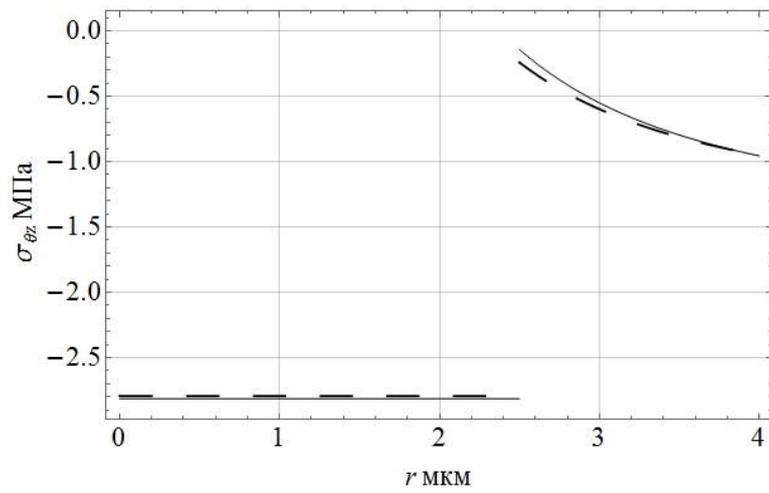
Рисунок 3.5 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении вдоль волокон:

а) зависимость сдвигового  $\sigma_{rz}(r)$  напряжения от радиуса, б) зависимость сдвигового  $\sigma_{\theta z}(r)$  напряжения от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 3, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.1.



а)

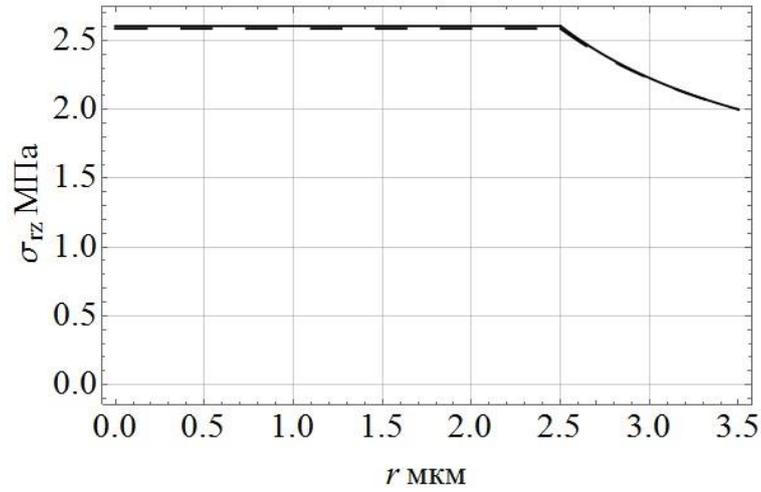


б)

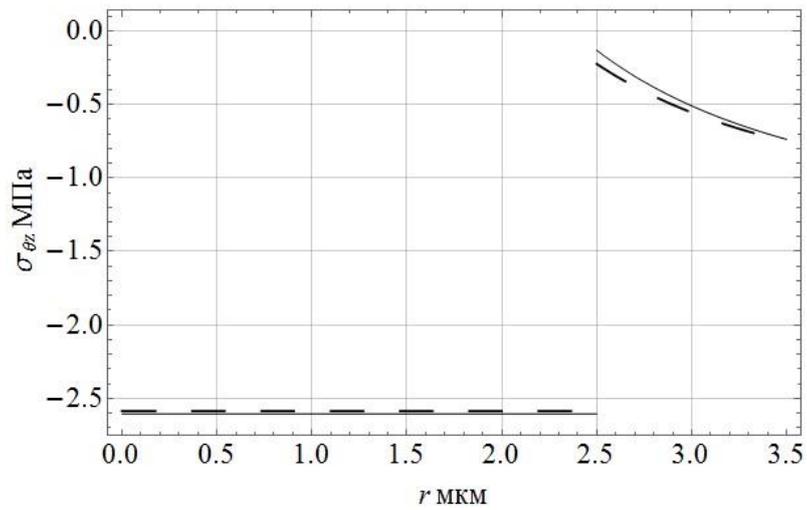
Рисунок 3.6 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении  
вдоль волокон:

а) зависимость сдвигового  $\sigma_{rz}(r)$  напряжения от радиуса, б) зависимость сдвигового  
 $\sigma_{\theta z}(r)$  напряжения от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 4, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 4



а)



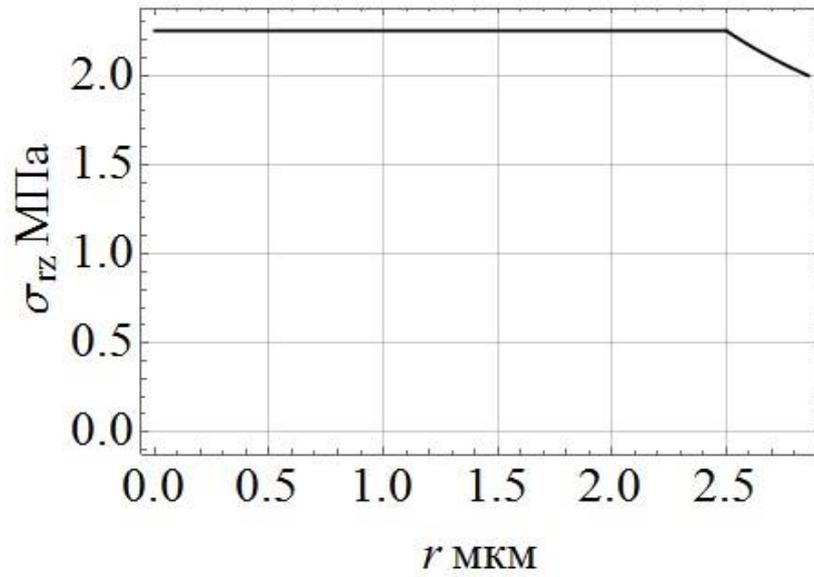
б)

Рисунок 3.7 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении  
вдоль волокон:

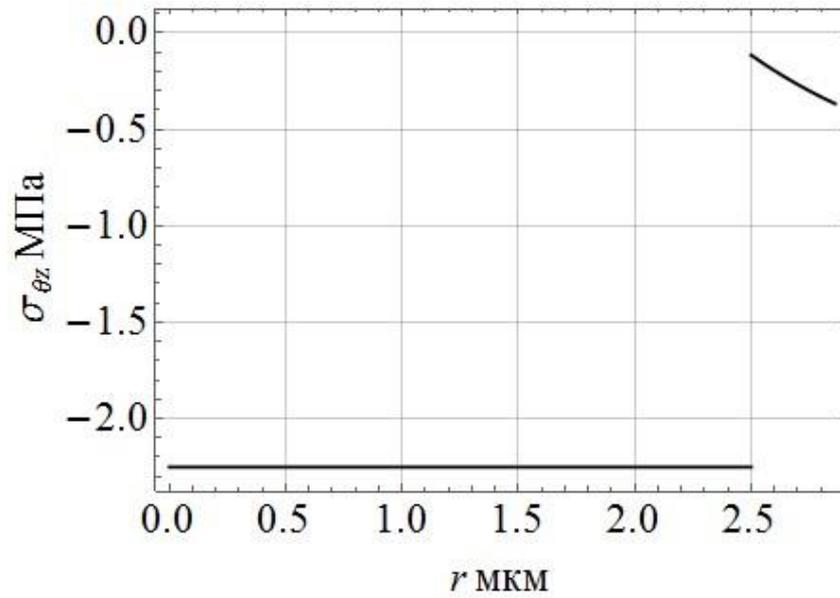
а) зависимость сдвигового  $\sigma_{rz}(r)$  напряжения от радиуса, б) зависимость сдвигового

$\sigma_{\theta z}(r)$  напряжения от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 5, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 5



а)



б)

Рисунок 3.8 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении вдоль волокон:

а) зависимость сдвигового  $\sigma_{rz}(r)$  напряжения от радиуса, б) зависимость сдвигового  $\sigma_{\theta z}(r)$  напряжения от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит б

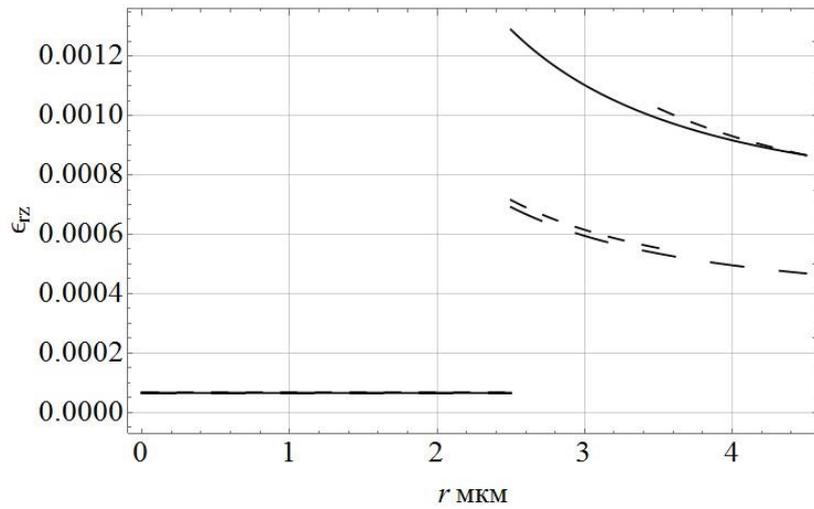
Таблица 3.3 – Максимальные напряжения в элементах структуры модифицированного композита с висеризованными волокнами для случая чистого сдвига в направлении вдоль волокон

Наименование композита	Максимальное сдвиговое напряжения $\sigma_{rz}(r)$ , МПа			Максимальное сдвиговое напряжения $\sigma_{\theta z}(r)$ , МПа		
	В волокне	В межфазном слое	В матрице	В волокне	В межфазном слое	В матрице
Модифицированный композит 1						
Модификация 1.1	3.06	3.06	2.36	3.06	0.89	0.88
Модификация 1.2	2.96	2.96		2.96	1.1	
Классический композит 1	2.98	2.98		2.98	1.13	
Модифицированный композит 2						
Модификация 2.1	3.34	3.34	2.58	3.34	0.97	1.15
Модификация 2.2	3.3	3.3	2.23	3.3	1.23	0.95
Классический композит 2	3.19	3.19		3.19	1.35	
Модифицированный композит 3						
Модификация 3.1	3.65	3.65	2.83	3.65	1.06	1.45
Модификация 3.2	3.69	3.69	2.5	3.69	1.38	1.3
Классический композит 3	3.41	3.41		3.41	1.59	
Модифицированный композит 4	2.79	2.79		2.79	0.95	
Классический композит 4	2.81	2.81		2.81	0.96	
Модифицированный композит 5	2.59	2.59		2.59	0.75	
Классический композит 5	2.6	2.6		2.6	0.74	
Классический композит 6	2.25	2.25		2.25	0.37	

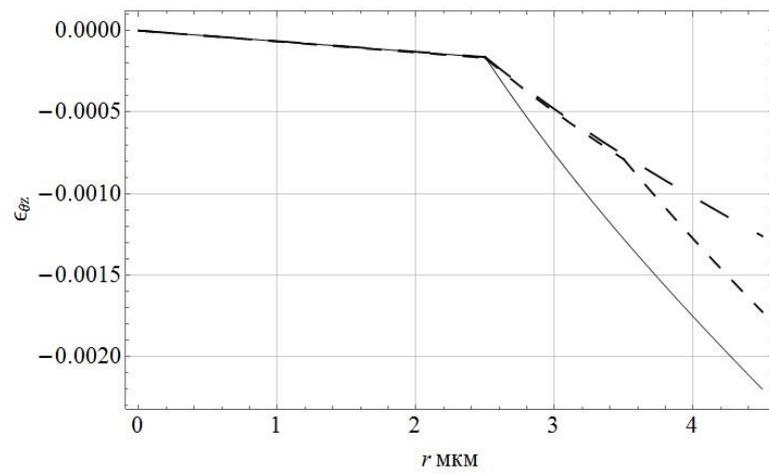
На рисунке 3.9 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 1 с его модификациями и Классического композита 1. На рисунке 3.10 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 2 с его модификациями и Классического композита 2. На рисунке 3.11 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 3 с его модификациями и Классического композита 3. На рисунке 3.12 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 4 и Классического композита 4. На рисунке 3.13 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 5 и Классического композита 5. На рисунке 3.14 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Классического композита 6.

Согласно рисункам 3.9-3.13 деформированные состояния  $\varepsilon_{rz}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta z}(r)$  в волокне модифицированных композитов не отличаются от деформированных состояний аналогичных классических композитов, а деформированные состояния  $\varepsilon_{rz}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta z}(r)$  в матрице модифицированных композитов уменьшаются по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rz}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta z}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов.

В таблице 3.4 приведены значения максимальных деформаций в каждой из фаз рассматриваемых композитов для случая чистого сдвига в направлении вдоль волокон.



а)

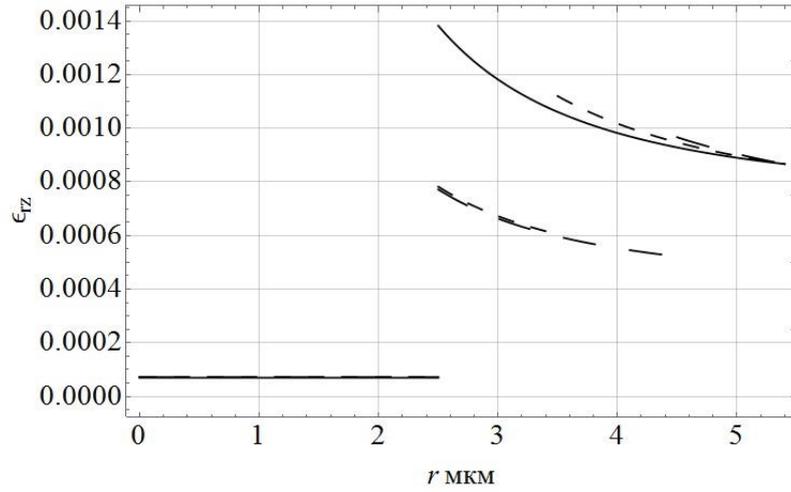


б)

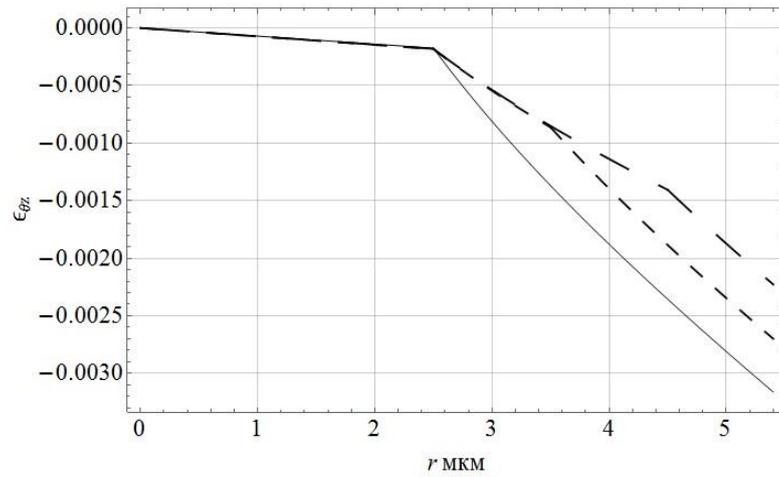
Рисунок 3.9 – Зависимость деформации от радиуса при чистом сдвиге в направлении  
вдоль волокон:

а) зависимость сдвиговой  $\varepsilon_{rz}(r)$  деформации от радиуса, б) зависимость сдвиговой  
 $\varepsilon_{\theta z}(r)$  деформации от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 1, \_\_\_ \_\_\_ - модифицированный композит 1  
модификация 1.2, - - - - - модифицированный композит 1 модификация 1.1.



а)

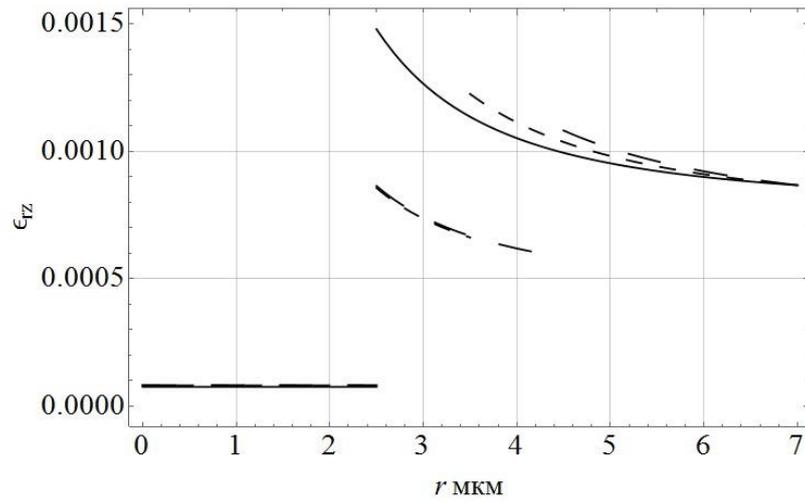


б)

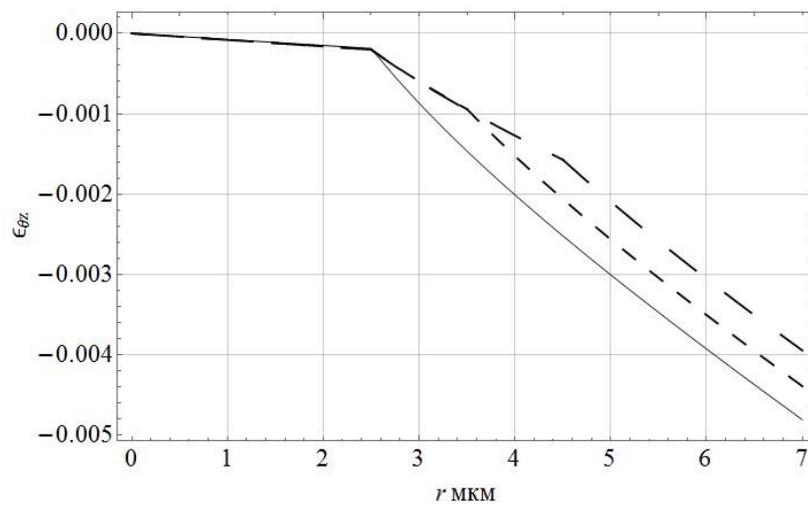
Рисунок 3.10 – Зависимость деформации от радиуса при чистом сдвиге в направлении  
вдоль волокон:

а) зависимость сдвиговой  $\varepsilon_{rz}(r)$  деформации от радиуса, б) зависимость сдвиговой  
 $\varepsilon_{\theta z}(r)$  деформации от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2  
модификация 2.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.1.



а)

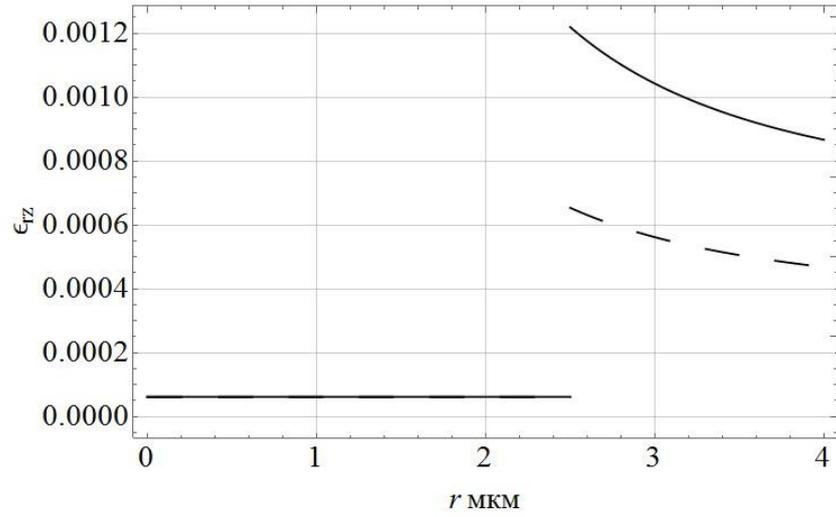


б)

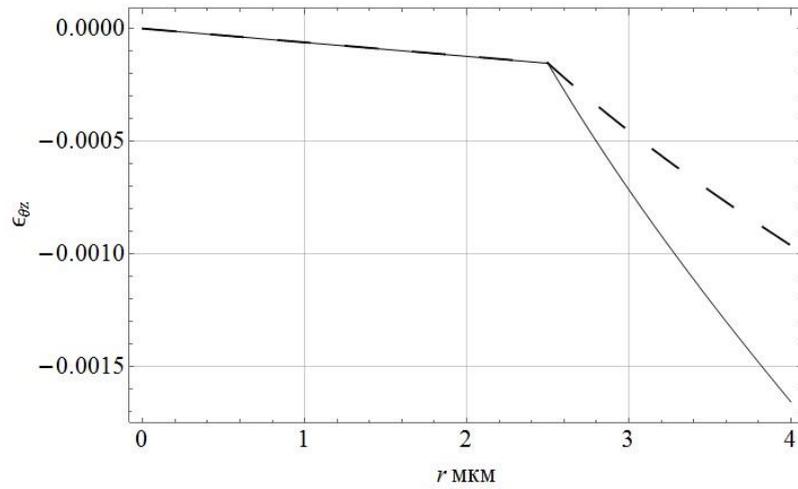
Рисунок 3.11 – Зависимость деформации от радиуса при чистом сдвиге в направлении  
вдоль волокон:

а) зависимость сдвиговой  $\varepsilon_{rz}(r)$  деформации от радиуса, б) зависимость сдвиговой  
 $\varepsilon_{\theta z}(r)$  деформации от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 3, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3  
модификация 3.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.1.



а)

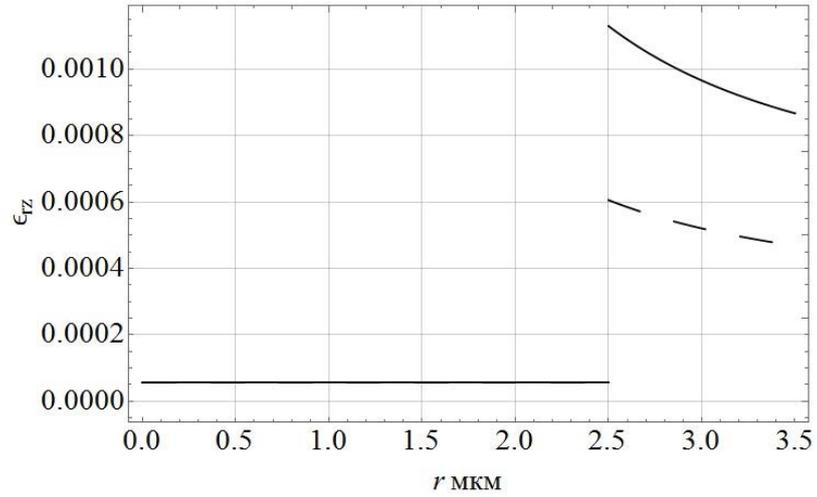


б)

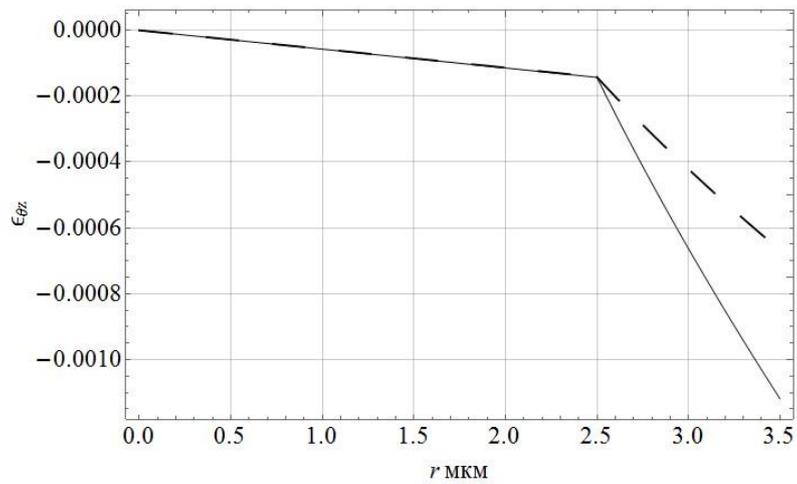
Рисунок 3.12 – Зависимость деформации от радиуса при чистом сдвиге в направлении  
вдоль волокон:

а) зависимость сдвиговой  $\varepsilon_{rz}(r)$  деформации от радиуса, б) зависимость сдвиговой  
 $\varepsilon_{\theta z}(r)$  деформации от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 4, \_\_\_ \_\_\_ - модифицированный композит 4



а)

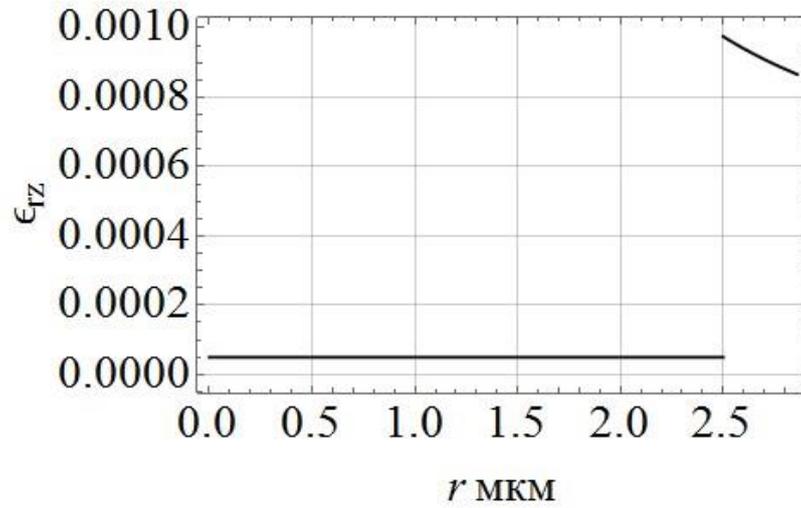


б)

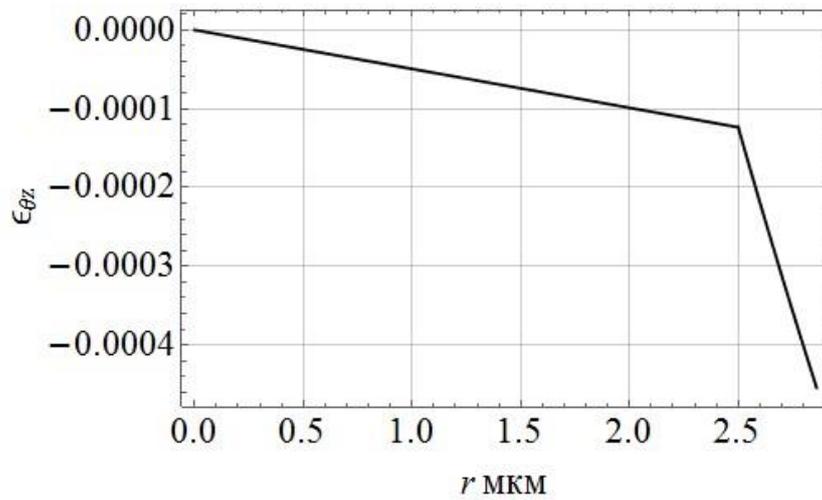
Рисунок 3.13 – Зависимость деформации от радиуса при чистом сдвиге в направлении  
вдоль волокон:

а) зависимость сдвиговой  $\epsilon_{rz}(r)$  деформации от радиуса, б) зависимость сдвиговой  
 $\epsilon_{\theta z}(r)$  деформации от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 5, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 5



а)



б)

Рисунок 3.14 – Зависимость деформации от радиуса при чистом сдвиге в направлении вдоль волокон:

а) зависимость сдвиговой  $\epsilon_{rz}(r)$  деформации от радиуса, б) зависимость сдвиговой  $\epsilon_{\theta z}(r)$  деформации от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 6

Таблица 3.4 – Максимальные деформации в элементах структуры модифицированного композита с висеризованными волокнами для случая чистого сдвига в направлении вдоль волокон

Наименование композита	Максимальная сдвиговая деформация $\varepsilon_{rz}(r)$			Максимальная сдвиговая деформация $\varepsilon_{\theta z}(r)$		
	В волокне	В межфазном слое	В матрице	В волокне	В межфазном слое	В матрице
Модифицированный композит 1						
Модификация 1.1	0.000067	0.00072	0.001	0.00017	0.00079	0.0017
Модификация 1.2	0.000065	0.00069		0.00016	0.0013	
Классический композит 1	0.000065	0.0013		0.00016	0.0022	
Модифицированный композит 2						
Модификация 2.1	0.000073	0.00078	0.0011	0.00018	0.00086	0.0027
Модификация 2.2	0.000072	0.00077	0.00097	0.00018	0.0014	0.0022
Классический композит 2	0.000069	0.0014		0.00017	0.0032	
Модифицированный композит 3						
Модификация 3.1	0.00008	0.00086	0.0012	0.0002	0.00094	0.0044
Модификация 3.2	0.00008	0.00086	0.001	0.0002	0.0016	0.0039
Классический композит 3	0.000075	0.0015		0.00019	0.0048	
Модифицированный композит 4	0.000061	0.00065		0.00015	0.00096	
Классический композит 4	0.000062	0.0012		0.00015	0.0017	
Модифицированный композит 5	0.000057	0.0006		0.00014	0.00067	
Классический композит 5	0.000057	0.0011		0.00014	0.0011	
Классический композит 6	0.000049	0.00098		0.00012	0.00045	

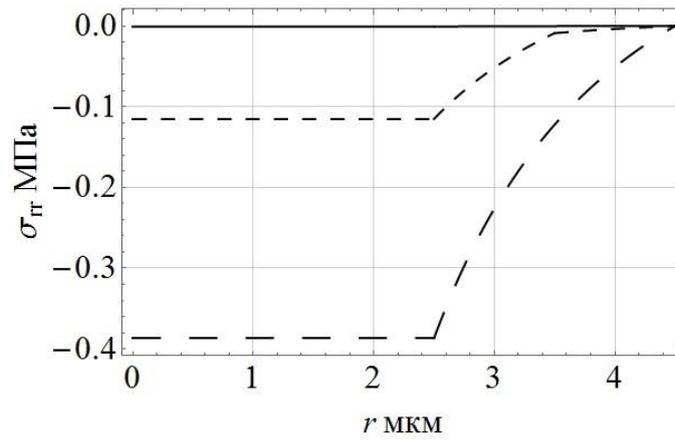
### 3.4 Анализ напряженно-деформированного состояния модифицированного композита при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон

В данном разделе оцениваются напряженно-деформированные состояния модифицированных волокнистых композитов 1, 2 и 3 модификаций 1 и 2 (Таблица 3.1) и модифицированных волокнистых композитов 4 и 5, а также классических волокнистых композитов с теми же объемными содержаниями и объемным содержанием 60 % для случая сдвига в направлении вдоль волокон.

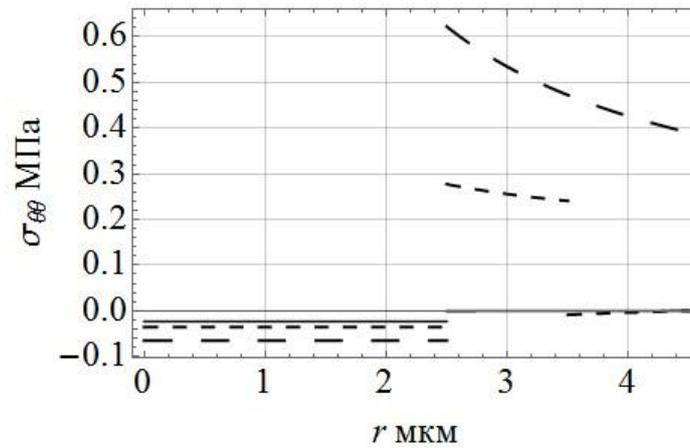
На рисунке 3.15 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 1 с его модификациями и Классического композита 1. На рисунке 3.16 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 2 с его модификациями и Классического композита 2. На рисунке 3.17 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 3 с его модификациями и Классического композита 3. На рисунке 3.18 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 4 и Классического композита 4. На рисунке 3.19 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 5 и Классического композита 5. На рисунке 3.20 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Классического композита 6.

Согласно рисункам 3.15-3.19 а), б) напряженные состояния  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в волокне модифицированных композитов растут по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в волокне аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. Согласно рисункам 3.15-3.19 в) напряженные состояния  $\sigma_{zz}(r)$  в волокне модифицированных композитов уменьшаются по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{zz}(r)$  в волокне аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. Согласно рисункам 3.15-3.19 напряженные состояния  $\sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  и  $\sigma_{zz}(r)$  в матрице растут по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  и  $\sigma_{zz}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов.

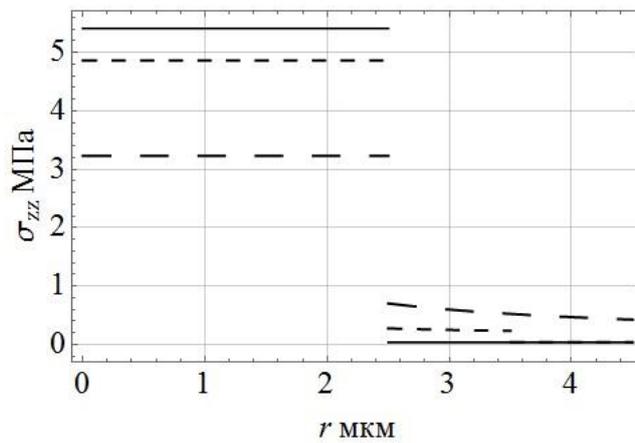
В таблице 3.5 приведены значения максимальных напряжений в каждой из фаз рассматриваемых композитов для случая одноосного растяжения в направлении вдоль волокон.



а)



б)

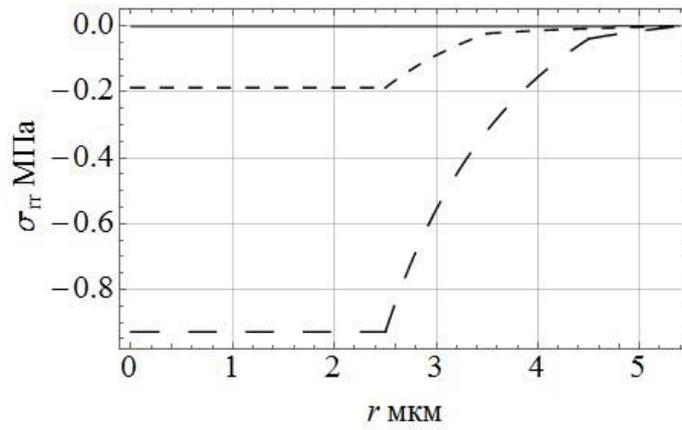


в)

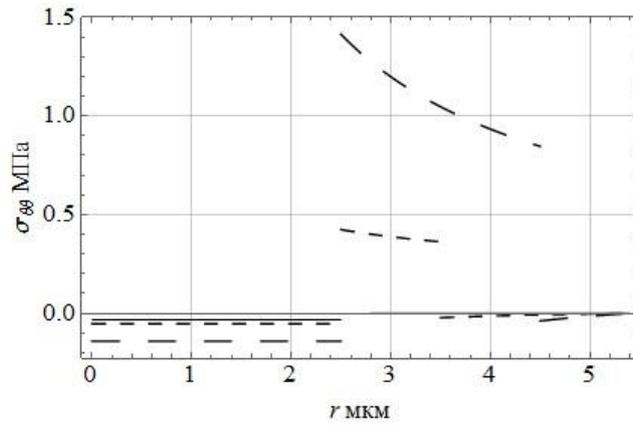
Рисунок 3.15 – Зависимость напряжения от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость осевого напряжения  $\sigma_{zz}(r)$  от радиуса

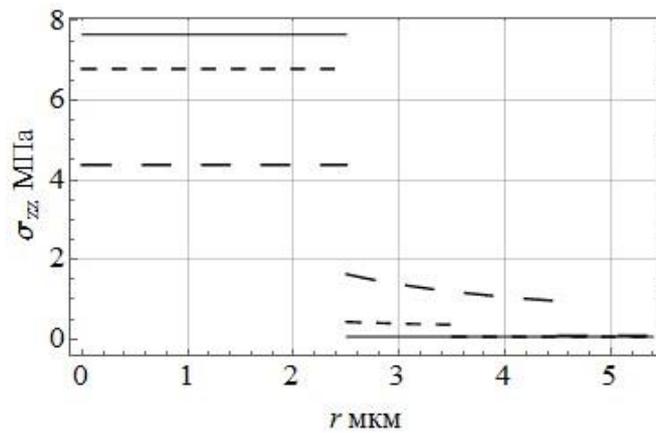
\_\_\_\_\_ - Классический композит 1, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.1.



а)



б)

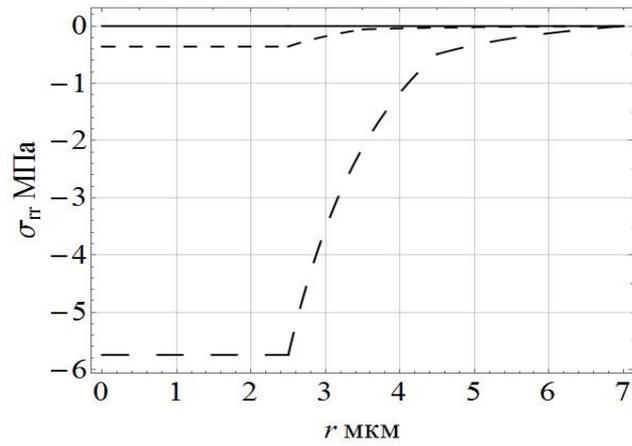


в)

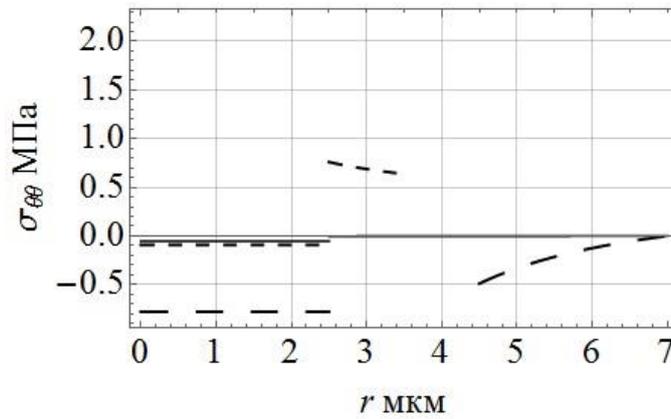
Рисунок 3.16 – Зависимость напряжения от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость осевого напряжения  $\sigma_{zz}(r)$  от радиуса

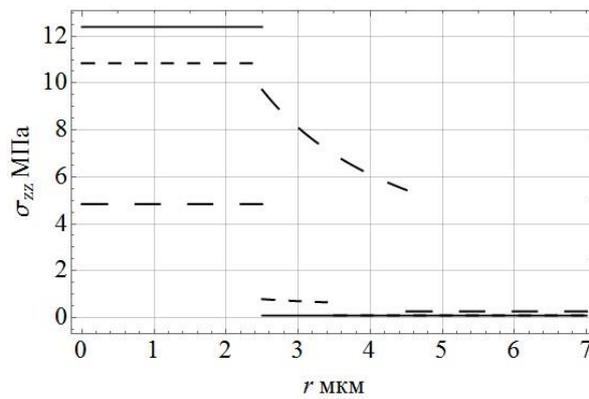
\_\_\_\_\_ - Классический композит 2, \_\_\_ \_\_\_ \_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.2, \_ \_ \_ \_ \_ - модифицированный композит 2 модификация 2.1.



а)



б)

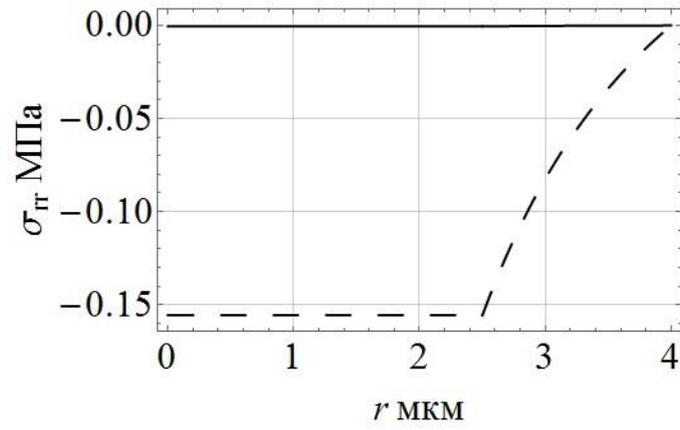


в)

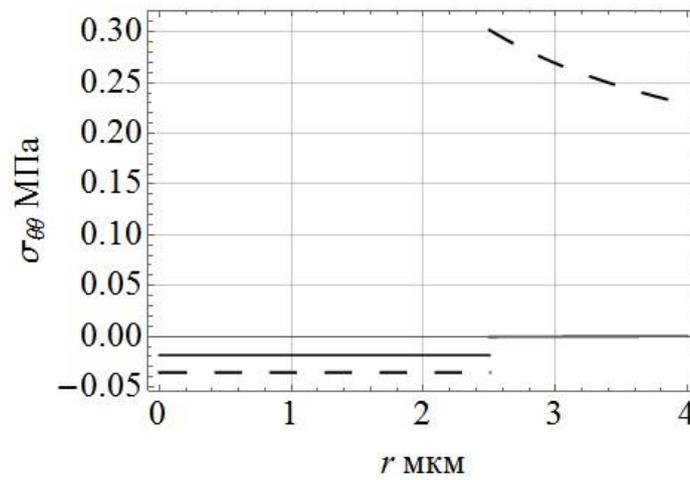
Рисунок 3.17 – Зависимость напряжения от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость осевого напряжения  $\sigma_{zz}(r)$  от радиуса

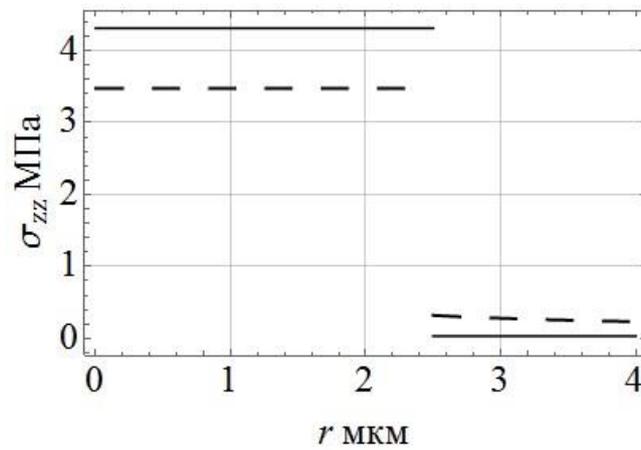
\_\_\_\_\_ - Классический композит 3, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.1.



а)



б)

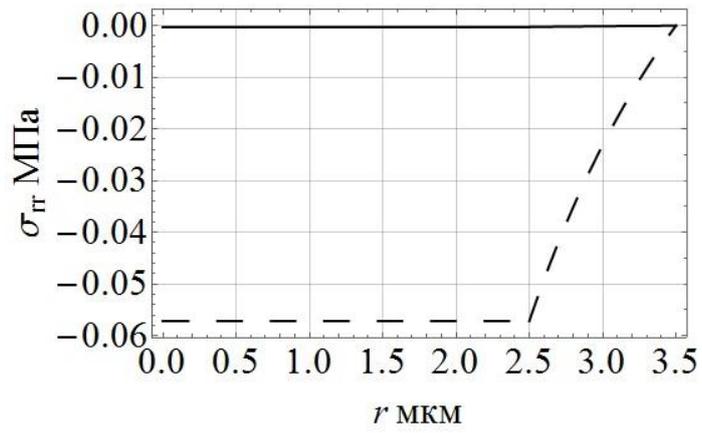


в)

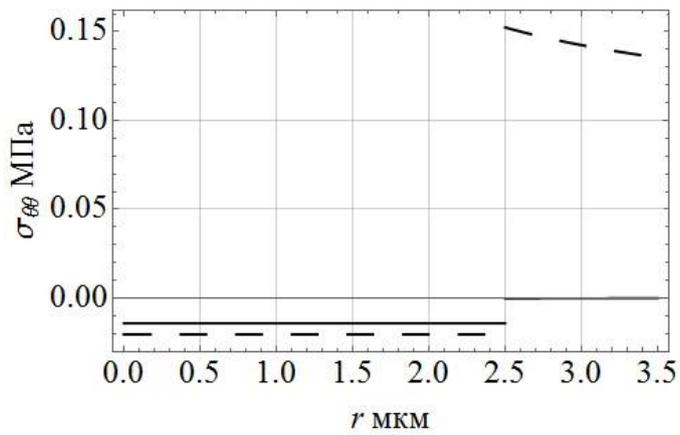
Рисунок 3.18 – Зависимость напряжения от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость осевого напряжения  $\sigma_{zz}(r)$  от радиуса

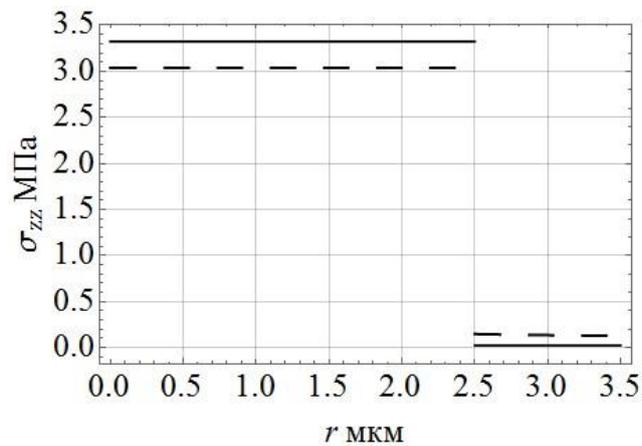
\_\_\_\_\_ - Классический композит 4, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 4



а)



б)

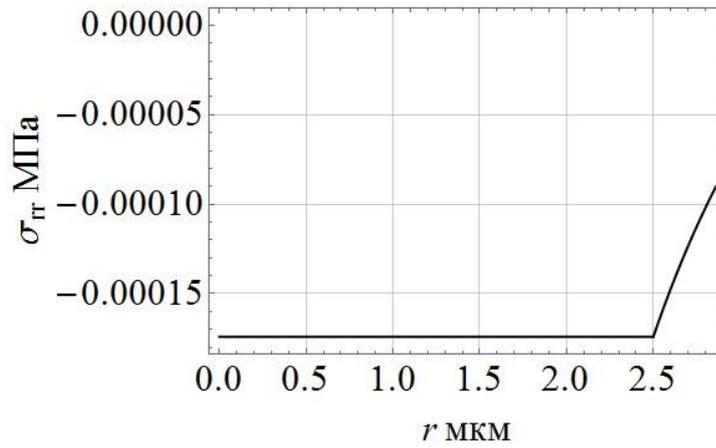


в)

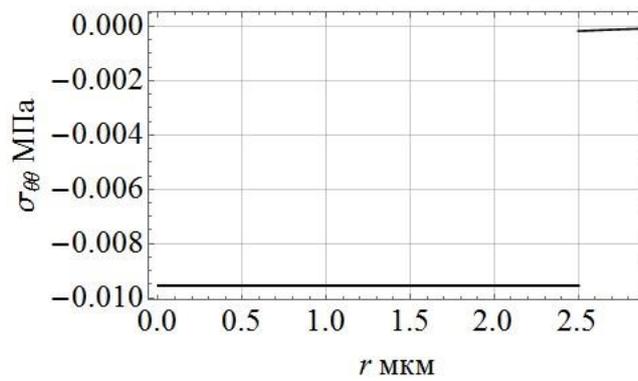
Рисунок 3.19 – Зависимость напряжения от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость осевого напряжения  $\sigma_{zz}(r)$  от радиуса

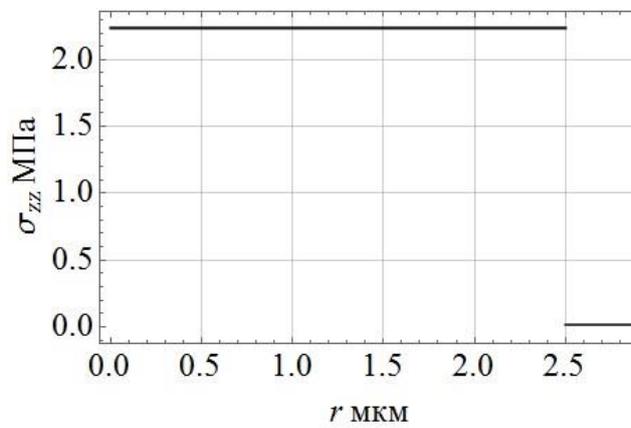
\_\_\_\_\_ - Классический композит 5, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 5



а)



б)



в)

Рисунок 3.20 – Зависимость напряжения от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость осевого напряжения  $\sigma_{zz}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 6

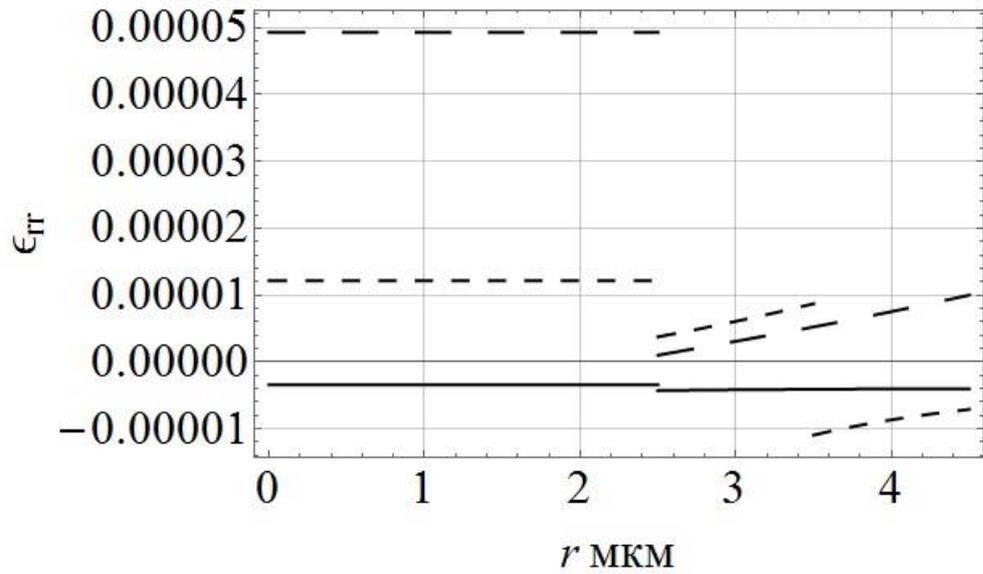
Таблица 3.5 – Максимальные напряжения в элементах структуры модифицированного композита с висеризованными волокнами для случая одноосного растяжения в направлении вдоль волокон

Наименование композита	Максимальное радиальное напряжение $\sigma_{rr}(r)$ , МПа			Максимальное окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}(r)$ , МПа			Максимальное осевое напряжение $\sigma_{zz}(r)$ , МПа		
	В волокне	В межф слое	В матрице	В волокне	В межф слое	В матрице	В волокне	В межф слое	В матрице
Модифицированный композит 1									
Мод. 1.1	0.115	0.115	0.0089	0.036	0.28	0.0089	4.86	0.28	0.044
Мод. 1.2	0.39	0.39		0.065	0.62		3.23	0.7	
Класс. комп. 1	0.00069	0.00069		0.023	0.00069		5.4	0.039	
Модифицированный композит 2									
Мод. 2.1	0.19	0.19	0.022	0.054	0.42	0.022	6.8	0.43	0.06
Мод. 2.2	0.93	0.93	0.038	0.14	1.41	0.038	4.38	1.63	0.088
Класс. комп. 2	0.0012	0.0012		0.033	0.0012		7.66	0.056	
Модифицированный композит 3									
Мод. 3.1	0.36	0.36	0.057	0.09	0.76	0.057	10.85	0.79	0.09
Мод. 3.2	5.75	5.75	0.49	0.78	8.23	0.49	4.84	9.72	0.26
Класс. комп. 3	0.0023	0.0023		0.053	0.0023		12.4	0.09	
Модифицированный композит 4									
	0.16	0.16		0.035	0.3		3.48	0.32	
Класс. комп. 4	0.00045	0.00045		0.02	0.00045		4.31	0.031	
Модифицированный композит 5									
	0.057	0.057		0.02	0.15		3.04	0.15	
Класс. комп. 5	0.00026	0.00026		0.014	0.00026		3.32	0.024	
Класс. комп. 6	0.00017	0.00017		0.0096	0.00017		2.24	0.016	

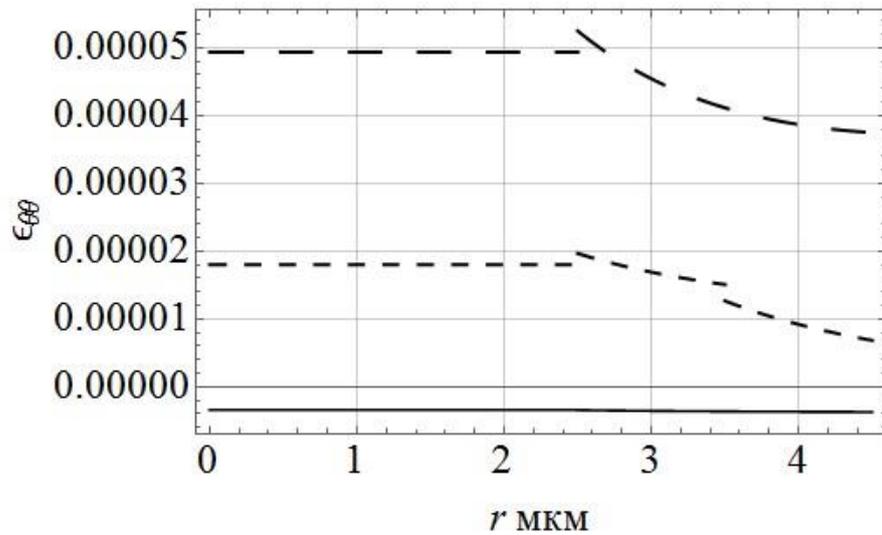
На рисунке 3.21 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 1 с его модификациями и Классического композита 1. На рисунке 3.22 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 2 с его модификациями и Классического композита 2. На рисунке 3.23 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 3 с его модификациями и Классического композита 3. На рисунке 3.24 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 4 и Классического композита 4. На рисунке 3.25 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 4 и Классического композита 5. На рисунке 3.26 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Классического композита 6.

Согласно рисункам 3.21-3.25 деформированные состояния  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в волокне и матрице модифицированных композитов растут по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в волокне и матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов.

В таблице 3.6 приведены значения максимальный деформаций в каждой из фаз рассматриваемых композитов для случая одноосного растяжения в направлении вдоль волокон.



а)

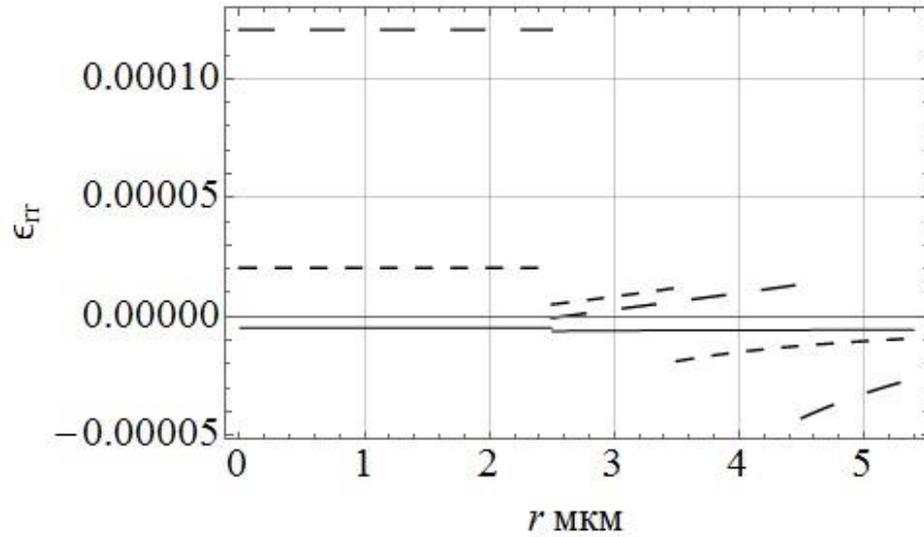


б)

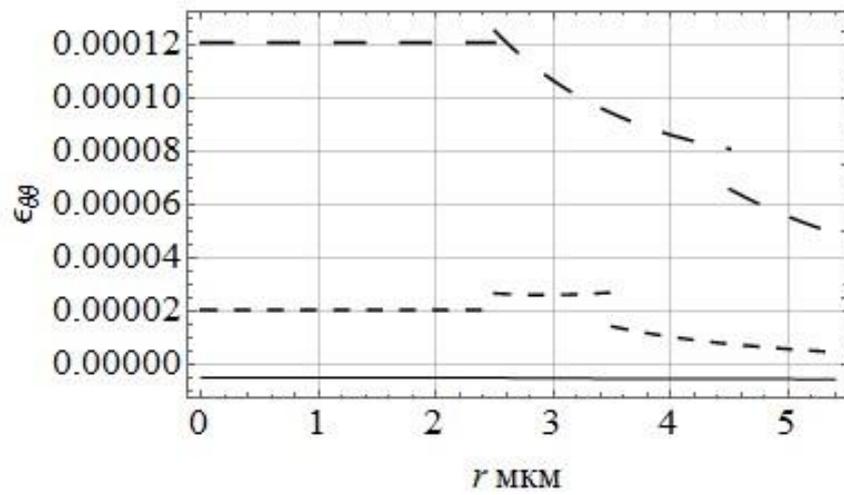
Рисунок 3.21 – Зависимость деформации от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 1, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.1.



а)

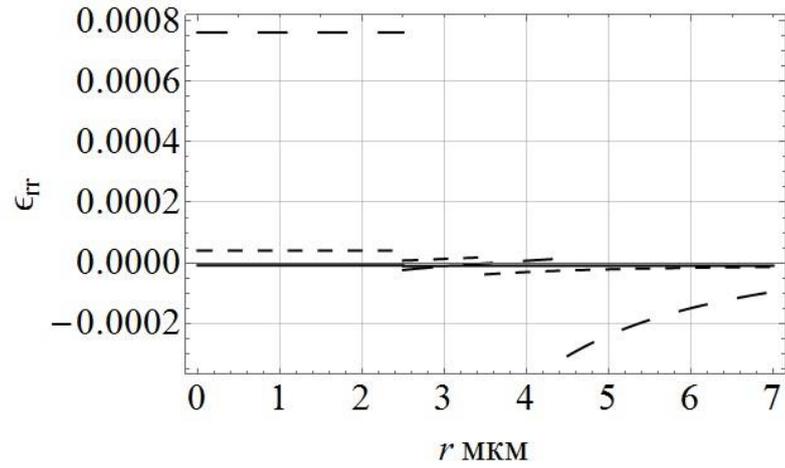


б)

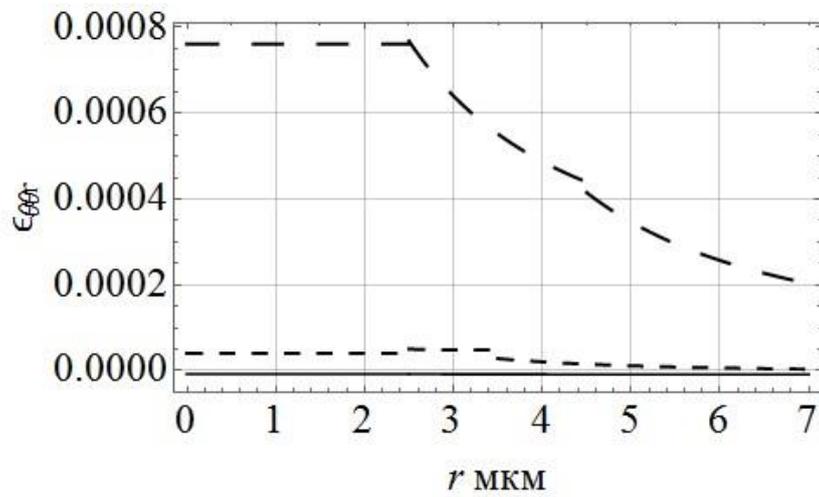
Рисунок 3.22 – Зависимость деформации от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.1.



а)

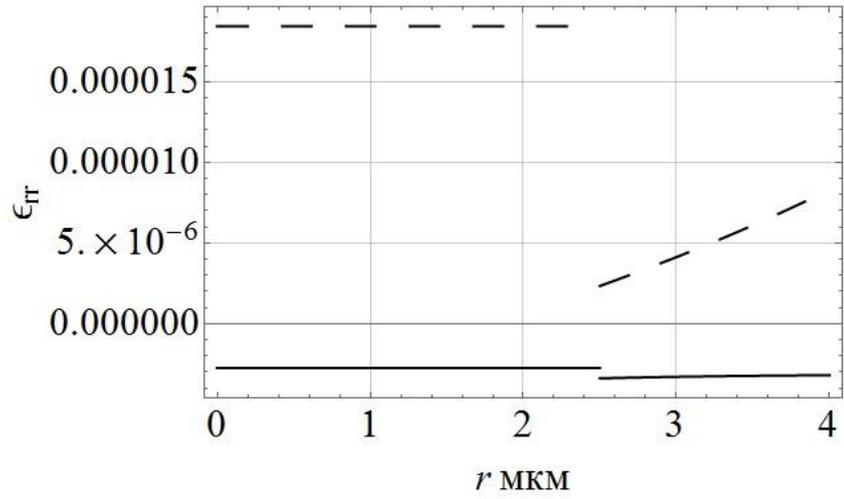


б)

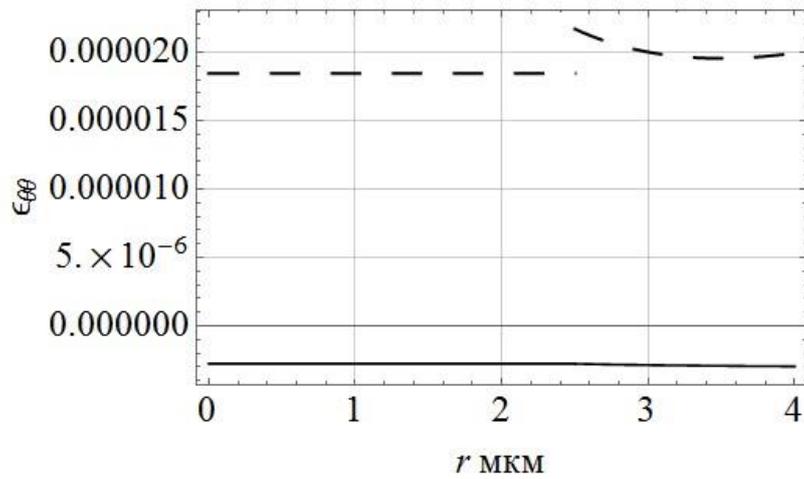
Рисунок 3.23 – Зависимость деформации от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 3, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.1.



а)

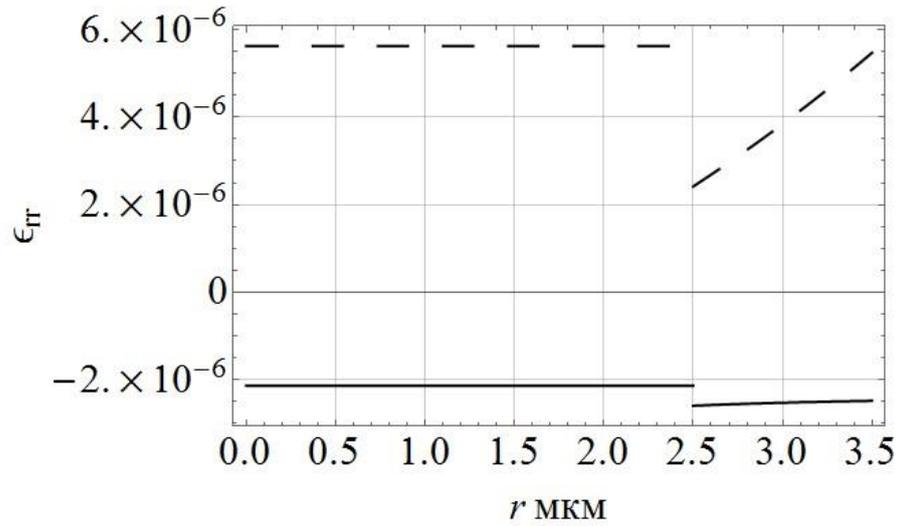


б)

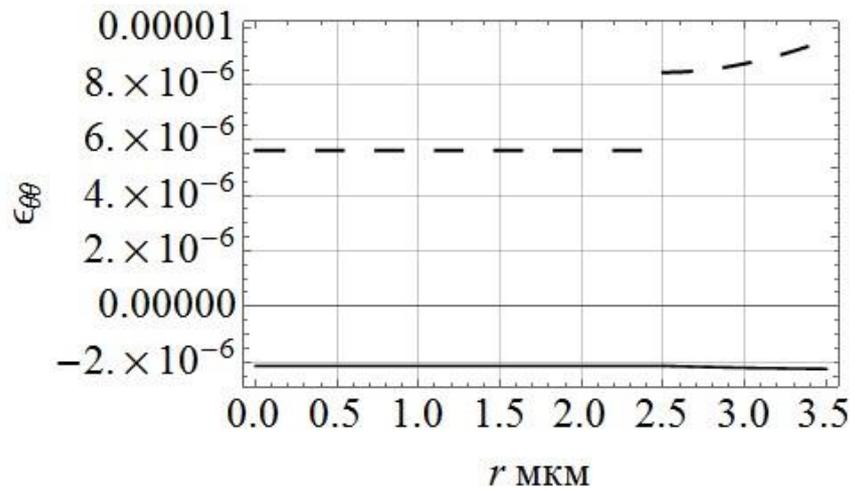
Рисунок 3.24 – Зависимость деформации от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 4, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 4



а)

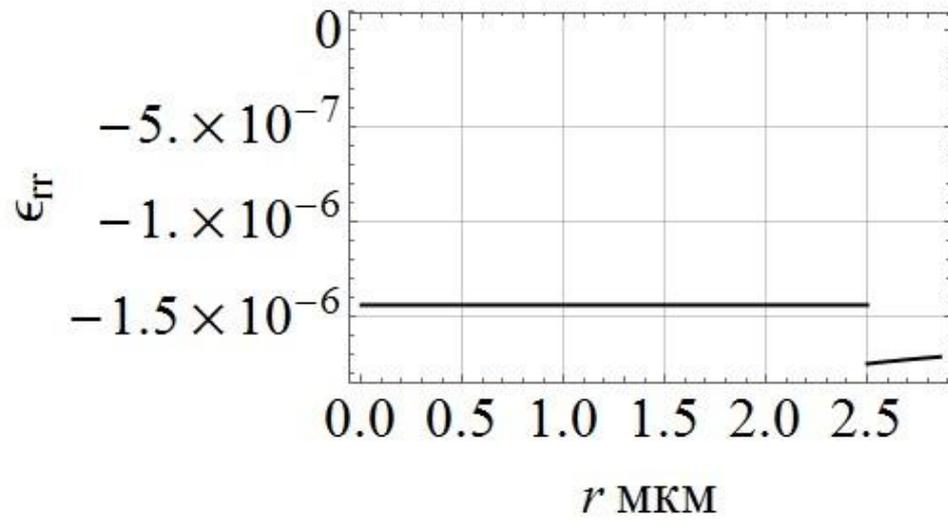


б)

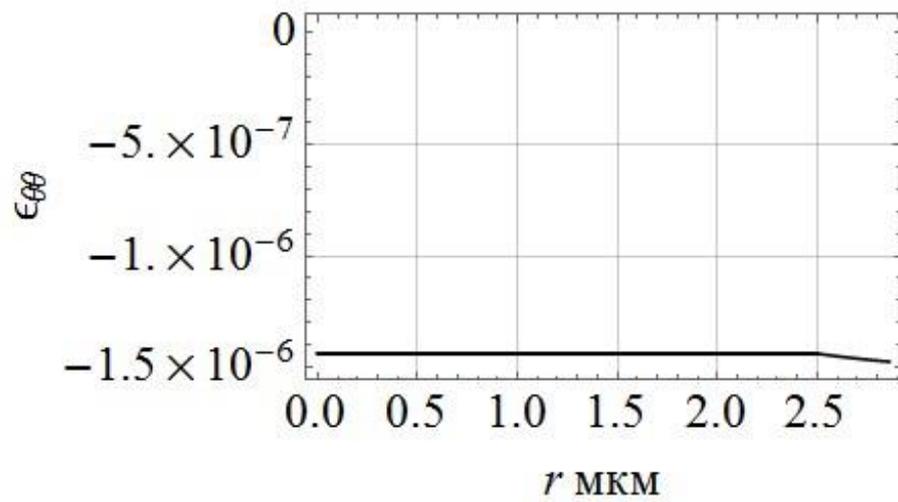
Рисунок 3.25 – Зависимость деформации от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 5, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 5



а)



б)

Рисунок 3.26 – Зависимость деформации от радиуса при одноосном растяжении в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\epsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\epsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 6

Таблица 3.6 – Максимальные деформации в элементах структуры модифицированного композита с висеризованными волокнами для случая одноосного растяжения в направлении вдоль волокон

Наименование композита	Максимальная радиальная деформация $\varepsilon_{rr}(r)$			Максимальная окружная деформация $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$		
	В волокне	В межфазном слое	В матрице	В волокне	В межфазном слое	В матрице
Модифицированный композит 1						
Модификация 1.1	0.000012	$8.19 \times 10^{-6}$	0.000011	0.000012	0.0000175	$8.45 \times 10^{-6}$
Модификация 1.2	0.000049	0.00001		0.000049	0.000052	
Классический композит 1	$3.44 \times 10^{-6}$	$4.2 \times 10^{-6}$		$3.44 \times 10^{-6}$	$3.55 \times 10^{-6}$	
Модифицированный композит 2						
Модификация 2.1	0.00002	0.000012	0.000019	0.00002	0.000027	0.000014
Модификация 2.2	0.00012	0.000014	0.000043	0.00012	0.00013	0.000066
Классический композит 2	$4.84 \times 10^{-6}$	$5.98 \times 10^{-6}$		$4.84 \times 10^{-6}$	$5.34 \times 10^{-6}$	
Модифицированный композит 3						
Модификация 3.1	0.00004	0.000019	0.000038	0.00004	0.000048	0.000028
Модификация 3.2	0.00076	0.000023	0.0003	0.00076	0.00077	0.00042
Классический композит 3	$7.78 \times 10^{-6}$	$9.75 \times 10^{-6}$		$7.78 \times 10^{-6}$	$8.76 \times 10^{-6}$	
Модифицированный композит 4	0.000018	$8.3 \times 10^{-6}$		0.000018	0.00002	
Классический композит 4	$2.75 \times 10^{-6}$	$3.34 \times 10^{-6}$		$2.75 \times 10^{-6}$	$2.93 \times 10^{-6}$	
Модифицированный композит 5	$5.62 \times 10^{-6}$	$2.61 \times 10^{-6}$		$5.62 \times 10^{-6}$	$9.31 \times 10^{-6}$	
Классический композит 5	$2.14 \times 10^{-6}$	$2.5 \times 10^{-6}$		$2.14 \times 10^{-6}$	$2.24 \times 10^{-6}$	
Классический композит 6	$1.44 \times 10^{-6}$	$1.74 \times 10^{-6}$		$1.44 \times 10^{-6}$	$1.47 \times 10^{-6}$	

### 3.5 Анализ напряженно-деформированного состояния модифицированного композита при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон

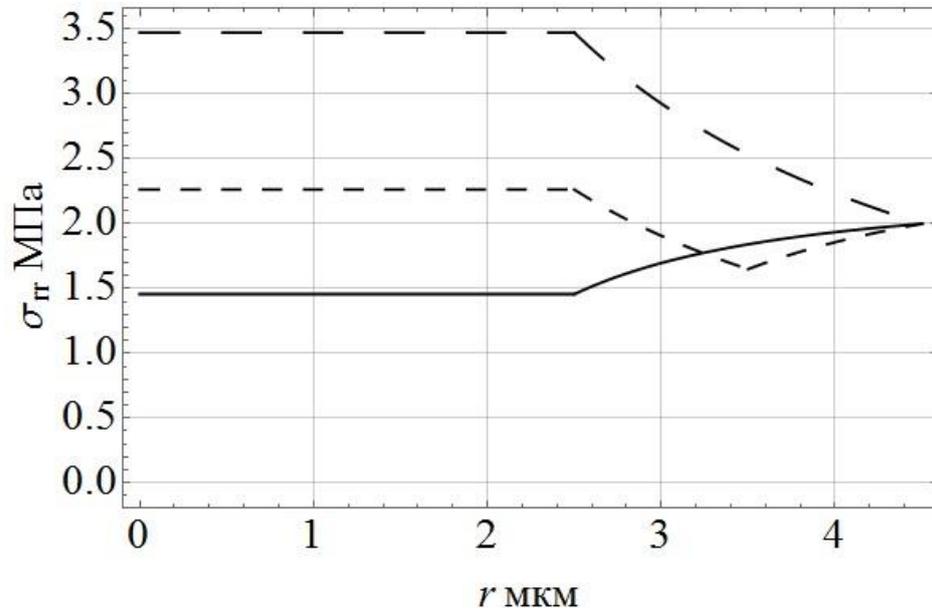
В данном разделе оцениваются напряженно-деформированные состояния модифицированных волокнистых композитов 1, 2 и 3 модификаций 1 и 2 (Таблица 3.1) и модифицированных волокнистых композитов 4 и 5, а также классических волокнистых композитов с теми же объемными содержаниями и объемным содержанием 60 % для случая сдвига в направлении вдоль волокон.

На рисунке 3.27 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 1 с его модификациями и Классического композита 1. На рисунке 3.28 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 2 с его модификациями и Классического композита 2. На рисунке 3.29 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 3 с его модификациями и Классического композита 3. На рисунке 3.30 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 4 и Классического композита 4. На рисунке 3.31 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 5 и Классического композита 5. На рисунке 3.32 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Классического композита 6.

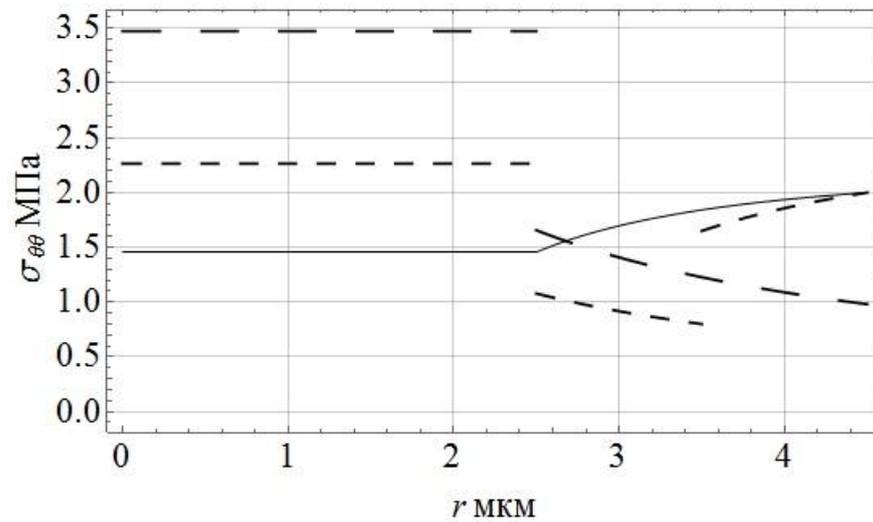
Согласно рисункам 3.27 - 3.31 а) напряженные состояния  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в волокне модифицированных композитов растут по сравнению напряженными состояниями  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в волокне аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. Согласно рисунку 3.27 б) напряженные состояния  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице модифицированного композита уменьшаются по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице аналогичного классического композита при вискеризации волокна длиной вискерсов 2 мкм, а при вискеризации волокна длиной вискерсов 1 мкм те же напряженные состояния  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице модифицированного композита растут по сравнению с напряженными состояниями в матрице классического волокнистого композита. Согласно рисункам 3.28 – 3.29 б) напряженные состояния  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице модифицированных композитов растут по сравнению напряженными состояниями  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. Согласно рисункам 3.30– 3.31 б) напряженные состояния  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице модифицированных композитов уменьшаются по сравнению напряженными

состояниями  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов.

В таблице 3.7 приведены значения максимальных напряжений в каждой из фаз рассматриваемых композитов для случая всесторонней нагрузки в направлении поперек волокон.



а)

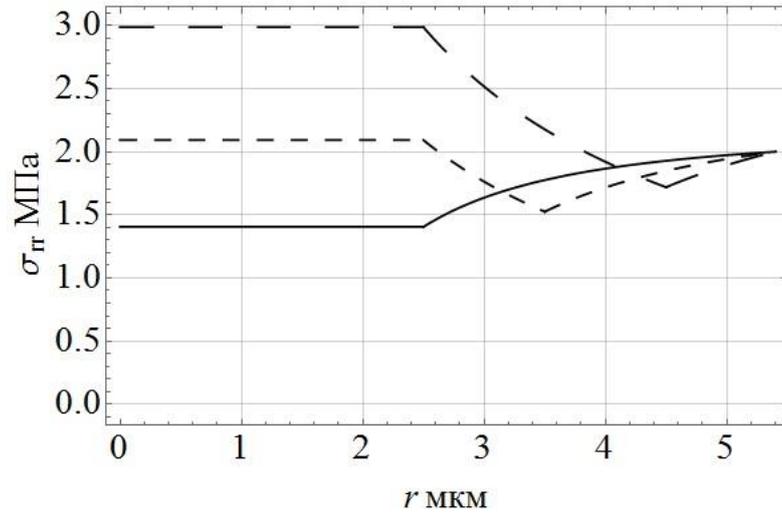


б)

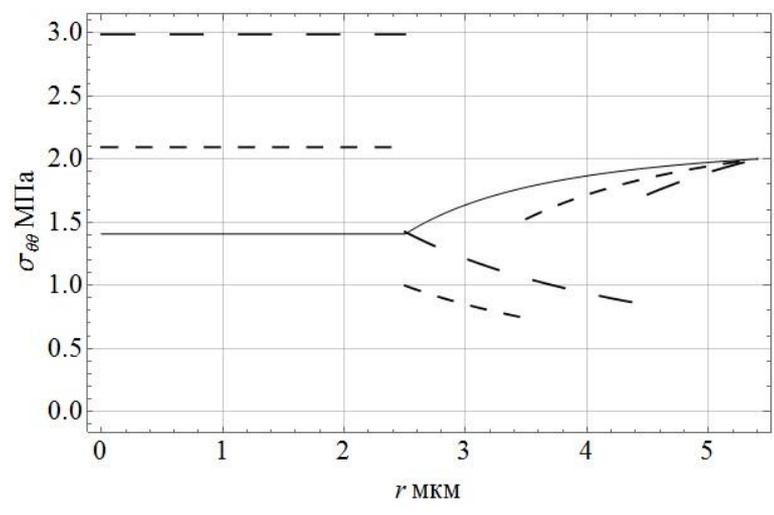
Рисунок 3.27 – Зависимость напряжения от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 1, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.1.



а)

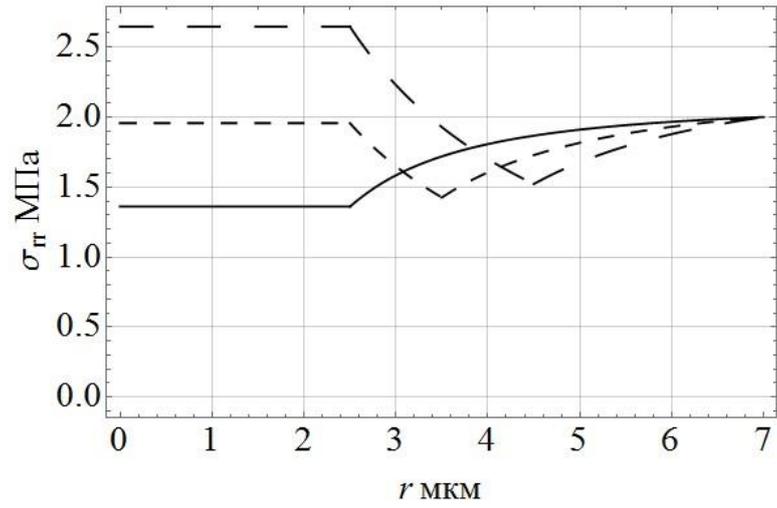


б)

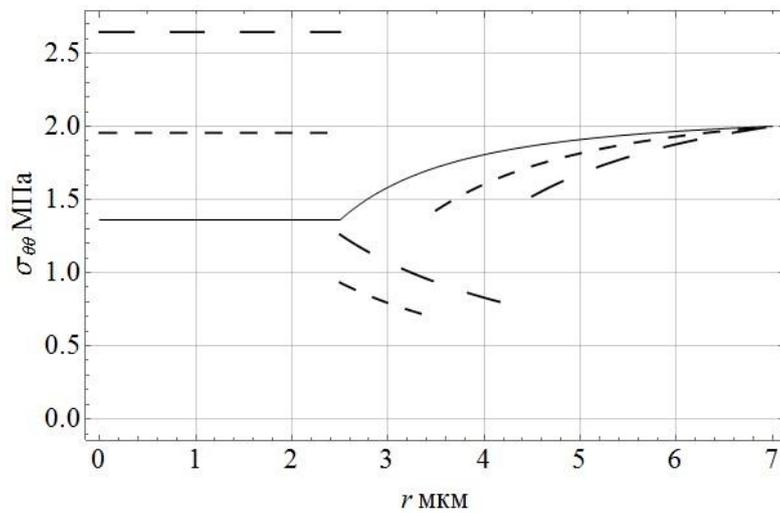
Рисунок 3.28 – Зависимость напряжения от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.2, - - - - - модифицированный композит 2 модификация 2.1.



а)

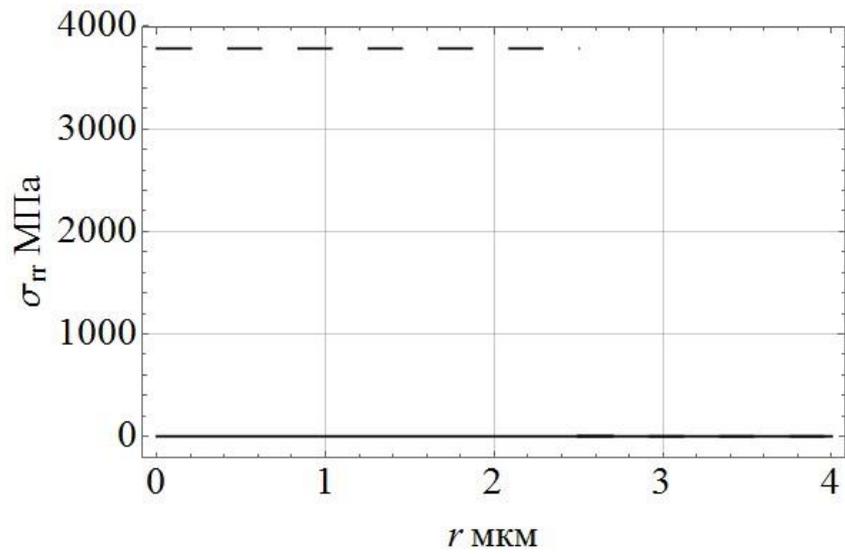


б)

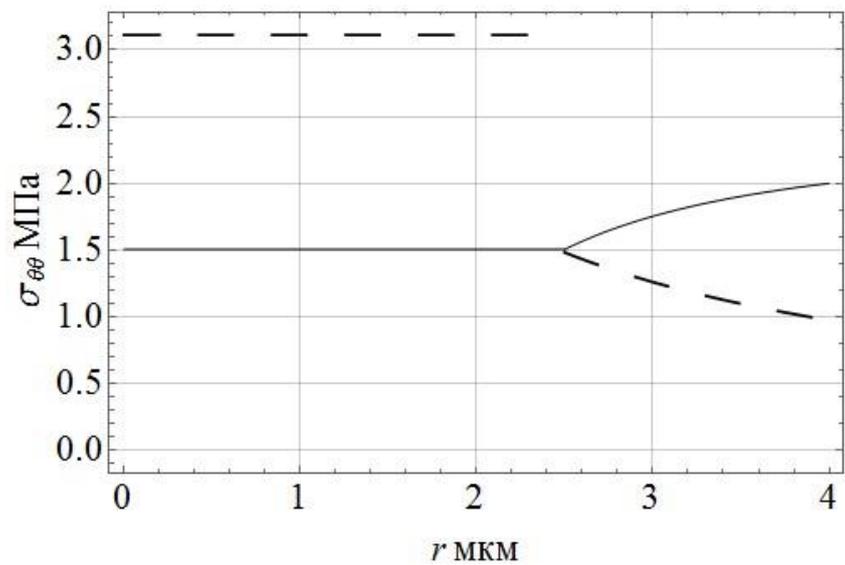
Рисунок 3.29 – Зависимость напряжения от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 3, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.2, - - - - - модифицированный композит 3 модификация 3.1.



а)

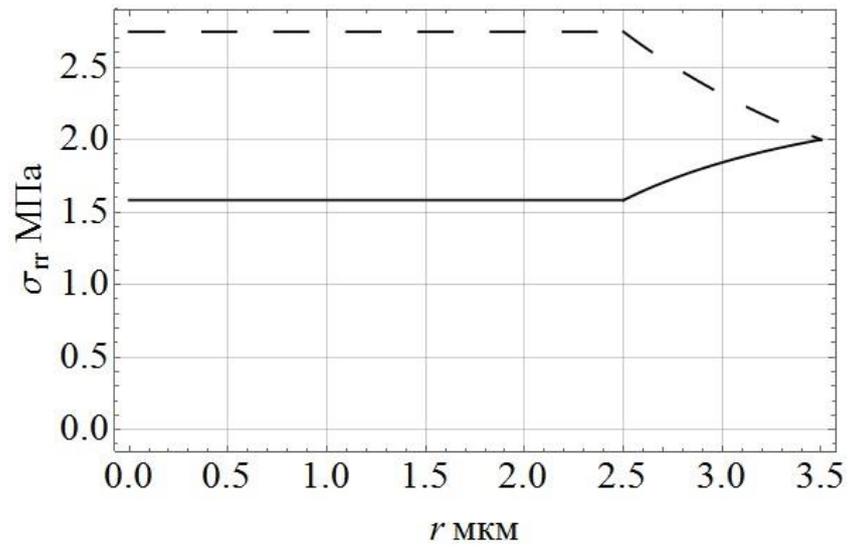


б)

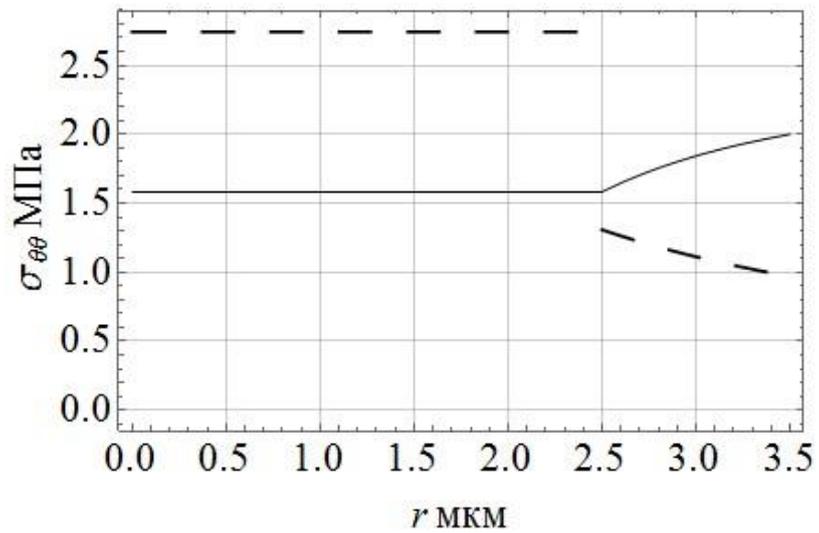
Рисунок 3.30 – Зависимость напряжения от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 4, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 4



а)

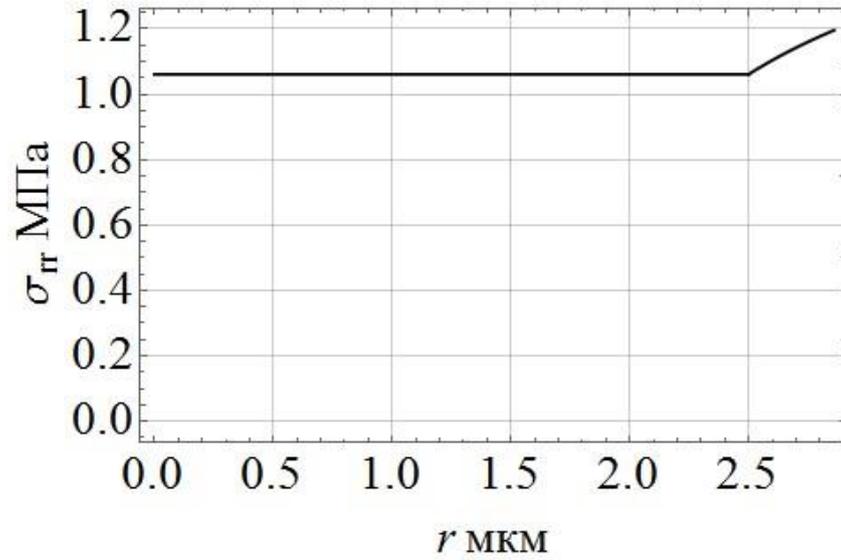


б)

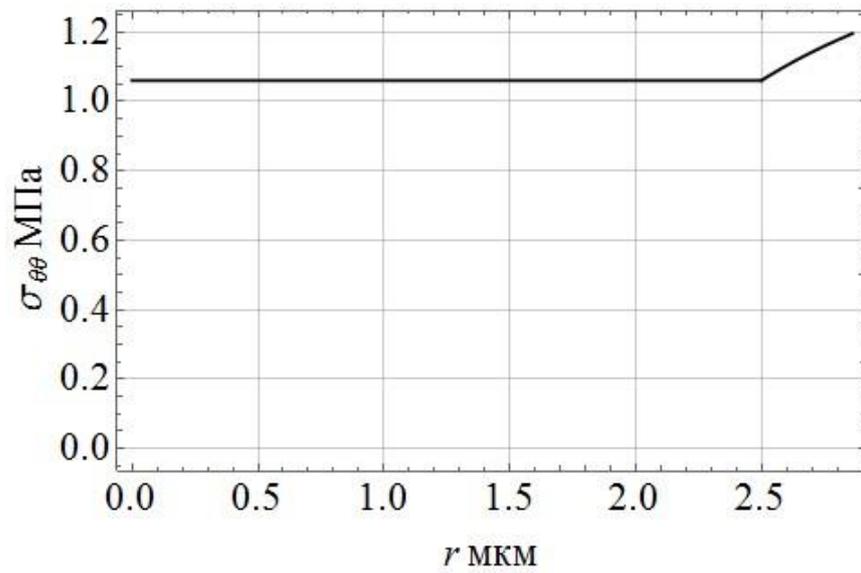
Рисунок 3.31 – Зависимость напряжения от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 5, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 5



а)



б)

Рисунок 3.32 – Зависимость напряжения от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 6

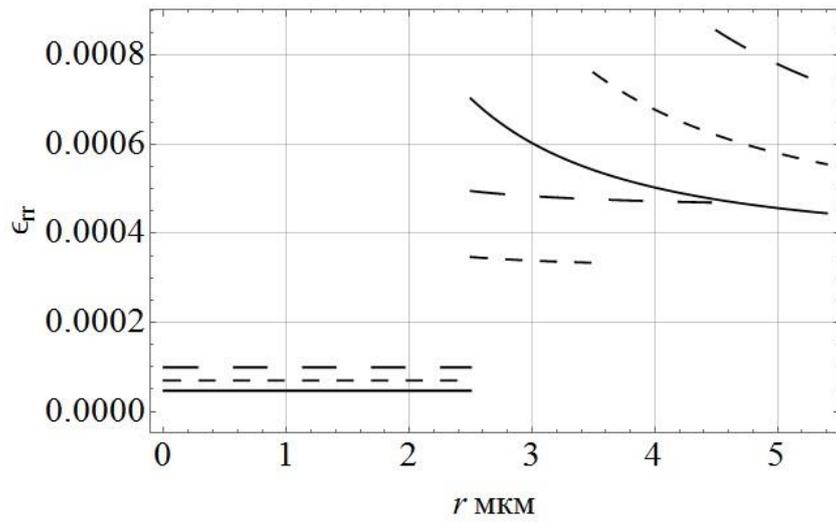
Таблица 3.7 – Максимальные напряжения в элементах структуры модифицированного композита с висеризованными волокнами для случая всесторонней нагрузки в направлении поперек волокон

Наименование композита	Максимальное радиальное напряжение $\sigma_{rr}(r)$ , МПа			Максимальное окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}(r)$ , МПа		
	В волокне	В межфазном слое	В матрице	В волокне	В межфазном слое	В матрице
Модифицированный композит 1						
Модификация 1.1	2.26	2.26	2	2.26	1.08	2
Модификация 1.2	3.48	3.48		3.48	1.66	
Классический композит 1	1.46	2		1.46	2	
Модифицированный композит 2						
Модификация 2.1	2.09	2.09	2	2.09	1	2
Модификация 2.2	2.99	2.99	2	2.99	1.42	2
Классический композит 2	1.4	2		1.4	2	
Модифицированный композит 3						
Модификация 3.1	1.96	1.96	2	1.96	0.93	2
Модификация 3.2	2.64	2.64	2	2.64	1.26	2
Классический композит 3	1.36	2		1.36	2	
Модифицированный композит 4	3.11	3.11		3.11	1.48	
Классический композит 4	1.51	2		1.51	2	
Модифицированный композит 5	2.74	2.74		2.74	1.38	
Классический композит 5	1.58	2		1.58	2	
Классический композит 6	1.06	1.2		1.06	1.2	

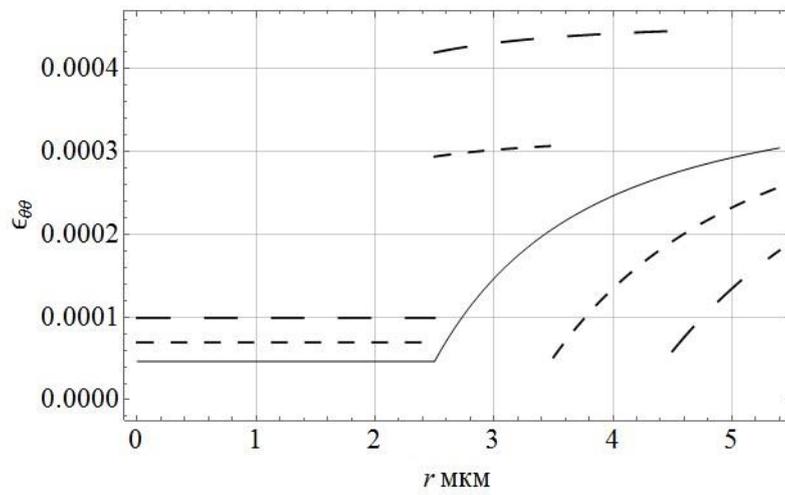
На рисунке 3.33 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 1 с его модификациями и Классического композита 1. На рисунке 3.34 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 2 с его модификациями и Классического композита 2. На рисунке 3.35 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 3 с его модификациями и Классического композита 3. На рисунке 3.36 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 4 и Классического композита 4. На рисунке 3.37 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 5 и Классического композита 5. На рисунке 3.38 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Классического композита 6.

Согласно рисункам 3.33 – 3.32 деформированные состояния  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в волокне модифицированных композитов растут по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в волокне аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. Согласно рисунку 3.33 а) при вискеризации композита вискерсами длиной 2 мкм деформированные состояния  $\varepsilon_{rr}(r)$  в матрице модифицированных композитов уменьшаются по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов, а при вискеризации композита вискерсами длиной 1 мкм наблюдаются прямо противоположный эффект. Согласно рисункам 3.34-3.35 а) деформированные состояния  $\varepsilon_{rr}(r)$  в матрице модифицированных композитов растут по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. А согласно рисункам 3.34-3.35 б) деформированные состояния  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в матрице модифицированных композитов уменьшаются по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. Согласно рисункам 3.36-3.37 а) при предельных объемных содержаниях волокна в матрице, обусловленных длинами вискерсов 1,5 мкм и 1 мкм деформированные состояния  $\varepsilon_{rr}(r)$  в матрице модифицированных композитов уменьшаются по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов. В то время как, согласно рисунками 3.36-3.37 б) деформированные состояния  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в матрице модифицированных композитов уменьшаются по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов





а)

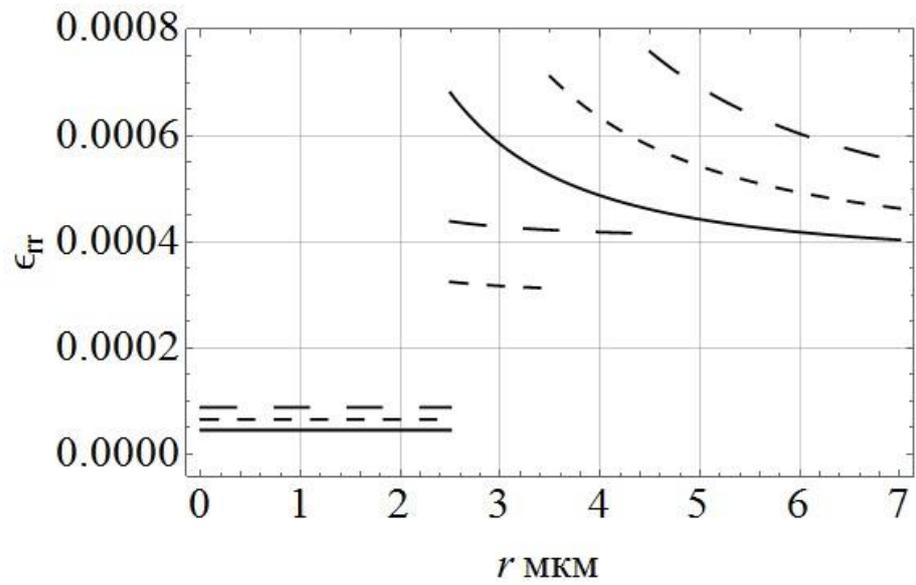


б)

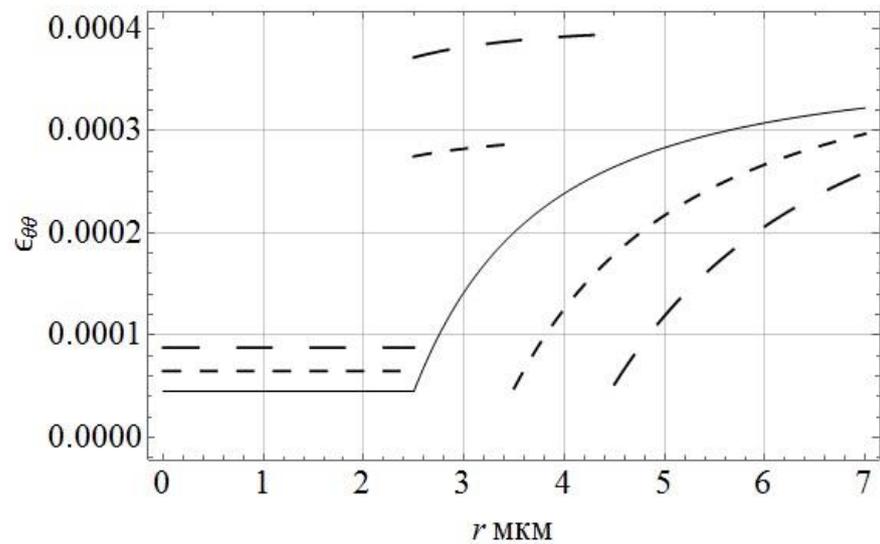
Рисунок 3.34 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.2, - - - - - модифицированный композит 2 модификация 2.1.



а)

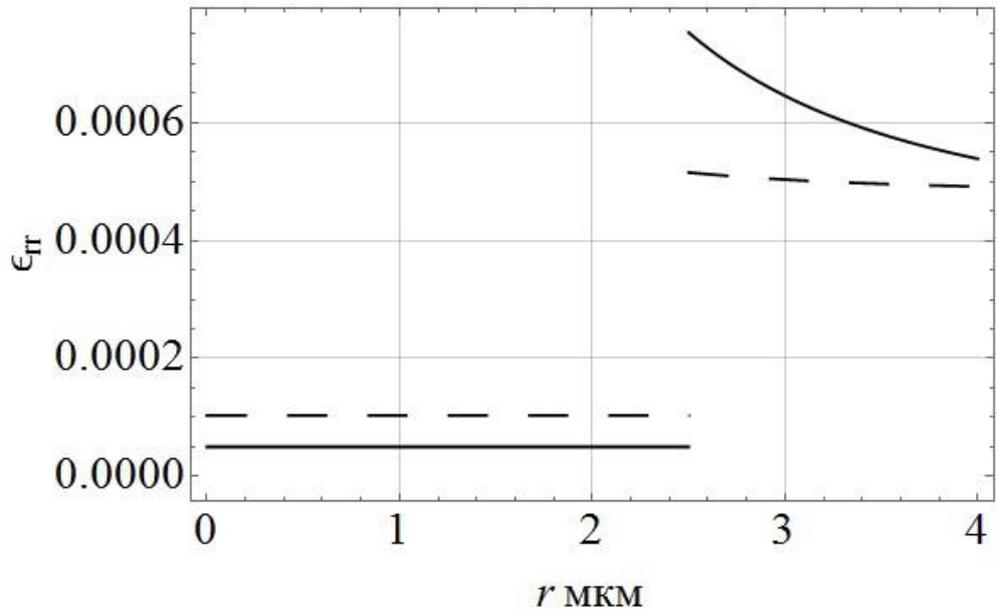


б)

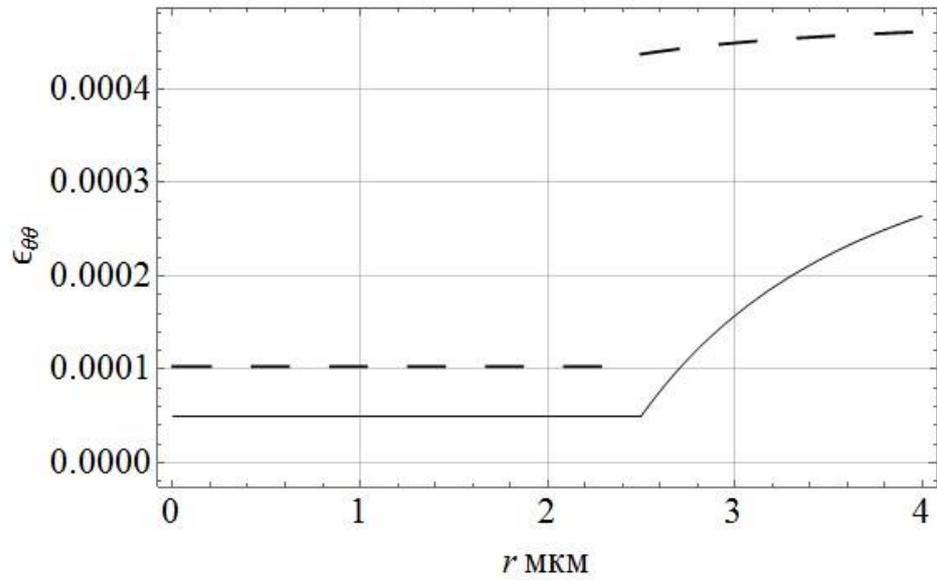
Рисунок 3.35 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 3, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.1.



а)

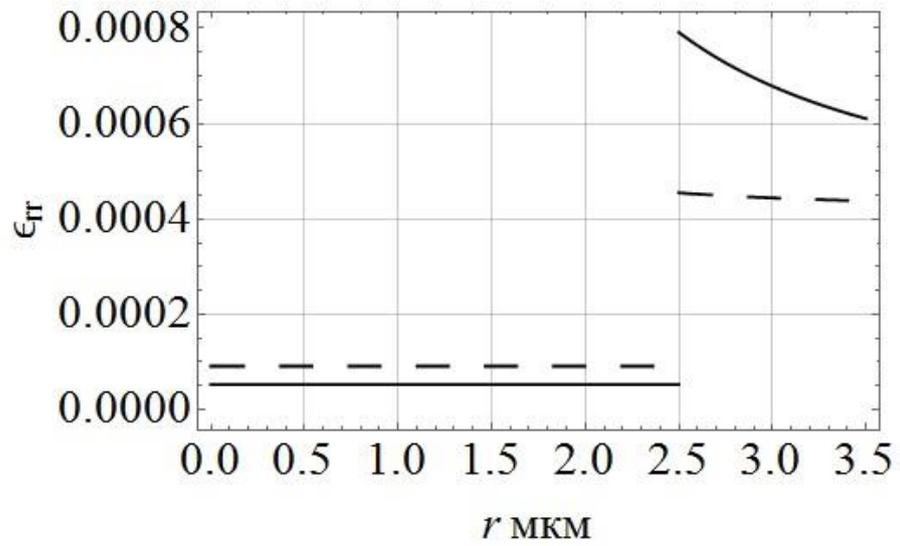


б)

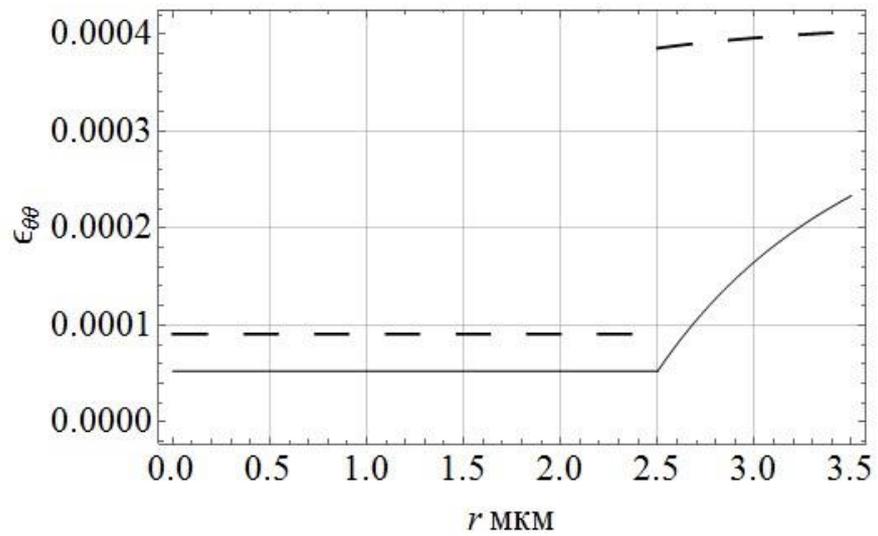
Рисунок 3.36 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 4, - - - - - модифицированный композит 4



а)

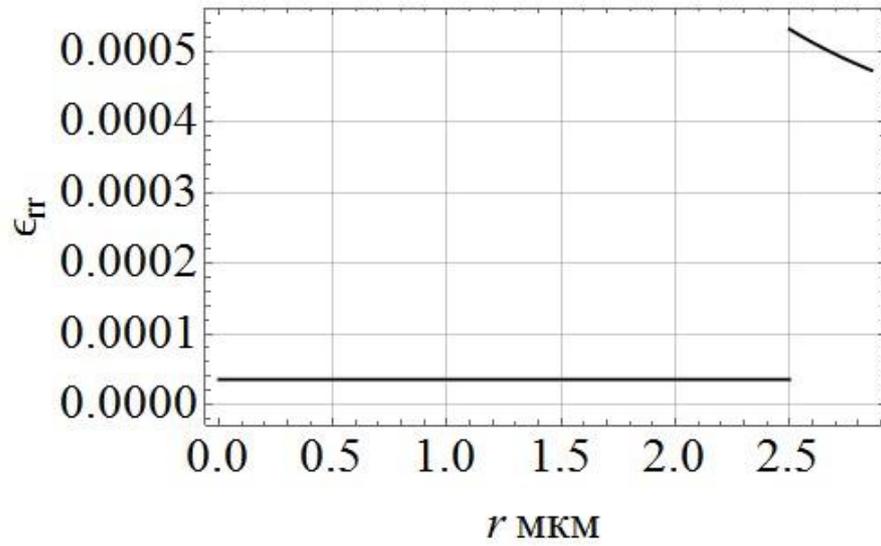


б)

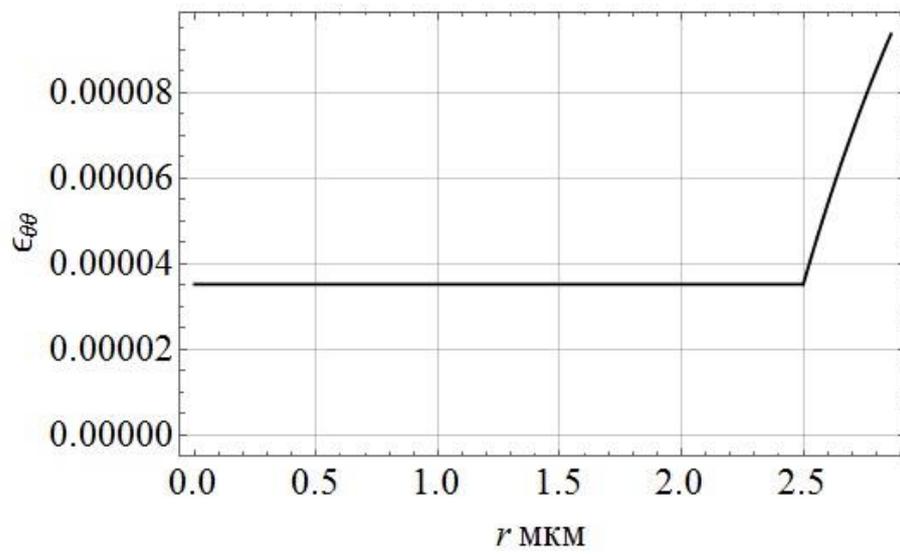
Рисунок 3.37 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 5, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 5



а)



б)

Рисунок 3.38 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\epsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\epsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 6

Таблица 3.8 – Максимальные деформации в элементах структуры модифицированного композита с висеризованными волокнами для случая всесторонней нагрузки в направлении поперек волокон

Наименование композита	Максимальная радиальная деформация $\varepsilon_{rr}(r)$			Максимальная окружная деформация $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$		
	В волокне	В межфазном слое	В матрице	В волокне	В межфазном слое	В матрице
Модифицированный композит 1						
Модификация 1.1	0.000075	0.00038	0.00082	0.000075	0.00033	0.0002
Модификация 1.2	0.00012	0.00057		0.00012	0.00052	
Классический композит 1	0.000048	0.00073		0.000048	0.00028	
Модифицированный композит 2						
Модификация 2.1	0.000069	0.00035	0.00076	0.000069	0.0003	0.00026
Модификация 2.2	0.000099	0.0005	0.00086	0.000099	0.00044	0.00018
Классический композит 2	0.000047	0.0007		0.000047	0.0003	
Модифицированный композит 3						
Модификация 3.1	0.000065	0.00032	0.0007	0.000065	0.00029	0.0003
Модификация 3.2	0.000088	0.00044	0.00076	0.000088	0.00039	0.00026
Классический композит 3	0.000045	0.00068		0.000045	0.00032	
Модифицированный композит 4	0.0001	0.00052		0.0001	0.00046	
Классический композит 4	0.00005	0.00075		0.00005	0.00026	
Модифицированный композит 5	0.00009	0.00046		0.00009	0.0004	
Классический композит 5	0.000052	0.00079		0.000052	0.00023	
Классический композит 6	0.000035	0.00053		0.000035	0.000091	

### 3.6 Анализ напряженно-деформированного состояния модифицированного композита при чистом сдвиге в направлении поперек волокон

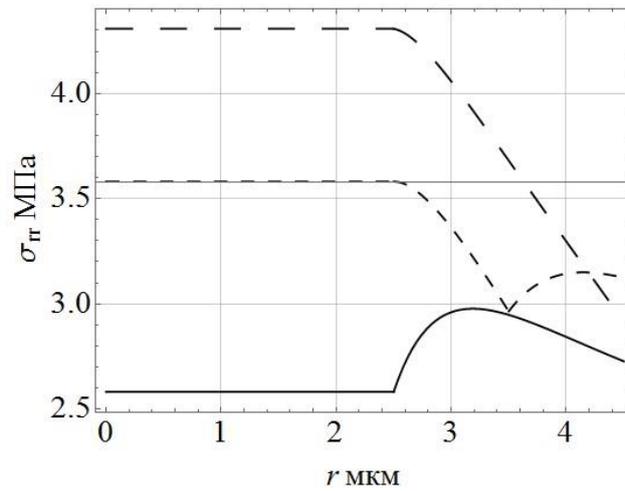
В данном разделе оцениваются напряженно-деформированные состояния модифицированных волокнистых композитов 1, 2 и 3 модификаций 1 и 2 (Таблица 2) и модифицированных волокнистых композитов 4 и 5, а также классических волокнистых композитов с теми же объемными содержаниями и объемным содержанием 60 % для случая сдвига в направлении вдоль волокон.

На рисунке 3.39 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 1 с его модификациями и Классического композита 1. На рисунке 3.40 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 2 с его модификациями и Классического композита 2. На рисунке 3.41 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 3 с его модификациями и Классического композита 3. На рисунке 3.42 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 4 и Классического композита 4. На рисунке 3.43 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 5 и Классического композита 5. На рисунке 3.44 представлены графики напряженного состояния в каждой из фаз Классического композита 6.

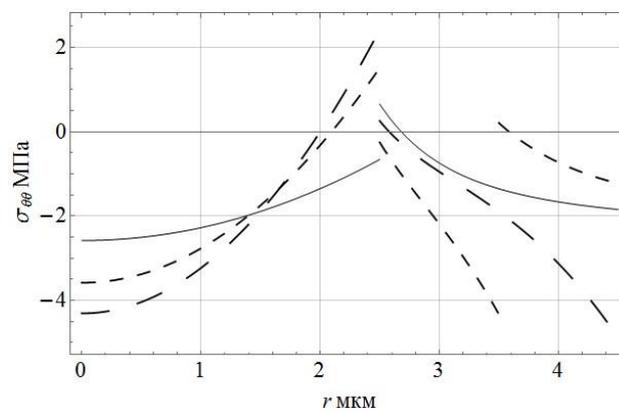
Согласно рисункам 3.39 - 3.43 а) напряженные состояния  $\sigma_{rr}(r)$  в волокне и матрице модифицированных композитов растут по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{rr}(r)$  в волокне и матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. Согласно рисункам 3.39 – 3.43 б), в) напряженные состояния  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  и  $\sigma_{r\theta}(r)$  в волокне модифицированных композитов растут по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  и  $\sigma_{r\theta}(r)$  в волокне аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. Согласно рисунку 3.39 б) вискеризация композитов с объемным содержанием волокна 24 % вискерсами длиной 1 мкм приводит к уменьшению напряженного состояния  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице модифицированного композита по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице аналогичного классического композита. Согласно рисунку 3.33 в) вискеризация композитов с объемным содержанием волокна 24 % вискерсами приводит к уменьшению напряженного состояния  $\sigma_{r\theta}(r)$  в матрице модифицированного композита по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{r\theta}(r)$  в матрице аналогичного классического композита, при этом вискеризация волокна вискерсами длиной 1 мкм приводит к большему

отрыву показателей предельных напряжений модифицированного композита от классического, чем вискеризация волокна вискерсами длиной 2 мкм. Согласно рисункам 3.40 – 3.41 б) в) вискеризация композитов приводит к уменьшению напряженного состояния  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  и  $\sigma_{r\theta}(r)$  в матрице модифицированного композита по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  и  $\sigma_{r\theta}(r)$  в матрице аналогичного классического композита. Согласно рисункам 3.43 – 3.43 б) напряженные состояния  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице модифицированного композита растут по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрице аналогичного классического композита. Согласно рисунку 3.42 в) при вискеризации композита с объемным содержанием волокна 30 % напряженные состояния  $\sigma_{r\theta}(r)$  в матрице модифицированного композита уменьшаются по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{r\theta}(r)$  в матрице аналогичного классического композита. Но, согласно рисунку 3.43 в) при вискеризации композита с объемным содержанием волокна 40 % напряженные состояния  $\sigma_{r\theta}(r)$  в матрице модифицированного композита растут по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{r\theta}(r)$  в матрице аналогичного классического композита.

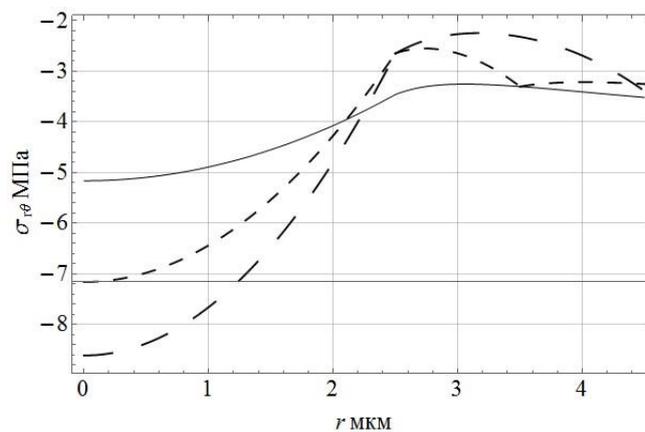
В таблице 3.8 приведены данные по максимальным напряжениям в каждой из фаз рассматриваемых композитов для случая чистого сдвига в направлении поперек волокон.



а)



б)

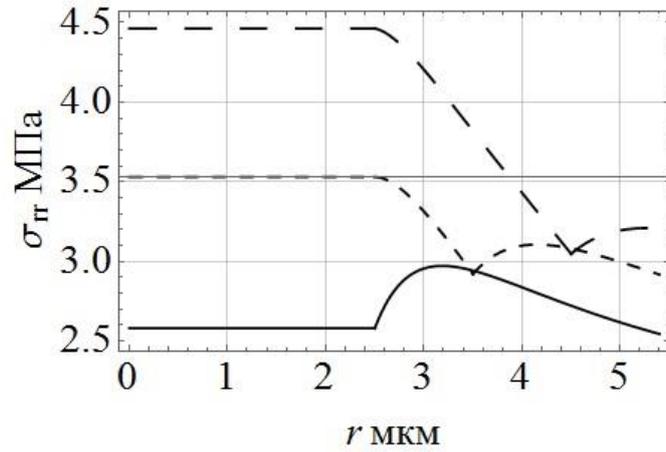


в)

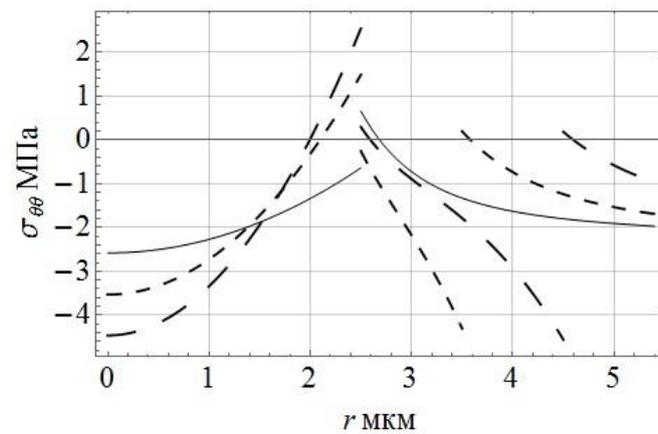
Рисунок 3.39 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвигового напряжения  $\sigma_{r\theta}(r)$  от радиуса.

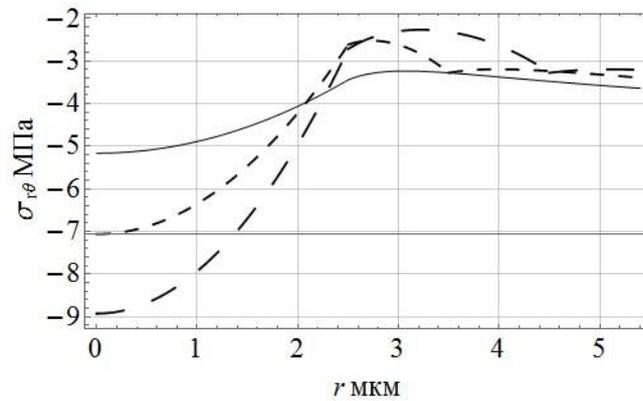
\_\_\_\_\_ - Классический композит 1, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.1.



а)



б)

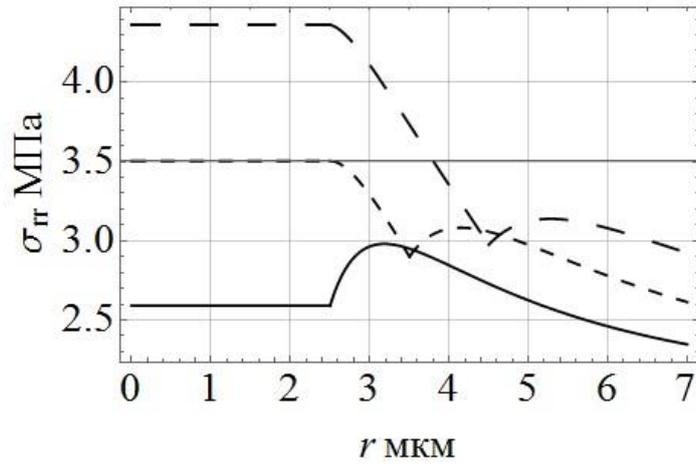


в)

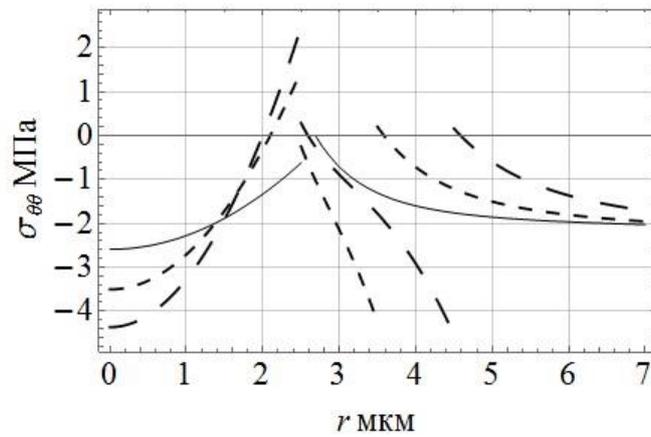
Рисунок 3.40 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвигового напряжения  $\sigma_{r\theta}(r)$  от радиуса.

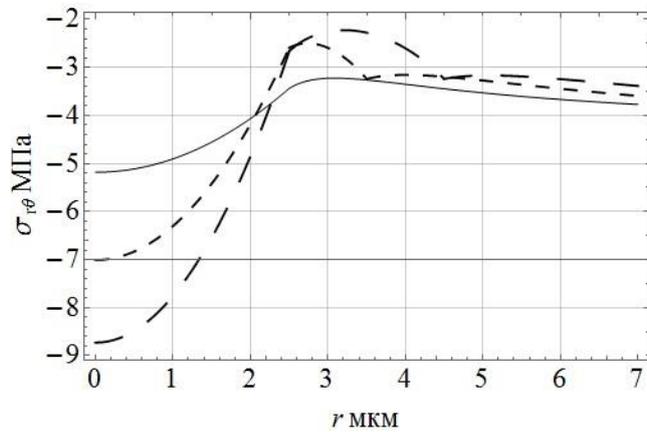
\_\_\_\_\_ - Классический композит 2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.1.



а)



б)

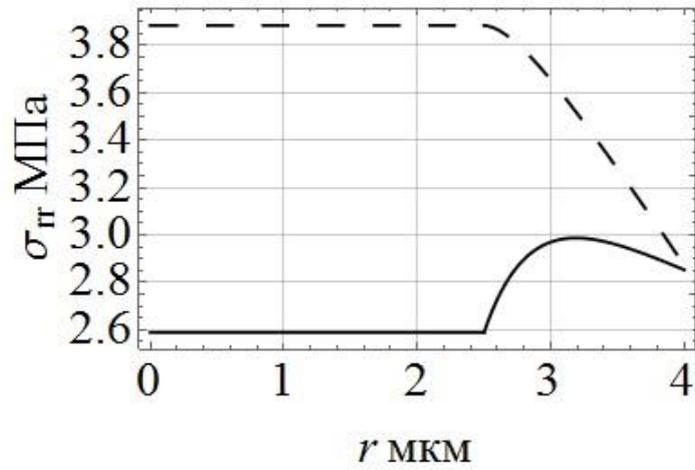


в)

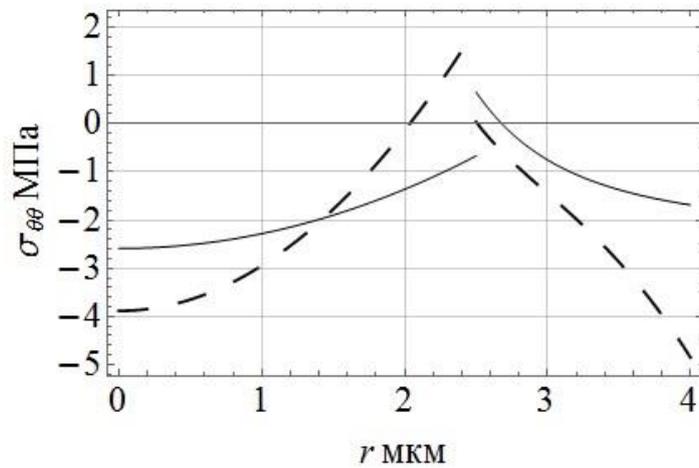
Рисунок 3.41 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвигового напряжения  $\sigma_{r\theta}(r)$  от радиуса.

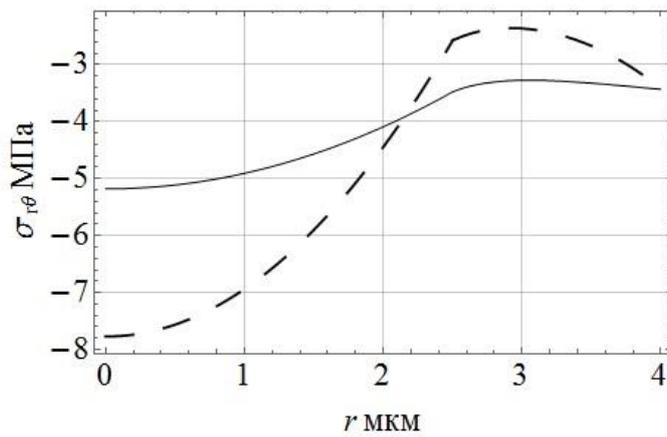
\_\_\_\_\_ - Классический композит 3, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.1.



а)



б)

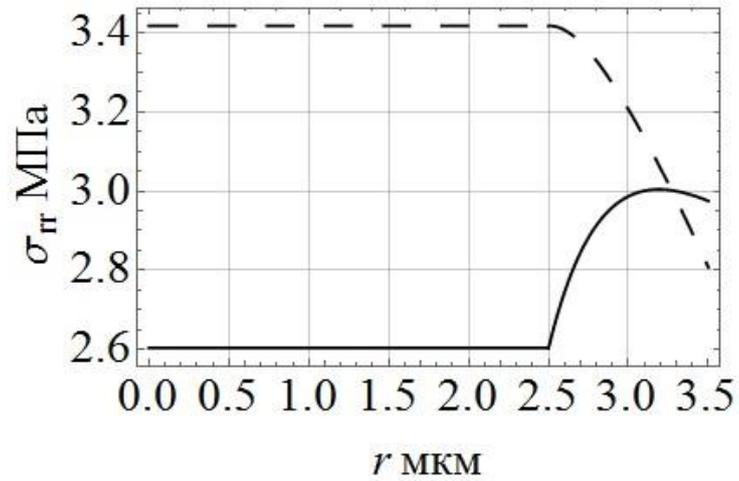


в)

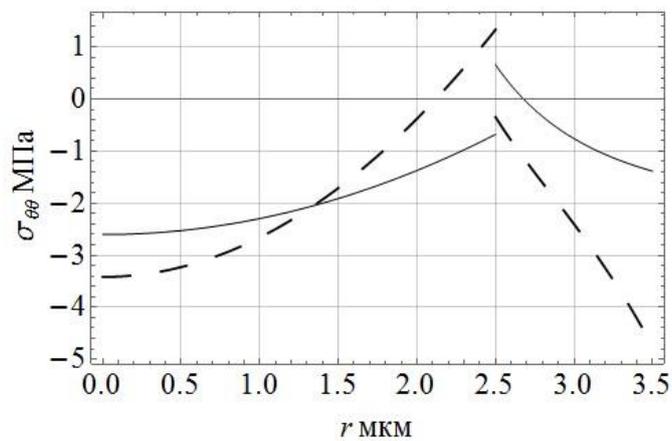
Рисунок 3.42 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвигового напряжения  $\sigma_{r\theta}(r)$  от радиуса.

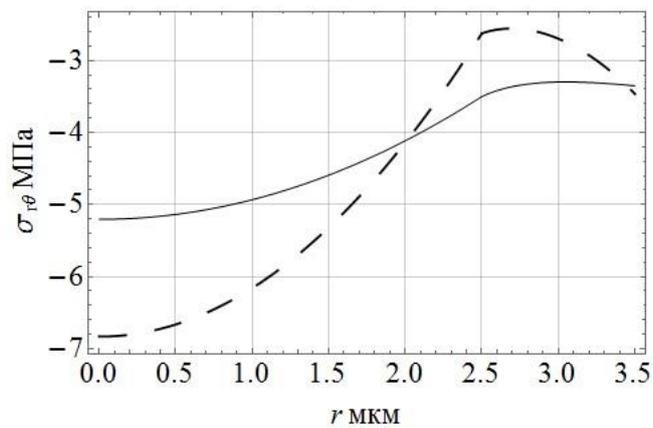
\_\_\_\_\_ - Классический композит 4, - - - - - модифицированный композит 4



а)



б)

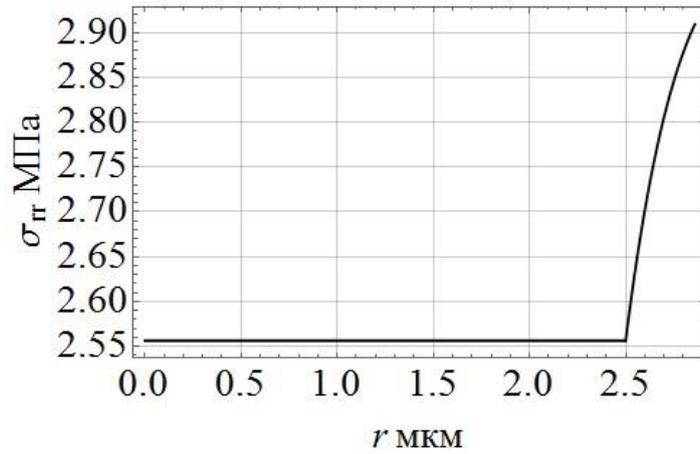


в)

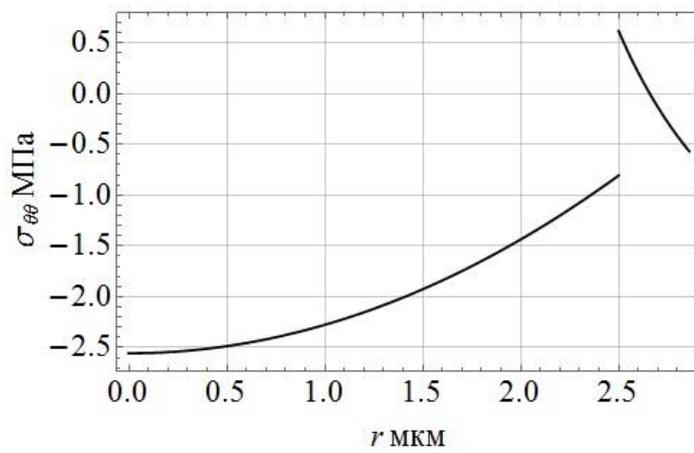
Рисунок 3.43 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвигового напряжения  $\sigma_{r\theta}(r)$  от радиуса.

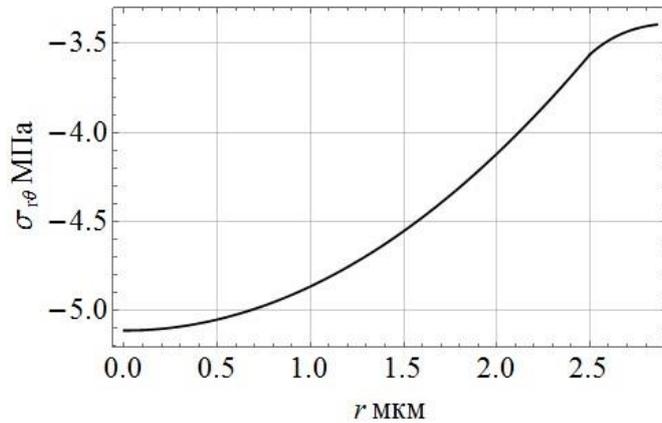
\_\_\_\_\_ - Классический композит 5, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 5



а)



б)



в)

Рисунок 3.44 – Зависимость напряжения от радиуса при чистом сдвиге в направлении поперек волокон:

а) зависимость радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвигового напряжения  $\sigma_{r\theta}(r)$  от радиуса.

\_\_\_\_\_ - Классический композит 6

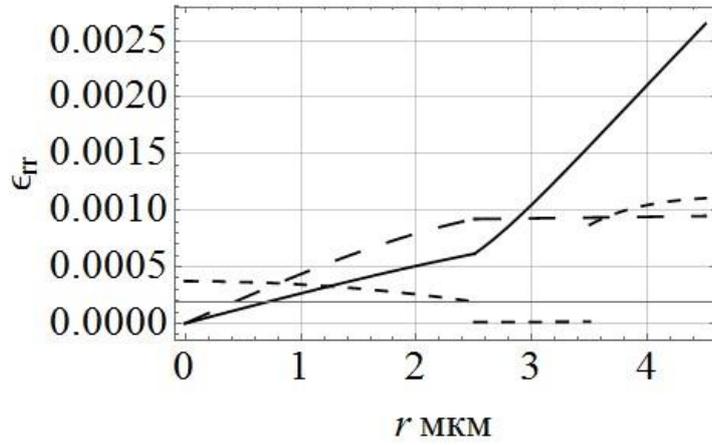
Таблица 3.9 – Максимальные напряжения в элементах структуры модифицированного композита с висеризованными волокнами для случая чистого сдвига в направлении поперек волокон

Наименование композита	Максимальное радиальное напряжение $\sigma_{rr}(r)$ , МПа			Максимальное окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}(r)$ , МПа			Максимальное сдвиговое напряжение $\sigma_{r\theta}(r)$ , МПа		
	В волокне	В межф слое	В матрице	В волокне	В межф слое	В матрице	В волокне	В межф слое	В матрице
Модифицированный композит 1									
Мод. 1.1	3.58	3.58	3.15	3.58	4.33	1.23	7.16	3.3	3.25
Мод. 1.2	4.31	2.91		4.31	4.89		8.62	3.39	
Класс. комп. 1	2.58	2.98		2.58	1.84		5.16	3.52	
Модифицированный композит 2									
Мод. 2.1	3.53	3.53	3.1	3.53	4.3	1.69	7.06	3.27	3.39
Мод. 2.2	4.46	4.46	3.2	4.46	4.56	0.97	8.93	3.27	3.27
Класс. комп. 2	2.58	2.97		2.58	1.97		5.16	3.44	
Модифицированный композит 3									
Мод. 3.1	3.5	3.5	3.08	3.5	4.25	1.95	7	3.24	3.59
Мод. 3.2	4.36	4.36	3.14	4.36	4.54	1.7	8.73	3.24	3.38
Класс. комп. 3	2.59	2.98		2.59	2.03		5.18	3.77	
Модифицированный композит 4									
	3.88	3.88		3.88	4.85		7.77	3.42	
Класс. комп. 4	2.59	2.99		2.59	1.37		5.18	3.48	
Модифицированный композит 5									
	3.42	3.42		3.42	4.76		6.84	3.46	
Класс. комп. 5	2.6	3		2.6	1.39		5.21	3.5	
Класс. комп. 6	2.56	2.9		2.56	0.61		5.11	3.56	

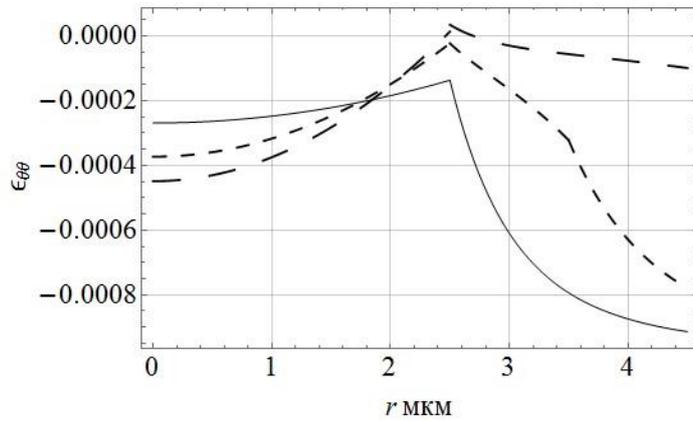
На рисунке 3.45 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 1 с его модификациями и Классического композита 1. На рисунке 3.46 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 2 с его модификациями и Классического композита 2. На рисунке 3.47 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 3 с его модификациями и Классического композита 3. На рисунке 3.48 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 4 и Классического композита 4. На рисунке 3.49 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Модифицированного композита 5 и Классического композита 5. На рисунке 3.50 представлены графики деформированного состояния в каждой из фаз Классического композита 6.

Согласно рисункам 3.45 – 3.48 а), б), в) деформированные состояния  $\varepsilon_{rr}(r)$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  и  $\varepsilon_{r\theta}(r)$  в волокне модифицированных композитов увеличиваются по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  и  $\varepsilon_{r\theta}(r)$  в волокне аналогичных классических композитов. Согласно рисункам 3.45 – 3.46 а), б), в), 3.47 а), в), 3.41 – 3.42 а), б), в) деформированные состояния в матрице  $\varepsilon_{rr}(r)$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  и  $\varepsilon_{r\theta}(r)$  модифицированных композитов уменьшаются по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  и  $\varepsilon_{r\theta}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов. Согласно рисунку 3.47 б) деформированное состояние  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  модифицированных композитов в матрице не сильно отличается от деформированного состоянием  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в матрице аналогичного классического композита, при этом вискеризация волокна вискерсами длиной 1 мкм приводит к росту деформированного состояния  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в матрице модифицированных композитов по сравнению с деформированным состоянием  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в матрице аналогичного классического композита.

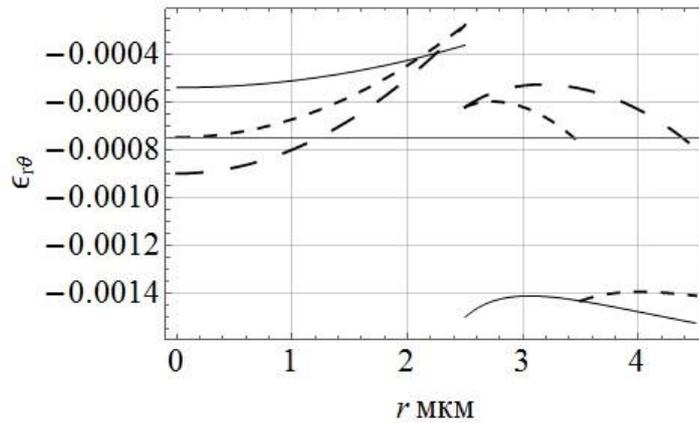
В таблице 3.10 приведены значения максимальных деформаций в каждой из фаз рассматриваемых композитов для случая чистого сдвига в направлении поперек волокон.



а)



б)

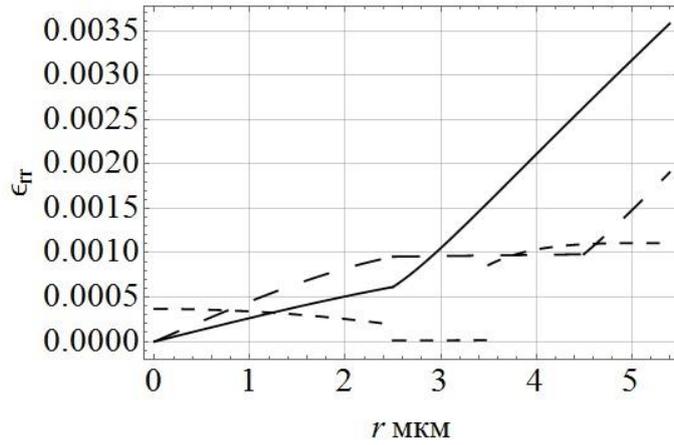


в)

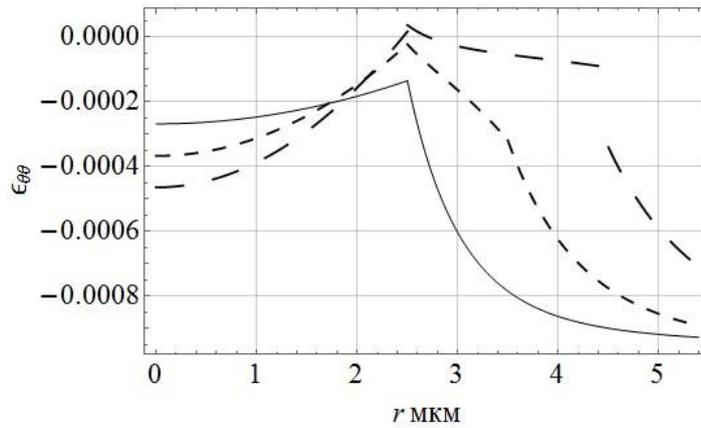
Рисунок 3.45 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвиговой деформации  $\varepsilon_{r\theta}(r)$  от радиуса

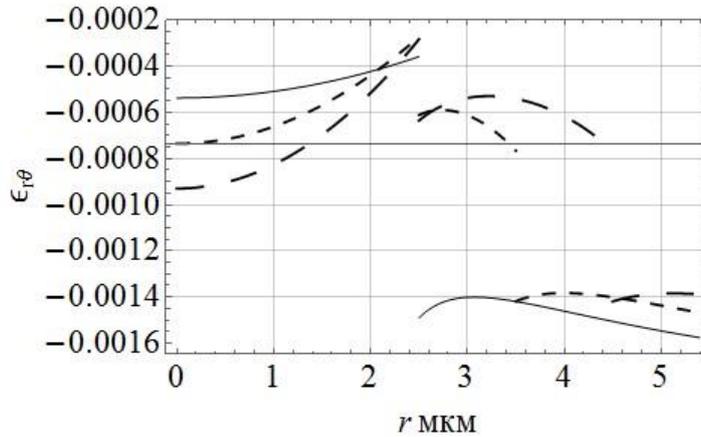
\_\_\_\_\_ - Классический композит 1, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 1 модификация 1.1.



а)



б)

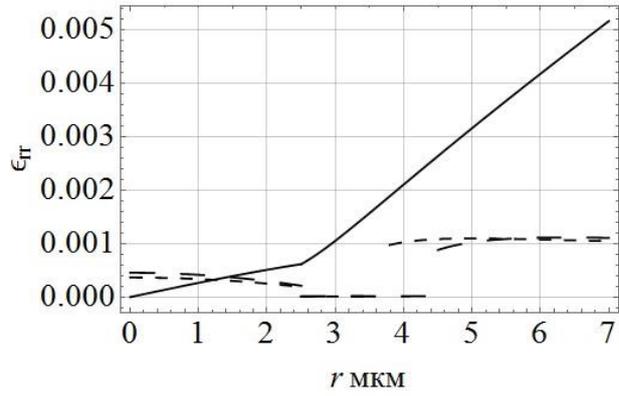


в)

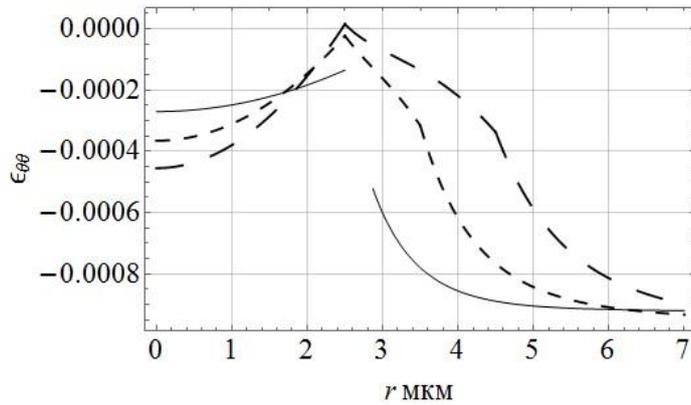
Рисунок 3.46 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвиговой деформации  $\varepsilon_{r\theta}(r)$  от радиуса

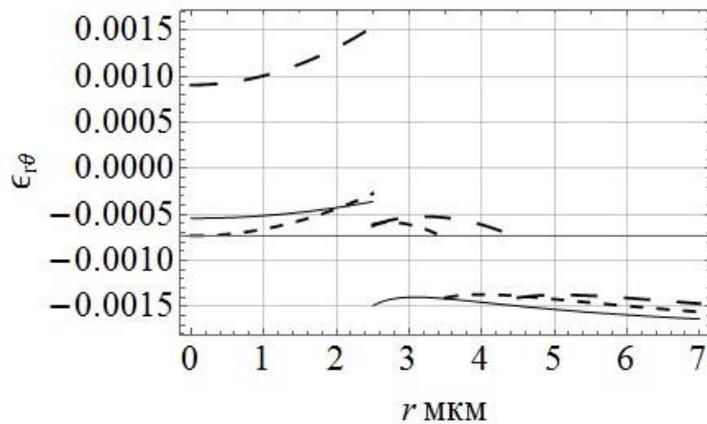
\_\_\_\_\_ - Классический композит 2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 2 модификация 2.1.



а)



б)

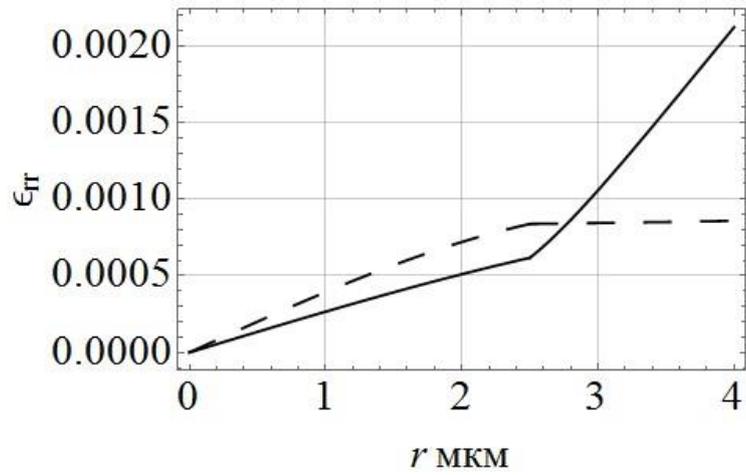


в)

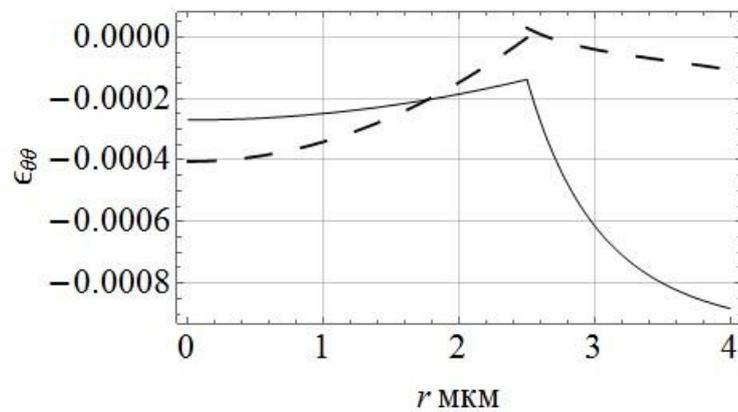
Рисунок 3.47 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвиговой деформации  $\varepsilon_{r\theta}(r)$  от радиуса

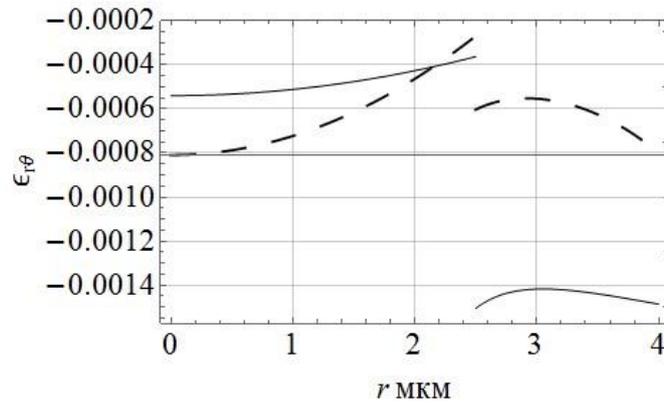
\_\_\_\_\_ - Классический композит 3, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.2, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 3 модификация 3.1.



а)



б)

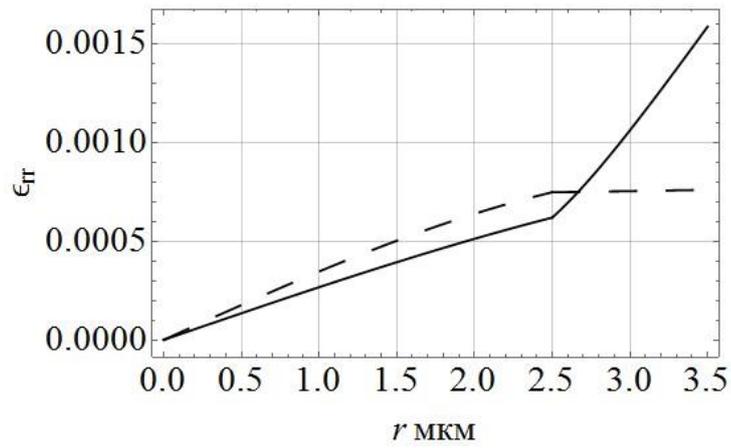


в)

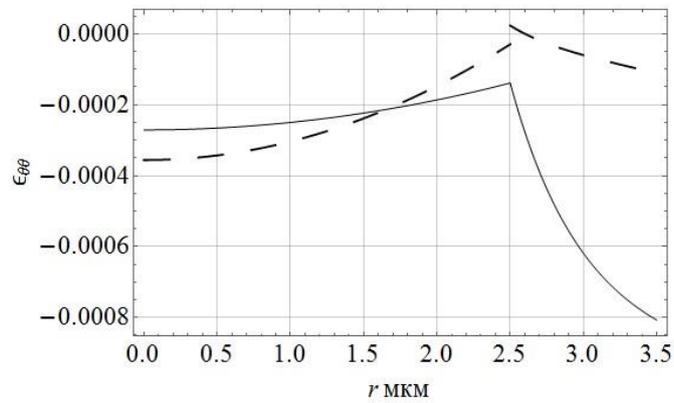
Рисунок 3.48 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвиговой деформации  $\varepsilon_{r\theta}(r)$  от радиуса

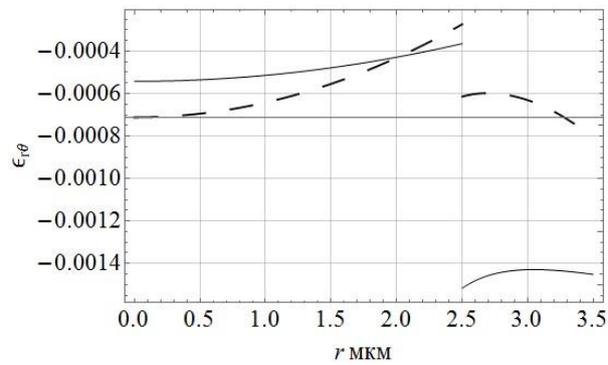
\_\_\_\_\_ - Классический композит 4, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 4



а)



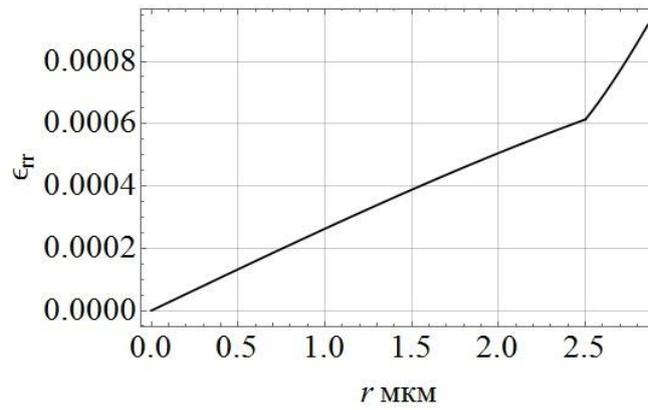
б)



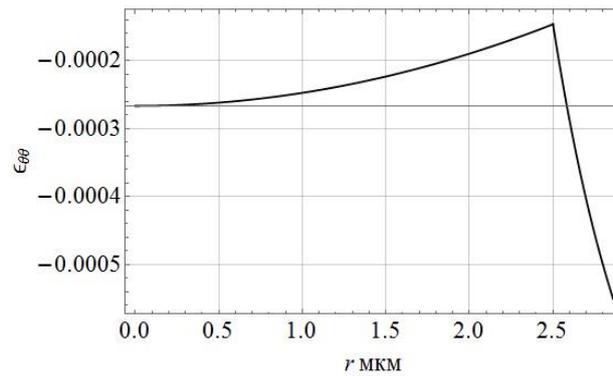
в)

Рисунок 3.49 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении вдоль волокон:

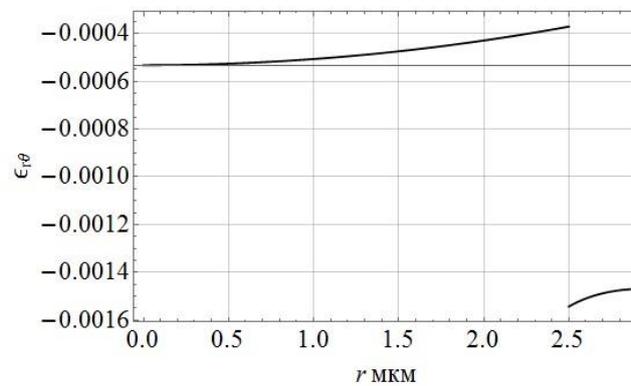
а) зависимость радиальной деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвиговой деформации  $\varepsilon_{r\theta}(r)$  от радиуса  
 \_\_\_\_\_ - Классический композит 5, \_\_\_\_\_ - модифицированный композит 5



а)



б)



в)

Рисунок 3.50 – Зависимость деформации от радиуса при всесторонней нагрузке в направлении вдоль волокон:

а) зависимость радиальной деформации  $\epsilon_{rr}(r)$  от радиуса, б) зависимость окружной деформации  $\epsilon_{\theta\theta}(r)$  от радиуса, в) зависимость сдвиговой деформации  $\epsilon_{r\theta}(r)$  от радиуса

\_\_\_\_\_ - Классический композит 6

Таблица 3.10 – Максимальные деформации в элементах структуры модифицированного композита с висеризованными волокнами для случая чистого сдвига в направлении поперек волокон

Наименование композита	Максимальная радиальная деформация $\varepsilon_{rr}(r)$			Максимальная окружная деформация $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$			Максимальная сдвиговая деформация $\varepsilon_{r\theta}(r)$		
	В волокне	В межф слое	В матрице	В волокне	В межф слое	В матрице	В волокне	В межф слое	В матрице
Модифицированный композит 1									
Мод. 1.1	0.00037	0.00014	0.0011	0.00037	0.00032	0.00078	0.000075	0.00077	0.0014
Мод. 1.2	0.00092	0.00095		0.00045	0.000099		0.0009	0.00079	
Класс. комп. 1	0.00062	0.0026		0.00027	0.00091		0.00054	0.0015	
Модифицированный композит 2									
Мод. 2.1	0.00037	0.00014	0.0011	0.00037	0.00032	0.00089	0.00074	0.00077	0.0015
Мод. 2.2	0.00095	0.00098	0.019	0.00046	0.00094	0.0007	0.00093	0.00077	0.0014
Класс. комп. 2	0.00061	0.0035		0.00027	0.00093		0.00054	0.0016	
Модифицированный композит 3									
Мод. 3.1	0.00036	0.00014	0.001	0.00036	0.00032	0.00093	0.00073	0.00076	0.0016
Мод. 3.2	0.00045	0.00014	0.0011	0.00045	0.00034	0.0009	0.0009	0.00076	0.0015
Класс. комп. 3	0.0006	0.0052		0.00027	0.00092		0.00054	0.0016	
Модифицированный композит 4									
	0.00084	0.00086		0.0004	0.00011		0.00081	0.0008	
Класс. комп. 4	0.00062	0.0016		0.00027	0.0008		0.00054	0.0015	
Модифицированный композит 5									
	0.00075	0.00076		0.00036	0.00011		0.00071	0.00081	
Класс. комп. 5	0.00062	0.0016		0.00027	0.0008		0.00054	0.0015	
Класс. комп. 6	0.00061	0.0009		0.00027	0.00055		0.00053	0.0015	

### 3.8 Выводы к главе 3

В главе 3 приведены графики зависимостей напряженно-деформированных состояний от размеров элементов структуры модифицированных композитов с вискеризованными волокнами для различных видов нагрузки: сдвига в направлении вдоль волокон, одноосного растяжения в направлении вдоль волокон, всесторонней нагрузке в направлении вдоль волокон, чистого сдвига в направлении поперек волокон.

Согласно графикам, представленным в разделе 3.3, для случая сдвига вдоль волокон, вискеризация композита с объемными содержаниями волокна 10, 17 и 24 % приводит к росту напряженного состояния  $\sigma_{rz}(r)$ , как в волокне, так и в матрице, и к росту напряженного состояния  $\sigma_{\theta z}(r)$  в волокне по сравнению с напряженным состоянием в аналогичном классическом композите. При тех же объемных содержаниях волокна, вискеризация композита приводит к уменьшению напряженного состояния  $\sigma_{\theta z}(r)$  в матрице по сравнению с напряженным состоянием  $\sigma_{\theta z}(r)$  в аналогичном классическом композите. Для предельных объемных содержаний волокна 30 % и 40 %, обусловленных длиной вискерсов, значительных изменений напряженных состояний  $\sigma_{rz}(r)$  и  $\sigma_{\theta z}(r)$  в волокне и матрице относительно напряженных состояний в аналогичных классических композитах не наблюдается. Кроме этого, в волокнах модифицированного и классического композитов максимальные напряженные состояния  $\sigma_{rz}(r)$  незначительно отличаются от напряженных состояний  $\sigma_{\theta z}(r)$ . В матрицах модифицированных и классических композитов максимальные напряжения  $\sigma_{rz}(r)$  несколько больше напряженных состояний  $\sigma_{\theta z}(r)$ . Деформированные состояния  $\varepsilon_{rz}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta z}(r)$  в волокне модифицированных композитов не отличаются от деформированных состояний аналогичных классических композитов, а те же деформированные состояния  $\varepsilon_{rz}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta z}(r)$  в матрице модифицированных композитов уменьшаются по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rz}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta z}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. Максимальные значения принимают деформированные состояния  $\varepsilon_{\theta z}(r)$  в матрицах модифицированных и классических композитов.

Что же касается одноосного растяжения, то напряженные состояния  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в волокне модифицированных композитов растут по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в волокне аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. В то время как напряженные состояния  $\sigma_{zz}(r)$  в волокне модифицированных композитов наоборот уменьшаются по сравнению с аналогичными напряжениями  $\sigma_{zz}(r)$  в

волокне классических композитов. А те же напряженные состояния  $\sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  и  $\sigma_{zz}(r)$  в матрице растут по сравнению с напряженными состояниями  $\sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  и  $\sigma_{zz}(r)$  в матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. Максимальные значения напряжений, а именно осевые напряжения  $\sigma_{zz}(r)$ , возникают в волокне композитных материалов. Деформированные состояния  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  как в волокне, так и в матрице модифицированных композитов растут по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в волокне и матрице аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. При этом в волокне возникают максимальные деформированные состояния.

Для случая всесторонней нагрузки напряженные состояния  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в волокне модифицированных композитов растут по сравнению напряженными состояниями  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в волокне аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. А максимальные напряженные состояния  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрицах модифицированных композитов с неопределенным объемным содержанием волокна (10 %, 17% и 24 % с длиной вискерсов 1 мкм) не отличаются от напряженных состояний  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрицах аналогичных классических композитов. В то время как напряженные состояния  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в матрицах модифицированных композитов с предельным содержанием волокна (24 % с длиной вискерсов 2 мкм, 30% и 40 %) значительно превосходят напряженные состояния  $\sigma_{rr}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  в аналогичных классических композитах. Максимальные значения в матрицах модифицированных композитов принимают радиальные напряжения  $\sigma_{rr}(r)$ . Деформированные состояния  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в волокне модифицированных композитов растут по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в волокне аналогичных классических композитов по мере увеличения длины вискерсов. А что касается деформированных состояний в матрице, то деформированные состояния  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  для композитов с предельным объемным содержанием волокна (24 % с длиной вискерсов 2 мкм, 30% и 40 %) уменьшаются по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  аналогичных классических композитов по мере увеличения объемного содержания волокна. Деформированные состояния  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  в матрицах модифицированных композитов с неопределенным объемным содержанием волокна (10 %, 17% и 24 % с длиной вискерсов 1 мкм) увеличиваются по сравнению с деформированными состояниями  $\varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$  аналогичных классических

композитов. Максимальные деформированные состояния, а именно максимальные радиальные деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$ , возникают в матрице композитов.

Для случая чистого сдвига в направлении поперек волокон, как для напряженных, так и для деформированных состояний сложно установить однозначные соотношения изменений напряжений и деформаций в элементах структуры в зависимости от изменения объемного содержания волокна и длины вискерсов. В композитах, подверженных таким видам нагрузений, максимальные значения принимают сдвиговые напряжения  $\sigma_{r\theta}(r)$ , как в волокнах, так и в матрице, аналогично в тех же элементах структуры композита максимальные значения принимают сдвиговые деформации  $\varepsilon_{r\theta}(r)$ .

Закон Гука (2.1) устанавливает линейную зависимость между деформированным и напряженным состоянием композита, при этом, согласно сказанному выше, характер изменения деформированного состояния в элементах структуры (увеличение/уменьшение) не обязательно совпадает с характером напряженного состояния в элементах структуры композита по мере варьирования объемного содержания волокна и длины вискерсов.

## 4 МЕТОД ОЦЕНКИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО КОМПОЗИТА

### 4.1 Основные положения метода

В предыдущих разделах кратко изложена методика оценки эффективных характеристик модифицированного композита. Также приводятся выражения, позволяющие определить напряженно-деформированное состояние в каждой из фаз композита и константы, входящие в эти выражения.

В данном разделе оценивается несущая способность модифицированных композитов в зависимости от длины нановолокон вискеризованного слоя, приводится сравнительный анализ несущей способности вискеризованных композитов по сравнению с традиционными волокнистыми композитами [66].

Рассматриваются четыре вида нагружения: нагружение композита чистым сдвигом в направлении волокон, одноосное нагружение композита вдоль волокна, всестороннее нагружение поперек волокон и нагружение чистым сдвигом в плоскости перпендикулярной волокнам. Для определенности считается, что во всех случаях нагружения задается единичная амплитуда нагрузки вне ячейки  $P=1$ .

Для оценки прочности определяются напряжения и деформации для каждого вида нагружения во всех фазах вискеризованного волокнистого композита, приводится сравнение максимальных расчетных значений напряжений и деформаций в каждой из фаз. Аналогичные расчеты проводятся и для традиционного волокнистого композита. На рисунке 4.1 представлены характерные диаграммы растяжения высокопрочных углеродных волокон и податливой эпоксидной матрицы. В дальнейшем, при оценке несущей способности композита будет использоваться деформационный критерий прочности по предельным деформациям для матрицы, что вполне соответствует рекомендациям, касающимся учета трансверсальной прочности в оценках общей прочности волокнистых композитов [67]. А для волокна будет использоваться критерий прочности по предельным напряжениям. Прочность композита для таких нагружений как сдвиг в направлении вдоль волокон, всесторонняя нагрузка в направлении поперек волокон и чистый сдвиг в направлении поперек волокон определяется матрицей, а для одноосного нагружения прочность композита определяется волокном.

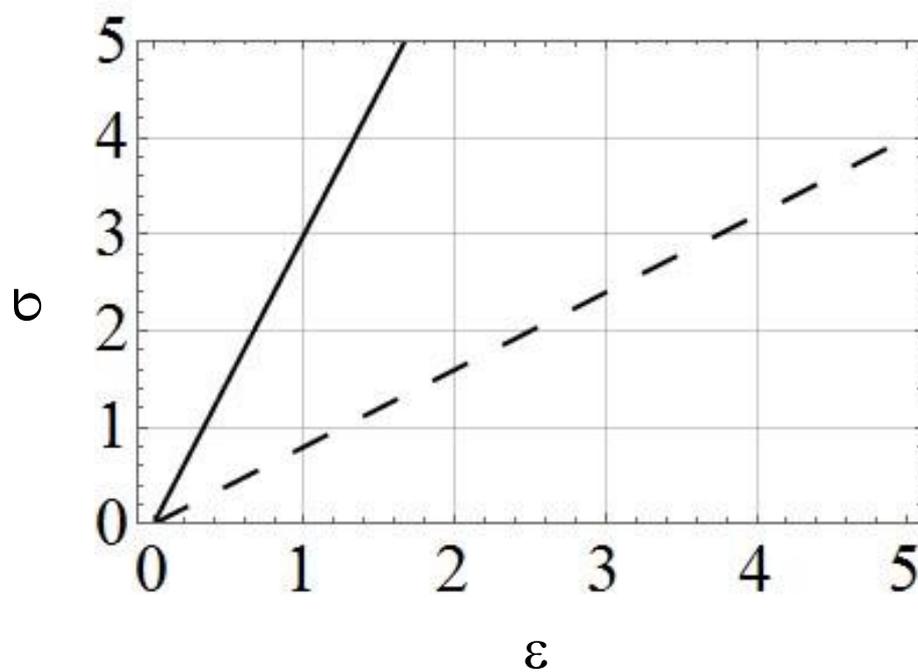


Рисунок 4.1 – Характерные диаграммы растяжения высокопрочных углеродных волокон \_\_\_\_\_ и податливой эпоксидной матрицы \_\_\_\_\_

Расчетные значения напряжений или деформаций, определяющие прочность модифицированного волокнистого композита с вискерами разной длины в зависимости от вида нагружения сравниваются с соответствующими значениями, найденными для традиционных композитов, находящимися в тех же условиях нагружения. При этом предполагается, что во всех случаях объемное содержание волокна в модифицированном и классическом композите одно и то же.

В таком случае, отношение максимальных расчетных деформаций матрицы для классического волокнистого композита  $[\varepsilon]$  к максимальным расчетным значениям деформаций в матрице модифицированного волокнистого композита  $\varepsilon$

$$n = \frac{[\varepsilon]}{\varepsilon}, \quad (4.1)$$

и, аналогично, отношение максимальных расчетных напряжений волокна для классического волокнистого композита  $[\sigma]$  к максимальным расчетным значениям напряжений в волокне модифицированного волокнистого композита  $\sigma$

$$n = \frac{[\sigma]}{\sigma}, \quad (4.2)$$

являются сравнительными характеристиками несущей способности модифицированного композита. Величина  $n$ , в случае  $n > 1$  показывает во сколько раз может быть увеличена действующая на модифицированный композит нагрузка по сравнению с действующей

нагрузкой на классический композит. Другими словами предложенный критерий позволяет определить во сколько раз большую нагрузку может выдержать модифицированный композит по сравнению с традиционным волокнистым композитом при том же самом объемном содержании волокон.

Обратим внимание на то, что алгоритм расчета эффективных свойств и полей напряжений и деформаций предполагает, что композит с эффективными свойствами, т.е. вдали от включений, подвергается воздействию однородной деформации  $\varepsilon_0$ . При этом, для определения полей деформаций и напряжений предлагается использовать соотношения, приведенные в подразделах 2.5-2.9, т.е. с точностью до величины  $\varepsilon_0$ . В то же время для оценки несущей способности рассматриваемые волокнистые композиты нагружаются одной и той же нагрузкой (для разных типов нагружения) с единичной амплитудой. Поэтому для сохранения эквивалентности условий силового нагружения для различных композитов с различной эффективной жесткостью предлагается после определения эффективных жесткостей пересчитывать однородные деформации по формуле

$$\varepsilon_0 = P/E, \quad (4.3)$$

где  $P$  – нагрузка, действующая на ячейку композита ( $P=1$ ),  $E$  в зависимости от вида нагрузки представляет собой эффективный модуль Юнга  $E_{33}^{N+1}$ , эффективный модуль продольного сдвига  $\mu_{23}^{N+1}$ , эффективный объемный модуль плоской деформации  $K_{12}^{N+1}$  или эффективный поперечный модуль сдвига  $\mu_{12}^{N+1}$ .

Заметим также, что эффективные модули зависят от объемного содержания волокна и длины вискерсов. Поэтому следует учитывать, что при заданном значении длины вискерсов объемное содержание волокна не превышает значение, рассчитанное по формуле (3.2).

#### 4.2 Алгоритм оценки несущей способности модифицированного композита

В соответствии со сказанным в разделе 4.1 приведем алгоритм расчета:

- 1) Определяется максимальное объемное содержание волокна в ячейке по формуле (3.2);
- 2) Находятся значения эффективных модулей (Разделы 2.5-2.9);
- 3) Для каждого случая нагружения и для заданного объемного содержания волокон находится величина  $\varepsilon_0$  (см. (4.3)), которая обеспечивает эквивалентность силового нагружения; находятся поля деформаций и определяются максимальные значения компонент деформаций, которые определяют прочность матрицы;
- 4) Рассчитывается коэффициент, определяющий несущую способность по формулам (4.1) – (4.2).

### 4.3 Анализ несущей способности модифицированного композита

Согласно предложенному методу, несущая способность модифицированного композита, в зависимости от вида нагружения, определяется либо как отношение максимальных расчетных значений деформаций в матрице классического волокнистого композита  $[\varepsilon]$  к максимальным расчетным значениям деформаций в матрице модифицированного волокнистого композита  $\varepsilon$  (4.1), либо как отношение максимальных расчетных значений напряжений в волокне классического волокнистого композита  $[\sigma]$  к максимальным расчетным значениям напряжений в матрице модифицированного композита  $\sigma$  (4.2).

В разделе 3 представлены графики деформированных состояний в матрице и напряженных состояний в волокне различных модифицированных композитов в зависимости от радиуса при различных видах нагружения. При построении графиков напряженного и деформированного состояния в матрице композитов принималось, что заданное вне ячейки поле перемещения вдоль волокон соответствует однородной деформации, пересчитанной по формуле  $\varepsilon_0 = P/E$ , обеспечивающей сохранение эквивалентности условий силового нагружения для различных композитов с различной эффективной жесткостью.

Из графиков, представленных в разделе 3, были определены максимальные значения компонент деформаций и напряжений в соответствующих элементах структуры композитов различных модификаций для каждого вида нагружения и занесены в таблицы 3.3 – 3.10. Согласно данным, занесенным в таблицы 3.3 – 3.10, для случая сдвига в направлении вдоль волокон, максимальные значения принимают сдвиговые деформации  $\varepsilon_{\theta z}(r)$ , для случая одноосного растяжения вдоль волокон - осевые напряжения  $\sigma_{zz}(r)$ , для случая всесторонней нагрузки в направлении поперек волокон - радиальные деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$ , для случая чистого сдвига в направлении поперек волокон - сдвиговые деформации  $\varepsilon_{r\theta}(r)$ . На основе найденных значений максимальных деформаций или напряжений (в зависимости от вида нагружения) были сформированы таблицы, каждая из которых соответствует определенному виду нагружения (Таблицы 4.1 – 4.4). Для наглядности в таблицы 4.1 – 4.4 из таблицы 3.2 продублированы значения соответствующих виду нагружения эффективных модулей. Также в таблицы 4.1-4.4 внесены, рассчитанные по формулам (4.1)-(4.2), коэффициенты, определяющие несущую способность, при этом несущая способность классического композита принята равной единице.

Таблица 4.1 – Несущая способность модифицированного композита для случая сдвига  
вдоль волокон

Наименование Композита	Эффективный модуль продольного сдвига $\mu_{23}^{N+1}$ , МПа	Максимальная деформация $\varepsilon_{\theta_z}(r)$ (расчетное значение)	Коэффициенты, определяющие несущую способность
Модифицированный композит 1			
Модификация 1.1	2609	0.0017	1.3
Модификация 1.2	3570	0.0013	1.7
Классический композит 1	2046	0.0022	1
Модифицированный композит 2			
Модификация 2.1	2001	0.0027	1.19
Модификация 2.2	2425	0.0022	1.45
Классический композит 2	1708	0.0032	1
Модифицированный композит 3			
Модификация 3.1	1593	0.0044	1.1
Модификация 3.2	1772	0.0039	1.23
Классический композит 3	1454	0.0048	1
Модифицированный композит 4	4152	0.00096	1.77
Классический композит 4	2413	0.0017	1
Модифицированный композит 5	5243	0.00067	1.64
Классический композит 5	3128	0.0011	1
Классический композит 6	6302	0.00098 (сдвиговая деформация $\varepsilon_{rz}(r)$ )	1

Таблица 4.2 - Несущая способность модифицированного композита для случая одноосного растяжения вдоль волокон

Наименование Композита	Эффективный модуль Юнга $E_{33}^{N+1}$ , МПа	Максимальное напряжение $\sigma_{zz}(r)$ (расчетное значение)	Коэффициенты, определяющие несущую способность
Модифицированный композит 1			
Модификация 1.1	84044	4.86	1.11
Модификация 1.2	120283	3.23	1.67
Классический композит 1	76477	5.4	1
Модифицированный композит 2			
Модификация 2.1	60000	6.8	1.13
Модификация 2.2	84764	4.38	1.75
Классический композит 2	54029	7.66	1
Модифицированный композит 3			
Модификация 3.1	37472	10.85	1.14
Модификация 3.2	52078	6.84	1.81
Классический композит 3	33369	12.4	1
Модифицированный композит 4	116191	3.48	1.24
Классический композит 4	96000	4.31	1
Модифицированный композит 5	134884	3.04	1.09
Классический композит 5	124449	3.32	1
Классический композит 6	184875	2.24	1

Таблица 4.3 – Несущая способность модифицированного композита для случая всесторонней нагрузки в направлении поперек волокон

Наименование Композита	Эффективный объемный модуль плоской деформации $K_{12}^{N+1}$ , МПа	Максимальная деформация $\varepsilon_{rr}(r)$ (расчетное значение)	Коэффициенты, определяющие несущую способность
Модифицированный композит 1			
Модификация 1.1	4823	0.00082	0.89
Модификация 1.2	14619	0.00057	1.28
Классический композит 1	3526	0.00073	1
Модифицированный композит 2			
Модификация 2.1	3887	0.00076	0.92
Модификация 2.2	5538	0.00086	0.81
Классический композит 2	3285	0.0007	1
Модифицированный композит 3			
Модификация 3.1	3368	0.0007	0.97
Модификация 3.2	3859	0.00076	0.89
Классический композит 3	3102	0.00068	1
Модифицированный композит 4	14706	0.00052	1.44
Классический композит 4	3784	0.00075	1
Модифицированный композит 5	14808	0.00046	1.72
Классический композит 5	4282	0.00079	1
Классический композит 6	6385	0.00091 (окружная деформация $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$ )	1

Таблица 4.4 – Несущая способность модифицированного композита для случая чистого сдвига поперек волокон

Наименование Композита	Эффективный модуль поперечного сдвига $\mu_{12}^{N+1}$ , МПа	Максимальная деформация $\varepsilon_{r\theta}(r)$ (расчетное значение)	Коэффициенты, определяющие несущую способность
Модифицированный композит 1			
Модификация 1.1	2005	0.0014	1.07
Модификация 1.2	4015	0.00079	1.9
Классический композит 1	1492	0.0015	1
Модифицированный композит 2			
Модификация 2.1	1636	0.0015	1.07
Модификация 2.2	2267	0.0014	1.14
Классический композит 2	1371	0.0016	1
Модифицированный композит 3			
Модификация 3.1	1401	0.0016	1
Модификация 3.2	1628	0.0015	1.07
Классический композит 3	1276	0.0016	1
Модифицированный композит 4			
Модификация 4.1	3984	0.0008	1.88
Классический композит 4	1617	0.0015	1
Модифицированный композит 5			
Модификация 5.1	3975	0.00081	1.85
Классический композит 5	1843	0.0015	1
Модифицированный композит 6			
Модификация 6.1	2643	0.0015	1

#### 4.4 О приближенной оценке прочности межфазного слоя по сравнению с прочностью матрицы

Для приближенной оценки прочностных свойств межфазного слоя, образованного в окрестности жесткого базового волокна сначала рассмотрим модель композита модифицированного наноразмерными объектами. Мы полагаем, что именно слой такого модифицированного композита определяет свойства вискеризованного слоя, образованного углеродным нановолокнами. Для больших объемных концентраций нановолокон, которые имеют место для Fussy системы, именно модифицированный композит определяет свойства «нанолеса, так как он фактически заменяет собой свойства матрицы между нановолокнами. Для приближенной оценки того, что происходит в окрестности чрезвычайно жестких нановключений, рассмотрим тестовую задачу для включения в матрице, которая соответствует нановолокну в матрице. Используем градиентную упругость, которая позволяет учесть эффекты масштаба. Такой подход в общем случае приводит к разрешающему уравнению в перемещениях с оператором, который на два порядка выше, чем оператор в классической теории. Повышенный порядок разрешающего уравнения позволяет обеспечить выполнения более гладких краевых условий на границе контакта фаз и в результате учесть специальную структуру, возникающую около нановключений.

Рассмотрим прямоугольную область с включением в виде эллипса (Рисунок 4.2), расположенным произвольным образом внутри этой области. Для определения полей напряжений в прямоугольной области с включениями, решается задача, соответствующая, так называемому, случаю двойной плоской задачи. Такая упрощенная постановка вполне подходит для волокнистой системы, так как волокнистый материал можно считать недеформируемым в направлении волокон. В задаче полагаются равными нулю две компоненты перемещений. В результате задача сводится к решению скалярного, а не векторного уравнения равновесия повышенного порядка. Как известно [66-68], разрешающее уравнение в градиентной теории имеет оператор, который является произведением оператора Ламе классической теории и обобщенного оператора Гельмгольца, который имеет только экспоненциальные решения. Они определяют локализованное градиентное поле около включений. В работах [66-68] соответствующая краевая задача формулируется с использованием вариационного подхода, которая позволяет всегда получить согласованный спектр краевых условий. В данном разделе задача решена численно с использованием приближенного алгоритма для различных расположений эллиптических включений.

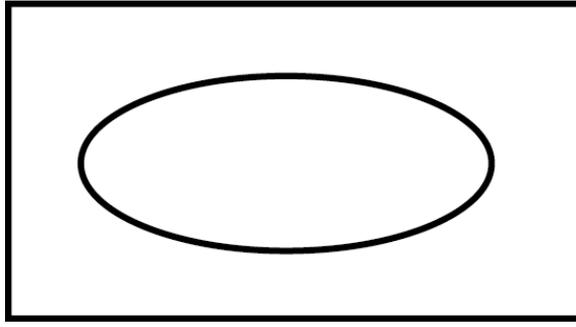


Рисунок 4.2 – Прямоугольная область с включением в виде эллипса

Вариационная постановка линейной градиентной теории упругости в перемещениях для изотропных материалов имеет вид

$$\delta E = 0, \quad E = U - A,$$

$$U = \frac{1}{2} \int C_{ijkl} R_{i,j} R_{k,l} dV + \frac{1}{2} \int C_{ijklmn} R_{i,jk} R_{l,mn} dV,$$

$$A = \int f_i R_i dV + \int (t_i + q_i R_{i,j} n_j) dS.$$

В общем случае вариационная постановка приводит к следующим краевым условиям для градиентной теории [67]

$$\sigma_{ij,j} - \mu_{ijk,k} + f_i = 0,$$

$$\mu_{ijk} n_j n_k = q_i, \quad \sigma_{ij} n_j - \mu_{ijk,k} n_j - (\mu_{ijk} n_k)_{,j} + (\mu_{ijk} n_j n_k)_{,l} n_l = t_i. \quad (4.4)$$

Где,  $\sigma_{ij}$  тензор напряжений Коши,  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} R_{k,l}$ ,  $\mu_{ijk}$  - тензор моментных напряжений,  $\mu_{ijk} = C_{ijklmn} R_{l,mn}$ ,  $n_j$  - нормаль к поверхности

Если на части поверхности упругого тела заданы поля перемещений и поворотов  $\bar{R}_i$ ,  $\overline{\partial R_i / \partial n}$ , то статические граничные условия (4.4) должны быть дополнены кинематическими краевыми условиями для вектора перемещений  $R_i$  и вектора нормальных первых производных  $\dot{R}_i$  ( $\dot{R}_i = \partial R_i / \partial n = n_j \partial R_i / \partial x_j$ ):

$$R_i = \bar{R}_i, \quad R_{i,j} n_j = \overline{\partial R_i / \partial n}.$$

Мы будем рассматривать вариант однопараметрической градиентной модели [69], в которой плотность градиентной энергии деформации определяется через дополнительный масштабный параметр  $C$  (когезионный модуль) по формуле:

$$\bar{U} = (1/2) \left[ C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + (L_{ij} R_j)(L_{ij} R_j) / C \right].$$

Для этой модели система разрешающих уравнений (уравнений равновесия) имеет вид:

$$-\frac{1}{C}(L_{ij}R_j - C\delta_{ij})L_{jk}R_k + f_i = 0.$$

Показано [68], что общее поле перемещений плоской задачи  $\vec{R}$  градиентной части решения (когезии) может быть представлено в виде суммы двух составляющих: классического поля  $\vec{U}$ , удовлетворяющего уравнению плоской теории упругости, и когезионного поля  $\vec{u}$ , удовлетворяющего уравнению когезионного поля:

$$\vec{R} = \vec{U} - \vec{u}, \quad L(\vec{U}) = 0, \quad L_c(\vec{u}) = 0.$$

В вариационной постановке плоской задаче граничные условия имеют вид:

$$[\vec{R}] = \left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial n} \right] = [\vec{M}_{(n)}(\vec{R})] = [\vec{p}(\vec{U})] = 0. \quad (4.5)$$

где выражения для сил и моментов записываются через перемещения в явной форме при реализации вариационного подхода.

Условия (4.5) обеспечивают непрерывность перемещений  $\vec{R}$  и углов поворота  $\partial \vec{R} / \partial n$ , а также непрерывность поверхностных сил  $\vec{p}$  и вектора моментов  $\vec{M}$ .

Для оценки прочности межфазного слоя нами используется упрощенный вариант градиентной однопараметрической модели для двойной плоской задачи с включением, согласно которому, будем полагать, что только одна компонента перемещений не равна нулю. В этой задаче требуется найти функцию  $R$ , удовлетворяющую уравнению:

$$-\frac{1}{C}L L_c R = 0, \quad L = L_c|_{C=0}, \quad \mathcal{L} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C,$$

с условиями сопряжения специального вида на границе включения.

Решение задачи строится в два этапа из двух функций,  $R = U - u$ . На первом этапе решается классическая задача ( $\mathcal{L}U = 0$ ) с граничными условиями на границе включения и пластинки следующего вида:

$$[U] = 0, \quad \left[ \mu \frac{\partial U}{\partial n} + (\mu + \lambda) \frac{\partial U}{\partial x} \right] = 0,$$

$$U(\pm L, y) = \pm 1, \quad 0 < y < H, \quad \frac{\partial U}{\partial n}(x, 0) = \frac{\partial U}{\partial n}(x, H) = 0, \quad -L < x < L,$$

где  $[U] = U_f - U_m$ ,  $U_{f,m}$  – решение во включении и матрице,  $\mu, \lambda$  – материальные константы (коэффициенты Ламе),  $C$  – параметр когезионного поля,  $L, H$  – соответственно полуширина и высота рассматриваемой прямоугольной области с включением.

На втором этапе находится перемещение когезионного поля  $u$  как решение неклассической задачи ( $\mathcal{L}_C u = 0$ ) с граничными условиями следующего вида:

$$[u] = \frac{[\mu^*]}{\langle \mu^* \rangle} \langle u \rangle, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} \right] = 0,$$

$$u(\pm L, y) = \pm 1, \quad 0 < y < H, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial n}(x, H) = 0, \quad -L < x < L,$$

где  $\langle u \rangle = u_f + u_m$ ,  $\langle \mu^* \rangle = \mu_f + \mu_m$ ,  $u_{f,m}$  – решение во включении и в матрице,  $C_{f,m}$  – когезионный параметр во включении и в матрице,  $\mu_{f,m}$  – модуль сдвига во включении и в матрице.

В двойной плоской задаче отличны от нуля две компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_x = (2\mu + \lambda) \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \mu \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Было проведено исследование поля напряжений  $\sigma_x$  в зависимости от углового расположения эллипса в прямоугольной области, и его сопоставление с полем напряжений  $\sigma_x(U)$  классической задачи. Рассматривается задача растяжения вдоль оси  $OX$

Численное моделирование было проведено с помощью численно-аналитического метода блоков, разработанного для градиентной теории Волковым-Богородским ДБ [68, 70, 71].

Вычисления были выполнены при следующих предположениях:  $L = 1$ ,  $H = 1.2$ ,  $\nu_f = \nu_m = 0.3$ ,  $E_f/E_m = 3$ ,  $C_f/\mu_f = C_m/\mu_m = 100$ . На рисунке 4.3 представлено распределение линий уровня напряжений с шагом  $0.7\mu_m$  при частичном повороте включения: главная ось эллипса  $a = 1.4\varepsilon$ , малая ось эллипса  $b = 0.5\varepsilon$ , где  $\varepsilon = 1.2$ ; угол  $\theta$  между главной осью и осью ординат равен  $\theta = (0^\circ, 21^\circ, 36^\circ)$ .

Далее рассчитывалась энергия на представительном элементе прямоугольной области с включением в виде интеграла:

$$E(G) = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) R ds = \int_G \frac{1}{2} \left[ (2\mu + \lambda) \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 - C u R \right] dx dy$$

$$2e(R) = \left[ (2\mu + \lambda) \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 - C u R \right]$$

где  $p_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$  – компонента вектора поверхностных сил,  $u$  – перемещение когезионного поля (решение задачи второго этапа). Имеет интерес величина аккомодации энергии  $\eta = E_f/E_m$  равная отношению энергии во включении к энергии в матрице.

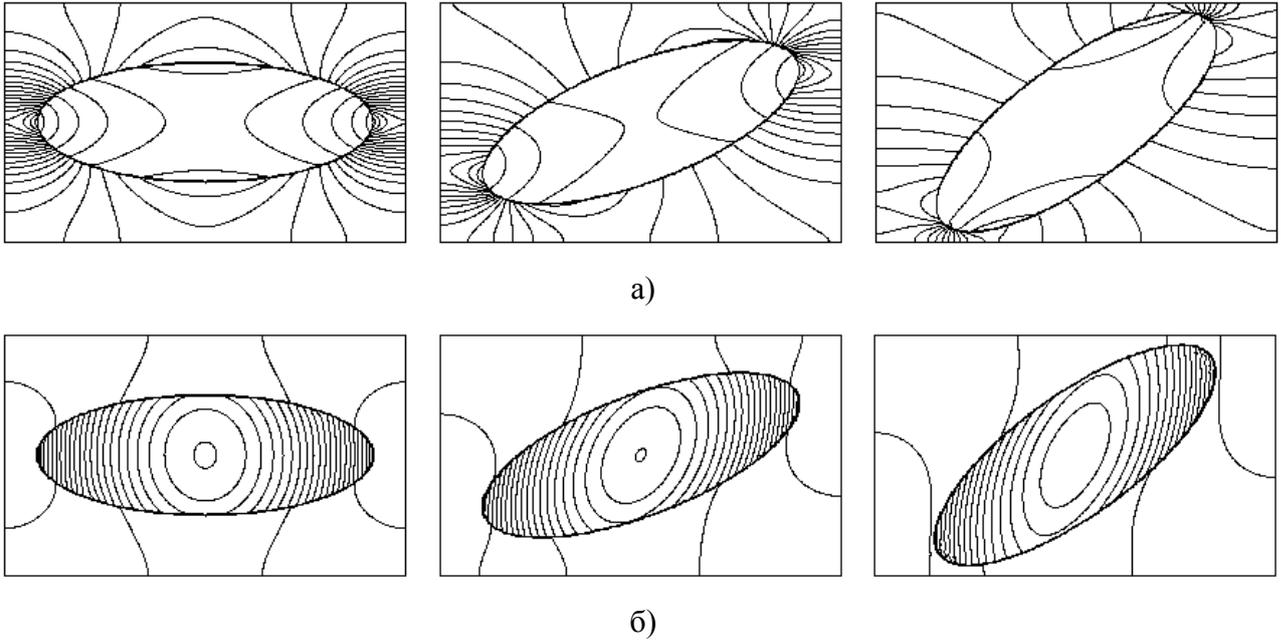


Рисунок 4.3 - Примеры распределения  $\sigma_x$  при частичном повороте включения  
а) в классической задаче, б) в полной задаче

Соответствующие значения энергий вычисляются путем интегрирования по областям, занятым включением и матрицей. Отметим, что под знаком интеграла по области стоит величина локальной энергии  $e(R)$ .

Ниже даны примеры распределения локальной энергии при частичном повороте включения (Рисунок 4.4) и график изменения коэффициента аккомодации в зависимости от угла поворота включения (Рисунок 4.5). На рисунке 4.4 приняты те же предположения, что и на рисунке 4.3; линии уровня распределения энергии на рисунке 4.4 представлены с шагом  $0.8\mu_m$ .

Решение полной задачи позволяет комплексно оценить характер распределения напряжений и локальных энергий, как в волокне, так и в матрице. Согласно рисункам 4.3-4.4 слабая зона – матрица разгружается, при этом догружается жесткое включение, особенно в окрестности границ контакта.

Можно утверждать на основе анализа плотности энергии деформации, что за счет градиентных пограничных эффектов имеет место перераспределение этой величины так, что слабая фаза разгружается.

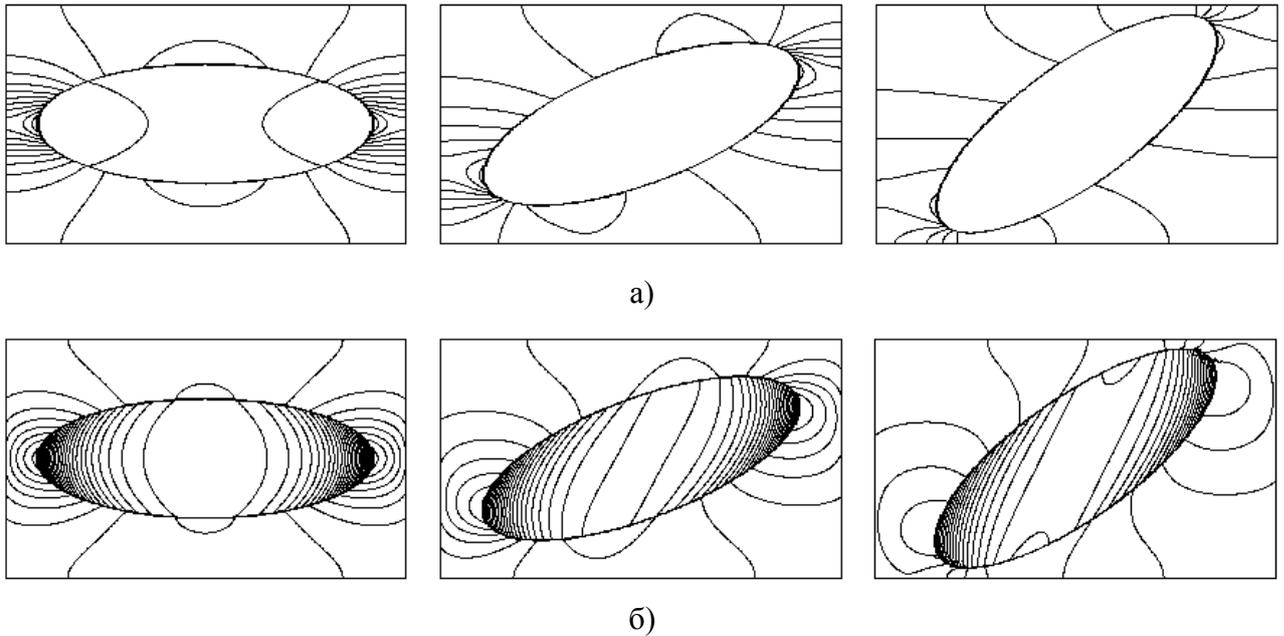


Рисунок 4.4 - Примеры распределения локальной энергии  $\varepsilon(U)$  и  $\varepsilon(R)$  при частичном повороте включения а) в классической задаче, б) в полной задаче

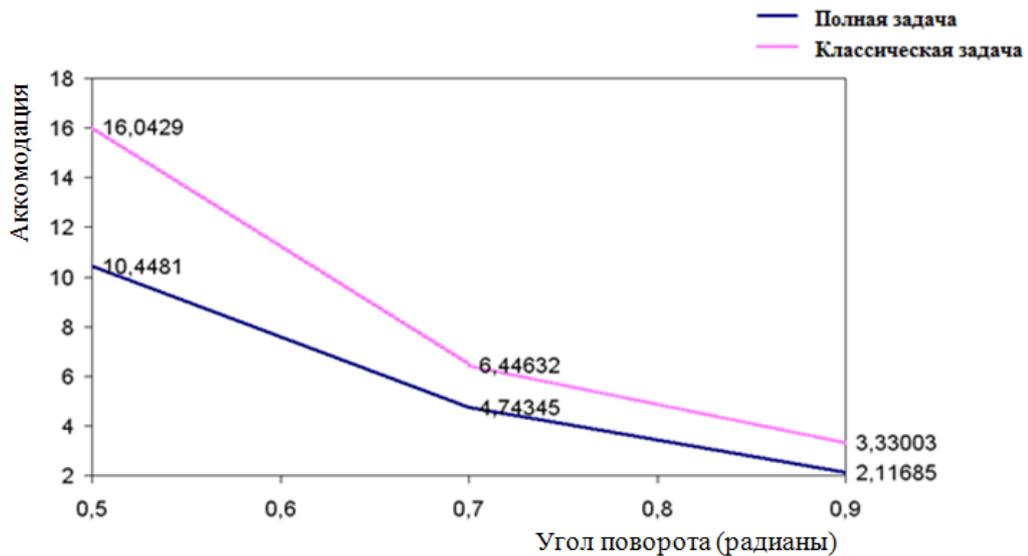


Рисунок 4.5 - Зависимость коэффициента аккомодации  $\eta$  от угла поворота включений относительно оси OX

Судя по графику рисунка 4.5 эффект усиления относительно квадрата предельных напряжений может достигать величины 1.6. Таким образом, проведенный качественный анализ дает основание утверждать, что, в силу эффекта усиления в межфазной волокнистой наноструктуре, прочность структуры, образованной вискерсами и матрицей, весьма высока по сравнению с прочностью матрицы. Такой анализ позволяет считать, что в рассматриваемой многослойной системе именно матрица ответственна за разрушение, а проводимая в работе

оценка прочности идет в запас.

Параметр аккомодации дает приблизительную качественную оценку эффекта усиления, которое имеет место для композита с жесткими малоразмерными включениями. Мы переносим эти качественные оценки и к волокнистой наноструктуре из углеродных нановолокон, выращенных на поверхности базового волокна.

Кроме этого, в работах [66, 67] отмечается, что учет масштабных эффектов позволяет установить эффект перераспределения плотностей энергии в окрестности границ фаз. Показано, что и при решении в более полной, точной постановке плоской задачи имеет место дополнительное нагружение жесткой фазы. При этом фаза с меньшей жесткостью разгружается (Рисунок 4.5). Плотность энергии при этом является фактически энергетической мерой прочности (критерием прочности).

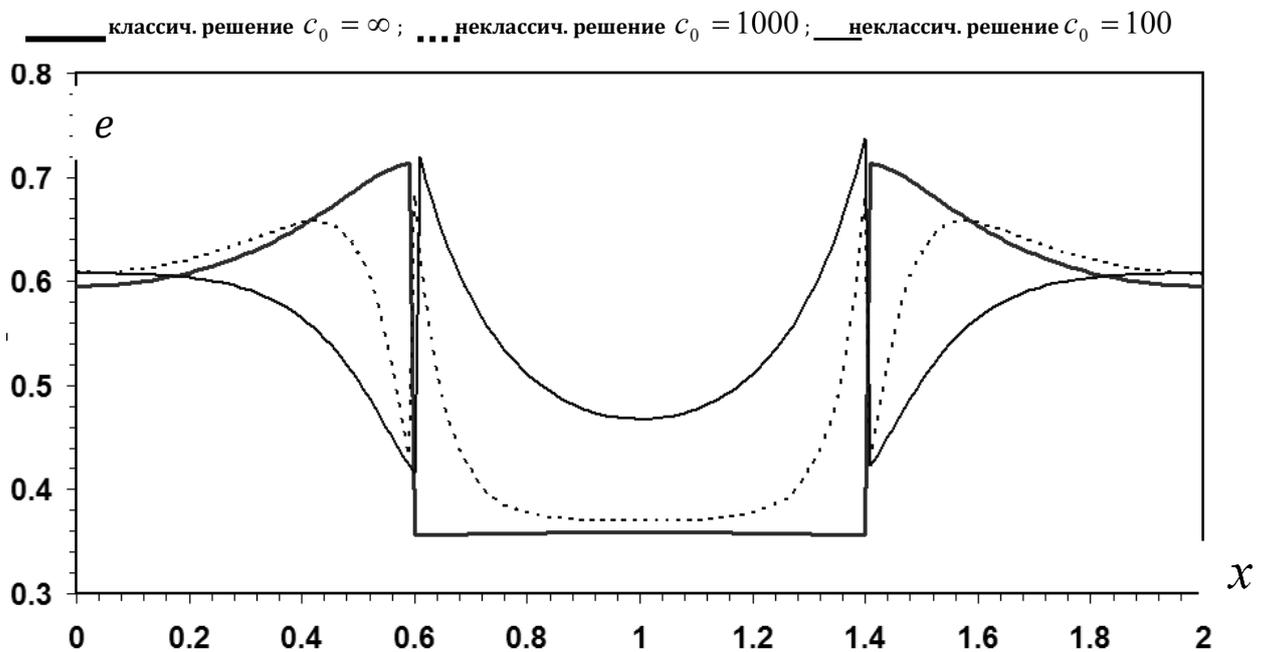


Рисунок 4.5 – Распределение плотности энергии  $e$  в элементах структуры в зависимости от когезионного параметра  $c_0$

Решения задачи (Рисунок 4.3-4.4) были построены с использованием программной реализации блочного аналитико-численного метода для моделирования неклассической среды с эллиптическим включением, разработанной Д.Б. Волковым-Богородским [68-70].

#### 4.5 Выводы к главе 4

Сравнение несущих способностей модифицированных композитов с классическими композитами при одинаковом объемном содержании волокна показало, что модификация волокнистых композитов посредством выращивания вискерсов на поверхности волокна преимущественно приводит к увеличению несущей способности модифицированного композита без потери его эффективных свойств.

Вискеризованные композиты в случаях сдвига вдоль волокон и чистого сдвига поперек волокон при достаточно больших объемных содержаниях волокна выдерживают большую нагрузку без разрушения, чем классические волокнистые композиты. Особенно такой эффект вискеризации наблюдается при предельных объемных содержаниях волокон, обусловленных длиной вискерсов - соответственно на 77 % и 88 %, при объемном содержании волокна 30 % (Модифицированный композит 4). При дальнейшем увеличении объемного содержания волокна до 40 % в случаях сдвига вдоль волокон и чистого сдвига поперек волокон вискеризованные композиты выдерживают большую нагрузку без разрушения, чем традиционные волокнистые композиты соответственно на 64 % и 85 %, т.е. эффект от вискеризации волокон начинает снижаться. Для модифицированных композитов с вискеризованными волокнами, в которых межфазный вискеризованный слой не заполняет весь объем ячейки, т.е. для композитов, состоящих из трех фаз: 1) волокно, 2) межфазный модифицированный слой и 3) матрица, для случая сдвига поперек волокон наблюдаются незначительные увеличения несущих способностей – порядка 7 – 14 %, и чем меньше объемное содержание волокна и меньше длина вискерсов, тем меньше увеличение несущей способности модифицированного композита. При сдвиге вдоль волокон модифицированных композитов, у которых межфазный вискеризованный слой не заполняет весь объем ячейки, в целом, изменение несущей способности носит такой же характер, как и при чистом сдвиге поперек волокон. При некотором минимальном объемном содержании волокна (менее 10 %) прогнозируется, что несущая способность при сдвиге вдоль волокна и чистом сдвиге поперек волокна модифицированного композита не будет превышать несущую способность аналогичного классического композита.

В случаях одноосного растяжения вискеризованные композиты выдерживают большую нагрузку без разрушения, чем аналогичные традиционные волокнистые композиты, однако эта разница преимущественно незначительна (1 – 6 %). Скачок в увеличении несущей способности модифицированного композита с вискеризованными волокнами по сравнению с классическим композитом происходит при малом объемном содержании волокна (менее 10 %), а именно, несущая способность увеличивается на 64 %.

Для случая всесторонней нагрузки поперек волокон композитов, образованных тремя фазами: 1) волокно, 2) межфазный слой и 3) матрица наблюдается уменьшение несущей способности по сравнению с классическими волокнистыми композитами вплоть до 11 %. Прогнозируется, что при уменьшении объемного содержания волокна несущая способность модифицированного композита выровняется с несущей способностью классического композита. При такой же нагрузке модифицированных композитов с предельным объемным содержанием волокна наблюдается значительный рост несущей способности модифицированного композита по сравнению с классическим, при чем, чем больше объемное содержание волокна в композите, тем большую нагрузку модифицированный композит может выдержать. Так, при предельном объемном содержании волокна 40 % модифицированный композит с вискеризованными волокнами выдерживает нагрузку большую на 72 % чем аналогичный классический композит.

Приведенные выше численные значения увеличения несущей способности модифицированных композитов по сравнению с классическими композитами несколько занижены для композитов, образованных лишь волокном и межфазным вискеризованным слоем. Это связано с тем, что расчет несущей способности модифицированного композита рассчитывался относительно матрицы, в то время как, в связи с высокой плотностью расположения вискерсов в межфазном слое, межфазный слой способен выдерживать нагрузки значительно превышающий допустимые нагрузки для матрицы.

Эти выводы о возможности повышения прочности вискеризованных волокнистых композитов качественно соответствуют результатам экспериментальных исследований, приведенных в работах [10-13].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решена актуальная научная задача оценки прочности модифицированных композитов с вискеризованными волокнами.

Наиболее существенные научные и прикладные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1 На основе метода трех фаз получены эффективные характеристики композита и определены напряженно-деформированные состояния в элементах структуры модифицированного композита с вискеризованными волокнами при различных базовых видах нагружения: чистый сдвиг в направлении вдоль волокон, одноосное растяжение в направлении вдоль волокон, всесторонняя нагрузка в направлении поперек волокон, чистый сдвиг в направлении поперек волокон. При определении эффективных характеристик разработан метод, который позволяет обойти необходимость решения громоздкой нелинейной системы уравнений, возникающей при использовании метода трех фаз для решения задачи нагружения композита поперек волокон, и сводящийся к решению квадратного уравнения.

2 Предложен метод оценки прочности модифицированных композитов с вискеризованными волокнами учитывающий достижение предельных состояний в отдельных фазах композита, основанный на структурных критериях прочности по максимальным напряжениям и максимальным деформациям.

3 Установлены важные прикладные аспекты вискеризованных композитов. Показано, что с точки зрения прочности и жесткости в случаях чистого сдвига в направлении вдоль волокон и поперек волокон, а также для случая всесторонней нагрузки поперек волокон предпочтительным оказывается композит с предельным объемным содержанием волокна, ограниченным длиной вискерсов. Такие композиты выдерживают нагрузки, значительно превосходящие нагрузки, выдерживаемые классическими волокнистыми композитами с теми же объемными содержаниями волокна и традиционными волокнистыми композитами с объемным содержанием волокна 60 %. Кроме этого показано, что вискеризованный слой может в некоторой степени компенсировать уменьшение жесткости волокнистого композита, связанного с уменьшением объемного содержания волокна.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. Москва, Машиностроение, 1968, 192 стр.
- 2 Хозин В.Г., Зыкова Е.С. Модифицирование эпоксидных связующих наночастицами для полимеркомпозитной арматуры. Вестник Казанского технического университета. 2013. Том 16, № 18, стр. 178-181.
- 3 Кондрашов С.В., Шашкеев К.А., Попков О.В., Соловьянчик Л.В. Физико-механические свойства нанокомпозитов с УНТ (обзор). Труды ВИАМ. 2016. №5(41), стр. 61-83.
- 4 Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A.: Increase interface strength in carbon fiber composites through a ZnO nanowire interphase. *Advan. Funct. Mater.* 19:16 (2009) pp. 2654–2660.
- 5 Wang Y., Tang Z., Liang X., Liz-Marzan L.M., Kotov N.A.: SiO<sub>2</sub>-Coated CdTe nanowires: bristled nano centipedes. *Nano Letters* 4:2 (2004) pp. 225–231.
- 6 Galan U., Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A.: Effect of ZnO nanowire morphology on the interfacial strength of nanowire coated fibers. *Compos. Sci. Technol.* 71 (2011) pp. 946–954.
- 7 Sager R.J., Klein P.J., Lagoudas D.C., Zhang Q., Liu J., Dai L.: Effect of carbon nanotubes on the interfacial shear strength of T650 carbon fiber in an epoxy matrix. *Compos. Sci. Technol.* 69 (2009) pp. 898–904.
- 8 Garcia E.J., Wardle B.L., Hart A.J., Yamamomj N.: Fabrication and multifunctional properties of a hybrid laminate with aligned carbon nanotubes grown in situ. *Compos. Sci. Technol.* 68:9 (2008) pp. 2034–2041.
- 9 Sharma S.P., Lakkad S.C.: Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites. *Surface & Coatings Technology* 205 (2010) pp. 350–355.
- 10 Qiang Song, Ke-zhi Li, Hai-liang Li, He-jun Li, Chang Ren Grafting straight carbon nanotubes radially onto carbon fibers and their effect on the mechanical properties of carbon/carbon composites//*Carbon* 50 (2012) pp. 3943-3960.
- 11 Peng Lv, Yi-yu Feng, Peng Zhang, Hui-min Chen, Naiqin Zhao, Wei Feng Increasing the interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of carbon nanotubes grown on the fibers//*Carbon* 49 (2011) pp. 4665-4673.
- 12 Fu-Hua Zhang, Rong-Guo Wang, Xiao-Dong He, Chao Wang, Li-Ning Ren Interfacial shearing strength and reinforcing mechanisms of an epoxy composite reinforced using a carbon nanotube/carbon fiber hybrid//*Journal of Material Science* 2019 Vol 2009 №13, pp. 3574-3577.

- 13 S.P. Sharma, S.C. Lakkad Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites// *Surface & Coatings Technology* 2010 Vol. 205, pp. 350-355.
- 14 Патент РФ № 2012696, 1994.
- 15 Gibson R.F.: A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures. *Compos. Struct.* 92 (2010), pp. 2793–2810.
- 16 Мальцев И.М. Проектирование структуры и свойств композиционных материалов: Методические указания по расчетной работе для машиностроительных специальностей/НГТУ, Н.Новгород. 1995. 15 с.
- 17 Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М.: Композиционные материалы. Справочник. Москва, Машиностроение (1990), 512 с.
- 18 Полилов А.Н. Экспериментальная механика композитов: учебное пособие. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 375 с.
- 19 Мэтьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. Механика и технология. Москва, Техносфера (2004), 408 с.
- 20 Gowthaman Swaminathan, Chandrakumar Palanisamy, Gowrisankar Chidambaram, Gaëlle Henri, Chandrasekhar Udayagiri Enhancing the interfacial strength of glass/epoxy composites using ZnO nanowires. *Composite Interfaces*, Vol. 25, pp. 151-168.
- 21 Fei W., Kuiry S.C., Seal S.: Advanced catalyst system prepared from a whiskered aluminium-coating metallic alloy substrate. US 8247034 B2, US Patents (US 13/224,848), Aug 21, 2012.
- 22 Киселева О.А. Полиструктурная теория прочности композиционных материалов. Метод.Указ. Тасбов: ТГТУ, 2013. – 22 с.
- 23 Кербер М.Л., Виноградов В.М., Головкин Г.С. и др. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология. Учеб. пособие; под ред. А.А. Берлина – Спб.: Профессия, 2008. – 560 с.
- 24 Лурье С.А., Дудченко А.А.: Введение в механику нанокомпозитов. МАИ–ПРИНТ, Москва (2010) 160 с
- 25 Скворцов Ю.В. Конспект лекций по дисциплине Механика композиционных материалов. Самара 2013, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева». 94 с.
- 26 Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 8, issue 3, pp. 161-185,
- 27 Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 408 с.

- 28 Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials// J. Composite Materials, 1971, v.5, No.1, p.58-67.
- 29 Скудра А.М. Структурная теория прочности армированных пластиков при растяжении и сжатии// Механика полимеров. 1975(6), стр. 988-996.
- 30 Ломакин В.А. Зависимость прочности композитных материалов от структурных параметров//Механика композитных материалов. 1979 (2), стр. 291-297
- 31 Кристенсен Р.М.: Введение в механику композитов. Москва, Мир (1982) 334 с.
- 32 Gusev A.A., Lurie S.A.: Loss amplification effect in multiphase materials with viscoelastic interfaces. *Macromolecules* 42:14 (2009) pp. 5372–5377.
- 33 Бахвалов Н.С., Панащенко Г.П.: Осреднение процессов в периодических средах: Математические задачи механики композиционных материалов. Наука, Москва (1984) 352 с.
- 34 Победря Б.Е.: Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. Ун-та, Москва (1984) 336 с.
- 35 Meguid S., Kalamkarov A.L.: Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure. *Int. J. Solids Struct.* 31:3 (1994) pp. 303–316.
- 36 Andrianov I.V., Danishevs'kyu V.V., Guillet A., Pareige P.: Effective properties and micro-mechanical response of filamentary composite wires under longitudinal shear. *Euro. J. Mech. A/Solids* 24 (2005) pp. 195–206.
- 37 Kerner E.H. The elastic and thermoelastic properties of composite media //Proc. Phys. Soc. – 1956. – Vol. 69. – P. 808. 90
- 38 Van der Pol C. On the rheology of concentrated dispersions // *Rheol.Acta.* – 1958. – Vol. 1. – P. 198.
- 39 Christensen R.M., Lo K.H. Solutions for effective shear properties in three phase and cylinder models // *J. Mech. And Phys. Solids.* – 1979. – V 27. – P. 315–330.
- 40 Christensen R.M. Mritical evaluation for a class of micro-mechanics models // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* – 1990. – Vol. 38, I. 3. – P. 379–404
- 41 Herve E., Zaoui A.: N-layered inclusion-based micromechanical model. *Int. J. Eng. Sci.* 31:1 (1993) pp. 1–10.
- 42 Christensen R.M. Two Theoretical Elasticity Micromechanics Models // *Journal of Elasticity.* – 1998. – Vol. 50, I. 1. – P. 15–25.
- 43 Zheng Q.-S., Du D.-X. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2001. – Vol. 49, V 11. – P. 2765–2788.
- 44 Gusev A.A., Lurie S.A. Loss amplification effect in multiphase materials with viscoelastic interfaces // *Macromolecules.* – 2009. – Vol. 42, I. 14. – P. 5372–5377.

- 45 Herve E., Zaoui A.: Elastic behavior of multiply coated fiber reinforced composites. *Int. J. Eng. Sci.* 33:10 (1995) pp. 1419–1433.
- 46 Hashin Z.: Thin interphase/imperfect interface in elasticity in application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids* 50 (2002) pp. 2509–2537.
- 47 Walpole L.J.: A coated inclusion in an elastic medium. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 83 (1978) pp. 495–506.
- 48 Лурье С.А., Соляев Ю.О.: Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями. УДК 539.3, Москва (2010) pp. 80–90.
- 49 Lurie S.A., Volkov-Bogorodsky D., Zubov V., Tuchkova N.: Advanced theoretical and numerical multiscale modelling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled composites. *Comp. Mater. Sci.* 45 (2009) pp. 709–714.
- 50 Tsukrov I., Drach B.: Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers. *Int. J. Eng. Sci.* 47 (2010) pp. 25–33.
- 51 Chatzigeorgiou G., Siedel G.D., Lagoudas D.: Effective mechanical of “fuzzy fiber” composites. *Composites B* 43 (2012) pp. 2577–2593.
- 52 Lurie S.A., Minhat M. Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites: *Composites B Vol. 61*, 2014, pp. 26-40.
- 53 Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J.: Predicting the properties of micro- and nanocomposites: from the microwhiskers to the bristled nanocentipedes. *Philos. Trans. R. Soc. A* 366 (2008) pp. 1827–1833.
- 54 Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N.: Mechanical models for nanomaterials. *Handbooks of nanophysics – principles and methods*, CRC vol. 24 (2011) pp. 1–12.
- 55 Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N.: Effect of a special reinforcement on the elastic properties of micro- and nanocomposites with polymer matrix. *The Aeronautical Journal* 117:1196 (2013) pp. 1019-1036.
- 56 Guz I.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J.: Modelling properties of micro- and nanocomposites with brush-like reinforcement. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik (Materials Science and Engineering Technology)* 40:3 (2009) pp. 154-160.
- 57 Kundawal S.I., Ray M.C.: Micromechanical analysis of fuzzy fiber reinforced composites. *Int. J. Mech. Mater. Des.* 7 (2011) pp. 149-166.
- 58 Hashin Z.: Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites. *Mech. Mater.* 8 (1990) pp. 293–308.

- 59 Lurie S.A, Minhat M., Tuchkova N. Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method// Journal of Engineering Mathematics, December 2015, V. 95, Issue 1, pp 7-29.
- 60 Лурье С.А., Рабинский Л.Н., Кривень Г.И., Лыкосова Е.Д. Напряженное состояние в элементах структуры модифицированных волокнистых композиционных материалов с вискеризованными волокнами // Механика композиционных материалов, 2018, т.24, №1, стр. 122-144/
- 61 Sergey A. Lurie, Dmitrii B. Volkov-bogorodskii, Galina I. Kriven and Lev N. Rabinskiy. On estimating structural stresses in composites with whiskerized fibers // International Journal of Civil Engineering & Technology (IJCIET), 2018, Volume:9, Issue:6, Pages: 294-308.
- 62 Sergey A. Lurie, Dmitrii B. Volkov-bogorodskii, Galina I. Kriven and Lev N. Rabinskiy. On estimating structural stresses in composites with whiskerized fibers // International Journal of Civil Engineering & Technology (IJCIET), 2018, Volume:9, Issue:6, Pages: 294-308/
- 63 Ванин Г.А.: Микромеханика композиционных материалов. Н. Думка, Киев (1985) 302 с.
- 64 Лурье С.А., Кривень Г.И., Рабинский Л.Н. О прочности модифицированного композита с вискеризованными волокнами // Композиты и наноструктуры, 2019, т. 11, №1, стр. 1-15
- 65 Vasiliev V.V., Morozov E.V.: Advanced mechanics of composite materials and structural elements. Elsevier, Oxford, 2013, 3<sup>rd</sup> ed. 818 p.
- 66 S.Lurie, D.Volkov-Bogorodsky, A.Leontiev, E.Aifantis. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity. Applications to composite materials. // International Journal of Engineering Science. 2011. V. 49. P. 1517-1525.
- 67 Lurie S., Volkov-Bogorodskii D., Tuchkova N. Exact solution of Eshelby–Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions. Acta Mech, 2016. V. 227, Issue 1, pp. 127–138.
- 68 Д. Б. Волков-Богородский, Ю. Г. Евтушенко, В. И. Зубов, С. А. Лурье Численно-аналитический учет масштабных эффектов при расчете деформаций нанокompозитов с использованием блочного метода мультиполей. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006, 46:7, стр. 1302–1321.
- 69 Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Zubov V., Tuchkova N. Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites // Computational Materials Science. 2009. V. 45, № 3. P. 709-714/
- 70 Vlasov, V.I., Volkov-Bogorodsky, D.B. 1998, Block multipole method for boundary value problems in complex-shaped domains // ZAMM. 78, Suppl. 3, pp. 1111-1112.
- 71 Volkov-Bogorodsky, D.B. 2001. On construction of harmonic maps of spatial domains by the block analytical-numerical method. *Proc. of the minisymposium "Grid generation: New trends and*

*applications in real-world simulations*” in the Int. conf. “Optimization of finite-element approximations, splines and wavelets” (St.-Petersburg, 25-29 June 2001). Moscow: *Computing Centre RAS*, 2001, 129-143.

72 Eshelby J.D.: The continuum theory of lattice defects. *Progress in Solid State Physics*. Vol. 3. (1956).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ЭШЕЛБИ

Известная формула, выведенная Эшелби [72] для вычисления энергии деформирования преобразует обычное интегрирование по объему к интегрированию по поверхности частного вида. Согласно работе [31], это упрощение очень удобно при определении эффективных свойств композитов. В принципе эта формула связывает энергию деформации между средами с включением и без включения (Рисунок А.1).

Здесь показывается процедура, которая приводит к формуле Эшелби.

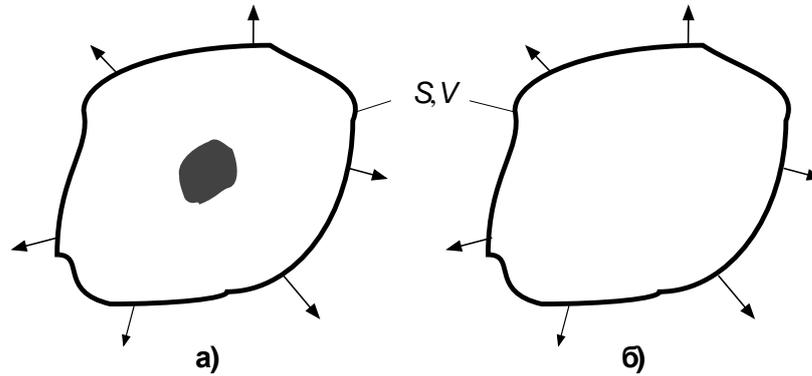


Рисунок А.1 - Схемы: а) к задаче о включении в бесконечной среде, заданной векторами перемещений, и б) к вспомогательной задаче для однородной среды (матрица без включения)

Рассмотрим однородное тело с заданными на поверхности граничными условиями в напряжениях. Пусть внутри тела находится единичное включение с иными свойствами, как схематически показано на рисунке А.1, а). Энергия упругого деформирования гетерогенного тела определяется следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (\text{A.1})$$

Далее определим энергию деформирования такого же тела, в котором включение не отличается по свойствам от окружающей его среды. Пусть граничные условия для обеих задач одинаковы (Рисунок А.1, б). Энергия деформирования гомогенного тела имеет вид

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dV, \quad (\text{A.2})$$

где  $V$  — объем ячейки; и величины с верхними индексами “0” соответствуют полям переменных к задаче однородного тела, а без верхних индексов — к задаче композита.

Выражение (А.1) вместе с (А.2) можно переписать в виде

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0) dV. \quad (\text{A.3})$$

Применяя теорему Остроградского-Гаусса вместе с уравнениями равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$  и  $\sigma_{ij,j}^0 = 0$  к (А.3), находим

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_S (\sigma_i u_i - \sigma_i^0 u_i^0) dS \quad (\text{А.4})$$

где  $S$  — поверхность ячейки. На поверхности

поскольку граничные условия обеих задач одинаковы, т.е.  $\sigma_i = \sigma_i^0$  на  $S$ , можно переписать (А.4) в виде

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_S \sigma_i^0 (u_i - u_i^0) dS. \quad (\text{А.5})$$

Итак, формула (А.5) представляет собой промежуточную форму искомого результата. Для преобразования интеграла в (А.5) к другой форме решим вспомогательную задачу.

Рассмотрим гомогенное тело той же формы, что и на рисунке А.1 а), в котором эффект, связанный с наличием включения, учтен путем введения внутренних сил, распределенных некоторым образом (Рисунок А.2 а). Легко показать, что иллюстрируемая рисунком А.2 а) задача о действии частной системы внутренних сил, приложенных по поверхности включения, дает в точности то же самое состояние полей переменных в области вне включения, что и задача, иллюстрируемая рисунком А.1 а).

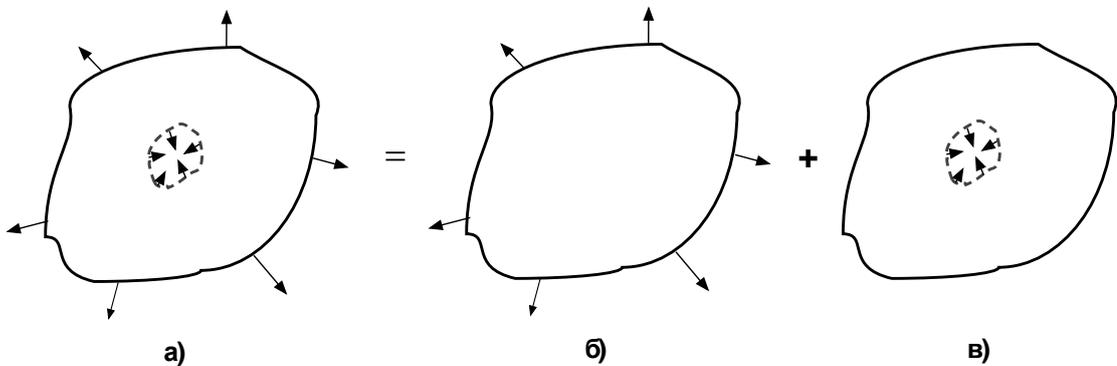


Рисунок А.2 - Схема суперпозиции решений.

Далее задачу, соответствующую рисунку А.2 а), можно представить как суперпозицию двух задач, показанных на рисунках А.2 б) и в). Видно, что задача рисунка А.2 б) равна задаче рисунка А.1 б). Обозначим поля переменных для задачи рисунка А.2 а) с верхними знаками “^”, и для задачи рисунка А.2 в) с верхними штрихами “'”. Используем условия, что  $\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}$  и  $\hat{u}_i$  идентичны  $\sigma'_{ij}, \varepsilon'_{ij}, u'_i$  соответственно, вне области, включающей внутренние силы, т.е. вне включения.

При помощи метода суперпозиции задачи А.2.а = А.2.б + А.2.в теперь можно записать

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}, \\ \hat{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij}, \\ \hat{u}_i &= u_i^0 + u'_i.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Теперь используя (А.6), упругую энергию деформации в задаче, соответствующей рисунку А.2 а), можно записать в виде

$$\begin{aligned}\hat{U} &= \int_V (\sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij})(\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij}) dV \\ &= U^0 + U' + U^{INT},\end{aligned}$$

где  $U^0$  определяется согласно (А.2) и

$$\begin{aligned}U' &= \frac{1}{2} \int_V \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} dV, \\ U^{INT} &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} + \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^0) dV.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Здесь член  $U^{INT}$  описывает эффект энергии взаимодействия двух напряженных состояний для схем нагружения, показанных на рисунках А.2 б) и в).

Плотность энергии взаимодействия (А.7) можно записать в более удобной форме. Используя соотношения напряжение-деформация и симметрию  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , запишем второй член в подынтегральном выражении (А.7) в виде:

$$\sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^0 = C_{ijkl} \varepsilon'_{kl} \varepsilon_{ij}^0 = C_{klij} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon'_{kl} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \varepsilon'_{ij} = \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij}.\tag{A.8}$$

Подставляя (А.8) в (А.7) и применяя теорему Гаусса-Остроградского и уравнения равновесия  $\sigma'_{ij,j} = 0$  получаем

$$U^{INT} = \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV = \int_S \sigma_{ij}^0 u'_i dS.\tag{A.9}$$

Формула (А.9) связана с интегральным членом в (А.5) поскольку  $u_i = \hat{u}_i$ , и поэтому можно записать (А.5) в виде

$$U = U^0 + \frac{1}{2} \int_S \sigma_i^0 u'_i dS = U^0 + \frac{1}{2} U^{INT}.\tag{A.10}$$

В заключение рассмотрим наиболее подходящие для использования в (А.10) формы записи  $U^{INT}$ . Возвращаясь к формуле (А.9) для  $U^{INT}$ , разделим, как показано на рисунке А.3, область интегрирования по объему на две части с поверхностью раздела  $S$ . Поверхность  $S$  берется вне области внутренних сил. С учетом этого деления областей и соотношения (А.8) уравнение (А.9) примет вид:

$$U^{INT} = \int_{V_I} \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV + \int_{V_{II}} \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV = \int_{V_I} \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV + \int_{V_{II}} \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^0 dV.\tag{A.11}$$

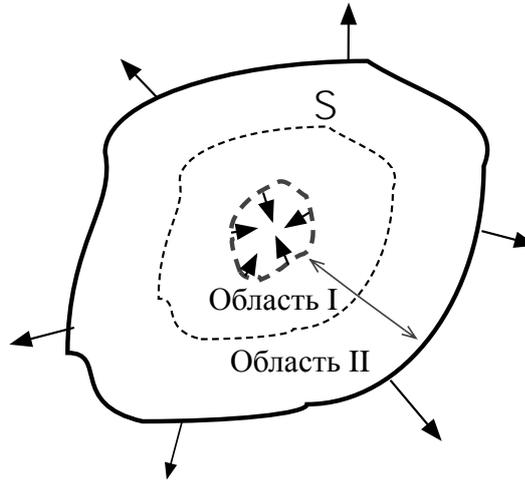


Рисунок А.3 -Положение промежуточной поверхности  $S$ , по которой производится интегрирование

С помощью теоремы Гаусса-Остроградского в сочетании с уравнениями равновесия  $\sigma_{ij,j}^0 = 0$  в области  $V_I$  и  $\sigma'_{ij,j} = 0$  в области  $V_{II}$  можно записать (А.11) в следующем виде

$$U^{INT} = \int_{\Sigma} \sigma_i^0 u_i' dS - \int_{\Sigma} \sigma_i' u_i^0 dS + \int_S \sigma_i' u_i^0 dS, \quad (\text{A.12})$$

где знак минус, входящий в (А.12), связан с тем, что положительное направление единичного вектора нормали к  $S$  противоположно для двух областей.

Однако,  $\sigma_i' = 0$  на  $S$  (Рисунок А.2 в), поэтому имеем

$$U^{INT} = \int_{\Sigma} (\sigma_i^0 u_i' - \sigma_i' u_i^0) dS \quad (\text{A.13})$$

Использование соотношения (А.6) приводит (А.13) к виду

$$U^{INT} = \int_{\Sigma} (\sigma_i^0 \hat{u}_i - \hat{\sigma}_i u_i^0) dS. \quad (\text{A.14})$$

Так как в основной задаче, соответствующей рисунку А.2 а), переменные  $\hat{\sigma}_{ij}$  и  $\hat{u}_i$  идентичны  $\sigma_{ij}$  и  $u_i$  вне области, включающей внутренние силы, то с уравнением (А.14) принимает вид

$$U = U^0 + \frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_i^0 u_i - \sigma_i u_i^0) dS$$

где  $S$  берется по поверхности включения.

Можно показать, что соответствующее решения задачи с заданными перемещениями на наружной границе имеет вид

$$U = U^0 + \frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_{ij} u_i^0 - \sigma_{ij}^0 u_i) n_j dS. \quad (\text{A.15})$$