

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Харченко Кирилл Дмитриевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СВОЙСТВ СРЕД
С ПОЛЯМИ ДЕФЕКТОВ.**

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор технических наук,
профессор Лурье Сергей Альбертович

Москва 2017 г.

Оглавление

Введение	4
Глава 1 Обзор работ по проблеме моделирования неоднородных структур	8
Глава 2 Неклассические модели сред с полями дефектов и градиентные модели сред	25
2.1 Введение.....	25
2.2 Основные градиентные модели и неклассические модели сред с полями дефектов	26
2.2.1 Теория сред Коссера	26
2.2.2 Теория сред Джеремилло	29
2.2.3 Теория сред Аэро-Кувшинского (моментная теория упругости)	31
2.2.4 Теория сред Миндлина	34
2.2.5 Теория сред Тупина	35
2.2.6 «Простейшая» теория сред с сохраняющимися дислокациями	37
2.2.7 Сравнительный анализ существующих теорий	40
2.3 Общая структура нелокальных теорий упругости	42
2.4 Условия симметрии в градиентных теориях упругости	44
2.5 Общие теоремы об эквивалентности сред.....	50
2.5.1 Вариационная постановка сред с полями дефектов	51
2.5.2 Лагранжиан и уравнения эйлера.....	54
2.5.3 Теоремы об энергетической эквивалентности	56
2.6 Адгезионное обобщение теории сред Джеремилло	66
2.7 Теорема эквивалентности адгезионного обобщения теории Джеремилло и теории неоднородной изотропной среды	68
2.7.1 Определение эффективных объемных модулей	69
2.7.2 Определение эффективных адгезионных модулей.....	69
2.8 Заключение	74
Глава 3 Пористость как пример дефектной среды	76
3.1 Введение.....	76

3.2 Моделирование сред с полями дефектов.....	77
3.2.1 Бездефектные среды	77
3.2.2 Соотношения для сред с полями дефектов.....	78
3.3 Моделирование сред с пористостью как изотропной среды с функционально-градиентными свойствами	81
3.4 Алгоритм построения модели сплошной среды	84
3.5 Исследование дисперсионных соотношений колебаний пористого стержня ..	85
3.6 Заключение	91
Глава 4 Примеры расчетов. Обсуждение результатов	92
4.1 Растяжение составного стержня	92
4.2 Растяжение пористого стержня	96
4.3 Определение эффективных свойств композиционных материалов с наноструктурированными волокнами.....	102
4.3.1 Основные сведения о вискеризованных волокнах	102
4.3.2 Структурная модель вискеризованного межфазного слоя	104
4.3.3 Структура решения обобщенной задача Эшелби в модели с вискеризованным слоем.....	105
4.4 Оценка несущей способности при росте поврежденности.....	114
4.5 Заключение	116
Заключение.....	117
Список используемой литературы	119
Приложение А	131
Приложение Б	132
Приложение В	134
Приложение Г	136
Приложение Д.....	138
Приложение Е	140
Приложение Ж.....	142

Введение

Актуальность темы исследования. Современное научно-техническое развитие характеризуется совершенствованием технических параметров изделий, повышением их надежности и ресурса. Решающую роль здесь играют новые материалы, появившиеся за последние 20-30 лет, обладающие принципиально отличающимися физико-механическими характеристиками как в абсолютных, так и в относительных значениях. Одновременно с этим возникает потребность в разработке моделей для учета структурных особенностей как вновь созданных, так и уже существующих материалов. Исходя из наличия микро и нановключений, а также случаев, когда габариты вводимых в основной объем включений, соразмерны характеристикам микроструктуры рассматриваемых объектов, необходим учет масштабных эффектов, с помощью которых устанавливается связь физических свойств материала с характерными размерами его микроструктуры.

Таким образом, разработка фундаментальных основ учета существенно неклассических эффектов, связанных с влиянием характерных размеров структуры неоднородных сред на эффективные механические свойства микро- и наноструктурированных материалов представляется актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела (МДТТ).

Степень разработанности темы исследования. С одной стороны, в настоящее время имеются достаточно проработанные градиентные модели, учитывающие в разной степени те или иные неоднородности, что подтверждается большим числом публикаций еще со второй половины прошлого века. С другой стороны, существует огромная база знаний по классическим подходам к решению задач МДТТ. Однако связь между ними, позволяющая воспользоваться преимуществами обоих способов только начинает развиваться.

Цели и задачи работы.

- Получение соотношений эквивалентности предполагающих трактовку сред с полями дефектов как изотропных сред с переменными характеристиками (межфазных слоев с переменными свойствами), получение явных соотношений для оценки переменных характеристик функционально-градиентных сред по решению, найденному для пористых сред.
- Построение модели эффективных классических функционально-градиентных сред, описывающей эффекты деградации свойств материала ввиду наличия рассеянных повреждений - пор.
- Решение задачи о растяжении составного стержня; задачи одно- и двухосного растяжения пористого стержня, исследование дисперсионных соотношений колебаний пористого стержня; определение эффективных свойств композиционных материалов с наноструктурированными волокнами.

Научная новизна.

1. Доказано, что для сред с локализованными полями дефектов, свойства которых в рамках моделей типа Миндлина определяются эволюцией полей дефектов, справедлива альтернативная трактовка, позволяющая описывать материал, поврежденный дефектами, как эквивалентный изотропный функционально - градиентный материал с переменными по координатам свойствами, моделируемый в рамках классической теории упругости.
2. Впервые получены конечные формулы, позволяющие осуществить вычисление компонентов переменного по координатам тензора адгезионных модулей четвертого ранга \tilde{A}_{ijmn}^J через компоненты постоянного тензора адгезионных модулей четвертого A_{ijmn}^J и тензора градиентных модулей шестого рангов C_{ijkl}^J исходной среды градиентных деформаций и найденному из решения исходной краевой задачи теории градиентных деформаций полю перемещений R_i .

3. В ходе работы получены аналитические соотношения, позволяющие по накопленной поврежденности за счет дефектов, определить эффективные характеристики эквивалентного изотропного материала, в рамках классической ГУ.

Теоретическая и практическая значимость работы. Уточненные модели деформирования позволяют более полно и достоверно прогнозировать поведение неоднородных структур. Полученные в работе результаты позволяют пересмотреть систему экспериментов и более правильно отнестись к исследованию гетерогенных структур.

Методология и методы исследования.

- Модели градиентной теории упругости.
- Применение вариационных методов и уравнений математической физики
- Применение тензорной алгебры.

Положения, выносимые на защиту:

1. Алгоритм получения, а также соотношения, позволяющие трактовать среды с полями дефектов, для однородных изотропных материалов в окрестностях особых точек как некоторые межфазные слои с переменными свойствами.
2. Разработанный алгоритм, позволяющий вычислить компоненты переменного по координатам тензора адгезионных модулей четвертого ранга
3. Решение задачи определения эффективных характеристик эквивалентного изотропного функционально-градиентного материала.

Достоверность результатов, полученных в ходе выполнения диссертационной работы подтверждается следующими положениями:

- сопоставлением полученных в диссертации теоретических результатов с тестовыми аналитическими решениями частных задач;
- непротиворечивостью полученных результатов физическому смыслу явлений, связанных с деформированием сред.

Основные результаты диссертационной работы апробированы на:

- 2-й Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем». Москва, 17 - 19 декабря 2013г.
- Международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций». Москва, 10 - 13 ноября 2014 г.
- Второй международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций». Москва. 18 - 20 октября 2016г.

Глава 1 Обзор работ по проблеме моделирования неоднородных структур

Для построения математических моделей сред используется «кинематический» вариационный принцип, позволяющий получать корректные и энергетически согласованные математические модели сред. В соответствии с этим принципом общий вид функционала энергии для исследуемой среды находится по заданным кинематическим связям. Спектр внутренних взаимодействий полностью определяется системой кинематических связей, реализующихся в среде. При этом предполагается, что рассматриваются линейные, обратимые процессы.

Начало развития градиентных теорий упругости следует связывать с работами Тупина и Миндлина [1-3]. В дальнейшем значительный интерес к обобщенным теориям упругости во многом определялся необходимостью объяснять и моделировать необычные физико-механические свойства новых материалов с тонкой и сверхтонкой структурой (например, микро- и наночастицы, наполненные композиты с микро/нановключениями, металлокомпозиты, нано модифицированные керамики и пр.). В этом отношении большие надежды возлагались на обобщенные модели сплошных сред при моделировании свойств различных микро/наноструктур, в которых эффекты ближнего взаимодействия когезии и адгезии и других проявлений масштабных эффектов могут иметь решающее значение [4-9]. Первоначально прикладные градиентные теории были разработаны Айфантисом [10,11] в начале восьмидесятых годов для градиентной пластичности, а в 90-х годах для теории упругости (ТУ) [12-14]. История развития и обзор исследований, посвященных разработке прикладных градиентных теорий за указанный период, представлены в работе Гао и Парка [15]. Дальнейший прогресс в области развития градиентных теорий связан с расширением области приложения этих теорий на задачи термо-упруго-пластичности [16], а также на прикладные статические и динамические задачи упругости, проблемы теплопроводности и диффузии [17]. В перечисленных работах разрабатывались варианты градиентных моделей сред для описания масштабных эффектов без учета

адгезивных взаимодействий. Весьма перспективными являются градиентные теории для моделирования межфазных взаимодействий в неоднородных и многофазных материалах [18]. Особенно перспективны они при моделировании упругих свойств композиционных материалов (КМ), структурированных материалов с субмикронными и наноразмерными внутренними структурами. В работах Лурье и Белова [19-23] предложена градиентная теория межфазного слоя, которая применялась для учета масштабных эффектов и эффектов адгезии при моделировании свойств композитов. Нелокальные модели сред с полями дефектов учитывающие адгезионные взаимодействия развивались в работах [22-25].

Для определения адгезионного контакта существует и другой подход, развиваемый в работах Шоркина [26, 27], основанный на феноменологических методах механики сплошных сред. Предложенный подход, позволяет, в том числе установить связь адгезионных и когезионных свойств КМ, с несплошностью адгезионного контакта элементов композита [28, 29].

Экспериментально размерные эффекты стали наблюдаться сравнительно недавно. Например, в работах [30-32] экспериментально обнаружено влияние масштабных эффектов на жесткостные характеристики сверхтонких алюминиевых и эпоксидных консольных балок.

Общая градиентная теория упругости, разработанная Миндлиным [2, 3] содержит в качестве дополнительных физических постоянных для изотропных сред пять физических постоянных, через которые записываются компоненты тензора градиентных модулей упругости. Тем не менее, оказывается, что даже в случае изотропных материалов трудно или даже невозможно, извлечь эти дополнительные постоянные из экспериментов. Очевидным является стремление получить рационально упрощенную градиентную теорию с меньшим количеством дополнительных коэффициентов, предпочтительно только с одним. С точки зрения построения прикладных теорий важными представляются соображения, связанные с определением фундаментальных свойств симметрии механических структур, которые могут использоваться как строгие ограничения на тензоры упругих постоянных при построении физических моделей деформирования. Например, в

классической теории упругости Коши-Пуассона упругие константы представлены тензором четвертого ранга, который удовлетворяет так называемым условиям симметрии по деформациям. Тензор модулей упругости в таком случае должен оставаться неизменным при перестановке индексов в первой и второй парах индексов. Фундаментальным свойством является и симметрия, связанная с требованием потенциальности и сводящаяся к неизменности тензора модулей при перестановке первой и второй пар индексов. В результате, подобные свойства симметрии позволяют существенно упростить физическую модель материала.

В градиентной теории упругости физические свойства сред, которые представлены через тензор градиентных модулей упругости шестого ранга, также должны подчиняться некоторым условиям симметрии. Именно условия симметрии позволили снизить общее число физических постоянных в градиентных теориях с 300 до 7 для изотропных, центрально симметричных материалов. Тем не менее, на протяжении достаточно длительного периода изучения градиентных теорий, исследованию условий симметрии и степени их влияния на физические постоянные уделялось мало внимания. В недавних работах [33, 34], пожалуй, впервые представлены систематические исследования в этой области.

Построение моделей дефектных сплошных сред является необходимым при моделировании масштабных эффектов в упругости и пластичности. Было показано [35-39], что градиентная теория достаточно эффективна для анализа среды на нано- и микроуровнях.

Кинематика дефектов составляет основу в развитии феноменологических моделей теории дефектов. Во-первых, она является наиболее важным элементом при применении вариационных методов для описания градиентных моделей высокого порядка [14, 37, 38]. Действительно, знание кинематики дефектов позволяет установить список аргументов для корректной формулировки соответствующего лагранжиана. Во-вторых, кинематический анализ позволяет установить связи между различного типа дефектами и проанализировать причины и условия их развития и исчезновения [39, 40]. В данной работе сделан акцент на пористость, как один из видов дефектов, рассматриваемый в дальнейшем.

Поры относятся к внутренним, объёмным дефектам. Их наличие или отсутствие может существенно влиять на физические характеристики материала. С физической точки зрения, изменение объёмного содержания пористости в среде связано со свободной дилатацией.

Теория упругих пористых материалов изучалась такими учеными как Ковин, Гудман, Нинзиато, Марков и др. Одной из первых работ, в которой развивается данное направление является работа Миндлина [40], в которой формулируется линейная теория трехмерного упругого континуума, обладающая некоторыми свойствами кристаллической решетки, в результате включения в теорию идей элементарной ячейки. В работах Нинзиато и Ковина [41, 42] рассматривается теория поведения пористых твердых тел, в которой материал матрицы является упругим. Теория допускает как конечные деформации, так и нелинейные определяющие соотношения. Существенным отличием от классической линейной ТУ является то, что объёмная доля, соответствующая пустотам, принимается за независимую кинематическую переменную. В работе Маркова [43] дается прогноз в отношении механического поведения сред, в которых имеется малое объёмное содержание микроскопических пор-дефектов, способных в незначительной степени оказывать влияние на жесткость материала, однако играющих существенную роль в процессе накопления повреждений в задачах прочности и разрушения.

Отдельно стоит отметить влияние пористости на коэффициент Пуассона [44, 45]. Частным случаем является описание сред и метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков).

В рамках дилатационной теории упругости известны различные замкнутые аналитические решения. Рассмотрим некоторые из них. В работе Ковина и Нинзиато [42] рассматриваются однородные деформации. В ходе исследования авторы доказывают, что некоторые материальные коэффициенты, а также коэффициенты упругости C_{ijkl} могут быть определены из экспериментов, основанных на использовании однородных деформаций, если и только если материал обладает центральной симметрией.

В работе Ковина и Пури [46] решаются задачи о толстостенных сферических и круглых цилиндрических оболочках, находящихся под действием внутреннего и внешнего давления в рамках линейной теории упругих материалов с пустотами. Монография Ковина [47] связана с решением задачи о распределении напряжений около круглого отверстия в пластине, подвергнутой одноосному растяжению вдали от отверстия для линейного упругого материала с пустотами. В ходе решения задачи получается, что коэффициент концентрации напряжений для этой задачи всегда больше или равен трем, а в некоторых случаях может быть существенно больше трех. Интересной особенностью представленных решений является то, что напряжения, деформации и перемещения совпадают с предсказанными в рамках классической ТУ в начальный момент времени, а при устремлении времени к бесконечности получается новое равновесное решение для напряжений, деформаций и перемещений.

В работах [48-51] рассматривается задача Сен-Венана для линейного упругого пористого материала. Проблема сводится к решению двух плоских эллиптических задач. Их решения дают зависимость поперечных и продольных перемещений как функцию осевой и продольной координаты. Также показано, что гипотезы Сен-Венана/Клебша и Фойгта не применимы к этой проблеме. Соответствующим критерием является то, что вторая производная компонент в плоскости по осевой координате, в тензоре напряжений должна обращаться в ноль. Кроме того, обращение в ноль первой производной по осевой координате не эквивалентно обращению в ноль этих компонент как это имеет место в классической линейной ТУ.

Отдельным направлением являются температурные эффекты, которые одним из первых стал изучать Иесан [52]. В его работе рассматривалась реакция на концентрированный источник тепла, деформации толстостенной сферической оболочки и полого цилиндра. В каждом случае определялось изменение объема пустот, вызванное деформацией. Существенной особенностью этих решений является то, что поля перемещений, температуры и напряжений имеют новые параметры, характеризующие влияние пористости:

$$u = \frac{\beta\xi - mb}{2[(\lambda + \mu)\xi - b^2]} T^* r \quad (1.1)$$

поэтому эти значения отличаются от предсказанных классической теорией термоупругости:

$$u = \frac{\beta}{2(\lambda + \mu)} T^* r \quad (1.2)$$

где $\beta, \lambda, \mu, \xi, m, b$ – коэффициенты, зависящие от параметров материала. Бирсен рассматривал изгиб термоупругих тонких пластин, выполненных из материала с пустотами [53]. Предложенная им теория учитывает влияние поперечной деформации сдвига, как в модели пластин Миндлина-Тимошенко, но не вводит поправочный коэффициент для нее.

В работах [54, 55] приводятся три полных решения системы уравнений в частных производных, определяющих три различные теории, основанные на классической линейной упругости – термоупругость, пороупругость (теория Био) и теория изотропных упругих материалов с пустотами. Каждая из них имеет систему определяющих соотношений, которая является частным случаем общей системы.

Для описания механического поведения пористых стержней, в научных трудах Бирсана и Альтенбаха [56] используются модели с динамическими нелинейными уравнения поля. В рамках линейной теории доказывается единственность решения соответствующей задачи. Предполагается, что поперечное сечение стержней не меняет свою форму при деформировании, а только поворачивается. Вводятся два вектора, которые объясняют соответственно растяжения со сдвигом и изгибно-крутильную деформацию. Затем определяется выражение для функции внутренней энергии через векторы деформации и переменные пористости. Поля напряжений имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} t_{22}^* &= \frac{\tilde{M}}{IE_0(1-SJ_0)} \left[x_1 v_2 \frac{\delta_1}{c_{11}} S(J_1 - J_2) + \frac{d_2 D_1 l_0}{\delta_1 d_5} \left(\frac{x_1}{l_0} - \frac{\sinh(x_1/l_0)}{\cosh(a/l_0)} \right) \right] \\ t_{33}^* &= \frac{-\tilde{M}}{I(1-SJ_0)} \left[x_1 \left(1 - SJ_0 + S \frac{d_3 D_1}{\delta_2 d_5} \right) - \frac{d_3 D_1 l_0}{\delta_2 d_5} \left(\frac{x_1}{l_0} - \frac{\sinh(x_1/l_0)}{\cosh(a/l_0)} \right) \right] + \frac{\tilde{F}}{A} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где функция S является геометрическим фактором, зависящим от отношения a/l_0 , l_0 - параметр с размерностью длины, для выражения скорости плоских волн, ответственных за изменение доли пустот, a, b - параметры поперечного сечения, A - площадь, \tilde{F} - осевая сила, \tilde{M} - изгибающий момент, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, d и D - матрицы, зависящие от параметров пористой среды, $J_0 - J_3$ зависят от d :

$$J_0 = \frac{c_{22}d_3^2 + c_{33}d_2^2 + 2c_{23}d_2d_3 - c_{11}d_4^2}{\delta_2d_5}, \quad J_1 = \frac{d_2^2}{\delta_1d_5}, \quad J_2 = \frac{d_2d_3}{\nu_2\delta_1d_5}, \quad J_3 = \frac{d_2d_4}{\delta_1(\nu_2d_6 - d_7)} \quad (1.4)$$

$$I = \frac{4a^3b}{3}, \quad l_0^2 = \frac{c_{11}\alpha_1}{d_5} > 0, \quad S = S\left(\frac{a}{l_0}\right) = 1 - 3 \frac{\left(\frac{a}{l_0}\right) - \tanh\left(\frac{a}{l_0}\right)}{\left(\frac{a}{l_0}\right)^3} \quad (1.5)$$

Исследование контактных задач представлено в работах [57, 58]. В работе Помпеи и др. рассматривается контактная задача о жестком прямоугольном штампе, принудительно помещенном на полупространство из линейного упругого изотропного материала с пустотами. Авторы сравнивают два различных решения - прямое численное, полученное методом коллокации и результаты полуаналитического асимптотического метода. Также приводится сравнение с более ранними асимптотическими подходами [59].

Механизмы поведения пористых материалов с точки зрения механики разрушений вызывал значительный интерес у исследователей. В работах [60, 61] рассматривается задача о трещинах. С помощью преобразований Фурье, задача сводится к некоторым интегральным уравнениям. Исследуется распределение коэффициента концентрации напряжений в зависимости от пористости материала. Авторы приходят к выводу, о том, что среде с пустотами коэффициент концентрации напряжений всегда выше при тех же условиях, чем в классической упругой среде. На рисунке 1.1 приведены графики для коэффициента концентрации напряжений в зависимости от коэффициентов Ламе и параметров пористой среды.

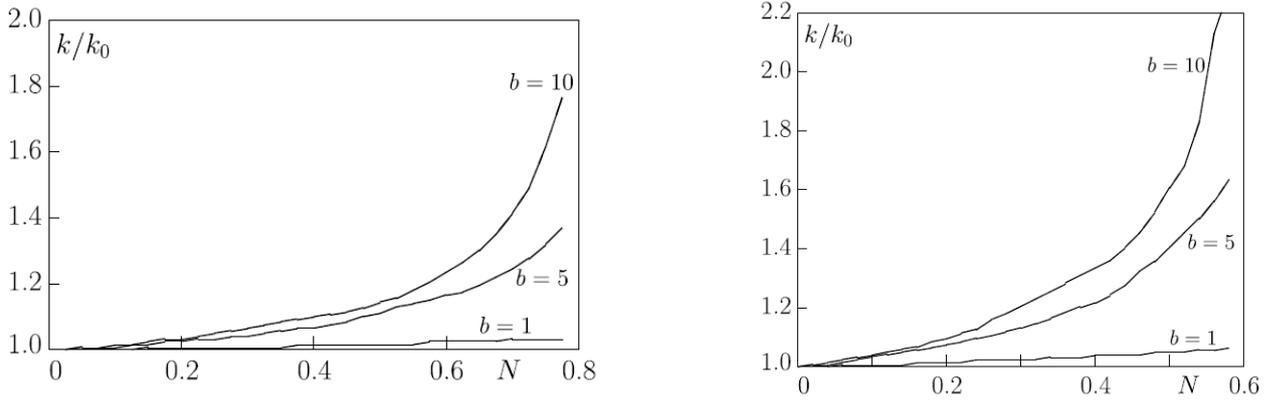


Рисунок 1.1. Относительная величина коэффициента концентрации напряжений (на первом графике $c^2 = 0.2$, на втором $c^2 = 0.4$).

N – так называемый номер связи $N = (l_2^2/l_1^2)H$, $0 \leq N < 1$. $c^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$, $H = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}$ –

безразмерные параметры, а параметры $l_1^2 = \frac{\alpha}{\beta}$, $l_2^2 = \frac{\alpha}{\xi}$ имеют размерность длины. μ

и λ – классические упругие константы, α, β, ξ – константы связанные с параметрами пористости среды.

В работах Лурье и Белова [19-23, 25, 62] вводится новая теория дефектов в сплошных средах. Авторами представлено кинематическое описание сплошной среды с дефектами, дается описание дефектов разного уровня и вводится классификация сплошных сред с дефектами. В работе [62] тех же авторов на основе вариационного кинематического принципа

$$\overline{\delta U} = \iiint \left[\sigma_{ij} \delta (d_{ij}^0 - R_{i,j}) + m_{ij} \delta (\Xi_{ij} - d_{in,m}^{\Xi} \mathcal{E}_{mj}) \right] dV \quad (1.6)$$

разработана полная модель сплошной среды с сохраняющимися дислокациями, где Ξ_{ij} – псевдотензор несовместности, $d_{in,m}^{\Xi}$ – тензор второго ранга свободной дисторсии. Она обобщает полученные ранее модели, с точки зрения адгезионных взаимодействий. Используемый подход основан на последовательном формальном описании кинематики среды и построении соответствующей потенциальной энергии деформации с использованием множителей Лагранжа:

$$2U_F = a_{ijmn} d_{ij}^{\Xi} d_{mn}^{\Xi} = (\mu^F + \lambda^F) ({}^2\theta^2\theta) + 2\mu^F ({}^2\gamma_{ij} {}^2\gamma_{ij}) + 2\chi^F ({}^2\omega_{ij} {}^2\omega_{ij}) + \eta^F ({}^2\zeta_k {}^2\zeta_k) \quad (1.7)$$

где a_{ijmn} – тензор модулей адгезии, d_{in}^{Ξ} – тензор свободной дисторсии, μ^F – модуль сдвига, λ^F и χ^F – коэффициенты Ламе, η^F – адгезионный аналог жесткости

Винклера. Свободная дилатация представлена в виде тензорного разложения на следующие компоненты: ${}^2\theta$ - сферический тензор, ${}^2\gamma_{ij}$ - девиатор, ${}^2\omega_{ij}$ - антисимметричный тензор, ${}^2\zeta_k$ - вектор углов поворота поверхности при изгибе

Впервые численные решения статических и динамических задач дилатационной теории упругости были построены в работах [63, 64]. Авторами на основе метода конечных элементов была разработана программная реализация для дилатационной теории с использованием прямых алгоритмов вычислений. В работах [66-70] для построения численных решений был использован программный комплекс Comsol для решения связанной системы дифференциальных уравнений модели дилатационной теории упругости. Здесь были исследованы численные решения задач об однородных деформациях в нелинейной постановке [66], о деформациях полого цилиндра под давлением [68], о деформациях пластины конечного размера с отверстием [69], об усадке прямоугольных брусков пористой структуры [67, 68].

Особо стоит отметить работы, в которых исследовались, экспериментальные эффекты, прогнозируемых в рамках моделей дилатационной теории упругости, и на идентификацию ее дополнительных физических параметров. Например, в работах [71, 72] была дана экспериментальная оценка для возможных значений параметра связанности (дополнительная материальная постоянная дилатационной теории). Кроме натуральных испытаний был проведен виртуальный эксперимент, рисунок 1.2.

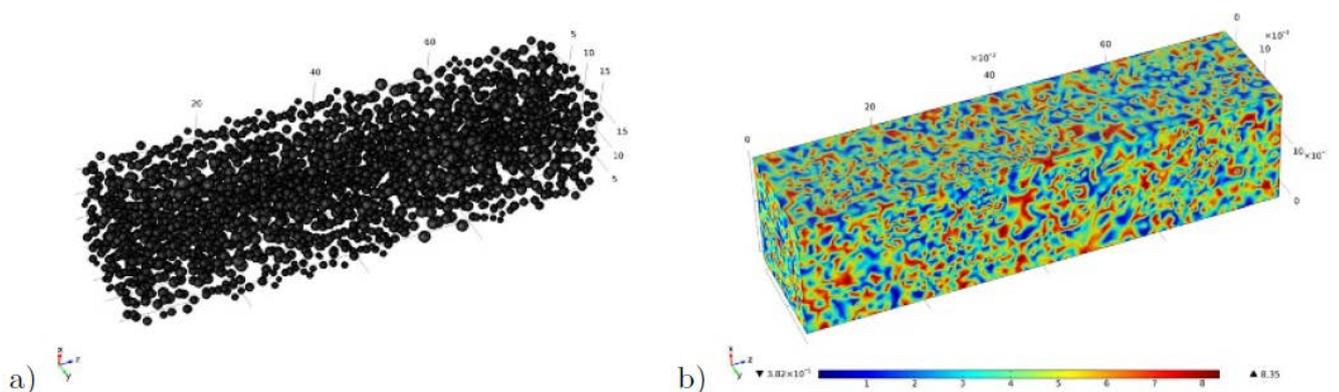


Рисунок 1.2. а) распределение пор в образце, б) распределение напряжений

В работе [70] на примере исследований полиуретана, было показано, что для высокопористых материалов масштабные эффекты могут проявляться как в испытаниях на изгиб, так и в испытаниях на кручение, что входит в противоречие с теоретическими прогнозами, следующими из дилатационной теории упругости [43]. Однако, в более поздней работе [71] была показана возможность существования связанных эффектов между свободной дилатацией и деформациями сдвига при рассмотрении нелинейной постановки дилатационной теории.

В обзоре Кнудсена [72], посвященном попытке установить зависимость между прочностью с одной стороны и пористостью, а также размером зерна с другой предлагается следующая зависимость:

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-bP) \quad (1.8)$$

где σ - прочность пористого поликристаллического тела, σ_0 - вычисленная прочность такого же тела, но без пор, b - эмпирическая константа, P - пористость образца, равная отношению объема пустот к общему объему образца. Автор проанализировав ряд источников с экспериментальными данными для разных материалов, нашел значения константы $b = 4 \dots 9$. Такой разброс величины объясняется изменением в образце эффективной или критической несущей площади, размер которой в свою очередь, будет меняться в зависимости от раскрытия или схлопывания пор. Однако под критической площадью следует понимать не все поперечное сечение образца, а некую нерегулярную поверхность поперечного сечения, проходящую между зёрнами. Кроме того, если принять утверждение [69, 70] что контакт между зёрнами слабее самих зёрен, то прочность образца будет зависеть от площади контакта между зёрнами для всех диапазонов пористости.

Ранее, Кобл и Кингери [75] отмечали, что несмотря на обширный экспериментальный материал трудно определить влияние именно пористости на свойства материала. Проблема заключается в том, исследуемые образцы могут иметь как различный химический состав исходных компонентов, так и быть изготовлены по отличающимся технологическим процессам. Все это приводит к

изменению размеров кристаллов, размеров и форм пор, а также содержанию примесей, что делает оценку влияния конкретно пористости весьма затруднительной. Для исключения подобных факторов, авторы вместе спекали образцы, с пористостью от 5 до 50% и исследовали ее влияния на прочность, коэффициент теплового расширения и модуль упругости:

$$1 - \frac{G}{G_0} = \frac{5(3K_0 + 4G_0)}{(9K_0 + 8G_0)} P + AP^2 \quad (1.9)$$

и $dE/dP = -2.36$, где G - модуль сдвига, K - модуль объемного сжатия, P - объемное содержание пор, нулевой индекс относится к сплошным материалам, A - константа, E - модуль упругости. Константу можно определить полуэмпирическим методом. Пусть коэффициент Пуассона будет равен 0.3, а $G_0 = 1$, $K_0 = 2.36$, то $A = -0.91$.

В работе [76] приводятся оценки для модуля Юнга и модуля сдвига образцов стекла приготовленных специальным образом с абсолютно сферическими порами:

$$\begin{aligned} E &= E_0(1 - \alpha_E P) \\ G &= G_0(1 - \alpha_G P) \end{aligned} \quad (1.10)$$

где E и G - модуль Юнга и модуль сдвига материала с порами, E_0 и G_0 - модули для сплошного материала, α - константа, P - объемное содержание пор. Теоретически вычисленное значение констант $\alpha_E = 3(9 + 5\nu_0)(1 - \nu_0) / 2(7 + 5\nu_0)$, $\alpha_G = 15(1 - \nu_0) / (7 - 5\nu_0)$, где ν_0 - коэффициент Пуассона для сплошного материала.

На основании экспоненциальной зависимости влияния пористости на модули упругости [72]:

$$E = E_0 \exp(-bP), \quad G = G_0 \exp(-bP) \quad (1.11)$$

Спригс [77] делает предположение, что корректней оценивать отдельно влияние закрытых и открытых пор. При этом последние оказывают более значительное влияние на модуль упругости:

$$E = E_0 e^{-b_0 P_0} e^{-b_c P_c} \quad (1.12)$$

где P_0 и P_c - объемное содержание открытых и закрытых пор соответственно, b_0 и b_c - эмпирические константы. Однако существует проблема в установлении точных

соотношений для открытых и закрытых пор. Спригс вычисляет значения константы для оксида алюминия, с максимальным диапазоном разностей между рассчитанным и экспериментальным модулем, приведенным в скобках: на основании формулы (1.11) $E/E_0 = e^{-3.48P} (-4.34 + 5.3\%)$, на основании формулы (1.12) $E/E_0 = e^{-3.44P_0} e^{-1.9P_c} (-3.81 + 3.84\%)$.

Для построения моделей сложных структур активно используются градиентная теория упругости. Она развивалась такими авторами как Миндлин, Коссера, Аэро, Кувшинский и др. В отличие от классической теории упругости, в которой в определяющих уравнениях не принимается во внимание какие-либо масштабные параметры, в градиентной теории деформации включают параметры размерности длины, поэтому подходят для моделирования масштабных и адгезионных эффектов.

Вероятно, перспективными являются неклассические подходы и методы градиентной теории упругости [17, 35-39], позволяющие учесть характеристики структуры на микроуровне. В частности, рассмотрим какой интерес проявлялся к вискерсам и межфазному слою на их основе.

В середине прошлого века нитевидные кристаллы или как их еще называют - усы внимательно изучались как новый класс материалов: очень многообещающий и очень дорогой, почти такой же, каким сейчас являются нановолокна и нанотрубки. Обширный интерес объясняется необычными свойствами [78]: совершенное, почти идеальное бездислокационное строение, что исключает обычные механизмы пластической деформации и приближает их прочность к теоретическому для данного вещества порогу. Они в десятки и даже сотни раз прочнее обычных кристаллов, обладают поразительной гибкостью, коррозионной стойкостью и кристаллографической анизотропией свойств [79]. Наносулы представляют из себя структуры в виде игл длиной несколько мкм и толщиной в основании менее 100 нм [80].

Вискеризация была предложена в качестве особой формы дополнительного упрочнения, специально для углеродных волокон (рисунок 1.3). Поскольку

углеродные волокна часто использовались с полимерными матрицами, такие композиционные материалы имели низкую прочность на сдвиг из-за плохого сцепления между волокном и матрицей. Процесс вискеризации заключается в добавлении усов в композиционный материал путем их непосредственного выращивания на поверхности углеродных волокон.

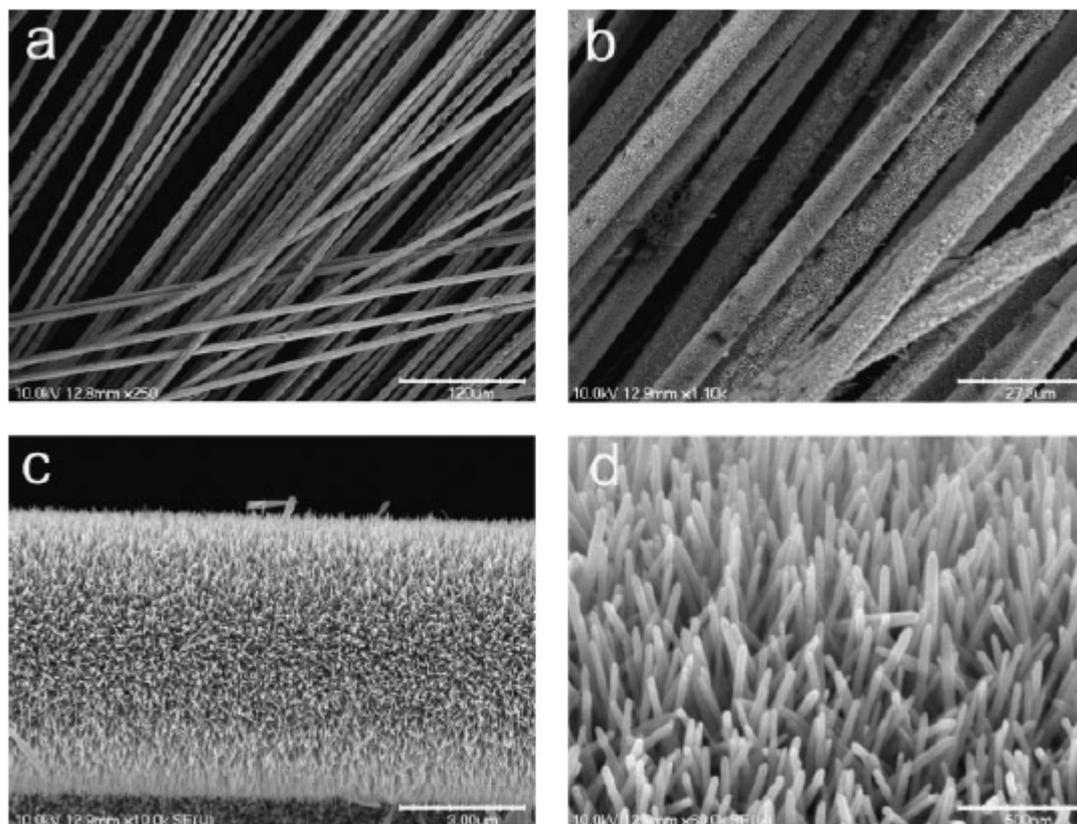


Рисунок 1.3. Наносуы ZnO, выращенные на углеродном волокне. Масштаб: а) 120 мкм, б) 27.8 мкм, с) 3 мкм, д) 500 нм [81].

Во избежание путаницы условимся, что под нановискерсами/вискерсами (усами) понимаются относительно короткие кристаллические структуры, с длиной в несколько микрометров, а под нанопроволокой длинные наноструктуры, буквально напоминающие проволоку.

Результаты испытания на сдвиг пяти тонких слоев КМ и трех слоев с вискеризованными волокнами приведены на рисунке 1.4 [81]. Как видно из рисунка, наличие наноусов приводит к значительному увеличению сдвиговых свойств. Средняя прочность на сдвиг увеличилась с 52.9 МПа для обычных волокон до 72,95 МПа для волокон с покрытием, т.е. прирост составляет 37.5%. Также

следует отметить, что адгезионное взаимодействие между волокном и вискерсами больше, чем между матрицей и вискерсами.

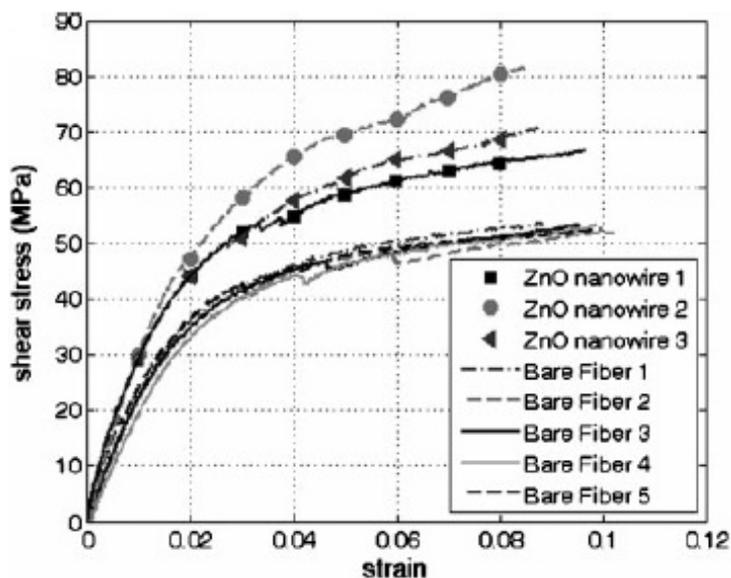


Рисунок 1.4. Диаграмма $G - \varepsilon$ (модуль сдвига-деформации) [81]

Ряд ученых, например, Катц и Милевски [82] также сообщают о трех-пятикратном увеличении межфазной сдвиговой связи для различных комбинаций углеродных волокон и эпоксидных матриц.

Нитевидные кристаллы по своим размерам относятся к классу наноматериалов, которые на сегодняшний момент относятся к одной из наиболее динамично развивающихся исследовательских областей. Однако разработка наномеханических моделей и их применение для исследования поведения таких материалов находятся в процессе становления.

Попытка сформулировать основные проблемы наномеханики и предложить возможные способы их решений с использованием базы знаний, накопленной в рамках механики твердого тела была предпринята Гузем. В его работах [83, 84] предлагается фундаментальный подход для определения механических свойств нанокomпозиционных материалов с полимерной матрицей и деформирования элементов конструкции на их основе. Рассматриваются четыре основные направления механики нанокomпозитов: описание свойств нанообразований, матрицы, межфазного слоя и определение эффективных свойств нанокomпозитов

при переходе к механике элементов конструкции. В частности, модуль Юнга, значение которого хорошо согласуется с данными эксперимента:

$$E = c^m E^m + c^f E^f + \frac{4\mu^m c^m c^f (v^f - v^m)^2}{[1 - c^f (1 - 2v^m)] + c^m (1 - 2v^m)(\mu^m / \mu^f)} \quad (1.13)$$

где $E^m, E^f, \mu^m, \mu^f, v^m, v^f, c^m, c^f$ - модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и объемное содержание матрицы и волокна. Особое внимание уделено граничным условиям между матрицей и армирующими элементами.

С помощью четырех компонентной модели (базовое волокно, покрытие, вискеризованный межфазный слой и матрица) Гуз и др. [85, 86] исследовали влияние плотности вискерсов на эффективные упругие свойства волокнистых композиционных материалов (ВКМ). Для определения свойств применялся метод двухэтапной гомогенизации. На первом этапе свойства вискеризованного межфазного слоя определялись с помощью осреднения по Фойгту и Рейссу. На втором этапе определялись конечные свойства композита путем отношения средних напряжений и деформаций с использованием метода комплексных потенциалов Мусхелишвили [87, 88].

В работах [89, 90] представлена модель для прогнозирования механических свойств микро- и нанокомпозитов, усиленных либо вискиризованными микроволокнами, либо путем напыления нанопроволок. Рассматривались эффекты влияния вискеризованного слоя различной плотности: плотного 120 усов по окружности волокна и 50 штук на участке длиной 100 мкм, вдоль волокна; среднего 60 и 50 усов соответственно и разреженного – 30 и 50. Средняя плотность является предельным случаем для одиноких усов, растущих на поверхности волокна. Плотная плотность соответствует двум щетинкам, растущим из одного и того же места на поверхности волокна. Объемная доля усов для разных плотностей: $c_w = 0.25; 0.125; 0.063$. Показано, что увеличение числа щетинок на единицу поверхности волокна дает существенное повышение модуля Юнга, однако модуль сдвига менее чувствителен к этому фактору. Разница в значениях модуля сдвига для различных плотностей менее 3%. Авторы отдельно подчеркивают, что для

получение наиболее точных результатов необходимо проводить эксперименты, т.к. предложенная модель является идеализацией рассматриваемой структуры.

В работе [91] используется подход сопротивления материалов и метод Мори-Танака для оценки упругих характеристик материала, армированного нанотрубками. Значения эффективных свойств оцениваются с учетом и без межфазного слоя между УНТ и матрицей. Также делается акцент на тот факт, что упругие характеристики чувствительны к диаметру нанотрубок.

Численная оценка свойств КМ, в котором углеродные волокна, покрытые углеродными нанотрубками, встроенными в матрицу проводилась методом конечных элементов [92]. Эффективные свойства таких материалов определялись методом гомогенизации асимптотического разложения в два этапа. На первом шаге свойства межфазного слоя усредняются в цилиндрической системе координат, а на втором этапе, происходит гомогенизация в декартовой системе. Межфазный слой между волокном и матрицей рассматривался как отдельный КМ, состоящий из УНТ, расположенных в матрице. Эффективные свойства нанокompозита были получены для двух вариантов расположения УНТ: тетрагонального и гексагонального. Приводятся сравнения (таблица 1.1) результатов численного и аналитического моделирования. Как видно из таблицы, результаты аналитического микромеханического подхода очень близки к эффективным свойствам нанокompозита с гексагональными расположенными усов.

Таблица 1.1. Эффективные свойства нанокompозита

Расположение УНТ	Продольный модуль Юнга (ГПа)	Поперечный модуль Юнга (ГПа)	Осевой модуль сдвига (ГПа)	Поперечный модуль сдвига (ГПа)
Тетрагональное	50,1	6,89	2,65	2,38
Гексагональное	49,45	6,92	2,55	2,39
Аналитическое	48,87	7,05	2,43	2,46

Стоит отметить, что вискерсы во всех рассмотренных моделях расположены перпендикулярно поверхности волокна. Более того они рассматриваются как длинные непрерывные волокна. Однако, модель не учитывает одновременно всех

параметров - диаметр, длину, плотность, объемную долю и свойства вискерсов в межфазном слое материала. В работе будет предложена методика, определяющая эффективные упругие свойства вискеризованных волокнистых композиционных материалов, учитывающую характеристики вискерсов в межфазном слое.

В общем случае, наличие в материале дефектности и различных включений приводит к тому, что для корректного решения конкретной задачи и учетов концентраторов напряжений вводятся неклассические модели материала. К таким неклассическим моделям относятся, например, модели сред с полями дефектов, градиентные модели и прочее. Однако в ходе разрешения задачи может возникнуть проблема: перейти к квазиклассическим средам или использовать преимущества неклассических моделей и решать задачу более высокого порядка. Первый способ приводит к необходимости установки корректных подходов для осуществления такого перехода, т.е. вывод энергетически эквивалентных соотношений. Применение второго подхода, т.е. неклассических моделей связано с наличием масштабного параметра, который необходимо определить и решение проблем, связанных с механикой разрушения, а также длительной прочностью, усталостью. Эти явления хорошо описаны для изотропной модели материала, однако возникают трудности, при их учете для сред с полями дефектов.

В данной работе предлагаются возможные способы разрешения как первого, так и второго подходов. Для первого подхода предлагаются определяющие соотношения, позволяющие установить эквивалентность сред, а для второго – примеры учета явлений с физической точки зрения, например, зависимости от типа нагружения.

Глава 2 Неклассические модели сред с полями дефектов и градиентные модели сред

2.1 Введение

Анализ современного уровня исследований в области механики мелкодисперсных композитов и сред с микро- и нано- структурой показывает, что потребность в корректных моделях механики, способных описать масштабные эффекты, является своевременной и актуальной. Классическая механика сплошной среды не может в принципе описать масштабные эффекты. Эта ситуация, несомненно, ограничивает возможности моделирования аномальных свойств новых материалов с внутренними структурами (нанокompозитов, наноустройств, тонких пленок и т.д.). Развитие технологии производства нанообъектов и наноустройств требует создания теории, способной описать как свойства уже существующих нанообъектов и структур, так и еще проектируемых. В большинстве случаев, нанообъекты используются не сами по себе, а в сочетании с макрообъектами. Поэтому важную роль играет технология создания композиции и умение ее моделировать. Знание физических механизмов, и умение управлять такими явлениями, как смачиваемость, капиллярность, адгезия, имеет большое значение при разработке композиционных материалов и технологии их производства.

Исходя из данной точки зрения методы механики сплошной среды представляются наиболее последовательными и корректными, и могут служить основой для построения моделей механики дефектных сред. Если попытаться выразить это в более формальном виде, то получается следующие: должны быть развиты модели деформирования сред с учетом масштабных эффектов, связанных с существованием в сплошной среде неоднородностей масштаба 10^{-9} м. В основание таких моделей должен быть заложен факт существования дефектов сплошности, таких как дислокации, дисклинации и дефекты более высокого ранга. При этом, конечно, описание громадного количества изолированных дефектов

типа дислокаций целесообразно заменить представлением в виде поля. Реализация такого подхода, даже в рамках линейных моделей, позволяет развить механику дефектных сред как некоторое естественное обобщение классической механики деформируемых сред.

2.2 Основные градиентные модели и неклассические модели сред с полями дефектов

2.2.1 Теория сред Коссера

Теория сред Коссера [93] является самой старой неклассической моделью сплошной среды. В общем случае лагранжиан L теории сред Коссера может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV$$

$$A = \iiint P_i^V R_i dV + \iint P_i^F R_i dF \quad (2.1)$$

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 8\chi^{12} \left(\frac{-R_{i,j} \mathcal{E}_{ijk}}{2} \right) \omega_k^2 + 4\chi^{22} \omega_k^2 \omega_k^2 + C_{ijmn}^{Cosserat} \omega_{i,j}^2 \omega_{m,n}^2] / 2$$

здесь A - работа внешних объемных P_i^V и поверхностных P_i^F сил, U_V - объемная плотность потенциальной энергии, R_i - вектор перемещений, $R_{i,j}$ - градиент вектора перемещений (тензор стесненной дисторсии), ω_k^2 - псевдовектор свободных поворотов, которые по определению не могут быть представлены как ротор перемещений, δ_{ij} - тензор Кронекера, \mathcal{E}_{ijk} - псевдотензор Леви-Чивиты. Тензоры модулей имеют следующую структуру:

$$C_{ijmn}^{11} = \lambda^{11} \delta_{ij} \delta_{mn} + (\mu^{11} + \chi^{11}) \delta_{im} \delta_{jn} + (\mu^{11} - \chi^{11}) \delta_{in} \delta_{jm} \quad (2.2)$$

$$C_{ijmn}^{Cosserat} = C_1^C \delta_{ij} \delta_{mn} + (C_2^C + C_3^C) \delta_{im} \delta_{jn} + (C_2^C - C_3^C) \delta_{in} \delta_{jm}$$

λ^{11}, μ^{11} - классические коэффициенты Ламе, $\chi^{11}, \chi^{12}, \chi^{22}$ - неклассические модули, имеющие ту же размерность, что и классические модули, C_1^C, C_2^C, C_3^C - моментные модули, по размерности отличающиеся от классических модулей на размерность квадрата длины.

Эта теория характерна тем, что каждой точке среды приписывается шесть степеней свободы: три компоненты вектора перемещений R_i и три компоненты

псевдовектора свободных поворотов ω_k^2 , которые не являются вихрями поля перемещений. Таким образом, каждая точка такой среды ведет себя как абсолютно твердое тело. Независимые кинематические переменные R_i и ω_k^2 определяют кинематическую модель среды Коссера.

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии теории сред Коссера следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - 2\chi^{12} \omega_k^2 \mathcal{E}_{ijk} \\ m_k &= \frac{\partial U_V}{\partial \omega_k^2} = -2\chi^{12} R_{i,j} \mathcal{E}_{ijk} + 4\chi^{22} \omega_k^2 \\ m_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial \omega_{i,j}^2} = C_{ijmn}^{\text{Cosserat}} \omega_{m,n}^2\end{aligned}\quad (2.3)$$

Таким образом, теория сред Коссера допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: несимметричного тензора напряжений σ_{ij} , псевдовектора объемных моментов m_k и псевдотензора моментных напряжений m_{ij} .

Вариационное уравнение теории сред Коссера получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_i \delta \omega_i^2 + m_{ij} \delta \omega_{i,j}^2] dV = \\ &= \iiint [(\sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i + (m_{ij,j} - m_i) \delta \omega_i^2] dV + \\ &+ \oint\!\!\!\oint [(P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i + (-m_{ij} n_j) \delta \omega_i^2] dF = 0\end{aligned}\quad (2.4)$$

Вариационное уравнение теории сред Коссера в кинематических переменных:

$$\begin{aligned}\delta L &= \iiint [(C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + 2\chi^{12} \omega_{m,n}^2 \mathcal{E}_{mni} + P_i^V) \delta R_i + \\ &+ (2\chi^{12} R_{m,n} \mathcal{E}_{mni} - 4\chi^{22} \omega_i^2 + C_{ijmn}^{\text{Cosserat}} \omega_{m,nj}^2) \delta \omega_i^2] dV + \\ &+ \oint\!\!\!\oint [(P_i^F - C_{ijmn}^{11} n_j R_{m,n} - 2\chi^{12} \omega_m^2 n_n \mathcal{E}_{mni}) \delta R_i + (-C_{ijmn}^{\text{Cosserat}} n_j \omega_{m,n}^2) \delta \omega_i^2] dF = 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

Уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} (2\mu^{11} + \lambda^{11}) R_{j,ji} + (\mu^{11} + \chi^{11})(R_{i,jj} - R_{j,ji}) + 2\chi^{12} \omega_{m,n}^2 \mathcal{E}_{mni} + P_i^V = 0 \\ 2\chi^{12} R_{m,n} \mathcal{E}_{mni} - 4\chi^{22} \omega_i^2 + (C_2^C + C_3^C)(\omega_{i,jj}^2 - \omega_{j,ji}^2) + (C_1^C + 2C_2^C) \omega_{j,ji}^2 = 0 \end{cases}\quad (2.6)$$

Дивергенция уравнений равновесия моментов дает:

$$\frac{(C_1^C + 2C_2^C)}{4\chi^{22}}\omega_{,kk} - \omega = 0 \quad (2.7)$$

здесь введено обозначение $\omega = \omega_{i,i}^2$. Ротор уравнений равновесия сил при $\chi^{12} \neq 0$ дает:

$$(\omega_{i,jj}^2 - \omega_{j,ji}^2) = \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{2\chi^{12}} R_{p,jjq} \mathcal{E}_{pqi} + \frac{1}{2\chi^{12}} P_{p,q}^V \mathcal{E}_{pqi} \quad (2.8)$$

Тогда уравнение равновесия моментов можно записать относительно ω_i^2 в алгебраическом виде:

$$\omega_i^2 = \frac{\chi^{12}}{2\chi^{22}} R_{p,q} \mathcal{E}_{pqi} + \frac{(C_2^C + C_3^C)(\mu^{11} + \chi^{11})}{8\chi^{12}\chi^{22}} R_{p,jjq} \mathcal{E}_{pqi} + \frac{(C_2^C + C_3^C)}{8\chi^{12}\chi^{22}} P_{p,q}^V \mathcal{E}_{pqi} + \frac{(C_1^C + 2C_2^C)}{4\chi^{22}} \omega_{,i} \quad (2.9)$$

Подставляя ω_i^2 в уравнение равновесия сил, получим:

$$\begin{aligned} & (2\mu^{11} + \lambda^{11})R_{j,ji} + \left(\mu^{11} + \chi^{11} - \frac{\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}} \right) (R_{i,jj} - R_{j,ji}) - \\ & - \frac{(C_2^C + C_3^C)(\mu^{11} + \chi^{11})}{4\chi^{22}} (R_{i,jj} - R_{j,ji})_{,kk} + P_i^V - \frac{(C_2^C + C_3^C)}{4\chi^{22}} (P_{i,jj}^V - P_{j,ji}^V) = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

таким образом, теория сред Коссера может быть описана решением распадающейся системы уравнений относительно вектора перемещений R_i и псевдоскаляра ω :

$$\begin{aligned} & (2\mu^{11} + \lambda^{11})R_{j,ji} + \left(\mu^{11} + \chi^{11} - \frac{\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}} \right) (R_{i,jj} - R_{j,ji}) - \\ & - \frac{(C_2^C + C_3^C)(\mu^{11} + \chi^{11})}{4\chi^{22}} (R_{i,jj} - R_{j,ji})_{,kk} + P_i^V - \frac{(C_2^C + C_3^C)}{4\chi^{22}} (P_{i,jj}^V - P_{j,ji}^V) = 0 \quad (2.11) \\ & \frac{(C_1^C + 2C_2^C)}{4\chi^{22}} \omega_{,kk} - \omega = 0 \end{aligned}$$

При этом краевая задача при $\chi^{12} \neq 0$ остается связанной и содержит шесть граничных условий в каждой неособенной точке поверхности. Следует обратить внимание на то, что разрешающие уравнения теории не содержат одной из трех линейных комбинаций «моментных» модулей, а именно: $(C_2^C - C_3^C)$. Она фигурирует только в формулировке статических граничных условий на «моментные» напряжения.

2.2.2 Теория сред Джеремилло

Теория сред Джеремилло [94] является давно известной, но забытой, неклассической моделью сплошной среды. В общем случае лагранжиан L теории сред Джеремилло может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV$$

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{mn}^1 + C_{ijkml}^J \varepsilon_{ij,k}^1 \varepsilon_{mn,l}^1] / 2 \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{ij}^1 = (R_{i,j} + R_{j,i}) / 2$$

Из факта существования плотности потенциальной энергии следует, что тензоры модулей обладают следующим свойством симметрии:

$$C_{ijmn}^{11} = C_{mnij}^{11}$$

$$C_{ijkml}^J = C_{mnljk}^J \quad (2.13)$$

кроме того, так как тензор шестого ранга $\varepsilon_{ij,k}^1 \varepsilon_{mn,l}^1$ симметричен при перестановке индексов внутри пар i, j и m, n , антисимметричные по этим индексам компоненты тензора модулей C_{ijkml}^J не войдут в выражение потенциальной энергии $C_{ijkml}^J \varepsilon_{ij,k}^1 \varepsilon_{mn,l}^1 / 2$ и их можно без ущерба для общности положить равными нулю. Отсюда:

$$C_{ijmn}^{11} = \lambda^{11} \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu^{11} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$$

$$C_{ijkml}^J = C_1^J (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} +$$

$$+ \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn}) +$$

$$+ C_2^J (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl}) \quad (2.14)$$

Кинематическая модель теории сред Джеремилло является классической и определяется независимыми кинематическими переменными R_i .

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n}$$

$$m_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}} = C_{ijkml}^J R_{m,nl} \quad (2.15)$$

Таким образом, теория сред Джеремилло допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: симметричного тензора напряжений σ_{ij} и тензора моментных напряжений m_{ijk} .

Вариационное уравнение теории сред Джеремилло получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta A - \iiint (\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_{ijk} \delta R_{i,jk}) dV = \\
&= \delta A - \iiint (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) \delta R_{i,j} dV - \oint m_{ijk} n_k \delta R_{i,j} dF = \\
&= \iiint (\sigma_{ij,j} - m_{ijk,jk} + P_i^V) \delta R_i dV + \\
&+ \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) n_j] \delta R_i - m_{ijk} n_k \delta R_{i,j} \} dF = \\
&= \iiint (\sigma_{ij,j} - m_{ijk,jk} + P_i^V) \delta R_i dV + \\
&+ \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) n_j + (m_{ijk} \delta_{pj}^* n_k)_{,p}] \delta R_i - m_{ijk} n_j n_k \delta \dot{R}_i \} dF - \\
&\quad - \sum \oint m_{ijk} v_j n_k \delta R_i ds = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

здесь точкой над переменной обозначена нормальная к поверхности производная $\dot{R}_i = R_{i,j} n_j$. $\delta_{jk}^* = \delta_{jk} - n_j n_k$ - «плоский» тензор Кронекера, v_j - орт криволинейной ортогональной системы координат, связанной с ребром кусочно-гладкой поверхности, ограничивающей тело $s_i v_j n_k \mathcal{E}_{ijk} = 1$, s_i - орт касательной к ребру, $f_i = m_{ijk} v_j n_k$ - «реберные» силы.

В перемещениях вариационное уравнение теории сред Джеремилло имеет вид:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \iiint (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} - C_{ijkml}^J R_{m,nlkj} + P_i^V) \delta R_i dV + \\
&+ \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - C_{ijkml}^J R_{m,nlk}) n_j + (C_{ijkml}^J \delta_{pj}^* n_k R_{m,nl})_{,p}] \delta R_i - \\
&\quad - C_{ijkml}^J n_j n_k R_{m,nl} \delta \dot{R}_i \} dF - \sum \oint C_{ijkml}^J v_j n_k R_{m,nl} \delta R_i ds = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

таким образом, уравнения Эйлера теории дают систему трех уравнений четвертого порядка с шестью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности.

Характерной особенностью теории является наличие условий на ребрах:

$$\sum \oint f_i \delta R_i ds = 0 \tag{2.18}$$

которые можно трактовать как условия непрерывности (при переходе по поверхности через ребро) вектора перемещений R_i и вектора «реберных» сил $f_i = C_{ijkml}^J v_j n_k R_{m,nl}$.

2.2.3 Теория сред Аэро-Кувшинского (моментная теория упругости)

Теория сред Аэро-Кувшинского [95] также является неклассической моделью сплошной среды. В отличие от теории сред Коссера в ней за дополнительные параметры состояния выбраны не свободные повороты ω_i^2 , а вихри перемещений $\omega_i^1 = -R_{m,n} \mathcal{E}_{mni} / 2$. Доказано [62], что, если постулировать пропорциональность свободных поворотов вихрям перемещений (гипотезу Аэро-Кувшинского), теория сред Аэро-Кувшинского является строгим следствием теории Коссера. С другой стороны, теория сред Аэро-Кувшинского может рассматриваться как некая альтернатива теории Джеремилло. Действительно, если градиентная часть потенциальной энергии в теории Джеремилло содержит только градиенты симметричной части градиента перемещений (тензор стесненных деформаций), то градиентная часть в теории Аэро-Кувшинского содержит только градиенты антисимметричной части градиента перемещений (тензор стесненных поворотов или псевдовектор стесненных поворотов). Лагранжиан L теории сред Аэро-Кувшинского может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV \quad (2.19)$$

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} \mathcal{E}_{ij}^1 \mathcal{E}_{mn}^1 + 4C_{pqkl}^{AK} \omega_{p,k}^1 \omega_{q,l}^1] / 2$$

Из факта существования плотности потенциальной энергии следует, что тензоры модулей обладают следующим свойством симметрии:

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^{11} &= C_{nmij}^{11} \\ C_{ijmn}^{AK} &= C_{nmij}^{AK} \end{aligned} \quad (2.20)$$

причем при формулировке теории заранее требовалась такая симметрия тензора «моментных» модулей, чтобы выражение объемной плотности потенциальной энергии содержало только градиенты вихрей перемещений.

Действительно, при выбранной структуре тензора C_{ijmn}^{AK} , выражение объемной плотности потенциальной энергии приводится к виду:

$$\begin{aligned}
& 4C_{pkql}^{AK} \omega_{p,k}^1 \omega_{q,l}^1 / 2 = \\
& = 4C_{pkql}^{AK} (-R_{i,jk} \mathcal{E}_{ijp} / 2) (-R_{m,nl} \mathcal{E}_{mnq} / 2) / 2 = (C_{pkql}^{AK} \mathcal{E}_{ijp} \mathcal{E}_{mnq}) R_{i,jk} R_{m,nl} / 2 = \\
& = C_{ijkml}^{AK} R_{i,jk} R_{m,nl} / 2
\end{aligned} \tag{2.21}$$

кроме того, так как псевдотензор второго ранга $\omega_{p,k}^1$ имеет нулевой след, свертки $C_{pkql}^{AK} \delta_{pk}$ и $C_{pkql}^{AK} \delta_{ql}$, содержащие один и тот же «моментный» модуль, не войдут в выражение потенциальной энергии $C_{ijkml}^{AK} R_{i,jk} R_{m,nl} / 2$, и его можно без ущерба для общности положить равными нулю. Отсюда:

$$\begin{aligned}
C_{ijmn}^{11} &= \lambda^{11} \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu^{11} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) \\
C_{ijkml}^{AK} &= C_{pkql}^{AK} \mathcal{E}_{ijp} \mathcal{E}_{mnq} \\
C_{pkql}^{AK} &= (C_1^{AK} + C_2^{AK}) \delta_{pq} \delta_{kl} + (C_1^{AK} - C_2^{AK}) \delta_{pl} \delta_{kq}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Отметим, что кинематическая модель теории сред Аэро-Кувшинского является классической и определяется независимыми кинематическими переменными R_i .

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} \\
m_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial \omega_{i,j}^1} = 4C_{ijmn}^{AK} \omega_{m,n}^1
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Таким образом, теория сред Аэро-Кувшинского допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: симметричного тензора напряжений σ_{ij} и псевдотензора моментных напряжений m_{ij} .

Вариационное уравнение теории сред Аэро-Кувшинского получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_{ij} \delta \omega_{i,j}^1] dV = \\
&= \iiint (\sigma_{ij,j} + m_{pq,qj} \mathcal{E}_{ijp} / 2 + P_i^V) \delta R_i dV + \\
&+ \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} + m_{pq,q} \mathcal{E}_{ijp} / 2) n_j - (m_{pq} n_q \delta_{jk}^* \mathcal{E}_{ijp} / 2)_{,k}] \delta R_i + (m_{pq} n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2) n_j \delta \dot{R}_i \} dF - \\
&- \sum \oint (m_{pq} n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2) v_j \delta R_i ds = 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

здесь точкой над переменной обозначена нормальная к поверхности производная $\dot{R}_i = R_{i,j}n_j$. $\delta_{jk}^* = \delta_{jk} - n_jn_k$ - «плоский» тензор Кронекера, v_j - орт криволинейной ортогональной системы координат, связанной с ребром кусочно-гладкой поверхности, ограничивающей тело $s_i v_j n_k \mathcal{E}_{ijk} = 1$, s_i - орт касательной к ребру, $f_i = (m_{pq}n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2)v_j$ - «реберные» силы.

В кинематических переменных (перемещениях) вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint [(2\mu^{11} + \lambda^{11})R_{k,ki} + \mu^{11}(R_{i,jj} - R_{j,ij}) - (C_1^{AK} + C_2^{AK})(R_{i,jj} - R_{j,ij})_{,qq} + P_i^V] \delta R_i dV + \\ & + \oint \{P_i^F - \lambda^{11}R_{k,k}n_i - \mu^{11}(R_{i,j} + R_{j,i})n_j + (C_1^{AK} + C_2^{AK})(R_{i,j} - R_{j,i})_{,qq}n_j + \\ & + [(C_1^{AK} + C_2^{AK})R_{m,nq}n_q \delta_{jk}^* \mathcal{E}_{mnp} \mathcal{E}_{ijp} + (C_1^{AK} - C_2^{AK})R_{m,np}n_q \delta_{jk}^* \mathcal{E}_{mnq} \mathcal{E}_{ijp}]_k\} \delta R_i dF - \\ & - [(C_1^{AK} + C_2^{AK})R_{m,nq} \mathcal{E}_{mnp} + (C_1^{AK} - C_2^{AK})R_{m,np} \mathcal{E}_{mnq}] n_q n_j \mathcal{E}_{ijp} \delta \dot{R}_i dF - \\ & - \sum \oint [(C_1^{AK} + C_2^{AK})n_k v_j \mathcal{E}_{mnp} \mathcal{E}_{ijp} + (C_1^{AK} - C_2^{AK})n_q v_j \mathcal{E}_{mnq} \mathcal{E}_{ijk}] R_{m,nk} \delta R_i ds = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Следовательно, формулировка теории сред Аэро-Кувшинского определяется тремя дифференциальными уравнениями повышенного (четвертого) порядка специального вида. Специальный вид определен тем, что из двух векторов, которые возможно построить из вектора перемещений путем четырехкратного дифференцирования, в уравнениях фигурирует только одна их линейная комбинация. Спектр краевых задач определен пятью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности. Действительно, при выделении из $\delta \dot{R}_i$ ее проекции по нормали к поверхности, можно убедиться, что соответствующий «статический» множитель тождественно равен нулю за счет свертки симметричного $n_i n_j$ и антисимметричного \mathcal{E}_{ijp} тензоров по индексам i, j :

$$\begin{aligned} (m_{pq}n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2)n_j \delta \dot{R}_i &= (m_{pq}n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2)n_j \delta \dot{R}_k (\delta_{ik}^* + n_i n_k) = \\ &= (m_{pq}n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2)n_j \delta (\dot{R}_k \delta_{ik}^*) + (m_{pq}n_q / 2)(n_i n_j \mathcal{E}_{ijp}) \delta (\dot{R}_k n_k) = (m_{pq}n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2)n_j \delta (\dot{R}_k \delta_{ik}^*) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Характерной особенностью теории является наличие условий на ребрах:

$$\sum \oint f_i \delta R_i ds = 0 \quad (2.27)$$

которые можно трактовать как условия непрерывности (при переходе по поверхности через ребро) вектора перемещений R_i и вектора «реберных» сил f_i .

2.2.4 Теория сред Миндлина

Теория сред Миндлина [2] является наиболее общей неклассической моделью сплошной среды. В отличие от теории Коссера в ней учитываются не только антисимметричная часть тензора свободной дисторсии (свободные повороты), а все компоненты D_{ij}^2 . Так же не делается никаких предположений о структуре тензора моментных модулей. Лагранжиан L теории Миндлина может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV$$

$$A = \iiint P_i^V R_i dV + \oint P_i^F R_i dF \quad (2.28)$$

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijkml}^M D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2] / 2$$

Из факта существования плотности потенциальной энергии следует, что тензоры модулей обладают следующим свойством симметрии:

$$C_{ijmn}^{pq} = C_{mnij}^{qp} \quad p, q = 1, 2$$

$$C_{ijkml}^M = C_{mlijk}^M \quad (2.29)$$

Отсюда:

$$C_{ijmn}^{pq} = \lambda^{pq} \delta_{ij} \delta_{mn} + (\mu^{pq} + \chi^{pq}) \delta_{im} \delta_{jn} + (\mu^{pq} - \chi^{pq}) \delta_{in} \delta_{jm} \quad (2.30)$$

$$C_{ijkml}^M = C_1^M (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk}) + C_2^M (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik}) +$$

$$+ C_3^M (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) + C_4^M (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li}) +$$

$$+ C_5^M \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_6^M \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + C_7^M \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + C_8^M \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} +$$

$$+ C_9^M \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + C_{10}^M \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + C_{11}^M \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk} \quad (2.31)$$

Отметим, что кинематическая модель теории сред Миндлина является наиболее сложной из всех общепризнанных теорий и определяется независимыми кинематическими переменными R_i и D_{ij}^2 . В отличие от теории Коссера, каждая точка среды Миндлина ведет себя не как абсолютно твердое тело, а как упругое тело. Соответственно, независимыми степенями свободы являются не только вектор перемещений R_i и псевдовектор свободных поворотов $\omega_i^2 = -D_{nm}^2 \mathcal{E}_{nmi} / 2$ (что свойственно средам Коссера), но и тензор свободных деформаций $\varepsilon_{ij}^2 = (D_{ij}^2 + D_{ji}^2) / 2$.

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии U_V следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^1 &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 \\ \sigma_{ij}^2 &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^2} = C_{ijmn}^{21} R_{m,n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 \\ m_{ijk} &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij,k}^2} = C_{ijkml}^M D_{mn,l}^2\end{aligned}\quad (2.32)$$

Таким образом, теория сред Миндлина допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: в общем случае несимметричных тензоров напряжений σ_{ij}^1 и σ_{ij}^2 второго ранга и тензора моментных напряжений m_{ijk} третьего ранга.

Вариационное уравнение теории сред Миндлина получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta R_{i,j} + \sigma_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 + m_{ijk} \delta D_{ij,k}^2] dV = \\ &= \iiint [(\sigma_{ij,j}^1 + P_i^V) \delta R_i + (m_{ijk,k} - \sigma_{ij}^2) \delta D_{ij}^2] dV + \\ &+ \oint\!\!\!\oint \{(P_i^F - \sigma_{ij}^1 n_j) \delta R_i + (-m_{ijk} n_k) \delta D_{ij}^2\} dF = 0\end{aligned}\quad (2.33)$$

В кинематических переменных (перемещениях и свободных дисторсиях) вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}\delta L &= \iiint [(C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + C_{ijmn}^{12} D_{mn,j}^2 + P_i^V) \delta R_i + \\ &+ (C_{ijkml}^M D_{mn,lk}^2 - C_{ijmn}^{21} R_{m,n} - C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2) \delta D_{ij}^2] dV + \\ &+ \oint\!\!\!\oint \{[P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) n_j] \delta R_i + (-C_{ijkml}^M n_k D_{mn}^2) \delta D_{ij}^2\} dF = 0\end{aligned}\quad (2.34)$$

следовательно, формулировка теории сред Миндлина определяется двенадцатью дифференциальными уравнениями второго порядка. Спектр краевых задач определен двенадцатью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности.

2.2.5 Теория сред Тупина

Теория сред Тупина [1] является одной из наиболее популярных неклассических моделей сплошной среды. В отличие от теории Аэро-Кувшинского

и теории Джеремилло в ней не делается никаких предположений о структуре тензора моментных модулей. Лагранжиан L теории Тупина может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV \quad (2.35)$$

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijkml}^T R_{i,jk} R_{m,nl}] / 2$$

Из факта существования плотности потенциальной энергии следует, что тензоры модулей обладают следующим свойством симметрии:

$$C_{ijmn}^{11} = C_{mnij}^{11} \quad (2.36)$$

$$C_{ijkml}^T = C_{mnljik}^T$$

Кроме того, в силу симметрии тензоров стесненных кривизн $R_{i,jk}$ и $R_{m,nl}$ относительно перестановок индексов j,k и n,l , тензор Тупина C_{ijkml}^T так же должен быть симметричным при перестановках в этих парах индексов. Отсюда следует:

$$C_{ijkml}^T = C_1^T (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) +$$

$$+ C_2^T (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{ij} \delta_{ik} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml}) +$$

$$+ C_3^T (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) +$$

$$+ C_4^T (\delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk}) +$$

$$+ C_5^T \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} \quad (2.37)$$

Отметим, что кинематическая модель теории сред Тупина, так же, как и в теориях Аэро-Кувшинского и Джеремилло, является классической и определяется независимыми кинематическими переменными R_i .

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии U_V следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} \quad (2.38)$$

$$m_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}} = C_{ijkml}^T R_{m,nl}$$

Таким образом, теория сред Тупина допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: симметричного тензора напряжений σ_{ij} второго ранга и тензора моментных напряжений m_{ijk} третьего ранга.

Вариационное уравнение теории сред Тупина получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_{ijk} \delta R_{i,jk}] dV = \\
&= \delta A - \iiint (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) \delta R_{i,j} dV - \oint m_{ijk} n_k \delta R_{i,j} dF = \\
&= \iiint (\sigma_{ij,j} - m_{ijk,jk} + P_i^V) \delta R_i dV + \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) n_j] \delta R_i - \\
&- m_{ijk} n_k \delta R_{i,p} (\delta_{pj}^* + n_p n_j) \} dF = \iiint (\sigma_{ij,j} - m_{ijk,jk} + P_i^V) \delta R_i dV + \\
&+ \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) n_j + (m_{ijk} \delta_{pj}^* n_k)_{,p}] \delta R_i - m_{ijk} n_j n_k \delta \dot{R}_i \} dF - \\
&- \sum \oint m_{ijk} v_j n_k \delta R_i ds = 0
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Отметим, что формулировки теорий Тупина, Аэро-Кувшинского и Джеремилло в «напряжениях» совпадают, а в перемещениях отличаются в силу различной структуры тензоров моментных модулей C_{mnljk}^T , C_{mnljk}^{AK} и, соответственно, C_{mnljk}^J .

В кинематических переменных (перемещениях) вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \iiint (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} - C_{ijkml}^T R_{m,nlk} + P_i^V) \delta R_i dV + \\
&+ \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - C_{ijkml}^T R_{m,nlk}) n_j + (C_{ijkml}^T \delta_{pj}^* n_k R_{m,nl})_{,p}] \delta R_i \\
&- C_{ijkml}^T n_j n_k R_{m,nl} \delta \dot{R}_i \} dF - \sum \oint C_{ijkml}^T v_j n_k R_{m,nl} \delta R_i ds = 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Другими словами, формулировка теории сред Тупина определяется тремя дифференциальными уравнениями четвертого порядка. Спектр краевых задач определен шестью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности.

Общей характерной особенностью теорий Тупина, Аэро-Кувшинского и Джеремилло является наличие условий на ребрах.

2.2.6 «Простейшая» теория сред с сохраняющимися дислокациями

«Простейший» вариант теории сред с сохраняющимися дислокациями (ССД) сформулирован в предположении существования в среде полей сохраняющихся дислокаций [96]. Эта модель характеризуется тем, что градиентная часть

потенциальной энергии является квадратичной формой компонентов псевдотензора $\Xi_{ij} = D_{ip,q}^2 \mathcal{E}_{pqj}$ плотности дислокаций Де Вита. Наличие ненулевого псевдотензора плотности дислокаций определяет существование в среде полей дислокаций. Тождественное равенство нулю дивергенции этого псевдотензора определяет локальный закон сохранения полей дислокаций. Таким образом, в данной модели поля дислокаций не могут рождаться или исчезать, а только локально менять свою концентрацию. Лагранжиан L теории может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{BL} \Xi_{ij} \Xi_{mn}] dV \quad (2.41)$$

Тензор моментных модулей C_{ipmq}^{BL} имеет следующую структуру:

$$C_{ipmq}^{BL} = C_3^{BL} \delta_{ip} \delta_{mq} + (C_1^{BL} + C_2^{BL}) \delta_{im} \delta_{pq} + (C_1^{BL} - C_2^{BL}) \delta_{iq} \delta_{pm} \quad (2.42)$$

Отметим, что кинематическая модель теории ССД, совпадает с кинематической моделью теории Миндлина и определяется независимыми кинематическими переменными R_i и D_{ij}^2 .

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии U_V следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^1 &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 \\ \sigma_{ij}^2 &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^2} = C_{ijmn}^{21} R_{m,n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 \\ m_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial \Xi_{ij}} = C_{ijmn}^{BL} \Xi_{mn} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Таким образом, теория ССД допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: в общем случае несимметричных тензоров напряжений σ_{ij}^1 и σ_{ij}^2 второго ранга и псевдотензора моментных напряжений m_{ij} второго ранга.

Вариационное уравнение теории ССД получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta R_{i,j} + \sigma_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 + m_{ij} \delta \Xi_{ij}] dV = \\
&= \delta A - \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta R_{i,j} + \sigma_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 + m_{in} \delta (D_{ij,k}^2 \mathcal{E}_{jkn})] dV = \\
&= \delta A - \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta R_{i,j} + (-m_{in,k} \mathcal{E}_{jkn} + \sigma_{ij}^2) \delta D_{ij}^2] dV - \oint m_{in} n_k \mathcal{E}_{jkn} \delta D_{ij}^2 dF = \\
&= \iiint [(\sigma_{ij,j}^1 + P_i^V) \delta R_i + (m_{in,k} \mathcal{E}_{jkn} - \sigma_{ij}^2) \delta D_{ij}^2] dV + \\
&\quad + \oint [(P_i^F - \sigma_{ij}^1 n_j) \delta R_i - m_{in} n_k \mathcal{E}_{jkn} \delta D_{ij}^2] dF = 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

В кинематических переменных (перемещениях и свободных дисторсиях) вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \iiint [(C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + C_{ijmn}^{12} D_{mn,j}^2 + P_i^V) \delta R_i + (C_{ijknml}^{BL} D_{mn,lk}^2 - C_{ijmn}^{21} R_{m,n} - C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2) \delta D_{ij}^2] dV + \\
&\quad + \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) n_j] \delta R_i + (-C_{ijknml}^{BL} n_k D_{mn}^2) \delta D_{ij}^2 \} dF = 0
\end{aligned} \tag{2.45}$$

здесь $C_{ijknml}^{BL} = C_{ipmq}^{BL} \mathcal{E}_{jkp} \mathcal{E}_{nlq}$. Таким образом, формулировка теории ССД определяется двенадцатью дифференциальными уравнениями второго порядка специального вида. Специальный вид определен тем, что дивергенция уравнений равновесия моментов приводит к локальному закону сохранения $\sigma_{ij,j}^2 = 0$. Следовательно, общий дифференциальный порядок будет ниже, чем в теории Миндлина. Спектр краевых задач определен девятью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности. В этом можно убедиться, обратив внимание на то, что в возможной работе моментных силовых факторов содержится только шесть из девяти слагаемых:

$$\begin{aligned}
&\oint m_{in} n_k \mathcal{E}_{jkn} \delta D_{ij}^2 dF = \\
&= \oint m_{in} n_k \mathcal{E}_{jkn} \delta D_{im}^2 (\delta_{mj}^* + n_m n_j) dF = \\
&= \oint m_{in} n_k \mathcal{E}_{jkn} \delta (D_{im}^2 \delta_{mj}^*) dF + \oint m_{in} (n_j n_k \mathcal{E}_{jkn}) \delta (D_{im}^2 n_m) dF = 0
\end{aligned} \tag{2.46}$$

действительно, второй интеграл тождественно равен нулю в силу свертки симметричного тензора $n_j n_k$ с антисимметричным псевдотензором \mathcal{E}_{jkn} . Следовательно, в формулировках краевых задач «простейшей» теории ССД фигурируют только шесть неклассических граничных условий (в дополнение к трем классическим).

2.2.7 Сравнительный анализ существующих теорий

Существующие градиентные теории можно разделить на две группы. В первую входят теории Тупина, Аэро-Кувшинского и Джеремилло. Во вторую – теории Миндлина, Коссера и сред с сохраняющимися дислокациями.

Первая группа характеризуется тем, что все теории этой группы построены на основе классической кинематической модели – каждой точке среды эти теории приписывают три степени свободы – компоненты вектора перемещений. Соответственно, и уравнений равновесия в этих теориях три.

Вторая группа, в противоположность первой, характеризуется тем, что теории этой группы построены на основе неклассической кинематической модели. Каждой точке среды эти теории приписывают дополнительные степени свободы: в теории Коссера – это три компоненты псевдовектора свободных поворотов, а в теории Миндлина и в теории ССД - три компоненты псевдовектора свободных поворотов и шесть компонент тензора свободных деформаций. Соответственно, и уравнений равновесия в этих теориях больше: в теории Коссера – шесть, в теориях Миндлина и ССД – двенадцать.

Теория Тупина является наиболее общей теорией первой группы и содержит теории Аэро-Кувшинского и Джеремилло как свои строгие частные случаи. Теория Миндлина является наиболее общей теорией второй группы и содержит теорию Коссера и теорию ССД как свои строгие частные случаи. Таким образом, имеется возможность проводить сравнительный анализ групп, сравнивая теории Тупина и Миндлина, как максимально общих теорий в своих группах.

Запишем лагранжианы обеих теорий в унифицированном виде, записав потенциальные энергии в терминах стесненных $D_{ij}^1 = R_{i,j}$ и свободных D_{ij}^2 дисторсий:

В теории Тупина:

$$U_V = \frac{1}{2} [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + C_{ijkml}^{11} D_{ij,k}^1 D_{ml,l}^1]$$

В теории Миндлина:

$$U_V = \frac{1}{2} [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2]$$

Такой унифицированный вид позволяет придать потенциальной энергии дисторсий в обеих теориях общий универсальный вид:

$$\frac{1}{2} C_{ijmn}^{pq} D_{ij}^p D_{mn}^q = \frac{1}{2} [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2] \quad p, q = 1, 2$$

Потенциальные энергии кривизн:

$$U_V = \frac{1}{2} [C_{ijmn}^{pq} D_{ij}^p D_{mn}^q + C_{ijkml}^{pq} D_{ij,k}^p D_{mn,l}^q]$$

нельзя записать подобным же образом. В этом случае получается обобщение теорий Миндлина и Тупина одновременно (за счет появления слагаемых, билинейных по кривизнам разных сортов, связанных со стесненными и свободными дисторсиями):

$$\begin{aligned} U_V &= [C_{ijmn}^{pq} D_{ij}^p D_{mn}^q + C_{ijkml}^{pq} D_{ij,k}^p D_{mn,l}^q] / 2 = \\ &= [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + \\ &+ C_{ijkml}^{11} D_{ij,k}^1 D_{mn,l}^1 + 2C_{ijkml}^{12} D_{ij,k}^1 D_{mn,l}^2 + C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2] / 2 \end{aligned}$$

Если лишить такую обобщенную среду части своих механических свойств, положив нулю тензоры $C_{ijmn}^{12}, C_{ijmn}^{22}, C_{ijkml}^{12}, C_{ijkml}^{22}$, получим теорию Тупина, как строгий частный случай, положив нулю тензоры $C_{ijkml}^{11}, C_{ijkml}^{12}$, получим теорию Миндлина, как другой строгий частный случай. Таким образом, постулировано обобщение всех известных градиентных теорий, которое содержит их как свои строгие частные случаи.

Обобщенные теории упругости даже для изотропных материалов включают много дополнительных физических постоянных, экспериментальное определение которых затруднено или вовсе невозможно. В связи с этим значительный интерес представляют прикладные теории с малым числом дополнительных физических параметров. Однако процесс редукции нелокальных теорий, имеющий цель уменьшить число дополнительных параметров является не вполне тривиальным и может приводить к некорректным теориям.

2.3 Общая структура нелокальных теорий упругости

Сформулируем обобщенную модель деформирования в перемещениях. Предполагаем, что имеют место расширенные соотношения Коши, определяющие тензор дисторсии D_{ij}^1 по вектору непрерывных перемещений:

$$d_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = R_{i,j}; \quad D_{ij}^1 = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k e_{ijk} \quad (2.47)$$

γ_{ij} - компоненты тензора девиатора деформаций, θ - объемная деформация, ω_k - псевдовектор поворотов или упругих вращений, e_{ijk} - компоненты тензора Леви-Чивиты, δ_{ij} - тензор Кронекера.

Полагаем, что для тензора дисторсий выполняются однородные условия Папковича:

$$\frac{\partial D_{in}^1}{\partial x_m} e_{nmj} = 0 \quad (2.48)$$

Следовательно, по тензору дисторсии D_{ij}^1 можно однозначно восстановить вектор перемещений, используя формулы Чезаро: $R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_i} \left[\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k e_{ijk} \right] dy_j$, здесь dy_j - элемент выбранной траектории интегрирования, R_i^0 - значение вектора R_i в точке M_0 . Тензор дисторсии D_{ij}^1 в этом случае называют тензором стесненных дисторсий, акцентируя внимание на том, что он однозначно связан с вектором перемещений.

В общем случае будем рассматривать среду с полями дефектов - дислокаций. Следовательно, будем полагать, что наряду с непрерывными перемещениями R_i имеется поле дефектов, которое определяется плотностью дислокаций Ξ_{ij} . Если в среде имеются поля дефектов, то наряду с тензором стесненных деформаций деформационное состояние среды определяется также непрерывным тензором свободных дисторсий β_{ij} , отражающих наличие полей дефектов, которые не связаны с полем перемещений. Поэтому для свободных дисторсий имеют место неоднородные условия Папковича [22]:

$$\frac{\partial \beta_{in}}{\partial x_m} e_{nmj} = \Xi_{ij} \neq 0 \quad (2.49)$$

Правая часть уравнения (2.49) является плотностью дислокаций. Следовательно, это уравнение можно рассматривать как определение характеристики полей дефектов - плотности дислокаций. Учитывая равенства (2.48) и (2.49) можем найти полный тензор дисторсий:

$$D_{ij} = D_{ij}^1 + \beta_{ij} \quad (2.50)$$

Следует учесть, что только тензор стесненных дисторсий D_{ij}^1 в правой части равенства (2.50) может быть записан через вектор перемещений R_i с помощью соотношения Коши, следовательно:

$$D_{ij} = D_{ij}^1 + \beta_{ij} = R_{i,j} + \beta_{ij}, \quad R_{i,j} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \quad (2.51)$$

Соотношениями (2.48) - (2.50) полностью определяется кинематическая часть моделей сред с полями дефектов - дислокаций.

Существенно, что уравнение (2.49) является неоднородным в случае существования полей дефектов. Иначе тензор β_{in} был бы интегрируемым, его можно было бы отождествить с тензором D_{ij}^1 и он определял бы непрерывное поле перемещений с помощью формулы Чезаро, а не поле дефектов.

Обратим внимание, что именно при определении кинематической стороны моделей сред с полями дефектов - дислокаций (модели сред Миндлина) в некоторых научных публикациях допускаются ошибки. Они связаны с тем, что соотношения Коши навязываются полными дисторсиями, забывая, что для полных дисторсий условия интегрируемости не выполняются $\partial D_{in} / \partial x_m e_{nmj} = \Xi_{ij} \neq 0$ в силу соотношений (2.49), (2.50). Предположим, что подобное недоразумение могло возникнуть, в силу неверной аналогии с термоупругостью, где соотношения Коши справедливы для полных деформаций.

2.4 Условия симметрии в градиентных теориях упругости

Рассмотрим плотность потенциальной энергии в градиентной теории упругости:

$$\begin{aligned} U(R_{i,j}, R_{i,jk}) &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}R_{i,j} + \mu_{ijk}R_{i,jk}) = \\ &= \frac{1}{2}[C_{ijkl}R_{i,j}R_{k,l} + A_{ijklmn}R_{i,jk}R_{l,mn} + 2B_{lmijk}R_{l,m}R_{i,jk}] \end{aligned} \quad (2.52)$$

В данной постановке плотность потенциальной энергии (2.52) полностью определяет физическую модель, которая строится с помощью формул Грина:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}R_{k,l} + B_{ijklm}R_{k,lm}, \quad m_{ijk} = B_{lmijk}R_{l,m} + A_{ijklmn}R_{l,mn} \quad (2.53)$$

В общем случае компоненты A_{ijklmn} , B_{lmijk} и C_{ijkl} упругих тензоров A , B и C удовлетворяют условию потенциальности:

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad A_{ijklmn} = A_{lmnijk} \quad (2.54)$$

но не удовлетворяют условиям симметрии, соответствующим теории деформаций. Если дополнительно удовлетворить условия симметрии деформаций, то получим:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad B_{ijklm} = B_{jiklm} = B_{ijlkm}, \quad A_{ijklmn} = A_{ijkmln} \quad (2.55)$$

В результате, определяющие соотношения (2.53) записываются в деформациях:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + B_{ijklm}\varepsilon_{kl,m}, \quad m_{ijk} = B_{lmijk}\varepsilon_{lm} + A_{ijklmn}\varepsilon_{lm,n} \quad (2.56)$$

Рассмотрим снова общий случай изотропного материала. Для центрально симметричных материалов тензор пятого ранга B отсутствует. В результате число независимых упругих постоянных материала уменьшается, а определяющие соотношения градиентной теории дисторсий (2.53) становятся несвязанными:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}R_{k,l}, \quad m_{ijk} = A_{ijklmn}R_{k,lm}, \quad C_{ijkl} \neq C_{ijlk}, \quad A_{ijklmn} \neq A_{ijkmln} \quad (2.57)$$

Соответственно, для градиентной теории деформаций (2.55) вместо (2.56) получим:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad m_{ijk} = A_{ijklmn}\varepsilon_{kl,m} \quad (2.58)$$

Соотношения (2.58) могут быть представлены в форме (2.57), если воспользоваться равенством $\varepsilon_{ij} = (R_{i,j} + R_{j,i})/2$.

Остановимся более подробно на градиентной части плотности потенциальной энергии деформации $A_{ijklmn}R_{i,jk}R_{l,mn}/2$. Обратим внимание на то, что

вторые производные от компонент вектора перемещений $R_{i,jk}$ являются компонентами тензора второго ранга, и удовлетворяют условию симметрии в отношении перестановки индексов в последней паре:

$$R_{i,jk} = R_{i,kj} \quad (2.59)$$

Условие симметрии (2.59), является необходимым и достаточным условием непрерывности первых производных вектора перемещений. Это качество непрерывных полей перемещений отмечается специально, как характерное свойство градиентных теорий упругости, поскольку для таких теорий градиентная часть потенциальной энергии является квадратичной формой кривизн перемещений.

Рассмотрим физическое соотношение для тензора моментных напряжений (2.57) и выделим в тензоре модулей упругости симметричные и антисимметричные составляющие по индексам, соответствующим порядку дифференцирования:

$$m_{ijk} = A_{ijklmn} R_{l,mn} = (1/2) \left[(A_{ijklmn} + A_{ijklnm}) + (A_{ijklmn} - A_{ijklnm}) \right] R_{l,mn} \quad (2.60)$$

Антисимметричная часть тензора градиентных модулей $(A_{ijklmn} - A_{ijklnm})/2$ в (2.60) не будет входить в выражение для неклассической плотности энергии деформации $A_{ijklmn} R_{i,jk} R_{l,mn}$ и, поэтому, является энергетически невидимой. Только симметричная часть тензора градиентных модулей A_{ijklmn} является энергетически существенной. Псевдотензор моментных напряжений m_{ijk} может быть представлен в виде следующего разложения:

$$m_{ijk} = (1/2) (m_{ijk} + m_{ikj}) + (1/2) (m_{ijk} - m_{ikj}) = \hat{m}_{ijk} + \tilde{m}_{ijk} \quad (2.61)$$

где \hat{m}_{ijk} , \tilde{m}_{ijk} - компоненты симметричного и антисимметричного тензоров \hat{m} и \tilde{m} соответственно.

Так как в градиентной теории упругости в силу симметрии тензора $R_{l,mn}$ по порядку дифференцирования имеет место равенство $\delta R_{l,mn} = \delta R_{l,nm}$, то только симметричная часть \hat{m}_{ijk} тензора моментов определяет вариацию градиентной части плотности потенциальной энергии $\delta U = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \hat{m}_{ijk} \delta R_{i,jk}$. Следовательно, и

уравнения равновесия и естественные граничные условия определяются только симметричной частью тензоров моментов по порядку дифференцирования. Антисимметричная часть является энергетически невидимой и должна быть опущена.

Приведем математическое доказательство этого утверждения. Рассмотрим вариацию плотности упругой энергии δU :

$$\delta U = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_{ijk} \delta R_{i,jk} \quad (2.62)$$

Так как $R_{i,jk} = R_{i,kj}$, то вариация $\delta R_{i,jk}$ в (2.62) не может использоваться как свободная независимая переменная. Следуя методу множителей Лагранжа, записываем:

$$\delta \bar{U} = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_{ijk} \delta R_{i,jk} + \lambda_{ijk} \delta \tilde{R}_{i,jk} \quad (2.63)$$

где $\delta \bar{U}$ - расширенный функционал, $\tilde{R}_{i,jk}$ - компоненты антисимметричной части второго градиента вектора перемещений $\nabla \nabla R$ в (2.62), (2.63) и λ_{ijk} - компоненты тензора третьего ранга - неизвестного пока тензора множителей Лагранжа.

Используя разложение (2.61) для тензора m_{ijk} и $\delta R_{i,jk}$, найдем:

$$m_{ijk} \delta R_{i,jk} = \hat{m}_{ijk} \delta \hat{R}_{i,jk} + \tilde{m}_{ijk} \delta \tilde{R}_{i,jk}$$

и соответственно:

$$\delta \bar{U} = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \hat{m}_{ijk} \delta \hat{R}_{i,jk} + (\lambda_{ijk} + \tilde{m}_{ijk}) \delta \hat{R}_{i,jk}$$

Добьемся исключения $\delta \tilde{R}_{i,jk}$, используя свойства множителей Лагранжа и полагая $\lambda_{ijk} = -\tilde{m}_{ijk}$. В результате из (2.63) получим следующую вариационную проблему со свободными переменными, записанную в терминах симметричной части \hat{m} :

$$\delta \bar{U} = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \hat{m}_{ijk} \delta \hat{R}_{i,jk} = \sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \hat{m}_{ijk} \delta R_{i,jk} = 0$$

где $\delta R_{i,jk}$ может быть рассмотрена как свободная переменная. Следовательно, имеет место следующее утверждение. Теорема: вариационное уравнение для градиентной теории упругости может быть записано только для симметричной части тензора моментов (из-за условия $R_{i,jk} = R_{i,kj}$). Следовательно для градиентной

упругости и краевая задачи в целом должна быть сформулирована только для симметричной части тензора m : $m_{ijk} = m_{ikj}$.

Таким образом для градиентной теории упругости тензор градиентных модулей A должен удовлетворять условию потенциальности (2.54) и условию симметрии по порядку дифференцирования.

Заметим, что доказанная теорема остается справедливой и для более общей теории когда $B_{lmijk} \neq 0$.

Есть два пути для удовлетворения этих требований. Первый путь основан на привлечении градиентной теории упругости, которая автоматически удовлетворяет и условию потенциальности, и условию симметрии по порядку дифференцирования (по второму и третьему, также по пятому и шестому индексам). Вторым путем связан с тем, что обычно в качестве прикладных теорий используются градиентные теории деформаций (2.58). Тогда процедура удовлетворения условию симметрии по порядку дифференцирования, связана с выбором подмножества теорий с требуемыми свойствами симметрии из общих градиентных теорий деформаций, удовлетворяющих всем трем условиям симметрии. Градиентную теорию с такими свойствами можно называть полностью симметричной градиентной теорией.

В общем случае для изотропного центрально симметричного материала тензор градиентных модулей упругости записывается через пятнадцать независимых постоянных материала:

$$\begin{aligned}
 A_{ijklmn} = & k_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + k_2 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + k_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + k_4 \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + k_5 \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \\
 & + k_6 \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + k_7 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} + k_8 \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{kl} + k_9 \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + k_{10} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \\
 & + k_{11} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + k_{12} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + k_{13} \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + k_{14} \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + k_{15} \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}
 \end{aligned} \quad (2.64)$$

где δ_{ij} - тензор Кронеккера, а k_1, \dots, k_{15} - компоненты тензора адгезии (физические постоянные материала).

Требования выполнения условия потенциальности и условия симметрии по порядку дифференцирования приводят к тому, что тензор градиентных модулей упругости зависит только от пяти физических постоянных:

$$\begin{aligned}
A_{ijklmn} = & k_1 \left(\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} \right) + \\
& + k_2 \left(\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} \right) + k_7 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} + \\
& + k_8 \left(\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} \right) + k_{11} \left(\delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \right)
\end{aligned} \quad (2.65)$$

При таком подходе к построению физической модели среды реализуется первый путь. Каждое из выделенных слагаемых в (2.65) удовлетворяет условию корректности (симметрии по порядку дифференцирования). Поэтому любая частная модель, полученная из (2.65) путем редуцирования также будет корректной. Отметим, что при этом условие симметрии по первой паре индексов в первой и во второй тройках индексов (условие симметрии в теории деформаций) в общем случае не выполняется. Т.е. в общем случае физическая модель корректной градиентной теории определяется соотношениями (2.57), (2.65). Такая теория является теорией дисторсии.

Для рассматриваемой теории определяющие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} = & \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\
m_{ijk} = & k_1 (\Delta R_k \delta_{ij} + \Delta R_j \delta_{ik} + \theta_{,i} \delta_{jk}) + 2k_2 (\theta_{,k} \delta_{ij} + \theta_{,j} \delta_{ik}) + k_7 \Delta R_i \delta_{jk} + \\
& + 2k_8 R_{i,jk} + 2k_{11} (R_{j,ik} + R_{k,ij})
\end{aligned} \quad (2.66)$$

$\theta = R_{k,k}$ - совместное изменение объема (дивергенция перемещений),
 $\varepsilon_{ij} = (R_{i,j} + R_{j,i})/2$ - тензор совместных деформаций. Рассмотрим теперь второй путь, когда при построении градиентной теории упругости от тензоров модулей A (2.64) требуется выполнение и условий потенциальности и условий симметрии теории деформаций (симметрия по первым парам индексов в обеих тройках для компонент (2.64)). В таком случае получим:

$$\begin{aligned}
A_{ijklmn} = & k_1 \left(\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} \right) + k_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \\
& + k_4 \left(\delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} \right) + \\
& + k_8 \left(\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} \right) + k_9 \left(\delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \right)
\end{aligned} \quad (2.67)$$

Соотношения (2.67) описывают общий класс градиентных теорий деформаций, для которых, вообще говоря, не выполняются условия корректности - условия симметрии по порядку дифференцирования. В результате, есть опасность

получить градиентную теорию, не являющуюся корректной. Вводя в (2.67) дополнительно условие симметрии по порядку дифференцирования, получим выражения для компонент градиентного тензора модулей упругости в полностью симметричной градиентной теории:

$$\begin{aligned} A_{ijklmn} = & k_1 \left(\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + \right. \\ & \left. + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} \right) + \\ & + k_8 \left(\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Тем самым доказано утверждение, что полностью симметричная корректная градиентная теория деформаций является в общем случае двухпараметрической и ее физическая модель определяется равенствами (2.58), (2.68). Для полностью симметричной теории деформации имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ m_{ijk} = & k_1 \left[(2\varepsilon_{il,l} + \theta_{,i}) \delta_{jk} + (2\varepsilon_{jl,l} + \theta_{,j}) \delta_{ki} + (2\varepsilon_{kl,l} + \theta_{,k}) \delta_{ij} \right] + \\ & + 2k_8 (\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

здесь $m_{ijk} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n}$. Вариационная постановка дает следующие уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} - m_{ijk,kj} + P_i^V = 0 \quad (2.70)$$

Учитывая физические уравнения (2.69) и соотношения Коши получим:

$$H_{ij} L_{jk} R_k + P_i^V = 0, \text{ где } L_{ij} = (\lambda + \mu) \partial_i \partial_j + \mu \delta_{ij} \Delta, \quad H_{ij} = \delta_{ij} - l_1^2 \delta_{ij} \Delta - l_2^2 \partial_i \partial_j \quad (2.71)$$

где P_i^V - компоненты вектора объемных сил f , L_{ij} - оператор Ламе, оператор уравнений равновесия изотропной классической упругости, H_{ij} - оператор Гельмгольца изотропной теории деформаций, $\Delta = \partial_i \partial_i$ - лапласиан, l_1 и l_2 - масштабные параметры.

Для общей корректной теории, удовлетворяющей условиям симметрии по порядку дифференцирования, (2.68), (2.66) имеем:

$$l_1 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_8}{\mu}} \text{ и } l_2 = \sqrt{\frac{4\mu(k_1 + k_2 + k_{11}) - (\lambda + \mu)(k_7 + 2k_8)}{\mu(\lambda + 2\mu)}} \quad (2.72)$$

Общее решение для корректной градиентной теории зависит от двух дополнительных параметров l_1 и l_2 , однако краевые условия, записанные с учетом (2.57), (2.68) будут содержать все пять дополнительных постоянных $k_1, k_2, k_7, k_8, k_{11}$

Для полностью симметричной градиентной теории (2.70), (2.71) имеем:

$$l_1 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_8}{\mu}} \text{ и } l_2 = \sqrt{\frac{4\mu(2k_1 + k_8) - (\lambda + \mu)(k_1 + 2k_8)}{\mu(\lambda + 2\mu)}} \quad (2.73)$$

Решение для полностью симметричной теории зависит только от двух дополнительных постоянных, т.е. модель градиентных эффектов является двухпараметрической.

Краевые условия в градиентной теории упругости (в частности и в полностью симметричной теории) находятся из вариационной постановки как естественные краевые условия.

2.5 Общие теоремы об эквивалентности сред

При решении задачи в рамках классической ГУ не будут приниматься во внимание масштабные параметры в определяющих соотношениях, однако если перейти к моделям сред с полями дефектов, то появляется возможность учесть параметры размерности длины и тем самым моделировать масштабные эффекты

Свойства реальных материалов сложнее и многообразнее свойств сплошных (бездефектных) сред. Исходя из экспериментальных данных масштабные эффекты подтверждаются, для таких материалов, как алюминий, эпоксидные смолы, полипропилен [26, 27, 96] и др. Однако, уточненные теории деформации в первую очередь используются для моделирования аномальных физико-механических свойств гетерогенных сред с микроструктурой, дисперсных композитов с микро-нановключениями, керамик и пр. [20, 21, 97, 98]. Для моделирования масштабных эффектов в различных физико-механических процессах, в основном, используются градиентные теории первого порядка в силу их относительной простоты [24-26, 97, 99, 101, 102]. Теории сред с полями свободных деформаций также находят все большее применение при уточненном описании деформаций пористых сред, пластичности и т.д.

Стоит отметить, особенность локализации свойств в окрестности границы раздела фаз, местах смены граничных условий, иных точках и линий возмущений, возникающую при решении задач в теории сред с полями дефектов. Здесь выявляется еще одна особенность – трактовка пограничных слоев в окрестностях границы раздела фаз как зон повреждений, вызванных локализацией полей дефектов или градиентных масштабных эффектов.

В данном разделе предлагается трактовка сред с полями дефектов, описываемых с помощью градиентной упругости для однородных изотропных материалов в окрестности особых точек как некоторых межфазных слоев с переменными свойствами. В общем случае свойства таких функциональных межфазных слоев с переменными свойствами зависят от координат, а также от условий нагружения и краевых условий. Среды с изотропными и неизменными в отношении координат свойствами будем называть однородными средами. Поэтому будем говорить о возможности эквивалентной трактовки однородных сред, локализованное деформированное состояние которых описывается в рамках обобщенных моделей деформирования и сред с переменными свойствами-функциональных сред, описываемых в рамках классической теории упругости.

2.5.1 Вариационная постановка сред с полями дефектов

Запишем вариационную модель сред с полями дефектов. Лагранжиан L общей модели имеет вид:

$$L = A - U = A - \iiint U_V dV - \iint U_F dF - \sum \oint U_S ds - \sum U_P \quad (2.74)$$

где A - работа внешних сил, U_V - объемная плотность потенциальной энергии, U_F - поверхностная плотность потенциальной энергии (энергии адгезии), U_S - погонная плотность потенциальной энергии ребер (при наличии), U_P - потенциальная энергия угловых точек (при наличии).

$$U_V = U_V(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijn}^1, D_{ijn}^2) \quad (2.75)$$

$$U_F = U_F(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijq}^1 \delta_{qk}^*, D_{ijn}^2 \delta_{qk}^*) \quad (2.76)$$

$$U_S = U_S(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijn}^1 s_n, D_{ijn}^2 s_n) \quad (2.77)$$

$$U_p = U_p(D_{ij}^1, D_{ij}^2) \quad (2.78)$$

здесь D_{ij}^1, D_{ij}^2 - кинематические переменные второго ранга, которые определяют интегрируемую и неинтегрируемую (свободную) дисторсию, D_{ijn}^1, D_{ijn}^2 - кинематические переменные третьего ранга, которые, трактуются [99] как градиенты интегрируемой и неинтегрируемой дисторсии; δ_{ij} - тензор Кронекера; $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ - «плоский» тензор Кронекера, определенный на поверхности тела с ортом нормали n_i ; s_i - орт касательной к ребру поверхности, если таковое имеется. Верхние индексы кинематических переменных являются номером сорта переменных [99]. Между кинематическими переменными установлены соотношения, аналогичные соотношениям Коши [25, 62, 99, 101]:

$$D_{ij}^1 = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = R_{i,j} \quad D_{ijk}^1 = \frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k} = R_{i,jk} \quad D_{ijk}^2 = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} = D_{ij,k}^2 \quad (2.79)$$

где R_i - непрерывная часть вектора перемещений. Соотношения (2.79) в совокупности определяют кинематическую модель исследуемой среды.

Формулы Грина выведены для каждой плотности потенциальной энергии, определяют силовые факторы соответственно: в объеме тела, на поверхности, ребрах и угловых точках. В объеме среды формулы Грина, для силовых факторов, дают определения напряжений Коши σ_{ij}^1 и дислокационных напряжений σ_{ij}^2 , аналогично, моментных напряжений σ_{ijk}^1 и σ_{ijk}^2 :

$$\sigma_{ij}^1 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^1} \quad \sigma_{ij}^2 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^2} \quad \sigma_{ijk}^1 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ijk}^1} \quad \sigma_{ijk}^2 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ijk}^2} \quad (2.80)$$

Для силовых факторов на поверхности среды формулы Грина дают определения соответствующих адгезионных напряжений Коши a_{ij}^1 и дислокационных адгезионных напряжений a_{ij}^2 , а также адгезионных моментных напряжений этих двух сортов a_{ijk}^1, a_{ijk}^2 :

$$a_{ij}^1 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ij}^1} \quad a_{ij}^2 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ij}^2} \quad a_{ijk}^1 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ijk}^1} \quad a_{ijk}^2 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ijk}^2} \quad (2.81)$$

Для силовых факторов на ребрах поверхности соотношения Грина будут выглядеть следующим образом:

$$b_{ij}^1 = \frac{\partial U_s}{\partial D_{ij}^1} \quad b_{ij}^2 = \frac{\partial U_s}{\partial D_{ij}^2} \quad B_{ij}^1 = \frac{\partial U_s}{\partial (D_{ijn}^1 s_n)} \quad B_{ij}^2 = \frac{\partial U_s}{\partial (D_{ijn}^2 s_n)} \quad (2.82)$$

Спектр силовых факторов в угловых точках ребер поверхности определяется формулами:

$$f_{ij}^1 = \frac{\partial U_p}{\partial D_{ij}^1} \quad f_{ij}^2 = \frac{\partial U_p}{\partial D_{ij}^2} \quad (2.83)$$

Таким образом, следуя алгоритму построения модели в рамках «кинематического» вариационного принципа [24-25, 62, 101], формально установлена структура потенциальной энергии (2.74) - (2.78) и получена силовая модель (2.80) - (2.83), соответствующая выбранной кинематической модели (2.79).

Рассмотрим объемную плотность потенциальной энергии U_v как положительно определенную изотропную квадратичную форму своих аргументов, в предположении физической линейности уравнений закона Гука.

$$2U_v = C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijknml}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b \quad (2.84)$$

Обобщенные формулы Грина (2.80) дают следующие уравнения закона Гука для силовых факторов в объеме среды:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^1 &= C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 & \sigma_{ijk}^1 &= C_{ijknml}^{11} R_{m,nl} + C_{ijknml}^{12} D_{mnl}^2 \\ \sigma_{ij}^2 &= C_{ijmn}^{21} R_{m,n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 & \sigma_{ijk}^2 &= C_{ijknml}^{21} R_{m,nl} + C_{ijknml}^{22} D_{mnl}^2 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Поверхностная плотность потенциальной энергии U_F записывается как положительно определенная трансверсально-изотропная квадратичная форма своих аргументов.

$$2U_F = A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + 2A_{ijmnl}^{ab} D_{ij}^a D_{mnl}^b + A_{ijknml}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b \quad (2.86)$$

Тензоры адгезионных модулей четвертого ранга A_{ijmn}^{ab} построены в работах Лурье и Белова [22, 96, 100], а структура тензоров шестого ранга A_{ijknml}^{ab} и тензоров модулей пятого ранга A_{ijmnl}^{ab} установлена в работе [99]. С учетом (2.86) уравнения закона Гука для силовых факторов на поверхности среды можно получить из обобщенных формул Грина (2.81):

$$\begin{aligned}
a_{ij}^1 &= A_{ijmn}^{11} R_{m,n} + A_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 + A_{ijmnl}^{11} R_{m,nl} + A_{ijmnl}^{12} D_{mn,l}^2 \\
a_{ijk}^1 &= A_{mijk}^{11} R_{m,n} + A_{mijk}^{21} D_{mn}^2 + A_{ijkmnl}^{11} R_{m,nl} + A_{ijkmnl}^{12} D_{mn,l}^2 \\
a_{ij}^2 &= A_{ijmn}^{21} R_{m,n} + A_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 + A_{ijmnl}^{21} R_{m,nl} + A_{ijmnl}^{22} D_{mn,l}^2 \\
a_{ijk}^2 &= A_{mijk}^{12} R_{m,n} + A_{mijk}^{22} D_{mn}^2 + A_{ijkmnl}^{21} R_{m,nl} + A_{ijkmnl}^{22} D_{mn,l}^2
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Используя формулировки плотностей потенциальной энергии (2.84) и (2.86), запишем лагранжиан наиболее общей теории сред с полем сохраняющихся дислокаций в следующем виде:

$$\begin{aligned}
L &= A - \frac{1}{2} \iiint (C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijkmnl}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b) dV - \\
&- \frac{1}{2} \oint\!\!\!\oint (A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + 2A_{ijmnl}^{ab} D_{ij}^a D_{mnl}^b + A_{ijkmnl}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b) dF
\end{aligned} \tag{2.88}$$

В этом выражении не записаны потенциальные энергии ребер поверхности и их угловых точек. Поэтому лагранжиан в выписанной форме (2.88) описывает упругие свойства тел без учета индивидуальных физических свойств ребер и угловых точек.

2.5.2 Лагранжиан и уравнения эйлера

Представим лагранжиан исследуемой здесь теории (2.88) в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
L &= A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + \\
&+ C_{ijkmnl}^{11} D_{ijk}^1 D_{mnl}^1 + 2C_{ijkmnl}^{12} D_{ijk}^1 D_{mnl}^2 + C_{ijkmnl}^{22} D_{ijk}^2 D_{mnl}^2] dV - \\
&- \frac{1}{2} \oint\!\!\!\oint [A_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2A_{ijmnl}^{12} D_{ij}^1 D_{mnl}^2 + A_{ijmnl}^{22} D_{ij}^2 D_{mnl}^2 + \\
&+ 2A_{ijkmnl}^{11} D_{ijk}^1 D_{mnl}^1 + 2A_{ijkmnl}^{12} D_{ijk}^1 D_{mnl}^2 + 2A_{ijkmnl}^{21} D_{ijk}^2 D_{mnl}^1 + 2A_{ijkmnl}^{22} D_{ijk}^2 D_{mnl}^2 + \\
&+ A_{ijkmnl}^{11} D_{ijk}^1 D_{mnl}^1 + 2A_{ijkmnl}^{12} D_{ijk}^1 D_{mnl}^2 + A_{ijkmnl}^{22} D_{ijk}^2 D_{mnl}^2] dF
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Как частный случай вариационная модель (2.89) приводит к модели сред Миндлина с полем свободных деформаций. Действительно, если в (2.89) положить равными нулю тензоры «объемных» модулей $C_{ijkmnl}^{11}, C_{ijkmnl}^{12}$ и все тензоры адгезионных модулей, то получим лагранжиан теории сред Миндлина:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijkmnl}^{22} D_{ijk}^2 D_{mnl}^2] dV$$

Из теории Миндлина, в свою очередь, следуют [62, 24] как строгие частные случаи: «простейшая» теория сред с сохраняющимися дислокациями, теория сред

Коссера (теория сред с ω - дислокациями), теория пористых сред (теория сред с θ - дислокациями) и теория сред с γ - дислокациями [25, 62, 101].

Рассмотрим еще один частный случай. Пусть все тензоры модулей, содержащие индекс сортности 2, равны нулю. Тогда лагранжиан теории принимает вид, совпадающий с лагранжианом идеальной (бездефектной) среды Миндлина-Тупина с адгезионными свойствами поверхности [101], а при $A_{ijmn}^{11} = 0$, $A_{ijkml}^{11} = 0$ и $A_{ijkml}^{11} = 0$ с «классической» теорией Тупина [22, 96, 100]:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + C_{ijkml}^{11} D_{ijk}^1 D_{mnl}^1] dV$$

В результате, модель псевдоконтинуума Миндлина-Тупина может рассматриваться как строгий частный случай более общей модели (2.89), а не как приближенный частный случай модели сред с полями дефектов Миндлина, полученный с использованием гипотезы $D_{ij}^2 \approx a_{ijmn} D_{mn}^1$ [25, 62, 101]. Таким образом любая теорема, доказанная в рамках общей теории, будет справедлива и для любой известной градиентной теории, имеющей ту же или более простую структуру, чем (2.89).

В соответствии с (2.80), (2.81) вариация лагранжиана (2.89) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \delta L = \delta A - \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta D_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 + \sigma_{ijk}^1 \delta D_{ijk}^1 + \sigma_{ijk}^2 \delta D_{ijk}^2] dV - \\ - \oint [a_{ij}^1 \delta D_{ij}^1 + a_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 + a_{ijk}^1 \delta D_{ijk}^1 + a_{ijk}^2 \delta D_{ijk}^2] dF \end{aligned}$$

В соответствии с (2.79) вариация лагранжиана (2.89) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \delta L = \delta A - \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta R_{i,j} + \sigma_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 + \sigma_{ijk}^1 \delta R_{i,jk} + \sigma_{ijk}^2 \delta D_{ij,k}^2] dV - \\ - \oint [a_{ij}^1 \delta R_{i,j} + a_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 + a_{ijk}^1 \delta R_{i,jk} + a_{ijk}^2 \delta D_{ij,k}^2] dF \end{aligned}$$

Взяв слагаемые, содержащие кривизны по частям, получим:

$$\begin{aligned} \delta L = \delta A - \iiint [(\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ijk,k}^1) \delta R_{i,j} + (\sigma_{ij}^2 - \sigma_{ijk,k}^2) \delta D_{ij}^2] dV - \\ - \oint [(a_{ij}^1 + \sigma_{ijk}^1 n_k - a_{ijk,k}^1) \delta R_{i,j} + (a_{ij}^2 + \sigma_{ijk}^2 n_k - a_{ijk,k}^2) \delta D_{ij}^2] dF - \\ - \sum \oint \{a_{ijk}^1 v_k \delta R_{i,j} + a_{ijk}^2 v_k \delta D_{ij}^2\} ds \end{aligned}$$

Введем определения обобщенных силовых факторов:

$$\begin{cases} (\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ijk,k}^1) = \tau_{ij}^1 & \left\{ \begin{aligned} (a_{ij}^1 + \sigma_{ijk}^1 n_k - a_{ijk,k}^1) &= \tilde{a}_{ij}^1 \\ (a_{ij}^2 + \sigma_{ijk}^2 n_k - a_{ijk,k}^2) &= \tilde{a}_{ij}^2 \end{aligned} \right. & \begin{cases} a_{ijk}^1 v_k = p_{ij}^1 \\ a_{ijk}^2 v_k = p_{ij}^2 \end{cases} \end{cases} \quad (2.90)$$

Вариационное уравнение в обобщенных силовых факторах, выраженных через исходные кинематические переменные:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint [(\tau_{ij,j}^1 + P_i^V) \delta R_i - \tau_{ij}^2 \delta D_{ij}^2] dV - \\ & + \oint \{ [P_i^F - \tau_{ij}^1 n_j + (\tilde{a}_{ij}^1 \delta_{kj}^*),_{,k}] \delta R_i - \tilde{a}_{ij}^1 n_j \delta \dot{R}_i - \tilde{a}_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 \} dF - \\ & - \sum \oint \{ [\tilde{a}_{ij}^1 v_j - (p_{ij}^1 s_{j,k})_{,k}] \delta R_i + p_{ij}^1 \delta R_{i,k} (v_k v_j + n_k n_j) + p_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 \} ds - \\ & - \sum p_{ij}^1 s_j \delta R_i = 0 \end{aligned}$$

2.5.3 Теоремы об энергетической эквивалентности

В этом разделе приведем утверждения, позволяющие давать трактовки моделям сред с полями дефектов как моделям неоднородной среды Миндлина-Тупина. Приводится также утверждение, позволяющее, трактовать модели градиентных сред псевдоконтинуума как эквивалентной неоднородной среды, описываемой классической теорией упругости.

Теорема-1: лагранжиан общей теории сред с полями сохраняющихся дислокаций можно представить в виде лагранжиана неоднородной среды Миндлина-Тупина.

Доказательство. Пусть основные неизвестные R_i и D_{ij}^2 удовлетворяют решению некоторой краевой задачи, вытекающей из требования стационарности лагранжиана (2.89). Введем в качестве промежуточных переменных вместо компонентов тензора свободной дисторсии D_{ij}^2 компоненты тензора относительной поврежденности t_{ij} соотношениями:

$$D_{ij}^2 = t_{ip} R_{p,j} \quad D_{ijk}^2 = t_{ip} R_{p,jk} + t_{ip,k} R_{p,j} \quad (2.91)$$

Из определения (2.91) следует, что тензор t_{ij} тоже является известной функцией координат, соответствующий выбранной краевой задаче. Этот тензор определяется единственным образом, если определитель тензора $R_{p,j}$ не равен нулю.

Подставляя (2.91) в (2.89), получим:

$$\begin{aligned}
L = A - \frac{1}{2} \iiint & [(C_{pjqn}^{11} + 2C_{pjmn}^{12}t_{mq} + C_{ijmn}^{22}t_{ip}t_{mq} + C_{ijkml}^{22}t_{ip,k}t_{mq,l})R_{p,j}R_{q,n} + \\
& + 2(C_{pjkmnl}^{12}t_{mq,l} + C_{ijkml}^{22}t_{ip}t_{mq,l})R_{q,n}R_{p,jk} + \\
& + (C_{pjqnl}^{11} + 2C_{pjkmnl}^{12}t_{mq} + C_{ijkml}^{22}t_{ip}t_{mq})R_{p,jk}R_{q,nl}]dV - \\
& - \frac{1}{2} \oint \{ (A_{pjqn}^{11} + 2A_{pjmn}^{12}t_{mq} + 2A_{pjmn}^{12}t_{mq,l} + \\
& + A_{ijmn}^{22}t_{ip}t_{mq} + 2A_{ijmnl}^{22}t_{ip}t_{mq,l} + A_{ijkml}^{22}t_{ip,k}t_{mq,l})R_{p,j}R_{q,n} + \\
& + (2A_{pjqnl}^{11} + 2A_{pjmn}^{12}t_{mq} + 2A_{qnljik}^{12}v_{ip,k} + 2A_{ijqnl}^{21}t_{ip} + \\
& + 2A_{ijmnl}^{22}t_{ip}t_{mq} + A_{ijkml}^{22}t_{ip,k}t_{mq} + A_{ijkml}^{22}t_{mq}t_{ip,k})R_{p,j}R_{q,nl} + \\
& + (A_{pjqnl}^{11} + 2A_{pjkmnl}^{12}t_{mq} + A_{ijkml}^{22}t_{ip}t_{mq})R_{p,jk}R_{q,nl} \} dF
\end{aligned}$$

Введем определения переменных по координатам тензорных полей упругих

\tilde{C}_{ijmn} , \tilde{C}_{ijmnl} , \tilde{C}_{ijkmnl} и адгезионных \tilde{A}_{ijmn} , \tilde{A}_{ijmnl} , \tilde{A}_{ijkmnl} свойств:

$$\begin{cases}
\tilde{C}_{ijmn} = C_{ijmn}^{11} + 2C_{ijbn}^{12}t_{bm} + C_{ajbn}^{22}t_{ai}t_{bm} + C_{ajkbnl}^{22}t_{ai,k}t_{bm,l} \\
\tilde{C}_{ijmnl} = (C_{mnlbjk}^{12} + C_{anlbjk}^{22}t_{am})t_{bi,k} \\
\tilde{C}_{ijkmnl} = C_{ijkmnl}^{11} + 2C_{ijkbnl}^{12}t_{bm} + C_{ajkbnl}^{22}t_{ai}t_{bm} \\
\tilde{A}_{ijmn} = A_{ijmn}^{11} + 2A_{ijbn}^{12}v_{bm} + A_{ajbn}^{22}t_{ai}t_{bm} + (2A_{ijbnl}^{12} + 2A_{ajbnl}^{22}t_{ai} + A_{ajkbnl}^{22}t_{ai,k})t_{bm,l} \\
\tilde{A}_{ijmnl} = A_{ijmnl}^{11} + A_{ijbnl}^{12}t_{bm} + A_{ajmnl}^{21}t_{ai} + A_{ajbnl}^{22}t_{ai}t_{bm} + (A_{mnlajk}^{12} + A_{ajkbnl}^{22}t_{bm})t_{ai,k} \\
\tilde{A}_{ijkmnl} = (A_{ijkmnl}^{11} + 2A_{ijkbnl}^{12}t_{bm} + A_{ajkbnl}^{22}t_{ai}t_{bm})
\end{cases} \quad (2.92)$$

Используя выражения (2.91) и (2.92), приведем лагранжиан общей теории (2.89) к лагранжиану неоднородной среды Тупина:

$$\begin{aligned}
L = A - \frac{1}{2} \iiint & \{ \tilde{C}_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + 2\tilde{C}_{ijmnl} R_{i,j} R_{m,nl} + \tilde{C}_{ijkmnl} R_{i,jk} R_{m,nl} \} dV - \\
& - \frac{1}{2} \oint \{ \tilde{A}_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + 2\tilde{A}_{ijmnl} R_{i,j} R_{m,nl} + \tilde{A}_{ijkmnl} R_{i,jk} R_{m,nl} \} dF
\end{aligned} \quad (2.93)$$

Таким образом, доказано, что лагранжианы (2.89) и (2.93) эквивалентны, если справедливы соотношения (2.91).

Получим вариационное уравнение, соответствующее условию стационарности лагранжиана (2.93), в новых переменных с учетом определений обобщенных силовых факторов (2.90):

$$\begin{aligned}
\delta L = & \iiint \{[\tau_{ij,j}^1 + P_i^V + (\tau_{kj}^2 t_{ki})_{,j}] \delta R_i - \tau_{ij}^2 R_{p,j} \delta t_{ip}\} dV - \\
& + \oint \{[P_i^F - \tau_{ij}^1 n_j + (\tilde{a}_{ij}^1 \delta_{kj}^*)_{,k} - \tau_{kj}^2 t_{ki} n_j + (\tilde{a}_{kj}^2 t_{ki} \delta_{qj}^*)_{,q}] \delta R_i - \\
& - (\tilde{a}_{ij}^1 n_j + \tilde{a}_{kj}^2 t_{ki} n_j) \delta \dot{R}_i - \tilde{a}_{ij}^2 R_{p,j} \delta t_{ip}\} dF - \\
& - \sum \oint \{[\tilde{a}_{ij}^1 v_j - (p_{ij}^1 s_j s_k)_{,k} + \tilde{a}_{kj}^2 t_{ki} v_j - (p_{qj}^2 t_{qi} s_k s_j)_{,k}] \delta R_i + \\
& + (p_{ij}^1 + p_{qj}^2 t_{qi}) \delta R_{i,k} (v_k v_j + n_k n_j) + p_{ij}^2 R_{p,j} \delta t_{ip}\} ds - \\
& - \sum [p_{ij}^1 s_j + p_{qj}^2 t_{qi} s_j] \delta R_i = 0
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Сравнение уравнений Эйлера в старых и новых переменных приводит к следующему заключению: уравнения Эйлера совпадают, если определитель тензора стесненной дисторсии $R_{p,j}$ не равен нулю.

В старых переменных:

$$\begin{cases} \tau_{ij,j}^1 + P_i^V = 0 \\ \tau_{ij}^2 = 0 \end{cases}$$

В новых переменных:

$$\begin{cases} \tau_{ij,j}^1 + P_i^V + (\tau_{kj}^2 t_{ki})_{,j} = 0 \\ \tau_{ij}^2 R_{p,j} = 0 \end{cases}$$

Сравнение краевых задач в старых и новых переменных приводит к следующему заключению: краевые задачи совпадают, если определитель тензора стесненной дисторсии $R_{p,j}$ не равен нулю.

Формулировка спектра краевых задач в старых переменных:

$$\begin{aligned}
& \oint \{[P_i^F - \tau_{ij}^1 n_j + (\tilde{a}_{ij}^1 \delta_{kj}^*)_{,k}] \delta R_i - \tilde{a}_{ij}^1 n_j \delta \dot{R}_i - \tilde{a}_{ij}^2 \delta D_{ij}^2\} dF - \\
& - \sum \oint \{[\tilde{a}_{ij}^1 v_j - (p_{ij}^1 s_j s_k)_{,k}] \delta R_i + p_{ij}^1 \delta R_{i,k} (v_k v_j + n_k n_j) + p_{ij}^2 \delta D_{ij}^2\} ds - \\
& - \sum p_{ij}^1 s_j \delta R_i = 0
\end{aligned}$$

Формулировка спектра краевых задач в новых переменных:

$$\begin{aligned}
& \oint \{[P_i^F - \tau_{ij}^1 n_j + (\tilde{a}_{ij}^1 \delta_{kj}^*)_{,k} - \tau_{kj}^2 t_{ki} n_j + (\tilde{a}_{kj}^2 t_{ki} \delta_{qj}^*)_{,q}] \delta R_i - \\
& - (\tilde{a}_{ij}^1 n_j + \tilde{a}_{kj}^2 t_{ki} n_j) \delta \dot{R}_i - \tilde{a}_{ij}^2 R_{p,j} \delta t_{ip}\} dF - \\
& - \sum \oint \{[\tilde{a}_{ij}^1 v_j - (p_{ij}^1 s_j s_k)_{,k} + \tilde{a}_{kj}^2 t_{ki} v_j - (p_{qj}^2 t_{qi} s_k s_j)_{,k}] \delta R_i + \\
& + (p_{ij}^1 + p_{qj}^2 t_{qi}) \delta R_{i,k} (v_k v_j + n_k n_j) + p_{ij}^2 R_{p,j} \delta t_{ip}\} ds - \\
& - \sum [p_{ij}^1 s_j + p_{qj}^2 t_{qi} s_j] \delta R_i = 0
\end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана для всех возможных кинематических состояний, удовлетворяющих условию:

$$|R_{p,q}| = R_{i,m} R_{j,n} R_{k,l} \mathcal{E}_{ijk} \mathcal{E}_{mnl} \neq 0$$

Стоит отметить, что формулировка общей теории сред с полями сохраняющихся дислокаций в форме (2.93) не содержит в явном виде тензор свободных дисторсий D_{ij}^2 или тензор относительной поврежденности t_{ij} . Эти переменные оказались «спрятанными» в тензорные поля упругих и адгезионных свойств. Так как для каждой конкретной краевой задачи тензор относительной поврежденности t_{ij} известен как функция координат, то в соответствии с (2.92) и поля упругих и адгезионных свойств также известны как функции координат. Учтем тот факт, что свободная дисторсия D_{ij}^2 и, следовательно, относительная поврежденность t_{ij} концентрируются вблизи поверхностей возмущения и носят локальный характер. Тогда с точки зрения определений (2.92) можно утверждать, что переменность механических свойств, обусловленная тензорными полями $\tilde{C}_{ijmn}, \tilde{C}_{ijmnl}, \tilde{C}_{ijkml}$ и $\tilde{A}_{ijmn}, \tilde{A}_{ijmnl}, \tilde{A}_{ijkml}$, так же носит локальный характер.

Следствие-1. Области изотропной среды вблизи поверхностей возмущения можно трактовать с точки зрения неоднородной среды Миндлина-Тупина как межфазные слои (в силу локальности тензорных полей механических свойств).

Следствие-2. Межфазные слои являются неклассическими изотропными неоднородными объектами, не имеющими фиксированной толщины. В то же время они обладают определенными геометрическими параметрами, связанными с отношениями неклассических модулей разной физической размерности (с характерными длинами когезионных и адгезионных взаимодействий).

В качестве аналогии можно привести краевой эффект теории пластин Тимошенко. Он не имеет фиксированной длины, так как определяется затухающей экспонентой, но имеет соответствующую характерную длину, связанную с отношением жесткости на сдвиг и цилиндрической жесткости. В отличие от краевых эффектов, масштабные эффекты зависят только от материала среды и

имеют абсолютный характер. Поэтому для макротел, они пренебрежимо малы по сравнению с краевыми эффектами, для мезоструктур они имеют тот же порядок, что и краевые эффекты, а для наноструктур они, как правило, доминируют.

Следствие-3. В силу единственности решения, для каждой краевой задачи межфазные слои будут отличаться.

Следствие-4. При однопараметрическом нагружении в силу (2.91), тензор относительной поврежденности t_{ij} не зависит от параметра нагрузки. Соответственно, от параметра нагрузки не будут зависеть и поля механических свойств межфазных слоев в силу (2.92).

Следствие-5. При многопараметрическом нагружении в силу (2.91), тензор относительной поврежденности t_{ij} будет рациональной функцией параметров нагрузок. Соответственно, и поля механических свойств межфазных слоев в силу (2.92) будут зависеть от конкретной комбинации внешних нагрузок.

Теорема-2: Лагранжиан общей теории сред с полями дислокаций можно представить в форме лагранжиана неоднородной изотропной среды, т.е. имеет место эквивалентность вариационных постановок рассматриваемых моделей сред.

Доказательство: используем вариационную постановку теории сред Миндлина [2, 3]. Полагаем, что имеют место расширенные соотношения Коши, определяющие тензор дисторсии d_{ij} по вектору непрерывных перемещений $d_{ij} = \partial R_i / \partial x_j = R_{i,j}$, $d_{ij} = \gamma_{ij} + (1/3)\theta\delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk}$, γ_{ij} - компоненты тензора девиатора деформаций, θ - объемная деформация, ω_k - псевдовектор поворотов или упругих вращений, \mathcal{E}_{ijk} - компоненты тензора Леви-Чивиты, δ_{ij} - тензор Кронекера. Полагаем, что для тензора дисторсий выполняются однородные условия Папковича $d_{in,m} \mathcal{E}_{nmj} = 0$. Следовательно, по тензору дисторсии d_{ij} можно однозначно восстановить вектор перемещений, используя формулы Чезаро. Если в среде имеются поля дефектов, то наряду с тензором стесненных дисторсий деформационное состояние среды определяется также непрерывным тензором свободных дисторсий D_{ij} , который не связан с полем перемещений, т.е. отражает

наличие полей дефектов. Для свободных дисторсий имеют место неоднородные условия Папковича [103, 104]: $D_{in,m} \Xi_{mj} = \Xi_{ij} \neq 0$, где Ξ_{ij} плотность дислокаций.

Предполагается, что параметры рассматриваемой кинематической модели обобщенной дефектной среды d_{ij} , D_{ij} , являются непрерывными и дифференцируемыми и, поэтому, могут быть аргументами функционала, используемого при вариационной формулировке модели. Запишем функционал Лагранжа для теории дефектных сред:

$$L = A - \iiint U_V(d_{mn}, D_{mn}, D_{mn,l}) dV \quad (2.95)$$

$$U_V = \frac{1}{2} (C_{ijmn}^{11} d_{ij} d_{mn} + 2C_{ijmn}^{12} d_{ij} D_{mn} + C_{ijmn}^{22} D_{ij} D_{mn} + C_{ijkml} D_{ij,k} D_{mn,l})$$

здесь $A = \iiint_V P_i^V R_i dV + \iint_F P_i^F R_i dF$ - работа внешних объемных сил P_i^V , распределенных в объеме упругого тела V , и поверхностных сил P_i^F заданных на поверхности тела F на перемещениях R_i , U_V - плотность потенциальной энергии, C_{ijmn}^{pq} - тензоры модулей упругости, среди которых C_{ijmn}^{11} - тензор модулей упругости классической, неповрежденной дефектами среды, C_{ijmn}^{12} - тензор модулей упругости, описывающий перекрестные эффекты, связанные с взаимодействием полей стесненных деформаций и свободных деформаций, C_{ijmn}^{22} - тензор модулей упругости условной поврежденной среды с полем свободных деформаций, $C_{ijmn}^{pq} = \lambda^{pq} \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu^{pq} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$, $p, q = 1, 2$, C_{ijkml} - тензор градиентных модулей, характеризующий масштабные эффекты, связанные с учетом свободных дисторсий.

Физические соотношения рассматриваемой среды с полем дефектов полностью определяются соотношениями Грина:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial d_{ij}} = (C_{ijmn}^{11} d_{mn} + C_{ijmn}^{12} D_{mn})$$

$$s_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}} = (C_{ijmn}^{21} d_{mn} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}) \quad (2.96)$$

$$m_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij,k}} = C_{ijkml} D_{mn,l}$$

Предполагается, что выполняются условия существования потенциальности для плотности энергии U_V , т.е. тензоры модулей в соотношениях (2.96) удовлетворяют соотношениям симметрии.

Математическая модель рассматриваемой обобщенной среды полностью определяется следующим вариационным равенством:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij} \delta d_{ij} + s_{ij} \delta D_{ij} + m_{ijk} \delta D_{ij,k}] dV = \\ &= \iiint [(\sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i + (m_{ijk,k} - s_{ij}) \delta D_{ij}] dV + \\ &+ \oint\!\!\!\oint \{ [P_i^F - \sigma_{ij} n_j] \delta R_i - m_{ijk} n_k \delta D_{ij} \} dF = 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

Исследуем проблему эквивалентности модели среды, задаваемой вариационным равенством (2.97) и классической теорией упругости. Для этого приведем вариационную постановку (2.97) к вариационной постановке классической упругости. Полагаем, что поля перемещений и дисторсий (стесненных и свободных) являются решениями краевой задачи, следующей из (2.97). Перепишем лагранжиан (2.95) с учетом (2.96) в следующем виде:

$$\begin{aligned} L &= A - \frac{1}{2} \iiint [\sigma_{ij} R_{i,j} + (s_{ij} - m_{ijk,k}) D_{ij} + (m_{ijk,k} D_{ij} + m_{ijk} D_{ij,k})] dV = \\ &= A - \frac{1}{2} \iiint [\sigma_{ij} R_{i,j} + (s_{ij} - m_{ijk,k}) D_{ij}] dV - \frac{1}{2} \oint\!\!\!\oint (m_{ijk} n_k) D_{ij} dV \end{aligned} \quad (2.98)$$

В соответствии с вариационным уравнением (2.97), второе слагаемое в объемном интеграле равно нулю. Соответственно, и поверхностный интеграл в (2.98) равен нулю в силу неклассических граничных условий в уравнении (2.97) $(m_{ijk} n_k) \delta D_{ij} = 0$. Таким образом, потенциальная энергия приобретает классический вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \sigma_{ij} R_{i,j} dV \quad (2.99)$$

Выражение (2.99) является искомым условием эквивалентности. В нем поле перемещений определяется краевой задачей (2.97), а для тензора напряжений σ_{ij} выполняется обобщенный закон Гука (2.96). Однако равенство (2.99) указывает лишь на то, что потенциальная энергия для модели (2.97) приобретает классический вид. Вопрос о существовании эквивалентной модели теории

упругости и о виде физической модели для эквивалентной среды требует дальнейших изысканий.

Прежде всего, отметим, что всегда можно определить тензорное поле податливостей так, чтобы выполнялось соотношение:

$$\frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{j,i}) = E_{ijpq}^{-1} \sigma_{pq} \quad (2.100)$$

где $E_{ijpq}^{-1} = (1/3\tilde{K})\delta_{ij}\delta_{pq} + (1/\tilde{G})(\delta_{ip}\delta_{jq}/2 + \delta_{iq}\delta_{jp}/2 - \delta_{ij}\delta_{pq}/3)$

Учитывая (2.100) покажем, что плотность потенциальной энергии (2.99) приобретает вид плотности потенциальной энергии классической неоднородной среды:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \{ E_{ijmn}^{-1} \sigma_{ij} \sigma_{mn} \} dV \quad (2.101)$$

Сворачивая равенство (2.100) с δ_{ij} , получим:

$$R_{k,k} = (1/\tilde{K}) \sigma_{kk} \quad (2.102)$$

Учитывая (2.102), и физические соотношения (2.96) можно определить переменный модуль объемного сжатия эквивалентной классической неоднородной среды через решение краевой задачи (2.97). Имеем ($C_{kkmn}^{pq} = (2\mu^{pq} + 3\lambda^{pq})\delta_{mn}$):

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}^1 &= (C_{kkmn}^{11} R_{m,n} + C_{kkmn}^{12} D_{mn}) = C_{kkmn}^{11} R_{m,n} + C_{kkmn}^{12} D_{mn} = \\ &= (2\mu^{11} + 3\lambda^{11})R_{k,k} + (2\mu^{12} + 3\lambda^{12})D_{kk} = K^{11}R_{k,k} + K^{12}D_{kk} \end{aligned}$$

Отсюда найдем эффективный модуль объемной деформации:

$$\tilde{K} = \frac{\sigma_{kk}^1}{R_{k,k}} = \frac{K^{11}R_{m,m} + K^{12}D_{mm}}{R_{k,k}} = K^{11} + K^{12} \frac{D_{mm}}{R_{k,k}} \quad (2.103)$$

где $K^{pq} = (2\mu^{pq} + 3\lambda^{pq})$, $p, q = 1, 2$

Сворачивая равенство (2.100) с $(\delta_{ia}\delta_{jb}/2 + \delta_{ib}\delta_{ja}/2 - \delta_{ij}\delta_{ab}/3)$, получим:

$$\gamma_{ab} = (R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{i,i}\delta_{ab}/3) = \frac{1}{\tilde{G}}(\sigma_{a,b}^1/2 + \sigma_{b,a}^1/2 - \sigma_{j,j}^1\delta_{ab}/3) \quad (2.104)$$

Используя первые из соотношений (2.96), и формулы (2.104), получим следующее уравнение для модуля сдвига эквивалентной классической среды:

$$\tilde{G} = \mu^{11} + \mu^{12} \sqrt{(\beta_{ab}\beta_{ab})/(\gamma_{ab}\gamma_{ab})} \quad (2.105)$$

где $\gamma_{ab} = (R_{a,b} / 2 + R_{b,a} / 2 - R_{p,p} \delta_{ab} / 3)$ - девиатор стесненных деформаций,
 $\beta_{ab} = (D_{ab} / 2 + D_{ba} / 2 - D_{rr} \delta_{ab} / 3)$ - девиатор свободных деформаций.

Таким образом, однозначно определены переменные по координатам модули сдвига (2.105) и объемного сжатия (2.103) эквивалентной неоднородной (функциональной) классической среды. Переменность их по координатам определяется полями перемещений R_i и несовместных дисторсий D_{ij}^2 , которые находятся как решение краевой задачи (2.98).

Докажем энергетическую эквивалентность модели дефектных сред (2.95) и модели функционально-градиентных сред (2.99), (2.100). Рассмотрим выражение (2.99), которое получено непосредственно из функционала Лагранжа для модели с полями дефектов. В данном случае $\delta E_{ijmn}^{-1} = 0$, так как по определению величины $D_{mn} / R_{k,k}$ и $\sqrt{(\beta_{ab} \beta_{ab}) / (\gamma_{ab} \gamma_{ab})}$ являются известными и их вариации равны нулю.

Запишем:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta A - \iiint \{E_{ijmn}^{-1} \sigma_{ij} \delta \sigma_{mn}\} dV = \delta A - \iiint \{\sigma_{ij} \delta (E_{ijmn}^{-1} \sigma_{mn})\} dV = \\ &= \delta A - \iiint \sigma_{ij} \delta R_{i,j} dV = \iiint (\sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i dV + \oint (P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i dF = 0 \end{aligned} \quad (2.106)$$

Следовательно, вариационное уравнение теории изотропных однородных сред с полями дефектов приводится к виду вариационного уравнения классической упругости для функционально-градиентной среды, переменные по координатам свойства которой определяются решениями краевой задачи (2.98).

Покажем и обратное. Пусть имеется неоднородная функционально-градиентная среда, свойства которой полностью определяются полями кинематических переменных R_i и D_{ij} удовлетворяющих краевой задаче (2.97). Остается доказать, что если для рассматриваемой неоднородной классической среды выполняется условия стационарности (2.101), (2.106), то имеет место вариационное уравнение (2.97) для исходной однородной изотропной среды с полями дефектов. Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta \left\{ A - \frac{1}{2} \iiint E_{ijmn}^{-1} \sigma_{ij} \sigma_{mn} dV \right\} = \\
&= \iiint (\sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i dV + \oint (P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i dF = \delta \left\{ A - \frac{1}{2} \iiint \sigma_{ij} R_{i,j} dV \right\} = \\
&= \delta \left\{ A - \frac{1}{2} \iiint (C_{ijmn}^{11} d_{mn} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}) R_{i,j} dV \right\} = \delta \left\{ A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}] dV \right\} = \\
&= \delta \left\{ A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn} + C_{ijmn}^{22} D_{ij} D_{mn} + C_{ijkml} D_{ij,k} D_{mn,l}] dV \right\} = 0
\end{aligned}$$

При получении этих равенств использовался тот факт, что по определению кинематические переменные R_i и D_{ij} удовлетворяют неклассическим граничным условиям:

$$\oint C_{ijkml} D_{mn,l} n_k \delta D_{ij} dF = 0$$

и уравнениям равновесия моментов:

$$C_{ijmn}^{21} R_{m,n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn} - C_{ijkml} D_{mn,lk} = 0$$

Таким образом имеет место эквивалентность вариационных постановок рассматриваемых моделей сред.

Теорема 3: лагранжиан теории сред Миндлина - Тупина можно представить в виде лагранжиана для неоднородной среды теории упругости.

Рассмотрим модель квазиконтинуума Миндлина-Тупина. Введем частный случай этой модели, предполагая, что тензор шестого ранга выражается через тензор четвертого ранга [21]:

$$C_{ijkml}^{11} = C_{rkij}^{11} C_{rlmn}^{11} / C$$

В этом случае лагранжиан имеет вид

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + (C_{rkij}^{11} D_{ijk}^1)(C_{rlmn}^{11} D_{mnl}^1) / C] dV$$

а модель среды полностью определяется вариационным уравнением:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} - (C_{rkij}^{11} C_{rlmn}^{11} / C) R_{m,nlkj} + P_i^V] \delta R_i dV + \\
&+ \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - (C_{rkij}^{11} C_{rlmn}^{11} / C) R_{m,nlk}) n_j] \delta R_i + \\
&+ [-(C_{rlmn}^{11} R_{m,nl}) / C] \delta (C_{rkij}^{11} n_k R_{i,j}) \} dF = 0
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Вариационное уравнение (2.107) дает возможность определить напряжения Коши σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - (C_{rkij}^{11} C_{rlmn}^{11} / C) R_{m,nlk} = C_{ijmn}^{11} (R_m - C_{mcab}^{11} R_{a,bc} / C)_{,n} \quad (2.108)$$

Равенства (2.108) позволяют ввести классические перемещения U_m :

$$U_m = R_m - C_{mcab}^{11} R_{a,bc} / C \quad (2.109)$$

Запишем потенциальную энергию среды Миндлина-Тупина в классическом виде, как квадратичную форму первых производных от перемещений:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint \{ & C_{ijmn}^{11} R_{i,j} [R_{m,n} - C_{mcab}^{11} R_{a,bcn} / C] + C_{rkij}^{11} R_{i,j} C_{rlmn}^{11} R_{m,nlk} / C + \\ & + (C_{rkij}^{11} R_{i,jk}) (C_{rlmn}^{11} R_{m,nl}) / C \} dV = \\ = A - \frac{1}{2} \iiint \{ & C_{ijmn}^{11} R_{i,j} [R_{m,n} - C_{mcab}^{11} R_{a,bcn} / C] \} dV - \\ - \frac{1}{2} \oint \{ & (C_{rlmn}^{11} R_{m,nl} / C) (C_{rkij}^{11} n_k R_{i,j}) \} dF \end{aligned} \quad (2.110)$$

Согласно (2.107) для свободной от кинематических связей поверхности поверхностный интеграл в (2.110) обращается в ноль. Учтем, что и полные перемещения R_m и классические перемещения U_m , (2.109) известны, если решена краевая задача (2.107). Тогда, в общем случае, можно определить ортотропный тензор переменных модулей классической среды \tilde{C}_{ijmn} из соотношения:

$$\tilde{C}_{ijmn} U_{m,n} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} \quad (2.111)$$

В общем случае девять уравнений (2.111) позволяют определить девять компонент тензора переменных модулей \tilde{C}_{ijmn} . Таким образом, потенциальная энергия теории сред Тупина, а, значит, и лагранжиан в целом могут быть представлены как потенциальная энергия и лагранжиан классической неоднородной, в общем случае, ортотропной среды:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \tilde{C}_{ijmn} U_{i,j} U_{m,n} dV \quad (2.112)$$

2.6 Адгезионное обобщение теории сред Джеремилло

Плотность потенциальной энергии адгезии записывается относительно тех кинематических переменных, которые фигурируют в выражении классической части объемной плотности, а изотропный тензор объемных модулей заменяется на

трансверсально изотропный в направлении нормали к поверхности тензор адгезионных модулей:

$$U_F = A_{ijmn}^{11} \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{mn}^1 / 2 \quad (2.113)$$

Подставляя выражение тензоров адгезионных модулей четвертого ранга общего вида:

$$\begin{aligned} A_{ijmn}^{pq} = & a_1^{pq} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + a_2^{pq} \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + a_3^{pq} \delta_{in}^* \delta_{jm}^* + (a_4^{pq} + a_9^{pq})(\delta_{ij}^* n_m n_n + \delta_{mn}^* n_i n_j) / 2 + \\ & + a_5^{pq} \delta_{im}^* n_j n_n + (a_6^{pq} + a_7^{pq})(\delta_{in}^* n_m n_j + \delta_{jm}^* n_i n_n) / 2 + a_8^{pq} \delta_{jn}^* n_i n_m + a_{10}^{pq} n_i n_j n_m n_n \end{aligned} \quad (2.114)$$

в выражение плотности потенциальной энергии адгезии (2.113), получим:

$$A_{ijmn}^{11} \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{mn}^1 = A_{ijmn}^{11} (R_{i,j} + R_{j,i})(R_{m,n} + R_{n,m}) / 4 = A_{ijmn}^J R_{i,j} R_{m,n} \quad (2.115)$$

здесь введено определение тензора адгезионных модулей теории Джеремилло:

$$\begin{aligned} A_{ijmn}^J = & A_1^J \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + A_2^J (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{jm}^* \delta_{in}^*) / 2 + A_3^J (\delta_{ij}^* n_m n_n + \delta_{mn}^* n_i n_j) / 2 + \\ & + A_4^J [(\delta_{in}^* n_j + \delta_{jn}^* n_i) n_m + (\delta_{jm}^* n_i + \delta_{im}^* n_j) n_n] / 4 + A_5^J n_i n_j n_m n_n \end{aligned} \quad (2.116)$$

Лемма.

$$\begin{aligned} & (\delta_{pm}^* \delta_{qn}^* + \delta_{pn}^* \delta_{qm}^*) / 2 = [(\delta_{pm}^* + n_p n_m)(\delta_{qn}^* + n_q n_n) + (\delta_{pn}^* + n_p n_n)(\delta_{qm}^* + n_q n_m)] / 2 = \\ & = [\delta_{pm}^* \delta_{qn}^* + \delta_{qn}^* n_p n_m + \delta_{pm}^* n_q n_n + n_p n_q n_n n_m + \delta_{pn}^* \delta_{qm}^* + \delta_{qm}^* n_p n_n + \delta_{pn}^* n_q n_m + n_p n_n n_q n_m] / 2 = \\ & = \delta_{pq}^* \delta_{mn}^* / 2 + (\delta_{pm}^* \delta_{qn}^* + \delta_{pn}^* \delta_{qm}^* - \delta_{pq}^* \delta_{mn}^*) / 2 + \\ & + [(\delta_{pn}^* n_q + \delta_{qn}^* n_p) n_m + (\delta_{pm}^* n_q + \delta_{qm}^* n_p) n_n] / 2 + n_p n_q n_m n_n \end{aligned} \quad (2.117)$$

Лагранжиан адгезионного обобщения теории Джеремилло:

$$\begin{aligned} L = & A - \iiint U_V dV - \oint U_F dF \\ U_V = & (C_{ijmn}^{11} \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{mn}^1 + C_{ijkml}^J \varepsilon_{ij,k}^1 \varepsilon_{ml,l}^1) / 2 \\ U_F = & A_{ijmn}^J \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{mn}^1 / 2 \end{aligned} \quad (2.118)$$

Требую стационарность лагранжиана адгезионного обобщения теории Джеремилло, получим:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} - C_{ijkml}^J R_{m,nlk} + P_i^V) \delta R_i dV + \\ & + \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - C_{ijkml}^J R_{m,nlk}) n_j + (C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} + A_{ijmn}^J R_{m,n})_{,p} \delta_{pj}^*] \delta R_i - \\ & - (C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} + A_{ijmn}^J R_{m,n}) n_j \delta(R_{i,p} n_p) \} dF - \\ & - \sum \oint (C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} + A_{ijmn}^J R_{m,n}) v_j \delta R_i ds = 0 \end{aligned} \quad (2.119)$$

Таким образом установлено, что в этой теории, в каждой неособенной точке поверхности имеют место шесть пар альтернативных граничных условий.

2.7 Теорема эквивалентности адгезионного обобщения теории Джеремилло и теории неоднородной изотропной среды

Используя уравнения равновесия, содержащиеся в вариационном уравнении (2.119) лагранжиан адгезионного обобщения теории Джеремилло (2.118) в объемной части можно привести к виду:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - C_{ijkml}^J R_{m,nlk}) R_{i,j} dV - \frac{1}{2} \oint (A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}) R_{i,j} dF \quad (2.120)$$

Обратим внимание на то, что тензор

$$\tau_{ij} = (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - C_{ijkml}^J R_{m,nlk}) \quad (2.121)$$

по определению является тензором классических напряжений, а тензор

$$a_{ij} = A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} \quad (2.122)$$

- тензором «классических» адгезионных напряжений. Соответственно, лагранжиан адгезионного обобщения теории Джеремилло (2.118) можно представить в виде лагранжиана адгезионного обобщения классической теории:

$$L = A - \frac{1}{4} \iiint \tau_{ij} (R_{i,j} + R_{j,i}) dV - \frac{1}{4} \oint a_{ij} (R_{i,j} + R_{j,i}) dF \quad (2.123)$$

Эквивалентная адгезионному обобщению среды Джеремилло классическая среда имеет тот же вид потенциальной энергии, но с некоторыми неизвестными пока механическими свойствами - тензором упругих податливостей E_{ijmn}^{-1} :

$$(R_{i,j} + R_{j,i}) / 2 = E_{ijmn}^{-1} \tau_{mn} \quad (2.124)$$

$$\tilde{E}_{pqij}^{-1} = \delta_{pq} \delta_{ij} / (9\tilde{K}) + (\delta_{pi} \delta_{qj} / 2 + \delta_{pj} \delta_{qi} / 2 - \delta_{pq} \delta_{ij} / 3) / \tilde{G} \quad (2.125)$$

и тензором адгезионных податливостей A_{ijmn}^{-1} :

$$(R_{i,j} + R_{j,i}) / 2 = A_{ijmn}^{-1} a_{mn} \quad (2.126)$$

Тогда потенциальная энергия принимает вид лагранжиана адгезионного обобщения классической среды (2.123):

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint E_{ijmn}^{-1} \tau_{ij} \tau_{mn} dV - \frac{1}{2} \oint A_{ijmn}^{-1} a_{ij} a_{mn} dF \quad (2.127)$$

2.7.1 Определение эффективных объемных модулей

Необходимо определить эффективные модули упругости и эффективные адгезионные модули. Вычислим эффективный объемного модуль. Для этого свернем (2.124) с тензором δ_{ij} (Приложение А). С учетом тензора (2.121), получим:

$$\tilde{K} = K^{11} - (5C_1^J + 2C_2^J) \frac{\Delta R_{a,a}}{R_{k,k}} \quad (2.128)$$

Вычислим эффективный модуль сдвига. Для этого свернем (2.124) с тензором $(\delta_{pi}\delta_{qj}/2 + \delta_{pj}\delta_{qi}/2 - \delta_{pq}\delta_{ij}/3)$ (Приложение Б). С учетом тензора (2.121), получим:

$$\tilde{G} = \mu^{11} + (4C_1^J + 2C_2^J) \sqrt{\frac{\Gamma_{pq}\Gamma_{pq}}{\gamma_{pq}\gamma_{pq}}} \quad (2.129)$$

$$\text{где } \Gamma_{pq} = \left[\Delta \gamma_{pq} + \frac{4C_1^J + 2C_2^J}{2C_1^J + 4C_2^J} (R_{m,mpq} - \Delta R_{m,m} \delta_{pq} / 3) \right];$$

$$\gamma_{pq} = \frac{1}{\tilde{G}} \left[\left(\frac{\delta_{pm}\delta_{qn}}{2} + \frac{\delta_{pn}\delta_{qm}}{2} - \frac{\delta_{pq}\delta_{mn}}{3} \right) C_{m nab}^{11} R_{a,b} - \left(\frac{\delta_{pm}\delta_{qn}}{2} + \frac{\delta_{pn}\delta_{qm}}{2} - \frac{\delta_{pq}\delta_{mn}}{3} \right) C_{mndabc}^J R_{a,bcd} \right]$$

2.7.2 Определение эффективных адгезионных модулей

Аналогичным, образом определим эффективные адгезионные модули. Тензор адгезионных модулей в адгезионном обобщении среды Джеремилло имеет структуру линейной комбинации пяти базисных трансверсально изотропных тензоров четвертого ранга:

$$\begin{aligned} A_{ijmn}^J = & A_1^J \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + A_2^J (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{jm}^* \delta_{in}^* - \delta_{ij}^* \delta_{mn}^*) / 2 + A_3^J (\delta_{ij}^* n_m n_n + \delta_{mn}^* n_i n_j) / 2 + \\ & + A_4^J [(\delta_{in}^* n_j + \delta_{jn}^* n_i) n_m + (\delta_{jm}^* n_i + \delta_{im}^* n_j) n_n] / 4 + A_5^J n_i n_j n_m n_n \end{aligned} \quad (2.130)$$

В данном случае базисные тензоры являются ортогональными:

$$\begin{cases} A_{ijmn}^J \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* = 4A_1^J \\ A_{ijmn}^J (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{jm}^* \delta_{in}^* - \delta_{ij}^* \delta_{mn}^*) / 2 = 2A_2^J \\ A_{ijmn}^J (\delta_{ij}^* n_m n_n + \delta_{mn}^* n_i n_j) / 2 = A_3^J \\ A_{ijmn}^J [(\delta_{in}^* n_j + \delta_{jn}^* n_i) n_m + (\delta_{jm}^* n_i + \delta_{im}^* n_j) n_n] / 4 = A_4^J / 2 \\ A_{ijmn}^J n_i n_j n_m n_n = A_5^J \end{cases}$$

Соответственно, обратный тензор (тензор адгезионных податливостей) строится на тех же базисных тензорах:

$$A_{pqij}^{-J} = a_1^{-1} \delta_{pq}^* \delta_{ij}^* + a_2^{-1} (\delta_{pi}^* \delta_{aj}^* + \delta_{qi}^* \delta_{pj}^* - \delta_{ij}^* \delta_{pq}^*) / 2 + a_3^{-1} (\delta_{pq}^* n_i n_j + \delta_{ij}^* n_p n_q) / 2 + \\ + a_4^{-1} [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{qi}^* n_p + \delta_{pi}^* n_q) n_j] / 4 + a_5^{-1} n_p n_q n_i n_j \quad (2.131)$$

Тензор эффективных податливостей имеет аналогичную структуру:

$$\tilde{A}_{ijmn}^{-1} = \tilde{a}_1^{-1} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + \tilde{a}_2^{-1} (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{jm}^* \delta_{in}^* - \delta_{ij}^* \delta_{mn}^*) / 2 + \tilde{a}_3^{-1} (\delta_{ij}^* n_m n_n + \delta_{mn}^* n_i n_j) / 2 + \\ + \tilde{a}_4^{-1} [(\delta_{in}^* n_j + \delta_{jn}^* n_i) n_m + (\delta_{jm}^* n_i + \delta_{im}^* n_j) n_n] / 4 + \tilde{a}_5^{-1} n_i n_j n_m n_n \quad (2.132)$$

Адгезионные податливости вычисляются через адгезионные модули из определения обратного тензора:

$$A_{pqij}^{-J} A_{ijmn}^J = (\delta_{pm} \delta_{qn} + \delta_{pn} \delta_{qm}) / 2 \quad (2.133)$$

Вычислим свертки учитывая соотношения (2.130) и (2.131):

$$A_{pqij}^{-J} A_{ijmn}^J = [2a_1^{-1} A_1^J + a_3^{-1} A_3^J / 4] \delta_{pq}^* \delta_{mn}^* + a_2^{-1} A_2^J (\delta_{pm}^* \delta_{qn}^* + \delta_{pn}^* \delta_{qm}^* - \delta_{pq}^* \delta_{mn}^*) / 2 + \\ + [a_1^{-1} A_3^J + a_3^{-1} A_5^J / 2] \delta_{pq}^* n_m n_n + [a_3^{-1} A_1^J + a_5^{-1} A_3^J / 2] n_p n_q \delta_{mn}^* + \\ + a_4^{-1} A_4^J [(\delta_{pn}^* n_q + \delta_{qn}^* n_p) n_m + (\delta_{pm}^* n_q + \delta_{qm}^* n_p) n_n] / 8 + [a_3^{-1} A_3^J / 2 + a_5^{-1} A_5^J] n_p n_q n_m n_n \quad (2.134)$$

Выразим правую часть определения обратного тензора адгезионных податливостей (2.133) через базисные тензоры, используя доказанную выше лемму:

$$(\delta_{pm} \delta_{qn} + \delta_{pn} \delta_{qm}) / 2 = \delta_{pq}^* \delta_{mn}^* / 2 + (\delta_{pm}^* \delta_{qn}^* + \delta_{pn}^* \delta_{qm}^* - \delta_{pq}^* \delta_{mn}^*) / 2 + \\ + [(\delta_{pn}^* n_q + \delta_{qn}^* n_p) n_m + (\delta_{pm}^* n_q + \delta_{qm}^* n_p) n_n] / 2 + n_p n_q n_m n_n \quad (2.135)$$

Сравнивая множители при базисных тензорах правой и левой частей (2.133) и (2.134), получим неоднородную систему пяти линейных алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных адгезионных податливостей:

$$\begin{cases} a_1^{-1} = 1 / \left(4A_1^J - \frac{A_3^J A_3^J}{A_5^J} \right) \\ a_2^{-1} = \frac{1}{A_2^J} \\ a_3^{-1} = -a_1^{-1} \frac{2A_3^J}{A_5^J} \\ a_4^{-1} = \frac{4}{A_4^J} \\ a_5^{-1} = a_1^{-1} \frac{4A_1^J}{A_5^J} \end{cases} \quad (2.136)$$

Теперь определим эффективные адгезионные модули. Свернем (2.126) с тензором δ_{ij} (Приложение В). С учетом определения тензора (2.122) получим:

$$a_1^{-1}G_1^* + a_3^{-1}G_3^* = 1 \quad (2.137)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1^* = 4A_1^J + A_3^J \frac{2(R_{m,n}n_m n_n)}{R_{i,j}\delta_{ij}^*} + C_1^J \frac{2(2n_k \Delta R_k + 4n_k R_{m,mki})}{R_{i,j}\delta_{ij}^*} + \\ + C_2^J \frac{4(\delta_{ij}^* n_k R_{k,ij} + \delta_{ij}^* n_k R_{j,ki} + \delta_{ij}^* n_k R_{i,kj})}{R_{i,j}\delta_{ij}^*} \\ G_3^* = \frac{1}{2}A_3^J + A_5^J \frac{(R_{m,n}n_m n_n)}{R_{i,j}\delta_{ij}^*} + C_1^J \frac{3(n_k \Delta R_k + 2n_k R_{m,mk})}{R_{i,j}\delta_{ij}^*} + C_2^J \frac{6(n_i n_j n_k R_{k,ij})}{R_{i,j}\delta_{ij}^*} \end{array} \right.$$

Свернем (2.126) с тензором $(\delta_{ip}^* \delta_{jq}^* + \delta_{jp}^* \delta_{iq}^* - \delta_{ij}^* \delta_{pq}^*)/2$ (Приложение Г). С учетом определения тензора (2.122), получим:

$$\frac{1}{a_2^{-1}} = A_2^J + C_2^J \sqrt{\frac{\Gamma_{pq}^* \Gamma_{pq}^*}{\gamma_{mn}^* \gamma_{mn}^*}} \quad (2.138)$$

Так как эффективная податливость связана с эффективным адгезионным модулем так же, как истинная податливость и адгезионный модуль, окончательно запишем:

$$\tilde{A}_2^J = A_2^J + C_2^J \sqrt{\frac{\Gamma_{pq}^* \Gamma_{pq}^*}{\gamma_{mn}^* \gamma_{mn}^*}} \quad (2.139)$$

Эффективный адгезионный модуль \tilde{A}_2^J алгебраически связан с самим адгезионным модулем, а второе слагаемое связано с градиентным модулем. Физический смысл адгезионных модулей будет приведен дальше.

Перейдем к определению эффективного адгезионного модуля \tilde{A}_4^J . Свернем (2.126) с тензором $[(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{qi}^* n_p + \delta_{pi}^* n_q) n_j]/4$ (Приложение Д). С учетом определения тензора (2.122), получим:

$$\frac{1}{a_4^{-1}} = \frac{A_4^J}{4} + 2C_1^J \sqrt{\frac{F_{pq}^* F_{pq}^*}{f_{pq}^* f_{pq}^*}} \quad (2.140)$$

Так как эффективная податливость связана с эффективным адгезионным модулем так же, как и истинная податливость и адгезионный модуль, окончательно можем записать:

$$\tilde{A}_4^J = A_4^J + 8C_1^J \sqrt{\frac{F_{pq}^* F_{pq}^*}{f_{pq}^* f_{pq}^*}} \quad (2.141)$$

Продолжим процедуру определения эффективных модулей. Эффективные податливости $a_1^{-1}, a_3^{-1}, a_5^{-1}$ определяются не независимо, а являются решением алгебраической системы трех уравнений (это же в полной мере относится к эффективным адгезионным модулям A_1^J, A_3^J, A_5^J). Одно из уравнений на податливости (2.137) уже получено. Получим второе.

Свернем (2.126) с тензором $(\delta_{pq}^* n_i n_j + \delta_{ij}^* n_p n_q) / 2$ (Приложение Е). С учетом определения тензора, $a_{ij} = A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}$ получим:

$$g_{pq}^* = 2\tilde{a}_1^{-1} B_{pq}^* + \tilde{a}_3^{-1} C_{pq}^* + \tilde{a}_5^{-1} D_{pq}^* \quad (2.142)$$

Таким образом, получено второе линейное неоднородное алгебраическое уравнение относительно трех эффективных податливостей $\tilde{a}_1^{-1}, \tilde{a}_3^{-1}, \tilde{a}_5^{-1}$.

Чтобы получить третье линейное неоднородное алгебраическое уравнение относительно трех эффективных податливостей $\tilde{a}_1^{-1}, \tilde{a}_3^{-1}, \tilde{a}_5^{-1}$, свернем соотношение (2.126) с тензором $n_p n_q n_i n_j$ (Приложение Ж) и с учетом определения тензора (2.122), получим:

$$\tilde{a}_3^{-1} H_3^* + \tilde{a}_5^{-1} H_5^* = 1 \quad (2.143)$$

$$\begin{cases} h_{pq}^* n_p n_q = n_p n_q R_{p,q} \\ H_3^* = A_1^J \frac{\delta_{mn}^* R_{m,n}}{n_p n_q R_{p,q}} + A_3^J \frac{1}{2} + C_1^J \frac{n_k (\Delta R_k + 2R_{m,mk})}{n_p n_q R_{p,q}} + C_2^J \frac{\delta_{ij}^* n_k (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj})}{n_p n_q R_{p,q}} \\ H_5^* = A_3^J \frac{\delta_{mn}^* R_{m,n} / 2}{n_p n_q R_{p,q}} + A_5^J + C_1^J \frac{3n_k (\Delta R_k + 2R_{m,mk})}{n_p n_q R_{p,q}} + C_2^J \frac{6n_i n_j n_k R_{k,ij}}{n_p n_q R_{p,q}} \end{cases}$$

В результате, эффективные адгезионные модули определяются по эффективным податливостям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_1^{-1} = 1 / \left(4\tilde{A}_1^J - \frac{\tilde{A}_3^J \tilde{A}_3^J}{\tilde{A}_5^J} \right) \\ \tilde{a}_2^{-1} = \frac{1}{\tilde{A}_2^J} \\ \tilde{a}_3^{-1} = -\tilde{a}_1^{-1} \frac{2\tilde{A}_3^J}{\tilde{A}_5^J} \\ \tilde{a}_4^{-1} = \frac{4}{\tilde{A}_4^J} \\ \tilde{a}_5^{-1} = \tilde{a}_1^{-1} \frac{4\tilde{A}_1^J}{\tilde{A}_5^J} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_1^J = \frac{\tilde{a}_5^{-1}}{(4\tilde{a}_1^{-1}\tilde{a}_5^{-1} - \tilde{a}_3^{-1}\tilde{a}_3^{-1})} \\ \tilde{A}_2^J = \frac{1}{\tilde{a}_2^{-1}} \\ \tilde{A}_3^J = -\frac{2\tilde{a}_3^{-1}}{(4\tilde{a}_1^{-1}\tilde{a}_5^{-1} - \tilde{a}_3^{-1}\tilde{a}_3^{-1})} \\ \tilde{A}_4^J = \frac{4}{\tilde{a}_4^{-1}} \\ \tilde{A}_5^J = \frac{4\tilde{a}_1^{-1}}{(4\tilde{a}_1^{-1}\tilde{a}_5^{-1} - \tilde{a}_3^{-1}\tilde{a}_3^{-1})} \end{array} \right. \quad (2.144)$$

В свою очередь, податливости определяются по известному полю полных перемещений:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2^J &= \frac{1}{\tilde{a}_2^{-1}} = A_2^J + C_2^J \sqrt{\frac{\Gamma_{pq}^* \Gamma_{pq}^*}{\gamma_{mn}^* \gamma_{mn}^*}} \\ \tilde{A}_4^J &= \frac{4}{\tilde{a}_4^{-1}} = A_4^J + 8C_1^J \sqrt{\frac{F_{pq}^* F_{pq}^*}{f_{pq}^* f_{pq}^*}} \end{aligned} \quad (2.145)$$

Первое слагаемое этих формул отражает вклад идеальной адгезии (масштабных эффектов первого порядка) в эффективные адгезионные свойства, а второе – вклад градиентных (масштабных эффектов второго порядка). Эффективные адгезионные модули $\tilde{A}_2^J, \tilde{A}_4^J$ определяют адгезионные касательные напряжения.

Модули $\tilde{A}_1^J, A_3^J, \tilde{A}_5^J$ определяются через эффективные податливости $\tilde{a}_1^{-1}, \tilde{a}_3^{-1}, \tilde{a}_5^{-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_1^J = \frac{\tilde{a}_5^{-1}}{(4\tilde{a}_1^{-1}\tilde{a}_5^{-1} - \tilde{a}_3^{-1}\tilde{a}_3^{-1})} \\ A_3^J = -\frac{2\tilde{a}_3^{-1}}{(4\tilde{a}_1^{-1}\tilde{a}_5^{-1} - \tilde{a}_3^{-1}\tilde{a}_3^{-1})} \\ \tilde{A}_5^J = \frac{4\tilde{a}_1^{-1}}{(4\tilde{a}_1^{-1}\tilde{a}_5^{-1} - \tilde{a}_3^{-1}\tilde{a}_3^{-1})} \end{array} \right. \quad (2.146)$$

Причем эффективные податливости являются решением системы трех линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_1^{-1} G_1^* + a_3^{-1} G_3^* = 1 \\ \tilde{a}_1^{-1} \frac{2B_{pq}^* g_{pq}^*}{g_{ij}^* g_{ij}^*} + \tilde{a}_3^{-1} \frac{C_{pq}^* g_{pq}^*}{g_{ij}^* g_{ij}^*} + \tilde{a}_5^{-1} \frac{D_{pq}^* g_{pq}^*}{g_{ij}^* g_{ij}^*} = 1 \\ \tilde{a}_3^{-1} H_3^* + \tilde{a}_5^{-1} H_5^* = 1 \end{cases} \quad (2.147)$$

Эффективные адгезионные модули $\tilde{A}_1^J, A_3^J, \tilde{A}_5^J$ определяют адгезионные нормальные напряжения.

Влияние и вклад масштабных эффектов различного порядка в нормальных адгезионных напряжениях более сложно и пока не удастся выделить масштабные эффекты первого порядка явно, как для касательных адгезионных напряжений.

2.8 Заключение

В данной главе показано, что существует общая форма известных градиентных теорий второго порядка и в рамках полученной общей модели доказана теорема о сводимости любой градиентной модели дефектной среды к неоднородной градиентной модели неповрежденной среды.

На основании последовательно доказанных теорем, модели градиентной дефектной среды были сведены к модели бездефектной градиентной среды. Затем модель бездефектной градиентной среды была сведена к модели классической неоднородной среды. В результате появилась возможность численными методами, разработанными для классических сред, исследовать напряженно-деформированное состояние как градиентных бездефектных, так и градиентных дефектных сред.

В связи с тем, что градиентные модели определяют масштабные эффекты второго порядка, а адгезионные модели определяют масштабные эффекты первого порядка, было проведено исследование о возможности сведения градиентных моделей поврежденной адгезии к градиентным моделям идеальной (бездефектной) адгезии, а модель градиентной идеальной адгезии к классической идеальной адгезии. В качестве примера была выбрана наиболее популярная градиентная модель, модифицированная адгезионными свойствами поверхности – модель Джеремилло (теория градиентных деформаций).

Построено доказательство того, что напряженное состояние адгезионного обобщения среды Джеремилло может быть представлено как напряженное состояние неоднородной классической среды с адгезионно активной поверхностью. При этом получены конечные формулы, позволяющие осуществить вычисление компонентов переменного по координатам тензора модулей четвертого ранга \tilde{C}_{ijmn} через компоненты постоянных тензоров модулей четвертого C_{ijmn}^J и шестого рангов C_{ijklmn}^J исходной среды Джеремилло и найденному из решения исходной краевой задачи теории Джеремилло полю перемещений R_i .

Впервые получены конечные формулы, позволяющие осуществить вычисление компонентов переменного по координатам тензора адгезионных модулей четвертого ранга \tilde{A}_{ijmn}^J через компоненты постоянного тензора адгезионных модулей четвертого A_{ijmn}^J и тензора градиентных модулей шестого рангов C_{ijklmn}^J исходной среды Джеремилло и найденному из решения исходной краевой задачи теории Джеремилло полю перемещений R_i .

Как и в теории идеальной адгезии, эффективные адгезионные напряжения разделяются на две тройки. Первая тройка напряжений действует в касательной плоскости к поверхности тела. Это нормальные $\sigma_{s_1s_1}, \sigma_{s_2s_2}$ (растягивающие поверхность в двух ортогональных гауссовых направлениях s_1, s_2) напряжения и касательное напряжение $\tau_{s_1s_2} = \tau_{s_2s_1}$, сдвигающее касательную плоскость в своей плоскости. Вторая тройка напряжений действует непосредственно на поверхности. Это два касательных напряжения τ_{s_1n}, τ_{s_2n} , действующих на поверхности в двух ортогональных гауссовых направлениях s_1, s_2 , и нормальное напряжение σ_{nn} . Можно говорить о том, что нормальное напряжение σ_{nn} определяет расслоение двух тел по моде I, а касательные напряжения τ_{s_1n}, τ_{s_2n} - определяют расслоение двух тел по моде II и III.

Глава 3 Пористость как пример дефектной среды

3.1 Введение

В данной главе развивается модель пористых сред с микроструктурой, описывающая эффекты деградации свойств материала из-за рассеянных повреждений. В ходе построения решения устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. В общем случае предложенный метод позволяет определить зависимость свойств от вида напряженного состояния, т.е. учесть эффекты накопления повреждений.

Решение поставленной задачи предлагается осуществить на основе градиентной модели сред с сохраняющимися дефектами, представленную в работах [41, 42, 105, 106]. Применение данной модели является оправданным, т.к. в рамках вариационной постановке сред с сохраняющимися дислокациями решается связанная проблема моделирования деформации тел с учетом эволюции полей дефектов. В ходе построения решения для тел с полями дефектов, определяются эффективные упругие характеристики, которые по своим значениям меньше, в силу наличия поврежденности.

В дальнейшем будут приведены основные положения моделей сред с сохраняющимися дефектами, с акцентом на один из возможных видов дефектов – пористость. Было установлено [107], что имеет место соответствие между средами с полями дефектов и градиентными средами с одной стороны и классическими средами с переменными по координатам характеристиками, т.е. функционально-градиентными классическими средами с другой. Здесь предлагается модель функционально-градиентного материала, переменность свойств которого определяется пористостью, а также устанавливаются соотношения, показывающие, что дефектность, связанная с пористостью и ее эволюцией, приводит к изменению механических характеристик функционально-градиентного материала при оценке его эффективных свойств.

3.2 Моделирование сред с полями дефектов

Основываясь на доказательстве теоремы об эквивалентности модели среды с полями дефектов и классической моделью функционально-градиентного материала, рассмотренной во второй главе и используя приведенную там процедуру рассмотрим моделирование сред с пористостью как изотропной среды с функционально-градиентными свойствами.

3.2.1 Бездефектные среды

В рамках вариационной постановки теории сред Миндлина [40], рассмотрим сначала бездефектные среды с вектором перемещений R_i , который является непрерывным и дифференцируемым. Запишем расширенные соотношения Коши для компонентов тензора дисторсии d_{ij} , которые являются кинематическими связями между двенадцатью зависимыми степенями свободы γ_{ij} , θ , ω_k , R_i которыми наделен бесконечно малый параллелепипед:

$$R_{i,j} = d_{ij} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k\mathcal{E}_{ijk} \quad (3.1)$$

здесь по повторяющимся индексам осуществляется свертка, γ_{ij} - компоненты тензора девиатора деформаций, θ - объемная деформация, ω_k - псевдовектор поворотов или упругих вращений, \mathcal{E}_{ijk} - компоненты тензора Леви-Чивиты, δ_{ij} - тензор Кронекера.

Записанное соотношение Коши (3.1) можно трактовать как условие существования векторного потенциала для тензора дисторсии $d_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = R_{i,j}$. Полагаем, что для тензора дисторсий выполняются однородные условия Папковича

$$d_{in,m}\mathcal{E}_{nmj} = 0 \quad (3.2)$$

Следовательно, по тензору дисторсии d_{ij} можно однозначно восстановить вектор перемещений, используя формулы Чезаро.

3.2.2 Соотношения для сред с полями дефектов

Если в среде имеются поля дефектов, то наряду с тензором стесненных дисторсий деформационное состояние среды определяется также непрерывным тензором свободных дисторсий D_{ij} , который не связан с полем перемещений, т.е. отражает наличие полей дефектов. Для свободных дисторсий имеют место неоднородные условия Папковича: $D_{in,m} \mathcal{E}_{mji} = \Xi_{ij} \neq 0$, где Ξ_{ij} плотность дислокаций.

Предполагается, что параметры рассматриваемой кинематической модели обобщенной дефектной среды d_{ij} , D_{ij} , являются непрерывными и дифференцируемыми и, поэтому, могут быть аргументами функционала, используемого при вариационной формулировке модели. Запишем функционал Лагранжа для теории дефектных сред:

$$L = A - \iiint U_V(d_{mn}, D_{mn}, D_{mn,l}) dV \quad (3.3)$$

$$U_V = \frac{1}{2} (C_{ijmn}^{11} d_{ij} d_{mn} + 2C_{ijmn}^{12} d_{ij} D_{mn} + C_{ijmn}^{22} D_{ij} D_{mn} + C_{ijkml} D_{ij,k} D_{mn,l})$$

здесь $A = \iiint_V P_i^V R_i dV + \iint_F P_i^F R_i dF$ - работа внешних объемных сил P_i^V , распределенных в объеме упругого тела V , и поверхностных сил P_i^F заданных на поверхности тела F на перемещениях R_i , U_V - плотность потенциальной энергии, C_{ijmn}^{pq} - тензоры модулей упругости, среди которых C_{ijmn}^{11} - тензор модулей упругости классической, неповрежденной дефектами среды, C_{ijmn}^{12} - тензор модулей упругости, описывающий перекрестные эффекты, связанные с взаимовлиянием полей стесненных деформаций и свободных деформаций, C_{ijmn}^{22} - тензор модулей упругости условной поврежденной среды с полем свободных деформаций, C_{ijkml} - тензор градиентных модулей, характеризующий масштабные эффекты, связанные с учетом свободных дисторсий. Для изотропного тела упругие модули можно записать через аналоги коэффициентов Ламе λ^{pq} , μ^{pq} :

$$C_{ijmn}^{pq} = \lambda^{pq} \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu^{pq} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}), \quad p, q = 1, 2 \quad (3.4)$$

Доказывается [110], что «поврежденные» модули упругости всегда меньше неповрежденных.

Физические соотношения рассматриваемой среды с полем дефектов полностью определяются соотношениями Грина:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial d_{ij}} = (C_{ijmn}^{11} d_{mn} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}) \\ s_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}} = (C_{ijmn}^{21} d_{mn} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}) \\ m_{ijk} &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij,k}} = C_{ijkml} D_{mn,l}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Предполагается, что выполняются условия существования потенциальности для плотности энергии U_V , т.е. тензоры модулей в соотношениях (3.5) удовлетворяют соотношениям симметрии.

Соотношения (3.3) и (3.5) позволяют получить полное математическое описание модели, найти соответствующие уравнения Эйлера и граничные условия:

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij} \delta d_{ij} + s_{ij} \delta D_{ij} + m_{ijk} \delta D_{ij,k}] dV = \\ &= \iiint [(\sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i + (m_{ijk,k} - s_{ij}) \delta D_{ij}] dV + \\ &+ \oint \{ [P_i^F - \sigma_{ij} n_j] \delta R_i - m_{ijk} n_k \delta D_{ij} \} dF = 0\end{aligned}\quad (3.6)$$

Исследуем проблему эквивалентности модели среды, задаваемой вариационным равенством (3.6) и классической теорией упругости. Для этого, следуя работе [107], попытаемся привести вариационную постановку (3.6) к вариационной постановке классической упругости. Полагаем, что поля перемещений и дисторсий (стесненных и свободных) являются решениями краевой задачи, следующей из (3.6). Перепишем Лагранжиан (3.3) с учетом (3.5) в следующем виде:

$$\begin{aligned}L &= A - \frac{1}{2} \iiint [\sigma_{ij} R_{i,j} + (s_{ij} - m_{ijk,k}) D_{ij} + (m_{ijk,k} D_{ij} + m_{ijk} D_{ij,k})] dV = \\ &= A - \frac{1}{2} \iiint [\sigma_{ij} R_{i,j} + (s_{ij} - m_{ijk,k}) D_{ij}] dV - \frac{1}{2} \oint (m_{ijk} n_k) D_{ij} dV\end{aligned}\quad (3.7)$$

В соответствии с вариационным уравнением (3.6), второе слагаемое в объемном интеграле равно нулю. Соответственно, и поверхностный интеграл в (3.7) равен нулю в силу неклассических граничных условий в уравнении (3.6) $(m_{ijk} n_k) \delta D_{ij} = 0$.

Таким образом, потенциальная энергия в (3.7) приобретает классический вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \sigma_{ij} R_{i,j} dV \quad (3.8)$$

Отметим, что выражение (3.8) является искомым условием эквивалентности. В нем поле перемещений определяется краевой задачей (3.6), а для тензора напряжений σ_{ij} выполняется обобщенный закон Гука (3.5).

Равенство (3.8) указывает лишь на то, что потенциальная энергия для модели (3.6) приобретает классический вид. Вопрос о существовании эквивалентной модели теории упругости и о виде физической модели для эквивалентной среды исследован в работе [107].

Покажем, что всегда можно определить тензорное поле податливостей так, чтобы выполнялось соотношение:

$$\frac{R_{i,j} + R_{j,i}}{2} = E_{ijpq}^{-1} \sigma_{pq} \quad (3.9)$$

где $E_{ijpq}^{-1} = \frac{1}{3\tilde{K}} \delta_{ij} \delta_{pq} + \frac{1}{\tilde{G}} \left(\frac{\delta_{ip} \delta_{jq}}{2} + \frac{\delta_{iq} \delta_{jp}}{2} - \frac{\delta_{ij} \delta_{pq}}{3} \right)$. Учитывая (3.6), установлено, что плотность потенциальной энергии (3.8) приобретает вид плотности потенциальной энергии классической неоднородной среды:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint E_{ijmn}^{-1} \sigma_{ij} \sigma_{mn} dV \quad (3.10)$$

Сворачивая равенство (3.9) с δ_{ij} , получим:

$$R_{k,k} = \frac{1}{\tilde{K}} \sigma_{kk} \quad (3.11)$$

Учитывая (3.11), и физические соотношения (3.5) предложено [107] определить переменный модуль объемного сжатия эквивалентной классической неоднородной среды через решение краевой задачи (3.6).

Следовательно, вводя определения ($C_{kkmn}^{pq} = (2\mu^{pq} + 3\lambda^{pq})\delta_{mn} / 3$), запишем:

$$\sigma_{kk}^1 = C_{kkmn}^{11} R_{m,n} + C_{kkmn}^{12} D_{mn} = \left((2\mu^{11} + 3\lambda^{11}) R_{k,k} + (2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) D_{kk} \right) / 3 = K^{11} R_{k,k} + K^{12} D_{kk}$$

Отсюда найдем эффективный модуль объемной деформации:

$$\tilde{K} = \frac{\sigma_{kk}}{R_{k,k}} = \frac{(K^{11} R_{m,m} + K^{12} D_{mm})}{R_{k,k}} = K^{11} + K^{12} \frac{D_{mm}}{R_{k,k}} \quad (3.12)$$

где $K^{pq} = (2\mu^{pq} + 3\lambda^{pq})/3$, $p, q = 1, 2$.

Сворачивая равенство (3.9) с $(\delta_{ia}\delta_{jb}/2 + \delta_{ib}\delta_{ja}/2 - \delta_{ij}\delta_{ab}/3)$, получим:

$$\gamma_{ab} = (R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{i,i}\delta_{ab}/3) = \frac{1}{\tilde{G}}(\sigma_{a,b}^1/2 + \sigma_{b,a}^1/2 - \sigma_{j,j}^1\delta_{ab}/3) \quad (3.13)$$

Используя первые из соотношений (3.5), и формулы (3.13), получим следующее уравнение для модуля сдвига эквивалентной классической среды:

$$\tilde{G} = \mu^{11} + \mu^{12} \sqrt{\frac{\beta_{ab}\beta_{ab}}{\gamma_{ab}\gamma_{ab}}} \quad (3.14)$$

где $\gamma_{ab} = (R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{p,p}\delta_{ab}/3)$ - девиатор стесненных деформаций, $\beta_{ab} = (D_{ab}/2 + D_{ba}/2 - D_{rr}\delta_{ab}/3)$ - девиатор свободных деформаций.

Таким образом, однозначно определены переменные по координатам модули сдвига (3.14) и объемного сжатия (3.12) эквивалентной неоднородной классической среды. Переменность их по координатам определяется полями перемещений R_i и несовместных дисторсий D_{ij}^2 , которые находятся как решение краевой задачи (3.7). В следующих разделах рассматриваются примеры проявления эффекта функциональной градиентности в деформированных средах, связанных с наличием полей дефектов.

3.3 Моделирование сред с пористостью как изотропной среды с функционально-градиентными свойствами

В качестве частного случая общей теории сред с полями дефектов рассмотрим среду Миндлина. Лагранжиан этой теории имеет вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint (C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2) dV \quad (3.15)$$

где $C_{ijmn}^{pq} = \lambda^{pq}\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu^{pq}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$. Определения пористой среды:

$$D_{ij}^1 = R_{i,j}; \quad D_{ij}^2 = \frac{\theta\delta_{ij}}{3}; \quad \theta \neq R_{k,k} \quad (3.16)$$

Подставляем определения (3.16) в Лагранжиан (3.15):

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \left[C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{n,m} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} \frac{1}{3} \theta \delta_{mn} + \right. \\ \left. + C_{ijmn}^{22} \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} \frac{1}{3} \theta \delta_{mn} + C_{ijknml}^{22} \delta_{ij} \frac{1}{3} \theta_{,k} \delta_{mn} \frac{1}{3} \theta_{,l} \right] dV \quad (3.17)$$

Заменяем выражения для тензора модулей упругости и тензора Кронекера, $K^{12} = \frac{1}{3}(3\lambda^{12} + 2\mu^{12})$, $K^{22} = \frac{1}{3}(3\lambda^{22} + 2\mu^{22})$ и переписываем Лагранжиан (3.17):

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \left[C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{n,m} + 2K^{12} \delta_{ij} R_{i,j} \theta + K^{22} \theta \theta + K^{22} l_{\theta}^2 \delta_{kl} \theta_{,k} \theta_{,l} \right] dV \quad (3.18)$$

где l_{θ} - масштабный параметр. Записываем вариационное уравнение для функционала (3.18):

$$\delta L = \delta A - \iiint \left[\left(C_{ijmn}^{11} R_{n,m} + K^{12} \theta \delta_{ij} \right) \delta R_{i,j} + \right. \\ \left. + \left(K^{12} R_{k,k} + K^{22} \theta \right) \delta \theta + K^{22} l_{\theta}^2 \theta_{,k} \delta \theta_{,k} \right] dV \quad (3.19)$$

Интегрируем по частям под знаком вариации в (3.19):

$$\delta L = \iiint \left[\left(C_{ijmn}^{11} R_{n,mj} + K^{12} \theta_{,i} + P_i^V \right) \delta R_i + \left(K^{22} l_{\theta}^2 \theta_{,kk} - K^{22} \theta - K^{12} R_{k,k} \right) \delta \theta \right] dV + \\ + \oint \left[\left(P_i^F - \left(C_{ijmn}^{11} R_{n,m} + K^{12} \theta \delta_{ij} \right) n_j \right) \delta R_i - K^{22} l_{\theta}^2 \theta_{,k} n_k \delta \theta \right] dF = 0 \quad (3.20)$$

Вариационное уравнение (3.20) определяет краевую задачу для сред с полями дефектов – пор. Соответственно уравнения равновесия следуют из (3.20) как уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} C_{ijmn}^{11} R_{n,mj} + K^{12} \theta_{,i} + P_i^V = 0 \\ K^{22} l_{\theta}^2 \theta_{,kk} - K^{22} \theta - K^{12} R_{k,k} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Уравнения (3.21) приводятся к распадающейся системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(C_{ijmn}^{11} - \frac{K^{12} K^{12}}{K^{22}} \delta_{ij} \delta_{mn} \right) R_{n,mj} - C_{kjmn}^{11} l_{\theta}^2 R_{n,mjki} + \left(P_i^V - l_{\theta}^2 P_{k,k}^V \right) = 0 \\ \theta = -\frac{K^{12}}{K^{22}} R_{k,k} - \frac{l_{\theta}^2}{K^{12}} C_{kjmn}^{11} R_{n,mjk} - \frac{l_{\theta}^2}{K^{12}} P_{k,k}^V \end{cases} \quad (3.22)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^{11} R_{n,mj} &= (2\mu^{11} + \lambda^{11}) R_{k,ki} + \mu^{11} (\Delta R_i - R_{k,ki}); \\ C_{kjmn}^{11} R_{n,mjk} &= (2\mu^{11} + \lambda^{11}) \Delta R_{k,k}; \\ C_{kjmn}^{11} l_{\theta}^2 R_{n,mjki} &= (2\mu^{11} + \lambda^{11}) l_{\theta}^2 \Delta R_{k,ki} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Учитывая (3.23), перепишем систему уравнений (3.22) в виде:

$$\begin{cases} \left(2\mu^{11} + \lambda^{11} - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}}\right)R_{k,ki} + \mu^{11}(\Delta R_i - R_{k,ki}) - (2\mu^{11} + \lambda^{11})l_\theta^2 \Delta R_{k,ki} + P_i^V - l_\theta^2 P_{k,k}^V = 0 \\ \theta = -\frac{K^{12}}{K^{22}}R_{k,k} - \frac{(2\mu^{11} + \lambda^{11})}{K^{12}}l_\theta^2 \Delta R_{k,k} - \frac{l_\theta^2}{K^{12}}P_{k,k}^V \end{cases} \quad (3.24)$$

Поверхностный интеграл в выражении (3.20) определяет “статические” и “кинематические” краевые условия.

Полагаем, что краевая задача для пористой среды решена. Получим выражения для эффективных модулей эквивалентной изотропной среды, рассматриваемой как функционально-градиентный материал, в котором свойства определяются через решение, найденное для пористой среды. Преобразуем Лагранжиан (3.18) к виду:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint [(C_{ijmn}^{11} R_{n,m} + K^{12} \theta \delta_{ij}) R_{i,j}] dV - \\ - \frac{1}{2} \iiint [(K^{12} R_{k,k} + K^{22} \theta - K^{22} l_\theta^2 \theta_{,kk}) \theta] dV - \frac{1}{2} \oint (K^{22} l_\theta^2 \theta_{,k} n_k) \theta dV \end{aligned} \quad (3.25)$$

Второе слагаемое в (3.25) содержит левую часть четвертого уравнения Эйлера, поэтому оно равно нулю. Третье слагаемое содержит произведение левых частей альтернативных неклассических граничных условий, поэтому на всей поверхности в этом интеграле один из сомножителей обязательно равен нулю и, как следствие, равен нулю и поверхностный интеграл. Таким образом выражение (3.25) сводится к виду:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint (C_{ijmn}^{11} R_{n,m} + K^{12} \theta \delta_{ij}) R_{i,j} dV \quad (3.26)$$

Выражение в скобках имеет физический смысл классических напряжений и позволяет получить соотношения, определяющие тензор податливостей эффективной среды $\sigma_{ij} = C_{ijmn}^{11} R_{n,m} + K^{12} \theta \delta_{ij}$. Подставляя эту комбинацию в первые три уравнения Эйлера, получим уравнения классической теории упругости:

$$\sigma_{ij,j} + P_i^V = 0 \quad (3.27)$$

Определяем тензор податливостей E_{ijpq}^{-11} с учетом соотношения (3.9)

$$E_{ijpq}^{-11} = \frac{1}{K} \delta_{ij} \delta_{pq} + \frac{1}{G} (\delta_{ip} \delta_{jq} / 2 + \delta_{iq} \delta_{jp} / 2 - \delta_{ij} \delta_{pq} / 3) \quad (3.28)$$

Сворачивая выражение (3.9) с δ_{ij} и учитывая (3.28) получим:

$$R_{k,k} = \frac{1}{\tilde{K}} \sigma_{kk} \quad (3.29)$$

Выражаем из (3.29) \tilde{K} и подставляем напряжения σ_{kk} ($\sigma_{ij} = C_{ijmn}^{11} R_{n,m} + K^{12} \theta \delta_{ij}$). Имеем вместо (3.29):

$$\tilde{K} = \frac{\sigma_{kk}}{R_{k,k}} = \frac{K^{11} R_{m,m} + K^{12} \theta}{R_{k,k}} \quad (3.30)$$

Подставляем в (3.30) ранее найденное θ из (3.24). Получим:

$$\tilde{K} = \left(K^{11} - \frac{K^{12} K^{12}}{K^{22}} \right) - (2\mu^{11} + \lambda^{11}) l_{\theta}^2 \frac{\Delta R_{k,k}}{R_{k,k}} \quad (3.31)$$

То есть модуль объемного сжатия (3.31) является разностью постоянного по координатам поврежденного порами модуля объемного сжатия минус переменная по координатам градиентная поправка. Аналогичным образом, сворачивая с $(\delta_{ia} \delta_{jb} / 2 + \delta_{ib} \delta_{ja} / 2 - \delta_{ij} \delta_{ab} / 3)$, получим:

$$(R_{a,b} / 2 + R_{b,a} / 2 - R_{k,k} \delta_{ab} / 3) = \frac{1}{\tilde{G}} (\sigma_{a,b} / 2 + \sigma_{b,a} / 2 - \sigma_{k,k} \delta_{ab} / 3) \quad (3.32)$$

Используя первые из соотношений (3.5) и формулу (3.32) можно получить выражение для переменного модуля сдвига:

$$\tilde{G} = \sqrt{\frac{(\sigma_{p,q} / 2 + \sigma_{q,p} / 2 - \sigma_{i,i} \delta_{pq} / 3)(\sigma_{p,q} / 2 + \sigma_{q,p} / 2 - \sigma_{j,j} \delta_{pq} / 3)}{(R_{a,b} / 2 + R_{b,a} / 2 - R_{m,m} \delta_{ab} / 3)(R_{a,b} / 2 + R_{b,a} / 2 - R_{n,n} \delta_{ab} / 3)}} = \mu^{11} \quad (3.33)$$

Таким образом учет соотношений закона Гука в (3.33) показывает, что эффективный модуль сдвига для пористой среды остается постоянным и не поврежденным. Приведенная выше последовательность действий позволяет описать алгоритм построения модели сплошной среды.

3.4 Алгоритм построения модели сплошной среды

Будем использовать кинематический вариационный принцип для получения математической формулировке моделей с усложненной кинематикой. Пусть все рассматриваемые процессы являются линейными и обратимыми. Тогда алгоритм для построения такой модели [108]:

1. Проводим анализ кинематики среды, устанавливаем множество кинематических связей.
2. Строим возможную работу внутренних сил на основе кинематических связей. Стоит отметить, что спектр внутренних сил зависит от неопределенных множителей Лагранжа, на которых вводятся кинематические связи
3. Преобразовываем в линейную вариационную форму возможную работу внутренних сил
4. Используя формулы Грина, которые однозначно определяют спектр силовых факторов в среде, а также условия интегрируемости линейной вариационной формы однозначно строится силовая модель среды
5. В предположении физической линейности и интегрируемости линейной вариационной формы строится потенциальная энергия. По сформулированной потенциальной энергии строятся физические соотношения (уравнения закона Гука) и лагранжиан.
6. Находим уравнения Эйлера и естественные граничные условия из условия стационарности лагранжиана.

3.5 Исследование дисперсионных соотношений колебаний пористого стержня

В данном разделе исследуем распространение волн в пористой среде. Рассмотрим Лагранжиан теории дефектных сред (3.3). При динамической постановке задачи в данном выражении появится слагаемое кинетической энергии:

$$L = A - U_v + K \quad (3.34)$$

В общем случае кинетическая энергия является суммой классической и градиентной частей $K = K_{classic} + K_{grad}$, которые зависят от скоростей деформации:

$$K_{classic} = \frac{1}{2} \int_V \int_{t_2}^{t_1} \rho \dot{R}_i \dot{R}_i dt dV$$

$$K_{grad} = \frac{1}{2} \int_V \int_{t_2}^{t_1} \rho_{ijmn} \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n} dt dV \quad (3.35)$$

где $\rho_{ijmn} = \rho_\theta \delta_{ij} \delta_{mn} + (\rho_\gamma + \rho_\omega) \delta_{im} \delta_{jn} + (\rho_\gamma - \rho_\omega) \delta_{in} \delta_{jm}$, ρ_θ , ρ_γ , ρ_ω - градиентная инертность (каждый из трех модулей не может быть отрицательным), δ_{ij} - тензор Кронекера. В выражении (3.18) появятся дополнительные слагаемые, связанные с кинетической энергией:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V P_i^V R_i dV + \iint_F P_i^F R_i dF + \frac{1}{2} [\rho_0 R_t^2 + \rho_1 \theta_t^2 + \rho_2 R_t \theta_t] dV - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \iiint_V [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{n,m} + 2K^{12} \delta_{ij} R_{i,j} \theta + K^{22} \theta \theta + K^{22} l_\theta^2 \delta_{kl} \theta_{,k} \theta_{,l}] dV \right\} dt \quad (3.36)$$

где ρ_0 , ρ_1 - меры инерции, связанные с углами поворота.

Записываем вариационное уравнение для функционала (3.36):

$$\delta L = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V (P^V \delta R_i + \frac{1}{2} [\rho_0 R_{,i} \delta R_{,i} + \rho_1 \theta_{,i} \delta \theta_{,i} + \rho_2 (R_{,i} \delta \theta_{,i} + \theta_{,i} \delta R_{,i})]) dV + \iint_F P^F \delta R_i dF - \right. \\ \left. - \iiint_V [(C_{ijmn}^{11} R_{n,m} + K^{12} \theta \delta_{ij}) \delta R_{i,j} + (K^{12} R_{k,k} + K^{22} \theta) \delta \theta + K^{22} l_\theta^2 \theta_{,k} \delta \theta_{,k}] dV \right\} dt \quad (3.37)$$

Интегрируем по частям под знаком вариации в (3.37):

$$\delta L = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V [(C_{ijmn}^{11} R_{n,mj} + K^{12} \theta_{,i} + P_i^V - \rho_0 R_{,ii} + \rho_2 \theta_{,ii}) \delta R + \right. \\ \left. + (K^{22} l_\theta^2 \theta_{,kk} - K^{22} \theta - K^{12} R_{k,k} - \rho_1 \theta_{,ii} + \rho_2 R_{,ii}) \delta \theta] dV + \right. \\ \left. + \iint_F [(P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{n,m} + K^{12} \theta \delta_{ij}) n_j) \delta R - K^{22} l_\theta^2 \theta_{,k} n_k \delta \theta] dF \right\} dt + \\ + \iiint_V [(\rho_0 R_{,i} + \rho_2 \theta_{,i}) \delta R + (\rho_1 \theta_{,i} + \rho_2 R_{,i}) \delta \theta] dV \Big|_{t=0}^{t=t_2} = 0 \quad (3.38)$$

Для распространяющихся волн существует функциональное соотношение $f(\omega, k) = 0$, связывающее частоту и волновое число. Обычно это соотношение имеет вид зависимости частоты от волнового вектора k [109]:

$$\omega = W(k) \quad (3.39)$$

Тогда фазовая скорость тоже зависит от волнового числа:

$$c(k) = \frac{\omega}{k} = k^{-1} W(k) \quad (3.40)$$

В случае, когда величина $c(k)$ постоянна, т.е. фазовая скорость не зависит от волнового числа (или от частоты), говорят о волне без дисперсии, и функция W имеет простой вид:

$$W(k) = ck \quad (3.41)$$

Если фазовая скорость не постоянна, то распространяющаяся волна обладает дисперсией. Выражение типа (3.39) называют дисперсионным соотношением.

Запишем дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} R &= R_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ \theta &= \theta_0 e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

где R_0 и θ_0 - амплитуды, e - основание натурального логарифма, i - мнимая единица, k - волновое число (величина, обратная длине волны), ω - частота, t - время, x - продольная координата.

Стоит отметить, что дисперсионные свойства в неоднородных средах рассматривались в работах Павлова [110-112]. В них анализировались зависимости скоростей волн от размеров зерен и проводилось сопоставление модели в континуальном приближении с уравнениями континуума Коссера.

Вариационное уравнение (3.38) определяет краевую задачу для сред с полями дефектов – пор. Соответственно уравнения движения следуют из (3.38) как уравнения Эйлера. Запишем их в следующем виде:

$$\begin{aligned} ER'' - K^{12}\theta' - \rho_0 R'' + \rho_2 \theta'' &= 0 \\ K^{22}l_\theta^2 \theta'' - K^{22}\theta + K^{12}R' - \rho_1 \theta'' + \rho_2 R'' &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Нижние индексы обозначают дифференцирование по независимой переменной.

С учетом дисперсионных соотношений (3.42) уравнения движения (3.43) примут вид:

$$\begin{aligned} ER_0 i^2 k^2 - K^{12} \theta_0 i k - \rho_0 R_0 i^2 \omega^2 + \rho_2 \theta_0 i^2 \omega^2 &= 0 \\ K^{22} l_\theta^2 \theta_0 i^2 k^2 - K^{22} \theta_0 + K^{12} R_0 i k - \rho_1 \theta_0 i^2 \omega^2 + \rho_2 R_0 i^2 \omega^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Упростим систему, учтя что $i^2 = -1$, а также сгруппируем слагаемые с R_0 и θ_0 :

$$\begin{aligned} -Ek^2 R_0 + \rho_0 \omega^2 R_0 - K^{12} i k \theta_0 - \rho_2 \omega^2 \theta_0 &= 0 \\ K^{12} i k R_0 - \rho_2 \omega^2 R_0 - K^{22} l_\theta^2 k^2 \theta_0 - K^{22} \theta_0 + \rho_1 \omega^2 \theta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Найдем определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} -Ek^2 + \rho_0 \omega^2 & -K^{12} i k - \rho_2 \omega^2 \\ K^{12} i k - \rho_2 \omega^2 & -K^{22} l_\theta^2 k^2 - K^{22} + \rho_1 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.46)$$

$$(-Ek^2 + \rho_0\omega^2)(-K^{22}l_\theta^2k^2 - K^{22} + \rho_1\omega^2) - (-K^{12}ik - \rho_2\omega^2)(K^{12}ik - \rho_2\omega^2) = 0 \quad (3.47)$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Первый: $l_\theta = 0$; $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Выражение (3.47) примет вид:

$$(-Ek^2 + \rho_0\omega^2)(-K^{22}) - (-K^{12}ik)(K^{12}ik) = 0 \quad (3.48)$$

Упростим его и выразим частоту:

$$\omega^2 = \frac{Ek^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}E} \right) \quad (3.49)$$

В данном случае дисперсии не будет. Тогда, должно выполняться условие:

$$\frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}E} < 1 \quad (3.50)$$

Выразим модуль упругости через модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν - $E = 2G(1+\nu)$ подставим в выражение (3.50):

$$\frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}} < 2G(1+\nu) \quad (3.51)$$

Существуют такие значения коэффициент Пуассона при которых $\frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}} > 1$, в таком случае пористая среда становится «непроницаемой» для распространения в ней любых длин волн. Данный эффект представляется не физичным, поэтому необходимо использовать более корректное выражение для оценки частоты, учитывающее эволюцию пористости. Приняв $\frac{K^{12}}{K^{22}} = \frac{f}{1-f}$, f - объемное содержание пор, перепишем выражение для частоты через объемное содержание пор:

$$\omega^2 = \frac{Ek^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{f}{1-f} \frac{K^{12}}{E} \right) \quad (3.52)$$

На рисунке 3.1 представлен график для частоты в зависимости от волнового числа. Для расчета принято: $E = 71$ ГПа, $\rho_0 = 2700$ кг/м³, $K^{12} = 65,73$ ГПа. Пять кривых соответствуют различному объемному содержанию пор: сплошная – отсутствие пористости, точечная $f = 0.05$, штриховая $f = 0.1$, штрихпунктирная $f = 0.2$, длинно штриховая $f = 0.3$. Из графика видно, что с ростом объемного содержания пор, при одном и том же волновом числе частота падает.

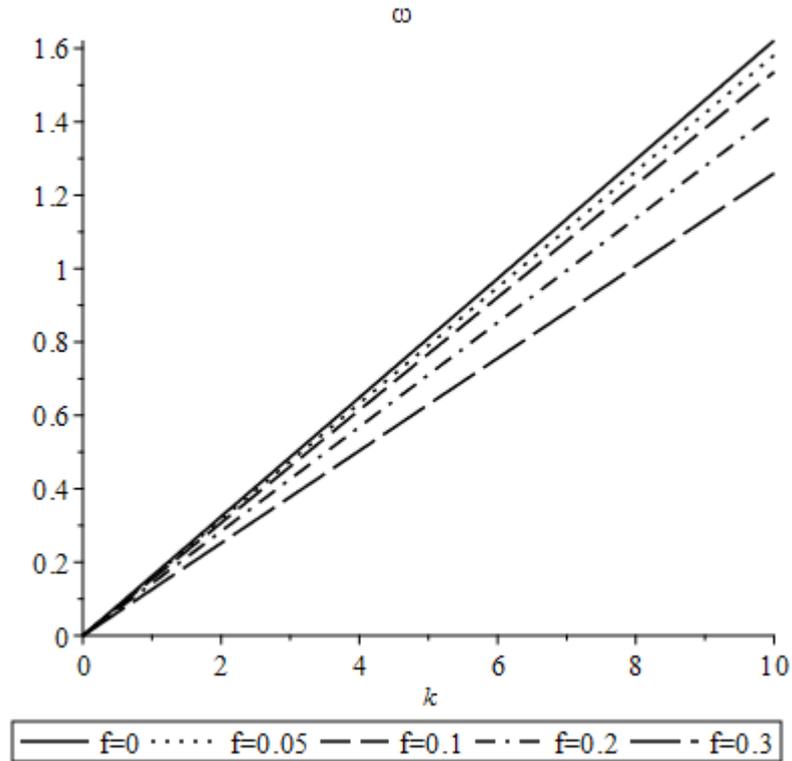


Рисунок 3.1. Распределение частоты (Гц) в зависимости от волнового числа

Рассмотрим второй случай: $l_\theta \neq 0$; $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

$$(-Ek^2 + \rho_0 \omega^2)(-K^{22} l_\theta^2 k^2 - K^{22}) - (-K^{12} i k)(K^{12} i k) = 0 \quad (3.53)$$

Упростим выражение и выразим частоту:

$$\omega^2 = \frac{Ek^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{K^{12} K^{12}}{K^{22} E (l_\theta^2 k^2 + 1)} \right) \quad (3.54)$$

Запишем тоже самое через объемное содержание пор:

$$\omega^2 = \frac{Ek^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{f}{1-f} \frac{K^{12}}{E (l_\theta^2 k^2 + 1)} \right) \quad (3.55)$$

На рисунке 3.2 представлен график правой части уравнения (3.55) в зависимости от волнового числа. Для расчета принято: $E = 71$ ГПа, $\rho_0 = 2700$ кг/м³, $K^{12} = 65,73$ ГПа, $l_\theta = 0.4$. Пять кривых соответствуют различному объемному содержанию пор: сплошная – пористости $f = 0.1$, точечная $f = 0.5$, штриховая $f = 0.6$, штрихпунктирная $f = 0.7$, длинно штриховая $f = 0.8$. На графике видна

характерная зона отрицательных значений, наблюдаемая при объемном содержании пор свыше 50%.

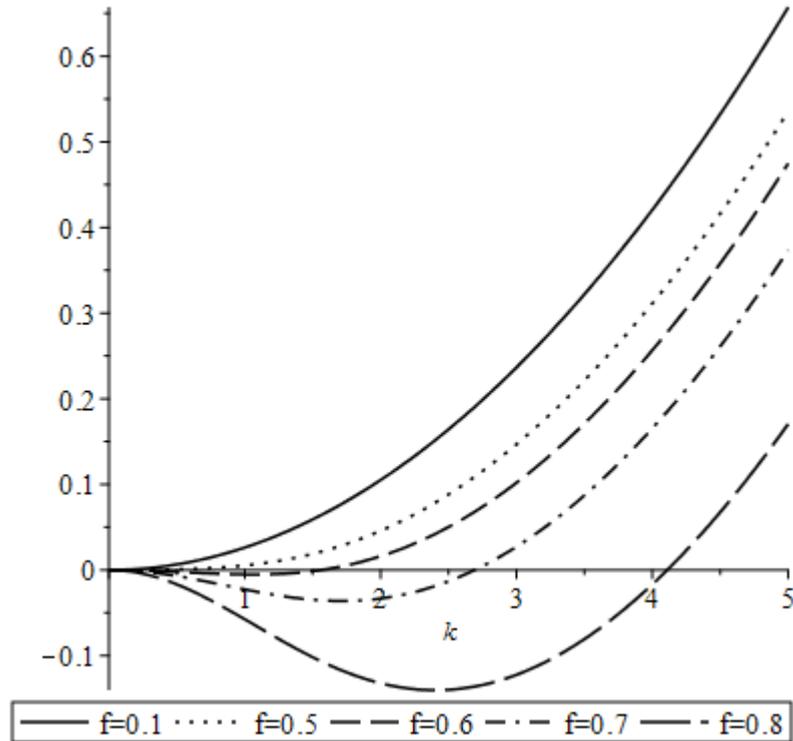


Рисунок 3.2. Распределение правой части уравнения (3.55) в зависимости от волнового числа

Рассмотрим третий случай $l_\theta \neq 0$; $\rho_1 \neq 0$; $\rho_2 \neq 0$. Выражение (3.47) в этом случае останется в исходном виде:

$$(-Ek^2 + \rho_0\omega^2)(-K^{22}l_\theta^2k^2 - K^{22} + \rho_1\omega^2) - (-K^{12}ik - \rho_2\omega^2)(K^{12}ik - \rho_2\omega^2) = 0 \quad (3.56)$$

Упрощая его получаем уравнение четвертой степени относительно частоты:

$$(\rho_1\rho_0 - \rho_2^2)\omega^4 - (Ek^2\rho_1 + K^{22}l_\theta^2k^2\rho_0 - K^{22}\rho_0)\omega^2 + EK^{22}k^2\left(l_\theta^2k^2 + 1 - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}E}\right) = 0 \quad (3.57)$$

Решив биквадратное уравнение получаем:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0\rho_1 - \rho_2^2} \left[K^{22}\rho_0(l_\theta^2k^2 - 1) + Ek^2\rho_1 + \sqrt{EK^{22}k^4l_\theta^2\left(\frac{l_\theta^2\rho_0^2}{E} - 2\rho_0\rho_1 + 4\rho_2^2 + \frac{\rho_1^2}{K^{22}l_\theta^2}\right) + 2K^{22}k^2(-\rho_0\rho_1 + 2E\rho_2^2) + 4K^{12}k^2(\rho_0\rho_1 - K^{12}\rho_2^2) + K^{22}\rho_0^2} \right] \quad (3.58)$$

3.6 Заключение

В данной главе рассмотрен вариационный подход построения корректной модели пористых сред в рамках модели Миндлина. Дефектные градиентные среды были сведены к моделям классической неоднородной среды с переменными по координатам свойствами.

Полученные аналитические соотношения позволяют по накопленной поврежденности за счет дефектов определить эффективные характеристики пористого материала. Приведен алгоритм, позволяющий на основе вариационного принципа получать математические формулировки моделей с усложненной кинематикой.

Проведены изыскания дисперсионных соотношений для пористого стержня. Исследованы случаи возможного упрощения модели, установлено, что пористая среда может стать «непроницаемой» для распространения волн с любой длиной волны.

Глава 4 Примеры расчетов. Обсуждение результатов

В данной главе приведены примеры диссертации и анализ полученных результатов.

4.1 Растяжение составного стержня

Рассмотрим решение в биплоской 2D-постановке теории когезионного поля, являющейся частной моделью теории Тупина, задачу растяжения составного стержня [113]. Стержень представлен как периодическая структура, с постоянным поперечным сечением F , состоящий из N фрагментов матрицы и армирующего материала с модулями Юнга $E_{M,D}$, «моментными» модулями $C_{M,D}$ и длинами $\rho_{M,D}$.

$$L = (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{1}{2} \int_0^l EF \left[r' r' + \frac{E}{C} r'' r'' \right] dx \quad (4.1)$$

Преобразуем лагранжиан (4.1) к виду, соответствующему лагранжиану классической неоднородной среды:

$$\begin{aligned} L &= (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{1}{2} \int_0^l EF \left[\left(r' - \frac{E}{C} r''' \right) r' + \frac{E}{C} r''' r' + \frac{E}{C} r'' r'' \right] dx = \\ &= (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{1}{2} \int_0^l EF \left[\left(r' - \frac{E}{C} r''' \right) r' + \frac{E}{C} (r'' r')' \right] dx = \\ &= (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{E}{C} (r'' r') \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{F}{2} \int_0^l E \left(1 - \frac{E}{C} r''' / r' \right) r' r' dx = \\ &= (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{F}{2} \int_0^l \tilde{E} r' r' dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

Решение для составного стержня, вытекающее из представления (4.1) имеет вид:

$$\begin{cases} r_D(x) = \frac{P}{E_D F} \left(x + x_f \frac{sh(a_D x)}{sh(a_D \rho_D / 2)} \right) \\ r_M(x) = \frac{P}{2F} \left(\frac{\rho_M}{E_M} + \frac{\rho_D}{E_D} \right) - \frac{P}{F} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_D} \right) x_f + \\ + \frac{P}{E_M F} (x - (\rho_D / 2 + \rho_M / 2)) - \frac{P}{E_M F} x_f \frac{sh(a_M (x - (\rho_D / 2 + \rho_M / 2)))}{sh(a_M \rho_M / 2)} \end{cases} \quad (4.3)$$

здесь: $a_M = \sqrt{\frac{C_M}{E_M}}$, $a_D = \sqrt{\frac{C_D}{E_D}}$ - масштабные параметры.

$$x_f = \frac{\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_D}}{\frac{a_D}{E_D \operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E_M \operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)}} \quad (4.4)$$

В соответствии с определением модуля Юнга неоднородной классической среды, вытекающего из (4.2), можно получить его явное выражение:

$$\tilde{E}(x) = \begin{cases} E_D \frac{1}{1 + x_f \frac{a_D \operatorname{ch}(a_D x)}{\operatorname{sh}(a_D \rho_D / 2)}} & \text{внутри включения} \\ E_D E_M \frac{\frac{a_D}{E_D \operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E_M \operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)}}{\frac{a_D}{\operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{\operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)}} & \text{на границе контакта} \\ E_M \frac{1}{1 - x_f \frac{a_M \operatorname{ch}(a_M (x - (\rho_D / 2 + \rho_M / 2)))}{\operatorname{sh}(a_M \rho_M / 2)}} & \text{внутри матрицы} \end{cases} \quad (4.5)$$

Из выражения (4.5) следует, что модуль Юнга классической неоднородной среды является непрерывной функцией координаты x , и асимптотически приближается к значениям модулей матрицы E_M и включения E_D при удалении от границы контакта $\rho_D / 2$.

Приведем график модуля Юнга (рисунок 4.1) для следующих параметров: длины фрагментов матрицы и армирующего материала равны единице $\rho_M = \rho_D = 1$, модуль матрицы в пять раз меньше модуля армирующего материала $E_M = 10$ ГПа, $E_D = 50$ ГПа, значения масштабных параметров $a_M = a_D = 7; 10; 20; 50; 100$. Теперь увеличим значение масштабного параметра для включения в два раза $a_D = 14; 20; 40; 100; 200$, а значения a_M останутся прежними (рисунок 4.2, а). Рассмотрим обратный случай, когда значение масштабного параметра в матрице будет в два раза больше значений для параметра включения, рассмотренного изначально (рисунок 4.2, б). Штриховая линия на рисунках 4.1 – 4.3 соответствует максимальному значению масштабного параметра и наиболее близка к решению в классической постановке, т.е. отсутствию третьей фазы на границе контакта матрицы и включения.

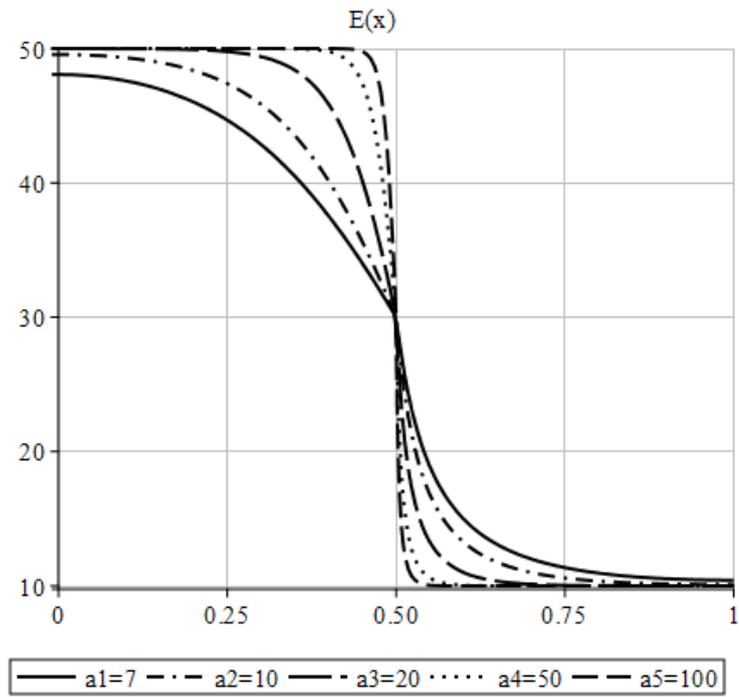


Рисунок 4.1. Модуль Юнга (ГПа) на границе контакта для случая $a_M = a_D$

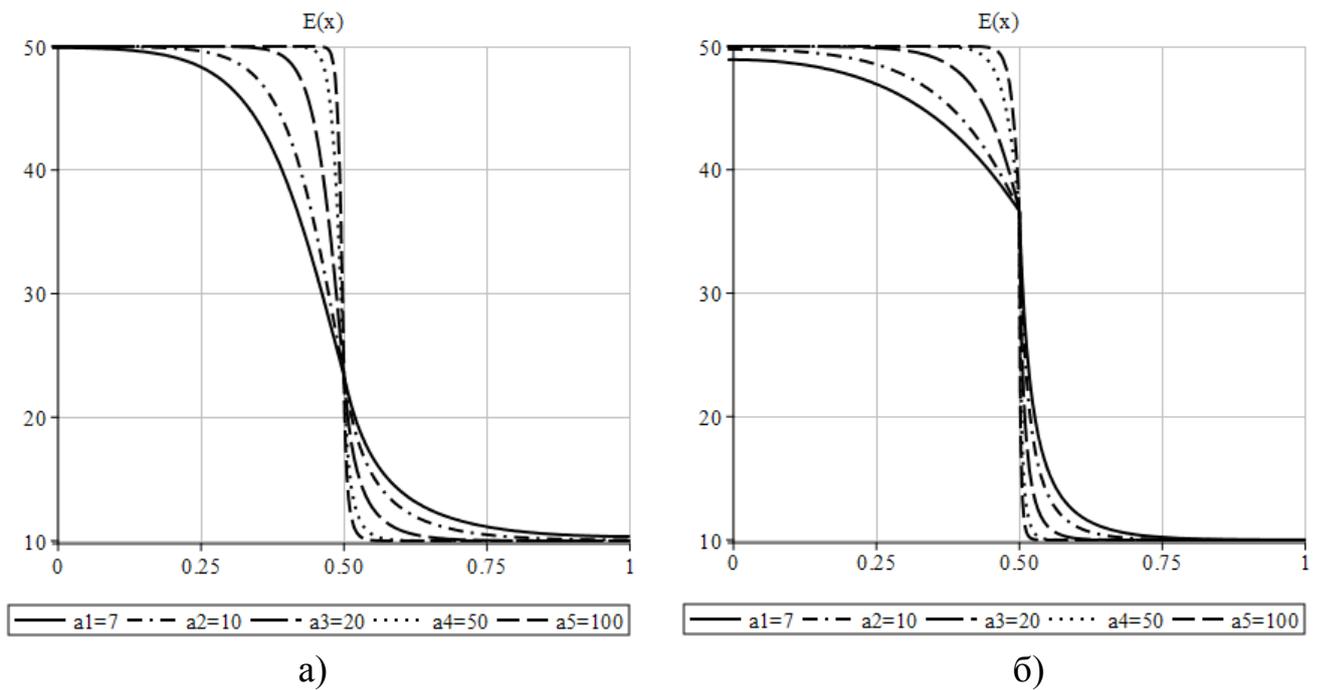


Рисунок 4.2. Модуль Юнга (ГПа) на границе контакта а) для случая $2a_M = a_D$;
б) для случая $a_M = 2a_D$.

Рассмотрим зависимость $\tilde{E}(x)$ от протяженности фазы матрицы и включения. $E_M = 10$ ГПа, $E_D = 50$ ГПа - значения модулей матрицы и армирующего материала. Значения масштабных параметров $a_M = a_D = 7; 10; 20; 50; 100$. Длины фрагмента матрицы $\rho_M = 1$, а армирующего материала $\rho_D = 0.5$ (рисунок 4.3, а). Еще уменьшим протяженность фрагмента армирующего материала $\rho_D = 0.3$, при таком же фрагменте матрицы $\rho_M = 1$ (рисунок 4.3, б).

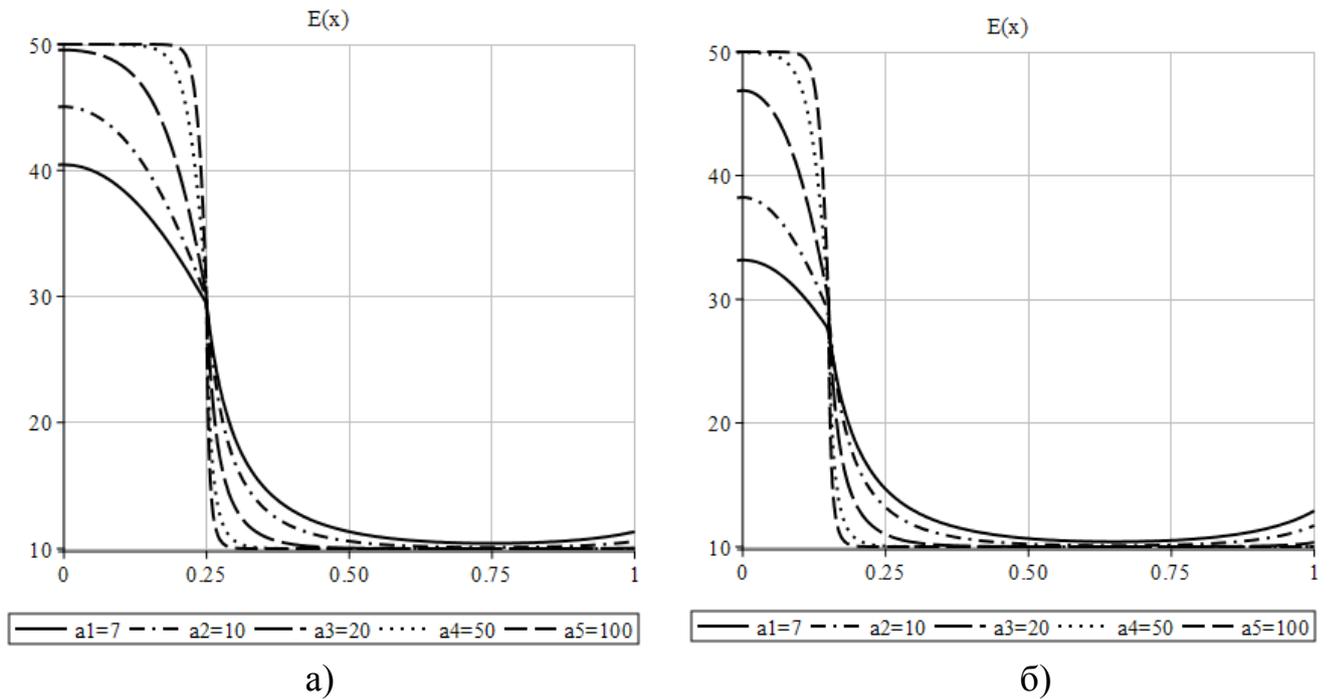


Рисунок 4.3. Модуль Юнга (ГПа) на границе контакта: а) для случая $\rho_D = 0.5$; б) для случая $\rho_D = 0.3$.

Так как жесткая фаза по определению имеет модуль, превышающий модуль мягкой фазы, часть межфазного слоя, лежащего в жесткой фазе, пренебрежимо мала по сравнению с той частью межфазного слоя, которая лежит в мягкой фазе. Отсюда можно сделать вывод: чем «жестче» жесткая фаза, тем меньшая доля межфазного слоя находится в жесткой фазе и тем большая доля – в мягкой фазе». Следовательно, можно говорить, что жесткая фаза «выталкивает» межфазный слой в мягкую фазу. Для первого случая, приведем график деформаций, рисунок 4.4.

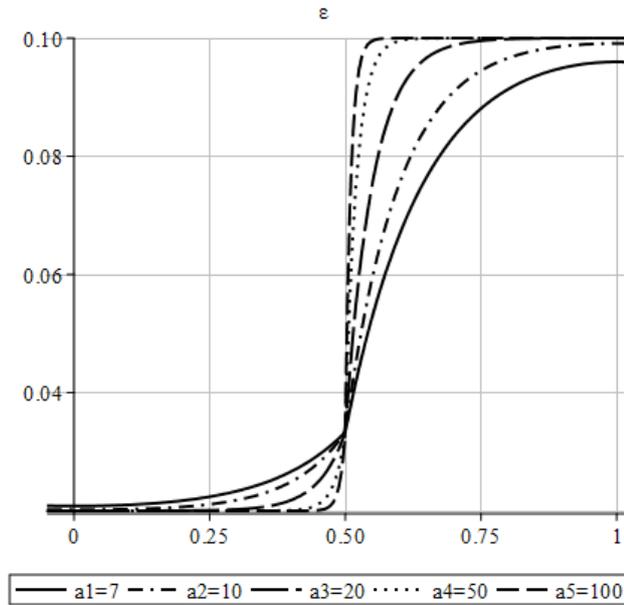


Рисунок 4.4. Деформации на границе контакта

4.2 Растяжение пористого стержня

Рассмотрим растяжение пористой полосы (рисунок 4.5), в вариационной постановке Миндлина. Уравнения (3.21) переписутся в виде:

$$\begin{cases} ER'' - K^{12}\theta' = 0 \\ K^{12}R' - K^{22}\theta + K^{22}l_0^2\theta'' = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

где $E = 2\mu^{11} + \lambda^{11}$. Уравнения равновесия (4.6) являются уравнениями Эйлера. Задача решается относительно перемещений $\Lambda_\theta^2 R''' - R'' = 0$, где $\Lambda_\theta^2 = \frac{l_0^2 EK^{22}}{EK^{22} - K^{12}K^{12}}$. В данном случае перемещение $R(x)$ является нечетной функцией в отношении продольной координаты, поэтому в решении остается только две константы. Решение ищется в виде:

$$\begin{aligned} R(x) &= C_1 x + C_2 \operatorname{sh}\left(\frac{x}{\Lambda_\theta}\right) \\ \theta &= \frac{f}{1-f} C_1 + \frac{E}{K^{12}} C_2 \frac{1}{\Lambda_\theta} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\Lambda_\theta}\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

здесь принято, что $K^{12}/K^{22} = f/(1-f)$, f - объемное содержание пор (θ дислокаций [58]). Естественные граничные условия: $P^F - ER' + K^{12}\theta = 0$ и $\theta(\pm l) = 0$. Удовлетворяя им, находим константы C_1 и C_2 .

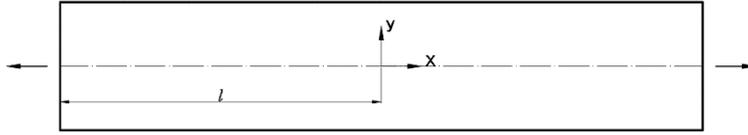


Рисунок 4.5. Полоса при одноосном растяжении

Выражения (4.7), с учетом найденных констант примут следующий вид:

$$\theta = \frac{P^F}{E(1-f)/f - K^{12}} \left(1 - \frac{ch(x/\Lambda_\theta)}{ch(l/\Lambda_\theta)} \right) \quad (4.8)$$

$$R = \frac{P^F}{E - K^{12}f/(1-f)} \left(x - \frac{f}{1-f} \frac{\Lambda_\theta K^{12}}{E} \frac{sh(x/\Lambda_\theta)}{ch(l/\Lambda_\theta)} \right) \quad (4.9)$$

Введем параметр α как меру поврежденности, причем $\alpha < 1$, тогда переменный модуль объемного сжатия с учетом $K^{12} = \alpha K^{11}$, $K^{12}/K^{22} = f/(1-f)$, выражений (4.8) и (4.9) записанный через коэффициенты Ламе:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \left(\frac{3\lambda^{11} + 2\mu^{11}}{3} \right) \left(1 - \frac{\alpha f}{1-f} \right) - (\lambda^{11} + 2\mu^{11}) \Lambda_\theta^2 \frac{\Delta R_{k,k}}{R_{k,k}} = \\ &= K_{11} - K_{11} \frac{\alpha f}{1-f} - (\lambda^{11} + 2\mu^{11}) \Lambda_\theta^2 \frac{\Delta R_{k,k}}{R_{k,k}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Деградация свойств определяется “алгебраической поврежденностью” - первое слагаемое в (4.10) и эволюцией пор - второе слагаемое в том же выражении. В случае если $\Delta R_{k,k}/R_{k,k} \approx 0$ и $\alpha = 0$ имеем идеальную неповрежденную среду.

Для одноосного напряженного состояния $R''/R' = B/(\Lambda_\theta^2(1-B))$, где $B = \frac{f}{1-f} \frac{K^{12}}{E} \frac{ch(x/\Lambda_\theta)}{ch(l/\Lambda_\theta)}$. При таком напряженном состоянии R_k не зависит от амплитуды нагрузки, а зависит только от объемного содержания пор. Из (4.8) можно предположить, что $(f/(1-f)) \sim \beta\theta$, где β - некоторый коэффициент пропорциональности, его можно отнести к K^{12} , который отражает поврежденность среды.

В качестве иллюстрации полученных результатов, покажем график распределение поврежденности по длине полосы, рисунок 4.6. Три линии соответствуют трем значениям объемного содержания пор: сплошная линия

соответствует объемному содержанию пор $f_1=0,1$; штрихпунктирная линия $f_2=0,05$, а пунктирная $f_3=0,15$. На рисунке 4.7 приведен график распределения безразмерного модуля объемного сжатия (\tilde{K}/K^{11}) в различных сечениях полосы в зависимости от параметра α . Первая группа линий, обозначенных серым цветом, является постоянной по координатам частью (первые две скобки выражения (4.10)) поврежденного порами модуля объемного сжатия, и полностью совпадает на графике друг с другом. Вторая группа линий (обозначена черным) - постоянная по координатам часть поврежденного модуля плюс переменная по координатам градиентная поправка. Коэффициенты Ламе определены для сплава, с модулем Юнга $E=71$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu=0.32$ используя соотношения из [114]. Для примера взято: $l=1$, $\Lambda_\theta=0.2$, $f=0.1$, $\mu^{11}=26.4$ ГПа, $\lambda^{11}=46.9$ ГПа.

На рисунке 4.8 показано распределение \tilde{K}/K^{11} в зависимости от масштабного параметра Λ_θ в четырех сечениях: $x=0.2$ - штриховая линия, $x=0.5$ - штрихпунктирная линия, $x=0.8$ - точечная линия, $x=1$ - сплошная линия. Здесь: $l=1$, $\mu^{11}=26.4$ ГПа, $\lambda^{11}=46.9$ ГПа, $\alpha=0.5$, $f=0.15$.

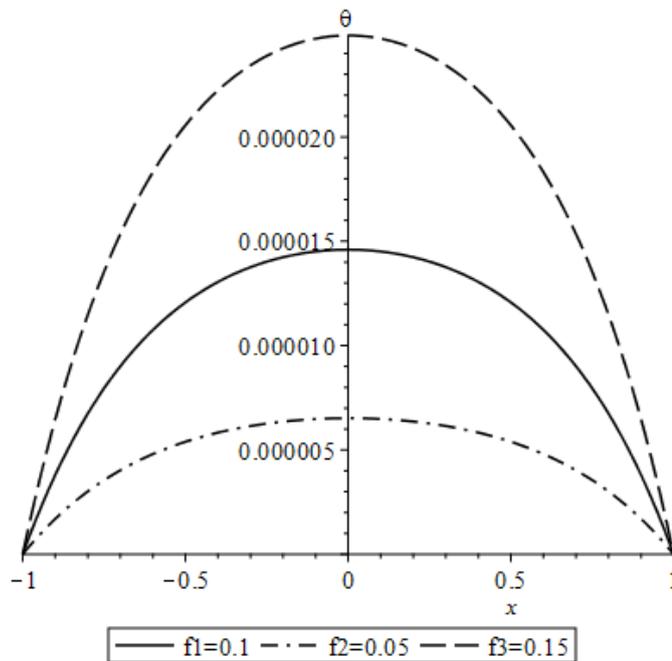


Рисунок 4.6. Распределение поврежденности

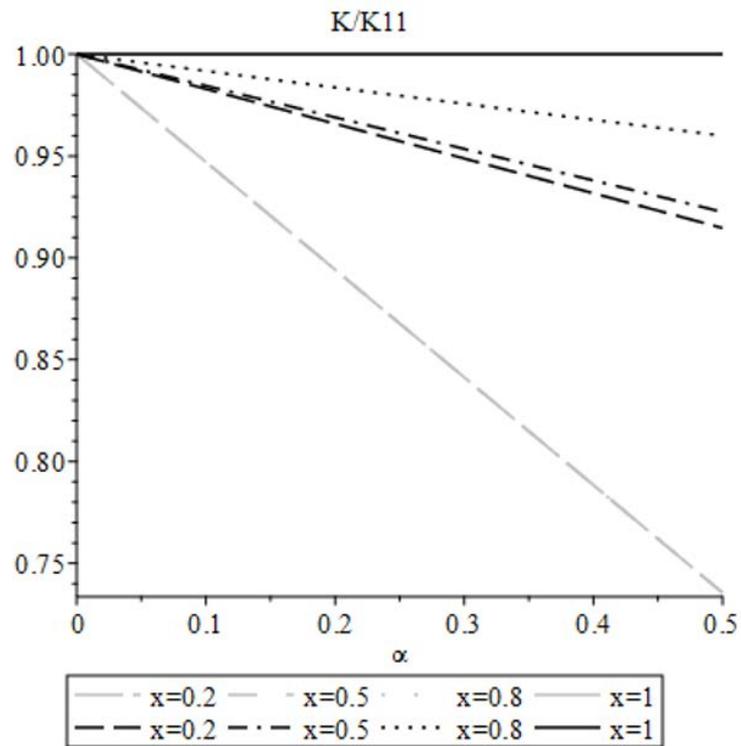


Рисунок 4.7. Снижение эффективного модуля \tilde{K} за счет пористости.

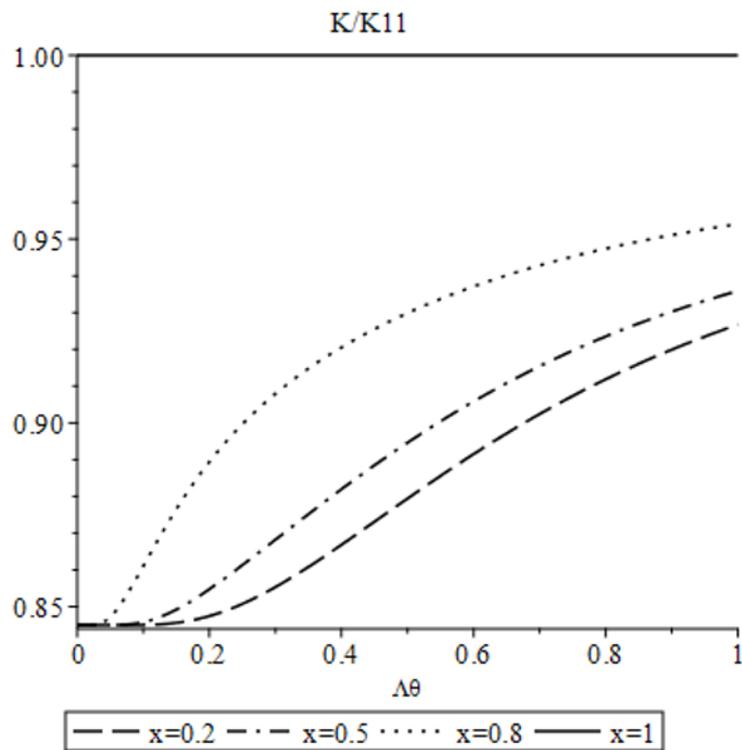


Рисунок 4.8. Снижение эффективного модуля \tilde{K} за счет градиентности.

Теперь рассмотрим полосу, находящуюся под действием двухосного напряженного состояния (рисунок 4.9). Будем использовать приближенное решение как суперпозицию двух одномерных решений в направлении осей x и y . Данное предположение не совсем верное, однако подходит для оценки параметров. В данном случае пористость и перемещения будут определяться как сумма двух слагаемых: $\theta_{\Sigma} = \theta_x + \theta_y$, $R_{\Sigma} = R_x + R_y$.

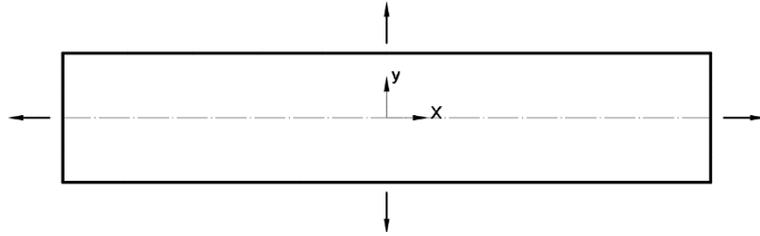


Рисунок 4.9. Полоса при двухосном растяжении.

Введем коэффициент пропорциональности нагрузок $\chi = P_x/P_y$. По аналогии с одноосным напряженным состоянием, слагаемое определяемое в объемном модуле \tilde{K} эволюцией пор: $\frac{1}{R'_{\Sigma}} \left(\frac{\partial^2 R'_{\Sigma}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R'_{\Sigma}}{\partial y^2} \right) = \frac{\Pi}{\Lambda_{\theta}^2 (EP_x(1+\chi)(f-1) + \Pi)}$, где

$$\Pi = fK^{12}P_x \left(ch\left(\frac{x}{\Lambda_{\theta}}\right) + \chi ch\left(\frac{y}{\Lambda_{\theta}}\right) \right).$$

Параметр χ введен по аналогии с [115], где вводится параметр ξ , представляющий собой отношение среднего напряжения σ к интенсивности напряжений σ_0 : $\xi = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}}$.

Приняв $\sigma \sim P_x$, можно найти связь между параметрами χ и ξ :

$$\xi = \frac{1+\chi}{3\sqrt{1-\chi+\chi^2}} \quad (4.11)$$

то есть это фактически одни и те же параметры.

В результате рассмотрения двухпараметрического нагружения получается, что коэффициент пропорциональности нагрузок, определяется через параметр нагружения, введенный Ломакиным [115].

На рисунке 4.10 приведен график безразмерного модуля объемного сжатия \tilde{K}/K^{11} при двухосном растяжении полосы в сечении $x=0$, в зависимости от параметра χ . График построен в четырех сечениях: $y=0.2$ - штриховая линия, $y=0.5$ - штрихпунктирная линия, $y=0.8$ - точечная линия, $y=1$ - сплошная линия. Для примера принято: $l=1$, $\Lambda_\theta=0.2$, $\alpha=0.5$, $\mu^{11}=26.4$ ГПа, $\lambda^{11}=46.9$ ГПа, $f=0.1$.

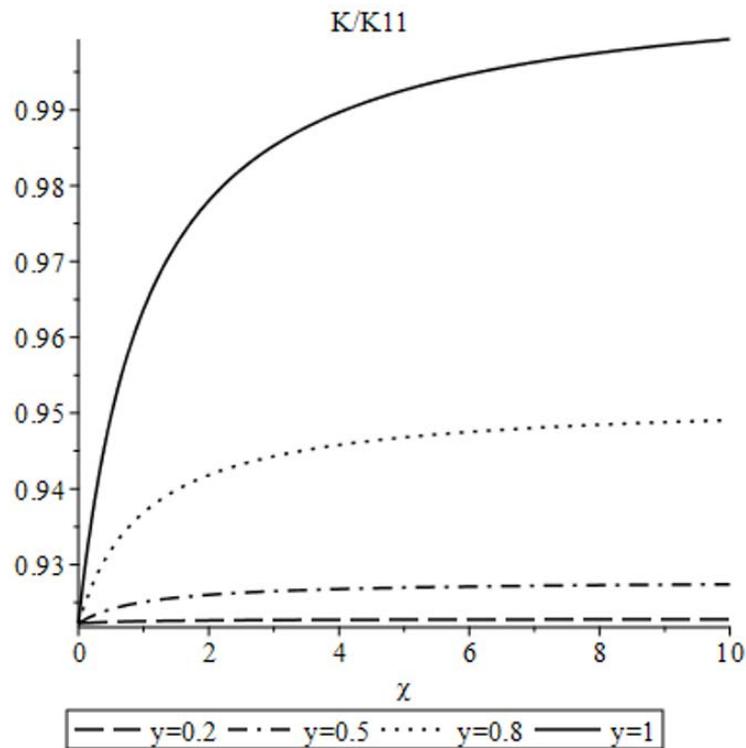


Рисунок 4.10. Распределение \tilde{K}/K^{11} в сечении $x=0$ в зависимости от коэффициента пропорциональности нагрузок.

Приведенный пример решения задачи для одноосного растяжения, позволяет сделать вывод о том, что свойства не зависят от амплитуды нагрузки при данном напряженном состоянии, а зависят только от объемного содержания пор. Пример с двухосным растяжением показывает, что свойства зависят от соотношения параметров нагружения при многопараметрическом нагружении, как это было отмечено в работах других авторов [115].

4.3 Определение эффективных свойств композиционных материалов с наноструктурированными волокнами

Задача получения прочных и жестких, но в то же время легких конструктивных элементов всегда была актуальна при создании новых образцов техники и модернизации уже существующих. Особенно остро эта проблема стоит в авиационной и космической отрасли, где обеспечение оптимальных конструктивных параметров является ключевой функцией. Именно поэтому все более широкое применение находят композиционные материалы. Однако их уникальные свойства можно усовершенствовать.

Одной из проблем в волокнистых композиционных материалах является плохая адгезия – связь между волокном и матрицей. Для ее улучшения могут быть применены различные методы, но наиболее перспективным является введение другого материала или межфазного слоя между волокном и матрицей.

В данном случае будут рассматриваться вискерсы, выращенные на поверхности волокна. Их наличие приводит к улучшению свойств межфазной адгезии и увеличению площади поверхности волокна для более эффективной передачи нагрузки между волокном и матрицей. В КМ с наноструктурированными волокнами наблюдается существенное изменение физических и механических свойств, например, увеличение прочности на сжатие в направлении, перпендикулярном волокну, а также ударной вязкости.

В экспериментальных работах [81, 91, 92, 116-118] доказывается, что длина и плотность вискерсов, выращенных на поверхности волокна являются важными параметрами, критически влияющими на функциональные свойства КМ.

4.3.1 Основные сведения о вискеризованных волокнах

По прошествии почти четырех десятилетий, с момента первого появления вискеризованных микроволокон они нашли новое применение в развивающемся мире наноматериалов. Приведем краткую информацию об одном из возможных вариантов сочетания волокна и щетинок - нановискерс на основе теллурида кадмия (CdTe), покрытый диоксидом кремния (SiO₂) [119]. Такая структура остроумно названа авторами «ощетинившейся наносороконожкой». Получают такие

сочетания с помощью двух химических процессов: стабилизируют с помощью MSA (меркаптоянтарной кислоты, $\text{HO}_2\text{CCH}_2\text{CH}(\text{SH})\text{CO}_2\text{H}$) или TGA (тиогликолевой кислоты, $\text{HSCH}_2\text{CO}_2\text{H}$). Первые получаются диаметром 4,5-6,5 нм, а вторые - 3 нм. На рисунке 4.11 показана стабилизированная с помощью MSA нанопроволока с многочисленными почти параллельными щетинками, растущими перпендикулярно поверхности. Структура «нанопроволока CdTe – вискерсы SiO_2 » состоит из трех компонентов: проволока из теллурида кадмия образует твердую сердцевину, которая непрерывно покрыта оболочкой из SiO_2 , а на оболочке - периодическая структура из усов и гладких участков. В частности, для случая, показанного на рисунке 4.11, радиус сердцевины составляет 3 нм, толщина покрытия 15 нм, длина щетинок составляет 32 нм.

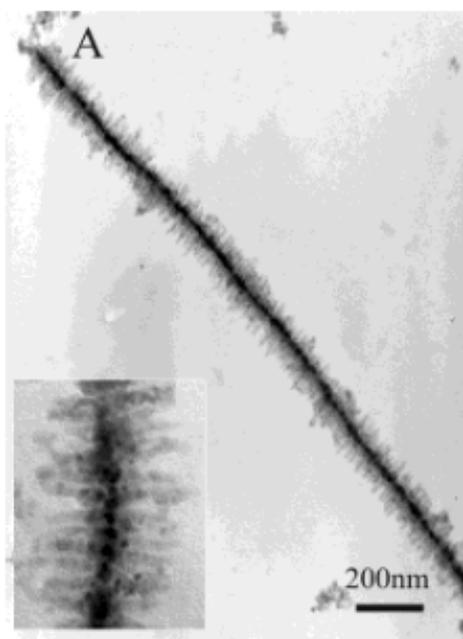


Рисунок 4.11. Нановолокна CdTe, покрытые щетинками [119].

Благодаря появлению на поверхности волокна усов получается композиционный материал с улучшенной адгезией между волокном и матрицей и, как следствие, повышенной прочностью на сдвиг. Если мы рассмотрим структуру «нанопроволока CdTe – вискерсы SiO_2 », помещенную в матрицу, общее число компонентов в структуре будет равно четырем - матрица будет четвертым составляющим в дополнение к трем компонентам, упомянутым выше.

4.3.2 Структурная модель вискеризованного межфазного слоя

Предлагаемая структурная модель для КМ, усиленных вискеризованными волокнами основана на предположении, что микроволокна или наноусы (в дальнейшем будем называть их также «вискерсами») периодически помещаются в матрицу как квадратичная или гексагональная решетка. Тогда представительный объемный элемент (элементарная ячейка) состоит из матрицы и волокна (рисунок 4.12, а).

При моделировании эффективных свойств вискеризованных КМ, мы предполагаем, что композит имеет трансверсально-изотропную структуру с плоскостью изотропии поперек волокна (рисунок 4.12, б), т.е. ось симметрии, совпадает с направлением оси r и ее свойства является постоянными по длине вискерсов [85, 86, 90, 120]. Последнее упрощение представляется вполне разумным с учетом того, что длина вискерсов довольно мала [85, 86]. Кроме того, принято, что вискеризованные межфазные слои в матрице на пересекаются друг с другом, а вискерсы выращены перпендикулярно к поверхности базового волокна.

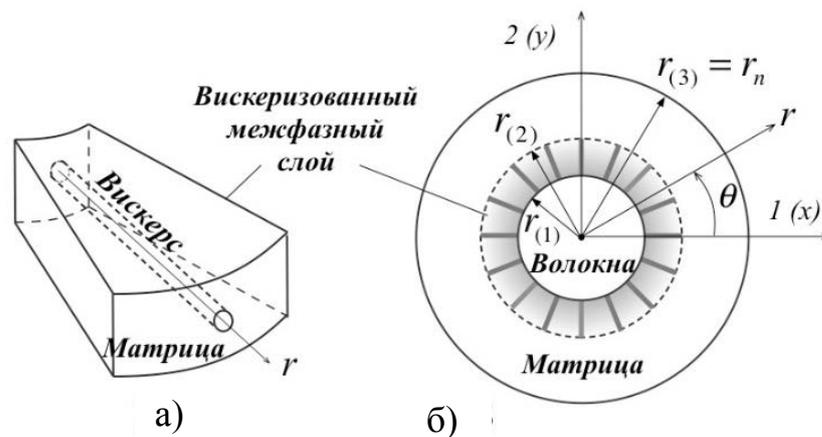


Рисунок 4.12. а) ячейка вискеризованного межфазного слоя;
б) ячейка вискеризованного волокнистого композита.

После того как мы определим свойства вискеризованного межфазного слоя, сможем вычислить окончательные эффективные свойства ВКМ на основе самосогласованного метода Эшелби (метода трех фаз).

4.3.3 Структура решения обобщенной задачи Эшелби в модели с вискеризованным слоем

Будем определять эффективные механические характеристики ВКМ, армированного однонаправленными волокнами с вискеризованным межфазным слоем с помощью самосогласованной модели Эшелби четырех цилиндрических тел. Плотность вискерсов изменяется вблизи поверхности базового волокна, поэтому эффективные характеристики межфазного слоя зависят от расстояния от поверхности базового волокна. Чтобы учесть переменность свойств межфазного слоя, мы предлагаем использовать градиентную теорию. Здесь предполагается, что градиентное решение подходит для описания свойств функционально градиентного материала, экспоненциально изменяющихся вблизи зон контакта фаз.

Таким образом, мы рассматриваем аналитический метод построения явного решения обобщенной задачи Эшелби, который можно назвать методом радиальных коэффициентов. Решение задачи для перемещений строится с помощью обобщенного представления Папковича-Нейбера. В частности, это представление содержит классическое представление ТУ для когезионного поля которое в предельном случае вырождается. Во-первых, мы рассматриваем более традиционную конфигурацию, состоящую из трех цилиндрических тел, и определяем переменные характеристика самого межфазного слоя с вискерсами. Во-вторых, для того чтобы определить эффективные свойства наноструктурированного ВКМ в целом и учесть функциональные градиентные свойства межфазного слоя, используется более общая модель, состоящая из четырех цилиндрических тел с градиентным межфазным слоем. Первое цилиндрическое тело – сплошной центральный цилиндр, остальные – соосные первому пустотелые цилиндры. Четвертым телом в данном случае будет являться матрица.

Обобщенная задача Эшелби решается для цилиндрического фрагмента, показанного на рисунке 4.13. Предполагается, что цилиндры расположены вдоль

оси z . Промежуточная фаза G_L описывается моделью градиентной ТУ. Оставшиеся фазы описываются уравнениями классической ТУ. Для такой структуры решается обобщенная задачи Эшелби для изолированного комплексного включения в матрицу при однородной деформации на бесконечности.

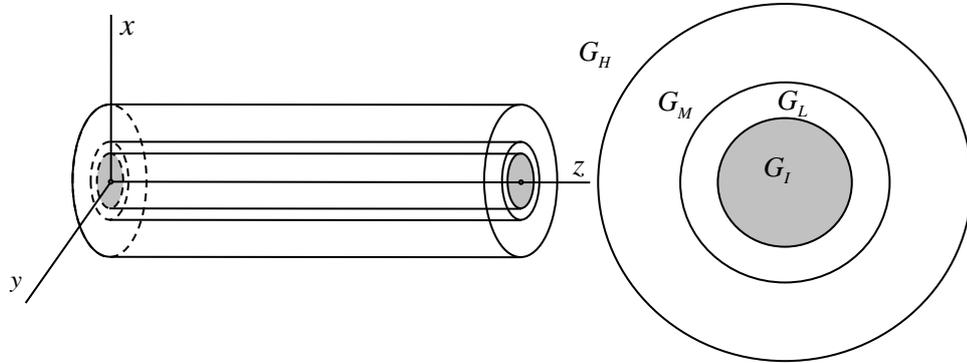


Рисунок 4.13. Модель цилиндрических тел с вискеризованным слоем.

Приведем краткий алгоритм решения данной задачи, который более подробно рассмотрен в работе [121]. Решение поставленной проблемы строится на основе обобщенного представления Папковича-Нейбера для перемещений через потенциалы f_0, ϕ_0 и f, f^* удовлетворяющие уравнениям Лапласа и Гельмгольца соответственно.

$$\mathbf{R}(P) = \frac{\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}}{\mu} + \nabla \left[\frac{\phi_0 - r \mathbf{f}_0}{4\mu(1-\nu)} - \text{div} \left(\frac{\mathbf{f}^* - \mathbf{f}}{C} \right) \right] \quad (4.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{f}_0 = \nabla^2 \phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{f} - \frac{C}{\mu} \mathbf{f} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{f}^* - \frac{C}{k} \mathbf{f}^* = 0, \quad k = 2\mu + \lambda \quad (4.13)$$

где μ - модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона, λ - другая константа Ламе и C - масштабный параметр, определяющий скорость изменения характеристик в вискеризованном слое.

Выражения (4.12) и (4.13) дают решение классической ТУ в частном случае, когда $C \rightarrow \infty$ (потенциалы, определяющие когезионное поле f и f^* равны нулю). Формула (4.12) позволяет разделить общий вектор перемещений \mathbf{R} на вектор классических перемещений \mathbf{U} и когезионную составляющую \mathbf{u} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} - \mathbf{u}, \quad \mathbf{U}(P) = \frac{\mathbf{f}_0}{\mu} + \frac{\nabla(\phi_0 - r \mathbf{f}_0)}{4\mu(1-\nu)}, \quad \mathbf{u}(P) = \frac{\mathbf{f}}{\mu} + \frac{\nabla \text{div}(\mathbf{f}^* - \mathbf{f})}{C} \quad (4.14)$$

здесь $\mathbf{u}(P)$ дополнительное поле потенциального типа, определяемое уравнениями Гельмгольца (4.13). Это поле вводит дополнительное экспоненциальное изменение в поле классических перемещений $\mathbf{U}(P)$, связанных с переменными характеристиками межфазного слоя. Предположим, что когезионное поле исчезает в регионах G_I , G_M и G_H .

На основе (4.14) тензор напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{R}) = 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{R}) + \delta_{ij}\theta(\mathbf{R})$ также разлагается на разность двух составляющих: $\sigma_{ij}(\mathbf{R}) = \sigma_{ij}(\mathbf{U}) - \sigma_{ij}(\mathbf{u})$ – классические напряжения $\sigma_{ij}(\mathbf{U})$ и добавок экспоненциального типа $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$. Для каждой из этих составляющих общего тензора на основании (4.14) получаем свое выражение через вспомогательные потенциалы:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{U}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{f}_0) + [(\phi_0 - \mathbf{r} \mathbf{f}_0)_{,ij} + 2\nu \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{f}_0] / 2(1-\nu) \quad (4.15)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{f}) + 2\mu \operatorname{div}(\mathbf{f}^* - \mathbf{f})_{,ij} / C + \nu \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{f}^* / (1-\nu) \quad (4.16)$$

Точное решение обобщенной задачи Эшелби для вискеризованных волокон выражается через конкретные потенциалы, которые определяются через гармонические полиномы первого и третьего порядка:

$$x, y, x^3 - 3xy^2, y^3 - 3yx^2$$

в сочетании с функциями, зависящими только от радиальной координаты $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиальными множителями $h_n(r), \hat{h}_n(r), h_n^*(r), \hat{h}_n^*(r), \hat{h}_n^{(0)}(r)$ первого и третьего порядка $n=1,3$. Здесь $\hat{h}_n^{(0)} = r^{-2n}$

$$h_n = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^n [I_0(\kappa r)], \quad I_0(\kappa r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\kappa r/2)^{2k}}{(k!)^2}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{C}{\mu}} \quad (4.17)$$

$$\hat{h}_n = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^n [K_0(\kappa r)], \quad K_0(\kappa r) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(\kappa r/2) - H_k)(\kappa r/2)^{2k}}{(k!)^2}, \quad H_k = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} - \gamma \quad (4.18)$$

где $\gamma = 0.577215664901532860606512$ – константа Эйлера, $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, $K_0(z)$ – функция Макдональда нулевого порядка.

Дифференцируя ряды (4.17) и (4.18) для модифицированной функции Бесселя и функции Макдональда (которые сходятся во всех точках и обладают такими же вычислительными свойствами как экспонента), получаем представления для радиальных множителей в виде сходящихся рядов:

$$h_n(r) = \left(\frac{\kappa^2}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\kappa r/2)^{2n}}{k!(k+n)!}$$

$$\hat{h}_n(r) = \left(\frac{\kappa^2}{2}\right)^n \left[\frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (m-1-k)!}{k!} \left(\frac{2}{\kappa r}\right)^{2(n-k)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\ln(\kappa r/2) - \frac{H_k + H_{k+n}}{2}\right) (\kappa r/2)^{2n}}{k!(k+n)!} \right]$$

Функции $h_n(r)$ являются регулярными в начале координат и экспоненциально растут на бесконечности, а функции $\hat{h}_n(r)$, наоборот, являются сингулярными в начале координат и экспоненциально убывают на бесконечности. Функции $h_n^*(r)$ и $\hat{h}_n^*(r)$ определяются точно так же, только вместо масштабного параметра $\kappa = \sqrt{C/\mu}$ используется масштабный параметр $\kappa^* = \sqrt{C/(2\mu + \lambda)}$.

Свойства радиальных множителей таковы, что их произведение на соответствующий гармонический полином той же степени образует функцию, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца или Лапласа; при умножении на $h_n(r)$, $\hat{h}_n(r)$ получаем уравнение (4.13) с параметром $C/\mu = \kappa^2$, при умножении на $h_n^*(r)$, $\hat{h}_n^*(r)$ – уравнение (4.13) с параметром $C/(2\mu + \lambda) = \kappa^{*2}$, а при умножении на $\hat{h}_n^{(0)}(r)$ – уравнение Лапласа (4.13).

После введения необходимых специальных функций, можем записать представление для решения в градиентном слое G_L через потенциалы Папковича-Нейбера (4.12), (4.13) с коэффициентами, которые определяются из контактных условий на межфазной границе (и рассчитываются отдельно по специальному алгоритму метода Кристенсена-Эшелби):

$$\phi_0(P) = 0, \quad f_0(P) = \begin{cases} A_1 x + B_1 (x^3 - 3xy^2) + \hat{A}_1 r^{-2} x \\ A_2 y + B_2 (y^3 - 3yx^2) + \hat{A}_2 r^{-2} y \end{cases} \quad (4.19)$$

$$f(P) = \left\{ \begin{array}{l} C_1 h_1(r)x + \hat{C}_1 \hat{h}_1(r)x + \hat{D}_1 \hat{h}_3(r)(x^3 - 3xy^2) \\ C_2 h_1(r)y + \hat{C}_2 \hat{h}_1(r)y + \hat{D}_2 \hat{h}_3(r)(y^3 - 3yx^2) \end{array} \right\}, f^*(P) = \left\{ \begin{array}{l} C_1^* h_1^*(r)x + \hat{C}_1^* \hat{h}_1^*(r)x \\ C_2^* h_1^*(r)y + \hat{C}_2^* \hat{h}_1^*(r)y \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

На основе этих представлений рассчитываются перемещения и напряжения по формулам (4.14) – (4.16). При этом необходимо дифференцировать радиальные множители, которые связаны между собой следующими рекуррентными соотношениями:

$$r^2 h_{n+1} + 2n h_n - \kappa^2 h_{n-1} = 0, \quad r^2 h_{n+1}^* + 2n h_n^* - \kappa^2 h_{n-1}^* = 0 \quad (4.21)$$

Аналогичные выражения для сингулярных функций \hat{h}_n и \hat{h}_n^* .

Предположим, что тензор шестого ранга выражается через тензор четвертого ранга согласно соотношению [122]:

$$C_{ijklmnl}^{11} = \frac{C_{rkij}^{11} C_{rlmn}^{11}}{C} \quad (4.22)$$

Тогда лагранжиан:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + (C_{rkij}^{11} D_{ijk}^1)(C_{rlmn}^{11} D_{mnl}^1) / C] dV \quad (4.23)$$

Уравнения Эйлера в теории Тупина:

$$\begin{aligned} \delta L = \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} - (C_{rkij}^{11} C_{rlmn}^{11} / C) R_{m,nlk} + P_i^V] \delta R_i dV + \\ + \iiint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - (C_{rkij}^{11} C_{rlmn}^{11} / C) R_{m,nlk}) n_j] \delta R_i + \\ + [-(C_{rlmn}^{11} R_{m,nl}) / C] \delta (C_{rkij}^{11} n_k R_{i,j}) \} dF = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Вариационное уравнение (4.24) дает возможность определить классические напряжения σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - (C_{rkij}^{11} C_{rlmn}^{11} / C) R_{m,nlk} = C_{ijmn}^{11} (R_m - C_{mcab}^{11} R_{a,bc} / C)_{,n} \quad (4.25)$$

Из уравнение (4.25) определяем классические перемещения U_m :

$$U_m = R_m - C_{mcab}^{11} R_{a,bc} / C \quad (4.26)$$

Запишем потенциальную энергию среды Тупина как квадратичную форму первых производных от классических перемещений, т.е. в классическом виде:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint \{ C_{ijmn}^{11} R_{i,j} [R_{m,n} - C_{mcab}^{11} R_{a,bcn} / C] + C_{rkij}^{11} R_{i,j} C_{rlmn}^{11} R_{m,nlk} / C + \\ + (C_{rkij}^{11} R_{i,jk}) (C_{rlmn}^{11} R_{m,nl}) / C \} dV = A - \frac{1}{2} \iiint (C_{ijmn}^{11} U_{m,n}) R_{i,j} dV \end{aligned} \quad (4.27)$$

В формуле (4.26) дивергентный член в объемном интеграле взаимно уничтожился с неклассическим слагаемым в поверхностной энергии. С учетом того, что и полные перемещения R_m и классические перемещения U_m известны, если решена краевая задача (4.24), можно определить в общем случае ортотропный тензор переменных модулей классической среды \tilde{C}_{ijmn} из соотношения:

$$R_{i,j} = \tilde{C}_{ijmn}^{-1} (C_{mnpq}^{11} U_{p,q}) \quad (4.28)$$

В общем случае девять уравнений (4.28) позволяют определить девять компонент тензора переменных модулей \tilde{C}_{ijmn} . Таким образом, потенциальная энергия теории сред Тупина, а, значит, и лагранжиан в целом могут быть представлены как потенциальная энергия и лагранжиан классической неоднородной, в общем случае, ортотропной среды:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \tilde{C}_{ijmn}^{-1} \tau_{ij} \tau_{mn} dV \quad (4.29)$$

где $\tau_{mn} = C_{mnpq}^{11} U_{p,q}$ классические напряжения, т.к. они удовлетворяют классическим уравнениям закона Гука, классическим уравнениям равновесия и классическим статическим граничным условиям, а классические деформации U_{pq} являются совместными, т.к. являются симметричной частью тензора дисторсий градиента классического вектора перемещений.

Пусть неизвестный тензор \tilde{C}_{ijmn} имеет структуру изотропного тензора модулей:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ijmn} &= (2\tilde{\mu} + 3\tilde{\lambda})\delta_{pq}\delta_{mn} / 3 + 2\tilde{\mu}(\delta_{pm}\delta_{qn} / 2 + \delta_{pn}\delta_{qm} / 2 - \delta_{pq}\delta_{mn} / 3) \\ \tilde{C}_{ijmn}^{-1} \tilde{C}_{mnpq} &= (\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) / 2 \\ \tilde{C}_{ijmn}^{-1} &= \delta_{ij}\delta_{mn} / 3 (2\tilde{\mu} + 3\tilde{\lambda}) + (\delta_{im}\delta_{jn} / 2 + \delta_{in}\delta_{jm} / 2 - \delta_{ij}\delta_{mn} / 3) / 2\tilde{\mu} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Сворачивая (4.28) с тензорами δ_{mn} :

$$(2\tilde{\mu} + 3\tilde{\lambda}) = \frac{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})U_{i,i}}{R_{j,j}} \quad (4.31)$$

и $(\delta_{am}\delta_{bn} / 2 + \delta_{an}\delta_{bm} / 2 - \delta_{ab}\delta_{mn} / 3)$:

$$\begin{aligned}
& [(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})\delta_{ij}\delta_{mn} / 3 + 2\mu^{11}(\delta_{im}\delta_{jn} / 2 + \delta_{in}\delta_{jm} / 2 - \delta_{ij}\delta_{mn} / 3)]R_{i,j} = \\
& = [(2\tilde{\mu} + 3\tilde{\lambda})\delta_{ij}\delta_{mn} / 3 + 2\tilde{\mu}(\delta_{im}\delta_{jn} / 2 + \delta_{in}\delta_{jm} / 2 - \delta_{ij}\delta_{mn} / 3)]U_{i,j} \\
& 2\mu^{11}(\delta_{ai}\delta_{bj} / 2 + \delta_{aj}\delta_{bi} / 2 - \delta_{ab}\delta_{ij} / 3)R_{i,j} = 2\tilde{\mu}(\delta_{ai}\delta_{bj} / 2 + \delta_{aj}\delta_{bi} / 2 - \delta_{ab}\delta_{ij} / 3)U_{i,j} \\
\tilde{\mu} & = \mu^{11} \frac{(\delta_{ia}\delta_{jb} / 2 + \delta_{ib}\delta_{ja} / 2 - \delta_{ij}\delta_{ab} / 3)U_{a,b}(\delta_{im}\delta_{jn} / 2 + \delta_{in}\delta_{jm} / 2 - \delta_{ij}\delta_{mn} / 3)U_{m,n}}{(\delta_{ia}\delta_{jb} / 2 + \delta_{ib}\delta_{ja} / 2 - \delta_{ij}\delta_{ab} / 3)R_{a,b}(\delta_{im}\delta_{jn} / 2 + \delta_{in}\delta_{jm} / 2 - \delta_{ij}\delta_{mn} / 3)R_{m,n}} = \\
& = \mu^{11} \frac{(\delta_{am}\delta_{bn} / 2 + \delta_{an}\delta_{bm} / 2 - \delta_{ab}\delta_{mn} / 3)U_{a,b}U_{m,n}}{(\delta_{am}\delta_{bn} / 2 + \delta_{an}\delta_{bm} / 2 - \delta_{ab}\delta_{mn} / 3)R_{a,b}R_{m,n}} \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Получилась система двух алгебраических уравнений (4.31) и (4.32) относительно неизвестных модулей изотропной неоднородной классической среды. Где $(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})$ и μ^{11} объемный модуль и модуль сдвига, исходной градиентной среды.

Решение задачи представляет массив данных, в который помещается распределение дивергенций полных $\text{div}R_m$ и классических перемещений $\text{div}U_m$. На основании соотношений (4.31) и (4.32), находя отношение полных и классических перемещений и умножая на модуль Юнга соответствующей фазы находим объемный модуль.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим КМ, усиленный углеродными волокнами диаметром $D = 5$ мкм со слоем вискерсов шириной $l_0 = 2$ мкм. Характеристики углеродного волокна: продольный модуль Юнга $E_1 = 241$ ГПа, поперечный модуль Юнга $E_2 = 14.5$ ГПа, модуль сдвига вдоль оси волокна $G_{13} = 22.8$ ГПа, модуль сдвига в поперечной плоскости к оси волокна $G_{12} = 4.8$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{12} = 0.27$. Вискерсы имеют диаметр $d = 0.85$ нм и длину $L = 2000$ нм, равномерно распределены на поверхности базового волокна. Средняя объемная концентрация вискерсов, определяет расстояние между ними на поверхности базового волокна $c_0 = 42.17\%$. Для них были приняты следующие параметры: $E = 1100$ ГПа, $\nu = 0.14$. В качестве матрицы рассматривается эпоксидная смола с параметрами $E_M = 3$ ГПа, $\nu_M = 0.3$.

Средняя плотность c_0 в слое вискерсов и общее N число в каждом сечении:

$$c_0 = \frac{\pi D}{4(D+L)} \left(\frac{d}{h} \right)^2 100\%, \quad N = \frac{\pi D}{h}$$

где h - расстояние между вискерсами на поверхности волокна

Анализ геометрии вискерсов, исходя из средней плотности, приводит к выводу, что расстояние между ними на поверхности волокна равно $h = 0.98$ нм и общее количество трубок в каждом сечении $N = 16022$.

Распределение для объемного модуля при одноосном растяжении вдоль оси x , показано на рисунке 4.14. Значения на оси абсцисс соответствуют: 0-1 базовое волокно; 1-1,8 слой с вискерсами. Четыре линии на графике соответствуют четырем случаям отношения длины слоя с вискерсами к радиусу базового волокна.

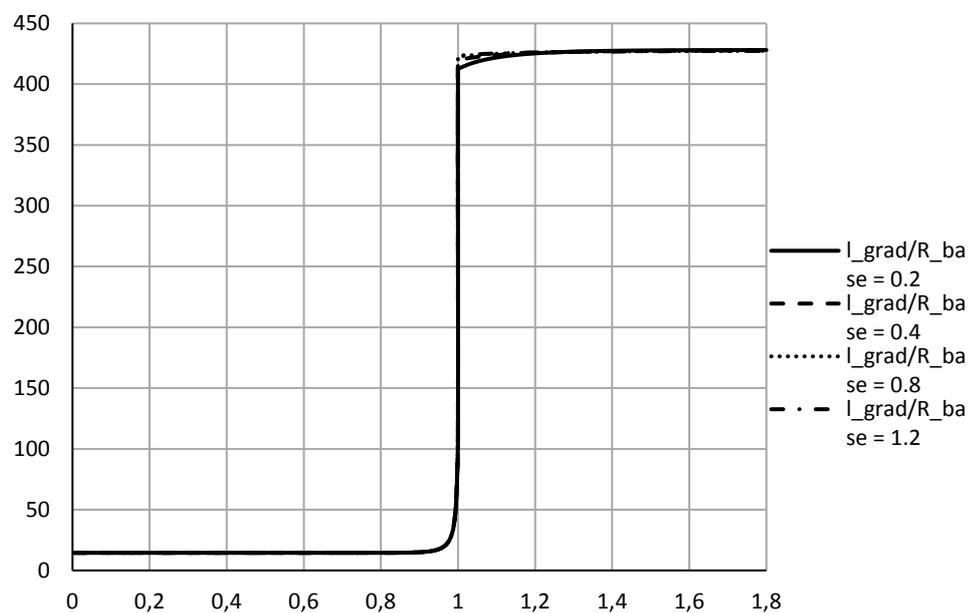


Рисунок 4.14. Распределение объемного модуля (ГПа) при одноосном растяжении.

График распределения объемного модуля при двухосном растяжении представлен на рисунке 4.15. Значения на оси абсцисс соответствуют: 0-1 базовое волокно; 1-1,8 слой с вискерсами; матрица 1,8-2,2. Все размеры расчетной области приведены к радиусу базового волокна равному единице. Четыре линии на графике соответствуют четырем случаям отношения длины слоя с вискерсами к радиусу базового волокна.

В случае “мягкого” градиентного слоя, когда модуль Юнга для вискерсов $E = 7$ ГПа, наблюдается более плавная картина распределения объемного модуля в системе “волокно - вискеризованный слой - матрица”, рисунок 4.16. Остальные параметры соответствуют приведенным выше.

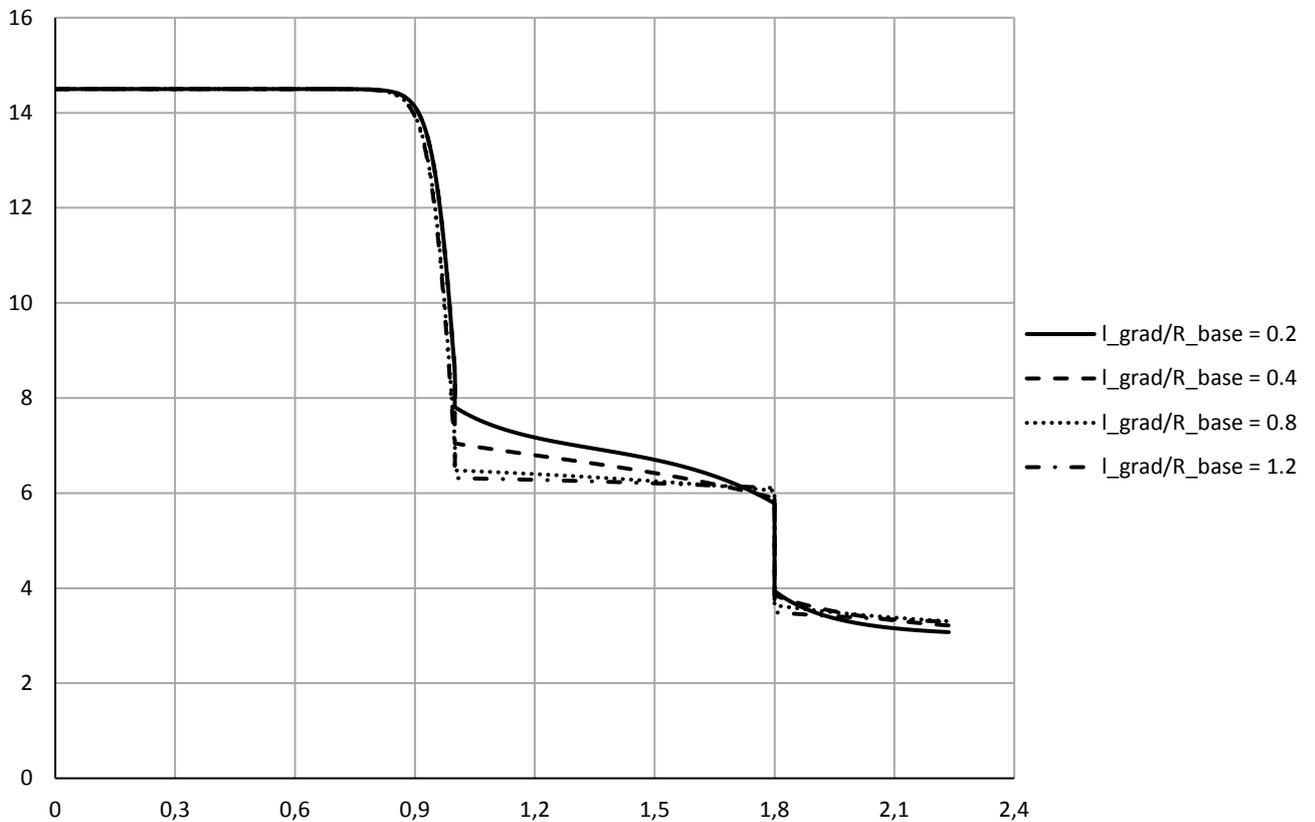
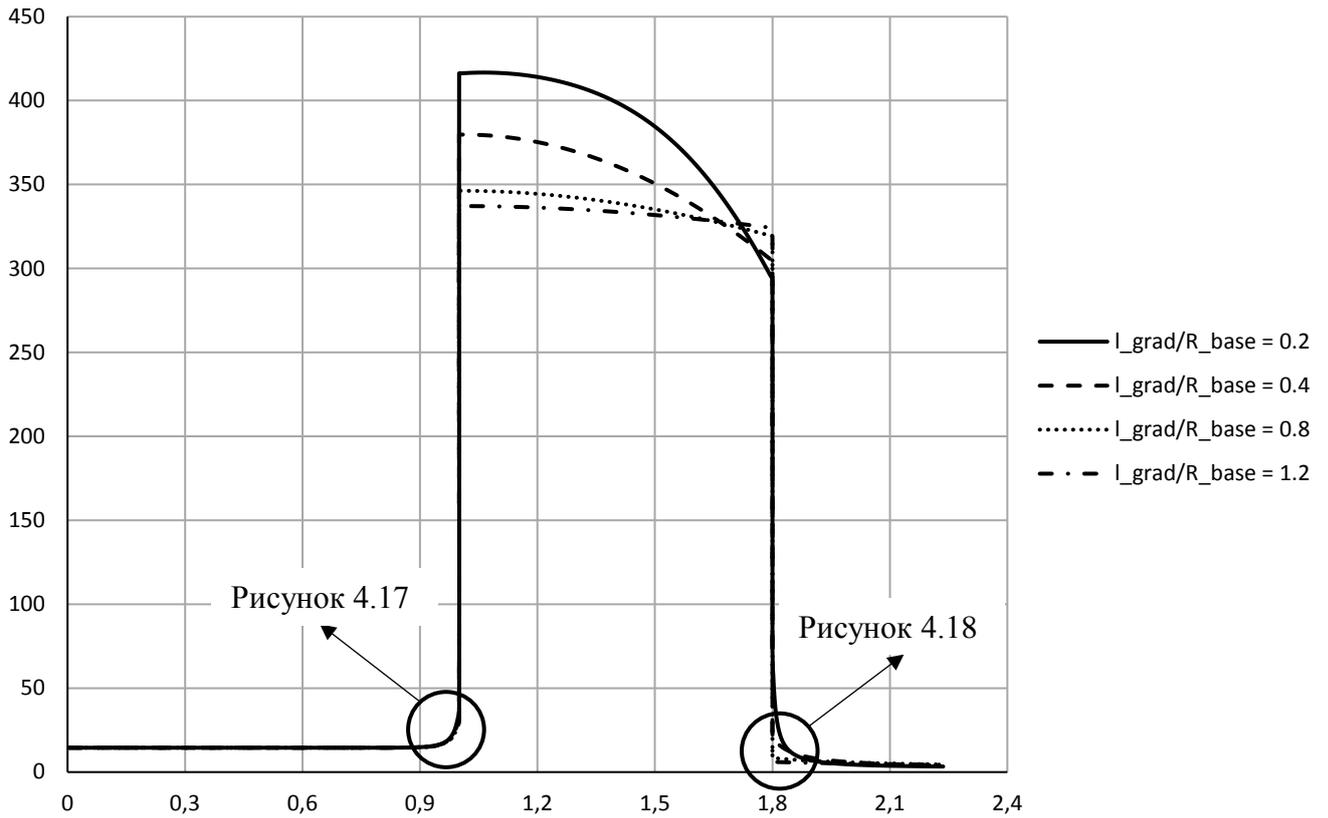


Рисунок 4.16. Распределение объемного модуля (ГПа) при двухосном растяжении "мягкого" градиентного слоя.

В этом примере развивается обобщенный самосогласованный метод Эшелби позволяющий получать аналитические оценки для эффективных механических характеристик волокнистых композитов с цилиндрическими и, в общем случае, многослойными волокнами. Слои волокон могут быть изотропными классическими, или структурами, описываемыми в рамках градиентных теорий упругости. Предлагаемый вариант метода Эшелби позволяет получать аналитические оценки для эффективных свойств составных структур при любых однородных состояниях на бесконечности, задаваемых тензором однородных деформаций.

Анализируя графики на рисунках 4.15 и 4.16, отметим, что в матрице наблюдается эффект усиления. Убедиться в этом можно рассмотрев увеличенные зоны на границах фаз, рисунки 4.17 и 4.18. Это приводит к раздуванию поверхности напряжения и увеличению предела прочности матрицы. Рассмотрим подробнее этот эффект.

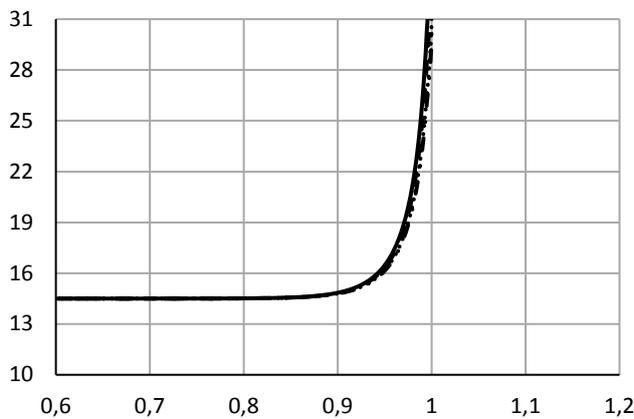


Рисунок 4.17. Объемный модуль на границе волокно-вискеризованный слой

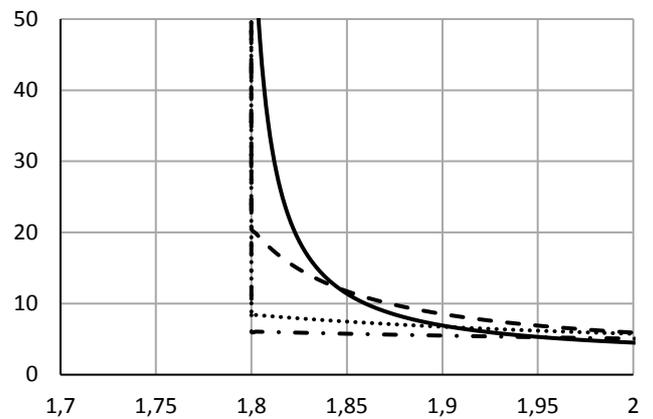


Рисунок 4.18. Объемный модуль на границе вискеризованный слой-матрица

4.4 Оценка несущей способности при росте поврежденности

Воспользуемся критерием прочности Мизеса-Хилла [123] в качестве критерия для описания предельной поверхности прочности

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{bx}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{bx} \sigma_{by}}\right) + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{by}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_b}\right)^2 \leq 1 \quad (4.33)$$

где σ_x, σ_y, τ - нормальные и касательные напряжения, $\sigma_{bx}, \sigma_{by}, \tau_b$ - пределы прочности нормальных и касательных напряжений.

Введем коэффициенты, характеризующие изменение модулей упругости ввиду роста поврежденности/дефектности в случае градиентных эффектов, когда за счет указанных причин модуль слабой фазы «модифицируется» в функционально-градиентный материал:

$$k_{Ex} = \frac{E_x}{E_{0x}}, \quad k_{Ey} = \frac{E_y}{E_{0y}}, \quad k_G = \frac{G}{G_0} \quad (4.34)$$

где E_x, E_y - модуль Юнга в продольном и поперечном направлении, G - модуль сдвига, E_{0x}, E_{0y} - модуль Юнга в продольном и поперечном направлении неповрежденной среды, G_0 - модуль сдвига неповрежденной среды.

Критерий прочности (4.33) и соотношения (4.34), позволяют дать оценку предельной несущей способности рассматриваемой структуры, в предположении, что прочность определяется наиболее слабой фазой – матрицей (в применении к КМ).

Полагаем, равенство деформаций $\varepsilon_n = \varepsilon_{nen}$ для поврежденных и неповрежденных элементов и учитывая равенства (4.34):

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_x)_{n.}}{E_x} &= \frac{\sigma_x}{E_{0x}}, (\sigma_x)_{n.} = k_{Ex} \sigma_x \\ \frac{(\sigma_y)_{n.}}{E_y} &= \frac{\sigma_y}{E_{0y}}, (\sigma_y)_{n.} = k_{Ey} \sigma_y \\ \frac{\tau_{n.}}{G} &= \frac{\tau}{G_0}, \tau_{n.} = k_G \tau \end{aligned} \quad (4.35)$$

Запишем критерий прочности:

$$\left(\frac{(\sigma_x)_{n.}}{\sigma_{bx} k_{Ex}} \right)^2 - \left(\frac{(\sigma_x)_{n.} \cdot (\sigma_y)_{n.}}{\sigma_{bx} k_{Ex} \cdot \sigma_{by} k_{Ey}} \right) + \left(\frac{(\sigma_y)_{n.}}{\sigma_{by} k_{Ey}} \right)^2 + \left(\frac{(\tau)_{n.}}{\tau_b k_G} \right)^2 \leq 1 \quad (4.36)$$

Равенство (4.36) будем использовать для определения предельных нагрузок:

$$P_{\max} = \sqrt{1/\left[\left(\frac{(\sigma_x/P)_{\max}}{\sigma_{bx}k_{Ex}} \right)^2 - \left(\frac{(\sigma_x\sigma_y/P^2)_{\max}}{\sigma_{bx}k_{Ex}\sigma_{by}k_{Ey}} \right) + \left(\frac{(\sigma_y/P)_{\max}}{\sigma_{by}k_{Ey}} \right)^2 + \left(\frac{(\tau/P)_{\max}}{\tau_b k_G} \right)^2 \right]} \quad (4.37)$$

Выражение (4.37) указывает на фактическое возрастание предельных характеристик. Данное утверждение проиллюстрировано на рисунке 4.19, где показана поверхность прочности. Для примера принято $k_{Ex} = k_{Ey} = k_{\tau} = k > 1$, напряжения в поперечном направлении отсутствуют. Сплошной линией на рисунке обозначено $k = 1.4$, пунктирной $k = 1.2$, штриховой $k = 1$.

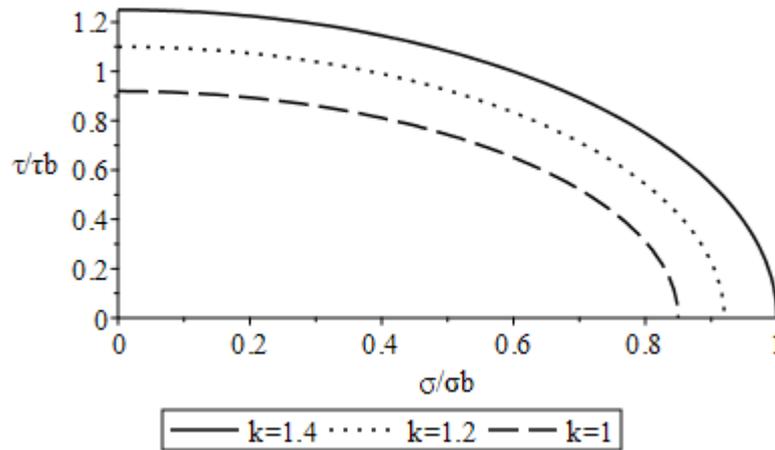


Рисунок 4.19. Поверхность прочности

4.5 Заключение

В четвертой главе рассмотрены примеры с численными результатами, иллюстрирующие влияние масштабного параметра на эффективные свойства для широкого спектра неоднородностей.

Для составного стержня показано, что жесткая фаза «выталкивает» межфазный слой в мягкую фазу. Пример с растяжением пористого стержня позволяет сделать вывод, что свойства зависят от объемного содержания пор, а также имеется корреляция с экспериментальными данными, указывающая на необходимость учета параметров нагружения при многопараметрическом нагружении. Разбор задачи с вискеризованным слоем позволяет получать оценки для эффективных свойств составных структур при любых однородных состояниях на бесконечности.

Заключение

Проведение данной исследовательской работы обусловлено непрерывно возрастающей потребностью в разработке и уточнении моделей сред с нано- и микроструктурными элементами для применения их в механике, материаловедении и др. научных областях. В связи с недостаточной точностью наиболее распространенных математических моделей расчета характеристик неоднородных структур в применении к нано- и микросистемам в данной работе предлагается использовать градиентные модели. В диссертации проведен обзор наиболее распространенных на текущий момент моделей сред: теории Тупина и ее частных случаев, теории Миндлина и ее частных случаев. Выявлен ряд достоинств и недостатков каждой модели в применении к расчетам характеристик нано- и микросистем.

На основании трех последовательно доказанных теорем, модели градиентной дефектной среды были сведены к модели бездефектной градиентной среды. Затем модель бездефектной градиентной среды была сведена к модели классической неоднородной среды. В результате появилась возможность численными методами, разработанными для классических сред, исследовать напряженно-деформированное состояние как градиентных бездефектных, так и градиентных дефектных сред.

В рамках данной работы:

- Установлена энергетическая эквивалентность между обобщенными моделями сред с полями дефектов и изотропной классической средой с переменными по координатам характеристиками (функционально-градиентный изотропный материал). Тензор эффективных модулей упругости изотропной среды определяется явно по решению краевой задачи для обобщенной среды с полями дефектов через тензор поврежденности второго ранга, т.е. фактически предложена математическая модель поврежденности с тензорным параметром.

- Впервые получены конечные формулы, позволяющие осуществить вычисление компонентов переменного по координатам тензора адгезионных модулей четвертого ранга, что позволяет оценить влияние дефектности на адгезионное взаимодействие.
- Выведены аналитические соотношения, позволяющие по решению, полученному для пористой среды определить эффективные характеристики эквивалентной изотропной среды с функционально-градиентными свойствами.
- Из решения для пористой среды следует, что переменный модуль объемного сжатия для эффективной изотропной среды состоит из двух частей. Первая является постоянной по координатам частью и связана со средней поврежденностью, а вторая часть – переменная по координатам поправка, связанная с эволюцией пор. Она определяет зависимость поведения материала от характера нагружения.
- Установлено, что пористая среда может быть фильтром для распространения определенных длин волн.
- Установлено, что жесткий межфазный слой «выталкивается» из более жесткой фазы в более мягкую и этим объясняются эффекты усиления. Используя соответствие градиентной модели межфазного слоя и классической среды с переменными свойствами получены приближенные эффекты усиления.
- Анализ эффективных характеристик вискеризованных волокон приводит к обнаружению эффекта усиления на границе межфазного слоя и матрицы, что эквивалентно увеличению предела прочности матрицы.

Проведенные в диссертационной работе изыскания позволили получить важные с фундаментальной и прикладной точек зрения результаты, которые в дальнейшем могут быть успешно использованы при проектировании материалов, содержащих микро и нановключения.

Список используемой литературы

1. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. № 1. Pp. 385-414.
2. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16. № 1. Pp. 51-78.
3. Mindlin R.D., Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity // *International journal of solids and structures*. 1968. Vol. 4. № 1. Pp. 109-124.
4. Mindlin R.D. Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // *Journal of elasticity*. 1972. Vol. 2. № 4. Pp. 217-282.
5. Maugin G.A. Material forces: concepts and applications // *Applied mechanics review*. 1995. Vol. 48. № 5. Pp. 213-245.
6. Alshits V.I., Kirchner H.O.K., Maugin G.A. Elasticity in multilayers: properties of the propagation matrix and some applications // *Mathematics and mechanics of solids*. 2001. Vol. 6. № 5. Pp. 481-502.
7. Aifantis K.E., Willis J.R. The role of interfaces in enhancing the yield strength of composites and polycrystals // *Journal of the mechanics and physics of Solids*. 2005. Vol. 53. № 5. Pp. 1047–1070.
8. Aifantis E.C. Exploring the applicability of gradient elasticity to certain micro/nano reliability problems // *Microsystems Technologies*. 2009. Vol. 15. № 1. Pp. 109-115.
9. Evans A.G., Hutchinson J.W. A critical assessment of theories of strain gradient plasticity // *Acta Materialia*. 2009. Vol. 57. № 5. Pp. 1675-1688.
10. Aifantis E.C. On the microstructural origin of certain inelastic models // *Journal of engineering materials and technology*. 1984. Vol. 106. № 4. Pp. 326-330.
11. Aifantis E.C. The physics of plastic deformation // *International journal of plasticity*. 1987. Vol. 3. № 3. Pp. 211-247.
12. Aifantis E.C. On the role of gradient in the localization of deformation and fracture // *International journal of engineering science*. 1992. Vol. 30. № 10. Pp. 1279-1299.

13. Ru C.Q., Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity // *Acta Mechanica*. 1993. Vol. 101. № 1-4. Pp. 59-68.
14. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity // *Advances in Applied Mechanics*. 1997. Vol. 33. Pp. 295-361.
15. Gao X.-L., Park S.K. Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // *International journal of solids and structures*. 2007. Vol. 44. № 22-23. Pp. 7486–7499.
16. Forest S., Aifantis E.C. Some links between recent gradient thermo-elasto-plasticity theories and the thermodynamics of generalized continua // *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47. № 25-26. Pp. 3367-3376.
17. Askes H., Aifantis E.C. Gradient elasticity in statics and dynamics an overview of formulations, length, scale identifications procedures, finite element implementation procedures and new results // *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48. № 13. Pp. 1962–1990.
18. Mindlin R.D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // *International journal of solids and structures*. 1965. Vol. 1. № 4. Pp. 417-438.
19. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Nanomechanical modeling of the nanostructures and dispersed composites // *Computational materials science*. 2003. Vol. 28. № 3–4. Pp. 529-539.
20. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N. P. The application of the multiscale models for description of the dispersed composites // *Composites part A*. 2005. Vol. 36. № 2. Pp. 145-152.
21. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // *Journal of materials science*. 2006. Vol. 41. № 20. Pp. 6693-6707.
22. Белов П.А., Лурье С.А. К общей геометрической теории дефектных сред // *Физическая мезомеханика*. 2007. Т. 10. № 6. С. 49-61.

23. Lurie S.A., Belov P.A. Cohesion field: Barenblatt's hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations // International journal of fracture. 2008. Vol. 150. № 1-2. Pp. 181-194.
24. Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Zubov V., Tuchkova N. Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites // Computational materials science. 2009. Vol. 45. № 3. Pp. 709-714.
25. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstructured materials. In: Mechanics of generalized continua. Part of: Advances in Mechanics and Mathematics. 2010. vol. 21. Pp. 223-232.
26. Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С. Поверхностная энергия и энергия адгезии упругих тел // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. 2017. № 1. С. 76-91.
27. Преснецова В.Ю., Ромашин С.Н., Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С. Моделирование процессов адгезии материалов сложного химического состава // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы II международной научно-практической конференции 24-27 ноября 2016. С. 121-125
28. Шоркин В.С., Якушина С.И. О поврежденности гетерогенной среды // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела. Межвузовский сборник научных трудов. 2017. Вып. 1. С. 143-150.
29. Преснецова В.Ю., Ромашин С.Н., Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С., Якушина С.И. Метод расчета потенциалов нелокального взаимодействия разных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2017. Т. 322. № 2. С. 26-32.
30. Kakunai S., Masaki J., Kuroda R., Iwata K., Nagata R. Measurement of apparent Young's modulus in the bending of cantilever beam by heterodyne holographic interferometry // Experimental mechanics. 1985. Vol. 25. № 4. Pp. 408-412.

31. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity // *Journal of the mechanics and physics of solids*. 2003. Vol. 51. № 8. Pp. 1477–1508.
32. Liebold C. Muller W.H. Applications of strain gradient theories to the size effect in submicro-structures incl. experimental analysis of elastic material parameters // *Bulletin of TICMI*. 2015. Vol. 19. № 1. Pp. 45–55.
33. Gusev A.A., Lurie S.A. Symmetry conditions in strain gradient elasticity // *Mathematics and mechanics of solids*. 2015. Vol. 20. № 1. Pp. 1–9.
34. Lurie S.A, Volkov-Bogorodskii D.B, Tuchkova N.P. Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions // *Acta Mechanica*. 2016. Vol. 227. № 1. Pp. 127–138.
35. Aifantis E.C. Gradient effects at macro, micro and nano scales // *Journal of the mechanical behavior of materials*. 1994. Vol. 5. № 3. Pp. 355-375.
36. Aifantis E.C. Strain gradient interpretation of size effects // *International journal of fracture*. 1999. Vol. 95. № 1-4. Pp. 299-314.
37. Fleck N.A., Hutchinson J.W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity // *Journal of the mechanics and physics of solids*. 1993. Vol. 41. № 12. Pp. 1825-1857.
38. Fleck N.A., Hutchinson J.W. A reformulation of strain gradient plasticity // *Journal of the mechanics and physics of solids*. 2001. Vol. 49. № 10. Pp. 2245-2271.
39. Gao H., Huang Y., Nix W.D., Hutchinson J.W. Mechanism-based strain gradient plasticity – I. Theory // *Journal of the mechanics and physics of solids*. 1999. Vol. 47. № 6. Pp. 1239-1263.
40. Миндлин Р.Д. Микроструктура в линейной упругости // *Механика*. 1964. Вып. 4. С. 129–160.
41. Nunziato J., Cowin S. A nonlinear theory of elastic materials with voids // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1979. Vol. 72. № 2. Pp. 175-201.
42. Cowin S. C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids // *Journal of Elasticity*. 1983. Vol. 13. Pp. 125–147.

43. Markov K.Z. On a microstructural model of damage in solids // *International Journal of Engineering Science*. 1995. Vol. 33. № 1. Pp. 139–150.
44. Thurieau N., Kouitat Njiwa R., Taghite M. The local point interpolation-boundary element method (LPI-BEM) applied to the solution of mechanical 3D problem of a microdilatation medium // *European Journal of Mechanics, A/Solids*. 2014. Vol. 47. Pp. 391–399.
45. Ciarletta M., Chiriță S., Passarella F. Some results on the spatial behaviour in linear porous elasticity // *Archives of Mechanics*. 2005. Vol. 57. № 1. Pp. 43–65.
46. Cowin S.C., Puri P. The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids // *Journal of Elasticity*. 1983. Vol.13. № 2. Pp. 157-163.
47. Cowin S.C. The stresses around a hole in a linear elastic material with voids // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1984. Vol. 37. Pp. 441–465.
48. Dell’Isola F., Batra R. C. Saint-Venant’s problem for porous linear elastic materials // *Journal of elasticity*. 1997. Vol. 47. № 1. Pp. 73–81.
49. Iesan D., Scalia A. On the deformation of functionally graded porous elastic cylinder // *Journal of Elasticity*. 2007. Vol. 87. № 2. Pp. 147–159.
50. Ghiba I. Semi-inverse solution for Saint-Venant’s problem in the theory of porous elastic materials // *Journal of Mechanics*. 2008. Vol. 27. Pp. 1060–1074.
51. Batra R.C., Yang J.S. Saint-Venant’s principle for linear elastic porous materials // *Journal of elasticity*. 1995. Vol. 39. № 3. Pp. 265–271.
52. Iesan D. A theory of thermoelastic materials with voids // *Acta Mechanica*. 1986. Vol. 60. № 1-2. Pp. 67–89.
53. Birsan M. A bending theory of porous thermoelastic plates // *Journal of thermal stresses*. 2003. Vol. 26 №1. Pp. 67–90.
54. Chandrasekharaiah D.S., Cowin S.C. A complete solution for a unified system of field equations of thermoelasticity and poroelasticity // *Acta Mechanica*. 1993. Vol. 99. № 1-4. Pp. 225–233.

55. Chandrasekharaiah D.S., Cowin S.C. Unified complete solutions for the theories of thermoelasticity and poroelasticity // *Journal of Elasticity*. 1989. Vol. 21. № 1. Pp. 121–126.
56. Birsan M., Altenbach H. On the theory of porous elastic rods // *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48. №6. Pp. 910–924.
57. Scalia A. Contact problem for porous elastic strip // *International Journal of Engineering Science*. 2002. Vol. 40. № 4. Pp. 401–410.
58. Pompei A., Rigano A., Sumbatyan M. A. Contact Problem for a Rectangular Punch on the Porous Elastic Half-Space // *Journal of Elasticity*. 2005. Vol. 76. № 1. Pp. 1–19.
59. Соляев Ю.О., Лурье С.А., Волков А.В. Численное решение задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории упругости // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2007. Т. 10. № 2. С. 137-152.
60. Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M. A. On stress analysis for cracks in elastic materials with voids // *International Journal of Engineering Science*. 2003. Vol. 41. № 20. Pp. 2447–2461.
61. Popuzin V., Pennisi M. Fast numerical method for crack problem in the porous elastic material // *Meccanica*. 2014. Vol. 49. № 9. Pp. 2169–2179.
62. Лурье С.А., Белов П.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с “двойникованием” // *Современные проблемы механики гетерогенных сред (сборник трудов конференции)*. 2005. Т. 1. С. 235-267.
63. Solyaev Y.O., Lurie S.A. Deformation of a thin layer that is bonded to a massive substrate in the theory of thermoelastic materials with voids // *International Journal of Nanomechanics Science and Technology*. 2014. Vol. 5. № 1. Pp. 33–49.
64. Iovane G., Nasedkin A. V. Finite element analysis of static problems for elastic media with voids // *Computers & Structures*. 2005. Vol. 84. № 1-2. Pp. 19–24.
65. Iovane G., Nasedkin A. V. Finite element dynamic analysis of anisotropic elastic solids with voids // *Computers & Structures*. 2009. Vol. 87. № 15-16. Pp. 981–989.

66. Ramézani H. Jeong J. Non-linear elastic micro-dilatation theory: Matrix exponential function paradigm // International Journal of Solids and Structures. 2015. Vol. 67-68. Pp. 1–26.
67. Jeong J., Sardini P., Ramézani H., Siitari-Kauppi M., Steeb H. Modeling of the induced chemo-mechanical stress through porous cement mortar subjected to CO₂: Enhanced micro-dilatation theory and 14C-PMMA method // Computational Materials Science. 2013. Vol. 69. Pp. 466–480.
68. Jeong J., Ramézani H., Sardini P., Kondo D., Ponson L., Siitari-Kauppi M. Porous media modeling and micro-structurally motivated material moduli determination via the micro-dilatation theory // European Physical Journal: Special Topics. 2015. Vol. 224. № 9. Pp. 1805–1816.
69. Ramézani H., Steeb H., Jeong J. Analytical and numerical studies on Penalized Micro-Dilatation (PMD) theory: Macro-micro link concept // European Journal of Mechanics. A/Solids. 2012. Vol. 34. Pp. 130–148.
70. Lakes R.S. Experimental microelasticity of two porous solids // International Journal of Solids and Structures. 1986. Vol. 22. № 1. Pp. 55-63.
71. Iesan D. Second-order effects in the torsion of elastic materials with voids // ZAMM-Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik. 2005. Vol. 85. № 5. Pp. 351–365.
72. Knudsen F.P. Dependence of mechanical strength of brittle polycrystalline specimens on porosity and grain size // Journal of the American ceramic society. 1959. Vol. 42. № 8. Pp. 376-387.
73. Duckworth W. Discussion of Ryshkewitch paper // Journal of the American ceramic society. 1953. Vol. 36. № 2. P. 68.
74. Бальшин М.Ю. Соотношение механических свойств порошковых металлов и их пористости и предельных свойств металлокерамических материалов // Доклады академии наук СССР. 1949. Т. 67. № 5. С. 831-834.
75. Coble R.L., Kingery W.D. Effect of porosity on physical properties of sintered alumina // Journal of the American ceramic society. 1956. Vol. 39. № 11. Pp. 377-385.

76. Hasselman P.H., Fulrath R.M. Effect of small fraction of spherical porosity on elastic moduli of glass // *Journal of the American ceramic society*. 1964. Vol. 47. № 1. Pp. 52-53.
77. Spriggs R.M. Effect of open and closed pores on elastic moduli of polycrystalline alumina // *Journal of the American ceramic society*. 1962. Vol. 45. № 9. P. 454.
78. Надгорный Э.М. Свойства нитевидных кристаллов // *Успехи физических наук*. 1962. Т. LXXVII. Вып. 2. С. 201-227.
79. Арсланов В.В. Толковый англо-русский словарь по нанотехнологиям. - М.: Изд-во ИФХЭ РАН, 2009. – 261 с.
80. Захарова Г.С., Волков В.Л., Ивановская В.В., Ивановский А.Л. Нанотрубки и родственные наноструктуры оксидов d-металлов: синтез и моделирование // *Успехи химии*. 2005. Т. 74. № 7. С. 651-685.
81. Lin Y., Ehlert G., Sodano H.A. Increased interface strength in carbon fiber composites through a ZnO nanowire interphase // *Advanced functional materials*. 2009. Vol. 19. Pp. 2654-2660.
82. Katz H.S., Milewski J.V. Handbook of fillers and reinforcement for plastics. - New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1978. – 652 p.
83. Guz A.N., Rushchitsky J.J., Guz I.A. Establishing fundamentals of the mechanics of nanocomposites // *International Applied Mechanics*. 2007. Vol. 43. № 3. Pp. 247-271.
84. Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J. Developing the mechanical models for nanomaterials // *Composites: Part A*. 2007. Vol. 38. № 4. Pp. 1234-1250.
85. Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J. Predicting the properties of micro- and nanocomposites: from the microwhiskers to the bristled nanocentipedes // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2008. Vol. 366. Pp. 1827–1833.
86. Sattler K.D. Handbooks of nanophysics. Principles and methods. – Boca Roton: CRC Press, 2009. – 776 p.

87. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Изд-во «Наука», 1966. - 708 с.
88. Демидов С.П. Теория упругости. - М.: «Высшая Школа», 1979. - 432 с.
89. Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N. Effect of a special reinforcement on the elastic properties of micro- and nanocomposites with polymer matrix // *Aeronautical Journal*. 2013. Vol. 117. № 1196. Pp. 1019-1036.
90. Guz I.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J. Modelling properties of micro- and nanocomposites with brush-like reinforcement // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. 2009. Vol. 40. № 3. Pp. 154-160.
91. Kundalwal S.I., Ray M.C. Micromechanical analysis of fuzzy fiber reinforced composites // *International journal of mechanics and materials in design*. 2011. Vol. 7. № 2. Pp. 149-166.
92. Chatzigeorgiou G., Efendiev Y., Lagoudas D. Homogenization of aligned “fuzzy fiber” composites // *International journal of solids and structures*. 2011. Vol. 48. Pp. 2668–2680.
93. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. – Paris: Librairie Scientifique A, Hermann et Fils, 1909. – 242 p.
94. Jaramillo T.J. A generalization of the energy function of elasticity theory: dissertation doctor of philosophy / Jaramillo T.J. – Chicago, 1929.
95. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // *Физика твердого тела*. 1960. Т.2. Вып. 7. С. 1399-1409.
96. Белов П.А., Лурье С.А. Континуальная модель микрогетерогенных сред // *Прикладная математика и механика*. 2009. Т. 73. № 5. С. 833-848.
97. McFarland A.W., Colton J.S. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors // *Journal of micromechanics and microengineering*. 2005. Vol. 15. № 5. Pp. 1060-1067.
98. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Nanomechanical modeling of the nanostructures and dispersed composites // *Computational materials science*. 2003. Vol. 28. № 3-4. Pp. 529-539.

99. Lurie S.A., Belov P.A. Mathematical models of the mechanics of the continuum and physical fields. - Moscow: The Publishing House of the Russian Academy of Sciences Data Center, 2000. - 151 p.
100. Белов П.А., Лурье С.А. Теория идеальных адгезионных взаимодействий // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13. № 4. С. 519-536.
101. Белов П.А., Лурье С.А. Континуальная теория адгезионных взаимодействий поврежденных сред // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т. 15. № 4. С. 610-629.
102. Belov, P.A., Lurie, S.A. A continuum model of microheterogeneous media // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. Vol. 73. № 5. Pp. 599–608.
103. Lomakin E.V. Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties. In: Mechanics of generalized continua. Part of: Advances structured materials. 2011. Vol. 7. Pp. 339–350.
104. Lomakin E.V., Fedulov B.N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. Vol. 50. № 6. Pp. 1527–1535.
105. Марков К.З. К теории упругости сред со свободной дилатацией частиц // Теоретическая и прикладная механика. 1974. Т. 6. № 1. С. 93-99.
106. Markov K.Z. On the dilatational theory of elasticity // ZAMM – Journal of applied mathematics and mechanics. 1981. Vol. 61. № 8. Pp. 349–358.
107. Ломакин Е.В., Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н. Моделирование локально-функциональных свойств материала, поврежденного полями дефектов // Доклады академии наук. 2017. Т. 472. №3. С. 282-285.
108. Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н., Жаворонок С.И. Масштабные эффекты в механике сплошных сред. Материалы с микро- и наноструктурой. - М.: Изд-во МАИ, 2011. - 160 с.
109. Лейбович С., Сибасс А. Нелинейные волны. - М.: Изд-во «Мир», 1977. - 320 с.
110. Павлов И.С. Упругие волны в двумерной зернистой среде // Проблемы прочности и пластичности. 2005. № 67. С. 119-131.

111. Никитина Н.Е., Павлов И.С. О специфике явления акустоупругости в двумерной среде с внутренней структурой // Акустический журнал. 2013. Т. 59. № 4. С. 452-458.
112. Pavlov I.S., Vasiliev A.A., Porubov A.V. Dispersion properties of the phononic crystal consisting of ellipse-shaped particles // Journal of sound and vibration. 2016. Vol. 384. Pp. 163-176.
113. Lurie S.A., Belov P.A., Kharchenko K.D. The theory of media with defect fields and models of deformation of functional layers in isotropic materials // Nanomechanics Science and Technology. An International Journal. 2015. Vol. 6. № 1. Pp 1-16.
114. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: «Наука», 1979. - 560 с.
115. Ломакин Е.В., Мельников А.М. Задачи плоского напряженного состояния тел с вырезами, пластические свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Механика твердого тела. 2011. №1. С. 77-89.
116. Garcia E.J., Wardle B.L., Hart A.J., Yamamoto N. Fabrication and multifunctional properties of hybrid laminate with aligned carbon nanotubes grown in situ // Composite science and technology. 2008. Vol. 68. № 9. Pp. 2034–2041.
117. Agnihotri P., Basu S., Kar K.K. Effect of carbon nanotube length and density on the properties of carbon nanotube-coated carbon fiber/polyester composites // Carbon. 2011. Vol. 49. № 9. Pp. 3098–3106.
118. Galan U., Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A. Effect of ZnO nanowire morphology on the interfacial strength of nanowire coated carbon fibers // Composite science and technology. 2011. Vol. 71. № 7. Pp. 946–954.
119. Wang Y., Tang Z., Liang X., Liz-Marzan L.M., Kotov N.A. SiO₂-coated CdTe nanowires: bristled nano centipedes // Nano Letters. 2004. Vol. 4. № 2. Pp. 225–231.
120. Chatzigeorgiou G., Siedel G.D., Lagoudas D. Effective mechanical of “fuzzy fiber” composites // Composites B. 2012. Vol. 43. № 6. Pp. 2577–2593.

121. Volkov-Bogorodskii D.B., Lurie S.A. Solution of the Eshelby problem in gradient theory of elasticity for multilayered spherical inclusions // *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51. № 2. Pp. 161-176.
122. Белов П.А. Об одной двухпараметрической градиентной модели деформируемых сред // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2011. Т. 17. № 2. С. 170-176.
123. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. - М.: Машиностроение, 1968. - 192 с.

Приложение А

Свертка тензоров для эффективного объемного модуля

$$\begin{aligned}
 (R_{i,j} + R_{j,i}) / 2 &= E_{ijmn}^{-1} [(C_{mnab}^{11} R_{a,b} - C_{mndabc}^J R_{a,bcd})] \\
 R_{k,k} &= \delta_{ij} E_{ijmn}^{-1} [(C_{mnab}^{11} R_{a,b} - C_{mndabc}^J R_{a,bcd})] \\
 \begin{cases} E_{ijmn}^{-1} = \delta_{mn} \delta_{ij} / (9\tilde{K}) + (\delta_{mi} \delta_{nj} / 2 + \delta_{mj} \delta_{ni} / 2 - \delta_{mn} \delta_{ij} / 3) / \tilde{G} \\ \delta_{ij} E_{ijmn}^{-1} = \delta_{mn} / (3\tilde{K}) \end{cases} \\
 R_{k,k} &= (C_{mnab}^{11} \delta_{mn} R_{a,b} - C_{mndabc}^J \delta_{mn} R_{a,bcd}) / (3\tilde{K}) \\
 3\tilde{K} &= (C_{mnab}^{11} \delta_{mn} R_{a,b} - C_{mndabc}^J \delta_{mn} R_{a,bcd}) / R_{k,k} = \\
 &= \frac{C_{mnab}^{11} \delta_{mn} R_{a,b}}{R_{k,k}} - \frac{C_{mndabc}^J \delta_{mn} R_{a,bcd}}{R_{k,k}}
 \end{aligned}$$

Вычисляем свертки тензоров:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} C_{ijmn}^{11} = (2\mu^{11} / 3 + \lambda^{11}) \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu^{11} (\delta_{im} \delta_{jn} / 2 + \delta_{in} \delta_{jm} / 2 - \delta_{ij} \delta_{mn} / 3) \\ C_{ijmn}^{11} \delta_{ij} = 3(2\mu^{11} / 3 + \lambda^{11}) \delta_{mn} = 3K^{11} \delta_{mn} \end{cases} \\
 C_{mnab}^{11} \delta_{mn} R_{a,b} &= 3K^{11} \delta_{ab} R_{a,b} = 3K^{11} R_{a,a} \\
 \begin{cases} C_{ijknml}^J = C_1^J (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} + \\ + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn}) + \\ + C_2^J (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl}) \\ \delta_{ij} C_{ijknml}^J = (5C_1^J + 2C_2^J) (\delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{kl} \delta_{mn}) \end{cases} \\
 C_{mndabc}^J \delta_{mn} R_{a,bcd} &= 3(5C_1^J + 2C_2^J) \Delta R_{a,a}
 \end{aligned}$$

Приложение Б

Свертка тензоров для эффективного модуля сдвига

$$\begin{aligned} & (\delta_{pi}\delta_{qj}/2 + \delta_{pj}\delta_{qi}/2 - \delta_{pq}\delta_{ij}/3)(R_{i,j} + R_{j,i})/2 = \\ & = (\delta_{pi}\delta_{qj}/2 + \delta_{pj}\delta_{qi}/2 - \delta_{pq}\delta_{ij}/3)E_{ijmn}^{-1}[(C_{mnab}^{11}R_{a,b} - C_{mndabc}^J R_{a,bcd})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{pq} & = (\delta_{pi}\delta_{qj}/2 + \delta_{pj}\delta_{qi}/2 - \delta_{pq}\delta_{ij}/3)E_{ijmn}^{-1}[(C_{mnab}^{11}R_{a,b} - C_{mndabc}^J R_{a,bcd})] = \\ & = (\delta_{pi}\delta_{qj}/2 + \delta_{pj}\delta_{qi}/2 - \delta_{pq}\delta_{ij}/3)E_{ijmn}^{-1}[(C_{mnab}^{11}R_{a,b} - C_{mndabc}^J R_{a,bcd})] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} E_{ijmn}^{-1} & = \delta_{mi}\delta_{jn}/(9\tilde{K}) + (\delta_{mi}\delta_{nj}/2 + \delta_{mj}\delta_{ni}/2 - \delta_{mn}\delta_{ij}/3)/\tilde{G} \\ (\delta_{pi}\delta_{qj}/2 + \delta_{pj}\delta_{qi}/2 - \delta_{pq}\delta_{ij}/3)E_{ijmn}^{-1} & = (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)/\tilde{G} \end{aligned} \right. \\ & = (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)[C_{mnab}^{11}R_{a,b} - C_{mndabc}^J R_{a,bcd}]/\tilde{G} = \\ & = [(\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mnab}^{11}R_{a,b} - (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mndabc}^J R_{a,bcd}]/\tilde{G} \end{aligned}$$

$$\tilde{G}\gamma_{pq} = (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mnab}^{11}R_{a,b} - (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mndabc}^J R_{a,bcd}$$

Вычисляя свертки тензоров:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} C_{ijmn}^{11} & = (2\mu^{11}/3 + \lambda^{11})\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu^{11}(\delta_{im}\delta_{jn}/2 + \delta_{in}\delta_{jm}/2 - \delta_{ij}\delta_{mn}/3) \\ (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mnab}^{11} & = \mu^{11}(\delta_{pa}\delta_{qb}/2 + \delta_{pb}\delta_{qa}/2 - \delta_{pq}\delta_{ab}/3) \end{aligned} \right. \\ & (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mnab}^{11}R_{a,b} = \\ & = \mu^{11}(\delta_{pa}\delta_{qb}/2 + \delta_{pb}\delta_{qa}/2 - \delta_{pq}\delta_{ab}/3)R_{a,b} = \\ & = \mu^{11}\gamma_{pq} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} C_{ijkml}^J & = C_1^J(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik} + \\ & + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}) + \\ & + C_2^J(\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{nj}\delta_{nk}\delta_{li} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{nj}\delta_{kl}) \\ (\delta_{pi}\delta_{qj}/2 + \delta_{pj}\delta_{qi}/2 - \delta_{pq}\delta_{ij}/3)C_{ijkml}^J & = \\ & = 2C_1^J[(\delta_{pl}\delta_{qk}/2 + \delta_{pk}\delta_{ql}/2 - \delta_{pq}\delta_{lk}/3)\delta_{mn} + \\ & + (\delta_{pk}\delta_{qm}/2 + \delta_{pm}\delta_{qk}/2 - \delta_{pq}\delta_{km}/3)\delta_{nl} + \\ & + (\delta_{pn}\delta_{qk}/2 + \delta_{pk}\delta_{qn}/2 - \delta_{pq}\delta_{nk}/3)\delta_{ml}] + \\ & + 2C_2^J[(\delta_{pn}\delta_{ql}/2 + \delta_{pl}\delta_{qn}/2 - \delta_{pq}\delta_{nl}/3)\delta_{km} + \\ & + (\delta_{pl}\delta_{qm}/2 + \delta_{pm}\delta_{ql}/2 - \delta_{pq}\delta_{lm}/3)\delta_{nk} + \\ & + (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)\delta_{kl}] \end{aligned} \right. \\ & (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mndabc}^J R_{a,bcd} = \\ & = (4C_1^J + 2C_2^J)(R_{m,mpq} - \Delta R_{m,m}\delta_{pq}/3) + (2C_1^J + 4C_2^J)\Delta\gamma_{pq} \end{aligned}$$

окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}\gamma_{pq} &= (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mnab}^{11}R_{a,b} - (\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mndabc}^J R_{a,bcd} \\
 &\left\{ \begin{aligned}
 &(\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mnab}^{11}R_{a,b} = \\
 &= \mu^{11}(\delta_{pa}\delta_{qb}/2 + \delta_{pb}\delta_{qa}/2 - \delta_{pq}\delta_{ab}/3)R_{a,b} = \\
 &= \mu^{11}\gamma_{pq} \\
 &(\delta_{pm}\delta_{qn}/2 + \delta_{pn}\delta_{qm}/2 - \delta_{pq}\delta_{mn}/3)C_{mndabc}^J R_{a,bcd} = \\
 &= (4C_1^J + 2C_2^J)(R_{m,mpq} - \Delta R_{m,m}\delta_{pq}/3) + (2C_1^J + 4C_2^J)\Delta\gamma_{pq}
 \end{aligned} \right. \\
 \tilde{G}\gamma_{pq} &= \mu^{11}\gamma_{pq} - (2C_1^J + 4C_2^J)[\Delta\gamma_{pq} + \frac{(4C_1^J + 2C_2^J)}{(2C_1^J + 4C_2^J)}(R_{m,mpq} - \Delta R_{m,m}\delta_{pq}/3)] \\
 \Gamma_{pq} &= [\Delta\gamma_{pq} + \frac{(4C_1^J + 2C_2^J)}{(2C_1^J + 4C_2^J)}(R_{m,mpq} - \Delta R_{m,m}\delta_{pq}/3)] \\
 (\tilde{G} - \mu^{11})\gamma_{pq} &= -(2C_1^J + 4C_2^J)\Gamma_{pq}
 \end{aligned}$$

Сворачивая левую часть последнего равенства с левой частью, а правую – с правой, получим:

$$(\tilde{G} - \mu^{11})^2 \gamma_{pq} \gamma_{pq} = (4C_1^J + 2C_2^J)^2 \Gamma_{pq} \Gamma_{pq}$$

Приложение В

Свертка тензоров для получения второго линейного неоднородного уравнения адгезионных податливостей

$$\begin{aligned} R_{i,j} \delta_{ij}^* &= (2a_1^{-1} \delta_{mn}^* + a_3^{-1} n_m n_n) a_{mn} = (2a_1^{-1} \delta_{ij}^* + a_3^{-1} n_i n_j) (A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}) = \\ &= (2a_1^{-1} \delta_{ij}^* + a_3^{-1} n_i n_j) A_{ijmn}^J R_{m,n} + (2a_1^{-1} \delta_{ij}^* + a_3^{-1} n_i n_j) C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} \end{aligned}$$

Вычислим свертку $(2a_1^{-1} \delta_{ij}^* + a_3^{-1} n_i n_j) A_{ijmn}^J R_{m,n}$:

$$\begin{aligned} &(2a_1^{-1} \delta_{ij}^* + a_3^{-1} n_i n_j) A_{ijmn}^J R_{m,n} = \\ &= (2a_1^{-1} \delta_{ij}^* + a_3^{-1} n_i n_j) \{ A_1^J \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + \\ &+ A_2^J (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{jm}^* \delta_{in}^* - \delta_{ij}^* \delta_{mn}^*) / 2 + \\ &+ A_3^J (\delta_{ij}^* n_m n_n + \delta_{mn}^* n_i n_j) / 2 + \\ &+ A_4^J [(\delta_{in}^* n_j + \delta_{jn}^* n_i) n_m + (\delta_{jm}^* n_i + \delta_{im}^* n_j) n_n] / 4 + \\ &+ A_5^J n_i n_j n_m n_n \} R_{m,n} = \\ &= \{ (4a_1^{-1} A_1^J + a_3^{-1} A_3^J / 2) \delta_{mn}^* + (2a_1^{-1} A_3^J + a_3^{-1} A_5^J) n_m n_n \} R_{m,n} = \\ &= (4a_1^{-1} A_1^J + a_3^{-1} A_3^J / 2) (R_{m,n} \delta_{mn}^*) + (2a_1^{-1} A_3^J + a_3^{-1} A_5^J) (R_{m,n} n_m n_n) \end{aligned}$$

Вычислим свертку $(2a_1^{-1} \delta_{ij}^* + a_3^{-1} n_i n_j) C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}$:

$$\begin{aligned} &(2a_1^{-1} \delta_{ij}^* + a_3^{-1} n_i n_j) C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} = \\ &= (2a_1^{-1} \delta_{ij}^* n_k + a_3^{-1} n_i n_j n_k) \{ C_1^J (\delta_{ij}^* \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn}^* \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ij}^* \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn}^* \delta_{ij}^* \delta_{ik} + \\ &+ \delta_{ik}^* \delta_{jn} \delta_{nl} + \delta_{ml}^* \delta_{ni} \delta_{jk} + \delta_{ik}^* \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{im}^* \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{ij}^* \delta_{kl} \delta_{mn}^*) + \\ &+ C_2^J (\delta_{in}^* \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj}^* \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{im}^* \delta_{jl} \delta_{nk} + \delta_{il}^* \delta_{jn} \delta_{mk} + \delta_{im}^* \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in}^* \delta_{mj}^* \delta_{kl}) \} R_{m,nl} = \\ &= 2a_1^{-1} \{ C_1^J (2n_k \Delta R_k + 4n_k R_{m,mki}) + 2C_2^J (\delta_{ij}^* n_k R_{k,ij} + \delta_{ij}^* n_k R_{j,ki} + \delta_{ij}^* n_k R_{i,kj}) \} + \\ &+ a_3^{-1} \{ 3C_1^J (n_k \Delta R_k + 2n_k R_{m,mk}) + 6C_2^J (n_i n_j n_k R_{k,ij}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &C_{ijkml}^J R_{m,nl} = \\ &= C_1^J (\delta_{ij}^* \Delta R_k + 2\delta_{ij}^* R_{m,mk} + \delta_{jk}^* \Delta R_i + 2\delta_{jk}^* R_{m,mi} + \delta_{ik}^* \Delta R_j + 2\delta_{ik}^* R_{m,mj}) + \\ &+ 2C_2^J (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj}) \\ &A_{ijmn}^J R_{m,n} = \\ &= A_1^J \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* R_{m,n} + \\ &+ A_2^J (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{jm}^* \delta_{in}^* - \delta_{ij}^* \delta_{mn}^*) R_{m,n} / 2 + \\ &+ A_3^J (\delta_{ij}^* n_m n_n + \delta_{mn}^* n_i n_j) R_{m,n} / 2 + \\ &+ A_4^J [(\delta_{in}^* n_j + \delta_{jn}^* n_i) n_m + (\delta_{jm}^* n_i + \delta_{im}^* n_j) n_n] R_{m,n} / 4 + \\ &+ A_5^J n_i n_j n_m n_n R_{m,n} \end{aligned}$$

Подставляя свертки в исходное уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
& R_{i,j} \delta_{ij}^* = \\
& = (2a_1^{-1} \delta_{ij}^* + a_3^{-1} n_i n_j) A_{ijmn}^J R_{m,n} + \\
& + (2a_1^{-1} \delta_{ij}^* + a_3^{-1} n_i n_j) C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} = \\
& = (4a_1^{-1} A_1^J + a_3^{-1} A_3^J / 2) (R_{m,n} \delta_{mn}^*) + (2a_1^{-1} A_3^J + a_3^{-1} A_5^J) (R_{m,n} n_m n_n) + \\
& + 2a_1^{-1} \{ C_1^J (2n_k \Delta R_k + 4n_k R_{m,mki}) + 2C_2^J (\delta_{ij}^* n_k R_{k,ij} + \delta_{ij}^* n_k R_{j,ki} + \delta_{ij}^* n_k R_{i,kj}) \} + \\
& + a_3^{-1} \{ 3C_1^J (n_k \Delta R_k + 2n_k R_{m,mk}) + 6C_2^J (n_i n_j n_k R_{k,ij}) \} = \\
& = 2a_1^{-1} \{ 2A_1^J (R_{m,n} \delta_{mn}^*) + A_3^J (R_{m,n} n_m n_n) + C_1^J (2n_k \Delta R_k + 4n_k R_{m,mki}) + 2C_2^J (\delta_{ij}^* n_k R_{k,ij} + \delta_{ij}^* n_k R_{j,ki} + \delta_{ij}^* n_k R_{i,kj}) \} + \\
& + a_3^{-1} \{ A_3^J (R_{m,n} \delta_{mn}^*) / 2 + A_5^J (R_{m,n} n_m n_n) + 3C_1^J (n_k \Delta R_k + 2n_k R_{m,mk}) + 6C_2^J (n_i n_j n_k R_{k,ij}) \}
\end{aligned}$$

Приложение Г

Свертка тензоров для определения адгезионной податливости a_2^{-1}

$$\begin{aligned}
\gamma_{pq}^* &= (\delta_{ip}^* \delta_{jq}^* + \delta_{jp}^* \delta_{iq}^* - \delta_{ij}^* \delta_{pq}^*) (R_{i,j} + R_{j,i}) / 4 = \\
&= (\delta_{ip}^* \delta_{jq}^* + \delta_{jp}^* \delta_{iq}^* - \delta_{ij}^* \delta_{pq}^*) A_{ijmn}^{-1} a_{mn} / 2 = \\
&= (\delta_{ip}^* \delta_{jq}^* + \delta_{jp}^* \delta_{iq}^* - \delta_{ij}^* \delta_{pq}^*) \{ a_1^{-1} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + \\
&+ a_2^{-1} (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{jm}^* \delta_{in}^* - \delta_{ij}^* \delta_{mn}^*) / 2 + \\
&+ a_3^{-1} (\delta_{ij}^* n_m n_n + \delta_{mn}^* n_i n_j) / 2 + \\
&+ a_4^{-1} [(\delta_{in}^* n_j + \delta_{jn}^* n_i) n_m + (\delta_{jm}^* n_i + \delta_{im}^* n_j) n_n] / 4 + \\
&+ a_5^{-1} n_i n_j n_m n_n \} a_{mn} / 2 = \\
&= a_2^{-1} (\delta_{pm}^* \delta_{qn}^* + \delta_{pn}^* \delta_{qm}^* - \delta_{pq}^* \delta_{mn}^*) a_{mn} / 2 = \\
&= a_2^{-1} (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) a_{ij} / 2 = \\
&= a_2^{-1} (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) \{ A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} \} / 2 = \\
&= a_2^{-1} \{ (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) A_{ijmn}^J R_{m,n} + (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} \} / 2
\end{aligned}$$

$$\gamma_{pq}^* = a_2^{-1} \{ (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) A_{ijmn}^J R_{m,n} + (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} \} / 2$$

Вычислим свертку $(\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) A_{ijmn}^J R_{m,n}$:

$$\begin{aligned}
&(\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) A_{ijmn}^J R_{m,n} = \\
&= \{ A_2^J (\delta_{pm}^* \delta_{qn}^* + \delta_{pn}^* \delta_{qm}^* - \delta_{pq}^* \delta_{mn}^*) / 2 \} R_{m,n} = \\
&= A_2^J (\delta_{pm}^* \delta_{qn}^* + \delta_{pn}^* \delta_{qm}^* - \delta_{pq}^* \delta_{mn}^*) R_{m,n} = \\
&= 2A_2^J \gamma_{pq}^*
\end{aligned}$$

Вычислим свертку $(\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}$:

$$\begin{aligned}
&(\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} = \\
&= (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k^* \\
&* \{ C_1^J (\delta_{ij} \Delta R_k + 2\delta_{ij} R_{m,mk} + \delta_{jk} \Delta R_i + 2\delta_{jk} R_{m,mi} + \delta_{ik} \Delta R_j + 2\delta_{ik} R_{m,mj}) + \\
&+ 2C_2^J (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj}) \} = \\
&= 2C_2^J \{ (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{k,ij} + (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{j,ki} + (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{i,kj} \}
\end{aligned}$$

Подставляя свертки в исходное уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
\gamma_{pq}^* &= a_2^{-1} \{ 2A_2^J \gamma_{pq}^* + \\
&+ 2C_2^J \{ (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{k,ij} + (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{j,ki} + (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{i,kj} \} \} / 2
\end{aligned}$$

Это соотношение содержит только одну податливость, поэтому его можно разрешить относительно этой податливости:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a_2^{-1}} - A_2^J\right) \gamma_{pq}^* = \\ & = C_2^J [(\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{k,ij} + (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{j,ki} + (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{i,kj}] \\ \\ & \Gamma_{pq}^* = [(\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{k,ij} + (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{j,ki} + (\delta_{pi}^* \delta_{qj}^* + \delta_{pj}^* \delta_{qi}^* - \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k R_{i,kj}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a_2^{-1}} - A_2^J\right) \gamma_{pq}^* = (C_2^J) \Gamma_{pq}^* \\ & \left(\frac{1}{a_2^{-1}} - A_2^J\right)^2 \gamma_{pq}^* \gamma_{pq}^* = (C_2^J)^2 \Gamma_{pq}^* \Gamma_{pq}^* \\ & \frac{1}{a_2^{-1}} = A_2^J + C_2^J \sqrt{\frac{\Gamma_{pq}^* \Gamma_{pq}^*}{\gamma_{mn}^* \gamma_{mn}^*}} \end{aligned}$$

Приложение Д

Свертка тензоров для определения адгезионной податливости a_4^{-1}

$$\begin{aligned}
 & [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{qi}^* n_p + \delta_{pi}^* n_q) n_j] (R_{i,j} + R_{j,i}) / 8 = \\
 & = [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{qi}^* n_p + \delta_{pi}^* n_q) n_j] A_{ijmn}^{-1} a_{mn} / 4 = \\
 & = a_4^{-1} [(\delta_{pn}^* n_q + \delta_{qn}^* n_p) n_m + (\delta_{pm}^* n_q + \delta_{qm}^* n_p) n_n] a_{mn} / 8 = \\
 & = a_4^{-1} [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] a_{ij} / 8 = \\
 & = a_4^{-1} \{ [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] A_{ijmn}^J R_{m,n} + \\
 & + [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} \} / 8
 \end{aligned}$$

Вычислим свертку $[(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] A_{ijmn}^J R_{m,n}$:

$$\begin{aligned}
 & [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] A_{ijmn}^J R_{m,n} = \\
 & = A_4^J [(\delta_{in}^* n_j + \delta_{jn}^* n_i) n_m + (\delta_{jm}^* n_i + \delta_{im}^* n_j) n_n] [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] R_{m,n} / 4 = \\
 & = A_4^J [(\delta_{pn}^* n_q + \delta_{qn}^* n_p) n_m + (\delta_{pm}^* n_q + \delta_{qm}^* n_p) n_n] R_{m,n} / 2
 \end{aligned}$$

Вычислим свертку $[(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] A_{ijmn}^J R_{m,n}$:

$$\begin{aligned}
 & [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl} = \\
 & = [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] n_k \{ C_1^J [\delta_{ij} (\Delta R_k + 2R_{m,mk}) + \delta_{jk} (\Delta R_i + 2R_{m,mi}) + \delta_{ik} (\Delta R_j + 2R_{m,mj})] + \\
 & + 2C_2^J (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj}) \} = \\
 & = 2C_1^J (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) (\Delta R_i + 2R_{m,mi}) + \\
 & + 2C_2^J [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] n_k (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj})
 \end{aligned}$$

Подставляя свертки в исходное уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
 & [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{qi}^* n_p + \delta_{pi}^* n_q) n_j] (R_{i,j} + R_{j,i}) / 8 = \\
 & = a_4^{-1} \{ A_4^J [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{qi}^* n_p + \delta_{pi}^* n_q) n_j] (R_{i,j} + R_{j,i}) / 4 + \\
 & + 2C_1^J (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) (\Delta R_i + 2R_{m,mi}) + \\
 & + 2C_2^J [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] n_k (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj}) \} / 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{a_4^{-1}} - \frac{A_4^J}{4} \right) [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{qi}^* n_p + \delta_{pi}^* n_q) n_j] (R_{i,j} + R_{j,i}) = \\
 & = 2C_1^J \{ (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) (\Delta R_i + 2R_{m,mi}) + \frac{C_2^J}{C_1^J} [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] n_k (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj}) \}
 \end{aligned}$$

Вводя обозначения:

$$\begin{cases} f_{pq}^* = [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{qi}^* n_p + \delta_{pi}^* n_q) n_j] (R_{i,j} + R_{j,i}) \\ F_{pq}^* = \{(\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) (\Delta R_i + 2R_{m,mi}) + \frac{C_2^J}{C_1^J} [(\delta_{pj}^* n_q + \delta_{qj}^* n_p) n_i + (\delta_{pi}^* n_q + \delta_{qi}^* n_p) n_j] n_k (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj})\} \end{cases}$$

Получим:

$$\left(\frac{1}{a_4^{-1}} - \frac{A_4^J}{4}\right) f_{pq}^* = 2C_1^J F_{pq}^*$$

$$\left(\frac{1}{a_4^{-1}} - \frac{A_4^J}{4}\right)^2 f_{pq}^* f_{pq}^* = (2C_1^J)^2 F_{pq}^* F_{pq}^*$$

$$\frac{1}{a_4^{-1}} = \frac{A_4^J}{4} + 2C_1^J \sqrt{\frac{F_{pq}^* F_{pq}^*}{f_{pq}^* f_{pq}^*}}$$

Приложение Е

Свертка тензоров для получения второго линейного неоднородного уравнения адгезионных податливостей

$$\begin{aligned}
& (\delta_{pq}^* n_i n_j + \delta_{ij}^* n_p n_q)(R_{i,j} + R_{j,i}) / 2 = (\delta_{pq}^* n_i n_j + \delta_{ij}^* n_p n_q) A_{ijmn}^{-1} a_{mn} = \\
& = \{2\tilde{a}_1^{-1} n_p n_q \delta_{mn}^* + \tilde{a}_3^{-1} (2n_p n_q n_m n_n + \delta_{pq}^* \delta_{mn}^*) / 2 + \tilde{a}_5^{-1} \delta_{pq}^* n_m n_n\} a_{mn} = \\
& = \{2\tilde{a}_1^{-1} n_p n_q \delta_{ij}^* + \tilde{a}_3^{-1} (2n_p n_q n_i n_j + \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) / 2 + \tilde{a}_5^{-1} \delta_{pq}^* n_i n_j\} a_{ij} = \\
& = \{2\tilde{a}_1^{-1} n_p n_q \delta_{ij}^* + \tilde{a}_3^{-1} (2n_p n_q n_i n_j + \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) / 2 + \tilde{a}_5^{-1} \delta_{pq}^* n_i n_j\} [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}] = \\
& = 2\tilde{a}_1^{-1} n_p n_q \delta_{ij}^* [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}] + \\
& + \tilde{a}_3^{-1} (2n_p n_q n_i n_j + \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}] / 2 + \\
& + \tilde{a}_5^{-1} \delta_{pq}^* n_i n_j [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}]
\end{aligned}$$

Вычислим свертку $[A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}]$:

$$\begin{aligned}
& [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}] = \\
& = A_1^J \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* R_{m,n} + \\
& + A_2^J (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{jm}^* \delta_{in}^* - \delta_{ij}^* \delta_{mn}^*) R_{m,n} / 2 + \\
& + A_3^J (\delta_{ij}^* n_m n_n + \delta_{mn}^* n_i n_j) R_{m,n} / 2 + \\
& + A_4^J [(\delta_{in}^* n_j + \delta_{jn}^* n_i) n_m + (\delta_{jm}^* n_i + \delta_{im}^* n_j) n_n] R_{m,n} / 4 + \\
& + A_5^J n_i n_j n_m n_n R_{m,n} + \\
& + C_1^J [\delta_{ij}^* n_k (\Delta R_k + 2R_{m,mk}) + n_i (\Delta R_j + 2R_{m,mj}) + n_j (\Delta R_i + 2R_{m,mi})] + \\
& + 2C_2^J n_k (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj})
\end{aligned}$$

Вычислим свертку $n_p n_q \delta_{ij}^* [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}]$:

$$\begin{aligned}
& B_{pq}^* = \\
& = n_p n_q \delta_{ij}^* [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}] = \\
& = 2A_1^J n_p n_q \delta_{mn}^* R_{m,n} + A_3^J n_p n_q n_m n_n R_{m,n} + C_1^J 2n_p n_q n_k (\Delta R_k + 2R_{m,mk}) + 2C_2^J n_p n_q \delta_{ij}^* n_k (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj})
\end{aligned}$$

Вычислим свертку $(2n_p n_q n_i n_j + \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}] / 2$:

$$\begin{aligned}
& C_{pq}^* = \\
& = (2n_p n_q n_i n_j + \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}] / 2 = \\
& = \{A_1^J 2\delta_{pq}^* \delta_{mn}^* R_{m,n} + \\
& + A_3^J (\delta_{pq}^* n_m n_n + n_p n_q \delta_{mn}^*) R_{m,n} + \\
& + A_5^J 2n_p n_q n_m n_n R_{m,n} + \\
& + 2C_1^J (3n_p n_q + \delta_{pq}^*) n_k (\Delta R_k + 2R_{m,mk}) + \\
& + 2C_2^J (2n_p n_q n_i n_j + \delta_{pq}^* \delta_{ij}^*) n_k (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj})\} / 2
\end{aligned}$$

Вычислим свертку $\delta_{pq}^* n_i n_j [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}]$:

$$\begin{aligned} D_{pq}^* &= \\ &= \delta_{pq}^* n_i n_j [A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}] = \\ &= A_3^J \delta_{pq}^* \delta_{mn}^* R_{m,n} / 2 + A_5^J \delta_{pq}^* n_m n_n R_{m,n} + \\ &+ C_1^J 3 \delta_{pq}^* n_k (\Delta R_k + 2R_{m,mk}) + C_2^J 6 \delta_{pq}^* n_i n_j n_k R_{k,ij} \end{aligned}$$

Подставляя свертки в исходное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} g_{pq}^* &= (\delta_{pq}^* n_i n_j + \delta_{ij}^* n_p n_q) (R_{i,j} + R_{j,i}) / 2 = \\ &= 2\tilde{a}_1^{-1} B_{pq}^* + \tilde{a}_3^{-1} C_{pq}^* + \tilde{a}_5^{-1} D_{pq}^* \end{aligned}$$

$$g_{pq}^* = 2\tilde{a}_1^{-1} B_{pq}^* + \tilde{a}_3^{-1} C_{pq}^* + \tilde{a}_5^{-1} D_{pq}^*$$

Приложение Ж

Свертка тензоров для получения третьего линейного неоднородного уравнения
адгезионных податливостей

$$\begin{aligned}
 h_{pq}^* &= n_p n_q n_i n_j (R_{i,j} + R_{j,i}) / 2 = \\
 &= n_p n_q n_i n_j A_{ijmn}^{-1} a_{mn} = \\
 &= n_p n_q (\tilde{a}_3^{-1} \delta_{mn}^* / 2 + \tilde{a}_5^{-1} n_m n_n) a_{mn} = \\
 &= n_p n_q (\tilde{a}_3^{-1} \delta_{ij}^* / 2 + \tilde{a}_5^{-1} n_i n_j) a_{ij} = \\
 &= n_p n_q (\tilde{a}_3^{-1} \delta_{ij}^* / 2 + \tilde{a}_5^{-1} n_i n_j) (A_{ijmn}^J R_{m,n} + C_{ijkml}^J n_k R_{m,nl}) = \\
 &= n_p n_q \tilde{a}_3^{-1} \{ A_1^J \delta_{mn}^* R_{m,n} + A_3^J n_m n_n R_{m,n} / 2 + C_1^J n_k (\Delta R_k + 2R_{m,mk}) + C_2^J \delta_{ij}^* n_k (R_{k,ij} + R_{j,ki} + R_{i,kj}) \} + \\
 &+ n_p n_q \tilde{a}_5^{-1} \{ A_3^J \delta_{mn}^* R_{m,n} / 2 + A_5^J n_m n_n R_{m,n} + 3C_1^J n_k (\Delta R_k + 2R_{m,mk}) + 6C_2^J n_i n_j n_k R_{k,ij} \}
 \end{aligned}$$