

Минобрнауки России

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ
ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (МАИ)

На правах рукописи



Терещенко Татьяна Сергеевна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ
КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ МЕТОДОМ
ПОСЛОЙНОГО ЛАЗЕРНОГО ПЛАВЛЕНИЯ**

Специальность

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Рабинский Лев Наумович

Москва – 2025

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ	10
1.1. Принципы аддитивного производства	10
1.2. Оценка влияния параметров печати на качество получаемых изделий	14
1.3. Металлическое аддитивное производство	16
1.4. Известные методы решения задач динамической термоупругости	21
2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАЗЦОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПО ТЕХНОЛОГИИ SLM	33
2.1. Статические испытания	37
2.2. Динамические испытания	42
2.2.1. Испытания на ударный изгиб	42
2.2.2. Механический способ определения динамического модуля упругости	42
2.2.3. Усталостные испытания образцов, полученных методом SLM	48
2.3. Определение коэффициента линейного температурного расширения	51
3. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ НАГРЕВЕ	53
3.1. Динамический нагрев полуплоскости подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности	53
3.2. Расчёт напряжённо-деформированного состояния, индуцированного подвижным источником лазерного излучения	80
4. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ	98
4.1. Определение полей температуры, возникающих при нагреве подвижным источником тепла	101
4.2. Расчет напряженно-деформированного состояния, вследствие действия подвижного источника тепла	107
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	116
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	120

ВВЕДЕНИЕ

Аддитивные технологии (Additive Manufacturing) представляют собой метод создания трёхмерных объектов путём послойного добавления материала. В процессе используются 3D-принтеры, а в качестве исходного материала могут применяться пластик, металл, бетон и, в перспективе, биологические ткани. Аддитивное производство является одним из наиболее быстроразвивающихся направлений современного машиностроения и промышленного дизайна, позволяющим изготавливать изделия сложной геометрии с высокой степенью точности и функциональности.

Развитие этой отрасли требует применения высокотехнологичного оборудования, современных материалов и передовых методов моделирования и управления процессом. Благодаря этому аддитивные технологии находят широкое применение в медицине, строительстве, автомобилестроении, приборостроении, а также в авиационно-космической и ракетной промышленности.

Одним из ключевых факторов, определяющих качество и надёжность изделий, является термонапряжённое и деформированное состояние, возникающее в процессе построения детали. Его исследование требует учёта нестационарного характера нагрева, геометрических особенностей зоны плавления, а также свойств материала, изменяющихся в ходе технологического процесса

Настоящая работа посвящена построению аналитических и численных моделей нестационарного температурного и напряжённого-деформированного состояния в растущем теле при действии подвижного лазерного источника. Основное внимание уделено плоской постановке задачи термоупругости, а также анализу экспериментальных данных, полученных в результате статических и динамических испытаний образцов, изготовленных из нержавеющей стали РН1 методом SLM.

Методы аддитивного производства формируют изделие путём послойного сплавления частиц порошковой композиции — как внутри отдельного слоя, так и между слоями. В отличие от традиционных субтрактивных методов, основанных на удалении лишнего материала из заготовки, аддитивные технологии позволяют «выращивать» деталь с нуля, что открывает широкие возможности для проектирования. Одним из ключевых преимуществ аддитивного производства является возможность создания изделий со сложной внутренней геометрией, включая полости произвольной формы — прямоугольные, спиралевидные, сетчатые. Это особенно важно при разработке, например, охлаждающих каналов для теплообменников, литейной оснастки для изготовления корпусов новых двигателей, а также деталей с легкими и прочными сетчатыми структурами.

Применение теплового источника высокой энергии к относительно холодной поверхности материала приводит к формированию значительных тепловых градиентов. Вследствие неравномерного температурного распределения возникает тепловое расширение, сопровождающееся возникновением исключительных по величине внутренних напряжений. Эти напряжения, как правило, превышают предел текучести материала, вызывая пластические деформации. В результате изделия, изготовленные методом аддитивного производства, часто демонстрируют геометрические искажения, выходящие за пределы допустимых отклонений.

Для обеспечения качества конечного изделия необходимо уметь предсказывать и, с помощью итерационного моделирования, снижать уровни остаточных напряжений и деформаций, возникающих в процессе печати. Одним из эффективных способов уменьшения остаточных напряжений является последующая термическая обработка. Однако в случае чрезмерной деформации деталь может утратить пригодность к использованию, поскольку исправление геометрии становится невозможным. Такие искажения способны привести к появлению трещин и, в конечном итоге, к разрушению материала.

На физико-механические характеристики изделий, полученных методом аддитивного производства, существенное влияние оказывают технологические параметры процесса печати. К ним относятся мощность и длительность лазерного импульса, толщина наносимого слоя, состав инертной среды, стратегия и скорость сканирования, а также другие параметры.

Актуальность темы исследования.

Развитие аддитивных технологий, в частности селективного лазерного плавления (Selective Laser Melting, SLM), открыло новые возможности для создания металлических изделий сложной формы с высокой степенью индивидуализации. Особый интерес представляют нержавеющие мартенситные стали, такие как PH1, сочетающие высокую прочность, коррозионную стойкость и технологичность. Применение таких материалов актуально в авиационно-космической, оборонной и медицинской промышленности.

Однако процесс SLM характеризуется воздействием концентрированного подвижного теплового источника, создающего нестационарные температурные поля и высокие градиенты температуры. Эти градиенты вызывают нестационарные термоупругие напряжения, что, в свою очередь, приводит к остаточным деформациям и снижению надёжности изделий. Особенно важным становится анализ этих процессов в нестационарной постановке, адекватно отражающей реальные условия печати. Кроме того, при эксплуатации изделия подвергаются переменным нагрузкам, и для оценки их прочности необходимо учитывать результаты динамических испытаний, включая усталостное поведение материала, формированного методом SLM.

Таким образом, комплексное исследование нестационарных термоупругих процессов, включающее как математическое моделирование, так и экспериментальную оценку динамических характеристик материала, представляется крайне актуальным.

Цель исследования.

Целью работы является разработка аналитических и численно-экспериментальных методов определения температурных полей, а также возникающих нестационарных термоупругих напряжений и деформаций в плоской постановке при селективном лазерном плавлении нержавеющей стали РН1 с учётом параметров подвижного теплового источника и результатов динамических испытаний.

Объект и предмет исследований.

Объектом исследований настоящей диссертации являются растущие тела – изделия, формируемые методом трёхмерной печати на основе селективного лазерного плавления металлопорошковой композиции из нержавеющей стали РН1.

Предметом и задачей исследования является исследование нестационарного термонапряжённого состояния в плоской постановке, возникающего при движении лазерного источника по поверхности растущего тела, а также механическое поведение материала при динамических нагрузках.

Методы исследования.

В работе применены аналитические методы теории упругости и теплопроводности, теория дифференциальных уравнений и методы математической физики. Для численного анализа используется метод конечных элементов, реализованный в программном пакете COMSOL Multiphysics. Аналитические расчёты выполнены с использованием систем компьютерной алгебры Maple и языка программирования Python. Экспериментальные исследования включают динамические испытания образцов из стали РН1, а также статические испытания на растяжение, изгиб и усталость, определение температурных характеристик. Испытания проведены с использованием испытательной системы Instron и методов микроскопического анализа.

Научная новизна работы определяется следующими полученными результатами:

- получено новое аналитическое решение задачи нестационарного теплового воздействия подвижного источника на полуплоскость в плоской постановке, а также предложен численно-аналитический метод определения нестационарных температурных напряжений и деформаций в упругой полуплоскости при воздействии подвижного теплового источника с учётом граничных условий и параметров движения.;
- разработана и верифицирована конечно-элементная модель плоской термоупругой задачи, отражающая реальные параметры селективного лазерного плавления и физико-механические свойства материала, позволяющая оценивать термонапряженное состояние элементов конструкции;
- впервые проведены динамические испытания образцов из РН1, изготовленных методом SLM, включая усталостные испытания с регистрацией процессов накопления повреждений.

Практическая ценность работы заключается в создании численно-аналитической модели для решения задачи о нестационарном нагреве полуплоскости движущимся высокоинтенсивным источником лазерного излучения с учетом технологических параметров установки 3D печати, при прямолинейном движении источника. Разработана методика проведения численных расчетов для определения технологических температурных напряжений, возникающих в результате воздействия лазерного излучения на материал в процессе трехмерной печати методом селективного лазерного плавления металлопорошковых композиций.

Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертационной работе, подтверждается использованием строго обоснованных моделей термоупругости, применением аналитических и

численных методов, верификацией результатов на основе экспериментальных данных, включая статические и динамические испытания, выполненные с использованием сертифицированного испытательного оборудования.

Апробация работы.

Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на конференциях:

1. «Проблемы безопасности на транспорте». XIII международная научно-практическая конференция, посвященная Году качества. Гомель, 2024.
2. «Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов». Международная научно-практическая конференция, посвященной 70-летию БелИИЖТа - БелГУТа, Гомель, 2023.
3. «От концепции к реализации – создание будущего через науку и практику». Международная научно–практическая конференция. Ижевск, 2025.
4. Актуальные и перспективные научные исследования. Международная научно-практическая конференция. Пенза, 2025.

Публикации.

По теме диссертационной работы опубликовано 7 работ, в том числе 1 научная работа в журнале, индексируемом международной системой цитирования Scopus, 2 работы в изданиях, включенных в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ (категории K1), 4 тезиса докладов на международных конференциях:

1. Т.С. Терещенко. Динамический нагрев полуплоскости подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности. Труды МАИ. 2024. № 139. EDN BXRWVN.
2. Т.С. Терещенко, А.А. Орехов, Л.Н. Рабинский. Исследование статических и динамических физико-механических характеристик стали,

изготовленной методом послойного лазерного спекания. Труды МАИ. 2025. № 140. EDN SHCSDM.

3. L. N. Rabinskiy, A. A. Orekhov, T. S. Tereshchenko. Stress–Strain State of a Half-Space Induced by a Mobile Laser Source. Russian Engineering Research. 2024. Vol. 44, No. 5. P. 717-720. DOI 10.3103/s1068798x2470093x. EDN XWSDBU.

4. А.А. Орехов, Л.Н. Рабинский, Т.С. Терещенко. Определение поля температур в полуплоскости при нестационарном воздействии теплового потока. Проблемы безопасности на транспорте: Материалы XIII международной научно-практической конференции, посвященной Году качества. В 2-х частях, Гомель, 21–22 ноября 2024 года. Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2024. С. 187. EDN ISZVDA.

5. А.А. Орехов, Т.С. Терещенко. Анализ распределения температуры в полупространстве при воздействии объемного источника тепла. Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов: Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 70-летию БелИИЖТа - БелГУТа, Гомель, 16–17 ноября 2023 года. – Гомель: Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта», 2023. – С. 131. – EDN SYETAN.

6. Т.С. Терещенко. Экспериментальные исследования образцов, полученных по технологии послойного лазерного спекания (SLM). От концепции к реализации – создание будущего через науку и практику: сборник статей по итогам Международной научно-практической конференции (Ижевск, 29 марта 2025 г.). – Стерлитамак: АМИ, 2025. – 109-114 С.

7. Т.С. Терещенко. Динамические испытания образцов, полученных по технологии послойного лазерного спекания (SLM). Актуальные и перспективные научные исследования: сборник статей VII Международной научно-практической конференции. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». – 2025, стр. 34-40.

1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

1.1. Принципы аддитивного производства

В настоящее время одним из быстрорастущих направлений современной промышленности являются аддитивные технологии (АТ) — послойное создание объёмных структур или 3D печать. АТ используются для создания реальных моделей, прототипов, образцов, инструментальной оснастки и производства из различных материалов (воск [1,2], полимеры [3], керамика [4], композиционные материалы с металлической матрицей [5,6], металлические сплавы [7,8], функциональные материалы [9,10]).

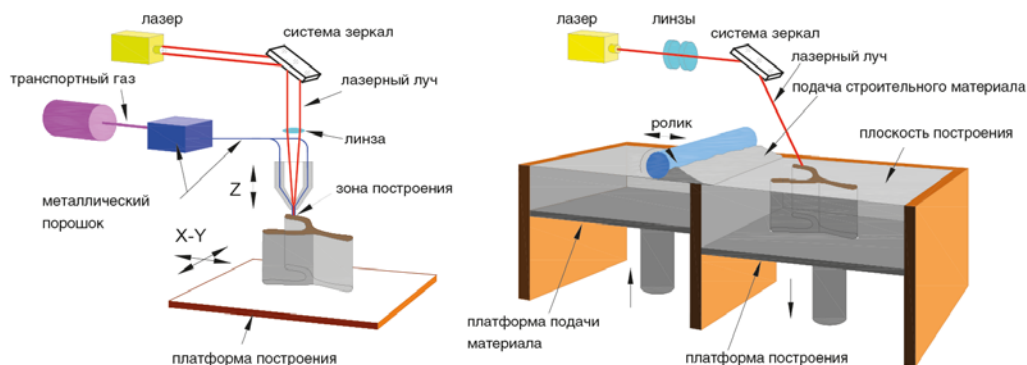


Рисунок 1.1. Схематичное изображение подхода DED (слева) и PBF (справа).

В последние два десятилетия было предложено множество различных терминологий для лазерного аддитивного производства от изобретателей и учреждений/корпораций. Однако принципы этих технологий в основном схожи и были классифицированы и обобщены. Согласно стандарту ASTM F2792-12a, металлическое аддитивное производство включает две основные категории в зависимости от механизма подачи сырья. На рисунке 1.1 изображена иллюстрация двух основных подходов аддитивных технологий. Это расплавление материала в заранее сформированном слое (PBF) и прямой подвод энергии лазером (DED). Подход PBF использует луч лазера для сканирования предварительно распределенного слоя порошка в желаемый профиль, после чего последующие слои наносятся и сканируются повторно, пока не будет создан весь образец. Подход

DED строит слои, используя фокусированный луч высокой энергии, который одновременно плавит и депонирует исходные металлы, которые могут быть в виде проволоки (подаваемой непосредственно) или порошка (вводимого через одно или несколько сопел) на подложку или существующие слои. В данном обзоре акцент сделан на лазерные технологии аддитивного производства, в то время как технологии аддитивного производства, использующие другие источники энергии, такие как электронные лучи, плазма или электрическая дуга, не рассматриваются. Таким образом, чтобы избежать двусмысленности, в данном обзоре используются термины PBF и DED для конкретного обозначения лазерных технологий.

Говоря о методах аддитивного производства выделяют: селективное лазерное спекание - Selective Laser Melting (SLM); послойное лазерное спекание (direct metal laser sintering (DMLS)), имеющее много общего с SLM: обе используют лазер для выборочного плавления (или расплавления) частиц металлического порошка, связывая их вместе и создавая модель слой за слоем; лазерная стереолитография, основанная на послойном отверждении жидкого материала под действием лазера (Laser Stereolithography (SLA)); селективное лазерное спекание под лучами лазера частиц порошкообразного материала до образования физического объекта по заданной CAD-модели (Selective Laser Sintering (SLS)); метод послойного наплавления с использованием пластиковой нити или гранул (Fused Deposition Modeling (FDM)); технология выборочного лазерного плавления Laser Beam Melting (LBM)) и др.

Подход PBF используется в качестве примера для краткого описания принципа технологии SLM. Как выше оговаривалось (рисунок 1.1), в процессе SLM фокусированный лазерный луч программируется таким образом, чтобы выборочно плавить поверхность предварительно нанесенного слоя порошка, при этом область плавления является наименьшей единицей плавления. По завершении плавления и затвердевания на первом слое, платформа для сборки постепенно опускается, следующий слой порошка равномерно распределяется, после чего процесс

повторяется до тех пор, пока не будет создана деталь целиком [11]. Такая технология имеет такие преимущества, как высокая точность размеров, хорошая поверхность и возможность производства изделий сложной топологии. По сравнению с технологией DED, относительно небольшой размер пятна лазерного луча (50–180 мкм) [12], что приводит к меньшей области плавления (рисунок 1.2а), более высокой разрешающей способности и более гладкой поверхности. Кроме того, поддерживающие (опорные) элементы могут быть легко напечатаны для опоры свисающих участков, что критично при производстве изделий сложной формы с внутренними пустотами. Такие опоры также ограничивают деформирование образца во время процесса печати, вызванное термическим напряжением. Однако, PBF всё же имеет недостатки, включающие низкую эффективность процесса и явление «комкования» или дефекты сплавления, если параметры настройки печати не оптимизированы. Как правило, «комкование» связано с высокой пористостью в детали, изготовленных методом PBF, что, вероятно, вызвано сжатием расплавленного пути для снижения поверхностной энергии за счёт поверхностного натяжения [13]. Согласно работам [13,14], проблему пористости можно контролировать мощностью (интенсивностью) лазера, что будет обсуждено в далее на примере аустенитной стали 316L.

В отличие от PBF, технология DED отличается иным способом подачи сырья (порошка или проволоки). Как показано на рисунке 1.1, в процессе DED материал подаются через сопло и одновременно расплавляется лазером на движущейся подложке, защищенной атмосферой (аргоном/азотом/воздухом). Затем лазерная головка поднимается, чтобы снова повторить процесс, пока не будут построены все слои. С 1980-х годов было предложено и разработано несколько технологий DED. Среди этих технологий LENS, разработанная в Sandia National Laboratories, в настоящее время является одной из самых распространенных систем для реализации металлической печати изделий методом, подразумевающим прямой подвод энергии в заранее сформированный слой в научных исследованиях и

промышленном производстве [15]. Основные преимущества технологии DED включают относительно высокую скорость плавления (до 5 кг/ч для стали [16]) и возможность производства деталей с градиентными составами. В отличие от характеристик системы PBF, использующей предварительно распределенный порошок, исходные материалы (порошки или проволоки) в процессе DED плавятся лазером сразу после подачи из сопла, что приводит к более высокой скорости плавления и эффективности процесса [8]. На основе этих факторов технология DED более подходит для изготовления крупных компонентов, ремонта деталей или поверхностного покрытия [17]. Кроме того, с помощью многократных систем подачи порошка можно одновременно наплавлять различные металлические порошки при различных скоростях. Таким образом, композиционные материалы или функционально градиентные материалы можно легко производить с использованием технологии DED. Однако энергетическая отдача большинства устройств DED превышает в сравнении PBF-устройствами [18-20], что приводит к образованию больших областей плавления (см. рисунок 1.2(b,c)) и, следовательно, к более низкой точности размеров, менее аккуратной поверхности и более крупной микроструктуре. Рисунки 1.2(d-f) показывают сформированные области плавления нержавеющей стали 316L с различными параметрами настройки процесса сварки [21]. Сравнение рисунков 1.2(a-c) с (d-f) выявляет схожесть формы области плавления порошка, проплавленного лазером при печати PBF/DED или лазерной сваркой. И хотя в процессе PBF образуется значительно меньший размер области плавления из-за более низкой мощности лазера и меньшего размера лазерного пятна. Более того, изменение формы области плавления схоже между рассмотренными технологиями, что указывает на схожее поведение таких проплавленных участков. Область плавления переходит от точечной формы к более глубокой морфологии «кубка» с увеличением интенсивности лазерной энергии (увеличение мощности лазера и/или уменьшение размера пятна). На сегодняшний день было проведено множество аналитических, численных и

экспериментальных исследований для изучения и предсказания геометрии области плавления с учётом параметров сварки, различных свойств материалов, теплопередачи и потоков жидкости [22,23]. В целом, эти модели применимы к металлическому аддитивному производству из-за их схожего металлургического поведения.

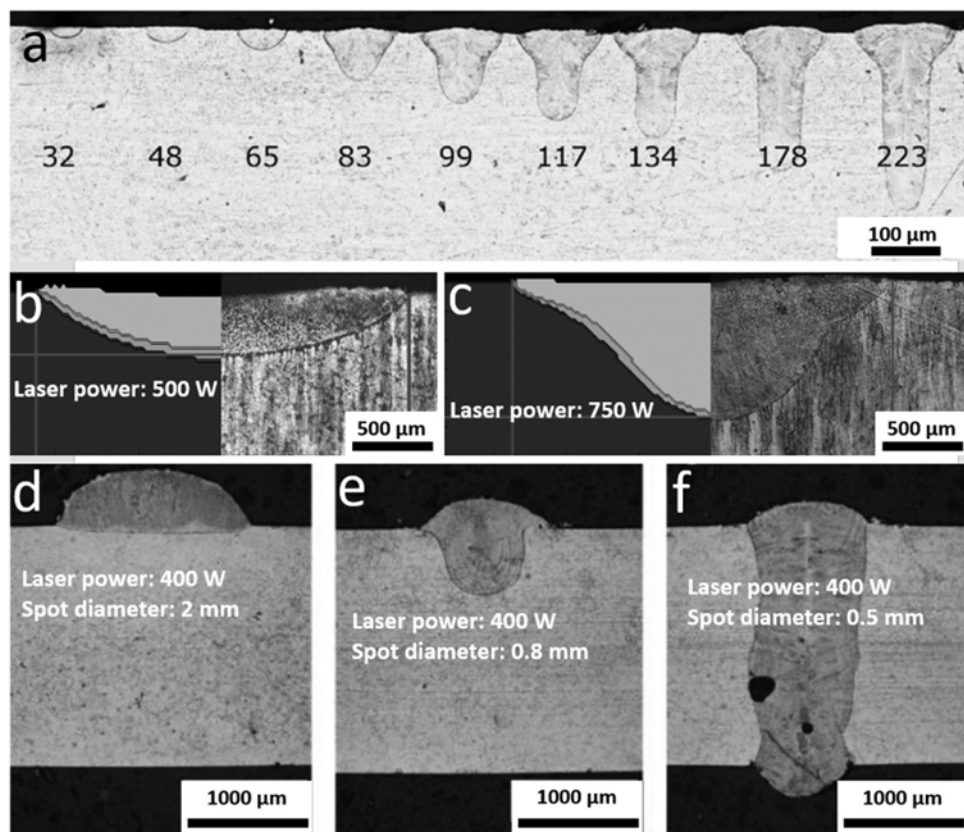


Рисунок 1.2. Примеры морфологий (форм областей проплавления), полученных в результате: а) метода PBF [24] (здесь цифрами обозначена мощность лазера (Вт)); b-c) метода DED [25]; d-f) сварки [21]

1.2. Оценка влияния параметров печати на качество получаемых изделий

По сравнению с традиционными производственными процессами, металлическое аддитивное производство включает большее количество параметров трёхмерной печати, влияющих на микроструктуру и свойства изделий. Наиболее распространённые параметры представлены на рисунке 1.3. Поскольку качество напечатанных деталей значительно зависит от применяемых параметров,

их подбор для каждого отдельного сплава имеет решающее значение для конкретного подхода к аддитивному производству. Это особенно важно, учитывая отсутствие замкнутой системы контроля качества в большинстве коммерчески доступных установок трёхмерной печати. В работах [26–33] исследуется влияние таких параметров, как мощность лазера, скорость сканирования и подача порошка. Влияние комбинации этих трёх факторов на результирующую микроструктуру также было подробно рассмотрено и обсуждено ранее в работах [8,17].

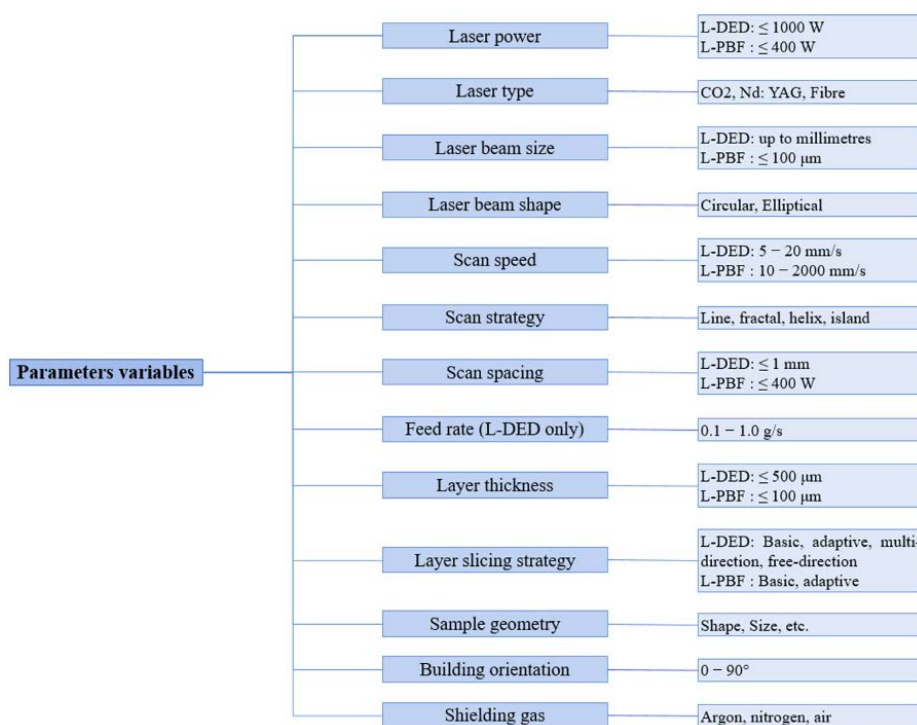


Рисунок 1.3. Сводка основных параметров/переменных обработки в процессе аддитивного производства с диапазонами обычно принимаемых значений согласно [8,34].

В обзорной работе [35] объясняется, как аддитивные технологии применяются для создания деталей из нержавеющей, инструментальной и мартенситностареющей стали. Проводится сравнение типичных процессов металлической печати как PBF и DED, и оптимизации параметров производства. В работе рассматриваются эффекты от варьирования параметров производственного процесса (например, мощность (интенсивность) лазера, толщина слоя,

предварительный нагрев порошкового слоя, скорость подачи порошка и т.д.) на область ванны расплава и такие свойства как пористость, градиент температур, подводимое тепло, скорость охлаждения, остаточные напряжения, микроструктура, механические характеристики. Показана сильная взаимосвязь микроструктуры и механических характеристик стальных изделий, полученных с помощью металлической печати от настраиваемых параметров процесса как по отдельности, так и в комплексе. Например, можно манипулировать затвердеванием и фазовым переходом (phase-state transformation) конкретной стали. Для лазерных аддитивных технологий стоит привлекать аустенитные и ферритные нержавеющие стали с целью получения более плотных и аккуратных геометрически образцов, достижения более высокой прочности на растяжение и энергии разрушения. Однако для большинства мартенситных сталей, особенно инструментальной М2 (молибден-вольфрамовой) и H13 (хромовой) были обнаружены высокие остаточные напряжения из-за быстрого охлаждения в процессе металлической печати, что естественно приводит к высоким концентрациям, и как следствие к хрупкости. Такие эффекты, по-видимому, объясняются большим содержанием углерода в мартенсите. С более подробным анализом взаимосвязи параметров обработки и полученного изделия можно ознакомиться далее в разделе 1.3.

1.3. Металлическое аддитивное производство

Основные знания о металлической печати были всесторонне рассмотрены в работах [7, 8, 12, 17]. Изделия, получаемых аддитивным производством, такими подходами как расплавление порошка в сформированном слое (PBF) [35] или подход, когда металлический порошок подается непосредственно в ванну расплава без необходимости формирования порошкового слоя (DED) [35] (рисунок 1.1). Далее будем рассматривать преимущественно изделия, полученные именно селективным лазерным спеканием [3, 35]. Для полного раскрытия потенциала металлического аддитивного производства настоящий обзор сосредоточен на материалах, обладающих высокой или специализированной эксплуатационной

эффективностью, включая высокую прочность и ударную вязкость, повышенную твёрдость и износостойкость, коррозионную стойкость, а также хорошую свариваемость [36]. Наиболее часто упоминаемые в настоящее время сплавы для металлического аддитивного производства - железные, титановые, никелевые, медные и алюминиевые сплавы [7,8,12,34,36-38].

Особый интерес представляют изделия, получаемые из высококачественных сталей металлической печатью из-за возможности использования в ответственных деталях в различных отраслях промышленности и доступности сырья [7,8,12,15,17,39]. К настоящему времени большинство методов металлической печати обеспечивает практически полную плотность образцов. Однако не стоит пренебрегать такими факторами как высокая скорость охлаждения, большой градиент температуры, повторяющиеся термические циклы, которые могут периодически приводить к неоднородности микроструктуры (мелким зёрнам, более высокой плотности дислокаций и окислам по сравнению с деталями, изготовленными традиционными способами [10]). По сравнению с традиционными производственными процессами, такими как литье и ковка, микроструктуру и конечные свойства сталей, производимых аддитивными технологиями, сложнее контролировать из-за сложных металлургических факторов. Таким образом, дальнейшие исследования и разработки всё ещё продолжаются. Хотя для большинства сталей возможно достижение высокой прочности и ударной вязкости (в некоторых случаях — даже выше, чем у кованных образцов), а также снижение отходов при производстве, основными проблемами по-прежнему остаются низкая пластичность, усталостная прочность, анизотропия и остаточные напряжения. Это связано с дефектами (порами и трещинами) и высокими остаточными напряжениями в образцах. Хрупкое поведение особенно актуально для мартенситных сталей (в том числе мартенситно-нержавеющих) и инструментальных, указывает на их низкую пригодность для металлической печати. Микроструктура стальных изделий, полученных аддитивным

производством, демонстрирует разнообразие форм зерен. Пример такой разницы представлен на рисунке 1.4 для нержавеющей стали 316L. Здесь наблюдаются мелкие равномерные зерна в поперечном сечении (плоскость, перпендикулярная направлению печати), где зерна являются равноосными (рисунок 1.4a). В отличие от поперечной плоскости, крупные зёрна вдоль направления печати часто наблюдаются, как показано на рисунке 1.4b. Такую морфологию зёрен связывают с охлаждением, присущими аддитивным технологиям, которые могут влиять на кристаллизацию [17]. Скорость охлаждения и степень повторного плавления предыдущего слоя в процессе PBF являются основными определяющими факторами, влияющих на размер зёрен. Например, крупные зёрна с высоким содержанием для стали 316L образуются в результате эпитаксиального роста и при использовании высокой интенсивности лазера (рисунок 1.4c) [40]. В общем, не происходит эпитаксиального роста, то сообщается, что зёрна в стали PBF имеют мелкий размер, что является отличительной особенностью по сравнению с их традиционными аналогами [38]. Такой эффект связан с быстрым затвердеванием в ходе PBF. Текстура напечатанного образца, в основном, зависит от размера зоны плавления, направления локального теплового потока и конкурентного роста зёрен, происходящего в процессе производства. На текстуру можно влиять путём изменения направления печати, например, поворотами между различными слоями и/или с помощью так называемой стратегии точечного теплового источника, при которой расплавленная зона формируется в «точки», оставляя пространство между отдельными точками [17].

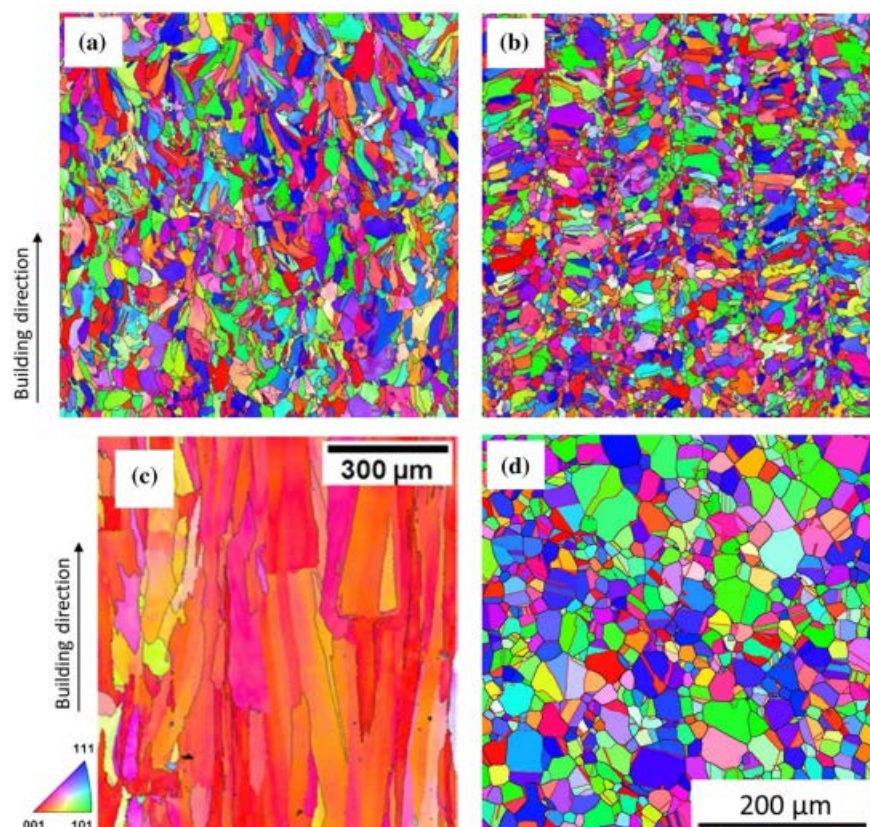


Рисунок 1.4. Типичная зернистая структура стали 316L (PBF), полученная с помощью EBSD-анализа:

- а) IPF карта стали 316L, мощностью лазера - 150 Вт, вдоль направления построения, плоскость $x-z$; б) IPF карта стали 316L, мощностью лазера - 150 Вт, поперёк (перпендикулярно направлению построения), плоскость $x-y$; в) IPF карта стали 316L, мощностью лазера - 1000 Вт, вдоль направления построения [41]; д) масштабная шкала для карт а/б/д [40].

Аддитивное производство добилось значительных успехов за последние годы в производстве деталей с высокой плотностью, однако образование дефектов остается проблемой [41, 43]. Пористость, деламация — самые распространенные виды дефектов, возникающие при аддитивном производстве металлов. В литературе описаны два типа пор: сферические и несферические. Считается, что первые появляются из-за газов, захваченных между частицами порошка, которые высвобождаются во время плавления и затем застывают в процессе твердения. Другое происхождение сферических пор связано с газами, застревающими внутри порошковой заготовки во время подготовки порошковых материалов. Этот

захваченный газ затем переносится в изделие и приводит к образованию пористости, вызванной газом [42]. С другой стороны, несферические поры — также известные как поры неправильной формы, поры с недостаточным слиянием или поры, образующиеся при недостаточной интенсивности лазера, не обеспечивающей полного проплавления порошкового слоя — представляют собой другой тип дефектов. Это приводит к образованию непроплавленных порошковых частиц, застрявших внутри этих пор. В некоторых случаях высокой интенсивности лазера возможно образование пор неправильной формы, известном как формирование капиллярного канала (keyhole formation) [38]. Работы [39–43] посвящены изучению и наблюдений деламинации или расслаивания, которое определяется как отслаивание соседних слоёв внутри напечатанного изделия.

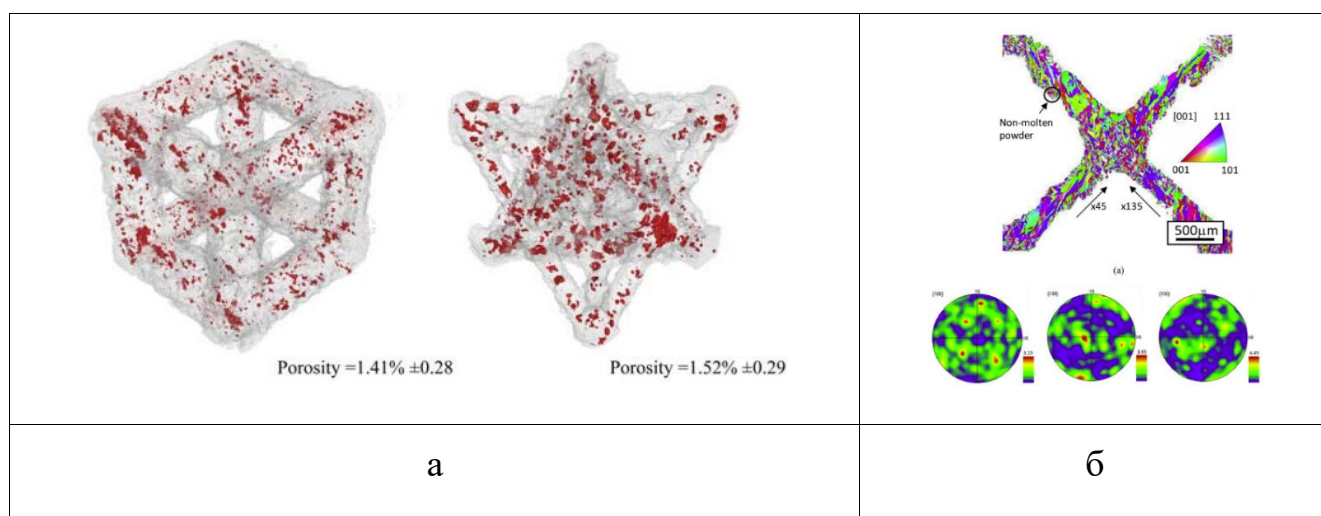


Рисунок 1.5. Визуальный пример пористости напечатанных образцов из стали 316L, полученной с помощью ХСТ-метода (X-ray computed tomography). Объёмное содержание пористости деталей (слева [44], справа [45]) поддерживается на низком уровне.

Микроструктуры стальных напечатанных деталей, не находящиеся в равновесных состояниях, могут возникать из-за быстрых скоростей затвердевания [46]. Например, очень мелкая микроструктура размером 1 мкм или меньше обычно получается в аустенитных нержавеющей сталях, как показано на рисунке 1.5.

Сообщалось, что такие элементы, как Cr и Mo, отделяются, как показывают данные электронной микроскопии (TEM) и (EDS). Включения, как предполагается, влияют на свойства металлических напечатанных изделий [44]. Например, оксидные включения часто наблюдаются в АМ аустенитных нержавеющей сталей и имеют сферическую форму с размерами от нескольких десятков нанометров до нескольких микрон, в основном обогащены O, Mn и Si (рисунок 1.2с) [15,17,40], что сильно выделяется среди более крупными (>1 мкм) и неправильно сформированными оксидными включениями в аустенитных изделиях, полученных традиционными методами [47].

1.4. Известные методы решения задач динамической термоупругости

Исследование нестационарных задач термоупругости в контексте аддитивных технологий, особенно SLM, является актуальным в современной инженерной практике. Представленная информация позволит рассмотреть основные принципы работы аддитивных технологий и их влияние на процессы термоупругости. Также будет рассмотрено важное значение численных и аналитических методов в решении связанных и несвязанных задач термоупругости.

В работах [48-57] приводится важность понимания термоупругого поведения в аддитивном производстве. Эти процессы включают сложные термические и механические взаимодействия, которые могут привести к остаточным напряжениям и деформациям в изготавливаемых деталях [48-52].

Традиционные численные методы, такие как метод конечных элементов (МКЭ), часто применяются для анализа подобных взаимодействий. Однако, как отмечается в [57], МКЭ характеризуется низкой вычислительной эффективностью, особенно при моделировании сложных тепловых и механических полей, возникающих в процессе селективного лазерного плавления (SLM). Такая неэффективность может затруднять анализ и оптимизацию параметров производства в режиме реального времени.

Связанные и несвязанные задачи термоупругости

В работах [48-57] излагаются конкретные направления исследований по определению полей смещения, деформации и напряжений, возникающих в результате движущегося источника тепла. Исследование термомеханических полей при SLM имеют решающее значение для понимания производительности и долговечности компонентов, производимых с помощью этой технологии аддитивного производства. Эти работы сосредоточены на моделировании и анализе температурного и механического поведения во время процесса SLM, что позволило получить важную информацию об остаточных напряжениях [48, 49], усталости [50] и термических деформациях [51, 52].

Хотя акцент, направленный на оценку термоупругих полей в процессе SLM имеет важное значение для улучшения свойств материалов и надёжности компонентов, важно также учитывать проблемы, возникающие из-за сильных температурных градиентов [54-56] и их влияния на целостность деталей. Понимание этой динамики может привести к улучшению стратегии проектирования и производства. Все эти факторы могут привести к остаточным напряжениям [53] и дефектам, таким как трещины, из-за неравномерного теплового расширения и деламинация [79].

Нестационарная термоупругость накладывает ограничения на решение проблем термоупругости, особенно в процессе SLM. Например, вычислительные сложности, нетривиальное поведение материала, неадекватность аналитического решения и прочее. Традиционные численные модели требуют обширных вычислительных ресурсов, что затрудняет их применение в реальном времени в промышленных процессах [57]. Различия в механизмах теплопроводности диэлектриков и металлов усложняют применение обобщенных моделей [58]. Результаты могут быть очень сильно зависимы от выбранных граничных условий, что усложняет применение этих моделей в реальных сценариях [59]. Эти работы

позволили получить детальное представление о тепловом поведении в переходных процессах, что имеет важное значение для оптимизации производственных процессов.

Разработка квази-переходных процессов может значительно сократить время вычислений, обеспечивая при этом надёжные данные об остаточных напряжениях, способствуя более быстрой оптимизации параметров SLM [57]. Анализ динамической термовязкоупругости может привести к генерации более стабильных изделий, подверженных резким скачкам температуры, что повысит их долговечность [59]. Подходы, применяемые в нестационарной термоупругости, могут использоваться при разработке материалов, выдерживающих экстремальные температурные условия, таких как керамика и огнеупорные материалы [60].

Хотя нестационарная термоупругость открывает многообещающие возможности для улучшения процессов SLM, ограничения текущих моделей подчеркивают необходимость дальнейшего анализа для совершенствования методов решения, прогнозу результатов.

Термоупругость включает напряжения и деформации в материалах, вызванных изменениями температуры, что приводит как к связанным, так и несвязанным задачам. Взаимодействие между тепловым и механическими полями может привести к неоднозначному поведению конструкции.

Связанные задачи термоупругости описывают поведение материалов под воздействием теплового потока и термомеханических нагрузок одновременно. Эти задачи учитывают влияние температуры на механические свойства материала и, наоборот, влияние механических напряжений на температуру. Для таких задач характерно тепловое расширение материала, явление переноса тепла и механические нагрузки, действующие на материал, могут вызывать деформации и напряжения, которые могут изменяться в зависимости от температуры. Напротив, несвязанные задачи не предполагают взаимных эффектов теплового и

термомеханического взаимодействия. Это означает, что изменение температуры не вызывает изменений в механических характеристиках материала и наоборот. В таких задачах можно анализировать тепловые и механические процессы по отдельности.

Несвязанные задачи термоупругости могут возникать в изолированных системах, когда материал или структура находится в условиях, где тепловые процессы не влияют на механические, например, в ситуации, когда материал уже достиг стационарного состояния. Или при определённых допущениях, например, при упрощении модели, когда игнорируются эффекты теплового расширения или изменения механических свойств от температуры. Очевидно, что решение несвязанных задач может быть проще, так как каждую задачу можно решать независимо. Однако такое упрощение может не учитывать некоторые важные факторы, влияющие на реальное поведение материалов, особенно в условиях преходящего теплового или механического воздействия.

Термоупругость в задачах при моделировании SLM характеризуется связанной и несвязанной постановкой. Решение таких задач даёт понимание параметров оптимизации и улучшения механических характеристик производимых компонентов.

Работа [61] посвящена исследованию вводимых температурных и напряженных полей для полуплоскости в связке классической и обобщённой термоупругости в единой системе уравнений. В этой работе полуплоскость представляет собой изотропный однородный термоупругий материал. Граница на плоскости прогревается негауссовым лазерным импульсом продолжительностью 2 пс. Получено точное решение используя интегральное преобразование Лапласа. Этот математический метод полезен для решения дифференциальных уравнений, особенно в задачах с переходными/фазовыми процессами. Инверсии преобразований Лапласа были произведены численно. Термоупругость включает

явление теплопереноса, а также термомеханические деформации и напряжений, возникающих вследствие потока тепла, когда происходит взаимодействие полей температуры и деформаций. В [64] рассматривают случаи, когда пренебрегают связью температуры и деформации. В некоторых случаях связь между температурой и деформацией может быть проигнорирована, упрощая анализ и приводя к различным формулировкам задачи. Эта работа представляет решения классической термоупругости в декартовых, цилиндрической и сферической системах координат. А именно, приводятся решения для балки, стержня, пластины, цилиндра, диска, сферы в квазистационарном режиме.

Использование функций Грина, аналитических и численных методов для решения задач термоупругости

Для эффективного решения задач термоупругости можно использовать функцию Грина и различные аналитические методы. Эти методы дают представление о тепловом и механическом отклике системы в процессах аддитивного производства, что позволяет прогнозировать остаточные напряжения и деформации.

Термоупругость расширяет классическую теорию упругости, связывая механические и температурные поля. Классическая термоупругость, основанная на уравнении теплопроводности параболического типа, характеризует «нефизичное» поведение термоупругих волн с разрывами и бесконечными скоростями в зависимости от моды [65]. Нивелировать такие эффекты можно используя релаксирующий член. Здесь сформулирована тензорная функция Грина второго ранга на основе преобразования Фурье термодинамических уравнений. Предлагается решение связанной задачи для точечного источника. Показано, что моды являются дисперсионными и несут потери, что подтверждается анализом. Эти моды имеют сходными эффектами модели связанной термоупругости. В частности, тепловой режим является диффузионным при

слабой теплопроводности и становится волнообразным при сильной теплопроводности.

Работа [66] предлагает математическую модель, направленную на определение адекватных параметров процесса печати SLM, поскольку ранее в этой области часто сталкивались с расхождениями между теоретическими моделями и экспериментальными данными [67, 68]. Известно, что удачная комбинация различных параметров производственного процесса сильно влияет на качество полученного изделия. Применяется метод разложения собственных значений функций (The Eigen-function expansion method) для аналитического решения тепловой модели. В формулировании задачи рассматриваются два типа граничных условий на поверхности контролируемого объёма. В первом случае предполагается, что поверхность полностью изолирована, лазерный луч генерирует слой. Во втором случае к поверхности слоя расплавленной жидкости применяются радиоактивный и конвективный потоки в качестве граничных условий вместе с постоянным тепловым потоком, в следствие лазерного источника. Решение поставленной задачи позволяет провести параметрическое исследование, изучающее эффекты от мощности лазера, размера лазерного пятна и толщины порошкового слоя. Данный подход улучшил точность между экспериментальными данными и полученным решением в предсказании параметров процесса, в сравнение с другими аналитическими методами, до 29%.

Функция Грина используется для решений линейных дифференциальных уравнений связанных и несвязанных задач термоупругости. Обеспечивая системный подход к решению краевых задач, функции Грина облегчают анализ тепловых и механических взаимодействий в различной геометрии. По сути, представляет собой реакцию системы на точечный источник или импульс, что позволяет проанализировать, как возмущения распространяются в среде. Функция Грина широко используются для решения задач электростатики, квантовой механики, волновых процессов, в задачах теплопроводности и термоупругости.

В статье [62] используется функция Грина для решения двумерной задачи термоупругости для тонкого полого круглого диска, что позволяет рассчитывать температуру и тепловое отклонение при определенных условиях, что может быть применено к аналогичным задачам для SLM.

Авторы [63] разработали математическую модель неоднородного термоупругого преднапряженного полупространства, состоящего из упаковки однородных слоёв или функционально-градиентных, жестко скреплённых с однородным основанием. Каждый такой слой нагревается и преднагружается. Линеаризация определяющих соотношений нелинейной механики термоупругой среды осуществляется с использованием принципа суперпозиции малых деформаций на конечные деформации с учётом неоднородности среды. Выведены интегральные соотношения для исследования динамических процессов в неоднородных предварительно напряженных термоупругих средах, содержащие функцию Грина.

Нестационарные задачи термоупругости применительно к аддитивным технологии SLM решаются как численными, так и аналитическими методами [71-87]. Эти подходы направлены на изучение тепловых и механических поведения материалов в процессе быстрого нагрева и охлаждения, свойственных процессам SLM. Решение задач термоупругости требует применения методов численного анализа, таких как метод конечных элементов, чтобы учесть сложные взаимодействия между теплом и механикой. Эти задачи важны в различных инженерных приложениях, таких как разработка материалов, конструкции зданий и машин, где температуры и механические нагрузки могут значительно варьироваться.

Работы подчеркивают [48-57] подчеркивают растущую актуальность аддитивных технологий для различных приложений. Как правило, такие процессы

связаны со сложными тепловым и механическим взаимодействием, которые могут приводить к остаточным напряжениям и деформациям в напечатанных деталях.

Численные и аналитические исследования вышли на передний план, так как экспериментальное изучение процессов селективного лазерного плавления (SLM) весьма затратное. Авторами [69] был предложен численный подход к определению распределения температурного поля и фазовых переходов в процессе селективного лазерного плавления (SLM). Процесс был проанализирован с учётом четырёх фаз: порошка, жидкого расплава, плотной жидкости и пара. Для моделирования использовалось уравнение теплопередачи с учетом теплопроводности, решённое методом конечных разностей. Полученные результаты показали, что фазовые переходы и температурное распределение были оценены корректно.

Также для предсказания поведения таких моделей и анализа этих взаимодействий можно прибегнуть к методу конечных элементов (МКЭ). Однако ряд работ [57, 70] подчеркивает вычислительную неэффективность метода конечных элементов, особенно при работе с тонкими тепловыми и механическими полями, возникающими в процессе SLM. Эта неэффективность может затруднить анализ в реальном времени и оптимизацию производственных параметров. Чтобы преодолеть эти проблемы, можно развивать аналитические подходы, обеспечивающие более эффективные способы оценки полей перемещения, деформации и напряжения, возникающих от движущегося источника тепла. Что будет полезным для предсказания поведения материалов под термическими нагрузками, типичными для процессов SLM. В свою очередь, численные методы позволяют анализировать более сложные геометрические формы и условия нагружения, аналитические методы предлагают вычислительную эффективность и могут быстро прогнозировать тепловые и механические реакции. Комбинация этих методов имеет решающее значение для оптимизации процессов SLM и снижения числа дефектов [48-56, 79]. Анализ литературы, релевантной к численным методам, показал, использование авторами [86] метода конечных разностей по временной

области (Finite-Difference Time-Domain). Этот метод моделирует распространение тепловых и упругих волн, что позволяет анализировать дефекты в материалах в динамических условиях. Другая работа [57] посвящена моделированию квази-переходных процессов (Quasi-Transient Modeling): двухэтапная модель сочетает в себе переходный термический анализ с термомеханическим анализом, что значительно снижает вычислительные затраты, сохраняя при этом точность прогнозирования распределения напряжений. Работа [71] посвящена использованию метода расширенного аналитического решения в сочетании с функцией Грина для упругих полей (Enriched Analytical Solution Method), позволяющего эффективно определять зависящее от времени поле термомеханических напряжений, сначала решая задачу теплопередачи, которая затем используется для анализа механики твёрдого тела. Результаты валидируются численным моделированием МКЭ. Полуаналитический подход [72], где используются линейные источники тепла в полубесконечной среде, учитывающие большие градиенты температуры, что облегчает расчёт термических деформаций и остаточных напряжений в напечатанных деталях SLM. Решение дополнено численной схемой граничных условий, для эффективного решения динамических термоупругих задач в процессе производства изделий способом SLM.

В статье [87] предлагается применения нового численного метода, так называемого метода конечного добавления элементов материала (Finite Addition of Matter Elements Method - FAMEM) и многомасштабный метод (Multiscale Arlequin Framework), для решения переходных тепловых задач в SLM. FAMEM предназначен для гибкого моделирования последовательного добавления материала, что имеет решающее значение для точного моделирования процесса печати. FAMEM позволяет генерировать конечную последовательность тепловых задач, которые можно адаптировать к изменяющейся геометрии печатаемой детали. Известно, что во время аддитивного производства важно учитывать локальные температурные градиенты и нелинейные фазовых изменения. Эти

проблемы возникают из-за сложного взаимодействия между различными физическими явлениями, происходящими на разных масштабных уровнях в ходе процесса печати. Для решения этих проблем авторы применяют многомасштабный метод (Multiscale Arlequin Framework), которая позволяет более детально описывать тепловые задачи за счёт использования нескольких масштабных уровней.

Функция Грина способствует лучшему пониманию и решению термоупругих задач, хотя иногда возможны трудности в интерпретации и применении, особенно в нестандартных геометриях или условиях нагрузки. Таким образом, функция Грина и аналитические методы предлагают значительные преимущества в прогнозировании термоупругого поведения, численные методы, такие как метод конечных элементов, остаются предпочтительными для сложных геометрий и условий нагрузки, являющимися дополнением к аналитическим методам [71].

Исследование математической модели в виде связанной термоупругости имеет первостепенное значение для анализа остаточных напряжений, поскольку существует сложное взаимодействие между тепловым и механическим поведением в процессе SLM. Работы [80] по исследованию связанных задач термоупругости, состоящие из анализа теплопередачи и последующего анализа напряжений применительно к технологии SLM. Поскольку на аддитивное производство влияет множество факторов, экспериментальные измерения остаточных напряжений и деформаций являются затратными по времени и дорогими. Термоупругая модель может служить руководством для изучения различных мер по минимизации остаточных напряжений, таких как оптимизация параметров печати [81], предварительный нагрев и последующая термообработка [82], а также выбор оптимальной стратегии сканирования [83]. Для их оценки могут использоваться численные термомеханические модели, но качество расчетов критически зависит от точного временного поля температуры, которое влияет как на остаточные напряжения, так и на деформации. Из-за неоднозначного взаимодействия на

разных масштабных уровнях предсказать механическое поведение SLM изделий является затруднительной задачей, поскольку традиционные методы моделирования требуют чрезвычайно долгого времени вычислений. В последние годы исследователи прилагали усилия для совершенствования термоупругой модели.

Авторы исследования [78] предложили практическую методику конечно-элементного моделирования нескольких масштабных уровней для прогноза напряженно-деформационного состояния напечатанных деталей путём интеграции микромасштабной модели лазерного сканирования, мезомасштабной модели послойного штрихования и самой модели на макроуровне. На микроуровне применялся концепт эквивалентного источника тепла, учитывающего теплопроводность, конвекцию и радиацию. Локальное поле остаточных напряжений прогнозируется на мезо уровне с использованием такого источника. Затем советующее НДС импортируется в макромасштабную модель напечатанной SLM детали для прогноза деформаций и остаточных напряжений. Полученные деформации с использованием такой методики были корректно валидированы с экспериментальными данными для четырех различных стратегий сканирования.

Авторы [79] предлагают рабочую трёхмерную модель, решающую связанную задачу теплопроводности и механики жидкости и газа в переходных процессах для технологии SLM совместно с термоупругой задачей для достоверного вычисления температурных полей, остаточных напряжений и деформаций. Эти характеристики валидируются с независимыми экспериментальными данными. После валидации модель используется для количественного изучения влияния различных параметров аддитивного производства, таких как мощность лазера (подводимое тепло) и толщина слоя, на остаточные напряжения и деформации. Показано, что остаточные напряжения можно значительно минимизировать, уменьшая толщину слоя во время аддитивного производства.

Несмотря на значительные достижения в развитии и решении термоупругой задачи в связанной или несвязанной постановке, мало работ, учитывающих фазовую модель в твёрдом состоянии (solid-state phase transformation - SSPT) при анализе напряжений в процессе SLM. SSPT, которая часто связана с изменением характеристик материала, деформационными изменениями и индуцированной трансформацией пластических свойств, эти факторы являются решающими для возникновения остаточных напряжений для некоторых углеродных сталей и титановых сплавов [84]. Первые работы по анализу напряжений с учётом SSPT были проведены для процесса лазерной сварки [85] и процесса прямого лазерного наплавления (DLD) [84]. Однако, как метод аддитивного производства с использованием порошкового слоя, SLM включает более сложные физико-химические явления, такие как взаимодействие лазера и порошка, переход порошка в жидкое и твёрдое состояние и явления усадки. Работа [77] предлагает конечно-элементную модель для решения, связанных задач термоупругости и, так называемую авторами, металлургическую (то есть учитывающую фазовые переходы и состояния вещества), для дальнейшей оценки теплового и механического поведения. Исследованы эффекты повторных SSPT в процессе SLM. Эта многократность обусловлена печатью нескольких треков и слоёв создаваемой детали, то есть многократному возникновению явления SSPT из-за нагрева от соседних треков или слоёв, что увеличивает сложность и значимость фазовых превращений. Кроме того, как известно SLM демонстрирует высокий температурный градиент и быстрые скорости затвердевания и охлаждения, которые имеют критическое значение для микроструктуры. Результаты моделирования показывают, что учёт SSPT приводит к снижению растягивающих остаточных напряжений и увеличению сжимающих. Для однослойной напечатанной детали напряжение в направлении сканирования (первая компонента тензора) больше, чем две другие компоненты напряжений. В четырёхслойной

напечатанной детали максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу расположены в нижней области.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАЗЦОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПО ТЕХНОЛОГИИ SLM

Для исследования физико-механических характеристик образцов, изготовленных методом послойного лазерного спекания (SLS), применялась установка EOS M270 с мелкодисперсным порошком сплава PH1. Процесс изготовления проводили при температуре платформы построения 100°C, мощности лазера 195 Вт и скорости сканирования 1600 мм/с. Диаметр лазерного пятна составлял 100 мкм, толщина слоя детали – 20 мкм, а толщина слоя поддержек – 30 мкм. Начальный угол построения задавали равным 0° с шагом поворота между слоями 57°. Расстояние между соседними векторами сканирования фиксировали на уровне 300 мкм, а ширину полосы среза – 10 мм. Конфигурацию поддерживающих структур, используемых для стабилизации процесса, можно увидеть на рисунке 2.1а.

В рамках работы были изготовлены образцы для проведения испытаний на одноосное растяжение, сжатие, статический и ударный изгиб, а также для оценки динамических характеристик материала. Геометрия полученных образцов соответствовала стандартным требованиям для механических тестов, их внешний вид представлен на рисунке 2.1б.

Структура поддержки изображена на рисунке 2.1в.

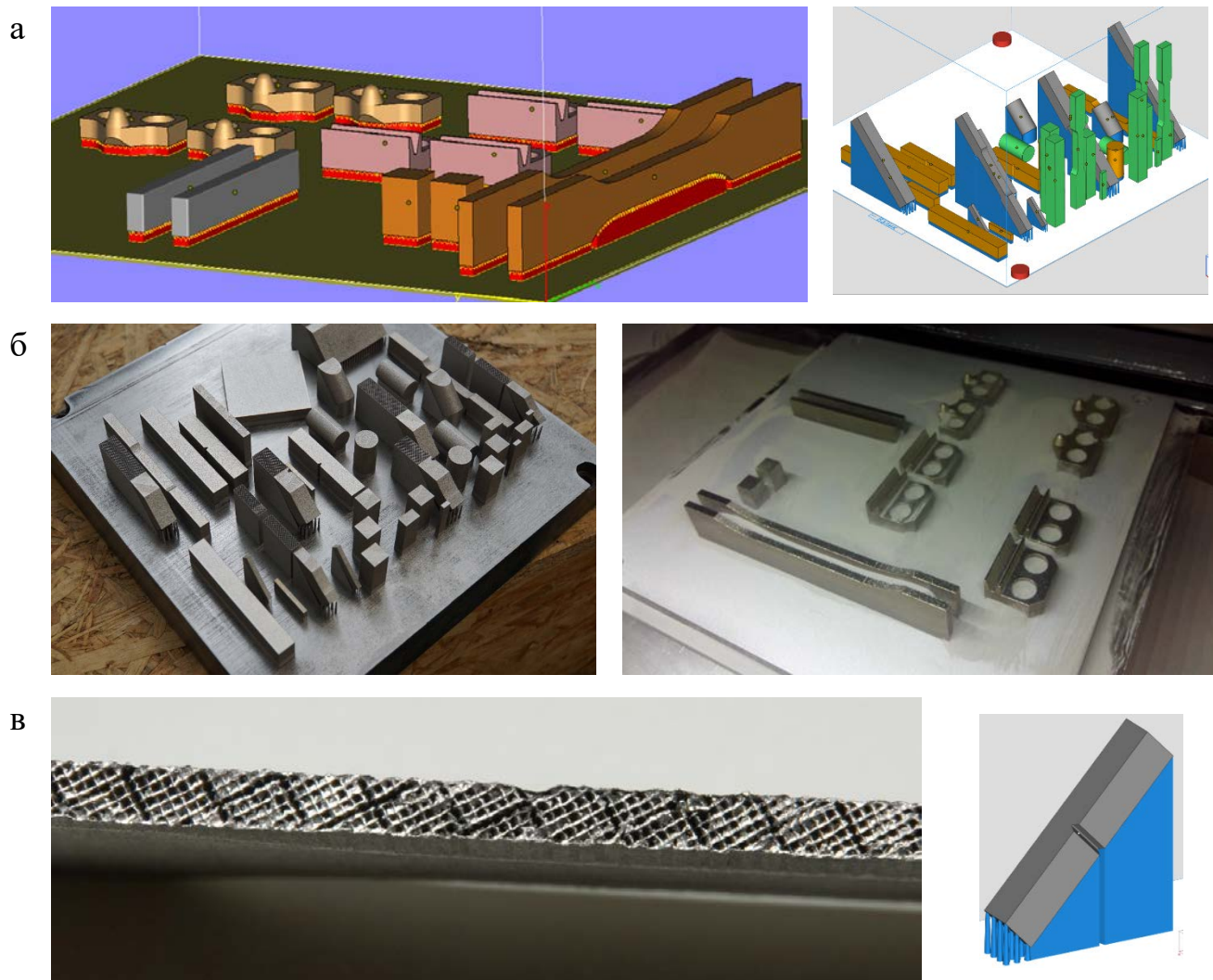


Рисунок 2.1. Исследуемые образцы

(а – варианты компоновки камеры, б – полученные образцы, в – структура поддержки)

Для каждой партии, каждого вида испытаний испытывались 2 однотипных образца. Испытания проводились в соответствии с ГОСТ Р ИСО/ASTM 52950 — 2022.

Для определения микроструктуры и химического состава образцов была использована растровая электронная микроскопия (РЭМ) на микроскопе ZEISS EVO 40, оснащённом микроаналитической приставкой INCA от компании Oxford Instruments (рисунок 2.2а).

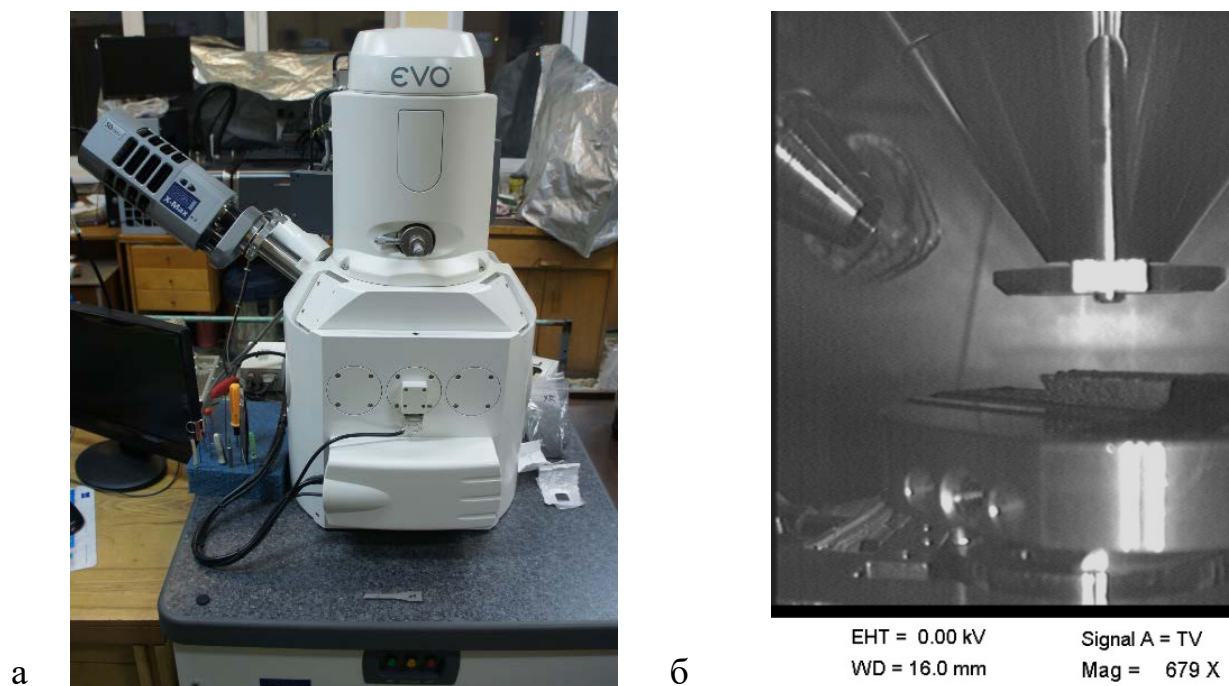


Рисунок 2.2. Исследование полученного образца (а – растровый электронный микроскоп Karl Zeiss 40, б – исследуемый образец)

Образец, размещенный на предметном столике электронного микроскопа представлен на рисунке 2.2б.

Данный метод позволяет получить подробные изображения поверхности образцов с высоким разрешением, а также проводить элементный анализ, что позволяет исследовать распределение химических элементов и их концентрацию в микроскопических областях.

Состав сплава был установлен на основе данных рентгеновского микроанализа небольших участков поверхности. Исходным материалом для исследования послужил порошкообразный сплав с составом Fe – 70, Cr – 17, Ni – 12, Ti – 0,6, Si – 0,5 масс.%, рисунок 2.3 и таблица 2.1.

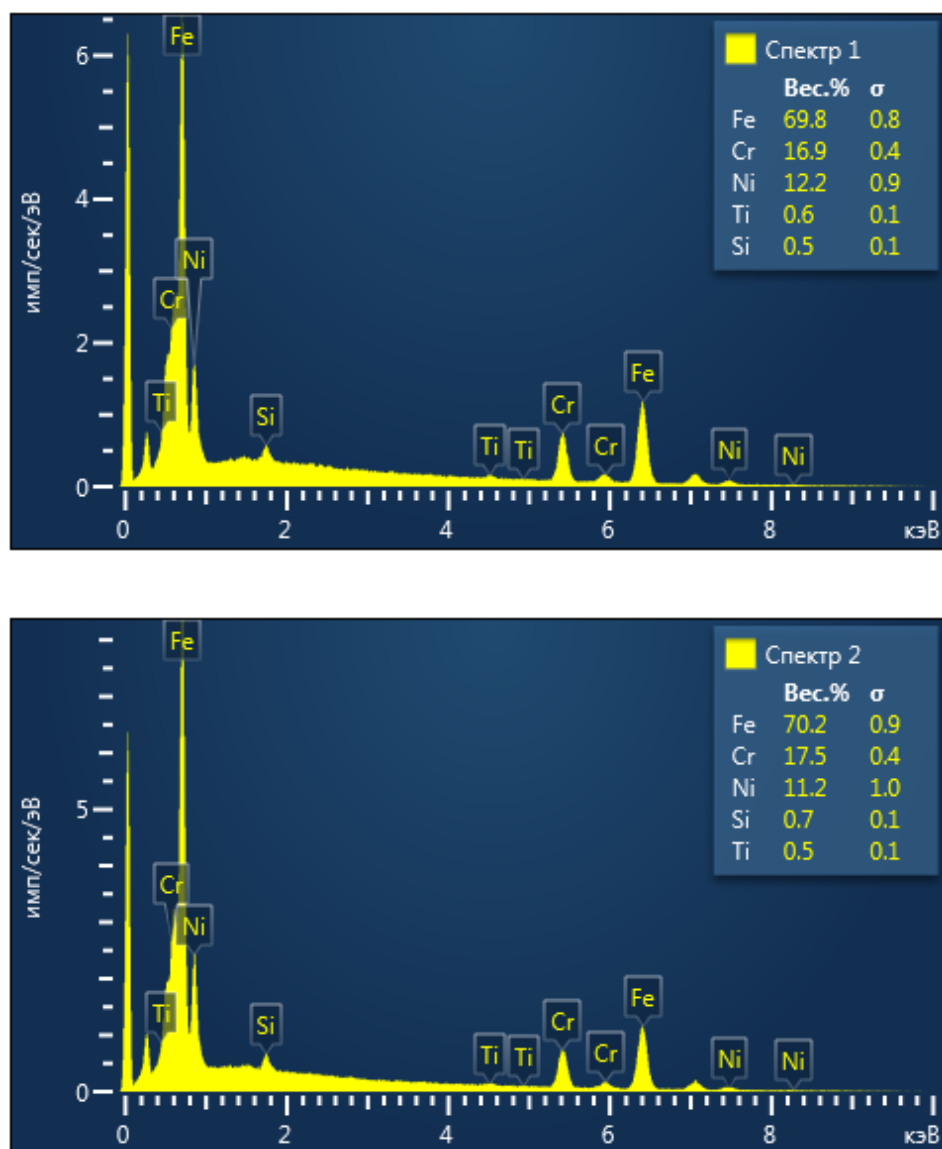


Рисунок 2.3. Данные микрорентгеноспектрального анализа поверхности образца

Таблица 2.1. Данные микрорентгеноспектрального анализа поверхности образца

	Cr	Ni	Ti	Si
Исследуемый образец	17	12	0.6	0.5
Стандартный состав сплава 07X18H12M2	16-18	10-14	0.5	0.75

2.1. Статические испытания

Статические механические испытания выполнялись на универсальной испытательной системе Instron 5965, оснащенной специализированным ПО Bluehill для управления процессами тестирования и сбора данных. Скорость нагружения для всех типов испытаний поддерживалась постоянной на уровне 1 мм/мин. При проведении испытаний на растяжение деформация фиксировалась бесконтактным оптическим видеоэкстензометром, обеспечивающим высокоточные измерения без механического воздействия на образец. Для испытаний на изгиб применялся контактный экстензометр, адаптированный к геометрии образца. Измерительная база обоих типов экстензометров составляла 50 мм. Все эксперименты осуществлялись в нормальных лабораторных условиях (температура $23\pm 2^{\circ}\text{C}$, влажность $50\pm 5\%$) в соответствии с требованиями стандартов механических испытаний.

Конфигурация закрепления образцов в испытательной оснастке визуализирована на рисунке 2.4

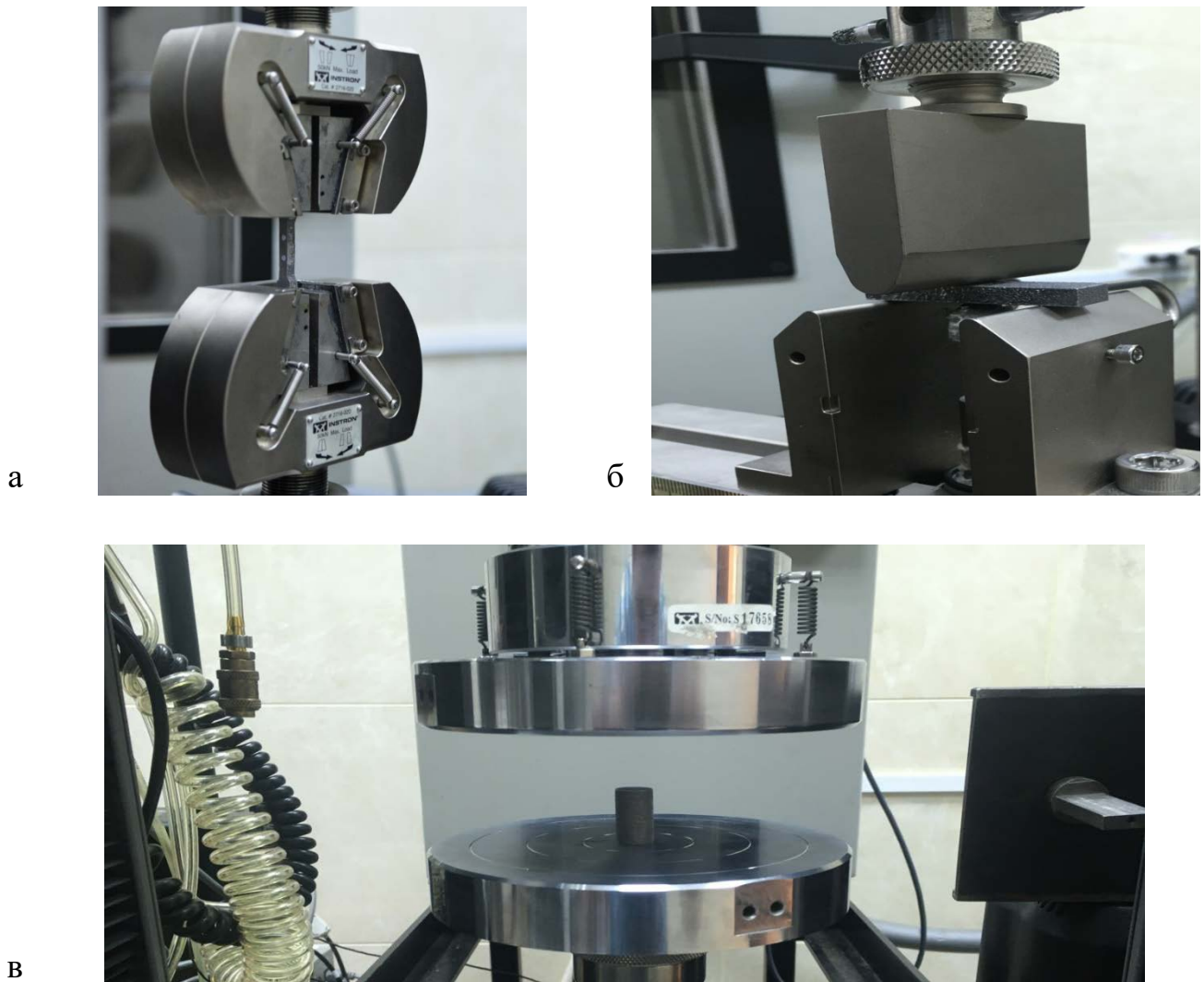


Рисунок 2.4. Исследуемые образцы в испытательной машине

(а – растяжение, б – изгиб статический, в – сжатие)

Диаграммы напряжение-деформация, полученные в результате механических испытаний, представлены на рисунке 2.5.

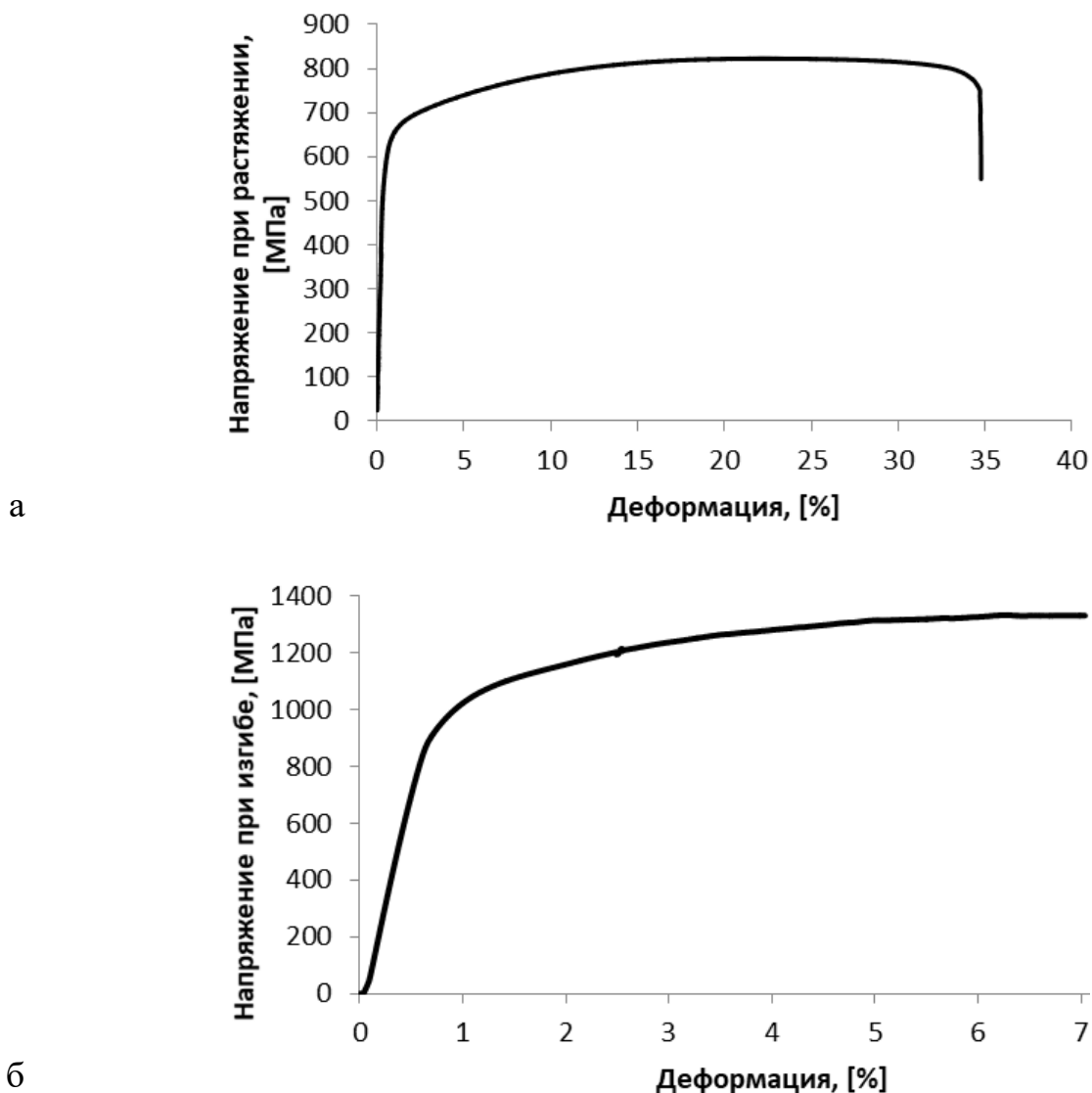


Рисунок 2.5. Результаты испытаний металлических образцов.

(а – испытания на растяжение, б – испытания на сжатие).

Результаты исследования экспериментальных образцов показали, что синтезированные материалы имеют сниженные показатели жесткости по сравнению с обычной конструкционной сталью. Модуль Юнга составил 176 ГПа, что ниже стандартного значения в 193 ГПа. Модуль упругости при изгибе составил 196 ГПа. Предел текучести при растяжении достиг 530 МПа, предел прочности — 750 МПа, а предельные деформации составили 22%. Предел текучести при изгибе

составил 900 МПа. Характеристики, полученные в процессе испытаний представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Свойства образца.

Характеристика	Единица	Полученное значение
Модуль упругости, E	ГПа	176
Модуль упругости при изгибе, $E_{изг}$	ГПа	196
Предел прочности на растяжение	МПа	750
Предел текучести	МПа	530
Предельные деформации	%	22
Предел текучести при изгибе	МПа	900

Видно, что предел прочности и предел текучести синтезированных образцов превосходит стандартные значения, а предельные деформации, приблизительно, в два раза ниже стандартных. Таким образом, установлен эффект повышения прочностных свойств стали, при одновременном снижении пластичности. Также пониженными оказываются характеристики жесткости.

В результате разрушения образцов был зафиксирован косой излом под углом 45 градусов. Внешний вид образца указывает на преобладание хрупкого типа разрушения при его деформации. Это подтверждается образованием косого среза в месте разрушения, отсутствием заметной пластической деформации в этой области, а также наличием макроскопических трещин с одной из сторон лопатки.

Сферические частицы, обнаруженные на дне трещины, в поверхностном слое проявляются как плоские сплюснутые диски. Изображения, полученные с торцевой поверхности, то есть в области разрушения лопатки, представлены на рисунке 2.6. Место разрушения четко демонстрирует хрупко-вязкий характер

разрушения с явным преобладанием хрупкого разрушения. При этом хрупкое разрушение происходит по плоскостям чешуек, в то время как вязкое разрушение наблюдается непосредственно в теле материала.

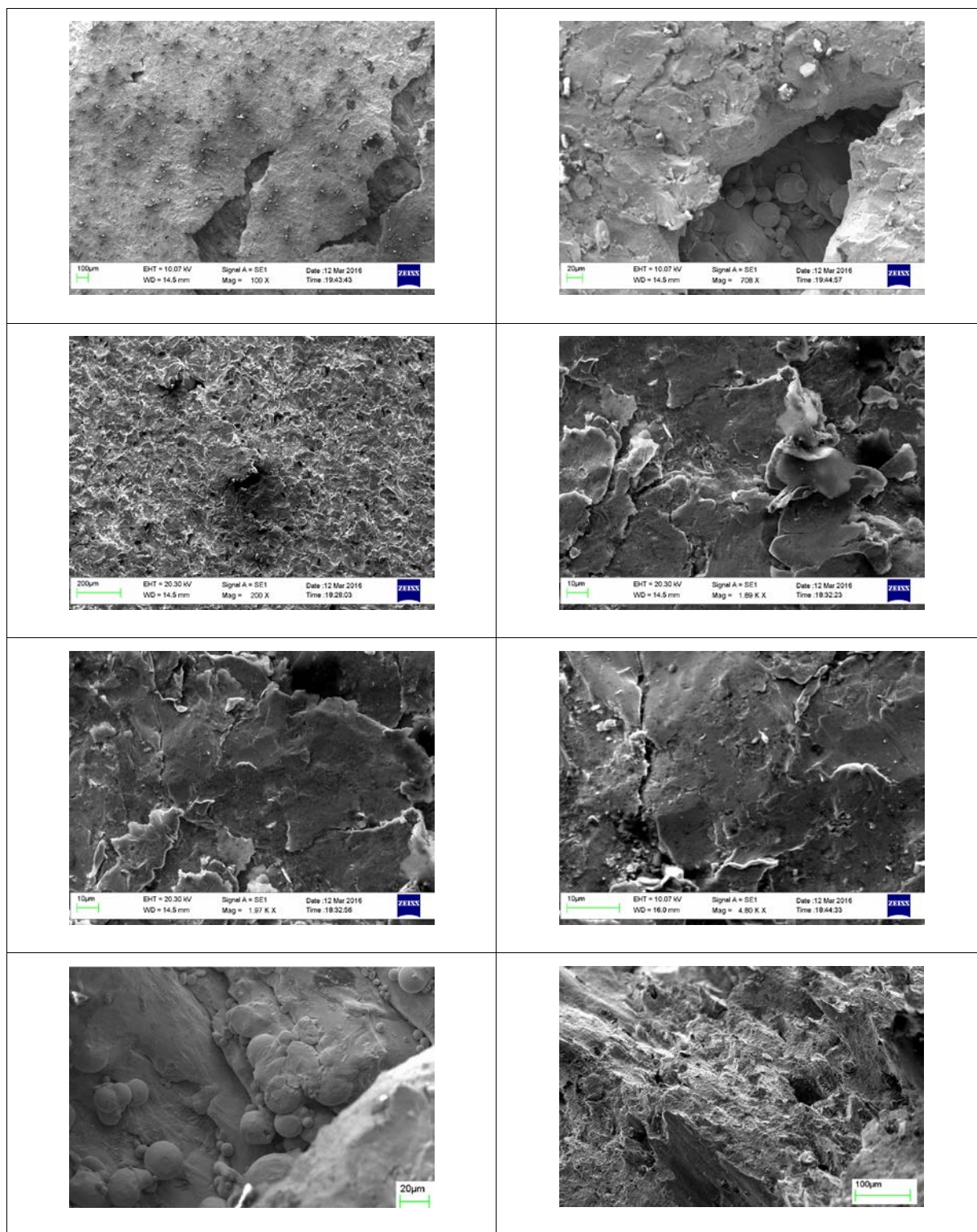


Рисунок 2.6. Структуры образца при различном увеличении

2.2. Динамические испытания

2.2.1. Испытания на ударный изгиб

Испытания на ударный изгиб проводился на маятниковом копре ТЕМЕ ХJJ-50 на рисунке 2.7. Скорость маятника в момент удара составляла 3,8 м/с. Расстояние между осью маятника и центром образца 380 мм. Момент маятника 25.777 Нм. Испытания проводились согласно ГОСТ 9454. Расстояние между опорами составляло 40 мм.



Рисунок 2.7. Маятниковый копер

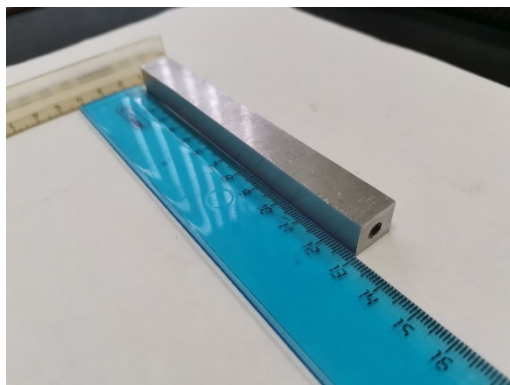
По результатам испытаний средний коэффициент ударной вязкости для партии образцов составил 31 Дж/см².

2.2.2. Механический способ определения динамического модуля упругости

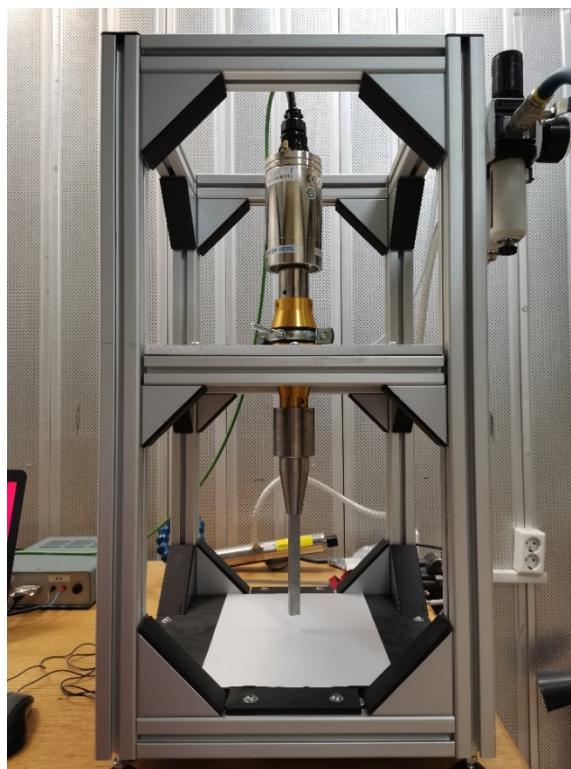
Альтернативным методом определения динамического модуля упругости является непосредственное нагружение прямого цилиндра на пьезоэлектрической

усталостной машине. Следует отметить, что геометрия поперечного сечения при исследовании продольных колебаний не имеет принципиального значения. В решение волнового уравнения при одномерном рассмотрении не входит ни радиус поперечного сечения, ни иные геометрические особенности. Поэтому в настоящем исследовании был выбран прямой параллелепипед с прямоугольные поперечным сечением, рисунок 2.8. Длина параллелепипеда рассчитывается на основе стандартных механических характеристик материала таким образом, чтобы попасть в нижнюю часть рабочего диапазона испытательной машины. Согласно спецификации, пьезоэлектрическая установка способна работать в диапазоне от 19 500 до 20 500 Гц.

Таким образом, необходимо подобрать резонансную длину прямого образца таким образом, чтобы выйти на частоту 19 600 – 19 700 Гц. Это необходимо для того, что, как правило, динамические модули металлических материалов оказываются незначительно выше тех, что определены при квазистатическом испытании. Если окажется, что динамический модуль будет выше ожидаемого, то выбранные параметры образца, гарантированного позволят остаться в рабочем диапазоне установки. В случае, если динамический модуль будет ниже ожидаемого значения, то остается возможность укоротить образец, тем самым повысить его собственную частоту. Для рассматриваемого материала был выбран механический способ определения динамических характеристик материала.



а



б

Рисунок 2.8. Образец для определения динамического модуля Юнга в металлических материалах

Для исследования образец (рисунок 2.8а) механически прикрепляется к волноводу (рисунок 2.8б), аналогично тому, как крепятся образцы для испытания. Поскольку испытание по определению динамических характеристик является кратковременным, оно может проводиться без дополнительного охлаждения. Определение собственной частоты было проведено с использованием встроенной функции нагружающей установки поиска, основанной на определении условий нагружения с минимальным потреблением мощности и радикальной сменой фазы, рисунок 2.9. Для рассматриваемого материала была установлена собственная частота продольных колебаний равная 20 273 Гц.

В качестве исходных значений для моделирования образца были выбраны стандартные значения: модуль Юнга 2000 ГПа, плотность 7850 кг/м³, коэффициент

Пуассона 0.3. Для продольных колебаний на основе аналитического решения получаем следующую резонансную длину l :

$$l = \frac{\sqrt{\frac{E_D}{\rho}}}{2f}$$

где f – частота продольных волн (в нашем случае 20 кГц), E_D – динамический модуль Юнга, ρ – плотность материала. Вычисления для сплава РН1 дают следующее значение резонансной длины $l = 12,6$ см для частоты 20 кГц, $l = 13.05$ см для частоты 19.5 кГц. Таким образом, для определения динамических характеристик материала удобно выбрать образец длиной l с возможностью подбора резонансной длины.

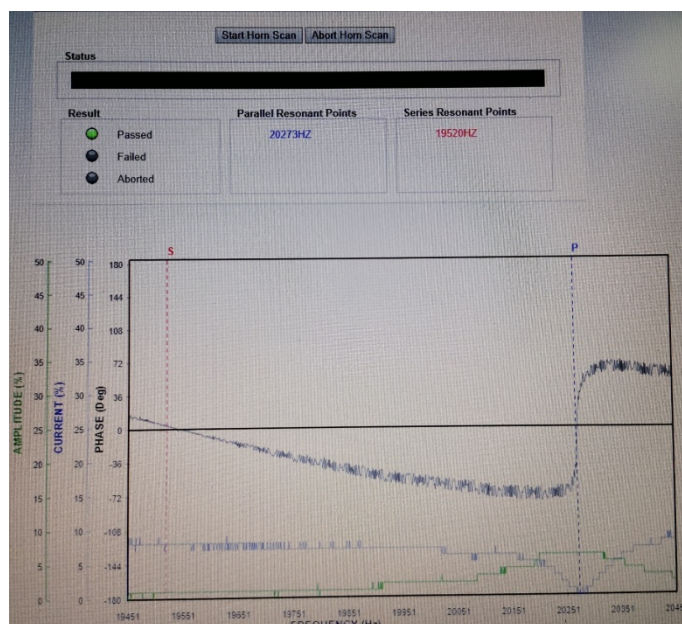
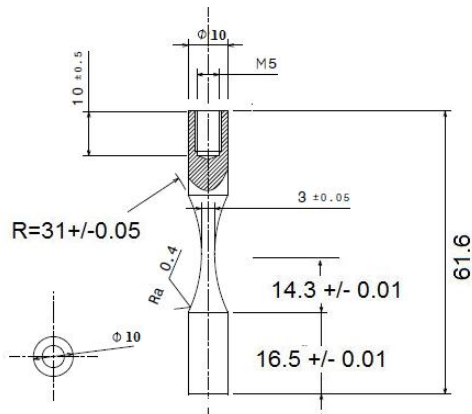


Рисунок 2.9. Результат определения собственной частоты образца в виде параллелепипеда встроенными системами СВМУ установки

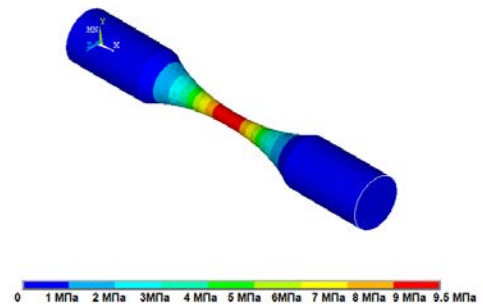
В результате проведения исследования спектра собственных частот для образца из стального сплава была получена резонансная частота равная 20 273 Гц. Подобное отличие связано с тем, что при изготовлении образца чистовая длина была равна 12,5 см, а также несколько более высоким динамическим модулем

Юнга по сравнению с выбранным в качестве среднего значения. В результате расчетов оказывается, что динамический модуль Юнга для исследуемого сплава равен $E_D = 197$ ГПа. Для выбранного стального сплава, как и для большинства конструкционных материалов, наблюдается закономерность увеличения упругого модуля при повышении частоты нагружения.

На основании полученных результатов динамических характеристик стального сплава была разработана геометрия образцов для высокочастотного испытания. Геометрия образцов разработана согласно принципам гигациклового усталостного испытания. Цилиндрическая и рабочая части образцов соответствует стандартным параметрам: диаметр цилиндрической части 10 мм, минимальный диаметр в рабочей части 3 мм, радиус выработки рабочей части 31 мм, рисунок 2.10. Резонансная длина образца определяется его геометрическими и упругими характеристиками, такими как динамический модуль упругости E_D , радиусами цилиндрической части и радиусом области минимального сечения, плотностью и требуемой рабочей частотой, в данном случае равной 20 кГц. Для стального сплава расчеты резонансной длины дают следующее значение $L = 16,5$ мм. Геометрия образца представлена на рисунке 2.10а, результат гармонического анализа, выполненного для определения полей напряжений при резонансном нагружении смещениями в 1 микрометр, дан на рисунке 2.10б. Анализ полученных результатов вычислений показывает, что 1 мкм смещений, заданных на одном из торцов образца, соответствует величина нормальных напряжений в рабочем сечении 9,5 МПа. В пределах упругой области поведения материала задача является линейной, что позволяет использовать полученные результаты для анализа величины напряжений при больших величинах смещений. Испытательная СВМУ установка позволяет задавать уровни смещений от 5 до 40 мкм.



а



б

Рисунок 2.10. Геометрия образца для испытаний на гигацикловую усталость (а) и конечно-элементный расчет для нагружения смещениями 1 мкм (б)

Усталостные испытания проводились на пьезоэлектрической усталостной машине, рисунок 2.11 при нормальных условиях. Для обеспечения рабочей температуры было использовано воздушной охлаждение рабочей области посредством сжатого воздуха, подаваемого при температуре +5 градусов. Испытания проводились до полного разрушения образца, количество циклов до разрушения устанавливалось по радикальному снижению собственной частоты колебаний.



Рисунок 2.11. Внешний вид пьезоэлектрической усталостной машины

2.2.3. Усталостные испытания образцов, полученных методом SLM

Для проведения исследований усталостных свойств материалов, полученных методом послойного лазерного спекания (SLM-техника), были изготовлены серии образцов из стального сплава РН-1, с различным направлением построения (рисунок 2.12).

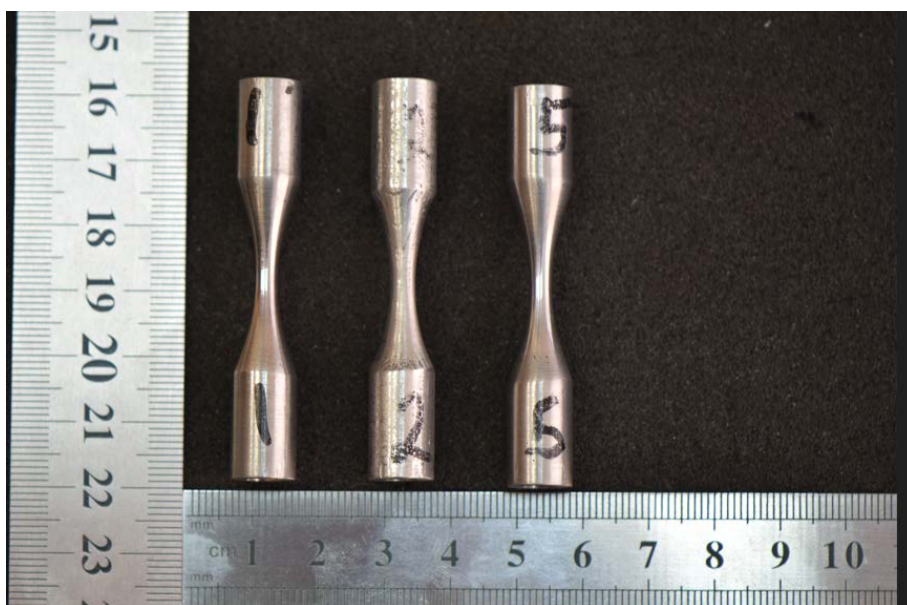


Рисунок 2.12. Образцы для СВМУ исследований, полученные методом SLM

Рабочие поверхности образцов были механически отполированы с целью снятия концентраторов напряжений и возможных остаточных напряжений на поверхности. Испытания проводились на СВМУ установке при комнатной температуре на воздухе. В качестве базы испытаний было выбрано 10^9 циклов. Основной задачей являлось установление пригодности методов СВМУ испытаний для оценки качества изделий, получаемых методом SLM и возможность выявления технологических дефектов аддитивного производства.

Первые результаты испытаний образцов показали сравнительно невысокие характеристики усталостного сопротивления при высокочастотном нагружении. Уровень напряжений, при котором наблюдались разрушения, не превосходит величины в 197 МПа. Подобные усталостные характеристики более чем в два раза ниже, чем характерные значения для аналогичных литых сплавов. С целью исследования причин такого радикального снижения усталостной прочности и установления механизмов разрушения материалов, полученных методом SLM были исследованы поверхности излом с применением сканирующего электронного микроскопа. Результаты фрактографического исследования представлены ниже. Поверхность излома крайне развита и сохраняет следы технологического процесса производства образцов (рисунок 2.13).

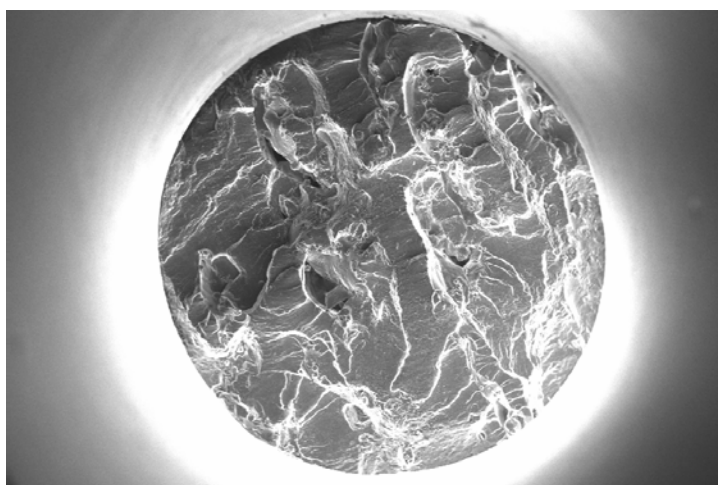
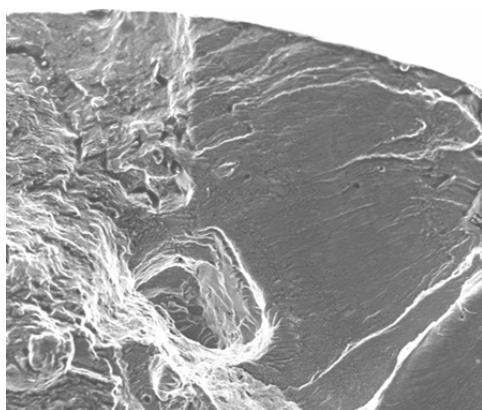
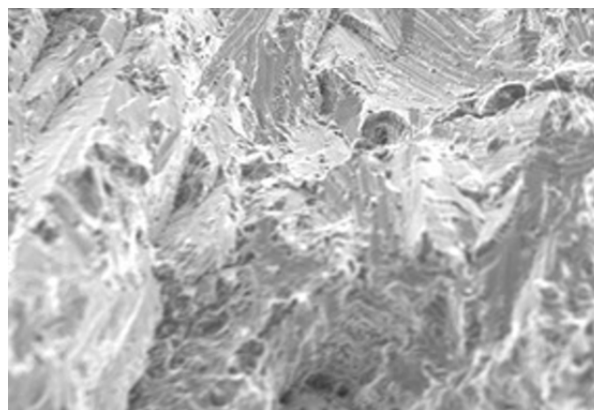


Рисунок 2.13. Поверхность излома образца из образца, полученного методом SLM при нагружении в 20 кГц

На поверхности излома, рисунок 2.14а, отчетливо видны полосы, соответствующие ваннам расплава образца. В различных положениях наблюдаются растрескивания материала по границам этих полос (рисунок 2.14б). Кроме того, имеет место множественное зарождение усталостных трещин, как от дефектов в виде пор, так и от границ слоев.



а



б

Рисунок 2.14. Зарождение усталостных трещин в материале, полученного SLM методом при нагружении в 20 кГц

На поверхности излома наблюдается гранулы и агломерации гранул порошкового материала. Таким образом, показано, что некоторые объемы материала оказались нерасплавленными при изготовлении. Анализ поверхности излома показывает, что методы СВМУ испытаний могут быть применены для материалов, полученных методами аддитивного производства, а также они оказываются эффективными для экспресс-анализа качества технологического процесса печати. Испытания позволяют выявить поры, области с нерасплавленным порошком, объемы в которых наблюдаются проблемы с микроструктурой и текстурой материала вследствие особенностей производства.

2.3. Определение коэффициента линейного температурного расширения

Традиционные методы измерения коэффициента линейного температурного расширения (КЛТР), например, дилатометрия, не всегда учитывают специфические особенности аддитивно выращенных изделий, включая их анизотропию и структурную неоднородность, указывая усредненные значения для всего образца. Так, актуальность приобретают современные оптические методы такие как видеоэкстензометрия и корреляция цифровых изображений (КЦИ), применяемые на испытательных машинах. Использование термокамеры и видеоэкстензометрии в составе испытательной машины позволяет определять локальные деформации, связанных со слоистой структурой напечатанных изделий, недоступные для традиционных методов. Метод КЦИ дополняет видеоэкстензометрию, предоставляя более детальную информацию о распределении деформаций по поверхности образца, позволяя построить полное поле перемещений и деформаций при температурном воздействии.

Испытания для определения КЛТР синтезированных образцов из металлопорошковой композиции проводились на универсальной установке Instron 5969 с использованием высокотемпературной печи Instron 3119-406 с диапазоном температур от -100°C до $+350^{\circ}\text{C}$ и размером камеры: 240x560x230 мм, а также видеоэкстензометра Instron 2663-821. Определение КЛТР, который может различаться вдоль разных осей печатных изделий из-за слоистой структуры, поэтому исследование проводилось для образцов выращенных перпендикулярно платформе и в плоскости построения детали.

Испытания проводились при следующих условиях: начальная температура в камере составляла 30°C , шаг повышения температуры – 30°C до достижения 200°C , с последующей выдержкой образца не менее 1000 секунд в установившемся температурном режиме. В каждой партии испытывалось по три образца. Среднее значение КЛТР для каждой партии образцов представлено в таблице 2.3.

Таблица 2.3. Среднее значение КЛТР для каждой партии образцов.

	В плоскости построения	Перпендикулярно плоскости построения
КЛТР	13,1	13,4

Представлены результаты исследования микроструктуры и механических свойств образцов нержавеющей стали, полученных с помощью послойного лазерного синтеза. Механические характеристики были определены в ходе статических испытаний на растяжение и изгиб, а также при ударном изгибе. Установлено, что прочностные свойства полученных образцов не превышают стандартные значения. Исследование поверхности разрушения выявило хрупко-вязкий характер, с преобладанием хрупкого разрушения. Анализ микроструктуры поверхности разрушенных образцов выявил наличие областей с неполным расплавлением порошка, что, вероятно, оказало влияние на полученные значения. Для проверки состава образцов был проведен микрорентгеноспектральный анализ, который подтвердил соответствие состава образцов стандартам для нержавеющей сталей марки 07X18H12M2. В ходе динамических испытаний были определены усталостные характеристики: уровень напряжений, при которых происходили разрушения, оказался в два раза ниже характерных значений для аналогичных литых сплавов. Для выяснения причин столь значительного снижения усталостной прочности и установления механизмов разрушения материалов, полученных методом SLM, были исследованы поверхности излома с помощью сканирующего электронного микроскопа. Анализ показал наличие пор и участков с нерасплавленным порошком, что указывает на проблемы с микроструктурой и текстурой материала.

Сделан вывод о возможности использования полученных экспериментальных характеристик для определения напряжённо-деформированного состояния образцов, изготовленных методом селективного лазерного плавления.

3. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ НАГРЕВЕ

В рамках работы необходимо определить напряженно-деформированное состояние металлопорошковой композиции в процессе селективного лазерного плавления полуплоскости.

С этой целью решается вспомогательная задача и проводится дополнительное исследование нестационарного нагрева изотропной полуплоскости под воздействием подвижного поверхностного источника тепла. Для её решения разрабатывается математическая модель, основанная на обобщённом уравнении теплопроводности, в рамках классической теории, модели Грина–Нагди II типа, а также уравнения Максвелла–Каттанео.

3.1. Динамический нагрев полуплоскости подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности

Неизменной характеристикой термического процесса при любом виде теплового воздействия на материал, включая лазерное излучение, является тепловой поток. В твёрдых телах перенос тепла осуществляется преимущественно за счёт теплопроводности, реализуемой через хорошо известные физические механизмы [88-95].

Как правило, при высокоинтенсивном нагреве используется импульсный источник, длительность действия которого составляет порядка пикосекунд [96-99]. В таких условиях классическая модель теплопроводности на основе закона Фурье теряет применимость, и для адекватного описания тепловых процессов необходимо использовать гиперболические уравнения теплопроводности, такие как уравнение Каттанео–Вернотта [100,101].

При воздействии лазерного излучения на твёрдое тело происходят изменения его оптических и теплофизических свойств вследствие термического расширения

материала. Кроме того, в процессе плавления наблюдаются фазовые переходы из твёрдого состояния в жидкое [102,103]. Кроме того, в приповерхностной области твёрдого тела могут протекать диффузионные процессы и происходить различные химические реакции, обусловленные воздействием лазерного излучения.

Существенные отличия тепловых процессов при воздействии лазерного излучения по сравнению с другими видами нагрева обусловлены высокими скоростями повышения и понижения температуры, а также значительными температурными градиентами.

Перенос тепловой энергии в веществе осуществляется посредством теплопроводности. Этот процесс возможен только при наличии температурных градиентов в теле и сопровождается изменением температуры как по пространственным координатам, так и во времени.

Здесь также решается задача об определении напряженно-деформированного состояния (НДС), возникающего вследствие селективного лазерного воздействия в нестационарной постановке.

Для этого в случае селективного лазерного плавления металлопорошковой композиции в пределах одного слоя, необходимо знать распределение поля температур в полуплоскости от воздействия лазерного источника [104]. Для решения указанной задачи ставится вспомогательная задача о нестационарном нагреве изотропной полуплоскости подвижным поверхностным источником тепла. Для этого строится математическая модель для обобщенного уравнения теплопроводности на основе классической теории и Грина-Нагди II типа, а также модели Максвелла-Каттанео. [107].

Предложенные решения соответствуют воздействию сосредоточенного во времени и координатах поверхностного источника тепла в виде дельта функции, расположенного в теплопроводящей полуплоскости. Для решения поставленной задачи используется интегральные одномерное преобразование Фурье по

координате и интегральное преобразование Лапласа по времени. Соответствующие оригиналы построены последовательным обращением преобразования Лапласа и Фурье, а также вычисления интегралов свертки по продольной координате.

В результате получено интегральное представление, позволяющее получать решения задачи о произвольных поверхностных источниках тепла в полуплоскости.

Для определения напряженно-деформированного состояния в металлопорошковой композиции в процессе трехмерной печати используются уравнения Ламе линейной теории несвязанной термоупругости с использованием обобщенного уравнения теплопроводности на основе гиперболического уравнения теплопроводности.

Приведенные решения задач подобного рода позволят с большой степенью точности исследовать воздействие высокоинтенсивных тепловых потоков энергии в новых материалах с неклассическими теплопроводящими свойствами.

Постановка задачи

Положим, что в начальный момент времени $t = 0$ в начале прямоугольной декартовой системы координат Oxz , связанной с поверхностью полуплоскости $z \geq 0$ начинает действовать источник тепла $q(x, z, t)$, который движется по поверхности полуплоскости $z = 0$ по известному закону движения. Схематично данный процесс можно представить, как показано на рисунке 3.1.

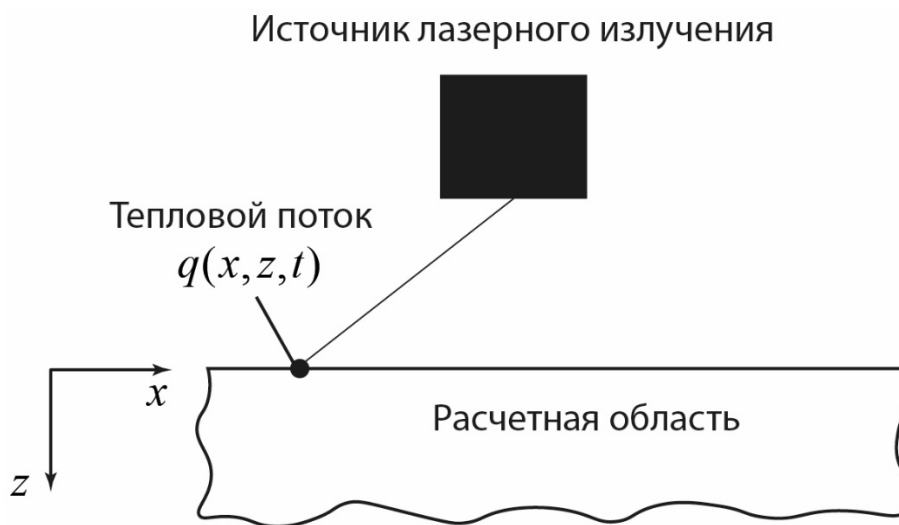


Рисунок 3.1. Схематическое описание моделируемого процесса трехмерной печати.

Координаты положения центра пятна нагрева в моменты времени $t > 0$ определяются параметрической зависимостью:

$$x = \varphi(t) \quad (3.1)$$

В нашем случае будем использовать закон равномерного движения

$$\varphi(t) = V_0 + Vt \quad (3.2)$$

Полагаем, что среда является однородной и изотропной, а также что плотность и теплофизические постоянные не зависят от температуры. В этом случае распределение температуры $T(x, z, t)$ в среде подчиняется уравнению теплопроводности. При этом рассматриваются классическое уравнение теплопроводности и уравнение Грина-Нагди II, а также уравнения Каттанео Вернотта.

Модель теплопроводности Грина-Нагди

Для вывода линеаризованного уравнения теплопроводности используется второй закон термодинамики, математическим выражением которого является уравнение баланса энтропии. При этом, с учетом физического закона для энтропии

приходим к общему уравнению теплопроводности (здесь рассматривается плоская задача $y = 0$)

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho q^{(e)}, \quad (3.3)$$

где ρ – плотность среды, c_ε – коэффициент удельной теплоёмкости при постоянной деформации, $T = T_1 - T_0$ – приращение температуры. T_0 – начальная температура, $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$ – вектор объёмной плотности теплового потока, $q^{(e)}$ – массовая плотность объёмных источников тепла. Здесь и далее точка над функцией означает её производную по времени.

Из общего уравнения теплопроводности вытекают как классическая, так и различные обобщённые теории [89]. Различия между ними состоят в разных законах теплопроводности, связывающих приращение температуры $T(x, z, t)$ с плотностью теплового потока $\mathbf{q}(x, z, t)$.

Существуют три типа модели теплопроводности Грина-Нагди [89]. Модель первого типа совпадает с классической моделью теплопроводности, в основе которой лежит закон Фурье.

$$\mathbf{q}(x, z, t) = -\kappa \operatorname{grad} T(x, z, t) \quad (3.4)$$

Здесь κ – коэффициент температуропроводности.

Модели второго и третьего типа сильно отличаются, поскольку они основаны на дополнительном параметре теплового состояния, названным *тепловое смещение* $\alpha(\mathbf{x}, t)$, которое определяется как:

$$\alpha(x, y, z, t) = \alpha_0 + \int_0^t T(x, z, \xi) d\xi, \quad \alpha_0 = \alpha|_{t=0} \quad (3.5)$$

Модель Грина-Нагди III типа характеризуется следующим законом теплопроводности:

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = -\kappa \text{grad} T(x, y, z, t) - \tilde{\kappa} \text{grad} \alpha(x, y, z, t), \quad (3.6)$$

где $\tilde{\kappa}$ – скорость теплопроводности.

Если в (3.6) положить $\tilde{\kappa} = 0$, то придём к классической модели теплопроводности Фурье (модель Грина-Нагди I типа). Если же положить $\kappa = 0$, то получим модель теплопроводности Грина-Нагди II типа.

Отметим, что уравнение нестационарной теплопроводности Грина-Нагди II имеет гиперболический тип.

На основе представленных выше моделей рассмотрим нестационарные процессы распространения тепла в неограниченной теплопроводной среде в двумерной постановке. Введём декартову прямоугольную систему координат Oxz . В дальнейшем всем функциям, переменным и параметрам придадим безразмерную форму. Для этого используем систему безразмерных величин (размерные величины обозначены символом «*»):

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L}, \quad z = \frac{z^*}{L}, \quad t = \frac{c_T t^*}{L}, \quad c_T^2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\rho c_\varepsilon}, \\ T &= \frac{T^*}{T_0}, \quad \kappa = \frac{\kappa^*}{\rho c_\varepsilon c_T L}, \quad q^{(e)} = \frac{q^{*(e)} L}{c_\varepsilon c_T T_0}, \quad t_R = \frac{c_T t_R^*}{L}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

где L – характерная длина.

В безразмерных величинах (3.7) уравнения, представленных выше теорий теплопроводности, примут следующий вид.

Теория Грина-Нагди I типа (классическое уравнение теплопроводности):

$$\frac{\partial T(x, z, t)}{\partial t} = \Delta T(x, z, t) \quad (3.8)$$

Теория Грина-Нагди II типа:

$$\frac{\partial^2 T(x, z, t)}{\partial t^2} = \Delta T(x, z, t) \quad (3.9)$$

В случае неограниченной среды полагаем, что решения уравнений (3.8)-(3.9) должны удовлетворять условию ограниченности на бесконечности:

$$T(x, z, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}. \quad (3.10)$$

Полагаем, что начальные условия являются однородными:

$$T(x, z, t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.11)$$

На поверхности полуплоскости имеют место граничные условия второго рода. Они принимают следующий вид:

$$-\kappa \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial z} + \beta T(x, z, t) \Big|_{z=0} = q[x - \varphi(t), t]. \quad (3.12)$$

На бесконечности температура полагается ограниченной

$$T(r, t) = O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Для решения поставленной задачи решим вспомогательную задачу о сосредоточенном источнике тепла на поверхности полуплоскости. В этом случае будем рассматривать плоскую задачу (рисунок 3.1).

Начально-краевая задача на основе теории Грина-Нагди I типа будет иметь вид:

$$\frac{\partial G(x, z, t)}{\partial t} = \Delta G(x, z, t) \quad (3.14)$$

Краевые условия будут иметь вид:

$$-\kappa \frac{\partial G(x, z, t)}{\partial z} + \beta G(x, z, t) \Big|_{z=0} = \delta(x) \delta(t), \quad (3.15)$$

Здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, β – коэффициент теплообмена на границе $z = 0$.

$$G(x, z, t) = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Функцию $G(r, t)$ как решение задачи (3.14) - (3.16) назовём *функцией влияния поверхностного источника тепла*. В дальнейшем будем называть её просто *поверхностной функцией влияния*.

Исходя из принципа суперпозиции решение исходной задачи (3.14) - (3.16) является свёрткой функции влияния с правой частью граничного условия (3.12) по переменным x и по времени t :

$$T(x, z, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, z, t - \tau) q[\xi - \varphi(\tau), \tau] d\xi. \quad (3.17)$$

Таким образом, ключевым моментом является построение функции влияния поверхностного источника.

Для решения поставленной задачи применим к (3.14) - (3.16) интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром s и интегральные преобразования Фурье по пространственной переменной x с соответствующим параметром p (индекс « FL » у функции обозначает её изображение по Фурье и Лапласу):

$$\frac{d^2 G^{FL}(p, z, s)}{dz^2} - (s + p^2) G^{FL}(p, z, s) = 0, \quad (3.18)$$

$$-\kappa \frac{dG^{FL}(p, z, s)}{dz} + \beta G^{FL}(p, z, s) \Big|_{z=0} = 1, \quad G^{FL}(p, z, s) = O(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Ограниченное при $z \rightarrow \infty$ решение уравнения (3.18) имеет вид:

$$G^{FL}(p, z, s) = A e^{-z\sqrt{s+p^2}} \quad (3.20)$$

Постоянную A находим из первого граничного условия в (3.19):

$$A = \frac{1}{\beta + \kappa\sqrt{s+p^2}}$$

В итоге получаем:

$$G^{FL}(p, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{s+p}}}{\beta + \kappa\sqrt{s+p^2}} \quad (3.21)$$

Для построения оригинала сначала обратим по Лапласу выражение (3.21):

$$G^F(p, z, t) = \frac{e^{-p^2 t}}{\kappa} \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{4at}}}{\sqrt{\pi t}} - \frac{\beta \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}\beta}{\kappa}\right) e^{\frac{\beta}{\kappa}\left(\frac{t\beta}{\kappa^2} + z\right)}}{\kappa} \right], \quad (3.22)$$

здесь $\operatorname{erfc}(\bullet)$ – дополнительная функция ошибок, которая определяется через функцию ошибок $\operatorname{erf}(\bullet)$.

Затем последовательно обращаем интегральные преобразования Фурье используя соотношения [108]:

$$e^{-p^2 t} \xrightarrow{F} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \quad (3.23)$$

Тогда

$$G(x, z, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\kappa\sqrt{\pi t}} \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - \frac{\beta \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}\beta}{\kappa}\right) e^{\frac{\beta}{\kappa}\left(\frac{t\beta}{\kappa^2} + z\right)}}{\kappa} \right] \quad (3.24)$$

При $\beta = 0$:

$$G_0(x, z, t) = \frac{e^{-\frac{x^2+z^2}{4t}}}{2\kappa\pi t} \quad (3.25)$$

Функции влияния (3.24 - 3.25) позволяют определить поле температур поставленной задачи используя интеграл свертки (3.17). В качестве примера рассмотрим сосредоточенный подвижный источник, заданный в виде:

$$q(x, t) = \delta[x - \varphi(t)]H(t) \quad (3.26)$$

Тогда из интеграла свертки (3.17) с учетом выражения (3.26) получаем:

$$\begin{aligned} T(x, z, t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, z, t - \tau) \delta[\xi - \varphi(\tau)] H(\tau) d\xi = \\ &= \int_0^t G(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.27)$$

С учетом функции влияния (3.24) поле температур (3.27) для произвольного движения источника по поверхности рассматриваемого плоского тела $\varphi(t)$ будет:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\kappa\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{[x-\varphi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \times \\ &\times \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{\beta \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\beta\sqrt{t-\tau}}{\kappa}\right) e^{\frac{\beta}{\kappa}\left[\frac{\beta(t-\tau)}{\kappa^2} + z\right]}}{\kappa} \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.28)$$

В качестве тестового примера рассмотрим равномерное движение источника по границе $z = 0$ полуплоскости. В этом случае полагаем в выражении (3.27) $\varphi(t) = Vt$ здесь V – некоторая постоянная размерности скорости. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} T(x, z, t) &= \frac{1}{2\kappa\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(x-V\tau)^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \times \\ &\times \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{\beta \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\beta\sqrt{t-\tau}}{\kappa}\right) e^{\frac{\beta}{\kappa}\left[\frac{\beta(t-\tau)}{\kappa^2} + z\right]}}{\kappa} \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.29)$$

Температурный поток в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dT(x, y, z, t)}{dz} = & \frac{1}{\kappa\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(x-V\tau)^2}{4(t-\tau)}} \left\{ -\frac{2ze^{-\frac{z^2}{4(t-\tau)}}}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^2} + \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{e^{-\left[\frac{z^2}{4(t-\tau)} + \frac{z\beta}{\kappa} + \frac{\beta^2}{\kappa^2} + \frac{z\beta^2(t-\tau)}{\kappa^3}\right]}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \right. \right. \\ & \left. \left. -\beta \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\beta\sqrt{t-\tau}}{\kappa}\right) e^{-\frac{\beta}{\kappa}\left[\frac{\beta(t-\tau)}{\kappa^2} + z\right]} \right] \right\} d\tau \end{aligned} \quad (3.30)$$

Начально-краевая задача на основе теории Грина-Нагди II типа будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 G(x, z, t)}{\partial t^2} = \Delta G(x, z, t) \quad (3.31)$$

Краевые условия будут иметь вид:

$$-\kappa \frac{\partial G(x, z, t)}{\partial z} + \beta G(x, z, t) \Big|_{z=0} = \delta(x)\delta(t), \quad (3.32)$$

$$G(x, z, t) = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (3.33)$$

Здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Для решения этой задачи применим к (3.31-3.33) интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром s и интегральные преобразования Фурье по пространственной переменной x с соответствующим параметром p (индекс FL у функции обозначает её изображение по Фурье и Лапласу):

$$\frac{d^2 G^{FL}(p, z, s)}{dz^2} - (s^2 + p^2) G^{FL}(p, z, s) = 0, \quad (3.34)$$

$$-\kappa \frac{dG^{FL}(p, z, s)}{dz} + \beta G^{FL}(p, z, s) \Big|_{z=0} = 1, \quad G^{FL}(p, z, s) = O(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.35)$$

Ограниченное при $z \rightarrow \infty$ решение уравнения (3.34) имеет вид:

$$G^{FL}(p, z, s) = Ae^{-z\sqrt{s^2 + p^2}} \quad (3.36)$$

Постоянную A находим из первого граничного условия в (3.35):

$$A = \frac{1}{\beta + \kappa \sqrt{s^2 + p^2}}$$

В итоге получаем:

$$G^{FL}(p, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}}}{\beta + \kappa \sqrt{s^2 + p^2}} \quad (3.37)$$

Сначала найдем оригинал выражения (37) для $\beta = 0$.

$$G_0^{LF}(p, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}}}{\kappa \sqrt{s^2 + p^2}} \quad (3.38)$$

Обратное интегральное преобразование по Фурье будет:

$$G_0^L(r, z, s) = \frac{K_0(sr)}{\kappa \pi}, \quad (3.39)$$

где $K_0(x)$ – функция Макдональда, $r = \sqrt{x^2 + z^2}$

Затем обращаем интегральные преобразования Лапласа и получаем оригинал поверхностной функции влияния:

$$G_0(x, z, t) = \frac{H\left(t - \sqrt{x^2 + z^2}\right)}{\kappa \pi \sqrt{t^2 - x^2 - z^2}} \quad (3.40)$$

Далее найдем оригинал выражения (37). Для этого представим его в виде:

$$G^{FL}(p, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}}}{\kappa \sqrt{s^2 + p^2}} - \frac{e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}}}{\kappa \sqrt{s^2 + p^2}} \frac{\beta}{\beta + \kappa \sqrt{s^2 + p^2}} \quad (3.41)$$

Оригинал первого слагаемого в (3.47) найден ранее (см. выражение (3.34)), оригинал второго слагаемого найти с помощью свойств преобразования Лапласа и Фурье затруднительно. Поэтому найдем асимптотическое решение в окрестности

точки $s \rightarrow \infty$, то есть при малых временах $t \rightarrow 0$. Используем первые четыре слагаемых в асимптотическом разложении, тогда:

$$-\frac{\beta e^{-z\sqrt{s^2+p^2}}}{\kappa\sqrt{s^2+p^2}\left(\beta+\kappa\sqrt{s^2+p^2}\right)} \xrightarrow{\text{Асимпт}} \beta \frac{e^{-zs}}{\kappa^2} \left[-\frac{1}{s^2} + \frac{z\left(\frac{2\beta}{zk} - p^2\right)}{2s^3} \right] \quad (3.42)$$

Обратное преобразование Лапласа выражения (3.42) определяется достаточно просто с помощью таблиц и свойств преобразования Лапласа:

$$-\frac{\beta e^{-z\sqrt{s^2+p^2}}}{\kappa\sqrt{s^2+p^2}\left(\beta+\kappa\sqrt{s^2+p^2}\right)} \xrightarrow{\text{Асимпт } L} H(t-z) \frac{\beta}{\kappa^2} \left[-(t-z) + \frac{z\left(\frac{2\beta}{zk} - p^2\right)}{4} (t-z)^2 \right] \quad (3.43)$$

Обратное преобразование Фурье выражения (3.43) найдем, используя формулу обращения преобразования Фурье:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2\beta}{zk}}} \left[\left(\sqrt{\frac{2\beta}{zk}} \right)^2 - p^2 \right]^{\frac{3}{2}} \cos(xp) dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(2\sqrt{\frac{2\beta}{x^2 zk}} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2) J_{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{2\beta}{zk}} x \right) \quad (3.44)$$

Учитывая выражение (3.44) получаем оригинал второго слагаемого (3.41) в виде:

$$-\frac{\beta e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\tilde{\kappa}}+p^2}}}{\kappa\sqrt{\frac{s^2}{\tilde{\kappa}}+p^2}\left(\beta+\kappa\sqrt{\frac{s^2}{\tilde{\kappa}}+p^2}\right)} \xrightarrow{LF} H(t-z) \frac{\beta}{\kappa^2} \left[-(t-z)\delta(x) + \frac{z}{4}(t-z)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(2\sqrt{\frac{2\beta}{x^2 zk}} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2) J_{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{2\beta}{zk}} x \right) \right] \quad (3.45)$$

В результате оригинал выражения (3.41) будет иметь вид:

$$G(x, z, t) = G_0(x, z, t) + H(t - z) \frac{\beta}{\kappa^2} \left[-(t - z) \delta(x) + \frac{z}{4} (t - z)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(2 \sqrt{\frac{2\beta}{x^2 z k}} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2) J_{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{2\beta}{z k}} x \right) \right] \quad (3.46)$$

В этом выражении $H(\bullet)$ – функция Хевисайда, $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функция, $J_{\frac{3}{2}}(\bullet)$ – функция Бесселя дробного порядка.

Используя полученную функцию влияния (3.46) поле температур для поставленной задачи определяется с помощью интеграла (3.27), тогда для сосредоточенного подвижного источника получаем:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \int_0^t G(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t G_0(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau + \\ &+ \frac{\beta}{\kappa^2} \int_z^t \left[-(t - z) \delta(x) + \frac{z}{4} (t - z)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{x - \varphi(\tau)} \sqrt{\frac{2\beta}{z k}} \right)^{\frac{3}{2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \Gamma(2) J_{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{2\beta}{z k}} x - \varphi(\tau) \right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.47)$$

Анализируя полученные выражения и литературные данные можно с достаточной степенью точности положить в (3.47) $\beta = 0$ и для определения функции влияния при решении поставленной задачи возможно использовать оригинал трансформанты (3.38).

Найдем поле температур для этого случая, тогда полагая $\beta = 0$, получаем

$$T_0(x, z, t) = \int_0^t G_0(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau \quad (3.48)$$

Функция влияния (3.40) позволяет определить поле температур, поставленной задачи используя первый интеграл свертки (3.47). Здесь, как и ранее, используем формулу, описывающую сосредоточенный подвижный источник (3.26), тогда получаем:

$$T_0(x, z, t) = \int_0^t G_0(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau = \int_0^{t - \sqrt{x^2 + z^2}} \frac{d\tau}{\kappa\pi\sqrt{(t - \tau)^2 - [x - \varphi(\tau)]^2 - z^2}} \quad (3.49)$$

Если положить в выражении (3.49) $\varphi(\tau) = V\tau$, где V - некоторая постоянная размерности скорости. Тогда поле температур определится из соотношения:

$$T_0(x, z, t) = \int_0^{t - \sqrt{x^2 + z^2}} \frac{d\tau}{\kappa\pi\sqrt{(t - \tau)^2 - (x - V\tau)^2 - z^2}} \quad (3.50)$$

На рисунке 3.2 представлены распределения полей температур по времени, где T_1 - классическая теория, T_2 - теория Нагди II типа при различных значениях x вблизи верхней границы полуплоскости $z = 0.01$.

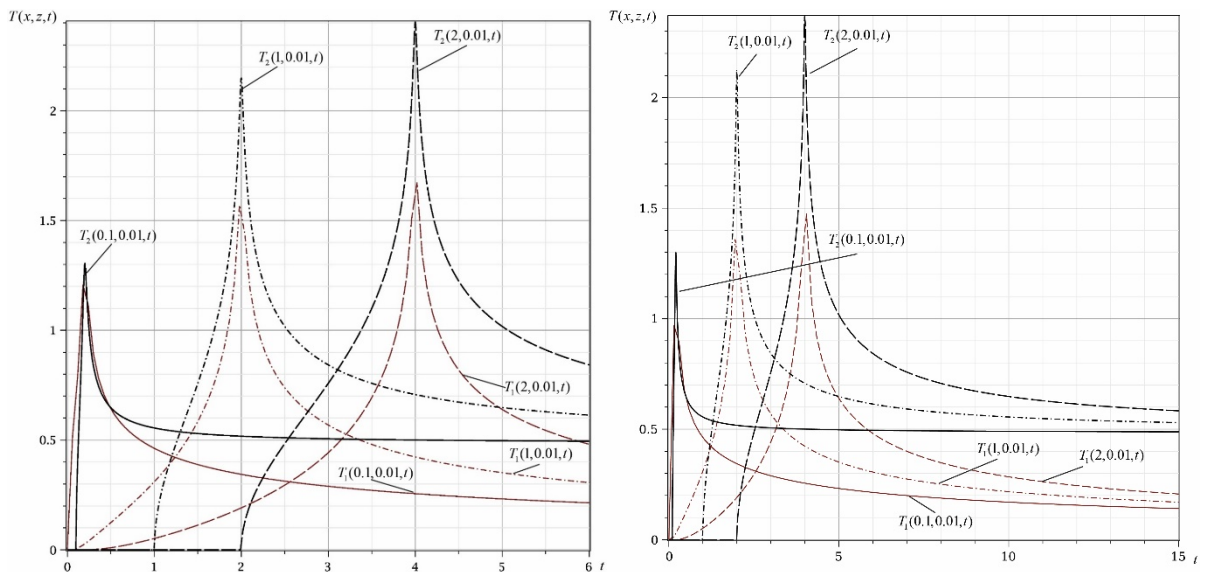


Рисунок 3.2. Распределение полей температур в зависимости от времени t .

Из рисунка 3.2. видно, что при достаточно малых значениях времен, поля температур для обеих теорий совпадают и амплитудные значения поля температур для T_2 выше, поэтому для дальнейших расчетов в качестве температурной составляющей при определении напряженно-деформированного состояния будем использовать температуру, полученную по теории Нагди II.

На рисунках 3.3 – 3.5 приведены распределения температурных полей по теории Нагди II типа при различных значениях параметров x, z, t .

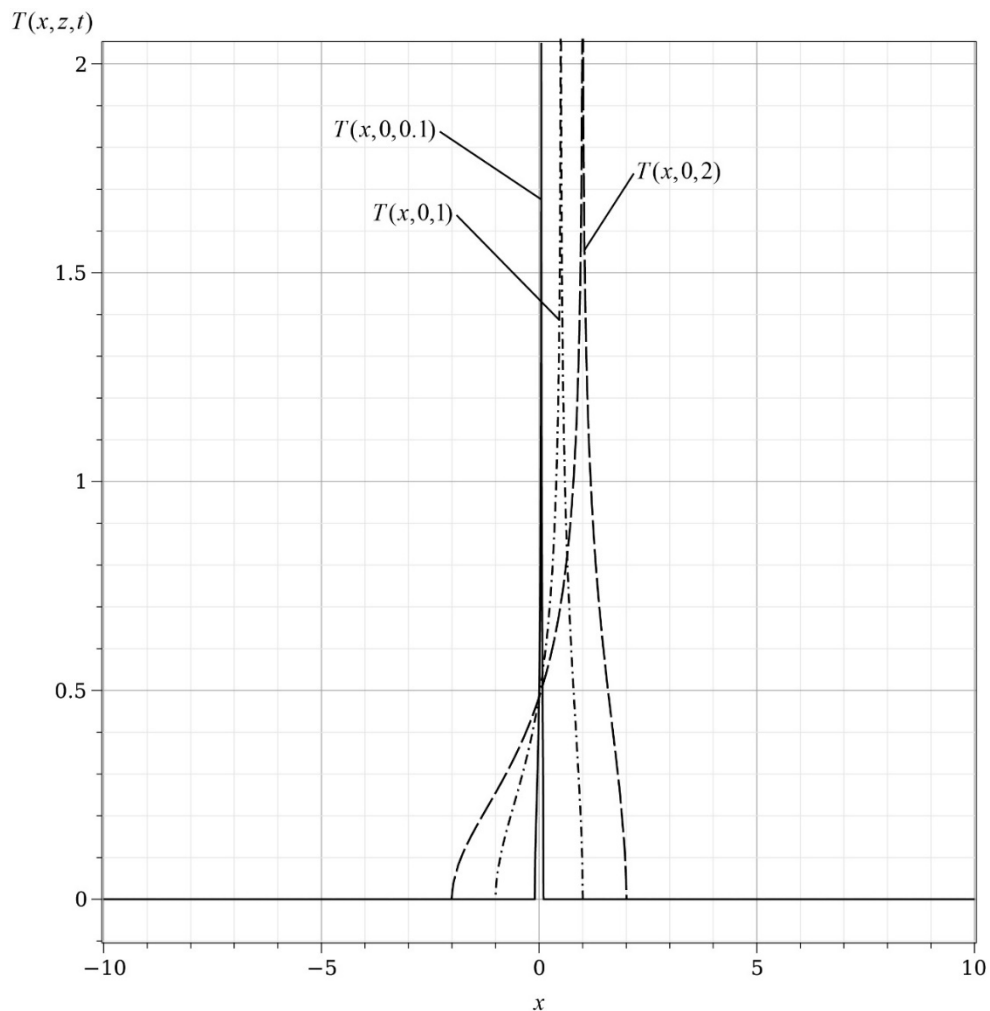


Рисунок 3.3. Распределение полей температур вдоль верхней границы полуплоскости $z = 0$ при различном времени t .

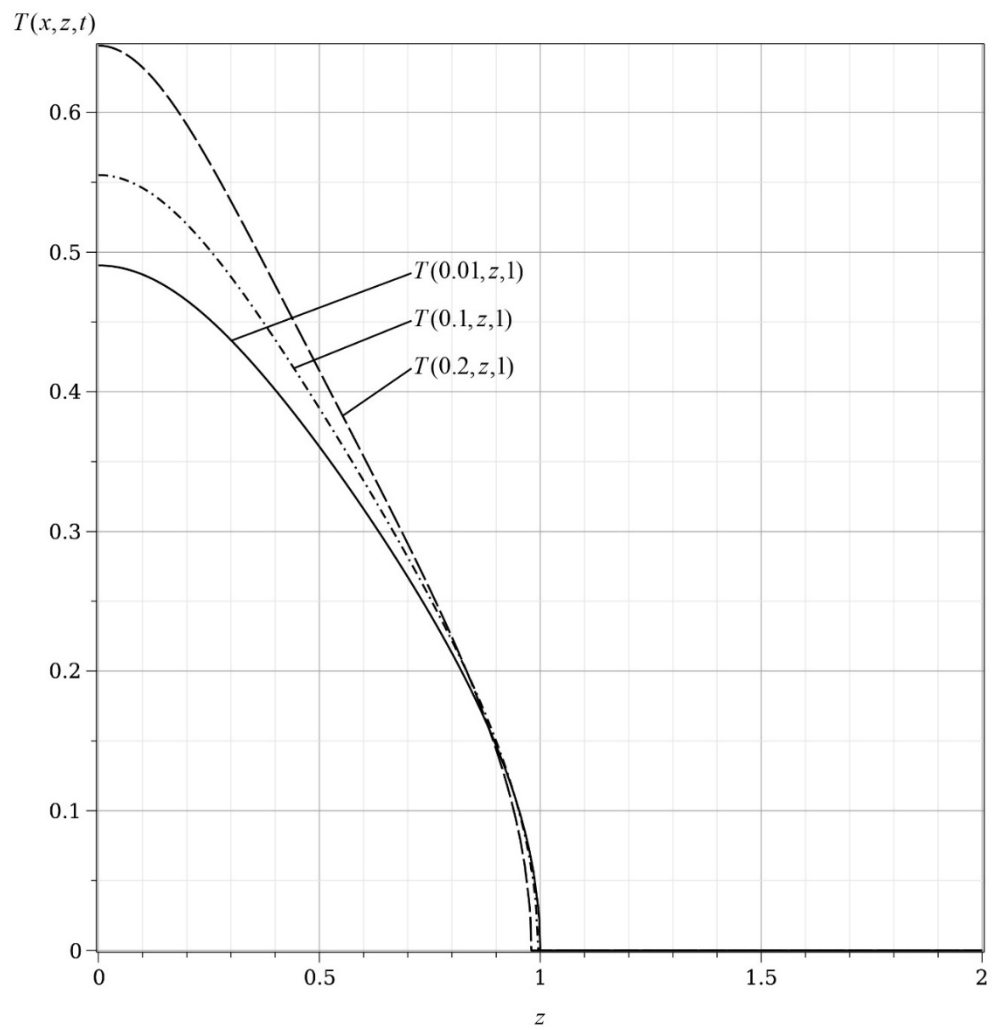


Рисунок 3.4. Распределение полей температур по глубине в окрестности начальной точки $x = 0$ в момент времени $t = 1$.

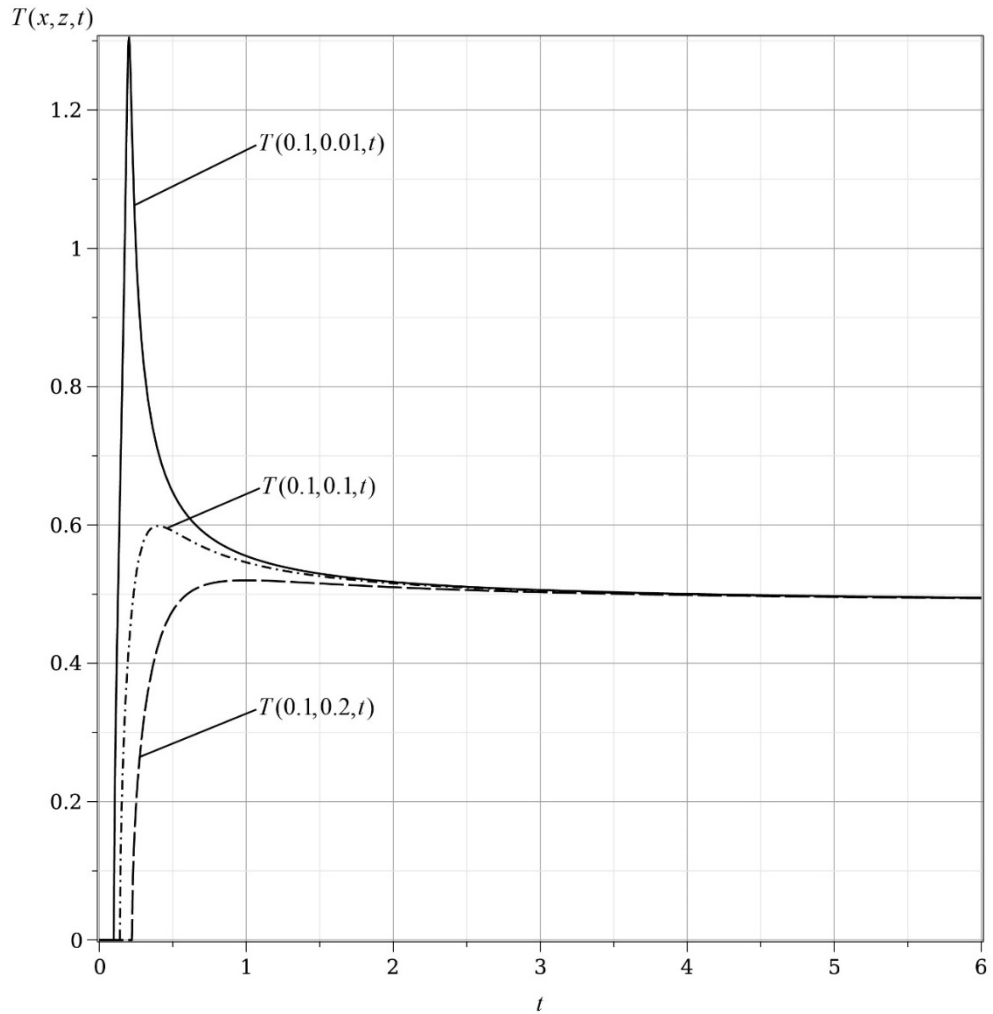


Рисунок 3.5. Распределение полей температур по времени при $x = 0.1$ и различных значениях z .

Гиперболическое уравнение теплопроводности

Гиперболическое уравнение теплопроводности позволяет описывать волновую природу распространения тепла. Оно основывается на обобщённом законе теплопроводности, предложенном независимо Каттанео и Лыковым [105, 106]:

$$\mathbf{q} + \tau_r \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \text{grad} \theta, \quad (3.51)$$

где $\mathbf{q}$ – вектор теплового потока, θ – температура, τ_r – время релаксации, λ – коэффициент теплопроводности.

Принимая во внимание уравнение баланса внутренней энергии

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + q_v, \quad (3.52)$$

где U – внутренняя энергия тела, ρ – плотность, q_v – объёмная плотность источников тепла, а также связь внутренней энергии с температурой

$$U = c_v \theta, \quad (3.53)$$

где c_v – удельная теплоёмкость при постоянном объёме, получаем

$$\rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + q_v. \quad (3.54)$$

Применяя к (3.51) оператор дивергенции, приходим к уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \tau_r \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \Delta T. \quad (3.55)$$

Из уравнений (3.54) и (3.55) получаем

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \tau_r \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + q_v. \quad (3.56)$$

Дифференцируя (3.54) по времени, выражая из полученного уравнения $\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$

и подставляя результат в (3.56), приходим к гиперболическому уравнению теплопроводности Максвелла–Каттанео (это уравнение написано в предположении $q_v = 0$):

$$\frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_r a} \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial t} = \Delta \theta(x, z, t) \quad (3.57)$$

где $\theta(x, z, t)$ – температура, τ_r – время релаксации ($\tau_r \approx 10^{-9}$ сек для газов,

$\tau_r \approx 10^{-11}$ сек для металлов), $a = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left[\frac{M^2}{c} \right]$ – коэффициент температуропроводности,

c_p – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности,

Δ – оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, соответственно для пространственных, плоских и одномерных задач).

Введём величину $c = \sqrt{\frac{\lambda}{c_p \rho \tau_r}} = \sqrt{\frac{a}{\tau_r} \left[\frac{m}{c} \right]}$, которая равна скорости

распространения тепла, тогда уравнение (3.57) можно записать так:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_r} \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial t} = c^2 \Delta \theta(x, z, t). \quad (3.58)$$

Краевые условия будут иметь вид:

$$-\kappa \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial z} + \beta \theta(x, z, t) \Big|_{z=0} = q[x - \varphi(t), t]. \quad (3.59)$$

Введём безразмерные величины (штрихом обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{\tau_r}, \quad x = \frac{x'}{L}, \quad y = \frac{y'}{L}, \quad z = \frac{z'}{L}, \quad L = \sqrt{a \tau_r}, \\ \theta(x, z, t) &= \frac{\theta'(x, z, t)}{\theta_0(x, z, t)}, \quad q_v = \frac{q'_v \tau_r}{\rho c_v T_0}, \quad l = \frac{l'}{L}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где L – характерный линейный размер, T_0 – характерное значение температуры, l' – величина, имеющая размерность длины.

С учётом (3.60) уравнение (3.58) примет безразмерную форму:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial t} = \Delta \theta(x, z, t), \quad (3.61)$$

С помощью подстановки $\theta(x, z, t) = T(x, z, t)e^{-\tau/2}$ уравнение (3.61) приводится к уравнению Клейна-Гордона относительно функции $T(x, z, t)$:

$$\frac{\partial^2 T(x, z, t)}{\partial t^2} - \frac{T(x, z, t)}{4} = \Delta T(x, z, t) \quad (3.62)$$

Начальные условия принимаем однородными:

$$T(x, z, t)\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0. \quad (3.63)$$

Дополнительно введём безразмерную величину (штрихом обозначены размерные параметры):

$$T(x, z, t) = \frac{T'(x, z, t)}{T_0(x, z, t)} \quad (3.64)$$

где L – характерный линейный размер, T_0 – характерное значение температуры, l' – величина, имеющая размерность длины.

Для решения поставленной задачи решим вспомогательную задачу о сосредоточенном источнике тепла на поверхности полуплоскости. В этом случае начально-краевая задача будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 G(x, z, t)}{\partial \tau^2} - \frac{G(x, z, t)}{4} = \Delta G(x, z, t), \quad (3.65)$$

Краевые условия для поставленной вспомогательной задачи будут:

$$G(x, z, 0) = 0, \quad -\kappa \frac{\partial G(x, z, t)}{\partial z} + \beta G(x, z, t)\Big|_{z=0} = \delta(x)\delta(t), \quad (3.66)$$

$$G(x, z, t) = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

Функцию $G(x, z, t)$ как решение задачи (3.65 – 3.66) назовём *функцией влияния поверхностного источника тепла*. В дальнейшем будем называть её просто *поверхностной функцией влияния*.

Исходя из принципа суперпозиции решение исходной задачи является свёрткой функции влияния с правой частью граничного условия по переменной x и по времени t

$$T(x, z, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, z, t - \tau) q[\xi - \varphi(\tau), \tau] d\xi. \quad (3.67)$$

Таким образом, ключевым моментом является построение функции влияния поверхностного источника.

Функция влияния $G(x, z, t)$ позволяет определить поле температур исходной задачи используя интеграл свертки (3.67). Рассмотрим сосредоточенный подвижный источник:

$$q(x, t) = \delta[x - \varphi(t)] H(t) \quad (3.68)$$

Тогда из интеграла свертки (3.67) получаем:

$$\begin{aligned} T(x, z, t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, z, t - \tau) \delta[\xi - \varphi(\tau)] H(\tau) d\xi = \\ &= \int_0^t G(x - \varphi(\tau), z, t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.69)$$

Для решения поставленной задачи применим к (3.65 – 3.66) интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром s и интегральные преобразования Фурье по пространственной переменной x с соответствующим параметром p (индекс « FL » у функции обозначает её изображение по Фурье и Лапласу):

$$\frac{d^2 G^{FL}(p, z, s)}{dz^2} - \left(s^2 + p^2 - \frac{1}{4} \right) G^{FL}(p, z, s) = 0, \quad (3.70)$$

$$-\kappa \frac{dG^{FL}(p, z, s)}{dz} + \beta G^{FL}(p, z, s) \Big|_{z=0} = 1, \quad G^{FL}(p, z, s) = O(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.71)$$

Решение уравнения (3.70) имеет вид:

$$G^{FL}(p, z, s) = A e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} + B e^{z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} \quad (3.72)$$

После определения постоянных интегрирования A и B из краевых условий, получаем функцию влияния в виде:

$$G^{FL}(p, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}}}{\kappa \sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}} + \beta} \quad (3.73)$$

Из этого соотношения удобно выделить составляющую для случая $\beta = 0$

$$G_0^{FL}(p, z, s) = \frac{e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}}}{\kappa \sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} \quad (3.74)$$

Определим оригинал этого выражения. Для этого используем последовательное обращение преобразования Лапласа и Фурье. Сначала обратим выражение (3.74) по Лапласу:

$$G_0^F(p, z, \tau) = \frac{H(\tau - z) J_0 \left(\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}} \sqrt{\tau^2 - z^2} \right)}{\kappa} \quad (3.75)$$

Где $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка

Затем, для обращения выражения (3.75) используем свойства преобразования Фурье тогда:

$$G_0(x, z, \tau) = \frac{H(\tau - z)}{2\pi\kappa} \int_0^\infty J_0 \left(\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}} \sqrt{\tau^2 - z^2} \right) \cos(px) dp \quad (3.76)$$

Распределение поля температур найдем из выражения (3.69) полагая движение источника лазерного излучения равномерным $\varphi(t) = V_0 t$, где V_0 – амплитудное значение скорости.

$$T(x, z, \tau) = \int_0^\tau G_0(x - \varphi(t), z, \tau - t) dt \quad (3.77)$$

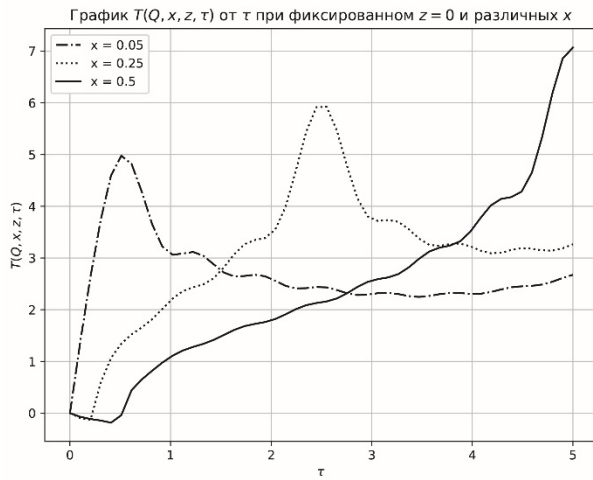
На рисунках 3.6-3.9 показано изменение поля температур во времени при различных параметрах движения лазера вдоль поверхности и по глубине слоя.

Рисунки 3.5-3.6 показывает, что при возрастании продольной координаты на поверхности и внутри полуплоскости интенсивность поля температур возрастает. Причем на поверхности выше, что естественно.

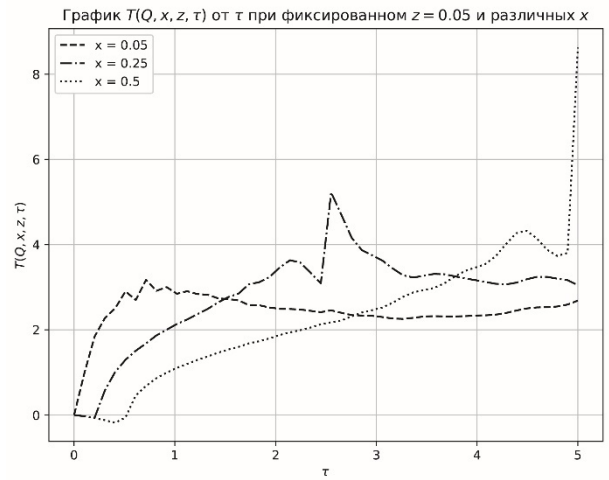
На рисунках 3.7-3.8 изображена зависимость распределения поля температур по глубине полуплоскости. Видно, что по глубине температура убывает, а амплитуда значения поля температур при удалении от центра выше.

На рисунках 3.9-3.10 представлено распределение температурных полей по глубине упругой полуплоскости и по координате поверхности при различных временах.

На рисунках 3.10-3.11 приведено распределение поля температур по глубине слоя и по поверхности при различных временах.

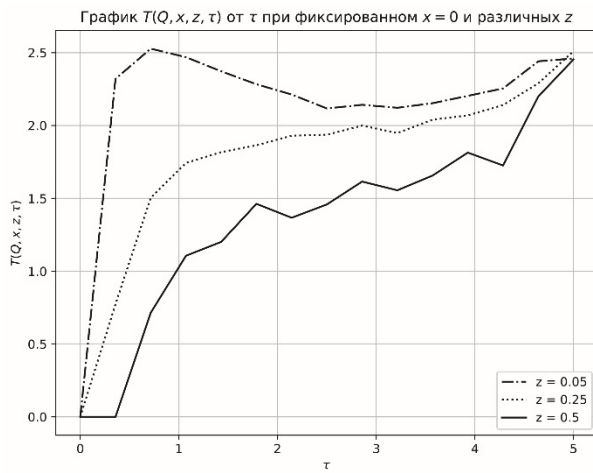


а

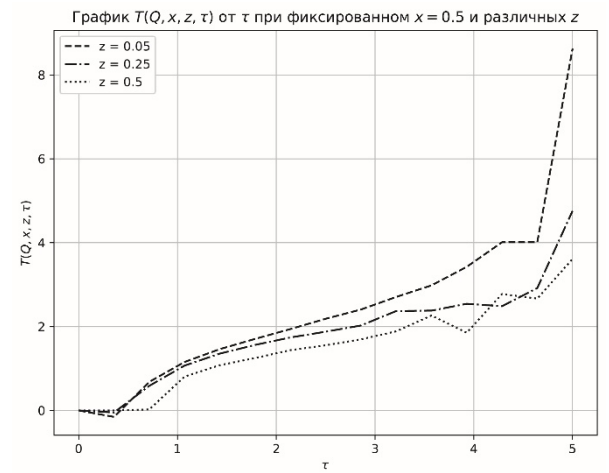


б

Рисунок 3.6. Графики функции $T(x, z, \tau)$ при фиксированных значениях z , различных значениях x и $\tau = 0 \dots 5$.



а



б

Рисунок 3.7. Графики функции $T(x, z, \tau)$ при фиксированных значениях x , различных значениях z и $\tau = 0 \dots 5$.

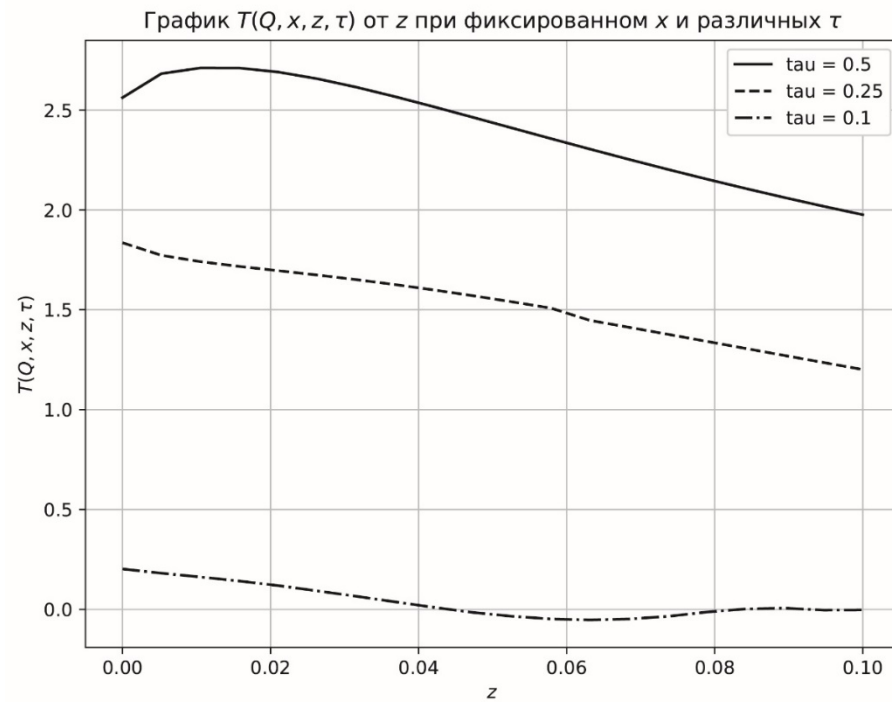


Рисунок 3.10. График функции $T(x, z, \tau)$ при фиксированном значении x , различных значениях τ и $z = 0 \dots 0.1$.

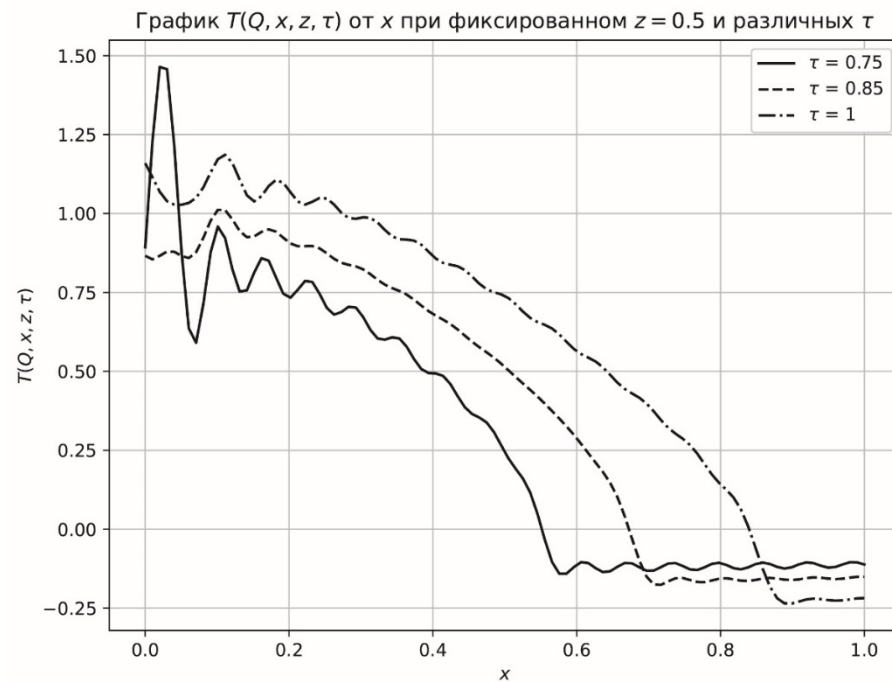
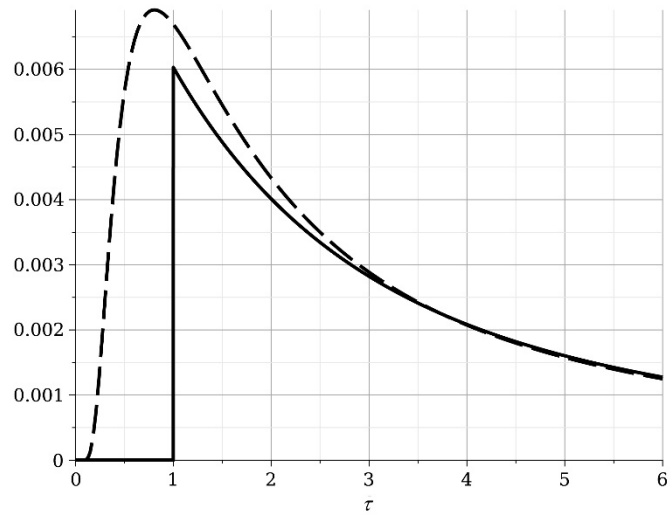
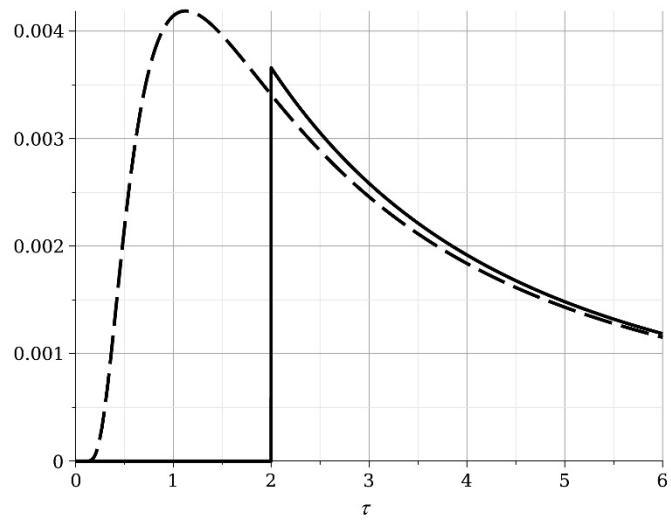


Рисунок 3.11. График функции $T(x, z, \tau)$ при фиксированном значении $z = 0.5$, различных значениях τ и $x = 0 \dots 1$.

а.



б.



в.

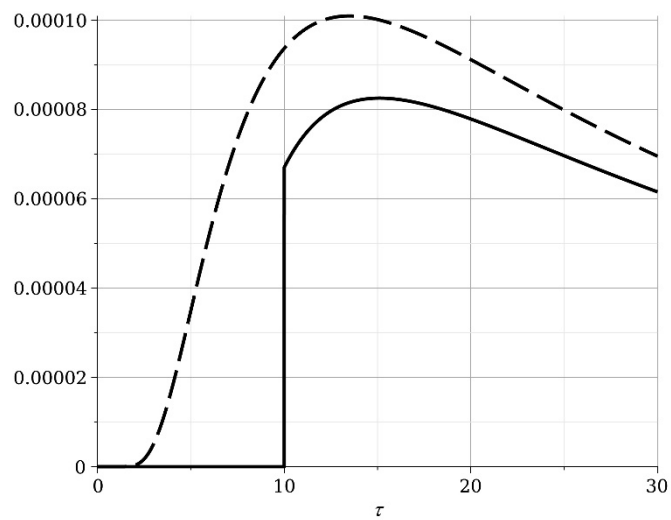


Рисунок 3.12. Распределение поля температур по времени при различных координатах.

На рисунках 3.12 приведено распределение поля температур для классической модели (пунктир) и модели Максвелла-Каттанео (сплошная линия), по времени при различных координатах ($x=1$ – рисунок 3.12а, $x=2$ – рисунок 3.12б, $x=10$ – рисунок 3.12в) на поверхности полуплоскости $z=0$. Из этих рисунков следует, что при больших временах графики фактически совпадают, а при малых временах температурное поле для модели Максвелла-Каттанео носит явно волновой характер с учетом действия времени релаксации теплового потока.

3.2. Расчёт напряжённо-деформированного состояния, индуцированного подвижным источником лазерного излучения

Напряжённо-деформированное состояние металлопорошковой композиции в процессе селективного лазерного плавления полуплоскости определим на основе решения системы дифференциальных уравнений термоупругости в предположении, что поверхностные нагрузки и массовые силы, а также внутренние источники тепла отсутствуют. Эта система уравнений состоит из уравнения теплопроводности и уравнений движения теории упругости с учётом температурных эффектов [108]:

$$\Delta T - \Phi_i - \chi \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (3.78)$$

В выражении (3.78) функция $\Phi_i(T)$ представляет собой варианты различных теорий теплопроводности $i=1..3$, где $\Phi_1(T) = \frac{\partial T}{\partial t}$ (классическая теория

теплопроводности), $\Phi_2(T) = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ (теория теплопроводности Нагди II),

$\Phi_3(T) = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t}$ (теория теплопроводности Максвелла–Каттанео).

$$\Delta \mathbf{u} + \eta^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \gamma \operatorname{grad} T = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3.79)$$

где $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ – вектор перемещений; $\eta^2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$, λ , μ – упругие постоянные

Ламе; $\gamma = 3K\alpha$, α – коэффициент температурного расширения, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ –

модуль объёмного расширения; $\chi = \frac{\gamma T_0}{\lambda}$, T_0 – начальная температура.

В этой системе уравнений можно пренебречь слагаемым $\chi \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t}$ в уравнении теплопроводности. Такое пренебрежение оправдывается тем, что оно мало по сравнению со вторым слагаемым уравнения (3.78). Таким образом, получаем несопряжённую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 T(x, z, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_r a} \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial t} = \Delta T(x, z, t) \quad (3.80)$$

$$\Delta \mathbf{u}(x, z, t) + \eta^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}(x, z, t) - \gamma \operatorname{grad} T(x, z, t) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, z, t)}{\partial t^2}, \quad (3.81)$$

первое из которых совпадает с уравнением (3.58). Для плоского случая полагаем в (3.79)

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}u + \mathbf{k}w$$

Тогда получаем скалярные уравнения Ламе для плоского случая:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \gamma \operatorname{grad} T = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.82)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \gamma \operatorname{grad} T = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.83)$$

Здесь $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – параметры Ламе.

Напряжения σ_{ij} связаны с деформациями ε_{ij} , $i, j = x, z$ законом Дюамеля-Неймана:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda\theta - \gamma\mu T + 2\mu\varepsilon_{xx}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\theta - \gamma\mu T + 2\mu\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{xz} &= 2\mu\varepsilon_{xz},\end{aligned}\tag{3.84}$$

Деформации и перемещения подчиняются соотношениям Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \theta &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.\end{aligned}\tag{3.85}$$

Решение уравнений (3.82) – (3.83) удобно проводить используя упругие потенциалы. В декартовой системе координат с учётом осевой симметрии остаётся ненулевой только одна компонента векторного потенциала: $\psi = (0, \psi, 0)$. При этом связи компонент вектора перемещений с упругими потенциалами имеют вид:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}.\tag{3.86}$$

Из скалярных уравнений Ламе (3.82) – (3.83) с учетом (3.86) следуют выражения для перемещений u, w и напряжений $\sigma_x, \sigma_z, \sigma_{xz}$ записанные через потенциалы φ и ψ .

Введём следующую систему безразмерных величин (символом «*» обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned}z &= \frac{z^*}{h}, \quad x = \frac{x^*}{h}, \quad t = \frac{c_1 t^*}{h}, \quad \varphi = \frac{\varphi^*}{h^2}, \quad \psi = \frac{\psi^*}{h^2}, \quad u = \frac{u^*}{h}, \quad w = \frac{w^*}{h}, \quad T = \frac{T^*}{T_0}, \\ \sigma_x &= \frac{\sigma_x^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_z^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \beta^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2},\end{aligned}\tag{3.87}$$

Система уравнений (3.82) – (3.83), выраженные через упругие потенциалы в безразмерном виде, будут иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \alpha T = 0 \quad (3.88)$$

$$\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.89)$$

Перемещения будут определяться соотношениями (3.86), а напряжения примут вид:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (1 - 2\beta^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2\beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \gamma \beta^2 T \quad (3.90)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (1 - 2\beta^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \gamma \beta^2 T \quad (3.91)$$

$$\sigma_{xz} = \beta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \quad (3.92)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния имеем начально-краевую задачу в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, z, t)}{\partial t^2} - \alpha T(x, z, t) = 0 \quad (3.93)$$

$$\beta^2 \left[\frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.94)$$

Краевые условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, z, t)|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{xz}(x, z, t)|_{z=0} = 0 \\ \varphi(x, z, t)|_{z \rightarrow \infty} = O(1), \quad \psi(x, z, t)|_{z \rightarrow \infty} = O(1) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Начальные условия предполагаются однородными.

Для решения поставленной задачи применим к (3.93) – (3.95) интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром s и интегральные преобразования Фурье по пространственной переменной x с соответствующим параметром p (индекс « FL » у функции обозначает её изображение по Фурье и Лапласу):

$$\frac{d^2 \varphi^{LF}(p, z, s)}{dz^2} - (s^2 + p^2) \varphi^{LF}(p, z, s) - \alpha G_0^{FL}(p, z, s) = 0 \quad (3.96)$$

$$\frac{d^2 \psi^{LF}(p, z, s)}{dz^2} - \left(\frac{s^2}{\beta^2} + q^2 \right) \psi^{LF}(p, z, s) = 0 \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{LF}(p, z, s) &= \frac{d^2 \varphi^{LF}(p, z, s)}{dz^2} - p^2 (1 - 2\beta^2) \varphi^{LF}(p, z, s) - \\ &- 2ip\beta^2 \frac{d\psi^{LF}(p, z, s)}{dz} - \alpha G_0^{LF}(p, z, s) \Big|_{z=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\sigma_{xz}^{LF}(p, z, s) = \beta^2 \left[-2ip \frac{d\varphi^{LF}(p, z, s)}{dz} - \frac{d^2 \psi(p, z, s)}{dz^2} - p^2 \psi^{LF}(p, z, s) \right] \Big|_{z=0} = 0 \quad (3.99)$$

$$\varphi^{LF}(p, z, s) \Big|_{z \rightarrow \infty} = O(1), \quad \psi^{LF}(p, z, s) \Big|_{z \rightarrow \infty} = O(1) \quad (3.100)$$

В уравнении (3.96) функция $G_0^{FL}(p, z, s)$ определяется выражением (3.74).

Тогда решение уравнений (3.96) – (3.97) будет иметь вид:

$$\varphi^{LF}(p, z, s) = A e^{-z\sqrt{s^2+p^2}} + B e^{z\sqrt{s^2+p^2}} - A_0 e^{-z\sqrt{s^2+p^2} - \frac{1}{4}} \quad (3.101)$$

$$\psi^{LF}(p, z, s) = C e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2}+p^2}} + D e^{z\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2}+p^2}} \quad (3.102)$$

В этих выражениях A, B, C, D – постоянные интегрирования,

$$A_0 = \frac{2\alpha}{\kappa \sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} \text{ определяется из краевых условий (3.98) – (3.99). Условие}$$

ограниченности потенциалов (3.100) дает $B = D = 0$. Тогда:

$$A = A_0 A_1, \quad C = 2iA_0 p C_1 \quad (3.103)$$

В этих выражениях

$$A_1 = \frac{2p^4\beta^2 + 3p^2\left(s^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{s^2}{\beta^2}\left(s^2 + \frac{3}{4}\right) - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2 - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}}{2p^4\beta^2 + 3p^2 s^2 + \frac{s^4}{\beta^2} - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \quad (3.104)$$

$$C_1 = \frac{\left(\sqrt{p^2 + s^2} - \sqrt{p^2 + s^2 - \frac{1}{4}}\right) \left[p^2(\beta^2 - 1) - \sqrt{p^2 + s^2} \sqrt{p^2 + s^2 - \frac{1}{4}}\right] + \sqrt{p^2 + s^2}}{2p^4\beta^2 + 3p^2 s^2 + \frac{s^4}{\beta^2} - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \quad (3.105)$$

С учетом выражений для упругих постоянных трансформанты статических и динамических параметров системы будут иметь вид:

$$\Phi^{LF}(p, z, s) = A_0 \left(A_1 e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}} - e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} \right) \quad (3.106)$$

$$\Psi^{LF}(p, z, s) = 2iA_0 p C_1 e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}}, \quad T^{LF}(p, z, s) = A_0 e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}}$$

$$u^{LF}(p, z, s) = iA_0 \left[p \left(e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} - A_1 e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}} \right) + 2C_1 \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2} e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \right] \quad (3.107)$$

$$w^{LF}(p, z, s) = A_0 \left[\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}} e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} - A_1 \sqrt{s^2 + p^2} e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}} + 2C_1 p e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \right] \quad (3.108)$$

$$\sigma_z^{LF}(s, q, z) = -A_0 \left\{ \left(\beta^2 p^2 + s^2 + \frac{3}{4} \right) e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} - \right. \\ \left. - A_1 (s^2 + \beta^2 p^2) e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}} + 4p^2 \sqrt{\frac{s^2}{\beta} + p^2} \beta^2 C_1 e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta} + p^2}} \right\} \quad (3.109)$$

$$\sigma_{xz}^{LF}(s, q, z) = -2iA_0 p \left[C_1 \left(\frac{s^2}{\beta} + 2p^2 \right) e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta} + p^2}} + \right. \\ \left. + \sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}} e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} - A_1 \sqrt{s^2 + p^2} e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}} \right] \quad (3.110)$$

Вычисление оригиналов статических и динамических параметров системы.

Для вычисления оригиналов представленных функций преобразуем трансформанту выражения (3.107) к виду:

$$u^{LF}(p, z, s) = \frac{i2\alpha}{\kappa} p \left[\frac{e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}}}{\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} - \frac{e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}}}{\sqrt{s^2 + p^2}} \Phi_1^{LF}(p, s) + \right. \\ \left. + 2 \frac{e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta} + p^2}}}{\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \Phi_2^{LF}(p, s) \right] \quad (3.111)$$

Где

$$\Phi_1^{LF}(p, s) = \frac{\sqrt{s^2 + p^2}}{\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} \times$$

$$\times \frac{2p^4\beta^2 + 3p^2\left(s^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{s^2}{\beta^2}\left(s^2 + \frac{3}{4}\right) - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2 - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}}{2p^4\beta^2 + 3p^2 s^2 + \frac{s^4}{\beta^2} - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \quad (3.112)$$

$$\Phi_2^{LF}(p, s) = \frac{p\left(\frac{s^2}{\beta^2} + p^2\right)}{\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{p^2 + s^2} - \sqrt{p^2 + s^2 - \frac{1}{4}}\right) \left[p^2(\beta^2 - 1) - \sqrt{p^2 + s^2} \sqrt{p^2 + s^2 - \frac{1}{4}}\right] + \sqrt{p^2 + s^2}}{2p^4\beta^2 + 3p^2 s^2 + \frac{s^4}{\beta^2} - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \quad (3.113)$$

Оригинал выражения (3.109) может быть вычислен с помощью повторного интеграла свертки с учетом свойств преобразования Лапласа и Фурье.

$$u(x, z, t) = \frac{i2\alpha}{\kappa} \left[\left(\frac{pe^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}}}{\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} \right)^{-LF} - \left(\frac{pe^{-z\sqrt{s^2 + p^2}}}{\sqrt{s^2 + p^2}} \right)^{-LF} \right] **$$

$$** \Phi_1(x, t) + 2 \left[\frac{e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}}}{\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \right]^{-LF} ** \Phi_2(x, t) \quad (3.114)$$

Для этого используем асимптотические разложения функций $\Phi_1^{uLF}(p, s)$ и $\Phi_2^{uLF}(p, s)$ по параметру s .

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{s^2 + p^2}}{\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} \times \\
& \times \frac{2p^4\beta^2 + 3p^2\left(s^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{s^2}{\beta^2}\left(s^2 + \frac{3}{4}\right) - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2 - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}}{2p^4\beta^2 + 3p^2 s^2 + \frac{s^4}{\beta^2} - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \xrightarrow{\text{asympt}} \quad (3.115) \\
& \xrightarrow{\text{asympt}} 1 + \frac{7}{8s^2} + \frac{15 + (384\beta^3 - 96\beta^2 - 16)p^2}{128s^4} = \Phi_{1as}^{uLF}(p, s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}{\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} \times \\
& \times \frac{\left(\sqrt{p^2 + s^2} - \sqrt{p^2 + s^2 - \frac{1}{4}}\right) \left[p^2(\beta^2 - 1) - \sqrt{p^2 + s^2} \sqrt{p^2 + s^2 - \frac{1}{4}}\right] + \sqrt{p^2 + s^2}}{2p^4\beta^2 + 3p^2 s^2 + \frac{s^4}{\beta^2} - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \xrightarrow{\text{asympt}} \quad (3.116) \\
& \xrightarrow{\text{asympt}} \frac{7}{8s^2} + \frac{(448\beta^3 - 240\beta^2 + 16)p^2 + 15}{128s^4} = \Phi_{2as}^{uLF}(p, s)
\end{aligned}$$

С учетом асимптотических разложений (3.115) – (3.116) получаем обратные преобразования этих выражений по Лапласу:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{1as}^{uLF}(p, s) \xrightarrow{L} \Phi_{1as}^F(p, t) = \\
& = \delta(t) + H(t) \left[\frac{5t}{8} + \frac{15 + (384\beta^3 - 96\beta^2 - 16)p^2}{128s^4} \frac{t^3}{6} \right] \quad (3.117)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{2as}^{uLF}(p, s) \xrightarrow{L} \Phi_{2as}^F(p, t) = \\
& = H(t) \left[\frac{7}{8}t + \frac{(448\beta^3 - 240\beta^2 + 16)p^2 + 15}{128} \frac{t^3}{6} \right] \quad (3.118)
\end{aligned}$$

Оригиналы этих выражений будут:

$$\begin{aligned}\Phi_{1as}^u(t, x) = & \delta(t)\delta(x) + \\ & + H(t) \left[\delta(x) \left(\frac{5t}{8} + \frac{15}{128} \frac{t^3}{6} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x) \frac{384\beta^3 - 96\beta^2 - 16}{128} \frac{t^3}{6} \right]\end{aligned}\quad (3.119)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{2as}^u(t, x) = & H(t) \left[\delta(x) \left(\frac{7}{8} t + \frac{15}{128} \frac{t^3}{6} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x) \frac{448\beta^3 - 240\beta^2 + 16}{128} \frac{t^3}{6} \right]\end{aligned}\quad (3.120)$$

Оригиналы остальных выражений, входящих в трансформанту (3.107) определяться с учетом свойств преобразования Фурье и Лапласа.

Сначала найдем обратные преобразования искоемых выражений по Лапласу [108]

$$\frac{pe^{-z\sqrt{s^2+p^2-\frac{1}{4}}}}{\sqrt{s^2+p^2-\frac{1}{4}}} \xrightarrow{L} pH(\tau-z)J_0\left(\sqrt{p^2-\frac{1}{4}}\sqrt{\tau^2-z^2}\right)\quad (3.121)$$

$$\frac{pe^{-z\sqrt{s^2+p^2}}}{\sqrt{s^2+p^2}} \xrightarrow{L} pH(\tau-z)J_0(|p|\sqrt{\tau^2-z^2})\quad (3.122)$$

$$p \frac{e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2}+p^2}}}{\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2}+p^2}} = \beta p \frac{e^{-\frac{z}{\beta}\sqrt{s^2+\beta^2 p^2}}}{\sqrt{s^2+\beta^2 p^2}} \xrightarrow{L} \beta pH\left(\tau-\frac{z}{\beta}\right)J_0\left(\beta|p|\sqrt{\tau^2-\frac{z^2}{\beta^2}}\right)\quad (3.123)$$

Оригиналы выражений (3.121) – (3.123) определяются, используя свойства обратного преобразования Фурье и нечетность этих функций, тогда

$$G_0^u(x, z, \tau) = \frac{iH(\tau-z)}{2\pi} \int_0^\infty p J_0\left(\sqrt{p^2-\frac{1}{4}}\sqrt{\tau^2-z^2}\right) \sin(px) dp \quad (3.124)$$

$$G_1^u(x, z, \tau) = \frac{iH(\tau - z)}{2\pi} \int_0^\infty p J_0\left(|p| \sqrt{\tau^2 - z^2}\right) \sin(px) dp \quad (3.125)$$

$$G_2^u(x, z, \tau) = \beta \frac{iH\left(\tau - \frac{z}{\beta}\right)}{2\pi} \int_0^\infty p J_0\left(\beta |p| \sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}\right) \sin(px) dp \quad (3.126)$$

Интеграл (3.124) вычисляется численно, а интегралы (3.125) – (3.126) реализуются в квадратурах [111]:

$$\int_0^\infty p \sin(px) J_0(cp) dp = -\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{H(\tau - z - x)}{(\tau^2 - z^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.127)$$

$$\int_0^\infty p \sin(px) J_0(cp) dp = -\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{H\left(\tau - \frac{z}{\beta} - x\right)}{\left(\tau^2 - \frac{z^2}{\beta^2} - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.128)$$

Окончательно оригинал перемещения (3.111) с учетом соотношений (3.112) – (3.128) будет иметь вид:

$$u(x, z, \tau) = \frac{i2\alpha}{\kappa} \left[G_0^u(x, z, \tau) - G_1^u(x, z, \tau) ** \right. \\ \left. ** \Phi_{1as}^u(t, x) + 2G_2^u(x, z, \tau) ** \Phi_{2as}^u(t, x) \right] \quad (3.129)$$

Аналогичным образом определяется функция прогиба (3.108)

Для вычисления оригинала прогибов приведем выражение (3.108) к виду:

$$w^{LF}(p, z, s) = \frac{2\alpha}{\kappa} \left[e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} - A_1 \frac{\sqrt{s^2 + p^2}}{\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}} + \right.$$

$$\left. + 2C_1 \frac{p}{\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \right] \quad (3.130)$$

Оригинал этого выражения может быть вычислен с помощью повторного интеграла свертки с учетом свойств преобразования Лапласа и Фурье:

$$\begin{aligned} w(x, z, t) = \frac{2\alpha}{\kappa} & \left[\left(e^{-z\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} \right)^{-LF} - \left(\frac{e^{-z\sqrt{s^2 + p^2}}}{\sqrt{s^2 + p^2}} \right)^{-LF} \right] ** \\ & ** \Phi_1^w(x, t) + 2 \left[\frac{e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}}}{\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \right]^{-LF} ** \Phi_2^w(x, t) \end{aligned} \quad (3.131)$$

Непосредственное определение оригиналов в выражении (3.131) весьма затруднительно, поэтому используем асимптотические разложения функций $\Phi_1^{wLF}(p, s)$ и $\Phi_2^{wLF}(p, s)$ по параметру s .

$$\begin{aligned} \Phi_1^{wLF}(p, s) &= \\ &= \frac{s^2 + p^2}{\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}}} \frac{2p^4\beta^2 + 3p^2\left(s^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{s^2}{\beta^2}\left(s^2 + \frac{3}{4}\right) - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2 - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}}{2p^4\beta^2 + 3p^2 s^2 + \frac{s^4}{\beta^2} - 4\beta^2 p^2 \sqrt{p^2 + s^2} \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2}} \xrightarrow{asympt} \\ &\xrightarrow{asympt} = s + \frac{p^2\left(4\beta^3 + \frac{1}{2}\right) - 4p\beta^3 + \frac{5}{8}}{s} + \frac{1}{s^3} \left[\left(16\beta^6 - 10\beta^5 + 4\beta^3 - \frac{1}{8}\right) p^4 + \right. \\ &\quad \left. + \beta^3(-16\beta^3 + 10\beta^2 - 4) p^3 + \left(\frac{5}{2}\beta^3 + \frac{3}{16}\right) p^2 + \frac{11}{128} \right] = \Phi_{1as}^{wLF}(p, s) \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2^{wLF}(p, s) &= \\
&= \frac{p \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + p^2} (1 - \beta^2) p^2 \left(\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}} \right) + \sqrt{s^2 + p^2} \left(s^2 + \beta^2 p^2 + \frac{3}{4} - \sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}} \right)}{\sqrt{s^2 + p^2 - \frac{1}{4}} \left(2\beta^2 p^4 + 3s^2 p^2 + \frac{s^4}{\beta^2} - 4\beta^2 p^2 \sqrt{\frac{s^4}{\beta^2} + p^4 + \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) s^2 p^2} \right)} \xrightarrow{asympt} \\
&\xrightarrow{asympt} \frac{7\beta}{8s^3} + \frac{1}{s^4} \left[\beta p^2 \left(\frac{7}{2}\beta^3 - \frac{7}{2}\beta^2 - \frac{1}{8} \right) + \frac{15}{128} \right] = \Phi_{2as}^{wLF}(p, s)
\end{aligned} \tag{3.133}$$

С учетом асимптотических разложений (3.132) – (3.133) получаем обратные преобразования этих выражений по Лапласу:

$$\begin{aligned}
\Phi_{1as}^{wLF}(p, s) \xrightarrow{L} \Phi_{1as}^{wF}(p, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \delta(t) + H(t) \left\{ p^2 \left(4\beta^3 + \frac{1}{2} \right) - 4p\beta^3 + \frac{5}{8} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{t^2}{2} \left[\left(16\beta^6 - 10\beta^5 + 4\beta^3 - \frac{1}{8} \right) p^4 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta^3 \left(-16\beta^3 + 10\beta^2 - 4 \right) p^3 + \left(\frac{5}{2}\beta^3 + \frac{3}{16} \right) p^2 + \frac{11}{128} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.134}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{2as}^{wLF}(p, s) \xrightarrow{L} \Phi_{2as}^{wF}(p, t) &= \\
&= H(t) \left\{ \frac{7\beta}{8} \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \left[\beta p^2 \left(\frac{7}{2}\beta^3 - \frac{7}{2}\beta^2 - \frac{1}{8} \right) + \frac{15}{128} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Оригиналы этих выражений будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\Phi_{1as}^w(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \delta(t) \delta(x) + \\
&+ H(t) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x) \left(4\beta^3 + \frac{1}{2} \right) + \delta(x) \left(\frac{5}{8} - 4p\beta^3 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{t^2}{2} \left[\left(16\beta^6 - 10\beta^5 + 4\beta^3 - \frac{1}{8} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^4} \delta(x) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta^3(-16\beta^3+10\beta^2-4)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\delta(x)+ \\
& +\left(\frac{5}{2}\beta^3+\frac{3}{16}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x)+\frac{11}{128}\left.\right\}
\end{aligned} \tag{3.136}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{2as}^w(t,x) = H(t) & \left[\delta(x) \left(\frac{7\beta}{8} \frac{t^2}{2} + \frac{15}{128} \frac{t^3}{6} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x) \beta \left(\frac{7}{2} \beta^3 - \frac{7}{2} \beta^2 - \frac{1}{8} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Тогда прогибы в полуплоскости определяются по формуле:

$$\begin{aligned}
w(x,z,\tau) = \frac{2\alpha}{\kappa} & \left[G_0^w(x,z,\tau) - G_1^w(x,z,\tau) ** \right. \\
& \left. ** \Phi_{1as}^w(t,x) + 2G_2^w(x,z,\tau) ** \Phi_{2as}^w(t,x) \right]
\end{aligned} \tag{3.138}$$

В этом выражении

$$\begin{aligned}
G_0^w(x,z,\tau) = \delta(t-z)\delta(x) - & \frac{H(t-z)z}{\pi\sqrt{t^2-z^2}} \times \\
\times \int_0^\infty \sqrt{p^2 - \frac{1}{4}} J_1 \left(\sqrt{t^2-z^2} \sqrt{p^2 - \frac{1}{4}} \right) & \cos(px) dp
\end{aligned} \tag{3.139}$$

$$\begin{aligned}
G_1^w(x,z,\tau) = \frac{H(\tau-z)}{2\pi} \int_0^\infty J_0 \left(|p| \sqrt{\tau^2-z^2} \right) \cos(px) dp = \\
= \frac{H(\tau-z)}{2\pi} \frac{H(\tau-z-x)}{\sqrt{\tau^2-z^2-x^2}}
\end{aligned} \tag{3.140}$$

$$\begin{aligned}
 G_2^w(x, z, \tau) &= \beta \frac{H\left(\tau - \frac{z}{\beta}\right)}{2\pi} \times \\
 &\times \int_0^\infty J_0\left(\beta |p| \sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\beta^2}}\right) \cos(px) dp = \\
 &= \beta \frac{H\left(\tau - \frac{z}{\beta}\right) H\left(\tau - \frac{z}{\beta} - x\right)}{2\pi \sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\beta^2} - x^2}}
 \end{aligned} \tag{3.141}$$

Следует отметить, что оригиналы напряжений определяются аналогичным образом с использованием асимптотических разложений функций по параметру s и свойств преобразования Лапласа и Фурье, а также справочных материалов [110,111]. Графики перемещений представлены на рисунках 3.13. – 3.16.

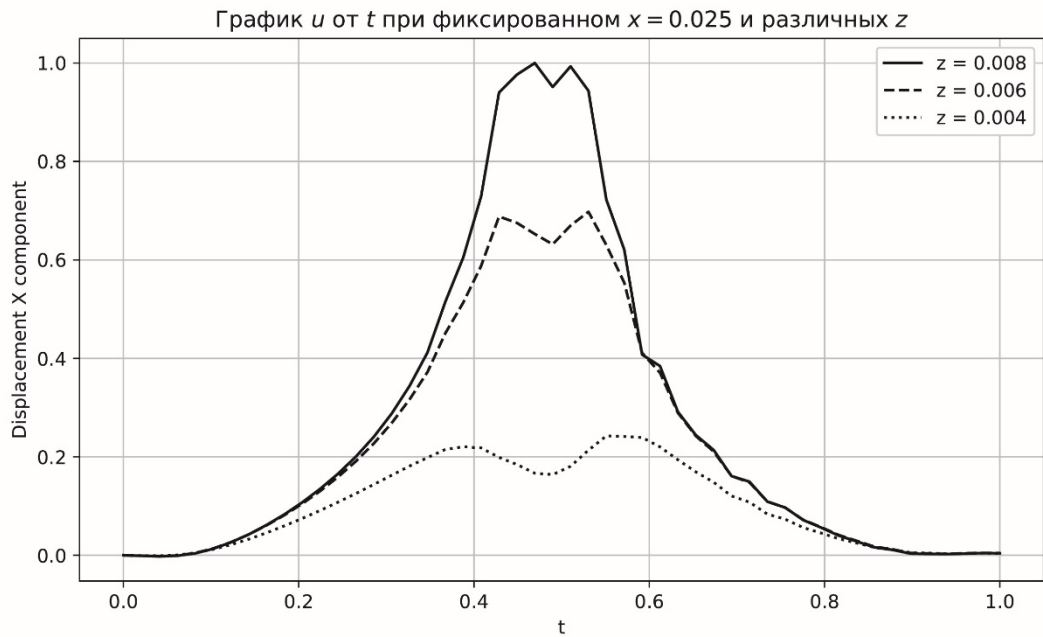


Рисунок 3.13. Зависимость перемещений u от времени t при различном значении глубины z в точке $x = 0.025$.

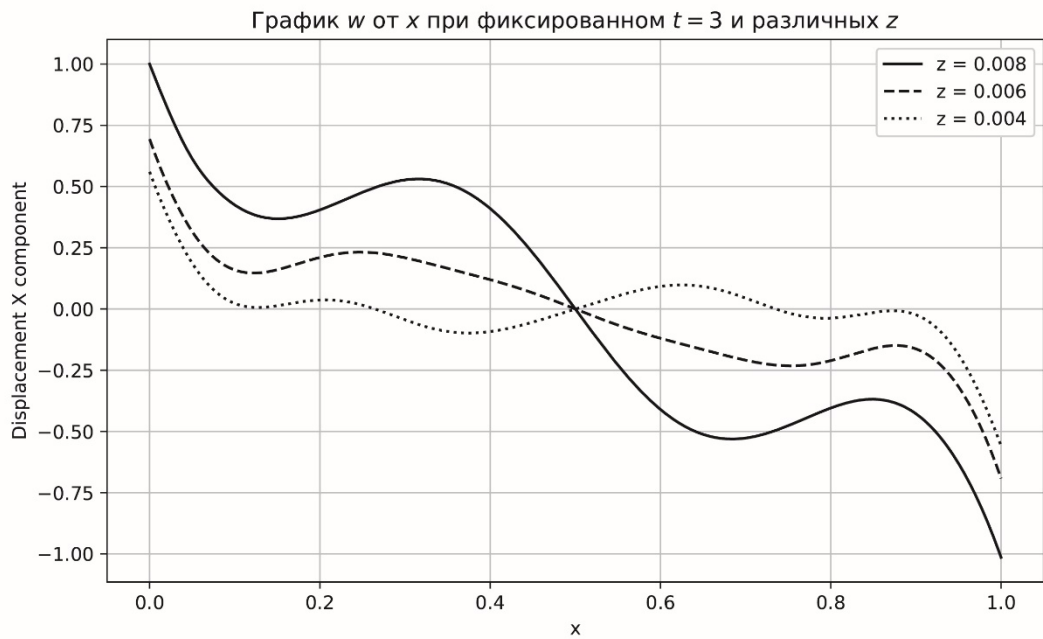


Рисунок 3.14. Зависимость перемещений u от координаты x при различном значении глубины z в момент времени $t = 3$.

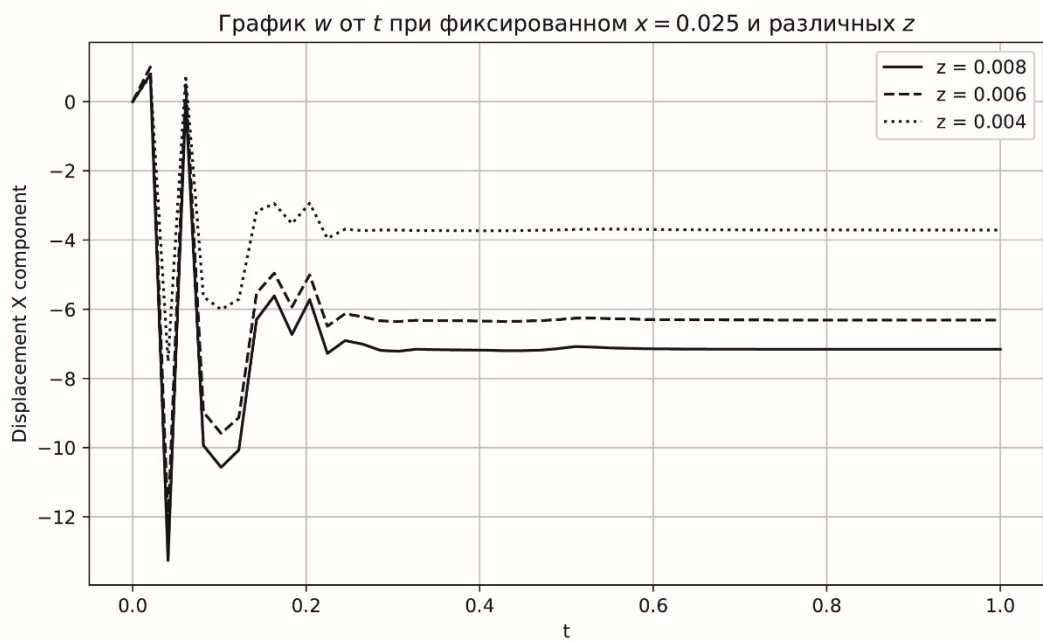


Рисунок 3.15. Зависимость перемещений w от времени t при различном значении глубины z в точке $x = 0.025$.

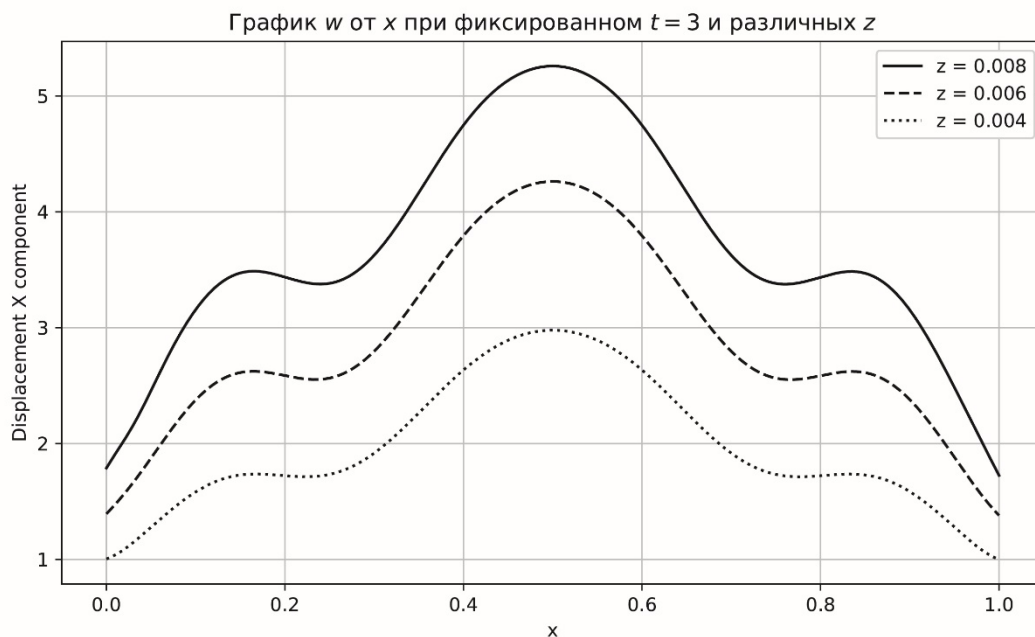


Рисунок 3.16. Зависимость перемещений w от координаты x при различном значении глубины z в момент времени $t = 3$.

В данной главе рассмотрена задача динамического нагрева упругой полуплоскости под воздействием лазерного излучения, с учетом различных моделей теплопроводности. Проведен детальный анализ температурного поля в металлопорошковой композиции, подвергающейся селективному лазерному плавлению, что позволило выявить особенности распределения температур и их влияние на механические свойства материала. Для описания теплопередачи использовались как классическая модель Фурье, так и обобщенные гиперболические модели Грина-Нагди II типа и Максвелла-Каттанео, которые учитывают запаздывание теплового отклика.

С использованием методов интегральных преобразований Фурье и Лапласа были получены аналитические выражения для распределения температурного поля, что позволило провести детальный анализ термического состояния материала. Для решения аналитических уравнений применялся программный комплекс Maple, обеспечивающий точное обращение интегральных преобразований и построение аналитических решений в явном виде. Кроме того,

для визуализации результатов и построения графиков сложных интегралов использовался язык программирования Python, что позволило эффективно анализировать полученные зависимости температурных полей и их изменение по времени.

Проведенный расчет напряженно-деформированного состояния показал, что температурные градиенты, возникающие при лазерном нагреве, приводят к значительным механическим напряжениям, которые должны учитываться при проектировании технологических процессов селективного лазерного плавления. Установлено, что модели теплопроводности Грина-Нагди II типа дают более точное соответствие экспериментальным данным по сравнению с классической теорией Фурье, особенно в условиях кратковременного интенсивного теплового воздействия. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации параметров лазерной обработки и прогнозирования поведения материалов с неклассическими теплофизическими свойствами.

4. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Конечно-элементное моделирование температурных напряжений, возникающих в процессе селективного лазерного плавления, проводилось с использованием программного комплекса COMSOL Multiphysics. В ходе моделирования была реализована двумерная конечно-элементная модель, включающая учет временной и пространственной динамики нагрева и охлаждения материала в процессе аддитивного производства. Исследование проводилось с учетом характеристик теплопроводности, теплоёмкости, коэффициента линейного термического расширения, а также параметров лазерного излучения, таких как мощность, диаметр пятна и скорость сканирования.

Рассмотрены различные режимы лазерного плавления, что позволило оценить влияние технологических параметров на распределение температурных градиентов и возникающих напряжений.

Решение задачи нестационарной термоупругости с использованием комплекса конечно-элементного моделирования COMSOL Multiphysics реализовано с применением модулей Heat Transfer in Solids и Solid Mechanics. Моделирование теплопереноса основывается на основном уравнении теплопроводности:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q, \quad (4.1)$$

где ρ – плотность материала, c_p – удельная теплоемкость, k – коэффициент теплопроводности, T – температура, Q – источник тепла.

В общем случае источник тепла Q может быть задан в виде потока, или в виде лазерного пучка. Для моделирования использовался последний вариант, так как он позволяет учитывать диаметр пятна и тип распределения. В данном случае, для задания подвижного источника тепла воспользуемся следующим выражением:

$$Q(x, y, t) = \frac{2\eta P_l}{\pi r^2} e^{-2\left(\frac{(x-ut)^2 + y^2}{r^2}\right)} \quad (4.2)$$

где r – радиус пятна, x, y – координаты, учитывая, что источник движется вдоль границы $y = 0.01$, y является константой, η – коэффициент поглощения материала (величина безразмерная и задается в пределах от 0 до 1), P_l – мощность лазера, $x - ut$ – координата центра лазерного пятна в заданный момент времени t . Это распределение учитывает тот факт, что интенсивность излучения максимальна в центре лазерного пятна и экспоненциально уменьшается к краям.

Геометрия модели включает в себя расчетную область размером 50x10 мм. Расчетная область представляется изотропной. Общий вид геометрии представлен на рисунке 4.1. При расчете использовались параметры, указанные в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Параметры, использованные при моделировании

Режим	Мощность лазера, P [Вт]	Скорость сканирования, U [мм/сек]	Тип распределения	Диаметр пятна лазера, d [мкм]
1	180	1100	Гауссово	65
2	180	1000	Гауссово	65
3	180	1200	Гауссово	65
4	170	1100	Гауссово	65
5	170	1000	Гауссово	65
6	170	1200	Гауссово	65
7	195	1100	Гауссово	65
8	195	1000	Гауссово	65
9	195	1200	Гауссово	65

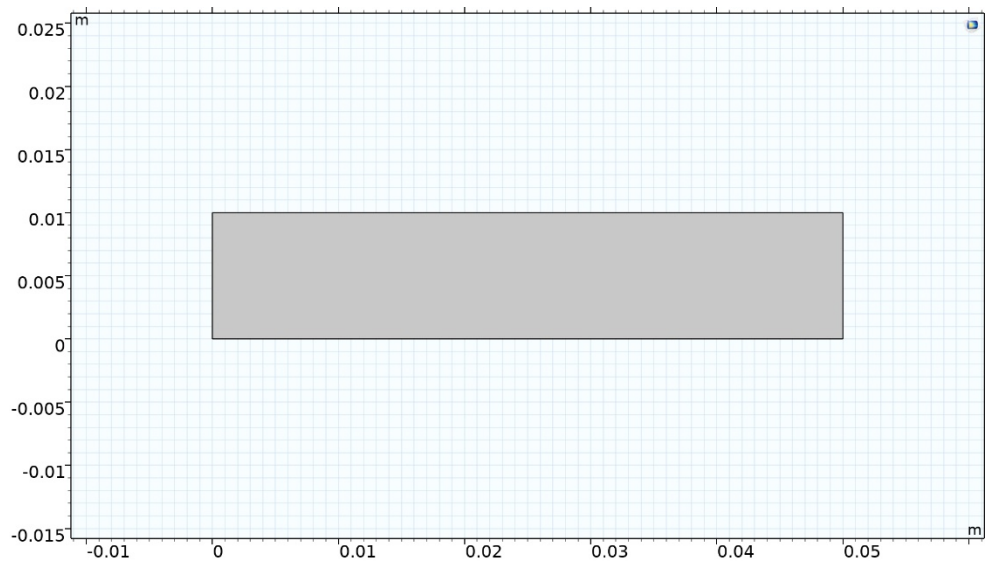


Рисунок 4.1. Геометрия расчетной области.

Для расчета использовалась высокоплотная сетка, состоящая из прямоугольных элементов, рисунок 4.2.

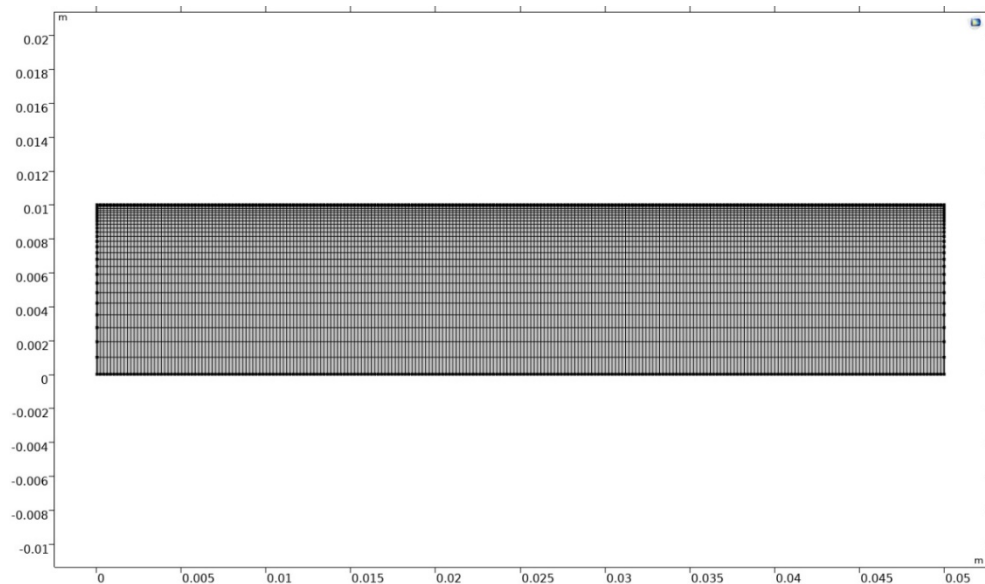


Рисунок 4.2. Конечно-элементная модель расчетной области.

В качестве материала использовалась нержавеющая сталь EOS PH1 с физико-механическими и теплофизическими характеристиками, полученными по результатам экспериментальных исследований и паспортных данных на материал:

теплоемкость при постоянном давлении $C_p = 460 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]$, теплопроводность

$\lambda = 13.8 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right]$, модуль Юнга $E = 208 [\text{ГПа}]$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

4.1. Определение полей температуры, возникающих при нагреве подвижным источником тепла.

В начальный момент времени $t = 0$ температура расчетной области составляет 0°C . На верхней границе расчетной области (рисунок 4.3) действует непрерывная подвижная нагрузка, движущаяся равномерно и прямолинейно вдоль оси OX .

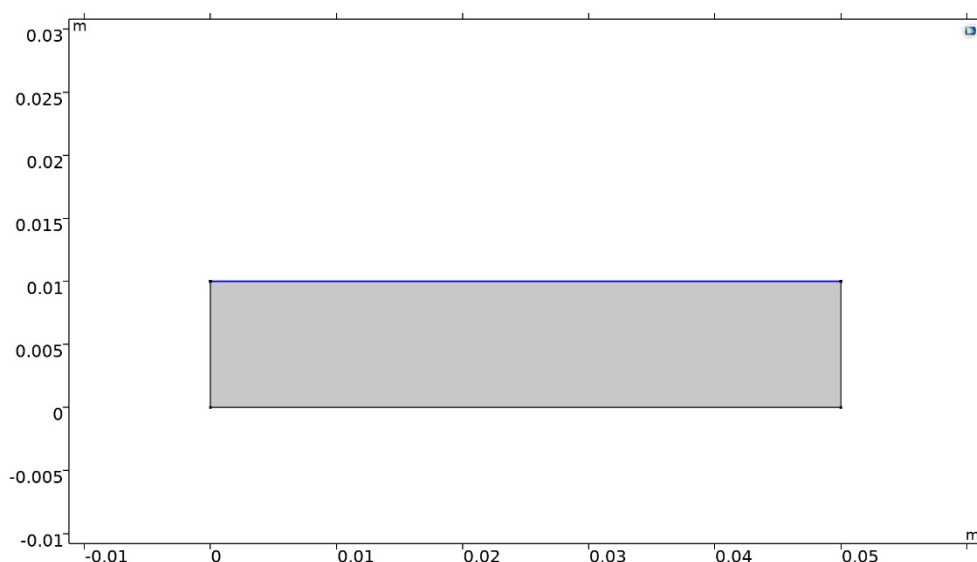


Рисунок 4.3. Область действия подвижной нагрузки.

Уравнение движения источника лазерного излучения можно записать следующим образом:

$$x = x_0 + vt, \quad (4.3)$$

где x – текущее положение пятна лазерного источника, x_0 – начальное положение пятна лазерного излучения, v – скорость движения пятна, t – время.

На верхней границе расчетной области $y = 0.01 [\text{м}]$ действуют граничные условия третьего рода: $q_0 = h(T_{\text{ext}} - T)$, где q_0 – величина теплового потока,

T_{ext} – температура окружающей среды, равная 20°C, T – температура на верхней границе расчетной области.

Результаты конечно-элементного моделирования распределения температуры по глубине вдоль линии действия подвижного источника лазерного излучения при различных режимах представлены на рисунках 4.4 – 4.6.

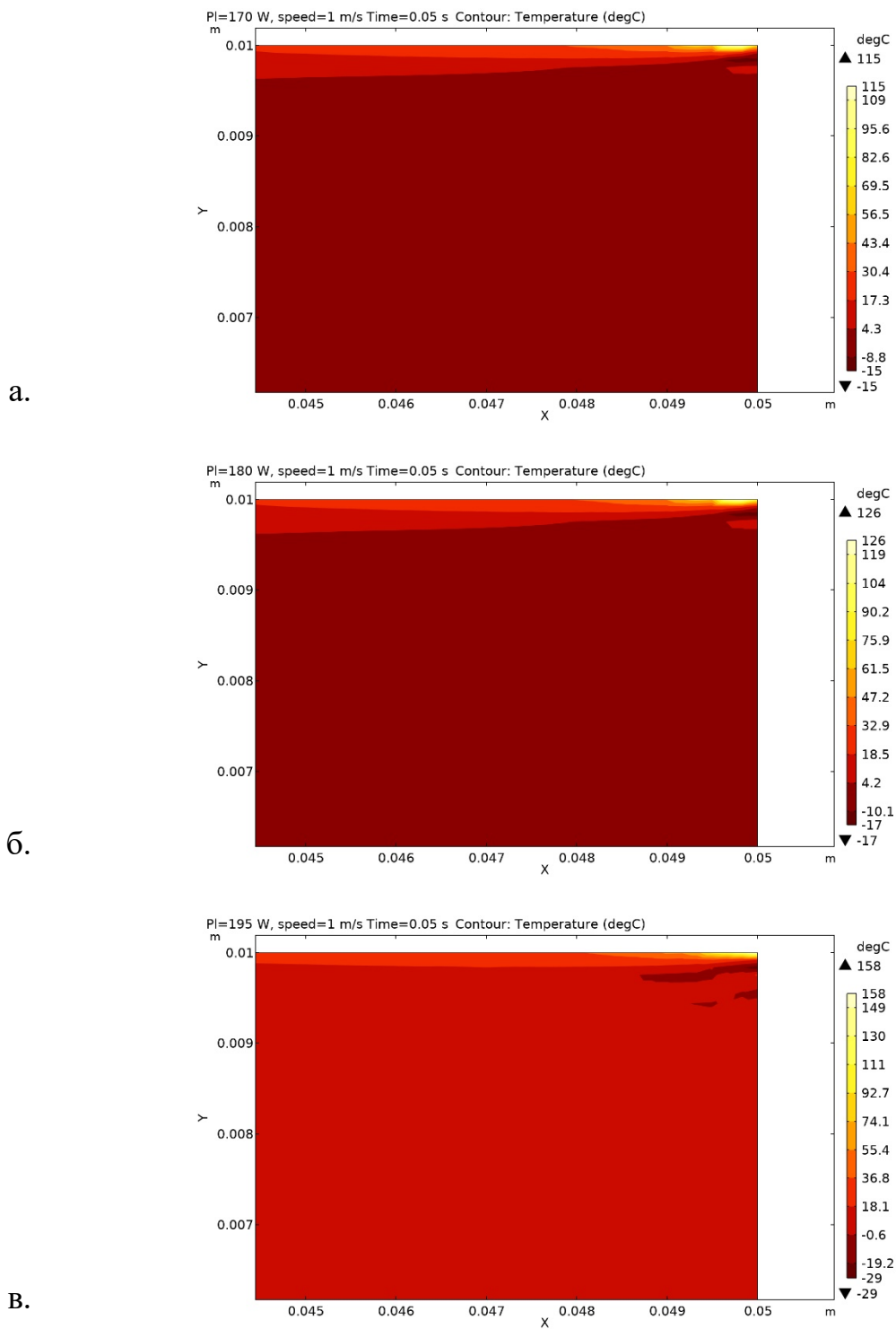


Рисунок 4.4. Распределение температуры в конечный момент времени при $\nu = 1000$ [мм/сек]: а. – $P_l = 170$ [Вт]; б. – $P_l = 180$ [Вт]; в. – $P_l = 195$ [Вт].

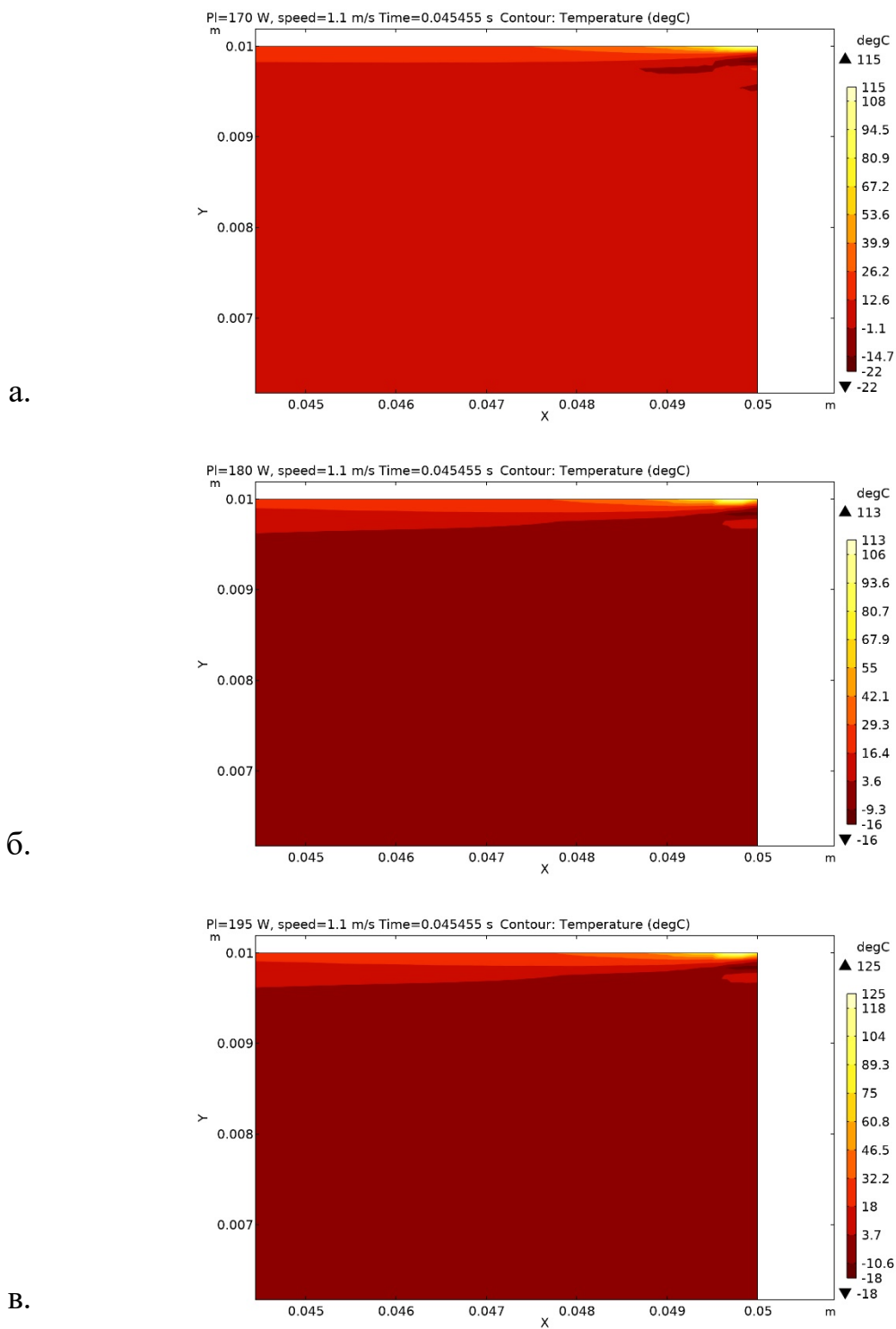


Рисунок 4.5. Распределение температуры в конечный момент времени при $v = 1100$ [мм/сек]: а. – $P_l = 170$ [Вт]; б. – $P_l = 180$ [Вт]; в. – $P_l = 195$ [Вт].

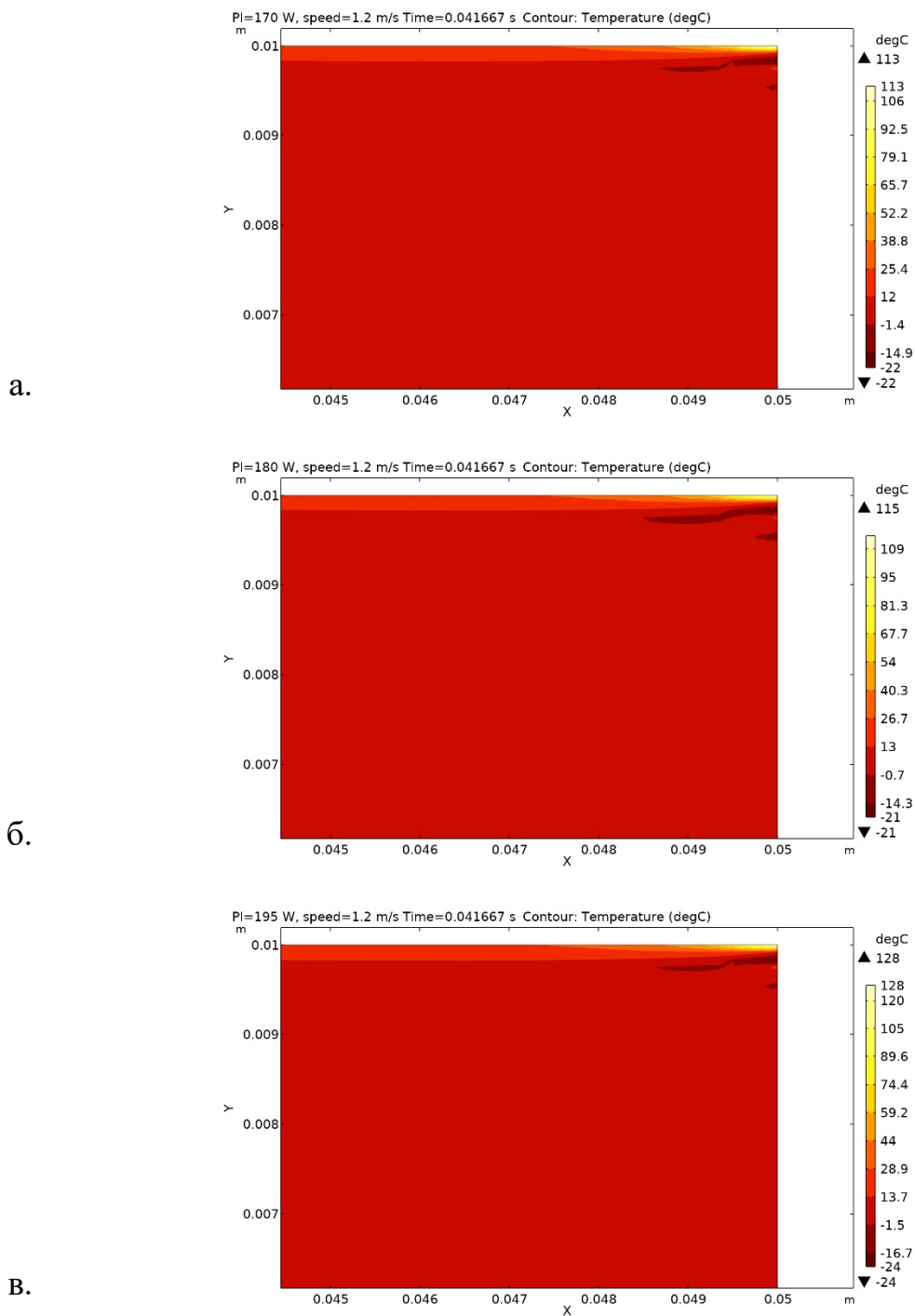


Рисунок 4.6. Распределение температуры в конечный момент времени при $v = 1200$ [мм/сек]: а. – $P_l = 170$ [Вт]; б. – $P_l = 180$ [Вт]; в. – $P_l = 195$ [Вт].

Графики распределения температуры на верхней границе ($y = 0.01$) расчетной области в зависимости от скорости представлены на рисунке 4.7.

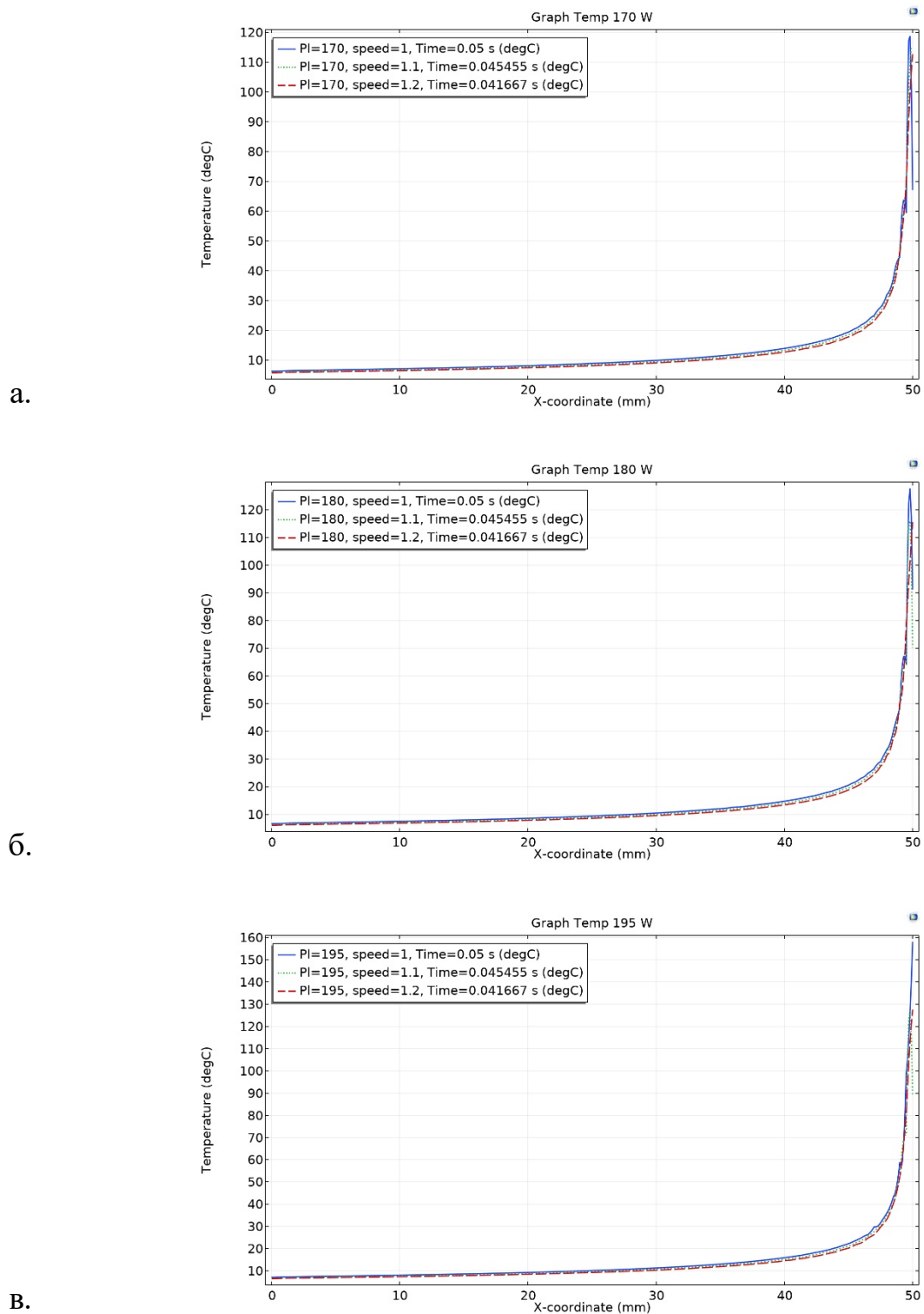


Рисунок 4.7. Распределение температуры вдоль верхней границы расчетной области в конечный момент времени при различной мощности:

а. – $\nu = 1000$ [мм/сек]; б. – $\nu = 1100$ [мм/сек]; в. – $\nu = 1200$ [мм/сек]

Рисунки 4.4 – 4.7 показывают распределение температурного поля в конечный момент времени при различных параметрах процесса. Из рисунков 4.4 – 4.6. видно, что при увеличении мощности лазера происходит более глубокий прогрев материала, а увеличение скорости сканирования снижает максимальные температуры. Рисунок 4.7 демонстрирует, что температурное распределение вдоль верхней границы расчетной области зависит от скорости сканирования: при меньших скоростях температура на поверхности выше из-за более длительного воздействия лазерного луча.

4.2. Расчет напряженно-деформированного состояния, вследствие действия подвижного источника тепла

Основным уравнением, описывающим механическое поведение упругого тела, является уравнение движения, которое учитывает инерционные эффекты, внешние силы и напряженное состояние материала. Общий вид уравнения движения, используемый в программном комплексе COMSOL Multyphysics имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}, \quad (4.4)$$

где ρ – плотность материала, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ – вектор перемещений, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\mathbf{f}$ – вектор внешних сил, $\nabla \boldsymbol{\sigma}$ – дивергенция тензора напряжений, которая представляет собой объемную плотность внутренних сил, $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ – ускорение среды, учитывающее динамические эффекты.

В двумерной постановке, где перемещения зависят только от x и y , уравнения движения записываются в компонентной форме:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x, \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y,\end{aligned}\tag{4.5}$$

где u_x, u_y – компоненты вектора перемещений в плоскости (x, y) , σ_{xx} , σ_{yy} – нормальные компоненты напряжений, σ_{xy} – касательное напряжение, f_x , f_y – компоненты внешних сил.

Для определения температурных напряжений при нестационарном нагреве используется связь между температурой и деформациями, описываемая законом Гука с учетом температурных эффектов:

$$\sigma = D(\varepsilon - \alpha \Delta T),\tag{4.6}$$

где σ – напряжение, D – тензор упругости, ε – деформации, α – коэффициент линейного термического расширения, ΔT – изменение температуры.

Тензор напряжений σ связан с тензором деформаций ε через уравнение термоупругости:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \delta_{ij} \alpha E (T - T_{ref}),\tag{4.7}$$

где C_{ijkl} – тензор упругих коэффициентов, α – коэффициент линейного теплового расширения, E – модуль Юнга, δ_{ij} – символ Кронекера (равен 1, если $i = j$, в ином случае равен нулю), T_{ref} – температура отсчета, ε_{kl} – тензор деформаций, выраженный через градиенты перемещений:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)\tag{4.8}$$

Граничные условия на границе $y = 0$ выглядят следующим образом:

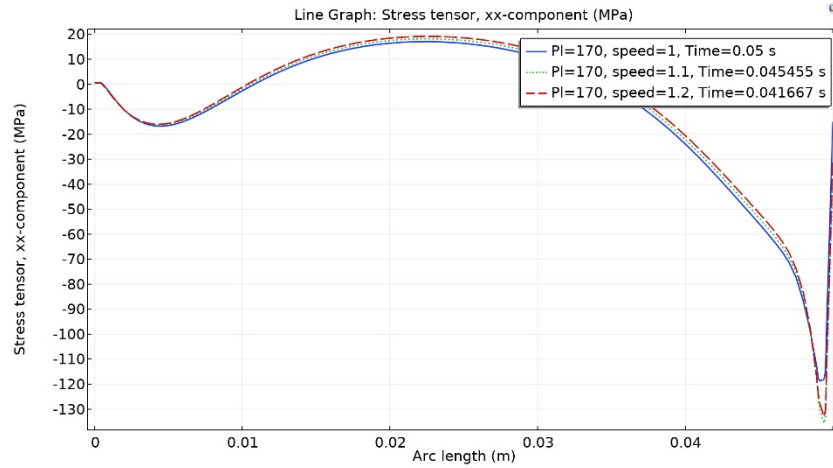
$$u_x = 0, u_y = 0\tag{4.9}$$

На остальных границах действуют условия свободных краев:

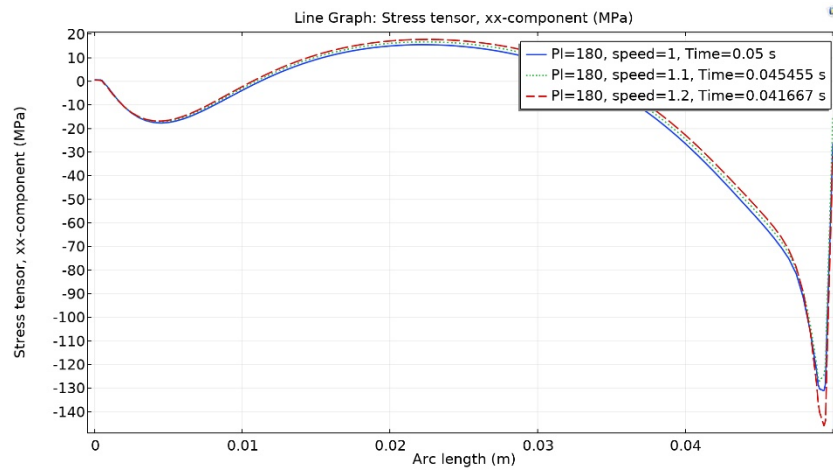
$$\begin{aligned}\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y &= 0, \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y &= 0.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Графики нормальных σ_{xx} , σ_{yy} и касательных σ_{xy} напряжений вдоль верхней границы расчетной области в конечный момент времени при различной скорости представлены на рисунках 4.8 – 4.10.

а.



б.



в.

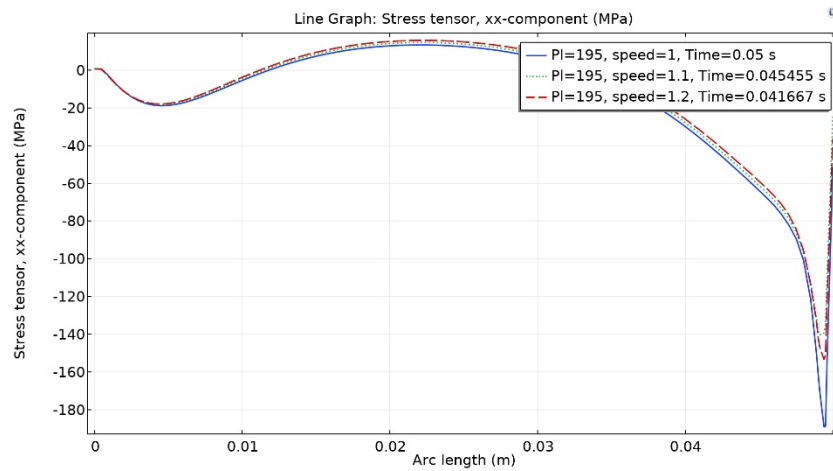
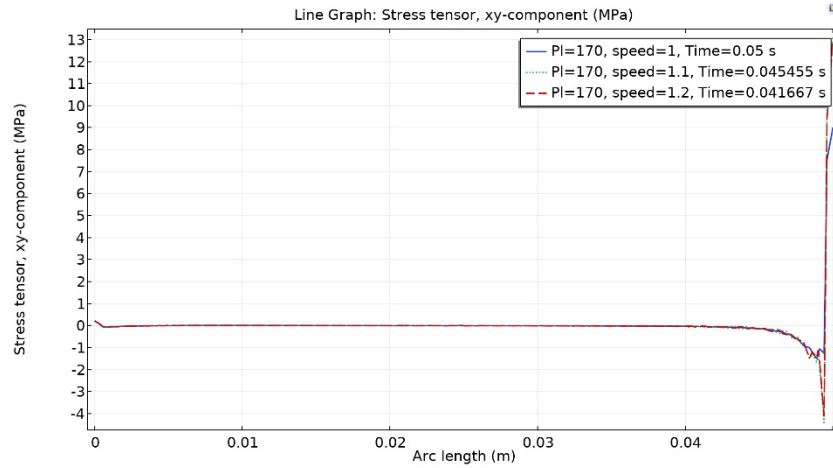


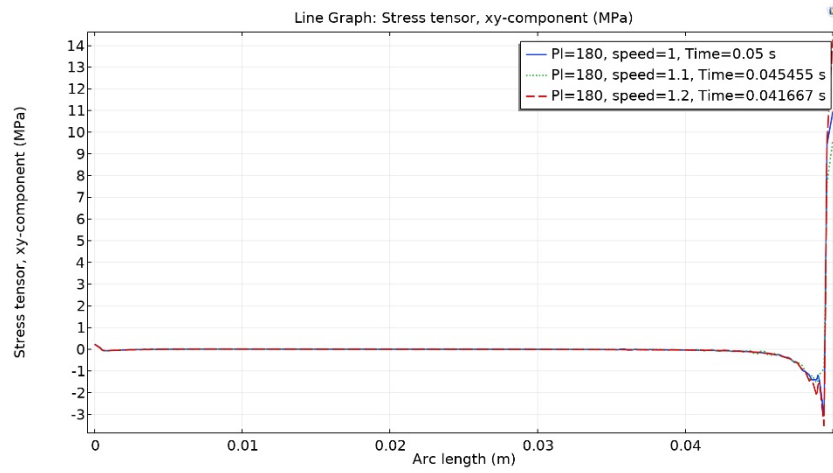
Рисунок 4.8. Графики нормальных напряжений σ_{xx} вдоль верхней границы расчетной области в конечный момент времени при различной скорости:

а. – $P_l = 170$ [Вт]; б. – $P_l = 180$ [Вт]; в. – $P_l = 195$ [Вт].

а.



б.



в.

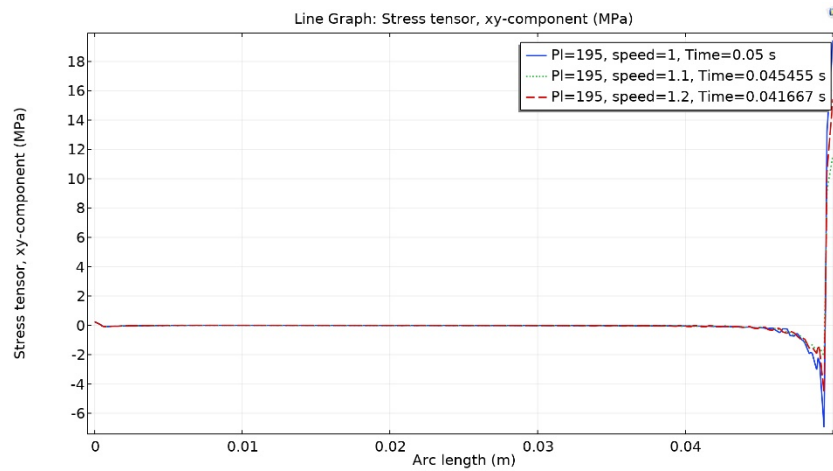
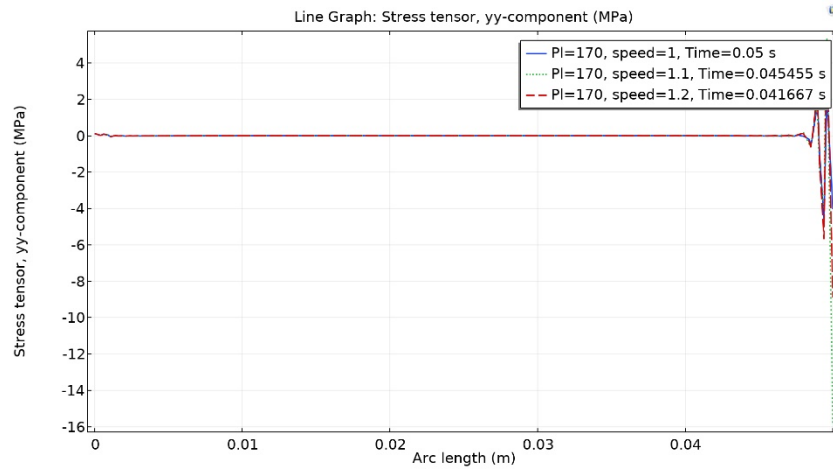


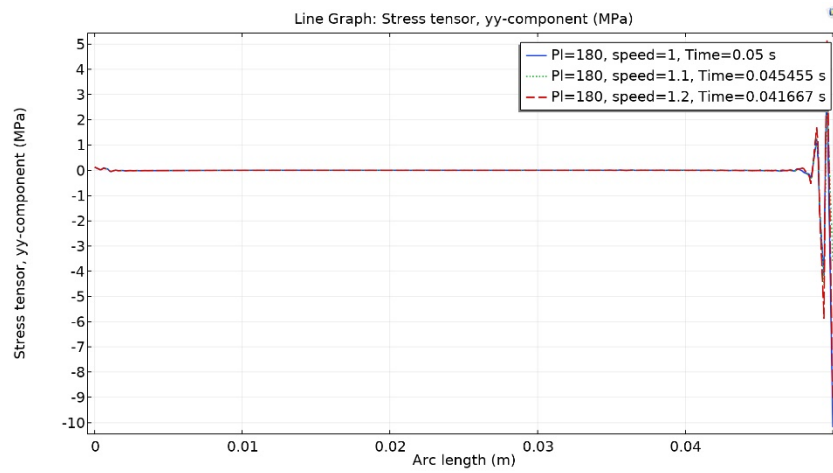
Рисунок 4.9. Графики касательных напряжений σ_{xy} вдоль верхней границы расчетной области в конечный момент времени при различной скорости:

а. – $P_l = 170$ [Вт]; б. – $P_l = 180$ [Вт]; в. – $P_l = 195$ [Вт].

а.



б.



в.

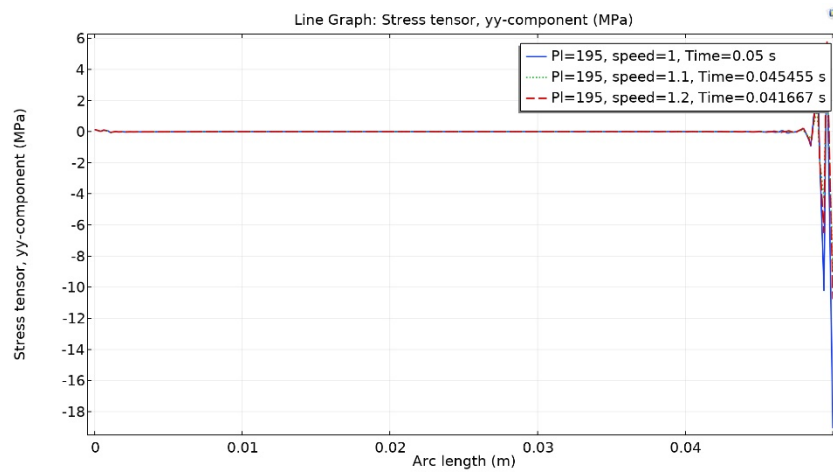
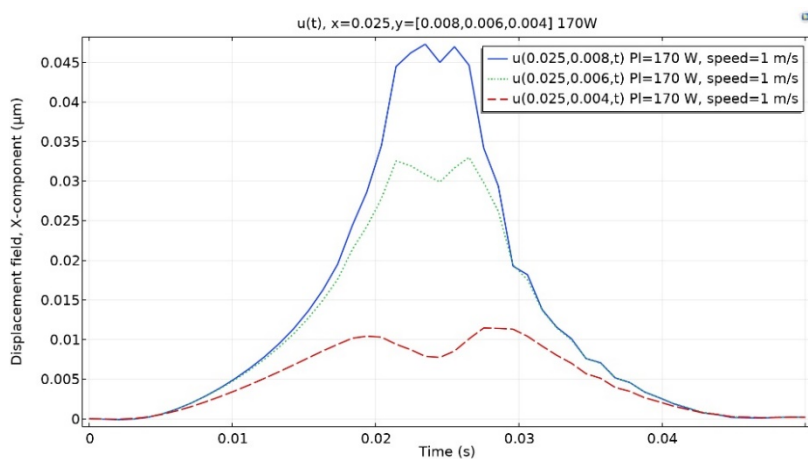


Рисунок 4.10. Графики нормальных напряжений σ_{yy} вдоль верхней границы расчетной области в конечный момент времени при различной скорости:

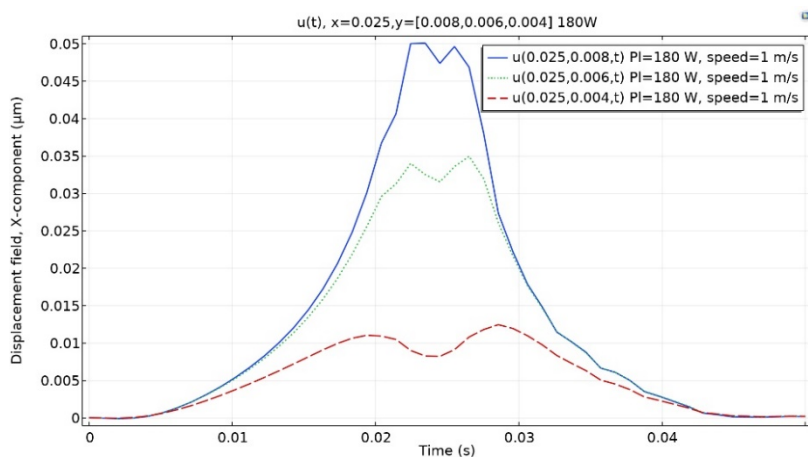
а. — $P_l = 170$ [Вт]; б. — $P_l = 180$ [Вт]; в. — $P_l = 195$ [Вт].

Графики $u(t)$ и $w(t)$ по глубине при различной мощности представлены на рисунках 4.11. – 4.12.

а.



б.



в.

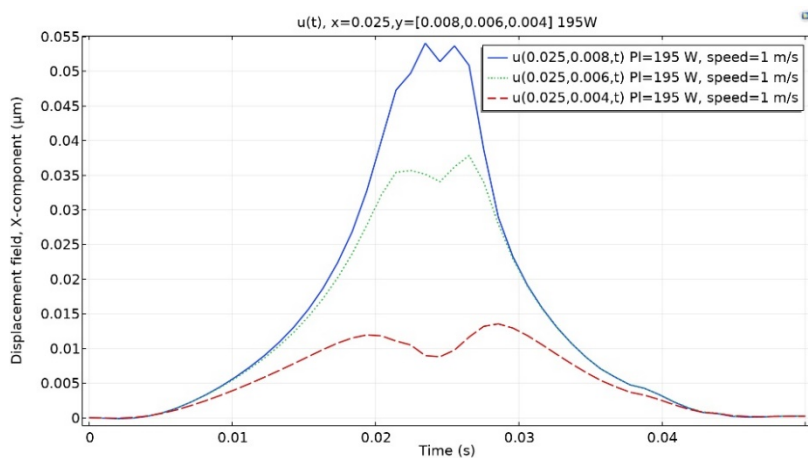
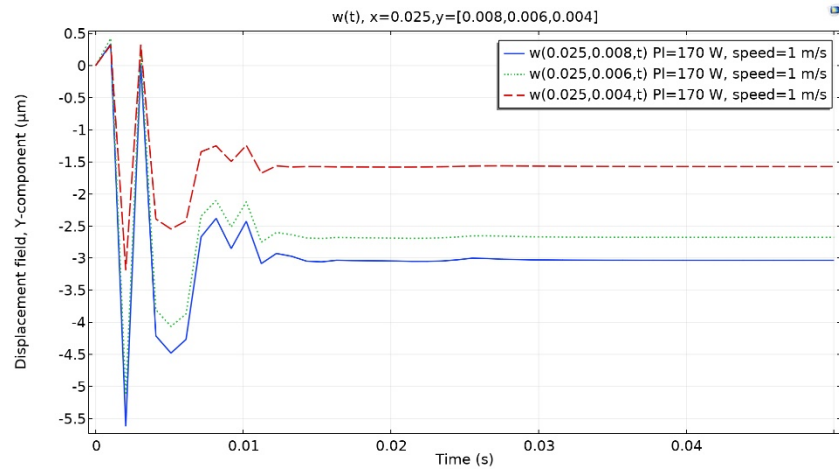


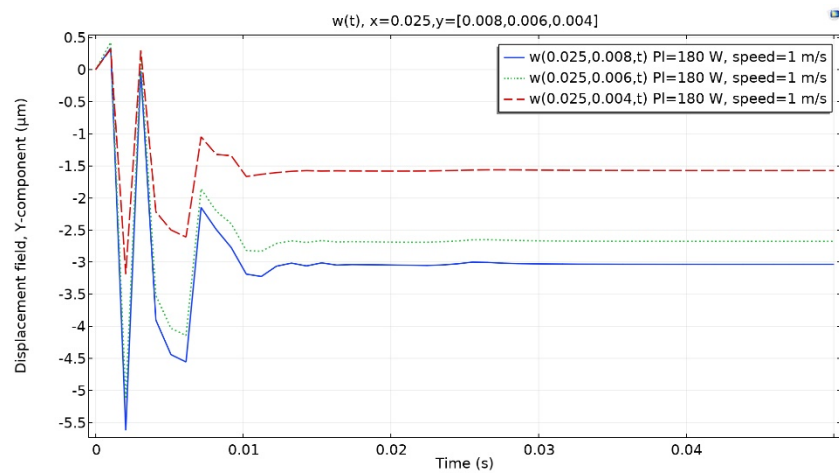
Рисунок 4.11. Графики $u(t)$ при фиксированном x и различных y :

а. – $P_l = 170$ [Вт]; б. – $P_l = 180$ [Вт]; в. – $P_l = 195$ [Вт].

а.



б.



в.

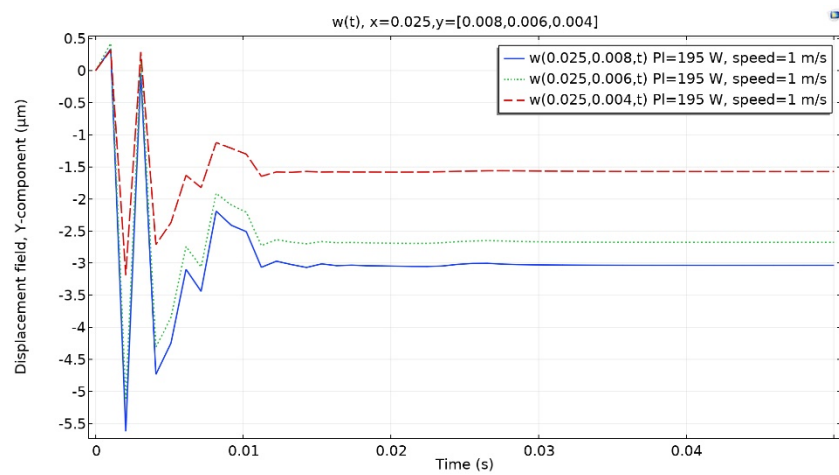


Рисунок 4.12. Графики $w(t)$ при фиксированном x и различных y :

а. – $P_l = 170$ [Вт]; б. – $P_l = 180$ [Вт]; в. – $P_l = 195$ [Вт].

Из графиков напряжений, представленных на рисунках 4.8 – 4.10 можно отметить, что максимальные напряжения локализуются вблизи центра воздействия лазерного пятна и уменьшаются по мере удаления от него. Касательные напряжения, достигающие наибольших значений вблизи зоны плавления, могут определять вероятность возникновения остаточных напряжений в готовом изделии.

Рисунки 4.11 и 4.12 показывают распределение перемещений. Видно, что при увеличении мощности лазера происходит значительное увеличение перемещений в направлении действия силы, что связано с термическим расширением.

Таким образом, анализ полученных графиков подтверждает, что изменение параметров лазерного источника существенно влияет на термомеханическое состояние материала. Оптимизация мощности лазера и скорости сканирования позволяет контролировать температурные градиенты и минимизировать остаточные напряжения, что играет ключевую роль в повышении качества изделий, полученных методом селективного лазерного плавления.

Кроме того, следует отметить, что результаты, полученные в ходе конечно-элементного моделирования, демонстрируют хорошую сходимость с аналитическими решениями, что свидетельствует о корректности используемой конечно-элементной модели при решении задач данного типа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе представлены результаты статических и динамических испытаний образцов на основе металлопорошковой композиции из нержавеющей стали РН1, изготовленных методом послойного селективного лазерного плавления при различных параметрах трехмерной печати. Экспериментальное исследование проводилось с целью определения механических характеристик изготовленных деталей, их дальнейшего использования при аналитическом и конечно-элементном моделировании, а также для анализа влияния параметров процесса трехмерной печати.

Результаты исследования экспериментальных образцов при растяжении показали, что синтезированные материалы имеют сниженные механические свойства по сравнению с аналогичным материалом полученным литьем. Модуль Юнга составил 176 ГПа, что ниже стандартного значения в 193 ГПа. Модуль упругости при изгибе составил 196 ГПа. Предел текучести при растяжении достиг 530 МПа, предел прочности — 750 МПа, а предельные деформации составили 22%. Предел текучести при изгибе составил 900 МПа. В образце на растяжение в зоне разрушения на дне трещины обнаружены не полностью расплавленные частицы, что по всей видимости сказалось на полученный результат. По результатам испытаний на ударный изгиб средний коэффициент ударной вязкости для партии образцов составил 31 Дж/см², с несущественным влиянием в зависимости от ориентации образцов на платформе. По результатам динамических испытаний были определены усталостные характеристики. Уровень напряжений, при котором наблюдались разрушения в два раза ниже, чем характерные значения для аналогичных литых сплавов. С целью исследования причин такого радикального снижения усталостной прочности и установления механизмов разрушения материалов, полученных методом SLM, были исследованы поверхности излом с применением сканирующего электронного микроскопа. Анализ поверхности

излома позволил выявить поры, а также области с нерасплавленным порошком, объемы в которых наблюдаются проблемы с микроструктурой и текстурой материала.

Для разработки адекватной конечно-элементной модели процесса трехмерной печати численно-аналитически решена вспомогательная задача о нагреве полуплоскости подвижным источником лазерного излучения.

Получены аналитические решения для случая прямолинейного движения лазерного пятна излучения, которые сравнивались с результатами расчетов в конечно-элементном комплексе COMSOL Multiphysics для подтверждения условий задания граничных условий.

Решается задача об определении напряженно-деформированного состояния металлпорошковой композиции в процессе селективного лазерного плавления полуплоскости. Для решения поставленной задачи проводится дополнительное исследование по решению вспомогательной задачи о нестационарном нагреве изотропной полуплоскости подвижным поверхностным источником тепла. Для этого строится математическая модель для обобщенного уравнения теплопроводности на основе классической теории и Грина-Нагди II типа, а также модели Максвелла-Каттанео. Показано, что все теории теплопроводности мало различаются при больших временах и различаются при малых временах. Делается вывод, что модель Максвелла-Каттанео более адекватно описывает тепловой процесс при селективном лазерном плавлении так как носит явно волновой характер и используется при определении напряженно деформированного состояния упругой полуплоскости в диссертационной работе.

Напряженно-деформированное состояние определяется из условия, что среда, заполняющая полуплоскость, характеризуется удельной теплоёмкостью C , плотностью ρ и коэффициентом теплопроводности k . Предполагается, что среда является однородной и изотропной, а также что плотность и теплофизические

постоянные не зависят от температуры и отсутствуют объёмные источники тепла в полуплоскости.

Поставленная задача решается аналитически с использованием вспомогательной задачи по определению функции влияния $G(x, z, t)$. Для решения поставленной задачи используется интегральное преобразование Лапласа по времени и интегральные преобразования Фурье по пространственной переменной.

Напряжённо-деформированное состояние металлопорошковой композиции в процессе селективного лазерного плавления полуплоскости определяется на основе решения системы дифференциальных уравнений термоупругости в предположении, что поверхностные нагрузки и массовые силы, а также внутренние источники тепла отсутствуют. Эта система уравнений состоит из уравнения теплопроводности и уравнений движения теории упругости с учётом температурных эффектов. Исходя из принципа суперпозиции решение исходной задачи является свёрткой функции влияния с правой частью граничного условия по переменной x и по времени. В результате проведенных исследований получены кинематические и статические параметры поставленной задачи при различных временах и координатах. Даны рекомендации по использованию этих результатов.

Разработан численно-аналитический метод определения технологических температурных напряжений в задаче о поверхностном нагреве полуплоскости подвижным источником тепла. В основе метода лежит принцип суперпозиции, согласно которому перемещения и напряжения представлены в виде интегральных операторов типа свертки функции влияния с функцией внешнего теплового потока. С помощью интегральных преобразований найдены функции влияния для термоупругой полуплоскости.

Разработан и впервые реализован метод конечно-элементного моделирования технологических температурных напряжений, возникающих в полуплоскости при изготовлении детали методом селективного лазерного плавления. При

моделировании процесса трехмерной печати были использованы механические и тепловые характеристики, полученные в результате экспериментальных исследований изготовленных образцов. Подвижная нагрузка задавалась уравнениями, полученными при аналитическом моделировании. Предложенный метод конечно-элементного расчета позволяет оценивать возникающие в процессе выборочного лазерного плавления технологические температурные напряжения при заданных параметрах печати и может быть использован для подбора оптимальных параметров, при которых эти напряжения будут минимальными.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Yu Yin; Qiyang Tan. Laser additive manufacturing of steels // International Materials Review. – 2022. – Vol. 67, Issue 5.
2. Milewski JO. Additive manufacturing of metals // Applied Mechanics and Materials. – 2017. – Vol. 117. – P. 371–392.
3. Gu D.D., Meiners W., Wissenbach K., Poprawe R. Laser additive manufacturing of metallic components: materials, processes and mechanisms // International Materials Reviews. – 2013. – Vol. 57, No. 3. – P. 133–164.
4. DebRoy T., Wei H.L., Zuback J.S. et al. Additive manufacturing of metallic components – process, structure and properties // Progress in Materials Science. – 2018. – Vol. 92. – P. 112–224.
5. Hu Y., Cong W. A review on laser deposition-additive manufacturing of ceramics and ceramic reinforced metal matrix composites // Ceramics International. – 2018. – Vol. 44, No. 17. – P. 20599–20612.
6. Newman R.C. Beyond the kitchen sink // Nature. – 2002. – Vol. 415, No. 6873. – P. 743–744.
7. Sedriks A. Role of sulphide inclusions in pitting and crevice corrosion of stainless steels // International Metals Reviews. – 1983. – Vol. 28, No. 1. – P. 295–307.
8. Reichardt A., Niendorf T., Maier H.J. et al. Advances in additive manufacturing of metal-based functionally graded materials // International Materials Reviews. – 2020. – Vol. 66. – P. 1–29.
9. Loh G.H., Pei E., Chua C.K., Song J. An overview of functionally graded additive manufacturing // Additive Manufacturing. – 2018. – Vol. 23. – P. 34–44.
10. Aboulkhair N.T., Simonelli M., Parry L. et al. 3D printing of aluminium alloys using selective laser melting // Progress in Materials Science. – 2019. – Vol. 106. – Article ID 100578.

11. Bajaj P., Hariharan A., Kini A. et al. Steels in additive manufacturing: a review of their microstructure and properties // *Materials Science and Engineering: A*. – 2020. – Vol. 772. – Article ID 138633.
12. Fayazfar H., Salarian M., Rogalsky A. et al. A critical review of powder-based additive manufacturing of ferrous alloys: process parameters, microstructure and mechanical properties // *Materials & Design*. – 2018. – Vol. 144. – P. 98–128.
13. Zhang D.Y., Qiu D., Gibson M.A. et al. Metal alloys for fusion-based additive manufacturing // *Advanced Engineering Materials*. – 2018. – Vol. 20, No. 5. – Article ID 1700952.
14. Herzog D., Seyda V., Wycisk E., Emmelmann C. Additive manufacturing of metals // *Acta Materialia*. – 2016. – Vol. 117. – P. 371–392.
15. Yadroitsev I., Shishkovsky I., Bertrand Ph., Smurov I. Single track formation in selective laser melting of metal powders // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2010. – Vol. 210, No. 12. – P. 1624–1631.
16. Zumofen L., Imgrund P., Zaeh M.F. Quality related effects of the preheating temperature on laser melted high carbon content steels // *Industrializing Additive Manufacturing – AMPA 2017*. – 2018. – P. 210–219.
17. Saeidi K., Kvetkova L., Lofaj F., Shen Z. Austenitic stainless steel strengthened by the in situ formation of oxide nanoinclusions // *RSC Advances*. – 2015. – Vol. 5, No. 27. – P. 20747–20750.
18. Saeidi K., Gao X., Zhong Y., Shen Z.J. Hardened austenite steel with columnar sub-grain structure formed by laser melting // *Materials Science and Engineering: A*. – 2015. – Vol. 625. – P. 221–229.
19. Yan F., Xiong W., Faierson E., Olson G.B. Characterization of nano-scale oxides in austenitic stainless steel processed by powder bed fusion // *Scripta Materialia*. – 2018. – Vol. 155. – P. 104–108.

20. Laleh M, Hughes A.E., Xu W. et al. On the unusual intergranular corrosion resistance of 316L stainless steel additively manufactured by selective laser melting // *Corrosion Science*. – 2019. – Vol. 161. – Article ID 108189.
21. Zhang B., Li Y., Bai Q. Defect formation mechanisms in selective laser melting: a review // *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. – 2017. – Vol. 30, No. 3. – P. 515–527.
22. Zhao X., Chen J., Lin X., Huang W. Study on microstructure and mechanical properties of laser rapid forming Inconel 718 // *Materials Science and Engineering: A*. – 2008. – Vol. 478, No. 1–2. – P. 119–124.
23. Neugebauer F et al. Multi scale FEM simulation for distortion calculation in AM of hardening stainless steel // *International Workshop on Thermal Forming and Welding Distortion*, Bremen, Germany. – 2014.
24. Xie JW et al. Effect of direct laser re-melting processing parameters and scanning strategies on the densification of tool steels // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2005. – Vol. 170, No. 3. – P. 516–523.
25. J Zhang, H Huang, G Liu, H Zong, C Zhang. Stiffness and energy absorption of additive manufactured hybrid lattice structures // *Virtual and Physical Prototyping*. – 2021.
26. Thomas Tancogne-Dejean, Adriaan B. Spierings, Dirk Mohr. Additively-manufactured metallic micro-lattice materials for high specific energy absorption under static and dynamic loading // *Acta Materialia*. – 2016.
27. Chunze Yan, Liang Hao, Ahmed Hussein, David Raymont. Evaluations of cellular lattice structures manufactured using selective laser melting // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. – 2012. – Vol. 62. – P. 32–38.
28. Frazier W.E. Metal additive manufacturing: a review // *Journal of Materials Engineering and Performance*. – 2014. – Vol. 23, No. 6. – P. 1917–1928.

29. Li R.D. et al. Balling behavior of stainless steel and nickel powder during selective laser melting process // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2012. – Vol. 59, No. 9–12. – P. 1025–1035.
30. Gu D.D., Shen Y.F. Balling phenomena in direct laser sintering of stainless steel powder: metallurgical mechanisms and control methods // Materials & Design. – 2009. – Vol. 30, No. 8. – P. 2903–2910.
31. Chen X. et al. Microstructure and properties of hybrid additive manufacturing 316L component by directed energy deposition and laser remelting // Journal of Iron and Steel Research International. – 2020. – Vol. 27, No. 7. – P. 842–848.
32. Marchese G. et al. Characterization and comparison of Inconel 625 processed by selective laser melting and laser metal deposition // Advanced Engineering Materials. – 2017. – Vol. 19, No. 3. – Article ID 1600635.
33. Awd M. et al. Comparison of microstructure and mechanical properties of Scalmetalloy® produced by selective laser melting and laser metal deposition // Materials (Basel). – 2018. – Vol. 11, No. 1. – P. 17.
34. Errico V. et al. On the feasibility of AISI 304 stainless steel laser welding with metal powder // Journal of Manufacturing Processes. – 2020. – Vol. 56. – P. 96–105.
35. Arrizubieta J.I. et al. Evaluation of the relevance of melt pool dynamics in laser material deposition process modeling // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2017. – Vol. 115. – P. 80–91.
36. Handbook A. Volume 6: Welding, Brazing and Soldering. – Almere: ASM International, 1993. – P. 2603.
37. Eagar T, Tsai N. Temperature fields produced by traveling distributed heat sources // Welding Journal. – 1983. – Vol. 62, No. 12. – P. 346.
38. Trapp J. et al. In situ absorptivity measurements of metallic powders during laser powder-bed fusion additive manufacturing // Applied Materials Today. – 2017. – Vol. 9. – P. 341–349.

39. Choi J, Chang Y. Characteristics of laser aided direct metal/material deposition process for tool steel // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 2005. – Vol. 45, No. 4–5. – P. 597–607.
40. Zhang K, Liu W. Influences of processing parameters on microstructure and properties of laser direct deposited stainless steel components // International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation. – 2009. – IEEE.
41. Lu Z.L. et al. Investigation into the direct laser forming process of steam turbine blade // Optics and Lasers in Engineering. – 2011. – Vol. 49, No. 9–10. – P. 1101–1110.
42. Król M., Kujawa M., Dobrzański L.A. et al. Influence of technological parameters on additive manufacturing steel parts in selective laser sintering // Archives of Materials Science and Engineering. – 2014. – Vol. 67, No. 2. – P. 84–92.
43. Matilainen V.P. et al. Preliminary investigation of keyhole phenomena during single layer fabrication in laser additive manufacturing of stainless steel // 15th Nordic Laser Materials Processing Conference, Nolamp 15. – 2015. – Vol. 78. – P. 377–387.
44. Wang Z.Q., Palmer T.A., Beese A.M. Effect of processing parameters on microstructure and tensile properties of austenitic stainless steel 304L made by directed energy deposition additive manufacturing // Acta Materialia. – 2016. – Vol. 110. – P. 226–235.
45. Stephanie Fanselow et. al. Production of spherical wax and polyolefin microparticles by melt emulsification for additive manufacturing // Chemical Engineering Science. – 2016. – Vol. 141.
46. Andrea Diani, Lorenzo Moro, Luisa Rossetto. Melting of paraffin waxes embedded in a porous matrix made by additive manufacturing // Applied Sciences. – 2021. – Vol. 11, No. 12. – Article ID 5396.
47. Röttger A., Geenen K., Windmann M., Binner F., Theisen W. Comparison of microstructure and mechanical properties of 316L austenitic steel processed by

selective laser melting with hot-isostatic pressed and cast material // *Materials Science and Engineering: A*. – 2016. – Vol. 678.

48. Tan, P., Shen, F., Li, B., Zhou, K. A thermo-mechanical coupling model for predicting temperature and residual stress fields in selective laser melting // *International Conference on Progress in Additive Manufacturing*. – 2018. – P. 564–570.

49. Nagesha, B., Anand Kumar, S., Vinodh, K. et. al. A thermo-mechanical modelling approach on the residual stress prediction of SLM processed HPNGV aeroengine part // *Materials Today: Proceedings*. – 2021. – Vol. 44.

50. Pieklo J. et. al. Numerical and Experimental Analysis of Strength Loss of 1.2709 Maraging Steel Produced by Selective Laser Melting (SLM) under Thermo-Mechanical Fatigue Conditions // *Materials*. – 2023. – Vol. 16, No. 24. – <https://doi.org/10.3390/ma16247682>.

51. Stavropoulos, P., Foteinopoulos, P., Papacharalampopoulos, A., Tsoukantas, G. Warping in SLM additive manufacturing processes: estimation through thermo-mechanical analysis // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. – 2019. – <https://doi.org/10.1007/s00170-019-04105-2>.

52. Silva R.P.P., Morteau M.V.V., Santos F.J. Discretized and experimental investigation of thermo-hydraulic behavior in a compact heat exchanger manufactured via SLM process // *Thermal Science and Engineering Progress*. – 2023. – Vol. 46.

53. Blackford, B., Zak, G., Kim, I. Y. The effect of scan path on thermal gradient during selective laser melting // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. – 2020.

54. Wei Luo, Jizhuang Hui et. al. Study on the influence of selective laser melting temperature on the melting bath // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2024.

55. Li, Y., Gu, D. Parametric analysis of thermal behavior during selective laser melting additive manufacturing of aluminum alloy powder // *Materials & Design*. – 2014. – Vol. 63.

56. Zhang, D., Zhang, P., Liu, Z., Feng, Z., Wang, C., Guo, Y. Thermofluid field of molten pool and its effects during selective laser melting (SLM) of Inconel 718 alloy // Additive Manufacturing. – 2018. – Vol. 21
57. Anand Nitesh, Kai-Chun Chang. An efficient transient three-dimensional thermomechanical modeling of dynamic thermal stress building and releasing in a selective laser melting process // Journal of Materials Processing Technology. – 2022. – <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2022.117741>.
58. Sudenkov, Y.V., Zimin, B.A. Effect of “the thermal piston” in a dynamic thermoelastic problem // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2015. – Vol. 85.
59. Kartashov E. Dynamic thermoviscoelasticity in a thermal shock problem // Thermal Engineering. – 2013. – Vol. 59.
60. Kolomeitsev V., Kolomeitseva O., Kolomeitsev E. Dynamic problems of thermoelasticity and thermoelastoplasticity applied to high-temperature and ceramic materials // Heat Engineering. – 2008. – Vol. 49.
61. Rajni. Some generalized problems in thermoelasticity // Journal of Emerging Technologies and Innovative Research (JETIR). – 2018. – Vol. 5.
62. Gaikward K.Y. Green’s function approach to thermal deflection of a thin hollow circular disk under axisymmetric heat source // Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2021.
63. Belyankova, T.I., Kalinchuk, V.V. Green’s function for a prestressed thermoelastic half-space with an inhomogeneous coating // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2016. – Vol. 57, No. 5. – P. 828–840.
64. Petre P. Teodorescu. Introduction to Thermoelasticity // In: Treatise on Classical Elasticity. – 2013. – P. 671–698.
65. Wang, Z.-W., Fu, L.-Y., Wei, J., Hou, W., Ba, J., Carcione, J. M. Carcione J.M. On the Green function of the Lord–Shulman thermoelasticity equations // Geophysical Journal International. – 2019.

66. Ökten, K., & Biyikoğlu, A. Development of thermal model for the determination of SLM process parameters // Optics and Laser Technology. – 2021. – Vol. 137.
67. C. Fu, Y. Guo. Three-dimensional temperature gradient mechanism in selective laser melting of Ti–6Al–4V // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2014. – Vol. 136, No. 6.
68. I. Yadroitsev, P. Krakhmalev, I. Yadroitsava. Selective laser melting of Ti6Al4V alloy for biomedical applications: temperature monitoring and microstructural evolution // Journal of Alloys and Compounds. – 2014. – Vol. 583. – <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2013.08.183>.
69. Y. Li, K. Zhou, S.B. Tor, C.K. Chua, K.F. Leong. Heat transfer and phase transition in the selective laser melting process // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2017. – Vol. 108. – P. 2408–2416. – <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.01.093>.
70. H. Chen, Y. Chen, Y. Liu, Q. Wei, Y. Shi, W. Yan. Packing quality of powder layer during counter-rolling-type powder spreading process in additive manufacturing // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 2020. – Vol. 153. – <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2020.103553>.
71. Apetre N., Michopoulos J., Steben J. Analytical thermoelastic solutions for additive manufacturing processes // Additive Manufacturing. – 2022. – Vol. 56.
72. Yang Y., Ayas C. A semi-analytical thermal modelling approach for selective laser melting // Additive Manufacturing. – 2018. – Vol. 21.
73. L. Thijs, F. Verhaeghe, T. Craeghs, J. Van Humbeeck, J.P. Kruth. A study of the microstructural evolution during selective laser melting of Ti–6Al–4V // Acta Materialia. – 2010. – Vol. 58, No. 9. – P. 3303–3312. – <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2010.02.004>.

74. Y. Karabulut, E. Tascioglu, Y. Kaynak. Heat treatment temperature-induced microstructure, microhardness and wear resistance of Inconel 718 produced by selective laser melting additive manufacturing // *Optik*. – 2019. – Article ID 163907.
75. A. Hussein, L. Hao, C. Yan, R. Everson. Finite element simulation of the temperature and stress fields in single layers built without-support in selective laser melting // *Materials & Design*. – 2013. – Vol. 52. – P. 638–647.
76. Y. Li, K. Zhou, S.B. Tor, C.K. Chua, K.F. Leong. Heat transfer and phase transition in the selective laser melting process // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2017. – Vol. 108. – P. 2408–2416.
77. Tan, P., Shen, F., Li, B., Zhou, K. A thermo-metallurgical-mechanical model for selective laser melting of Ti6Al4V // *Materials & Design*. – 2019. – Article ID 107642. – <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107642>.
78. Li, C., Fu, C. H., Guo, Y. B., Fang, F. Z. A multiscale modeling approach for fast prediction of part distortion in selective laser melting // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2016. – Vol. 229. – P. 703–712.
79. Mukherjee, T., Zhang, W., DebRoy, T. An improved prediction of residual stresses and distortion in additive manufacturing // *Computational Materials Science*. – 2017. – Vol. 126. – P. 360–372.
80. Li, Y., Zhou, K., Tan, P., Tor, S.B., Chua, C.K., Leong, K.F. Modeling temperature and residual stress fields in selective laser melting // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2018. – Vol. 136. – P. 24–35.
81. Shipley, H., McDonnell, D. et. al. Optimization of process parameters to address fundamental challenges during selective laser melting of Ti–6Al–4V: A review // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. – 2018. – Vol. 128. – P. 1–20.
82. Lu, X., Lin, X., Chiumenti, M., Cervera, M. et. al. Finite element analysis and experimental validation of the thermomechanical behavior in laser solid forming of Ti–6Al–4V // *Additive Manufacturing*. – 2018. – Vol. 21. – P. 30–40.

83. Zaeh, M.F., Branner, G. Investigations on residual stresses and deformations in selective laser melting // *Production Engineering*. – 2009. – Vol. 4, No. 1. – P. 35–45.
84. Fan, Y., Cheng, P., Yao, Y. L., Yang, Z., Egland, K. Effect of phase transformations on laser forming of Ti–6Al–4V alloy // *Journal of Applied Physics*. – 2005. – Vol. 98, No. 1.
85. Deng, D. FEM prediction of welding residual stress and distortion in carbon steel considering phase transformation effects // *Materials & Design*. – 2009. – Vol. 30, No. 2. – P. 359–366.
86. Masayuki Arai, Yosuke Kuwahara. Numerical analysis of dynamic thermoelastic two-dimensional problem combined with non-Fourier heat transfer equation by finite-difference time-domain method // *Transactions of the JSME*. – 2022. – Vol. 88, No. 911. – doi:10.1299/transjsme.22-00007.
87. Ruysen R., Hachmi Ben Dhia. A finite addition of matter elements method for modeling and solution of an SLM thermal problem by a multiscale method // *Numerical Methods in Engineering*. – 2021. – <https://doi.org/10.1002/nme.6915>.
88. Orekhov, A.A., Rabinskiy, L.N., Fedotenkov, G.V. Fundamental Solutions of the Equations of Classical and Generalized Heat Conduction Models // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. – 2023. – Vol. 165. – P. 404–414. – doi:10.26907/2541-7746.2023.4.404-414.
89. Dobryanskiy, V.N., Fedotenkov, G.V., Orekhov, A.A., Rabinskiy, L.N. Generalized Unsteady Thermal Conductivity in a Half-Space // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2023. – Vol. 44. – P. 4429–4437. – doi:10.1134/S1995080223100086.
90. Orekhov, A., Rabinskiy, L., Fedotenkov, G. Analytical Model of Heating an Isotropic Half-Space by a Moving Laser Source with a Gaussian Distribution // *Symmetry*. – 2022. – Vol. 14. – doi:10.3390/sym14040650.
91. Formalev, V.F., Garibyan, B.A., Orekhov, A.A. Mathematical Modeling of Heat Transfer in Anisotropic Half-Space Based on the Generalized Parabolic Wave Heat

Transfer Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – P. 1842–1849. – doi:10.1134/S1995080222100110.

92. Dobryanskiy, V.N., Fedotenkov, G.V., Orekhov, A.A., Rabinskiy, L.N. Estimation of Finite Heat Distribution Rate in the Process of Intensive Heating of Solids // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – P. 1832–1841. – doi:10.1134/S1995080222100079.

93. Kuznetsova, E.L., Orekhov, A.A. Numerical Simulation of the Thermal Stress State in the 3D Printing Process within a Single Layer // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2611.

94. Kriven, G., Kuznetsova, E., Rabinskiy, L. The Study of the Temperature Field Propagation in a Nonlinear Anisotropic Space with the Relaxation Time of the Heat Flux // AIP Conference Proceedings. – 2023. – Vol. 2910.

95. Fedotenkov, G., Rabinskiy, L., Lurie, S. Conductive Heat Transfer in Materials under Intense Heat Flows // Symmetry. – 2022. – Vol. 14. – doi:10.3390/sym14091950.

96. Qiu, T.Q., Tien, C.L. Short-pulse laser heating on metals // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1992. – Vol. 35, No. 3. – P. 719–726.

97. Qiu, T.Q., C.L. Tien. Heat transfer mechanisms during short-pulse laser heating of metals // Journal of Heat Transfer. – 1993. – Vol. 115. – P. 835–841.

98. Al-Nimr, M.A., Arpaci, V.S. Picosecond thermal pulses in thin metal films // Journal of Applied Physics. – 1999. – Vol. 85, No. 5. – P. 2517–2521.

99. Al-Nimr, M.A. Heat transfer mechanisms during short-duration laser heating of thin metal films // International Journal of Thermophysics. – 1997. – Vol. 18, No. 5. – P. 1257–1268.

100. Cattaneo, C. A form of heat-conduction equations which eliminates the paradox of instantaneous propagation // Comptes Rendus. – 1958. – Vol. 247. – P. 431.

101. Vernotte, P. Some possible complications in the phenomena of thermal conduction // Comptes Rendus. – 1961. – Vol. 252, No. 1. – P. 2190–2191.

102. Вехтева Н.А., Литовка Ю.В., Обухов А.Д. Повышение точности напечатанных изделий на фотополимерном принтере за счет преобразования положения в области печати // Труды МАИ. – 2024. – № 137. – EDN MFZTSQ.
103. Ермилов А.С., Балашов А.Ю., Гюльмагомедов Н.Х. Изготовление действующего макета антенной решетки изделий ракетно-космической техники с использованием аддитивных технологий // Труды МАИ. – 2024. – № 135. – EDN HCIZGO.
104. Хоа В.Д., Зверьев Е.М., Пыхтин А.В. Напряженно-деформированное состояние тонкой прямоугольной полосы при температурном воздействии // Труды МАИ. – 2024. – № 134. – EDN CDAFSP.
105. Каттанео К. Форма уравнения теплопроводности, устраняющая парадокс мгновенного распространения тепла // *Comptes Rendus*. – 1958. – Т. 247. – С. 431–433.
106. Лыков А.В. Теория теплопроводности с конечной скоростью распространения тепла // *Инженерно-физический журнал*. – 1955. – Т. 4, № 3. – С. 1–8.
107. Giorgi, C., Grandi, D., Pata, V. On the Green–Naghdi type III heat conduction model // *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*. – 2014. – Vol. 19, No. 7. – P. 2133–2143.
108. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1967. – 467 с.
109. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
110. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 752 с.
111. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Том 2. Специальные функции. — М.: Наука, 1983. — 624 с.