

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт прикладной механики Российской академии наук  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



УДК 539.3

**КУРДЮМОВ НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ**

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДОВ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ  
СПУТНЫМ СЛЕДОМ**

01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., с.н.с.

Данилин Александр Николаевич

Москва – 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>ГЛАВА 1. АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛЭП</b> .....	15
1.1. Провода ЛЭП и их конструктивные особенности .....	16
1.2. Внутрифазные дистанционные распорки .....	17
1.3. Классификация колебаний проводов воздушных ЛЭП .....	19
1.3.1. Эолова вибрация .....	21
1.3.2. Пляска проводов .....	25
1.3.3. Субколебания .....	29
1.4. О математическом моделировании аэроупругих колебаний проводов воздушных ЛЭП .....	30
<b>ГЛАВА 2. ОБ ОЦЕНКАХ ЖЕСТКОСТЕЙ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛЭП</b> .....	33
2.1. Определяющие соотношения .....	33
2.2. Крутильные и изгибные жесткости проводов .....	36
2.3. Жесткости проводов серии АС. Различные оценки .....	38
2.4. Результаты вычислений .....	40
<b>ГЛАВА 3. АЭРОДИНАМИКА ОБТЕКАНИЯ ПРОВОДА С ОБРАЗОВАНИЕМ СПУТНОГО СЛЕДА</b> .....	43
3.1. Аппроксимация скорости потока в области спутного следа .....	47
3.2. Аппроксимация аэродинамических сил в спутном следе .....	49
<b>ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СУБКОЛЕБАНИЙ</b> .....	54
4.1. Аппроксимация перемещений и деформационные соотношения .....	57
4.2. Потенциальная энергия деформации и её вариация .....	59
4.3. Вариация работы инерционных сил .....	61
4.4. Вариация работы гравитационной нагрузки .....	64
4.5. Вариация работы аэродинамических сил .....	64
4.6. Уравнения колебаний .....	73

4.7. Начальное статическое состояние .....	76
4.8. Вычислительный алгоритм .....	83
4.8.1. Параметризация уравнений колебаний .....	85
4.8.2. Численная схема решения задачи Коши .....	87
<b>ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ</b> .....	<b>90</b>
5.1. Однопролетная модель, имитирующая аэродинамическое взаимодействие двух гибких цилиндров .....	91
5.2. Двухпроводная линия расщеплённой фазы с тремя одинаковыми подпролётами .....	92
5.3. Двухпроводная расщеплённая фаза воздушной ЛЭП с семью подпролётами в условиях реального обтекания .....	95
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>100</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	<b>101</b>

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время гибкие аэроупругие системы являются предметом интенсивных исследований специалистов в области динамики деформируемых конструкций. Как правило, задачи в этой области (аэроупругости) являются новыми в силу сложности формулировок и методов решения. Большой научный интерес представляют задачи о взаимодействии тросовых систем с воздушным или жидкостным потоком. Успешные решения в этой области способствуют разработкам новых технических решений в аэрокосмической технике и высокотехнологичном наземном оборудовании.

Важный класс нелинейных задач механики гибких систем связан с моделированием колебаний проводов, тросов и оптоволоконных кабелей связи воздушных линий электропередачи (ЛЭП), являющихся ключевыми системами энергетического оборудования для передачи электроэнергии практически на любые расстояния. Математическое моделирование и амплитудно-частотный анализ требуются для разработок средств эффективной защиты проводов ЛЭП и высоковольтной арматуры от негативного влияния колебаний с целью обеспечения безопасности транспортировки электрической энергии и повышения ресурса дорогостоящего энергетического оборудования.

Под действием сил гравитации и ветрового потока провода воздушных ЛЭП испытывают аэроупругих колебания в широком диапазоне частот. Эти колебания условно разделяют на три группы в зависимости от природы их возникновения и, как следствие, частотного диапазона. Различают эолову вибрацию, пляску или галопирование, и субколебания.

Эолова вибрация в наибольшей степени изучена. Эти колебания возбуждаются из-за срыва воздушного потока за проводом в виде вихревых дорожек (вихрей Кармана) при относительно слабом устойчивом ветре с формированием колебаний в вертикальной плоскости в виде стоячих волн с частотами примерно от 3-5 до 100-120 Гц.

При образовании на проводах гололёдно-изморозевых отложений может возникнуть другой тип колебаний – галопирование или пляска проводов. Это низкочастотные колебания в диапазоне от 0.2 до 2 Гц с большой амплитудой и большой длиной волны, которые возникают при устойчивом или порывистом ветре от 5 до 20 м/с. Пляска проводов – разновидность флаттерных колебаний, «пик-пик» амплитуда которых может достигать от 0.3 до 5 м по вертикали. Гололёдное отложение, как правило, откладывается с наветренной стороны провода и имеет в сечении несимметричную форму относительно оси провода. Поэтому поворот провода приводит к изменению воздействующих на него аэродинамических сил, приводящих к возникновению и развитию автоколебательного процесса. Математическое описание пляски сложнее, и заключается не только в моделировании критического поведения, но и анализе устойчивости движения с использованием линеаризованных уравнений, позволяющих вычислить критическую скорость ветра для возникновения автоколебаний (флаттера). Математическая модель пляски чувствительна к исходным данным – аэродинамическим характеристикам профиля сечения провода с гололёдом и параметрам ветрового потока. Эти данные получают, как правило, в результате продувок образцов в аэродинамических трубах. Возможно также численное моделирование аэродинамического обтекания с использованием аэрогидродинамических вычислительных комплексов. Следует отметить, что и тот и другой методы весьма трудоёмки и затратны. Предпочтение отдают экспериментальным методам, как наиболее достоверным, или в аналитических исследованиях используют уже известные экспериментальные данные, опубликованные в научной литературе.

В наименьшей степени изучен феномен субколебаний проводов. Эти колебания свойственны исключительно проводам расщепленных фаз воздушных ЛЭП, которые стали вводить в эксплуатацию в 30-40 годы прошлого столетия. Опыт эксплуатации выявил новый вид колебаний проводов, составляющих расщеплённую фазу. Необходимым условием возникновения субколебаний является наличие двух проводов, расположенные вблизи друг

друга приблизительно в одной горизонтальной плоскости. При устойчивом ветре, дующем поперек трассы воздушной ЛЭП, один провод располагается в аэродинамическом (спутном) следе другого. Изменения аэродинамической подъемной силы и силы лобового сопротивления, воздействующих на подветренный провод, приводят к неустойчивому состоянию этого провода, который при ветре от 5-6 до 15-20 м/с начинает колебаться. В процесс колебаний втягивается и наветренный провод из-за наличия дистанционных внутрифазных распорок. Если природа возникновения силы лобового сопротивления понятна и хорошо изучена, то причина возникновения подъемной силы до сих пор остается предметом дискуссий.

В 70-80 годы появились первые научные работы, посвященные субколебаниям, где были отмечены многочисленные факты износа и разрушения проводов в местах крепления арматуры и других устройств. Сложность явления и его негативное воздействие на элементы ЛЭП стимулировали исследования в направлении математического моделирования субколебаний для анализа амплитудно-частотных характеристик с целью выбора способов защиты проводов от колебаний и обеспечения требуемого ресурса.

Моделей, претендующих на общность и полноту учёта параметров линии как аэроупругой системы крайне мало. В основном, теоретические модели строятся для упрощенных (редуцированных) конструктивных схем или с использованием коммерческих конечно-элементных комплексов. Специализированных программных средств, которые позволили бы моделировать субколебания фазных проводов и осуществлять оптимизационные расчёты, нет.

В этой связи, разработка математических моделей нелинейных колебаний проводов, индуцированных спутным следом, с учётом сложного характера аэродинамических нагрузок и наличия кинематических связей в виде жестких дистанционных распорок представляет собой **актуальную научную и практически значимую проблему.**

**Объект диссертационного исследования** – гибкие провода расщепленных фаз воздушных ЛЭП, связанных жесткими дистанционными распорками.

**Предмет исследования** – индуцированные спутным следом нелинейные нестационарные колебания проводов расщепленных фаз воздушных ЛЭП со связями в виде жестких дистанционных распорок.

**Целью** диссертационной работы является построение конечно-элементной модели индуцированных спутным следом нелинейных нестационарных колебаний проводов расщепленных фаз воздушных ЛЭП со связями в виде жестких дистанционных распорок.

Для реализации поставленной цели в диссертации были сформулированы и решены следующие задачи:

1. Построение конечно-элементной модели субколебаний проводов расщепленных фаз воздушных ЛЭП на основе принципа возможных перемещений и получение системы нелинейных уравнений в обобщенных координатах для описания колебаний проводов с кинематическими связями в виде жестких дистанционных распорок.

2. Получение аналитических выражений для вычисления жесткостей проводов с учётом их многослойной проволочной структуры; аэродинамических нагрузок в спутном следе на основе модифицированной теории Симпсона с использованием эмпирических данных Блевинса и Прайса.

3. Формулировка начальной задачи для определения статического состояния на основе метода продолжения решения по параметру. Разработка численного алгоритма для определения статической (начальной) конфигурации системы с учётом монтажной длины проводов, воздействия температуры и закреплённых на проводах дистанционных распорок.

4. Решение новых задач об аэроупругих колебаниях закреплённых по концам проводов с учётом аэродинамических нагрузок, индуцированных спутным следом. Сопоставление численных решений с известными экспериментальными данными.

**Методы исследования.** Для построения дискретной математической модели субколебаний применяется метод конечных элементов. Дифференциальные уравнения колебаний выводятся на основе принципа возможных перемещений в обобщенных координатах с учётом нелинейностей упругих и инерционных сил, а также аэродинамических сил в спутном следе. Для построения функций формы используется метод Ритца с выбором линейных и тригонометрических функций в качестве базисных, позволяющих с различной степенью «детализации» описывать колебания в заданных частотных диапазонах. В качестве обобщенных координат принимаются абсолютные перемещения и углы закручивания узловых сечений, а также коэффициенты тригонометрических разложений для описания локальных перемещений и углов закручивания в пределах каждого элемента. Для получения конечных выражений для аэродинамических сил используются полиномиальные аппроксимации известных экспериментальных данных, а также линеаризация выражений для этих сил, записанных в локальных (элементных) координатах. Деформация растяжения записывается в квадратичном приближении, что позволяет ограничиваться относительно небольшим набором конечных элементов без потери точности вычислений. Для численного интегрирования системы уравнений колебаний, относящихся к жесткому типу, используется алгоритм, основанный на параметризации уравнений с выбором в качестве аргумента длины интегральной кривой решения. Для параметризованной задачи используется неявная схема, основанная на методе линейного ускорения с использованием простых итераций.

**Достоверность и обоснованность результатов** научных положений и полученных результатов подтверждается использованием строгих математических методов и сравнениями теоретических результатов с результатами экспериментальных исследований.

**Научная новизна диссертационной работы** заключается в следующем:

1. Разработана новая конечно-элементная модель индуцированных спутным следом колебаний проводов расщеплённых фаз воздушных ЛЭП с кине-



математическими связями в виде жестких распорок с учётом нелинейностей упругих и инерционных сил, а также аэродинамических сил.

2. Для построения функций формы конечных (тросовых) элементов впервые предложен метод Ритца с выбором линейных и тригонометрических функций в качестве базисных, позволяющих с различной степенью «детализации» описывать колебания в заданных частотных диапазонах. Коэффициенты тригонометрических рядов представляют собой «внутренние» для конечного элемента обобщенные координаты, которые включаются в общую систему искомым функций времени. В этой связи, модель претендует на общность и может быть использована для описания всех видов колебаний проводов ЛЭП.

3. Получены аналитические выражения для жесткостей проводов с учётом их внутренней структуры на основе нового метода энергетического осреднения упругих свойств проволочных повивов (слоёв) и сведения их к эквивалентным по упругим свойствам цилиндрическим оболочкам.

4. Впервые получены линеаризованные (по продольной координате в пределах конечного элемента) аналитические выражения для аэродинамических нагрузок на подветренный провод на основе модифицированной теории Симпсона с использованием эмпирических данных Блевинса и Прайса.

5. На основе метода продолжения решения по параметру разработан новый подход к получению статических решений, определяющих начальную конфигурацию аэроупругой системы с учётом монтажной длины проводов, соединённых дистанционными распорками, и воздействия температуры.

6. Дано решение новых аэроупругих задач о колебаниях двух закреплённых по концам проводов с учётом аэродинамических нагрузок, индуцированных спутным следом.

**Теоретическая и практическая значимость работы** заключается в следующем:

1. Полученные математические модели, методы и алгоритмы расчёта являются результатом фундаментальных научных исследований в области не-

линейной динамики гибких систем, к которым относятся провода и тросы воздушных ЛЭП. Математическое моделирование позволяет выявить закономерности возникновения и развития колебательных процессов, провести анализ чувствительности модели к изменению исходных параметров, провести оптимизационные расчёты с целью управления амплитудно-частотными характеристиками для подавления или устранения негативного влияния на элементы системы динамических нагрузок.

2. Субколебания (совместно с вибрацией, действующей постоянно) приводят к износу и разрушению проводов в местах их закрепления, крепления различных устройств (распорок, гасителей колебаний и др.). Поэтому использование математического моделирования в процессе проектирования или реконструкции воздушной ЛЭП представляет значительный практический интерес, поскольку позволяет на стадии проектирования выработать наиболее эффективные способы защиты проводов и других элементов линии от колебаний с помощью оптимального расположения дистанционных распорок, использования демпфирующих распорок и гасителей колебаний различного типа.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения.**

1. Новая конечно-элементная модель индуцированных спутным следом нелинейных нестационарных колебаний проводов расщеплённой фазы воздушной ЛЭП со связями в виде жестких дистанционных распорок.

2. Способ выбора функций формы на основе метода Ритца с базисом в виде линейных функций и тригонометрических рядов, коэффициенты которых представляют собой «внутренние» для конечного элемента обобщенные координаты и включаются в общую систему искомым функций времени.

3. Математическая модель аэродинамических нагрузок в спутном следе на подветренный провод на основе модифицированной теории Симпсона с использованием эмпирических данных Блевинса и Прайса.

4. Методика и алгоритм сведения уравнений статики к задаче Коши для определения начальной конфигурации аэроупругой системы с учётом монтажной длины проводов, воздействия температуры и наличия закреплённых на проводах жестких дистанционных распорок.

5. Решения новых задач об аэроупругих колебаниях двух закреплённых по концам проводов с учётом аэродинамических нагрузок, индуцированных спутным следом.

**Апробация основных результатов работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 19-21 октября 2014г.»;

- XXI Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, 2015 год;

- II международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 17-19 февраля 2015г.»;

- III международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 19-21 октября 2015г.»;

- V международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 19-21 октября 2016г.»;

- International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering (ICCMSE 2020), 29 april-03 may 2020, Crete, Greece;

- XXXII Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2020). Москва 2-4 декабря 2020 года.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 20 печатных работах, в 7 статьях в журналах, рекомендованных ВАК РФ, в том числе в 3 журналах, из списка Scopus и цитируемых интернет-платформой Web of Science, 12 тезисов докладов и 1 патент на изобретение.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения и списка использованных источников, включающего 138 наименований. Работа содержит 115 страниц, 38 рисунков, 9 таблиц.

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, представлены объект и предмет научного исследования, сформулированы цель и задачи исследования, определена научная новизна и практическая значимость полученных результатов, приведены основные результаты, выносимые на защиту и краткое содержание диссертационной работы по главам.

**В первой главе** дана краткая характеристика воздушных ЛЭП высокого и сверхвысокого напряжения с описанием типовых конструкций их основных элементов – проводов и внутрифазных дистанционных распорок, дана классификация колебаний проводов воздушных ЛЭП, представлен аналитический обзор публикаций, посвященных рассматриваемой в диссертации проблеме, отмечены особенности задач об аэроупругих колебаниях проводов, индуцированных спутным следом.

**Вторая глава** посвящена описанию модели деформирования проволочной конструкции спирального типа, позволяющей вычислить жесткости проводов с учётом их слоистой проволочной структуры. В главе приведены результаты вычислений и сравнения с известными экспериментальными данными.

**В третьей главе** дано описание аэродинамики обтекания провода с образованием спутного следа; отмечены характерные зоны спутного следа с описанием физики возникновения периодических сил, генерирующих колебания; следуя гипотезам Симпсона представлена аппроксимация скорости потока в области спутного следа на основе экспериментов Блевинса; дана

аналитическая аппроксимация распределений аэродинамических коэффициентов в следе с использованием полиномиальных представлений на основе экспериментальных данных Прайса. Степени и коэффициенты полиномиальных представлений подбирались с использованием метода наименьших квадратов.

**В четвёртой главе** даётся описание дискретной математической модели субколебаний фазных проводов, которая формулируется на основе метода конечных элементов. Для описания локальных перемещений в пределах конечного элемента используется метод Ритца с выбором тригонометрических функций в качестве базисных. Распорки моделируются как абсолютно жесткие невесомые стержни и поэтому рассматриваются как голономные связи, наложенные на упругую систему. Следовая связь между проводами моделируется с помощью модифицированной теории Симпсона с использованием эмпирических данных Блевинса и Прайса. В качестве обобщенных координат принимаются абсолютные перемещения и углы закручивания узловых сечений, а также коэффициенты тригонометрических разложений по синусам для локальных перемещений и углов закручивания в пределах каждого элемента.

Уравнения движения проводов записываются в обобщенных координатах с нелинейными упругими, инерционными и аэродинамическими силами. Начальная конфигурация определяется из решения статических уравнений равновесия с использованием метода продолжения решения по параметру.

В четвёртой главе также описывается вычислительный алгоритм численного интегрирования полученных уравнений колебаний, которые относятся к жесткому типу. Вместо параметра времени вводится новый аргумент – параметр длины интегральной кривой решения. Для преобразованной к новому аргументу задачи строится неявная численная схема второго порядка точности на основе метода линейного ускорения с использованием простых итераций. Переход к новому аргументу обеспечивает наилучшую обусловленность линеаризованных систем уравнений, получающихся при реализа-

ции пошаговой процедуры численного построения интегральной кривой решения.

**В пятой главе** приводятся результаты численного моделирования субколебаний двух проводов, закреплённых шарнирно по концам между двумя абсолютно жёсткими опорами и натянутых вдоль продольной (строительной) оси  $Ox$ . В практическом плане это соответствует двухпроводной расщеплённой фазе воздушной ЛЭП высокого напряжения в пролёте между двумя анкерными опорами с основанием в одной горизонтальной плоскости и с закреплением проводов на одной высоте. Приводятся результаты сравнительного анализа полученных решений и экспериментальных данных.

## ГЛАВА 1. АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛЭП

Важный класс нелинейных задач механики гибких систем связан с моделированием динамических режимов нагружения проводов, тросов и оптоволоконных кабелей связи в системах воздушных линий электропередачи (ЛЭП). Этой тематике посвящено большое количество работ, освещающих различные аспекты научных исследований, новых конструкторских разработок и технологий производства. Концептуальные решения, формирующие стратегию развития энергетической отрасли большинства стран мира, во многом определяются работой СИГРЭ (Conseil International des Grands Réseaux Électriques, CIGRE) – Международного Совета по большим электрическим системам высокого напряжения [<http://www.cigre.org>]. Эта организация, созданная во Франции в 1921 г., на сегодняшний день является самой авторитетной научно-технической ассоциацией, объединяющих ученых и специалистов-энергетиков всего мира [86,87,111].

Воздушные ЛЭП являются ключевыми системами энергетического оборудования, предназначенными для передачи электроэнергии практически на любые расстояния. При проектировании или реконструкции воздушных ЛЭП в расчёт принимаются как статические, так и динамические режимы нагружения, возникающие в результате воздействия собственного веса, температуры, гололёдно-изморозевых отложений (гололёда) и ветрового потока. Динамические нагрузки районированы по территории России и выбираются в соответствии с рекомендациями нормативного документа «Правила устройства электроустановок» (ПУЭ) [46].

На линиях сверхвысокого напряжения (СВН) фазный проводник расщепляется на два, четыре и восемь проводов. К линиям СВН относят линии, которые функционируют под напряжением в 330 кВ, 500 кВ, 750 кВ и 1150 кВ. Применение СВН-линий позволяет увеличить пропускную способность, снизить потери на «корону» за счет снижения напряженности,

уменьшить генерацию помех для ВЧ-связи, повысить надёжность линий СВН, являющимися системообразующими.

Диаметр проводов, их сечение и количество в фазе, расстояние между проводами расщепленной фазы, места установок ограничителей и устройств демпфирования определяются расчётными методами в соответствии с ПУЭ и другой нормативной документацией.

Основными элементами воздушных ЛЭП являются провода, грозозащитные тросы, дистанционные распорки, гасители колебаний, изоляционные устройства, крепёжная и защитная арматура. Далее кратко остановимся на описании основных элементов расщеплённой фазы воздушных ЛЭП – типовых конструкций проводов и внутрифазных дистанционных распорок, имеющих прямое отношение к теме диссертационной работы.

### 1.1. Провода ЛЭП и их конструктивные особенности

Провода являются ключевыми элементами в системах воздушных ЛЭП. По структуре они представляют собой достаточно сложные проволочные конструкции, состоящие из нескольких «повивов» – проволочных слоев, уложенных друг на друга под разными углами относительно оси провода. Примеры различного исполнения проводов ЛЭП показаны на рисунке 1.1.

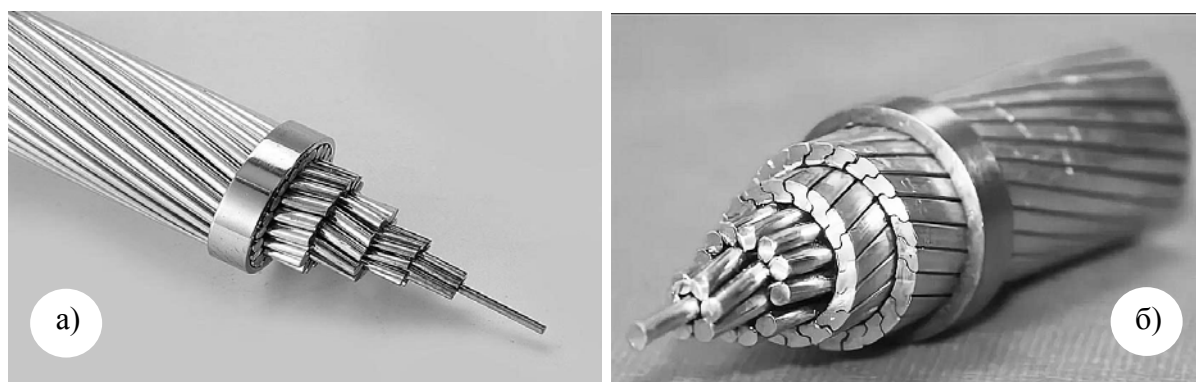


Рисунок 1.1 – Провода ЛЭП в современном исполнении:

- а) – традиционная многоповивная конструкция из проволочных спиралей круглого сечения; б) – провод серии Aero-Z

Сердечником провода обычно является одна проволока или несколько скрученных проволок повышенной прочности в центральной части провода.



Проволоки, образующие один повив, изготавливаются, как правило, из одного и того же материала. В России наиболее распространенным типом провода является провод АС, сердечник которого выполнен из стальных проволок, а токопроводящие повивы – из алюминиевого сплава. Для предотвращения раскручивания, соседние повивы должны иметь различное направление скрутки.

Конструкции проводов ЛЭП с развитием технологий претерпевают изменения: они становятся прочнее, легче, менее материалоемкими и более электропроводными. На рисунке 1.1 б) представлен вариант провода Aero-Z со сглаженной внешней поверхностью, приближенной к цилиндрической [37,38].

Провод Aero-Z имеет более низкое удельное сопротивление, меньшую удельную массу, существенно более высокую механическую прочность по сравнению с обычными проводами. Форма проволок Aero-Z и плотность их скрутки затрудняют проникновение в провод воды и загрязнений, что снижает коррозию его внутренних слоев. Провод Aero-Z лучше сопротивляется кручению, что приводит к сбросу излишнего снега. Более гладкая, чем у обычного провода, внешняя поверхность Aero-Z существенно снижает потери на корону (повышается напряженность электрического поля, при которой возникает коронный разряд). Благодаря гладкой внешней поверхности аэродинамическое сопротивление провода Aero-Z примерно на 25–30% меньше, чем у обычного провода.

## **1.2. Внутрифазные дистанционные распорки**

На проводах расщепленной фазы в пролетах и петлях анкерных опор должны быть установлены внутрифазные дистанционные распорки. Расстояния между распорками или группами распорок, устанавливаемыми в пролете на расщепленной фазе, не должны превышать 40 или 60 м в зависимости от типа местности. Типовые варианты распорок показаны на рисунке 1.2 ([www.gig-group.com](http://www.gig-group.com)), их параметры – в таблицах 1.1-1.3.



**Рисунок 1.2** – Дистанционные глухие распорки различных типов

Таблица 1.1 – Параметры РГ-1-400

Размеры, мм			Диаметр провода, мм	Разрушающая нагрузка, кН	Масса, кг
L	B	b			
400	40	6	15,2 ... 18,9	1,96	1,1

Таблица 1.2 – Параметры 3РГ-3-400

Размеры, мм		Диаметр провода, мм	Разрушающая нагрузка, кН	Масса, кг
L	2R			
400	30	27,5 ... 30,6	1,96	3,4

Таблица 1.3 – Параметры 4РГ-4-600А

Размеры, мм		Диаметр провода, мм	Разрушающая нагрузка, кН	Масса, кг
L	2R			
600	36	31,5 ... 37,7	2	8,24

Распорки РГ-1-400, предназначены для удержания на заданном расстоянии двух проводов фазы ЛЭП. Распорки 3РГ-3-400 и 4РГ-4-600А предназначены для удержания на заданном расстоянии трех и четырёх проводов фазы ЛЭП и открытых распределительных устройств; они снабжены невыпадающими болтами, стягивающими плашки.

На линиях с расщеплёнными фазами в настоящее время находят всё большее применение внутрифазные дистанционные распорки-гасители (демпфирующие распорки, распорки-демпферы). Они позволяют не только

сохранять расстояния между проводами расщепленной фазы ЛЭП в допустимых пределах и предотвращать соударения проводов, но и гасить эолову вибрацию, а также субколебания проводов. В качестве примера на рисунке 1.3 показана демпфирующая распорка для двухфазной ЛЭП. Характеристика конструкции дана в таблице 1.4.



Рисунок 1.3 – Демпфирующая распорка 2РГД-014-01

Таблица 1.4 – Параметры 2РГД-014-01

Марка распорки-гасителя	Расстояние между проводами L, мм	Диаметр провода, мм	Сечение, мм <sup>2</sup> (АС, АСКП, АСКС, АСК)	Провода по ТУ 3510-001-699 48 333-2012		Масса, кг
				Марка АААС-Z	Марка АААСRZ	
2РГД-014-01	400	18,8-19,8	185/29-205/27	АААС-Z242-2Z; АААС-Z261-2Z	АААСRZ 251	3.025

### 1.3. Классификация колебаний проводов воздушных ЛЭП

Колебания проводов воздушных линий электропередачи (ЛЭП) условно разделяют (классифицируют) на три группы [86,87]. Одну из них образуют *вибрации (эоловы вибрации)*, которые возбуждаются в натянутых проводах ветровым потоком [35, 63]. Эолова вибрация обычно наблюдается при относительно слабом устойчивом ветре и отсутствии на проводах гололеда, с формированием колебаний провода в вертикальной плоскости в виде стоячих волн с частотами примерно от 3-5 до 100-120 Гц. Скорость ветра при возникновении вибрации может колебаться от 0,5-0,6 до 7-8 м/с.

К следующей группе относятся колебания с низкими частотами от 0,2 до 3 Гц, но с большими амплитудами и длинами волн. Это явление, называемое

*галопированием* или *пляской*, происходит при сочетании квазистабильного ветра со скоростью около 5-20 м/с и гололёда – гололёдно-изморозевых отложений на наветренной стороне провода [7,51,52,64,94]. Гололёдные отложения имеют в сечении несимметричную форму относительно оси провода, поэтому поворот провода приводит к изменению воздействующей на него подъемной силы. Пляска проводов является разновидностью флаттерных колебаний, «пик-пик» амплитуда которых может достигать нескольких метров по вертикали.

Третью группу образуют колебания фазных проводов в подпролётах (между дистанционными распорками), вызываемые действием аэродинамического (спутного) следа [84,101,102,104,115,116,128], схематично показанные на рисунке 1.4. Такие колебания обычно называются *субколебаниями*.

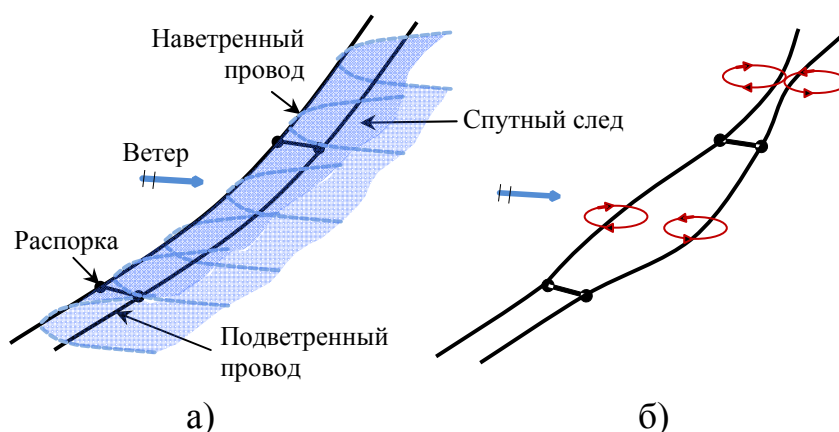


Рисунок 1.4 – Субколебания проводов двухфазной линии:  
 а) – подветренный провод в спутном следе от наветренного;  
 б) – пример индуцированных спутным следом колебаний

Субколебания, являющиеся предметом настоящего исследования, наиболее часто происходят с частотами от 0,7 до 5 Гц. Необходимым условием для возникновения субколебаний является наличие двух проводов, расположенных приблизительно в одной горизонтальной плоскости поблизости друг от друга. При устойчивом ветре, дующем поперек трассы воздушной ЛЭП, один провод располагается в аэродинамическом следе другого. Изменения аэродинамической подъемной силы и силы лобового сопротивления, воздействующих на подветренный провод, приводят к неустойчивому состоянию

этого провода, который при ветре от 5-6 до 15-20 м/с начинает колебаться. В процесс колебаний втягивается и наветренный провод. Субколебания (совместно с вибрацией, действующей постоянно) приводят к износу и разрушению проводов в местах крепления различных устройств (распорок, гасителей колебаний и др.).

Отдельно рассмотрим каждую группу колебаний со ссылками на наиболее значимые публикации.

### 1.3.1. Эолова вибрация

Эти колебания возникают из-за регулярного срыва вихрей с верхней и нижней сторон провода с образованием вихревых дорожек или вихрей Кармана (см. рисунок 1.5). В процессе отделения вихрей, на упругий провод действует периодическая сила, перпендикулярная направлению потока [35,69,86]. Эолова вибрация инициирует субколебания проводов расщеплённой фазы ЛЭП.

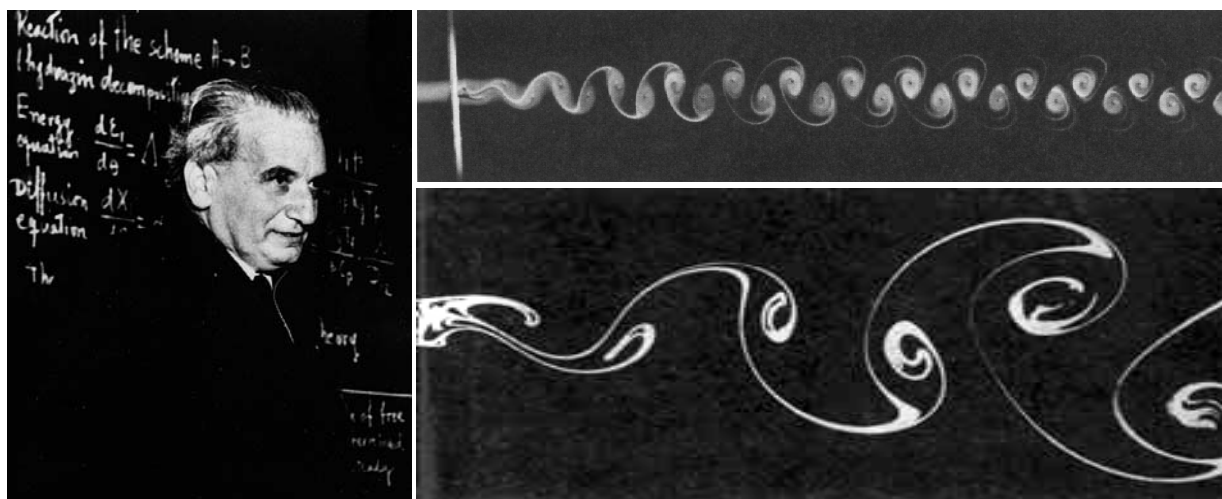


Рисунок 1.5 – Фон Карман и названные в его честь вихревые дорожки [6]

Несколько поколений учёных занимались изучением законов обтекания тел различной формы потоками газа или жидкости. Во второй половине XIX века появилось учение о вихревом движении жидкости. В 1858 г. Гельмгольц (von Helmholtz H.L.F.) указал основные свойства вихрей в идеальной жидкости. Общая теория движения твёрдого тела в жидкости дана Кирхгофом

(Kirchhoff G.R.) в 1869 г. и опубликована в его труде – «Лекциях по математической физике». Фундаментальные результаты в этой области связаны с такими известными именами, как Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов. Среди ранних исследователей были также Струхаль (Strouhal V., 1878) [130], Бенард (Benard H., 1908) [67], фон Карман (Von Karman T., 1912) [134], который, по-видимому, первым дал теоретическое описание срыва вихревых дорожек с поверхностей цилиндрических тел. К настоящему времени число учёных, внесших свой вклад в изучение проблемы вибрации плохообтекаемых тел в потоках газа или жидкости, настолько велико, что дать оценку роли каждого из них не представляется возможным.

Большинство ранних экспериментов проводились с неподвижными цилиндрами: изучалась двумерная структура вихрей без анализа информации об их распределении вдоль оси цилиндра. Однако иная картина наблюдается для колеблющегося провода, испытывающего изгиб. Чтобы вибрация стала самоподдерживающейся, необходима корреляция срыва вихрей с изгибными колебаниями. В экспериментах начала 1940-х годов внимание исследователей сосредоточилось на цилиндрах, вибрирующих в воздушном потоке. В результате было установлено, что для неподвижного цилиндра срыв вихрей имеет случайное распределение вдоль оси цилиндра. Однако если цилиндр движется, вихри синхронизируются с его движением [69]. При этом частота колебаний цилиндра может отличаться от частоты срыва вихрей по Струхалю.

В 1935 г. Прейсверк (Preiswerk M.) [111] впервые описал процесс синхронизации, применительно к проводам воздушных ЛЭП. Важным выводом его исследований является то, что вибрация провода сохраняется при заметном отклонении скорости ветра по сравнению с её начальным значением, вызвавшим вибрацию. Если бы соотношение Струхалия выполнялось точно, то вибрация провода возникала бы только для собственных частот срыва вихрей. Однако эффект синхронизации снижает эту избирательность. Условия синхронизации будут утрачены, если скорость ветра будет заметно отличаться

ся от своей первоначальной величины. Допустимое отклонение является функцией числа Рейнольдса и амплитуды колебаний. Грубая оценка возможных отклонений составляет  $\pm 10\%$ . С потерей синхронизации вибрация ослабевает, при этом она может перейти на новую частоту.

Поведение воздушного потока, обтекающего цилиндр, изменяется с изменением числа Рейнольдса. Некоторые режимы потоков были идентифицированы, несмотря на то, что границы скоростей перемещения не могут быть определены точно. Линхард (Lienhard J.H.) [98] в 1966 году обобщил открытия Марриса (Marris W.) [105], Феппля (Foppl L.) [89,108], Коважного (Kovaszny L.S.G.) [97], Триттона (Tritton J.) [133], Шеффера и Эскинази (Schaeffer W., Eskinazi S.) [121], Рошко (Roshko A.) [119] и других исследователей.

Исследования собственных частот и форм эоловых колебаний провода (троса) как нерастяжимой нити, концы которой закреплены на одинаковой высоте относительно ее положения равновесия в плоскости начального провисания, начались в середине XIX века (Rohrs J.H., 1851 г.; Routh E.J., 1868 г.). Достаточно полное исследование данной проблемы содержится в работе Саксона (Saxon D.S.) и Кана (Cahn A.S.), опубликованной в 1953 г. [120]. Данными авторами для собственных частот нити в зависимости от ее провисания были получены асимптотические решения, точность которых подтвердилась экспериментами. Дальнейшее развитие исследований связано с моделью растяжимой нити, где вводится параметр жесткости, связывающий изменение длины нити и тяжение (силу натяжения). Такие работы выполнены Ирвином и Кохи (Irvine H.M., Caughey T.K.) в 1974 г. [93] в предположении, что нить является линейно упругой по отношению к растяжению. Установлено, что при сильном натяжении растяжимая нить ведет себя как струна, но при уменьшении тяжения и увеличении стрелы провеса собственные частоты, отвечающие симметричным формам ее колебаний, постепенно отклоняются от значений, соответствующих струне, до значений, соответствующих нерастяжимой нити. При этом происходит последовательное переkreщива-

ние собственных частот: с увеличением стрелы провеса 1-я и 2-я частоты сближаются, сливаются и затем расходятся. То же происходит с 3-й и 4-й частотами и другими. Собственные частоты определяются из решения алгебраического уравнения, полученного в [91] и других работах.

Развитие исследований спектра колебаний нити содержится в работе Триантафиллу (Triantafyllou M.S.) 1984 г. [132], рассмотревшего растяжимую нить с учетом ее провисания, концы которой закреплены на разной высоте. Было установлено, что в этом случае зависимости собственных частот от стрелы провеса близки к соответствующим зависимостям для нити с концами на одинаковой высоте, но совпадения частот нет. Формы колебаний при этом не распадаются на симметричные и антисимметричные. За счет их изменения с изменением стрелы провеса, соседние собственные частоты также сближаются и расходятся, но не совпадают (причем, чем меньше угол наклона линии, соединяющей концы провода, тем ближе друг к другу могут оказаться соседние собственные частоты). В работе [118] это явление «почти перекрещивания» («avoided crossing») подтверждено экспериментами и расчетами методом конечных элементов.

В работах [8,91] для случая малой стрелы провеса построена упрощенная математическая модель малых колебаний растяжимой нити. С использованием метода Бубнова-Галеркина выведены приближенные формулы для вычисления первых двух собственных частот. В работе [62] рассматривается нить, нелинейно упругая по отношению к растяжению. Приведен пример вычисления первых трех собственных частот и форм для достаточно большой стрелы провеса.

Определению собственных частот для многопролётных ЛЭП посвящены, например, работы [63,88,124].

Следует отметить цикл работ В.А. Фельдштейна и его коллег по расчёту и анализу вибрации проводов совместно со спиральными зажимами и гасителями колебаний [3,55-57]. В результате этой работы получены алгоритмы и вычислительные программы для расчётов вибрации и вычисления па-



раметров средств защиты проводов воздушной ЛЭП от вибрации. Разработанная математическая модель учитывает не только изгибно-крутильные жесткости провода и параметры энергорассеяния, но и наличие гасителей колебаний Стокбриджа, а также спиральных протекторов, в значительной степени влияющих на амплитудно-частотные характеристики системы. В результате определяются параметры, обеспечивающие наиболее эффективное ограничение вибрационных колебаний.

Виброзащиту проводов, грозотросов, кабелей оптоволоконной связи на воздушных ЛЭП осуществляют различными методами. Основным из них является защита с помощью многочастотных гасителей вибрации [35,14,34,36,61], которые конструктивно подобны гасителю Стокбриджа, предложенному почти 90 лет назад [107,129].

Типовая конструкция гасителя представляет собой два груза, соединенные тросом (гибким элементом с высокими характеристиками демпфирования) с зажимом, который жестко закрепляется на проводе при помощи плашки (см. рисунок 1.6). Грузы располагаются по разные стороны относительно вертикальной оси зажима, в общем случае, на различных расстояниях.

Рассеяние энергии колебаний происходит вследствие взаимного трения проволочных спиралей, из которых изготовлен трос.

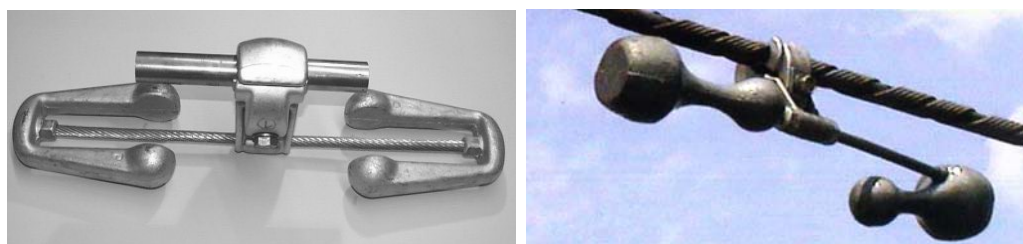


Рисунок 1.6 – Гасители эоловой вибрации проводов ЛЭП

### 1.3.2. Пляска проводов

Исследованию пляски посвящены многочисленные работы. В 1932 г. Ден-Гартогом (Den-Hartog J.P.) было выполнено пионерское исследование колебаний объекта, имитировавшего провод с гололёдом – тела с сечением в виде полукруга, расположенного поперёк потока. Система имела одну сте-

пень свободы. Изучение движения этого плохообтекаемого профиля позволило получить Ден-Гартогу необходимое условие возникновения галопирования [78], зависящее только от аэродинамических характеристик профиля. Впоследствии было показано, что это условие является и достаточным для таких колебаний при отсутствии внутреннего демпфирования [7].

В дальнейшем различными авторами были разработаны и другие модели пляски, в том числе на основе метода конечных элементов и с использованием лицензированных вычислительных комплексов. Эти работы многочисленны. Примерами являются [51,52,64,94,44,47-50,80,95,109,135].

Гололёд обычно откладывается с наветренной стороны провода. На практике форма обледенения точно не известна и она меняется вдоль провода. Пример гололёдно-изморозевых отложений дан на рисунке 1.7.

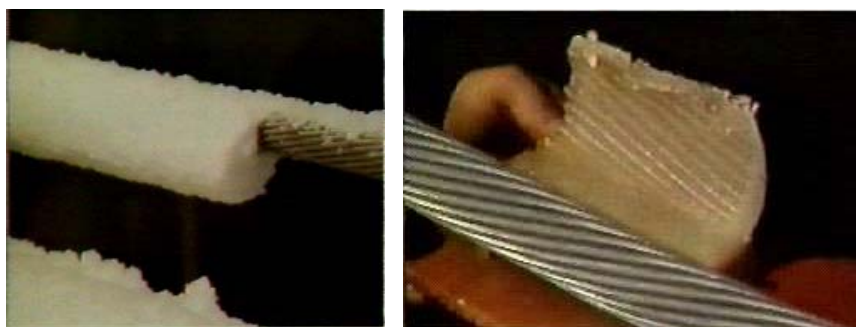


Рисунок 1.7 – Одна из форм гололёдно-изморозевых отложений на проводе при ветре, направленном перпендикулярно оси провода

По сравнению с одиночными проводами, расщепленная фаза ЛЭП с распорками обладает увеличенной крутильной жесткостью, что способствует наращиванию одностороннего гололёда, изморози или мокрого снега.

Для расщепленной фазы ЛЭП, снабжённой распорками, частоты крутильной и вертикальной форм колебаний, находятся в одном, довольно узком, диапазоне. Поэтому между крутильными и вертикальными колебаниями возникает резонанс, способствующий пляске: резонансные вертикальные колебания возбуждаются крутильными колебаниями, что способствует развитию пляски проводов.

Для изучения пляски с целью анализа и прогноза динамических нагрузок на элементы воздушных ЛЭП проводятся полевые испытания. Для возбуждения пляски на провода опытных линий крепятся специальные обтекатели, моделирующие гололёдный нарост.

Как указано в [99], впервые пляску опытной линии, к проводу которой был прикреплен восковой выступ в форме вытянутого прямоугольника, удалось наблюдать в 1932 г. на 32-метровом пролёте. О пляске провода с полукруглыми деревянными насадками сообщается в работах [12,85,86,113,131]. Оказалось, что провод с таким сечением подвержен пляске, несмотря на «спорность» выполнения условия Глауэрта-Ден-Гартога для полукруга; при этом в эксперименте [85] отмечено, что для возбуждения пляски провода с полукруглыми насадками потребовалось оборудовать пролет дополнительными массивными рычагами, чтобы сблизить собственные частоты вертикальных и крутильных колебаний. В 1970-х годах возобновились попытки воспроизвести пляску на опытной линии с насадками, более близкими к реальным формам обледенения, чем полукруг или прямоугольник. В 1974 г. удалось провести успешный эксперимент для провода с *U*-образным пластиковым выступом [72,110].

Хотя отдельные случаи пляски, полученные на опытных линиях, представляют большой методический интерес, для оптимального проектирования ЛЭП желательно иметь информацию о возможных амплитудах пляски, которые могут возникнуть в данной местности. Оценки амплитуды пляски [65,100,117] в зависимости от параметров линии и проводов, полученные на основе большой подборки результатов наблюдений, являются слишком грубыми. Более детальный анализ характеристик колебаний проводов может быть выполнен путем проведения вычислительного эксперимента, преимуществами которого являются невысокая стоимость и возможность рассмотрения большого набора различных параметров ЛЭП и форм поперечных сечений проводов. В то же время описанные случаи наблюдения пляски проводов с искусственно сформированным поперечным

сечением на опытных линиях представляют большую ценность для верификации численных алгоритмов.

Хорошо известно, что пляска проводов может приводить к серьезным повреждениям ЛЭП и, как следствие, длительному нарушению электроснабжения. Поэтому при строительстве ЛЭП большое внимание уделяется мерам борьбы с этим явлением, которые могут быть направлены на ослабление или, в лучшем случае, на предотвращение пляски, а также на уменьшение вероятности схлестывания проводов, касания проводами частей опор и т.п. [1,23]. К активным мерам относятся устройства, способствующие успокоению колебаний. Для этих целей используют различные типы гасителей низкочастотных колебаний. К их числу относится TDD (Torsional Damper and Detuner) – крутильный гаситель-расстраиватель колебаний при пляске, который устанавливается на фазные провода ВЛ. Его назначение – демпфирование крутильных колебаний и разделение (расстраивание) частот вертикальных и крутильных колебаний, что в сумме приводит к ограничению передачи энергии от крутильных движений к вертикальным движениям.

На рисунке 1.8 изображены два действующих однотипных варианта TDD для двух- и трехфазной ЛЭП.

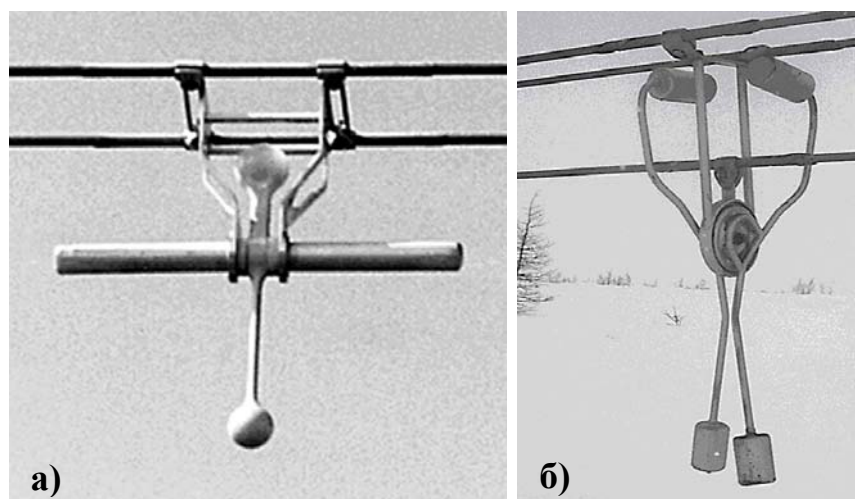


Рисунок 1.8 – Варианты торсионно-демпферных гасителей (TDD) пляски проводов: а) – для двухфазной ЛЭП (Keutgen R., Lilien J.-L., 1998); б) – для трехфазной ЛЭП (Lilien J.-L., Vinogradov A.A., 2002)

### 1.3.3. Субколебания

Колебания, вызываемые аэродинамическим следом (субколебания), лишь сравнительно недавно были признаны самостоятельным типом движения проводов. Они свойственны исключительно расщепленным фазам, подверженным воздействию поперечных ветров, от умеренных до сильных. Такие колебания возникают в результате эффекта экранирования подветренных проводов расщепленной фазы наветренными проводами. Аэродинамический (спутный) след, образующийся за наветренным проводом, может подвергать подветренный провод воздействию сложных переменнонаправленных сил. Субколебания, вызываемые аэродинамическим следом, могут приводить к усталостным повреждениям элементов ЛЭП, отказам изоляционных цепей и кабелей подвески аппаратных средств, усталостным отказам дистанционных распорок. Пример показан на рисунке 1.9.

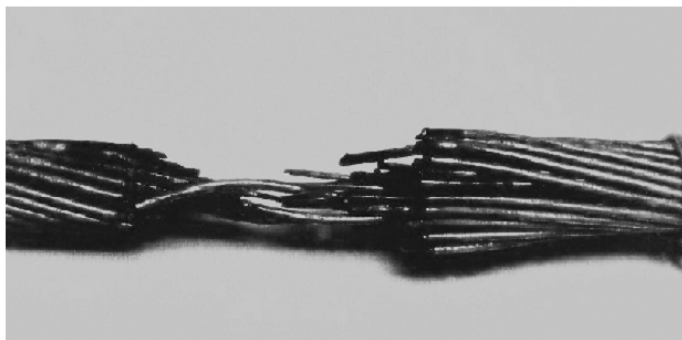


Рисунок 1.9 – Повреждение провода под зажимом дистанционной распорки вследствие субколебаний (EPRI, 2006)

Математическое описание аэродинамики фазных проводов сложнее и даётся с разной степенью приближения в многочисленных работах, например, [18,20,24,25,39,84,101,102,104,111,115,116,124,128].

Вызываемые аэродинамическим следом колебания могут принимать несколько различных форм. Основными являются:

- субколебания, когда движение проводов (в основном противофазное, т. е. провода сближаются и расходятся в течение одного периода колебаний) локализовано в пределах каждого подпролёта (участка пролёта между соседними дистанционными распорками);

- твердотельные виды колебаний, которые включают вертикальное или горизонтальное движение расщепленной фазы в целом, либо ее кручение по всей длине пролета.

Для предотвращения и ослабления этих колебаний на практике применяются несколько методов. Одним из них является установка жестких распорок и распорок-гасителей на заданных расстояниях друг от друга. Другим способом является поворот расщеплённой фазы на углы  $20^\circ$  и более относительно горизонтали, что позволяет снизить аэродинамическое экранирование подветренного провода наветренным. Увеличение отношения шага расщепления (расстояния между соседними проводами) к диаметру провода также позволяет снизить негативные эффекты экранирования.

Указанные защитные приёмы выработаны отнюдь не в результате математического моделирования, а многолетней и дорогостоящей работой технического персонала и инженеров-практиков, занимающихся проектированием, эксплуатацией и ремонтом воздушных ЛЭП.

#### **1.4. О математическом моделировании аэроупругих колебаний проводов воздушных ЛЭП**

Теоретический анализ колебаний проводов с элементами арматуры и устройствами защиты занимает умы большого числа компетентных исследователей. Однако до сих пор рекомендации и нормы, пригодные для проектирования средств защиты воздушных ЛЭП, носят лишь частичный характер. Они распространяются на каждый вид колебаний по отдельности в соответствии с представлениями и возможностями регламентирующих организаций. Основная причина этого заключается в сложности моделирования рассматриваемых явлений и в необходимости учитывать при анализе большое количество параметров конструкции элементов ЛЭП и ветрового потока, меняющихся в процессе колебаний. Частичному решению этой проблемы посвящена настоящая диссертационная работа.

Следует отметить особенности задач об аэроупругих колебаниях проводов.

1) Как правило, в задачах взаимодействия проводов ЛЭП с потоком воздуха провода рассматриваются как абсолютно гибкие стержни (нити). Такое допущение существенно упрощает постановку задачи и её решение, но не всегда достаточно в расчётной практике, когда требуется решение локальных задач, например, связанных с оценками прочности узлов соединения проводов с высоковольтной арматурой. Тем не менее, общепризнано, что для анализа аэроупругих колебаний проводов в пролётах воздушных ЛЭП этого вполне достаточно.

2) Наличие проблемы в оценках жесткостей проволочных конструкций. Используются два предположения о совместности деформирования проволоки, основанный на двух различных гипотезах: гипотезе свободного деформирования и гипотезе связанных деформаций.

Для вычисления жесткостей в диссертационной работе используется новая математическая модель деформирования проволочной конструкции спирального типа [9,15,16,17,19,21,22,26,27]. В соответствии с этой моделью каждый виток представляется с позиции энергетического подхода как эквивалентная по упругим свойствам анизотропная цилиндрическая оболочка, а проволочная конструкция в целом рассматривается как система вложенных друг в друга цилиндрических оболочек, между которыми допускается проскальзывание с учетом сил давления и трения.

3) При численном решении задач о взаимодействии проводов с воздушным потоком сложность заключается также в недостаточности (неполноте) информации об аэродинамических силах, действующих на гибкие провода. В этом случае, составление аналитических выражений для аэродинамических сил, трудно назвать корректным. Аэродинамические коэффициенты и их производные входят в нелинейные уравнения колебаний и их линеаризованные аналоги для оценки динамической устойчивости. Поэтому, при их ошибочном представлении математическая модель, в целом работоспособная,

даст неверные результаты, не пригодные для использования в практике проектирования.

4) Математическому моделированию аэроупругих колебаний проводов воздушных ЛЭП посвящены многочисленные работы. Для построения численных решений, как правило, используется метод конечных элементов. Примерами являются работы [94,80,79,90,103,136]. Весьма эффективно может использоваться также метод конечных разностей [51,52,47-50].

Большой интерес представляют полуаналитические исследования. В работах [53,135] моделирование колебаний осуществляется с использованием метода Галеркина. Весьма эффективным упрощением является использование идеи точечных масс [73,96], когда массовые характеристики (массы, моменты инерции) стягиваются в последовательности точек на упругих осевых линиях проводов.

Тем не менее, в инженерной практике до сих пор пользуются линейными моделями. В работах Ирвина (Irvine H.M.) [92,93] представлен один из лучших вариантов, достаточно строгий в математическом плане, но понятный и удобный для практического использования.



## ГЛАВА 2. ОБ ОЦЕНКАХ ЖЕСТКОСТЕЙ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛЭП

При решении задач о колебаниях проводов (тросов, кабелей) последние рассматриваются как упругие гибкие стержни, обладающие жесткостями на растяжение, кручение и изгиб (для локальных задач в окрестности закрепления). Из-за сложной многопроволочной структуры провода возникают известные проблемы в оценках их жесткостей. Например, в инженерной практике используются два предположения о совместности деформирования проволок. Они «полярны» по смыслу, определяя нижнюю и верхнюю границы теоретической оценки. Одно из них основывается на предположении, что проволоки деформируются независимо друг от друга. Другое – на гипотезе связанного деформирования, когда проволочные спирали мысленно жестко соединяются в одно целое, образуя своеобразный стержень. Однако расчёты показывают, что использование таких предположений может приводить к различию в результатах более чем в 70 раз.

В диссертационной работе используется новая математическая модель деформирования проволочной конструкции спирального типа [19,21]. В соответствии с этой моделью каждый повив представляется с позиции энергетического подхода как эквивалентная по упругим свойствам анизотропная цилиндрическая оболочка, а проволочная конструкция в целом рассматривается как система вложенных друг в друга цилиндрических оболочек, между которыми допускается проскальзывание с учетом сил давления и трения.

### 2.1. Определяющие соотношения

Считается, что произвольный повив (слой) состоит из  $n$  одинаковых спиральных проволок, навитых с постоянным углом подъема  $\alpha$  на воображаемый цилиндр радиуса  $\tilde{r}$ . Пусть  $EJ_b$ ,  $GJ_t$ ,  $EF$  – соответственно

жесткости каждой проволоки на изгиб в соприкасающейся плоскости, кручение и растяжение.

Обозначим через  $w$  перемещение произвольной точки стержня вдоль радиуса его кривизны. По физическому смыслу эта величина представляет собой «натяг» – разность радиусов повива до монтажа и воображаемого образующего цилиндра (нижележащие проволочные слои), на который навиваются проволочные спирали рассматриваемого повива.

Сопоставим повив в пределах шага скрутки  $L$  (высоты подъема винтовой линии при полном обороте вокруг продольной оси) с цилиндрической оболочкой радиуса  $r = \tilde{r} + d/2$ , где  $d$  – условный диаметр поперечного сечения проволоки.

Будем считать, что оболочка нагружена по торцам погонным продольным усилием  $T$ , крутящим моментом  $H$  и внутренним давлением  $p$ . Обозначим через  $\varepsilon$  и  $\theta$  – относительное удлинение и относительный угол закручивания эквивалентной оболочки. Тогда, следуя [17,19,21,22], имеем

$$(\varepsilon \quad \theta \quad w)^T = B(T \quad H \quad p)^T, \quad (2.1)$$

где элементы матрицы податливости  $B$ :

$$b_{11} = \frac{2\pi r^3}{n|\sin\alpha|} \left( \frac{1+\psi}{EJ_b} \sin^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{GJ_t} \right), \quad b_{12} = \frac{r}{n} \text{sign}(\sin\alpha) \cos\alpha \left( \frac{1}{GJ_t} - \frac{1}{EJ_b} \right),$$

$$b_{13} = -\frac{2\pi r^4}{n} \sin\alpha \left( \frac{\text{tg}^2\alpha - (1+\psi)}{EJ_b} + \frac{2}{GJ_t} \right),$$

$$b_{21} = \frac{2\pi r^2}{n} \text{sign}(\sin\alpha) \cos\alpha \left( \frac{1}{GJ_t} - \frac{1}{EJ_b} \right), \quad b_{22} = \frac{1}{n|\sin\alpha|} \left( \frac{\sin^2\alpha}{GJ_t} + \frac{\cos^2\alpha}{EJ_b} \right),$$

$$b_{23} = -\frac{2\pi r^3}{n} \cos\alpha \left( \frac{2\text{tg}^2\alpha}{GJ_t} + \frac{1 - \text{tg}^2\alpha}{EJ_b} \right),$$

$$b_{31} = b_{13}, \quad b_{32} = -\frac{r^2}{n} \cos\alpha \left( \frac{2\text{tg}^2\alpha}{GJ_t} + \frac{1 - \text{tg}^2\alpha}{EJ_b} \right),$$

$$b_{33} = \frac{2\pi r^5}{n} |\sin \alpha| \left[ \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 + \psi}{EJ_b} + \frac{4\operatorname{tg}^2 \alpha}{GJ_t} \right];$$

безразмерный коэффициент  $\psi = J_b / Fr^2$ .

Пронумеруем слои от 1 до  $m$ . Центральному проводу (сердечнику) присвоим индекс (0). Принимая, что повивы уложены без зазора и натяга, из (2.1) имеем

$$\left( \varepsilon^{(i)} \quad \theta^{(i)} \quad 0 \right)^T = B^{(i)} \left( T^{(i)} \quad H^{(i)} \quad p^{(i)} \right)^T. \quad (2.2)$$

Продольное усилие  $T^{(i)}$  в срединной поверхности оболочки связано с продольной силой  $N^{(i)}$ , действующей на оболочку, соотношением

$$N^{(i)} = 2\pi r^{(i)} T^{(i)}. \quad (2.3)$$

После исключения  $p^{(i)}$  из (2.2), последнее сводится к виду

$$\left( \varepsilon^{(i)} \quad \theta^{(i)} \right)^T = \bar{B}^{(i)} \left( T^{(i)} \quad H^{(i)} \right)^T, \quad (2.4)$$

где матрица

$$\bar{B}^{(i)} = \left\| \bar{b}_{kl} \right\| = \begin{pmatrix} b_{11}^{(i)} - \frac{b_{13}^{(i)} b_{31}^{(i)}}{b_{33}^{(i)}} & b_{12}^{(i)} - \frac{b_{13}^{(i)} b_{32}^{(i)}}{b_{33}^{(i)}} \\ b_{21}^{(i)} - \frac{b_{23}^{(i)} b_{31}^{(i)}}{b_{33}^{(i)}} & b_{22}^{(i)} - \frac{b_{23}^{(i)} b_{32}^{(i)}}{b_{33}^{(i)}} \end{pmatrix}; \quad k, l = 1, 2. \quad (2.5)$$

Отсюда

$$\left( T^{(i)} \quad H^{(i)} \right)^T = C^{(i)} \left( \varepsilon^{(i)} \quad \theta^{(i)} \right)^T, \quad C^{(i)} = \left\| c_{pq}^{(i)} \right\| = \left( \bar{B}^{(i)} \right)^{-1}; \quad p, q = 1, 2. \quad (2.6)$$

При рассмотрении провода в целом, возникающие в нем продольная сила  $N$  и крутящий момент  $H$  складываются из сил и моментов, действующих на сердечник и повивы. Поэтому с учётом (2.3), (2.6)

$$N = N^{(0)} + \sum_{i=1}^m N^{(i)} = N^{(0)} + 2\pi \sum_{i=1}^m r^{(i)} T^{(i)}, \quad H = H^{(0)} + \sum_{i=1}^m H^{(i)}. \quad (2.7)$$

Будем считать, что повивы провода не проскальзывают друг относительно друга, т.е. что их деформации одинаковы. Тогда

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon, \quad \theta^{(i)} = \theta; \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (2.8)$$

Соотношения (2.7) можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} N \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^{(0)} \\ H^{(0)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} 2\pi r^{(i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(i)} \\ H^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Подставляя сюда (2.6) с условием (2.8), получим

$$\begin{pmatrix} N \\ H \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \theta \end{pmatrix}; \quad R = \|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} E^{(0)}F^{(0)} & 0 \\ 0 & G^{(0)}J_t^{(0)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 2\pi r^{(i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C^{(i)}.$$

Здесь  $E^{(0)}$ ,  $G^{(0)}$  – модули на растяжение и сдвиг сердечника; площадь  $F^{(0)} = \pi d^{(0)2}/4$ , полярный момент инерции  $J_t^{(0)} = \pi d^{(0)4}/32$ ;  $d^{(0)}$  – диаметр проволоки сердечника.

Полученная в результате матрица  $R$  является матрицей жесткости для провода при его работе на растяжение и кручение. Следует ожидать, что ввиду встречной намотки повивов провода элементы  $R_{12} = R_{21}$  малы по сравнению с диагональными  $R_{11}$  и  $R_{22}$ . Во всяком случае, углы намотки повивов могут быть подобраны так, чтобы внедиагональные элементы оказались величинами малыми. Тогда  $R_{11}$  и  $R_{22}$  можно рассматривать как классические жесткости провода на растяжение и кручение.

Вычисление жесткостей проводов на растяжение не вызывает затруднений. Как правило, пользуются справочными данными, полученными в результате простых испытаний проводов на растяжение. Для оценок пользуются также формулой  $EF = E_c F_c + E_a F_a$ , где  $E_c$ ,  $E_a$  – модули упругости стальных и алюминиевых проволок, из которых изготовлены повивы провода;  $F_c$ ,  $F_a$  – площади поперечных сечений стальной и алюминиевой частей провода.

Однако, вычисление крутильных и изгибных жесткостей проводов нетривиально. Экспериментальных данных в литературе практически нет.

## 2.2. Крутильные и изгибные жесткости проводов

Соотношения (2.4), (2.5) позволяют определить жесткости проволочной конструкции на кручение и изгиб.

Рассмотрим кручение. Из (2.4) при  $T^{(i)} = 0$  следует для  $i$ -го повива  $\theta^{(i)} = \bar{b}_{22}^{(i)} H^{(i)}$ .

При закручивании провода на угол  $\theta$  все повивы закручиваются одинаково:  $\theta^{(i)} = \theta$ ;  $i = 0, 1, \dots, m$ . Это позволяет определить суммарный крутящий момент в виде  $H = \sum_{i=0}^m H^{(i)} = \theta \sum_{i=0}^m c_{22}^{(i)} = GJ_t \cdot \theta$ , где величина

$$GJ_t = \sum_{i=0}^m c_{22}^{(i)} \quad (2.9)$$

представляет собой жесткость проволочной конструкции на кручение.

Вычислим теперь изгибную жесткость. Кривизна  $\kappa$ , радиус кривизны  $\rho$  и изгибающий момент  $M_b$  стержня связаны соотношением

$$\kappa = 1/\rho = M_b/EJ_b. \quad (2.10)$$

Момент  $M_b$ , подсчитанный через нормальные напряжения  $\sigma$  в поперечном сечении  $F$ , равен

$$M_b = \int_F y \sigma dF, \quad (2.11)$$

где  $y$  – расстояние от элемента  $dF$  до нейтрального волокна.

При выполнении гипотезы плоских сечений удлинение волокна стержня с сечением  $dF$  равно

$$\varepsilon = y/\rho. \quad (2.12)$$

Если рассматривать  $i$ -й повив как оболочку, состоящую из продольных волокон, в которых действуют напряжения  $\sigma^{(i)} = T^{(i)}/d^{(i)}$ , то из (2.4) следует закон Гука для продольного волокна в виде  $\varepsilon^{(i)} = \bar{b}_{11}^{(i)} T^{(i)} = \bar{b}_{11}^{(i)} d^{(i)} \sigma^{(i)}$ . Тогда для  $i$ -го повива из (2.10)-(2.12) получаем

$$E^{(i)} J_b^{(i)} = M_b^{(i)} \rho^{(i)} = \rho \int_F y \frac{\varepsilon^{(i)}}{\bar{b}_{11}^{(i)} d^{(i)}} dF = \frac{1}{\bar{b}_{11}^{(i)} d^{(i)}} \int_{F^{(i)}} y^2 dF^{(i)}.$$

Для кольцевого сечения радиуса  $r^{(i)}$  и толщиной  $d^{(i)}$  интеграл  $\int_{F^{(i)}} y^2 dF^{(i)} = \pi r^{(i)3} d^{(i)}$ . Поэтому жесткость на изгиб  $i$ -го повива

$$E^{(i)} J_b^{(i)} = \pi r^{(i)3} / \bar{b}_{11}^{(i)}. \quad (2.13)$$

При изгибе провода кривизна изгиба осей всех повивов и сердечника провода одинакова, а  $M_b = \sum_{i=0}^m M_b^{(i)}$ . Поэтому изгибная жесткость провода с учетом (2.13) равна

$$EJ_b = \rho \sum_{i=0}^m M_b^{(i)} = \pi \sum_{i=0}^m r^{(i)3} / \bar{b}_{11}^{(i)} \quad (2.14)$$

### 2.3. Жесткости проводов серии АС. Различные оценки

Очевидно, что истинные значения жесткостей провода больше соответствующих значений, вычисленных в предположении, что спирали между собой не взаимодействуют. В этом случае мы имеем ансамбль несвязанных проволок, для которого изгибная жесткость  $EJ_y = EJ_z = EJ$  и крутильная жесткость  $GJ_t$  вычисляются, суммируя соответствующие жесткости отдельных проволок. В итоге, получим

$$(EJ)_{\min} = \frac{\pi}{64} (E_s d_s^4 N_s + E_a d_a^4 N_a), \quad (GJ_t)_{\min} = 2(EJ)_{\min}, \quad (2.15)$$

где  $E_s$ ,  $E_a$ ,  $G_s$ ,  $G_a$  – модули упругости и сдвига алюминиевого сплава и стали, из которых изготовлены проволоки;  $d_s$ ,  $d_a$ ,  $N_s$ ,  $N_a$  – соответствующие диаметры и количества проволок, из которых составлен провод.

Очевидно также, что истинные значения жесткостей провода меньше соответствующих значений в предположении соединения проволок в одно целое. В этом случае мы имеем специфичный стержень, состоящий из жестко связанных винтовых стержней.

Тогда для  $i$ -го винтового стержня (спирали), принадлежащей произвольному повиву, координата центра тяжести

$$y_i = r \sin(\varphi_0 + i \cdot 2\pi/m), \quad (2.16)$$

где  $r$  – радиус окружности, на которой лежат центры тяжести поперечных сечений проволок;  $\varphi_0$  – начальный угол, между горизонтальной осью сечения повива и линией, соединяющей центр повива с центром поперечного сечения проволоки, с которой начинается нумерация;  $m$  – число проволок в повиве.

Момент инерции сечения повива как единого целого относительно оси  $Oz$  равен  $J = nJ_0 + F \sum_{i=1}^m y_i^2$ , где  $J_0 = \pi d^4/64$  и  $F = \pi d^2/4$  – соответственно, собственный момент инерции сечения проволоки и её площадь.

С учётом (2.16), получим

$$J = \frac{\pi d^2}{4} \left[ m \frac{d^2}{16} + r^2 \sum_{i=1}^m \sin^2 \left( \varphi_0 + i \frac{2\pi}{m} \right) \right].$$

Используя формулы для конечных сумм

$$\sum_{i=1}^m \sin^2 \frac{i2\pi}{m} = \sum_{i=1}^m \cos^2 \frac{i2\pi}{m} = \frac{m}{2}, \quad \sum_{i=1}^m \sin \frac{i2\pi}{m} \cos \frac{i2\pi}{m} = 0,$$

приходим к выражению:

$$J = \frac{m\pi d^2}{8} \left( \frac{d^2}{8} + r^2 \right). \quad (2.17)$$

Теперь, изгибная жесткость стержня, составленного из жестко соединенных между собой проволок, равна

$$(EJ)_{\max} = E_s \sum_i J_i + E_a \sum_j J_j, \quad (2.18)$$

где суммирование ведется по всем повивам, состоящим из стальных и алюминиевых проволок; для каждого повива момент инерции вычисляется по формуле (2.17).

Крутильная жесткость провода как жесткого целого, составленного из алюминиевых и стальных проволок,

$$(GJ_t)_{\max} = G_s \sum_i J_{p,i} + G_a \sum_j J_{p,j}, \quad (2.19)$$

где суммируются полярные моменты инерции, вычисляемые для каждого повива по формуле  $J_p = 2 \cdot J$ .

## 2.4. Результаты вычислений

В первых колонках таблиц 2.1 и 2.2 даны марки сталеалюминевых проводов серии АС в виде отношения номинальных площадей алюминиевой и стальной частей сечения провода ( $\text{мм}^2$ ). Во вторых – внешние диаметры провода. Третьи колонки содержат значения жесткостей на изгиб и кручение, посчитанные соответственно по формулам (2.14) и (2.9). Значения жесткостей, вычисленные по формулам (2.15) для проводов в виде ансамбля несвязанных проволочных спиралей, даны в четвертых колонках. В пятых колонках представлены значения жесткостей, посчитанные соответственно по формулам (2.18), (2.19) для стержней, составленных из жестко соединенных проволок.

Таблица 2.1 – Изгибные жесткости проводов АС

Марка провода АС	$d$ , мм	$EJ$ , Н·м <sup>2</sup>	$(EJ)_{\min}$ , Н·м <sup>2</sup>	$(EJ)_{\max}$ , Н·м <sup>2</sup>
120/19	15.15	113.55	3.81	159.65
120/27	15.40	125.27	4.06	184.74
150/19	16.75	166.76	5.95	228.05
150/34	17.50	208.90	6.77	308.06
185/24	18.90	269.53	9.57	369.41
240/39	21.55	463.10	15.50	653.07
185/128	23.10	835.68	10.72	1260.38
300/39	23.95	695.43	24.80	953.01
300/66	24.50	812.20	19.32	1180.07
330/30	24.78	807.49	15.12	1041.88
330/43	25.20	867.18	15.79	1187.02
400/22	26.56	1041.55	12.65	1318.77
400/64	27.68	1261.26	42.23	1777.83
400/93	29.10	1615.03	38.30	2347.54
300/204	29.15	2119.07	27.19	3196.01
500/26	30.00	1684.21	35.47	2103.67
500/64	30.60	1885.35	34.33	2580.73
550/71	32.40	2369.66	43.15	3243.68
600/72	33.20	2632.84	39.64	3568.05
650/79	34.70	3134.37	28.88	4293.07



Таблица 2.2 – Крутильные жесткости проводов АС

Марка провода АС	$d$ , мм	$GJ_t$ , Н·м <sup>2</sup>	$(GJ_t)_{\min}$ , Н·м <sup>2</sup>	$(GJ_t)_{\max}$ , Н·м <sup>2</sup>	$GJ_t^{\text{экс.}}$ , Н·м <sup>2</sup>
120/19	15,15	15.37	2.95	107.05	14.22
120/27	15,40	16.50	3.15	117.17	15.19
150/19	16,75	23.03	4.59	157.93	21.25
150/34	17,50	27.50	5.26	195.38	25.32
185/24	18.90	37.18	7.39	255.18	34.45
240/39	21.55	62.60	11.98	436.45	58.23
185/128	23.10	82.66	8.3781	741.02	76.88
300/39	23.95	96.14	19.14	659.48	88.84
300/66	24.50	101.48	14.93	755.60	97.28
330/30	24.78	103.77	11.66	757.29	101.81
330/43	25.20	120.92	12.22	817.61	108.88
400/22	26.56	163.73	9.75	995.61	134.36
400/64	27.68	170.52	32.65	1188.76	158.50
400/93	29.10	200.79	29.59	1501.66	193.61
300/204	29.15	209.61	21.24	1879.04	194.95
500/26	30.00	244.93	27.32	1601.22	218.70
500/64	30.60	262.89	26.58	1777.59	236.73
550/71	32.40	330.42	33.40	2234.22	297.54
600/72	33.20	360.17	30.57	2477.39	328.03
650/79	34.70	468.10	22.31	2970.05	391.45

Дополнительная шестая колонка таблице 2 содержит значения крутильных жесткостей, вычисленных по формуле  $GJ_t^{\text{экс.}} = 0.00027d^4$ , где  $d$  – внешний диаметр провода в миллиметрах, а числовой коэффициент имеет размерность Н·м<sup>2</sup>/мм<sup>4</sup>. Эта формула получена в институте Montefiore (Бельгия, Льежский университет) [84] в результате обширного анализа экспериментальных данных.

Сравнение колонок 3 и 6 табл. 2.2 говорит о хорошем соответствии предложенной модели экспериментальным данным.

Однако, как видно из сравнения табличных колонок 3, 4 и 5, разброс значений изгибных и крутильных жесткостей весьма велик, что не позволяет

пользоваться «предельными» моделями для вычисления изгибных и крутильных жесткостей проводов и тросов воздушных ЛЭП.

Результаты расчётов жесткостей проводов представлены также графически на рисунке 2.1 в зависимости от внешнего диаметра провода. Маркерами отмечены значения жесткостей, вычисленных по формулам (2.9) и (2.14). Сплошная линия на графике (а) представляет экспериментальные значения крутильных жесткостей.

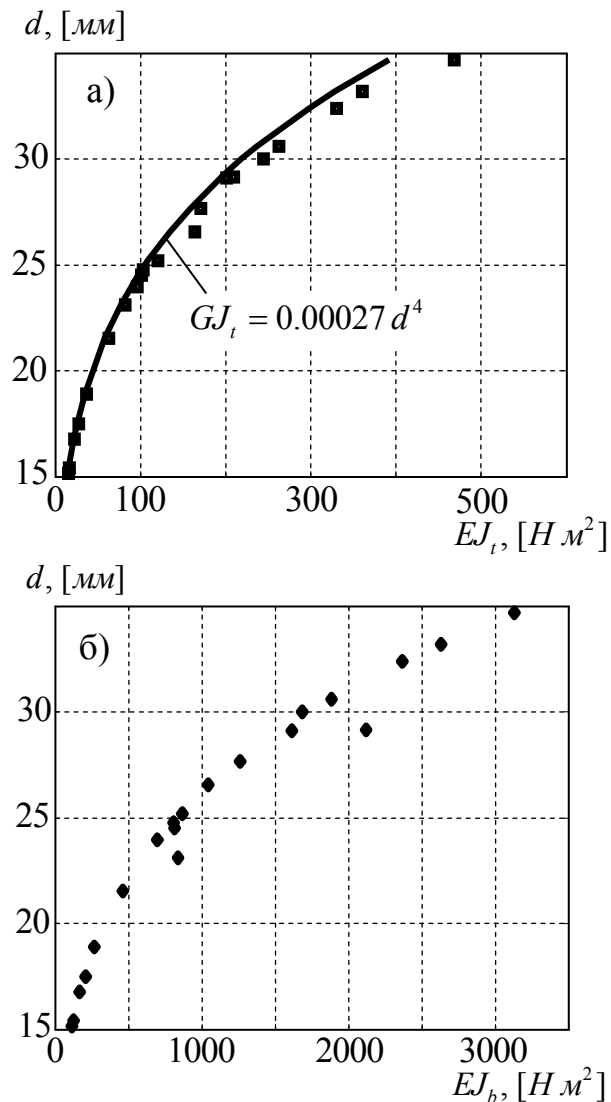


Рисунок 2.1. Зависимости крутильных (а) и изгибных (б) жесткостей сталеалюминиевых проводов (АС) от их внешнего диаметра

### ГЛАВА 3. АЭРОДИНАМИКА ОБТЕКАНИЯ ПРОВОДА С ОБРАЗОВАНИЕМ СПУТНОГО СЛЕДА

Ветровой поток воздействует на провод (трос, кабель) силами давления и трения. Результирующими силовыми факторами являются: сила лобового сопротивления ( $D$ ), подъемная сила ( $L$ ) и аэродинамический момент ( $M$ ):

$$D = \frac{\rho V^2}{2} d C_D, \quad L = \frac{\rho V^2}{2} d C_L, \quad M = \frac{\rho V^2}{2} \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) C_M, \quad (3.1)$$

где  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] – плотность воздуха;  $V$  [м/с] – скорость набегающего потока;  $C_D$ ,  $C_L$ ,  $C_M$  – безразмерные коэффициенты лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента;  $d$  [м] – диаметр провода.

Для упрощения в расчётах провод (трос) в окрестности выбранного сечения, как правило, заменяется круговым цилиндром. Аэродинамический момент существенным образом проявляется при отложении на поверхности провода гололёдно-изморозевого осадка, делая его поперечное сечение некруглым. Для проводов без гололёдного осадка аэродинамический момент считается равным нулю.

Область в окрестности провода при его обтекании воздушным потоком находится в возмущенном состоянии. В этой области условно выделяют несколько характерных зон, показанных на рисунке 3.1.

Спутный след представляет собой наибольшую ограниченную в пространстве область возмущённого воздуха в виде вихрей. Образование, взаимодействие и перемещение вихрей за проводом формируют совершенно иную по структуре область течения, которую называют также гидродинамическим или аэродинамическим следом. Набегающий поток, условно разделенный спутным следом на две части, восстанавливает свою структуру лишь на некотором расстоянии от провода. Спутный след является характерным для проводов воздушных линий электропередачи при скоростях ветра  $V$  от  $\sim 0.1$  м/с до  $\sim 15-20$  м/с.

Протяженность спутного следа существенно зависит от формы тела и от числа Рейнольдса  $Re = Vd/\mu$ , где  $\mu$  – кинематическая вязкость (отношение динамической вязкости к плотности среды),  $m^2/c$ . В этой связи различают различные стадии развития спутного следа в зависимости от числа Рейнольдса [138].

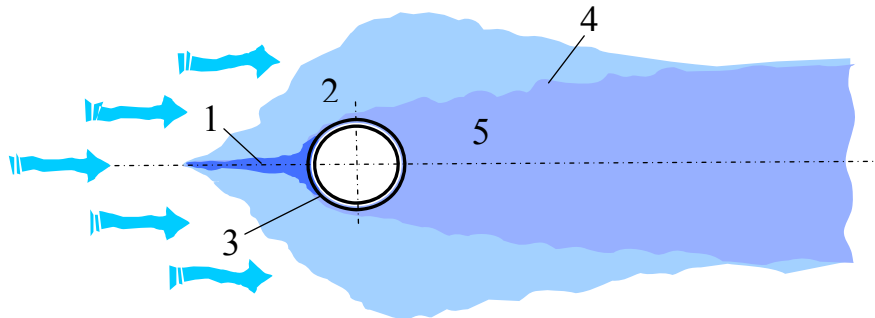


Рисунок 3.1 – Области спутного следа:

1 – область замедленного течения; 2 – смещённый и ускоренный поток; 3 – пограничный слой вблизи поверхности цилиндра; 4 – свободный сдвиговый слой, разделяющий ускоренный поток и след; 5 – спутный след

След начинает формироваться при  $Re \approx 40$ , когда свободные сдвиговые слои между замедленным (1) и ускоренным (2) потоками начинают трансформироваться в чередующиеся вихри. При относительно низких значениях  $Re$  (до 100...140) образуется вихревая дорожка Кармана. С увеличением  $Re$  проявляется и нарастает турбулентность в области спутного следа. При  $Re \approx 200$  турбулентные вихри распространяются на расстояние до 40...50 диаметров цилиндра. При  $Re \approx 300...400$  турбулентные вихри начинают заполнять близлежащую к цилиндру область, как показано на рисунке 3.2 ([http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/dyn\\_of\\_visc\\_fluid\\_and\\_turb](http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/dyn_of_visc_fluid_and_turb)).

Возникновение спутного следа обусловлено физикой взаимодействия поля давления и силы трения в пристенной области. В процессе движения вязкой среды внутри пограничного слоя часть кинетической энергии теряется за счет трения. Поэтому кинетической энергии потока внутри пограничного слоя недостаточно для полного преодоления направленного ему навстречу действия поля давления. В результате положительный градиент давления вызывает внутри пограничного слоя торможение и может привести к остановке

и обратному току среды в некоторой конечной области. Это приводит к отрыву потока от твердой границы.

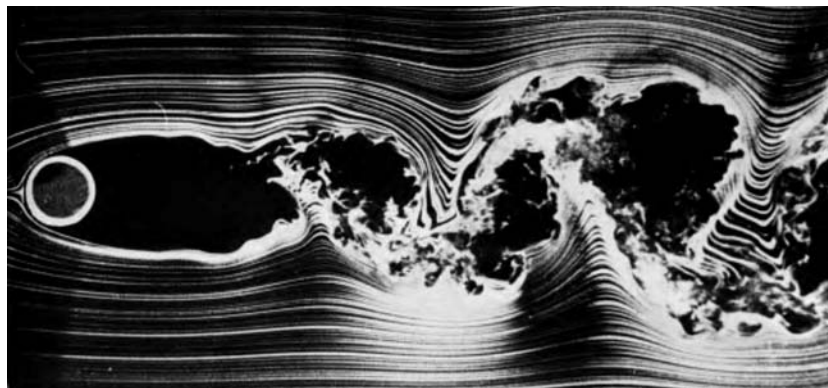


Рисунок 3.2 – Обтекание круглого цилиндра при  $Re = 10^4$

В точке отрыва касательные напряжения на твердой поверхности провода равны нулю, так как в этой точке градиент скорости обращается в нуль. За точкой отрыва пограничный слой трансформируется в отрывное течение, характеризующееся сильной неустойчивостью образующихся крупномасштабных вихрей. Отдельные вихри, отрываясь от твердой поверхности, сносятся потоком, на их месте образуются новые вихри и т.д.

В результате отделения вихрей на упругий провод начинают действовать периодические силы вдоль и поперёк набегающего потока. Вибрирующий провод порождает аэродинамический след достаточно сложной структуры. Частота вибрации характеризуется числом Струхаля  $St = f_s d / V$ , где  $f_s$  – частота периодического срыва вихря с цилиндра диаметром  $d$  в установившемся потоке скорости  $V$ . В диапазоне  $40 < Re < 5 \cdot 10^3$  число Струхаля приближённо описывается формулой  $St = 0.195(1 - 20.1/Re)$  [32]. При  $Re > 10^3$  число Струхаля становится практически постоянным, и для неподвижного цилиндра составляет  $St \approx 0.2$ .

Следует отметить ещё одно обстоятельство, осложняющее математическое описание аэродинамических сил, действующих на подветренный провод в спутном следе. Существенное влияние на положение точки отрыва, следовательно, и на размеры следа, а в конечном итоге и на силу сопротивления оказывает режим движения в пограничном слое. Распределение осред-

ненной скорости в турбулентном пограничном слое более равномерное, чем в ламинарном. Средняя скорость и поток количества движения в поперечном сечении (при одинаковой толщине и скорости на внешней границе) в турбулентном режиме больше, чем в ламинарном. Поэтому изменение количества движения в турбулентном пограничном слое может компенсировать большие градиенты давления, чем в ламинарном, и, следовательно, точка отрыва турбулентного потока, будет располагаться ниже по течению. То есть спутный след за телом сужается, что приводит к уменьшению силы сопротивления.

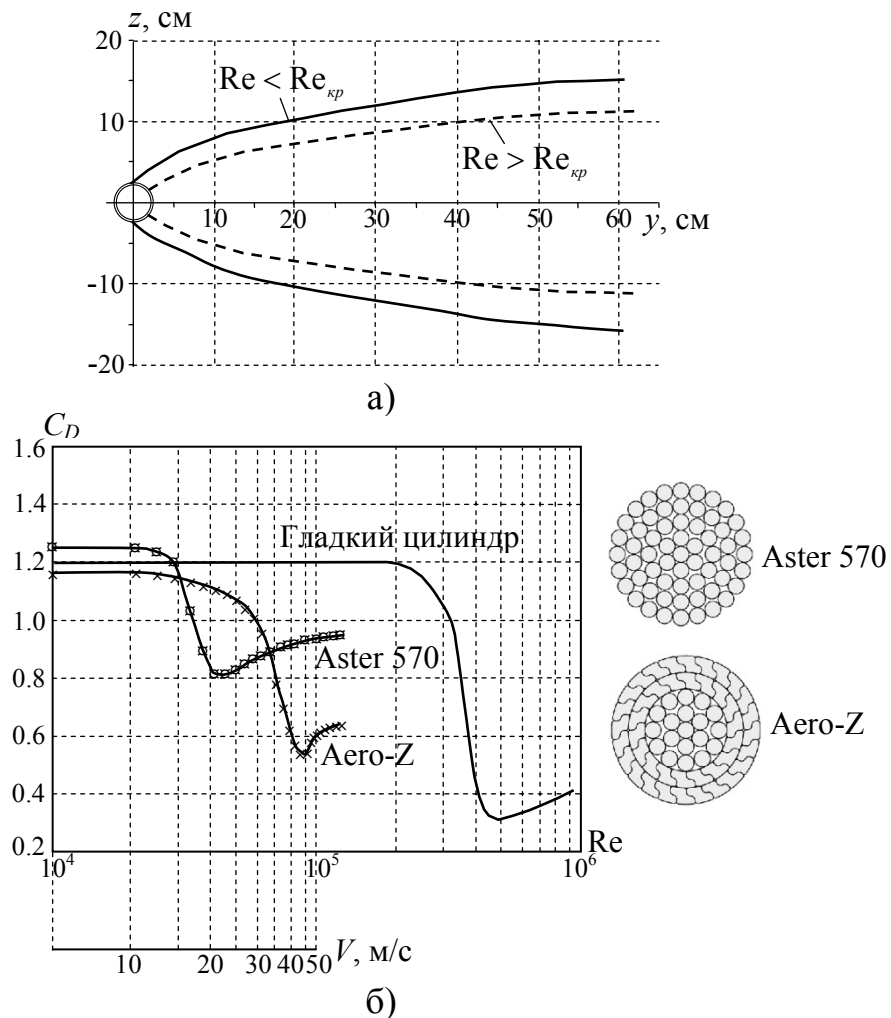


Рисунок 3.3 – Кризис сопротивления:

- а) – Сужение области аэродинамического следа в закритическом состоянии; б) – Изменение коэффициента лобового сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса в закритическом состоянии

Таким образом, турбулентность в пограничном слое при больших числах Рейнольдса сопровождается падением коэффициента сопротивления. Это

явление называется кризисом сопротивления. На рисунке 3.3 а) условно показан спутный след в докритическом и закритическом состояниях. На рисунке 3.3 б) показано изменение коэффициента аэродинамического сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса для двух типовых провода и для гладкого цилиндра (по техн. материалам Nexans-Benelux, Belgium).

### 3.1. Аппроксимация скорости потока в области спутного следа

Как было отмечено ранее (см. рисунок 3.1) в спутном следе средняя скорость воздушного потока меньше скорости свободно набегающего (ветрового) потока. Следуя Блевинсу (Blevins R.D., 1990) [70] это уменьшение в дальнем следе, может быть приближённо описано эмпирической функцией. Для её определения введём в плоскости поперечного сечения наветренного и подветренного проводов локальные координаты с центром на осевой линии наветренного провода. Ось  $y$  направим в направлении скорости свободного потока  $V$ , ось  $z$  – перпендикулярно  $V$ . Введём также безразмерные координаты  $\eta = y/d$ ,  $\xi = z/d$ , где  $d$  – диаметр провода. Через  $C_{Dmax}$  обозначим коэффициент лобового сопротивления для наветренного провода и в дальнейших вычислениях будем считать его равным 1.2, как для гладкого цилиндра.

В результате экспериментальных исследований Р. Блевинсом установлено, что в расчётах субколебаний допустимо использовать следующее допущение: подветренный провод обтекается воздушным потоком, вектор скорости которого  $\tilde{V}$  коллинеарен вектору скорости свободного потока  $V$  и определяется выражением:

$$\tilde{V} = V \cdot \Psi(\eta, \xi). \quad (3.2)$$

где функция распределения

$$\Psi(\eta, \xi) = 1 - C_{Dmax} \cdot \sqrt{\frac{C_{Dmax}}{(\eta + 6)} \exp(-0.69 \cdot (\xi / B(\eta))^2)}, \quad (3.3)$$

где  $B(\eta) = 0.23 \sqrt{C_{Dmax} (\eta + 6)}$ .

Последнее выражение упрощается, если ввести обозначение

$$\psi(\eta, \xi) = C_{D_{\max}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{0,23C_{D_{\max}}(\eta+6)}\right). \quad (3.4)$$

Тогда вместо (3.3) нетрудно получить

$$\Psi(\eta, \xi) = 1 - \psi(\eta, \xi) \sqrt{\frac{\psi(\eta, \xi)}{\eta+6}}. \quad (3.5)$$

Изображение  $\Psi(\eta, \xi)$  в виде поверхности показано на рисунке 3.4.

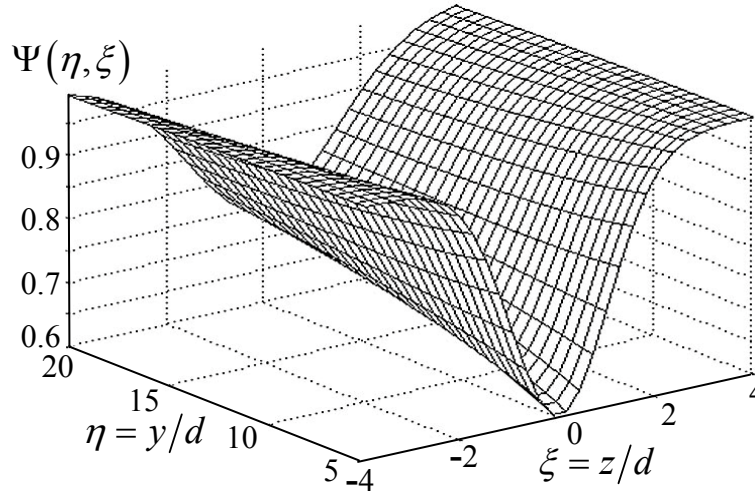


Рисунок 3.4 – Поверхность функции  $\Psi(\eta, \xi)$

На рисунке 3.5 показаны амплитудные значения профилей  $\Psi(\eta, \xi)$  для шести сечений в следе, отстоящих друг от друга на 5 диаметров провода.

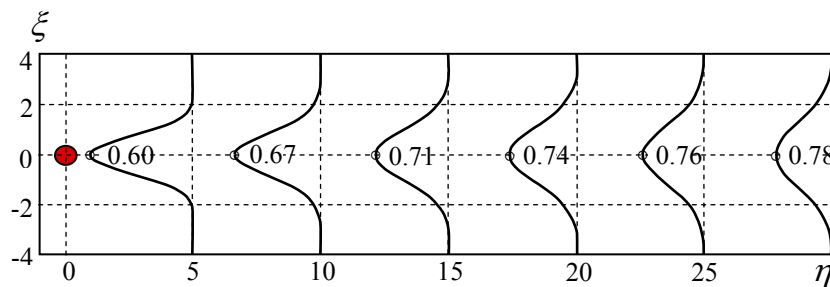


Рисунок 3.5 – Распределение  $\Psi(\eta, \xi)$  по равноотстоящим сечениям вдоль спутного следа



### 3.2. Аппроксимация аэродинамических сил в спутном следе

Эксперименты показывают, что подветренный провод под действием упругих и аэродинамических сил совершает колебания в спутном следе относительно его условной оси. На провод в следе действуют сила лобового сопротивления  $D$ , направленная в направлении спутного следа, и подъемная сила  $L$ , направленная по нормали к  $D$ . Их распределения по сечениям следа зависят от распределений соответствующих аэродинамических коэффициентов  $C_D$  и  $C_L$ . На рисунке 3.6 показан характер их распределения по поперечным сечениям следа [86]. На рисунке 3.7 показаны распределения  $C_D$  и  $C_L$  в следе, полученные в экспериментах Джорджо Диана [82].

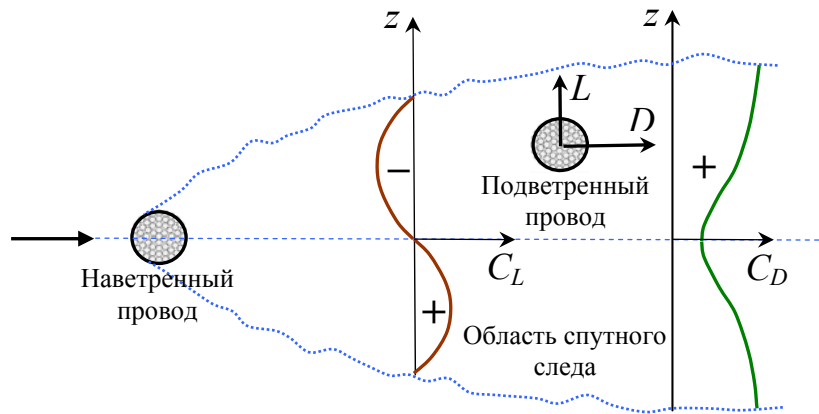


Рисунок 3.6 – Характер распределений аэродинамических коэффициентов по сечениям спутного следа

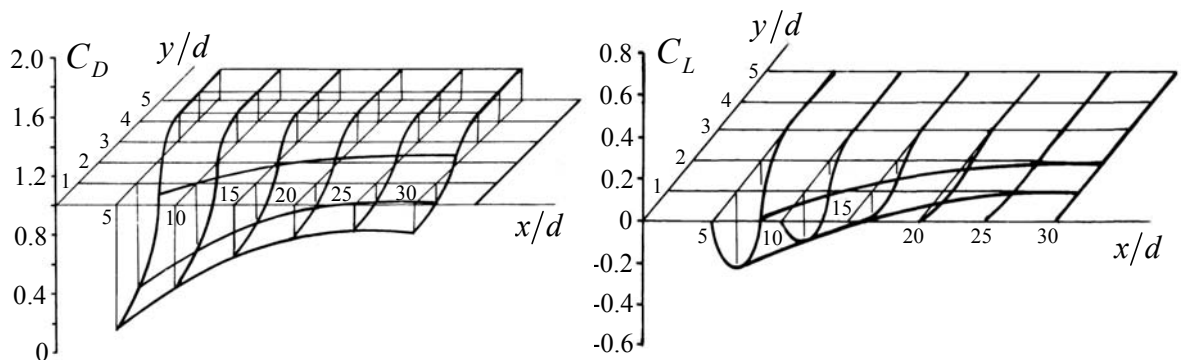


Рисунок 3.7 – Эмпирические зависимости аэродинамических коэффициентов в различных сечения следа

Природа возникновения силы лобового сопротивления понятна и хорошо изучена. Лобовое сопротивление складывается из сил касательного (тан-

генциального) трения, направленных вдоль поверхности тела, и сил давления, направленных по нормали к поверхности. Однако происхождение подъемной силы до сих пор остается предметом дискуссий.

Одно из объяснений основано на том, что след представляет собой область пониженного давления и, как следствие, на подветренный провод начинают действовать силы давления, направленные к осевой линии следа [106]. Другая гипотеза основана на том, что ослабление и диффузия спутного следа по его границам обуславливают приток внутрь следа воздушных масс с более высокой скоростью. Этот поток вызывает наклон вектора силы сопротивления к центру следа, что приводит к кажущемуся возникновению подъемной силы, направленной к оси следа [68,127].

Существует также гипотеза, авторы которой считают, что основной причиной появления подъемной силы, действующей на подветренный провод в спутном следе, является циркуляция скорости потока, причем сама эта циркуляция появляется под действием завихренности, то есть определенной системы минивихрей воздушного потока, проходящего через зону пограничного слоя [114,115].

Следует отметить, что существующие гипотезы трудно проверить из-за сильного искажения воздушного потока в следе, вызванного присутствием движущегося в нём провода. До сих пор испытания в аэродинамической трубе являются единственным надежным источником информации о нагрузках, вызванных спутным следом.

Экспериментальные результаты по измерениям аэродинамических сил в спутном следе получены многими авторами. Прежде всего, следует отметить работы Симпсона (Simpson A.) [126], Прайса (Price S.J.) [112], Уордлоу (Wardlaw R.L.) и др. [137], Диана (Diana G.) [81,83] и др., которые внесли основной вклад в измерение и изучение нагрузок, передаваемых на гладкие цилиндры, гладкие и многожильные провода в аэродинамическом следе.

Получение распределений аэродинамических коэффициентов в спутном следе в аналитической форме представляет значительный научный интерес,

поскольку существенно упрощает вывод нелинейных уравнений колебаний, их линеаризацию и анализ динамической устойчивости.

При моделировании колебаний проводов в спутном следе важно полагаться на достоверные и максимально полные аэродинамические данные. Среди известных в литературе наибольший интерес представляют результаты исследований Диана [81,83] и Прайса [112], которые представили не только результаты обширных экспериментальных исследований обтекания гладких цилиндров, но и аналитические аппроксимации для аэродинамических коэффициентов для достаточно больших областей следа и при различных скоростях обтекания. Необходимо также отметить результаты исследований EPRI (The Electric Power Research Institute, Inc.) [86], посвященные измерению нагрузок в следе от проводов серии Chukar.

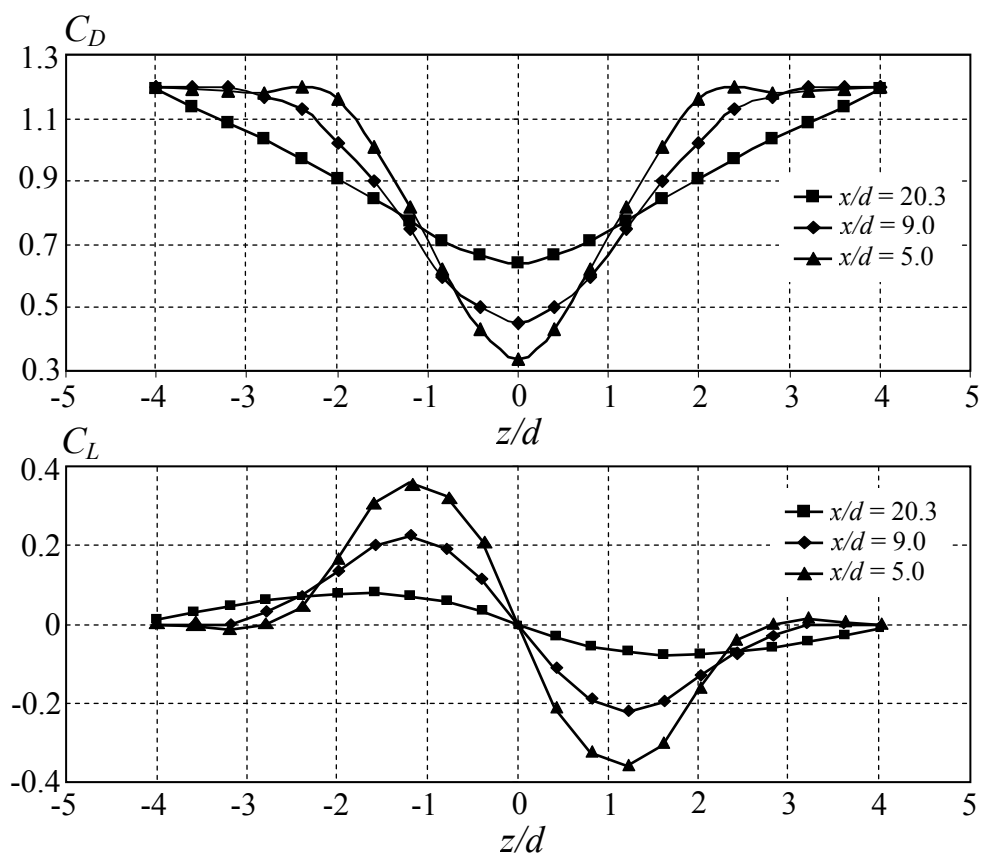


Рисунок 3.8 – Распределения аэродинамических коэффициентов в области спутного следа гладкого кругового цилиндра для трёх сечений следа

В настоящей диссертационной работе для аппроксимации аэродинамических коэффициентов использованы данные Прайса. Полиномиальные представления на их основе «работоспособны» для большой области следа и позволяют вычислить производные, пригодные для оценок динамической устойчивости по критерию Симпсона ( $C_{Ly} C_{Dz} < 0$ ) [125]. Результаты экспериментальных исследований Прайса частично отражены на рисунке 3.8, где показаны распределения  $C_D(\eta, \xi)$  и  $C_L(\eta, \xi)$  для потока с  $Re = 3.58 \cdot 10^4$  и интенсивностью турбулентности 1.5%.

Далее в работе для аналитической аппроксимации распределений аэродинамических коэффициентов мы будем использовать полиномы, аналогичные полиномам Бокаяна [71], однако обладающие бóльшей точностью и охватывающие бóльшую часть аэродинамического следа. Степени и коэффициенты полиномиальных представлений подбирались с использованием метода наименьших квадратов. В результате вычислений получены следующие аппроксимации:

- в области  $|\xi| \leq 4, 5 \leq \eta \leq 20.3$

$$\begin{aligned} C_D(\eta, \xi) &= \sum_{i=0,2,\dots}^{10} (b_{i,0} + b_{i,1}\eta + b_{i,2}\eta^2) \xi^i, \\ C_L(\eta, \xi) &= \sum_{i=1,3,\dots}^9 (q_{i,0} + q_{i,1}\eta + q_{i,2}\eta^2) \xi^i; \end{aligned} \quad (3.6)$$

- вне этой области принимается, что  $C_D = 1.2, C_L = 0$ .

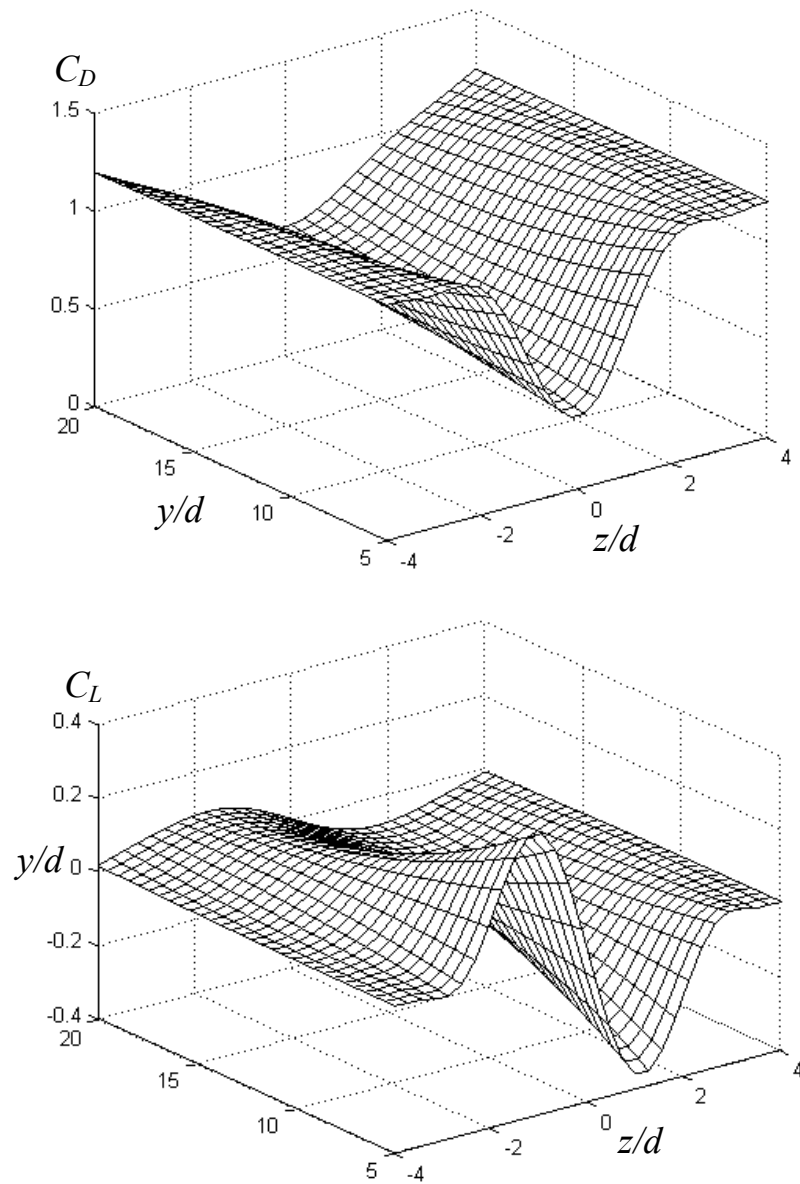
Значения коэффициентов  $b_{i,0}, b_{i,1}, b_{i,2}$  and  $q_{i,0}, q_{i,1}, q_{i,2}$  даны в таблицах 3.1 and 3.2. Зависимостей (3.6) в виде поверхностей представлены на рисунке 3.9.

Таблица 3.1 – Коэффициенты  $b_{ij}$

$i \backslash j$	0	1	2
0	$2.3233 \cdot 10^{-1}$	$2.8447 \cdot 10^{-2}$	$-3.8314 \cdot 10^{-4}$
2	$7.2643 \cdot 10^{-1}$	$-7.1300 \cdot 10^{-2}$	$2.0024 \cdot 10^{-3}$
4	$-1.6282 \cdot 10^{-1}$	$1.9501 \cdot 10^{-2}$	$-5.9524 \cdot 10^{-4}$
6	$1.5361 \cdot 10^{-2}$	$-1.9301 \cdot 10^{-3}$	$5.9790 \cdot 10^{-5}$
8	$-6.4284 \cdot 10^{-4}$	$7.9299 \cdot 10^{-5}$	$-2.4034 \cdot 10^{-6}$
10	$9.7618 \cdot 10^{-6}$	$-1.1161 \cdot 10^{-6}$	$3.1730 \cdot 10^{-8}$

Таблица 3.2 – Коэффициенты  $q_{ij}$ 

$i \backslash j$	0	1	2
1	$-9.3661 \cdot 10^{-1}$	$9.4536 \cdot 10^{-2}$	$-2.5711 \cdot 10^{-3}$
3	$3.6221 \cdot 10^{-1}$	$-4.0494 \cdot 10^{-2}$	$1.1478 \cdot 10^{-3}$
5	$-4.9046 \cdot 10^{-2}$	$5.7814 \cdot 10^{-3}$	$-1.6845 \cdot 10^{-4}$
7	$2.8155 \cdot 10^{-3}$	$-3.4118 \cdot 10^{-4}$	$1.0093 \cdot 10^{-5}$
9	$-5.8531 \cdot 10^{-5}$	$7.1871 \cdot 10^{-6}$	$-2.1407 \cdot 10^{-7}$

Рисунок 3.9 – Коэффициенты  $C_D(\eta, \xi)$  и  $C_L(\eta, \xi)$  в области спутного следа

## ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СУБКОЛЕБАНИЙ

Математическая модель субколебаний фазных проводов формулируется на основе метода конечных элементов. Для описания локальных перемещений в пределах конечного элемента используется метод Ритца с выбором тригонометрических функций в качестве базисных.

Рассматривается аэроупругая система, состоящая из двух проводов, соединенных внутрифазными дистанционными распорками. Деформирование проводов описывается в рамках гипотезы плоских сечений: считается, что поперечные сечения проводов смещаются и поворачиваются в пространстве как жесткие диски, оставаясь нормальными к осевым линиям проводов. Распорки моделируются как абсолютно жесткие невесомые стержни и поэтому рассматриваются как голономные связи, наложенные на упругую систему из двух проводов. Сила натяжения провода (тяжение), так же как и его деформация растяжения, считаются в пределах элемента постоянными величинами. Зависимость деформации от поперечных перемещений определяется квадратичным приближением.

Следовая связь между проводами моделируется с помощью модифицированной теории Симпсона [125,126] с использованием эмпирических данных Блевинса [70] и Прайса [112].

В качестве обобщенных координат принимаются абсолютные перемещения и углы закручивания узловых сечений, а также коэффициенты тригонометрических разложений по синусам для локальных перемещений и углов закручивания в пределах каждого элемента [73,77,122].

Уравнения движения проводов записываются в обобщенных координатах с нелинейными упругими, инерционными и аэродинамическими силами. Начальная конфигурация определяется из решения статических уравнений равновесия с использованием метода продолжения решения по параметру.

Уравнения движения системы составляются на основе принципа возможных перемещений:

$$\delta U - \delta A_p - \delta A_{in} = 0. \quad (4.1)$$

где  $\delta U$  – вариация потенциальной энергии системы;  $\delta A_p$ ,  $\delta A_{in}$  – вариации работы внешних и инерционных сил.

Введём неподвижную (инерциальную) систему координат  $OXYZ$ . С конечным элементом свяжем координатную систему  $\tilde{O}xyz$ , которая движется совместно с этим элементом. Через  $\tilde{r}$  и  $r$  обозначим радиус-векторы полюса  $O_c$  в системах  $\tilde{O}xyz$  и  $OXYZ$  соответственно, как показано на рисунке 4.1.

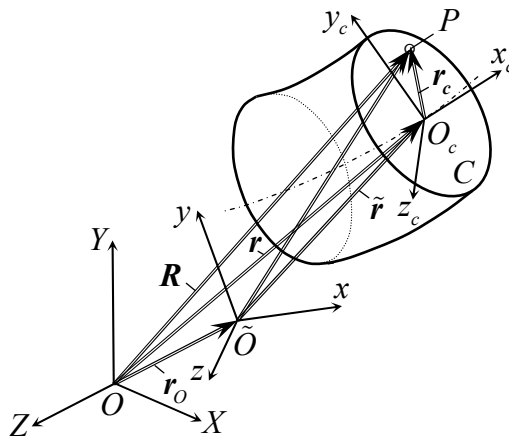


Рисунок 4.1 – Взаимная ориентация координатных систем

С произвольным сечением свяжем прямоугольную систему координат  $O_c x_c y_c z_c$ , совмещая начало координат  $O_c$  (полюс) с точкой сечения, принадлежащей осевой линии. Ось  $O_c x_c$  направим перпендикулярно сечению. Обозначим, далее, через  $r_c$  радиус-вектор произвольной точки сечения относительно полюса  $O_c$ .

С учётом введённых обозначений радиус-вектор точки сечения в координатной системе  $OXYZ$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_c, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \tilde{\mathbf{r}}.$$

Пусть  $V$  и  $S$  – объем и площадь поверхности конечного элемента,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{g}$  – вектора поверхностной и объемной внешней нагрузки,  $\rho$  – массовая плотность материала. Тогда, в общем случае

$$\delta A_p = \int_S \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dS + \int_V \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{R} dV, \quad \delta A_{in} = - \int_V \rho \ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R} dV, \quad (4.2)$$

где  $\ddot{\mathbf{R}}$  и  $\delta\mathbf{R}$  – ускорение точки сечения и вариация её положения.

Введем  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости сечения. Тогда [41]

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c). \quad (4.3)$$

Пусть  $\delta\boldsymbol{\theta}$  – вектор бесконечно малого поворота сечения. Тогда виртуальное перемещение произвольной точки сечения

$$\delta\mathbf{R} = \delta\mathbf{r} + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_c. \quad (4.4)$$

Для определения вариации  $\delta\boldsymbol{\theta}$  рассмотрим два положения сечения провода – начальное, в котором оси  $O_c x_c y_c z_c$  совпадают по направлению с осями неизменного направления  $OXYZ$ , и конечное, соответствующее рассматриваемому положению сечения. Пусть  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  и  $\mathbf{i}_1^c, \mathbf{i}_2^c, \mathbf{i}_3^c$  – единичные векторы систем  $OXYZ$  и  $O_c x_c y_c z_c$  соответственно.

Если использовать эйлеровы углы – углы прецессии  $\hat{\psi}$ , нутации  $\hat{\mathcal{G}}$  чистого сдвига  $\hat{\phi}$ , то

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{i}_3 \delta\hat{\psi} + \mathbf{n} \delta\hat{\mathcal{G}} + \mathbf{i}_3^c \delta\hat{\phi}.$$

Здесь:  $\mathbf{i}_3$  – единичный вектор первого поворота на угол  $\hat{\psi}$  вокруг оси  $OZ$ , после которого единичные векторы  $\mathbf{i}_1^c, \mathbf{i}_2^c$  примут направления единичных векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}_1$ . Вектор  $\mathbf{n}$  определяет ось узлов, относительно которой производится второй поворот на угол  $\hat{\mathcal{G}}$ , при котором векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{i}_3^c$  займут новые положения, причём последний определяет ось  $O_c z_c$  в её конечном положении. Последний поворот на угол  $\hat{\phi}$  совершается относительно конечного положения оси  $O_c z_c$ .

В итоге связь между единичными векторами записывается в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1^c &= (\cos \hat{\psi} \cos \hat{\phi} - \sin \hat{\psi} \cos \hat{\mathcal{G}} \sin \hat{\phi}) \mathbf{i}_1 + \\ &+ (\sin \hat{\psi} \cos \hat{\phi} + \cos \hat{\psi} \cos \hat{\mathcal{G}} \sin \hat{\phi}) \mathbf{i}_2 + \sin \hat{\mathcal{G}} \sin \hat{\phi} \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{i}_2^c &= (-\cos \hat{\psi} \sin \hat{\phi} - \sin \hat{\psi} \cos \hat{\mathcal{G}} \cos \hat{\phi}) \mathbf{i}_1 + \\ &+ (-\sin \hat{\psi} \sin \hat{\phi} + \cos \hat{\psi} \cos \hat{\mathcal{G}} \cos \hat{\phi}) \mathbf{i}_2 + \sin \hat{\mathcal{G}} \cos \hat{\phi} \mathbf{i}_3, \end{aligned} \quad (4.5)$$



$$\hat{\mathbf{i}}_3^c = \sin \hat{\psi} \sin \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{i}}_1 - \cos \hat{\psi} \sin \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{i}}_2 + \cos \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{i}}_3,$$

позволяющие получить  $\alpha_{ij} = \hat{\mathbf{i}}_i^c \cdot \hat{\mathbf{i}}_j$  – направляющие косинусы углов между осями координатных систем  $OXYZ$  и  $O_c x_c y_c z_c$ .

#### 4.1. Аппроксимация перемещений и деформационные соотношения

Рассмотрим сначала одиночный провод, натянутый в пролёте воздушной ЛЭП между двумя анкерными опорами. Считается, что провод обладает упругостью только на растяжение с жёсткостью  $EF$  и кручение с жёсткостью  $GJ$ , где  $E, G$  – приведенные модули упругости и сдвига;  $F, J$  – эффективные площадь поперечного сечения и момент инерции при кручении. Начальное удлинение провода в пролёте ЛЭП записывается в виде:

$$\Delta^\circ = L^\circ (1 + \alpha T) - L. \quad (4.6)$$

Здесь  $L$  – расстояние между точками подвеса,  $L^\circ$  – начальная (монтажная) длина провода без учёта упругой деформации,  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $T$  – приращение температуры по отношению к нормальной.

Под воздействием ветра и гравитационной нагрузки провод испытывает колебания, при которых его поперечные сечения в пространстве совершают перемещения и повороты. Однако вследствие значительного натяжения проводов в пролёте между опорами углы поворота из плоскости начального положения допустимо считать малыми, что невозможно сказать об угле закручивания относительно продольной оси провода. Последняя величина – конечная, также как и смещения сечений как твёрдых тел. Тем не менее, такие условия позволяют существенно упростить формулировку задачи, пренебрегая конечными поворотами и инерцией вращения сечений относительно поперечных осей.

С каждым  $i$ -м элементом свяжем локальные (элементные) системы координат  $\tilde{O}^{(i)} x^{(i)} y^{(i)} z^{(i)}$  следующим образом. Точка  $\tilde{O}^{(i)}$  совмещается с полюсом (центром массы) краевого поперечного сечения элемента. Локальные

(элементные) оси, движущиеся совместно с элементом, остаются параллельными соответствующим осям глобальной (инерциальной) координатной системы  $OXYZ$ , как это показано на рисунке 4.2.

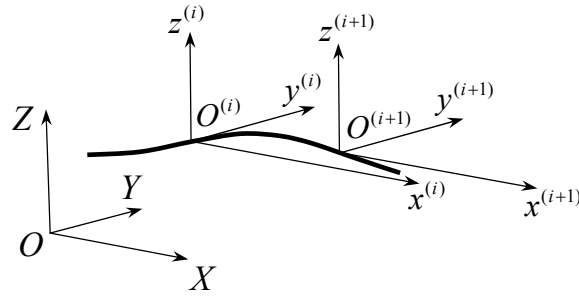


Рисунок 4.2 – Глобальная и элементные координатные системы

Координаты точек осевой линии провода вдоль осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  и угол поворота сечения провода вокруг оси  $OX$  обозначим соответственно через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $\varphi$ .

Локальные перемещения и угол поворота сечений провода в пределах конечного элемента длины  $l$  представим по методу Ритца в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= (u_1 - u_0)x/l, \\ \tilde{v} &= (v_1 - v_0)x/l + \sum_{i=1}^n q_i \sin(i\pi x/l), \quad \tilde{w} = (w_1 - w_0)x/l + \sum_{i=1}^n r_i \sin(i\pi x/l), \quad (4.7) \\ \tilde{\varphi} &= \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0)x/l + \sum_{i=1}^n p_i \sin(i\pi x/l), \end{aligned}$$

где  $u_k(t)$ ,  $v_k(t)$ ,  $w_k(t)$  ( $k = 0, 1$ ) – граничные значения координат и угла поворота при  $x = 0$  ( $k = 0$ ) и  $x = l$  ( $k = 1$ ), которые принимаются в качестве обобщённых координат. Обобщёнными координатами являются также коэффициенты  $q_i(t)$ ,  $r_i(t)$ ,  $p_i(t)$ , определяющие внутренние степени свободы конечного элемента по синусоидальным формам.

Согласно правилу выбора координатных систем и (4.7) глобальные координаты и угол поворота произвольного сечения провода запишем в виде

$$u = u_0 + \Delta u, \quad v = v_0 + \Delta v, \quad w = w_0 + \Delta w, \quad \varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi, \quad (4.8)$$

где  $\Delta u = \tilde{u}$ ,  $\Delta v = \tilde{v}$ ,  $\Delta w = \tilde{w}$ ,  $\Delta \varphi = \tilde{\varphi} - \varphi_0$  считаются величинами малыми по сравнению с соответствующими величинами  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_0$ .

Пусть  $N$  и  $\varepsilon$  – сила тяжения (натяжения) провода и его продольная деформация. Силу  $N$  в пределах элемента будем считать величиной постоянной и равной

$$N = EF(\varepsilon - \Delta^0/L). \quad (4.9)$$

Откуда следует, что в пределах элемента деформация  $\varepsilon$  также будет величиной постоянной. Связь  $\varepsilon$  с перемещениями определим квадратичным приближением

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2). \quad (4.10)$$

Интегрирование (4.10) по  $x$  даёт:

$$\varepsilon l = u_1 - u_0 + \frac{1}{2} \int_0^l (v'^2 + w'^2) dx$$

или с учётом (4.7), (4.8) –

$$\varepsilon l = u_1 - u_0 + \frac{1}{2l} \left[ (v_1 - v_0)^2 + (w_1 - w_0)^2 + \sum_{i=1}^n \mu_i (q_i^2 + r_i^2) \right], \quad (4.11)$$

где  $\mu_i = (i\pi)^2/2$ .

## 4.2. Потенциальная энергия деформации и её вариация

Потенциальная энергия растяжения конечного элемента провода длины  $l$  записывается с учётом (4.6), (4.9) в виде

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^l N \varepsilon dx = \frac{lEF}{2} \left( \varepsilon - \frac{\Delta^0}{L} \right)^2. \quad (4.12)$$

Потенциальная энергия кручения:

$$U_t = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F \tau \gamma dF dx,$$

где  $\tau$ ,  $\gamma$  – касательное напряжение и сдвиговая деформация в сечении с площадью  $F$ . Пусть  $G$  – осреднённый модуль сдвига,  $\rho$  – радиус-вектор точки сечения относительно его полюса,  $\varphi'$  – относительный угол закручивания.

Тогда,  $\tau = G\gamma$ ,  $\gamma = \rho\varphi'$  и выражение для  $U_t$  принимает вид

$$U_t = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F G\gamma^2 dF dx = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F G\varphi'^2 \rho^2 dF dx = \frac{GJ_t}{2} \int_0^l \varphi'^2 dx,$$

где  $J_t = \int_F \rho^2 dF$ .

После интегрирования с учётом (4.7), (4.8) имеем:

$$U_t = \frac{GJ_t}{2l} \left[ (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + \sum_{i=1}^n \mu_i p_i^2 \right]. \quad (4.13)$$

Выражение для полной потенциальной энергии деформации  $U$  получаем, объединяя (4.12) и (4.13). В итоге

$$U = U_p + U_t = \frac{1}{2l} \left\{ EF \cdot l^2 \left( \varepsilon - \frac{\Delta^0}{L} \right)^2 + GJ_t \left[ (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + \sum_{i=1}^n \mu_i p_i^2 \right] \right\}. \quad (4.14)$$

Вариация потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \delta U = & \sum_{k=0}^1 \left( \frac{\partial U}{\partial u_k} \delta u_k + \frac{\partial U}{\partial v_k} \delta v_k + \frac{\partial U}{\partial w_k} \delta w_k + \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} \delta \varphi_k \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial U}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial U}{\partial p_i} \delta p_i \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Последовательное дифференцирование  $U$  в виде (4.14) по обобщённым координатам задачи приводит к выражениям для коэффициентов при вариациях обобщённых координат в (4.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u_k} = lN \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial U}{\partial v_k} = lN \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_k}, \quad \frac{\partial U}{\partial w_k} = lN \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_k}, \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} = -(-1)^k \frac{GJ_t}{l} (\varphi_1 - \varphi_0); \\ \frac{\partial U}{\partial q_i} = lN \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial U}{\partial r_i} = lN \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i}, \quad \frac{\partial U}{\partial p_i} = \frac{GJ_t}{l} \mu_i p_i. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_k} &= -\frac{(-1)^k}{l}, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_k} &= -(-1)^k \frac{v_1 - v_0}{l^2}, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_k} &= -(-1)^k \frac{w_1 - w_0}{l^2}; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_i} &= \frac{q_i \mu_i}{l^2}, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i} &= \frac{r_i \mu_i}{l^2}; & k &= 0, 1; \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Окончательные выражения для частных производных  $U$  по обобщённым координатам получаем, подставляя (4.17) в (4.16). В итоге:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u_k} &= -(-1)^k N, & \frac{\partial U}{\partial v_k} &= -(-1)^k N \frac{v_1 - v_0}{l}, & \frac{\partial U}{\partial w_k} &= -(-1)^k N \frac{w_1 - w_0}{l}, \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} &= -(-1)^k \frac{GJ_t}{l} (\varphi_1 - \varphi_0); \\ \frac{\partial U}{\partial q_i} &= Nq_i \mu_i, & \frac{\partial U}{\partial r_i} &= Nr_i \mu_i, & \frac{\partial U}{\partial p_i} &= \frac{GJ_t}{l} \mu_i p_i. \end{aligned} \quad (4.18)$$

### 4.3. Вариация работы инерционных сил

Как было сказано выше в п. 4.1 провода подвешиваются к опорам со значительной силой натяжения для предотвращения недопустимого провисания с учётом температуры. Это позволяет считать углы поворота из плоскости начального положения величинами малыми и ими пренебрегать при вычислении инерциальных сил. Это также объясняет способ связывания локальных координатных систем с конечными элементами, как показано на рисунке 4.2. В таком случае нет необходимости вводить последовательность эйлеровых углов для определения конечных поворотов сечений и вычислять направляющие косинусы  $\alpha_{ij} = \mathbf{i}_i^c \cdot \mathbf{i}_j$ , следуя (4.5). Тогда вычисление  $\delta A_i$  согласно (4.2) существенно упрощается, если использовать векторные величины в проекциях на оси неподвижной системы  $OXYZ$ , совпадающие по направлению с соответствующими осями элементной системы  $\tilde{O}^{(i)} x^{(i)} y^{(i)} z^{(i)}$ . Такое упрощение после несложных преобразований приводит к выражению:

$$\begin{aligned} \delta A_{in} &= -\int_0^l \int_F (\rho \ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R}) dF dx = -\int_0^l m \left[ \ddot{u} \delta u + (\ddot{v} - y_* \ddot{\varphi} - z_* \dot{\varphi}^2) \delta v + \right. \\ &\quad \left. + (\ddot{w} + z_* \ddot{\varphi} - y_* \dot{\varphi}^2) \delta w + (-y_* \ddot{v} + z_* \ddot{w} + r_*^2 \ddot{\varphi}) \delta \varphi \right] dx, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где  $y_* = (1/m) \cdot \int_F \rho z_c dF$ ,  $z_* = (1/m) \cdot \int_F \rho y_c dF$  – координаты центра масс сечения в системе  $O_c x_c y_c z_c$ ,  $m$  – погонная масса;  $r_*^2 = (1/m) \cdot \int_F \rho (y_c^2 + z_c^2) dF$  – квадрат радиуса инерции.

Остаётся проинтегрировать (4.19), используя аппроксимации (4.7), (4.8). Предварительно заметим, что величина  $\Delta\phi$  в (4.8) считается величиной малой. Этому всегда можно добиться, уменьшая длину элемента. Поэтому квадратичным членом  $(\Delta\dot{\phi})^2$  можно пренебречь и записать линейный аналог  $\dot{\phi}^2$  в виде  $\dot{\phi}^2 \approx \dot{\phi}_0^2 + 2\dot{\phi}_0\Delta\dot{\phi}$ . Тогда:

$$\int_0^l \dot{\phi}^2 \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta w \end{pmatrix} dx = l\dot{\phi}_0 \left\{ \left[ \frac{1}{3} \left( \dot{\phi}_1 + \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \begin{pmatrix} \delta v_0 \\ \delta w_0 \end{pmatrix} + \left[ \frac{1}{3} \left( 2\dot{\phi}_1 - \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \begin{pmatrix} \delta v_1 \\ \delta w_1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \left[ -2\dot{\phi}_1 \frac{(-1)^i}{i\pi} + \frac{\dot{\phi}_0}{i\pi} (1 + (-1)^i) + \dot{p}_i \right] \begin{pmatrix} \delta q_i \\ \delta r_i \end{pmatrix} \right\}.$$

Окончательно имеем следующее выражение для вариации работы инерционных сил:

$$\begin{aligned} \delta A_{in} = & F_0^u \delta u_0 + F_1^u \delta u_1 + F_0^v \delta v_0 + F_1^v \delta v_1 + F_0^w \delta w_0 + F_1^w \delta w_1 + \\ & + F_0^\varphi \delta \varphi_0 + F_1^\varphi \delta \varphi_1 + \sum_{i=1}^n (F_i^q \delta q_i + F_i^r \delta r_i + F_i^p \delta p_i), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где введены нижеследующие обобщённые силы:

$$\begin{aligned} F_0^u &= \frac{ml}{3} \left( \ddot{u}_0 + \frac{\ddot{u}_1}{2} \right), \quad F_1^u = \frac{ml}{3} \left( \frac{\ddot{u}_0}{2} + \ddot{u}_1 \right); \\ F_0^v &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{3} (\ddot{v}_0 - y_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{6} (\ddot{v}_1 - y_* \ddot{\phi}_1) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (\ddot{q}_i - y_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( \dot{\phi}_1 + \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \\ F_1^v &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{6} (\ddot{v}_0 - y_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{3} (\ddot{v}_1 - y_* \ddot{\phi}_1) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} (\ddot{q}_i - y_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( 2\dot{\phi}_1 - \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_0^w &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{3}(\ddot{w}_0 + z_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{6}(\ddot{w}_1 + z_* \ddot{\phi}_1) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (\ddot{r}_i + z_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( \dot{\phi}_1 + \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \\
F_1^w &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{6}(\ddot{w}_0 + z_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{3}(\ddot{w}_1 + z_* \ddot{\phi}_1) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} (\ddot{r}_i + z_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( 2\dot{\phi}_1 - \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \\
F_0^\varphi &= ml \left[ \frac{1}{3}(-y_* \ddot{v}_0 + z_* \ddot{w}_0 + r_*^2 \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{6}(-y_* \ddot{v}_1 + z_* \ddot{w}_1 + r_*^2 \ddot{\phi}_1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (-y_* \ddot{q}_i + z_* \ddot{r}_i + r_*^2 \ddot{p}_i) \right], \tag{4.21} \\
F_1^\varphi &= ml \left[ \frac{1}{6}(-y_* \ddot{v}_0 + z_* \ddot{w}_0 + r_*^2 \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{3}(-y_* \ddot{v}_1 + z_* \ddot{w}_1 + r_*^2 \ddot{\phi}_1) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} (-y_* \ddot{q}_i + z_* \ddot{r}_i + r_*^2 \ddot{p}_i) \right]; \\
F_i^q &= ml \left\{ \frac{1}{i\pi} [\ddot{v}_0 - y_* \ddot{\phi}_0 - (-1)^i (\ddot{v}_1 - y_* \ddot{\phi}_1)] + \frac{1}{2} (\ddot{q}_i - y_* \ddot{p}_i) + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \sum_{i=1}^n \left[ -2\dot{\phi}_1 \frac{(-1)^i}{i\pi} + \frac{\dot{\phi}_0}{i\pi} (1 + (-1)^i) + \dot{p}_i \right] \right\}, \\
F_i^r &= ml \left\{ \frac{1}{i\pi} [\ddot{w}_0 + z_* \ddot{\phi}_0 - (-1)^i (\ddot{w}_1 + z_* \ddot{\phi}_1)] + \frac{1}{2} (\ddot{r}_i + z_* \ddot{p}_i) + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \sum_{i=1}^n \left[ -2\dot{\phi}_1 \frac{(-1)^i}{i\pi} + \frac{\dot{\phi}_0}{i\pi} (1 + (-1)^i) + \dot{p}_i \right] \right\}, \\
F_i^p &= ml \left\{ \frac{1}{i\pi} [-y_* \ddot{v}_0 + z_* \ddot{w}_0 + r_*^2 \ddot{\phi}_0 - (-1)^i (-y_* \ddot{v}_1 + z_* \ddot{w}_1 + r_*^2 \ddot{\phi}_1)] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (-y_* \ddot{q}_i + z_* \ddot{r}_i + r_*^2 \ddot{p}_i) \right\}.
\end{aligned}$$

#### 4.4. Вариация работы гравитационной нагрузки

Если  $g$  – ускорение свободного падения, то вариация работы гравитационной силы, направленной вдоль оси  $OZ$ , равна

$$\delta A_g = -mg \int_0^l \delta w dx.$$

Интегрирование с учётом (4.7) приводит к выражению

$$\delta A_g = G_0^w \delta w_0 + G_1^w \delta w_1 + \sum_{i=1}^n G_i^r \delta r_i, \quad (4.22)$$

где

$$G_0^w = G_1^w = -\frac{mgl}{2}, \quad G_i^r = -\frac{mgl}{i\pi} [1 - (-1)^i]. \quad (4.23)$$

#### 4.5. Вариация работы аэродинамических сил

Рассмотрим два провода – наветренный, на который воздействует невозмущённый воздушный поток со скоростью  $V_0$ , и подветренный, находящийся в аэродинамическом (спутном) следе от наветренного провода. Наветренный провод будем обозначать цифрой 1, подветренный – цифрой 2. Кинематические и силовые величины, относящиеся к проводам, будем снабжать соответственно верхними индексами (1) или (2), как это показано на рисунке 4.3.

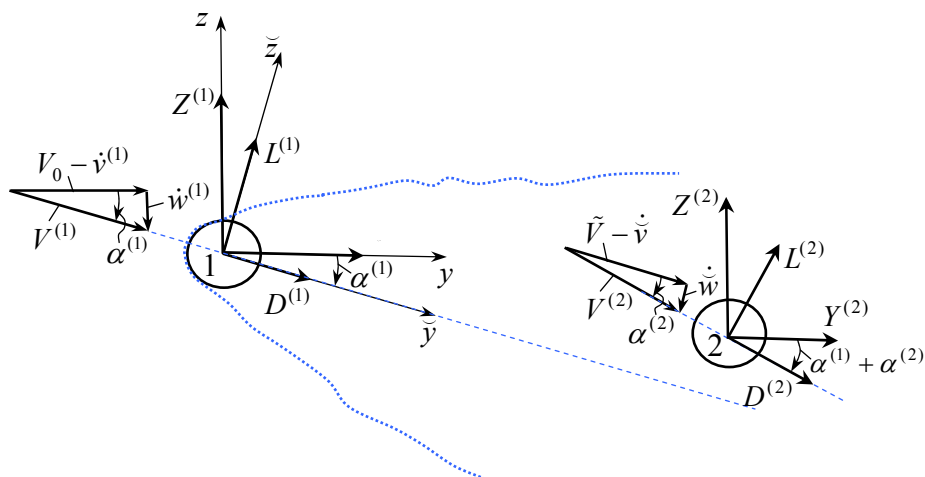


Рисунок 4.3 – Компоненты скоростей набегающих потоков и аэродинамических сил



В начальном (статическом) состоянии пересечём провода плоскостью  $\Pi$  параллельно плоскости  $OYZ$  на некотором расстоянии  $x$  от начала координат. Будем считать, что поперечные сечения проводов, принадлежащие  $\Pi$  в начальном состоянии, при движении остаются в этой плоскости.

В плоскости  $\Pi$  введём поточную систему координат  $\check{O}\check{y}\check{z}$ , совмещая начало координат  $\check{O}$  с центром наветренного провода и направляя ось  $\check{O}\check{y}$  по направлению вектора скорости набегающего потока  $V^{(1)}$ .

Обозначим координаты некоторой точки плоскости  $\Pi$  в системе  $\check{O}\check{y}\check{z}$  через  $\check{v}$ ,  $\check{w}$  и введём обозначения

$$v^- = v^{(2)} - v^{(1)}, \quad w^- = w^{(2)} - w^{(1)}. \quad (4.24)$$

Тогда очевидна связь

$$\check{v} = v^- \cos \alpha^{(1)} - w^- \sin \alpha^{(1)}, \quad \check{w} = v^- \sin \alpha^{(1)} + w^- \cos \alpha^{(1)}. \quad (4.25)$$

Аналогичные соотношения устанавливаются между проекциями локальных скоростей:

$$\dot{\check{v}} = \dot{v}^- \cos \alpha^{(1)} - \dot{w}^- \sin \alpha^{(1)}, \quad \dot{\check{w}} = \dot{v}^- \sin \alpha^{(1)} + \dot{w}^- \cos \alpha^{(1)}. \quad (4.26)$$

Из рисунка также 4.3 ясно, что

$$\sin \alpha^{(1)} = \frac{\dot{w}^{(1)}}{V^{(1)}}, \quad \cos \alpha^{(1)} = \frac{V_0 - \dot{v}^{(1)}}{V^{(1)}}; \quad (4.27)$$

$$\sin \alpha^{(2)} = \frac{\dot{\check{w}}}{V^{(2)}}, \quad \cos \alpha^{(2)} = \frac{\tilde{V} - \dot{\check{v}}}{V^{(2)}}; \quad (4.28)$$

$$V^{(1)} = \sqrt{(V_0 - \dot{v}^{(1)})^2 + \dot{w}^{(1)2}}, \quad V^{(2)} = \sqrt{(\tilde{V} - \dot{\check{v}})^2 + \dot{\check{w}}^2}. \quad (4.29)$$

В выражение для  $V^{(2)}$  входит скорость потока  $\tilde{V}$  в спутном следе. Для её определения, как было отмечено в п. 3.1, принимается гипотеза Блевинса [70] о том, что подветренный провод обтекается воздушным потоком, вектор скорости которого  $\tilde{V}$  коллинеарен вектору скорости свободного потока  $V^{(1)}$  и определяется выражением (3.2) с функцией распределения в виде (3.5).

Определим далее аэродинамические силы. Обозначим через  $L^{(1)}, L^{(2)}$  и  $D^{(1)}, D^{(2)}$  подъемные силы и силы аэродинамического сопротивления, действующие на провода 1 и 2 в направлении соответствующих осей поточной системы  $\tilde{Oy}\tilde{z}$ . Для каждого провода введём также проекции аэродинамических сил на оси  $Oy, Oz$ , обозначая их соответственно через  $Z^{(1)}, Z^{(2)}$  и  $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ . Считается, что аэродинамические моменты равны нулю.

Из рисунка 4.3 ясно, что

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= L^{(1)} \sin \alpha^{(1)} + D^{(1)} \cos \alpha^{(1)}, \\ Z^{(1)} &= L^{(1)} \cos \alpha^{(1)} - D^{(1)} \sin \alpha^{(1)}; \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} Y^{(2)} &= L^{(2)} \sin(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) + D^{(2)} \cos(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}), \\ Z^{(2)} &= L^{(2)} \cos(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) - D^{(2)} \sin(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Определим аэродинамические силы в поточной системе  $\tilde{Oy}\tilde{z}$ . Для наветренного провода имеем:

$$L^{(1)} = 0, \quad D^{(1)} = \frac{\rho V^{(1)2}}{2} d C_D^{(1)}, \quad (4.32)$$

где  $d$  – диаметр провода,  $C_D^{(1)} = 1.2$ .

Для подветренного провода –

$$L^{(2)} = \frac{\rho V^{(2)2}}{2} d \tilde{C}_L^{(2)}, \quad D^{(2)} = \frac{\rho V^{(2)2}}{2} d \tilde{C}_D^{(2)}, \quad (4.33)$$

где  $\tilde{C}_L^{(2)}, \tilde{C}_D^{(2)}$  – коэффициенты подъемной силы и силы аэродинамического сопротивления по отношению к локальной скорости  $\tilde{V}$ .

Распределения аэродинамических коэффициентов в следе от наветренного провода были получены экспериментально Прайсом [112]. Необходимо отметить, что в этих исследованиях значения аэродинамических коэффициентов относились к скорости  $V_0$  потока, свободно набегающего на наветренный провод. Поэтому аэродинамические силы в следе определялись Прайсом по формулам:

$$L_{\text{Pr}} = \frac{\rho V_0^2}{2} dC_L^{(2)}, \quad D_{\text{Pr}} = \frac{\rho V_0^2}{2} dC_D^{(2)}. \quad (4.34)$$

В случае обтекания подветренного провода потоком со скоростью  $\tilde{V}$  мы имеем

$$L_{\text{Pr}} = \frac{\rho \tilde{V}^2}{2} d\tilde{C}_L^{(2)}, \quad D_{\text{Pr}} = \frac{\rho \tilde{V}^2}{2} d\tilde{C}_D^{(2)}. \quad (4.35)$$

Из сравнения (4.34) и (4.35) следуют формулы пересчёта аэродинамических коэффициентов (А. Simpson) [125,126]:

$$\tilde{C}_L^{(2)} = C_L^{(2)} (V_0/\tilde{V})^2, \quad \tilde{C}_D^{(2)} = C_D^{(2)} (V_0/\tilde{V})^2. \quad (4.36)$$

Подстановка (4.36) в (4.33) приводит к формулам:

$$L^{(2)} = \frac{\rho V^{(2)2}}{2} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}} \right)^2 dC_L^{(2)}, \quad D^{(2)} = \frac{\rho V^{(2)2}}{2} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}} \right)^2 dC_D^{(2)}, \quad (4.37)$$

где  $C_L^{(2)}$ ,  $C_D^{(2)}$  определяются квадратичными приближениями (3.6) с локальными координатами  $\eta = \check{v}/d$ ,  $\xi = \check{w}/d$ .

Вычислим проекции аэродинамической силы на оси  $Oy$  и  $Oz$  для наветренного провода согласно (4.30) и (4.32). С учётом (4.27) имеем:

$$Y^{(1)} = \frac{\rho V^{(1)}}{2} dC_D^{(1)} (V_0 - \dot{v}^{(1)}), \quad Z^{(1)} = -\frac{\rho V^{(1)}}{2} dC_D^{(1)} \dot{w}^{(1)}, \quad (4.38)$$

где  $V^{(1)}$  даётся (4.29). Используя обозначение

$$\tilde{V}_0^{(1)} = V_0 - \dot{v}_0^{(1)}, \quad (4.39)$$

приближённо имеем:

$$V^{(1)} = \sqrt{(V_0 - \dot{v}^{(1)})^2 + \dot{w}^{(1)2}} \approx \tilde{V}_0^{(1)} - \Delta \dot{v}^{(1)}. \quad (4.40)$$

Принимая во внимание, что

$$V^{(1)} (V_0 - \dot{v}^{(1)}) \approx \tilde{V}_0^{(1)} (\tilde{V}_0^{(1)} - 2\Delta \dot{v}^{(1)}), \quad V^{(1)} \dot{w}^{(1)} \approx \tilde{V}_0^{(1)} (\dot{w}_0^{(1)} + \Delta \dot{w}^{(1)}),$$

приходим к выражениям:

$$Y^{(1)} = \frac{\rho \tilde{V}_0^{(1)}}{2} dC_D^{(1)} (\tilde{V}_0^{(1)} - 2\Delta \dot{v}^{(1)}), \quad Z^{(1)} = -\frac{\rho \tilde{V}_0^{(1)}}{2} dC_D^{(1)} (\dot{w}_0^{(1)} + \Delta \dot{w}^{(1)}). \quad (4.41)$$

Вычисление аэродинамических сил для подветренного провода существенно сложнее. Преобразуем сначала тригонометрические функции, входящие в выражения (4.31). С учётом (4.28) имеем:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) &= \sin \alpha^{(1)} \cos \alpha^{(2)} + \cos \alpha^{(1)} \sin \alpha^{(2)} = \\ &= \frac{1}{V^{(2)}} \left\{ \Psi \dot{w}^{(1)} + \frac{1}{V^{(1)}} \left[ -\dot{w}^{(1)} \dot{v} + (V_0 - \dot{v}^{(1)}) \dot{w} \right] \right\}, \\ \cos(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) &= \cos \alpha^{(1)} \cos \alpha^{(2)} - \sin \alpha^{(1)} \sin \alpha^{(2)} = \\ &= \frac{1}{V^{(2)}} \left\{ \Psi (V_0 - \dot{v}^{(1)}) - \frac{1}{V^{(1)}} \left[ (V_0 - \dot{v}^{(1)}) \dot{v} + \dot{w}^{(1)} \dot{w} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Из (4.26) с учётом (4.27) имеем также

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{1}{V^{(1)}} \left[ (\dot{v}^{(2)} - \dot{v}^{(1)}) (V_0 - \dot{v}^{(1)}) - (\dot{w}^{(2)} - \dot{w}^{(1)}) \dot{w}^{(1)} \right], \\ \dot{w} &= \frac{1}{V^{(1)}} \left[ (\dot{v}^{(2)} - \dot{v}^{(1)}) \dot{w}^{(1)} + (\dot{w}^{(2)} - \dot{w}^{(1)}) (V_0 - \dot{v}^{(1)}) \right].\end{aligned}$$

С учётом последних формул и несложных преобразований окончательно получаем:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) &= \frac{1}{V^{(2)}} \left[ -(1 - \Psi) \dot{w}^{(1)} + \dot{w}^{(2)} \right], \\ \cos(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) &= \frac{1}{V^{(2)}} \left[ \Psi V_0 + (1 - \Psi) \dot{v}^{(1)} - \dot{v}^{(2)} \right].\end{aligned}\tag{4.42}$$

Теперь, принимая во внимание (3.2), перепишем (4.37) в виде

$$L^{(2)} = \frac{1}{\Psi^2} \frac{\rho V_0^2}{2} d \left( \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right)^2 C_L^{(2)}, \quad D^{(2)} = \frac{1}{\Psi^2} \frac{\rho V_0^2}{2} d \left( \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right)^2 C_D^{(2)}.$$

Тогда, используя (4.42), вместо (4.31) получаем

$$\begin{aligned}Y^{(2)} &= \frac{1}{\Psi^2} \frac{\rho V_0^2}{2} d \left( \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right)^2 \frac{1}{V^{(2)}} \left\{ C_L^{(2)} \left[ -(1 - \Psi) \dot{w}^{(1)} + \dot{w}^{(2)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + C_D^{(2)} \left[ \Psi V_0 + (1 - \Psi) \dot{v}^{(1)} - \dot{v}^{(2)} \right] \right\}, \\ Z^{(2)} &= \frac{1}{\Psi^2} \frac{\rho V_0^2}{2} d \left( \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right)^2 \frac{1}{V^{(2)}} \left\{ C_L^{(2)} \left[ \Psi V_0 + (1 - \Psi) \dot{v}^{(1)} - \dot{v}^{(2)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - C_D^{(2)} \left[ -(1 - \Psi) \dot{w}^{(1)} + \dot{w}^{(2)} \right] \right\}.\end{aligned}\tag{4.43}$$

В выражения (4.43) входят аэродинамические коэффициенты, которые согласно (3.6) зависят от относительных координат  $\eta$ ,  $\xi$  поточной системы  $\tilde{O}\tilde{y}\tilde{z}$ . От этих же координат зависит функция распределения  $\Psi$  (3.5). Поэтому для получения аналитического выражения вариации работы аэродинамических сил для подветренного провода линеаризуем выражения (4.25).

Принимая во внимание представления (4.7), (4.8), из (4.24) имеем:

$$v^- = v^{(2)} - v^{(1)} = v_0^- + \Delta v^-, \quad w^- = w^{(2)} - w^{(1)} = w_0^- + \Delta w^-, \quad (4.44)$$

где

$$\Delta v^- = (v_1^- - v_0^-) \frac{x}{l} + \sum_{i=1}^n q_i^- \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad \Delta w^- = (w_1^- - w_0^-) \frac{x}{l} + \sum_{i=1}^n r_i^- \sin \frac{i\pi x}{l}; \quad (4.45)$$

$$v_0^- = v_0^{(2)} - v_0^{(1)}, \quad w_0^- = w_0^{(2)} - w_0^{(1)}; \quad q_i^- = q_i^{(2)} - q_i^{(1)}, \quad r_i^- = r_i^{(2)} - r_i^{(1)}.$$

Тогда, используя (4.27), вместо (4.25) получаем линейные аналоги:

$$\begin{aligned} \check{v} &= v^- \cos \alpha^{(1)} - w^- \sin \alpha^{(1)} = \check{v}_0 + \Delta \check{v}, \\ \check{w} &= v^- \sin \alpha^{(1)} + w^- \cos \alpha^{(1)} = \check{w}_0 + \Delta \check{w}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

где

$$\check{v}_0 = v_0^- - w_0^- \frac{\dot{w}_0^{(1)}}{\tilde{V}_0^{(1)}}, \quad \check{w}_0 = w_0^- + v_0^- \frac{\dot{w}_0^{(1)}}{\tilde{V}_0^{(1)}}; \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \Delta \check{v} &= \Delta v^- - \frac{1}{\tilde{V}_0^{(1)}} (\dot{w}_0^{(1)} \Delta w^- + v_0^- \Delta \dot{v}^{(1)} + w_0^- \Delta \dot{w}^{(1)}), \\ \Delta \check{w} &= \Delta w^- + \frac{1}{\tilde{V}_0^{(1)}} (\dot{w}_0^{(1)} \Delta v^- + v_0^- \Delta \dot{w}^{(1)} - w_0^- \Delta \dot{v}^{(1)}). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Используя безразмерные координаты  $\eta = \check{v}/d$ ,  $\xi = \check{w}/d$ , формулы (4.46)

перепишем в виде

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 + \Delta \eta, \quad \xi = \xi_0 + \Delta \xi; \\ \eta_0 &= \check{v}_0/d, \quad \Delta \eta = \Delta \check{v}/d; \quad \xi_0 = \check{w}_0/d, \quad \Delta \xi = \Delta \check{w}/d. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Теперь линеаризуем выражения для аэродинамических коэффициентов (3.6). Предварительно преобразуем степени локальных координат к виду

$$\check{v} = \check{v}_0 + \Delta \check{v}, \quad \check{v}^2 \approx \check{v}_0 (\check{v}_0 + 2\Delta \check{v}); \quad \check{w}^k = \check{w}_0^{k-1} (\check{w}_0 + k\Delta \check{w}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

пренебрегая квадратами и более высокими степенями малых величин  $\Delta\check{\nu}$  и  $\Delta\check{\omega}$ .

Подстановка последних выражений в (3.6) приводит к формулам:

$$C_L^{(2)} = C_{L0}^{(2)} + C_{L\xi}^{(2)} \Delta\xi + C_{L\eta}^{(2)} \Delta\eta, \quad C_D^{(2)} = C_{D0}^{(2)} + C_{D\xi}^{(2)} \Delta\xi + C_{D\eta}^{(2)} \Delta\eta, \quad (4.50)$$

где

$$\begin{aligned} C_{L0}^{(2)} &= \sum_{i=0}^4 p_{2i+1,0} \xi_0^{2i+1}, \quad C_{L\xi}^{(2)} = \sum_{i=0}^4 (2i+1) p_{2i+1,0} \xi_0^{2i}, \\ C_{L\eta}^{(2)} &= \sum_{i=0}^4 p_{2i+1,1} \xi_0^{2i+1}; \\ C_{D0}^{(2)} &= \sum_{i=0}^5 a_{2i,0} \xi_0^{2i}, \quad C_{D\xi}^{(2)} = \sum_{i=0}^5 2i a_{2i,0} \xi_0^{2i-1}, \\ C_{D\eta}^{(2)} &= \sum_{i=0}^5 a_{2i,1} \xi_0^{2i}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

В формулах (4.51) введены обозначения:

$$\begin{aligned} p_{i,0} &= q_{i0} + q_{i1} \eta_0 + q_{i2} \eta_0^2, \quad p_{i,1} = q_{i1} + 2q_{i2} \eta_0; \\ a_{i,0} &= b_{i0} + b_{i1} \eta_0 + b_{i2} \eta_0^2, \quad a_{i,1} = b_{i1} + 2b_{i2} \eta_0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Входящие в (4.52) коэффициенты  $q_{ij}$ ,  $b_{ij}$  берутся из таблиц 3.1, 3.2.

Линеаризуем теперь функцию распределения  $\Psi(\eta, \xi)$  (3.5), используя малость величин  $\Delta\eta$  и  $\Delta\xi$  в представлениях (4.49). В итоге, опуская промежуточные вычисления, получаем линейную форму:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_\eta \Delta\eta + \Psi_\xi \Delta\xi, \quad (4.53)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= 1 - \psi_0 \sqrt{\frac{\psi_0}{\eta_0 + 6}}, \quad \psi_0 = C_D \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{0.23 C_D (\eta_0 + 6)}\right); \\ \Psi_\xi &= \frac{3(1 - \Psi_0) \xi_0}{0.23 C_D (\eta_0 + 6)}, \quad \Psi_\eta = \frac{1}{2(\eta_0 + 6)} (1 - \Psi_0 - \xi_0 \Psi_\xi). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Линеаризуя (4.29), нетрудно получить выражения для скоростей набегающих потоков в следующей форме:

$$V^{(1)} \approx V_0^{(1)} = \sqrt{\tilde{V}_0^{(1)2} + \dot{\omega}_0^{(1)2}}, \quad V^{(2)} \approx V_0^{(2)} (1 + \chi_0 \Delta\Psi). \quad (4.55)$$

Здесь

$$V_0^{(2)} = \sqrt{\dot{v}_0^{*2} + \dot{w}_0^{*2}}, \quad \chi_0 = \frac{1}{V_0^{(2)2}} \left[ \tilde{V}_0^{(1)} (\Psi_0 \tilde{V}_0^{(1)} - \dot{v}_0^-) + \dot{w}_0^{(1)} (\Psi_0 \dot{w}_0^{(1)} + \dot{w}_0^-) \right]; \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_0^* &= \Psi_0 \tilde{V}_0^{(1)} - \dot{v}_0^-, & \dot{w}_0^* &= \Psi_0 \dot{w}_0^{(1)} + \dot{w}_0^-; \\ \dot{v}_0^- &= \dot{v}_0^{(2)} - \dot{v}_0^{(1)}, & \dot{w}_0^- &= \dot{w}_0^{(2)} - \dot{w}_0^{(1)}; \end{aligned} \quad (4.57)$$

величины  $\tilde{V}_0^{(1)}$ ,  $\Psi_0$  даются в (4.39) и (4.54).

Запишем теперь аэродинамические силы (4.41), (4.43) в проекциях на оси  $Oyz$  с использованием полученных линеаризованных представлений. Несложные преобразования приводят к выражениям:

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Z^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{\rho V_0^{(1)}}{2} d C_D^{(1)} \begin{pmatrix} \tilde{V}_0^{(1)} - \Delta \dot{v}^{(1)} \\ \dot{w}_0^{(1)} + \Delta \dot{w}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y^{(2)} \\ Z^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{\rho V_0^{(2)}}{2} d \left( \frac{V_0}{\tilde{V}_0} \right)^2 \left[ \dot{w}_0^* \begin{pmatrix} C_{L0}^{(2)} + \Delta C_L^{(2)} \\ -C_{D0}^{(2)} - \Delta C_D^{(2)} \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \dot{v}_0^* \begin{pmatrix} C_{D0}^{(2)} + \Delta C_D^{(2)} \\ C_{L0}^{(2)} + \Delta C_L^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_Y^\Psi \\ V_Z^\Psi \end{pmatrix} \Delta \Psi \right]; \end{aligned} \quad (4.59)$$

где

$$\begin{pmatrix} V_Y^\Psi \\ V_Z^\Psi \end{pmatrix} = \left[ \dot{w}_0^{(1)} + \left( \chi_0 - \frac{2}{\Psi_0} \right) \dot{w}_0^* \right] \begin{pmatrix} C_{L0}^{(2)} \\ -C_{D0}^{(2)} \end{pmatrix} + \left[ \tilde{V}_0^{(1)} + \left( \chi_0 - \frac{2}{\Psi_0} \right) \dot{v}_0^* \right] \begin{pmatrix} C_{D0}^{(2)} \\ C_{L0}^{(2)} \end{pmatrix}$$

с учётом  $C_{L0}^{(2)}$ ,  $C_{D0}^{(2)}$  из (4.51).

Полученные выражения позволяют вычислить вариации работ аэродинамических сил, проинтегрировав выражение

$$\delta A_a = \sum_{k=1}^2 \delta A_a^{(k)} = \sum_{k=1}^2 \int_0^l (Y^{(k)} \delta v^{(k)} + Z^{(k)} \delta w^{(k)}) dx. \quad (4.60)$$

В итоге для наветренного провода имеем:

$$\begin{aligned} \delta A_a^{(1)} &= \Upsilon_0^{(1)} \delta v_0^{(1)} + Z_0^{(1)} \delta w_0^{(1)} + \Upsilon_1^{(1)} \delta v_1^{(1)} + Z_1^{(1)} \delta w_1^{(1)} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (\tilde{\Upsilon}_i^{(1)} \delta q_i^{(1)} + \tilde{Z}_i^{(1)} \delta r_i^{(1)}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} \Upsilon_k^{(1)} \\ \mathcal{Z}_k^{(1)} \end{pmatrix} = l \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} V_0^{(1)} C_D^{(1)} \begin{pmatrix} -\Delta \dot{v}_k^{(1)} \\ \Delta \dot{w}_k^{(1)} \end{pmatrix} \right], \quad (4.62)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Upsilon}_i^{(1)} \\ \tilde{\mathcal{Z}}_i^{(1)} \end{pmatrix} = l \left\{ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \begin{pmatrix} Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} V_0^{(1)} C_D^{(1)} \begin{pmatrix} -\dot{g}_i^{(1)} \\ \dot{\kappa}_i^{(1)} \end{pmatrix} \right\},$$

где

$$\begin{pmatrix} Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{\rho V_0^{(1)}}{2} d C_D^{(1)} \begin{pmatrix} \tilde{V}_0^{(1)} \\ \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (4.63)$$

а величины  $\Delta \dot{v}_k^{(1)}$ ,  $\Delta \dot{w}_k^{(1)}$  ( $k = 0, 1$ ),  $\dot{g}_i^{(1)}$ ,  $\dot{\kappa}_i^{(1)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) вычисляются по формулам

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{v}_0^{(1)} \\ \Delta \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \dot{v}_1^{(1)} - \dot{v}_0^{(1)} \\ \dot{w}_1^{(1)} - \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi} \begin{pmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{r}_i^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{v}_1^{(1)} \\ \Delta \dot{w}_1^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \dot{v}_1^{(1)} - \dot{v}_0^{(1)} \\ \dot{w}_1^{(1)} - \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i\pi} \begin{pmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{r}_i^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{g}_i^{(1)} \\ \dot{\kappa}_i^{(1)} \end{pmatrix} = \left[ -\frac{(-1)^i}{i\pi} \begin{pmatrix} \dot{v}_1^{(1)} - \dot{v}_0^{(1)} \\ \dot{w}_1^{(1)} - \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{r}_i^{(1)} \end{pmatrix} \right].$$

Для подветренного провода запись для вариации работы аналогична –

$$\begin{aligned} \delta A_a^{(2)} = & \Upsilon_0^{(2)} \delta v_0^{(2)} + \mathcal{Z}_0^{(2)} \delta w_0^{(2)} + \Upsilon_1^{(2)} \delta v_1^{(2)} + \mathcal{Z}_1^{(2)} \delta w_1^{(2)} + \\ & + \sum_{i=1}^n (\tilde{\Upsilon}_i^{(1)} \delta q_i^{(2)} + \tilde{\mathcal{Z}}_i^{(2)} \delta r_i^{(2)}). \end{aligned} \quad (4.65)$$

но с более сложными по структуре коэффициентами:

$$\begin{pmatrix} \Upsilon_k^{(2)} \\ \mathcal{Z}_k^{(2)} \end{pmatrix} = l \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}_0} \right)^2 V_0^{(2)} \mathbf{V}^M \begin{pmatrix} \Delta v_k^- \\ \Delta w_k^- \end{pmatrix} \right], \quad (4.66)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Upsilon}_i^{(2)} \\ \tilde{\mathcal{Z}}_i^{(2)} \end{pmatrix} = l \left\{ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \begin{pmatrix} Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}_0} \right)^2 V_0^{(2)} \mathbf{V}^M \begin{pmatrix} \mathcal{G}_i^- \\ \mathcal{K}_i^- \end{pmatrix} \right\};$$

$$\begin{pmatrix} Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{\rho V_0^{(2)}}{2} d \left( \frac{V_0}{\tilde{V}_0} \right)^2 \begin{pmatrix} C_{D0}^{(2)} & C_{L0}^{(2)} \\ C_{L0}^{(2)} & -C_{D0}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_0^* \\ \dot{w}_0^* \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

где  $\dot{v}_0^*$ ,  $\dot{w}_0^*$  даются в (4.57);



$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}_i^{(1)} \\ \kappa_i^{(1)} \end{pmatrix} = \left[ -\frac{(-1)^i}{i\pi} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} - v_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} - w_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_i^{(1)} \\ r_i^{(1)} \end{pmatrix} \right]. \quad (4.68)$$

В выражениях (4.66) матрица

$$\mathbf{V}^M = \begin{pmatrix} \dot{w}_0^* & \dot{v}_0^* \\ \dot{v}_0^* & -\dot{w}_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{Lv}^{(2)} & C_{Lw}^{(2)} \\ C_{Dv}^{(2)} & C_{Dw}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_Y^\Psi \\ V_Z^\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_v \\ \Psi_w \end{pmatrix}^T, \quad (4.69)$$

вектор-столбец

$$\begin{pmatrix} \Delta v_k^- \\ \Delta w_k^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_k^{(2)} - \Delta v_k^{(1)} \\ \Delta w_k^{(2)} - \Delta w_k^{(1)} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1), \quad (4.70)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta v_0^{(1)} \\ \Delta w_0^{(1)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} - v_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} - w_0^{(1)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi} \begin{pmatrix} q_i^{(1)} \\ r_i^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Delta v_1^{(2)} \\ \Delta w_1^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} - v_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} - w_0^{(1)} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i\pi} \begin{pmatrix} q_i^{(1)} \\ r_i^{(1)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

#### 4.6. Уравнения колебаний

Уравнения колебаний для каждого конечного элемента следуют из принципа возможных перемещений (4.1). Необходимыми и достаточными условиями равенства нулю первой вариации от полной энергии элемента являются равенство нулю коэффициентов при одинаковых вариация обобщенных координат.

Принимая во внимание выражения для  $\delta U$  (4.15),  $\delta A_m$  (4.20),  $\delta A_g$  (4.22),  $\delta A_a^{(1)}$  (4.61) или  $\delta A_a^{(2)}$  (4.65) имеем систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} F_0^u + \frac{\partial U}{\partial u_0} &= 0, & F_1^u + \frac{\partial U}{\partial u_1} &= 0, \\ F_0^v + \frac{\partial U}{\partial v_0} - \gamma_0 &= 0, & F_1^v + \frac{\partial U}{\partial v_1} - \gamma_1 &= 0, \\ F_0^w + \frac{\partial U}{\partial w_0} - G_0^w - z_0 &= 0, & F_1^w + \frac{\partial U}{\partial w_1} - G_1^w - z_1 &= 0, \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$F_0^\varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} = 0, \quad F_1^\varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 0,$$

$$F_i^q + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \gamma_i = 0, \quad F_i^r + \frac{\partial U}{\partial r_i} - G_i^w - z_i = 0, \quad F_i^\varphi + \frac{\partial U}{\partial p_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $F_k^u, F_k^v, F_k^w, F_k^\varphi$  ( $k = 0, 1$ ),  $F_i^q, F_i^r, F_i^\varphi$  ( $i = 1, \dots, n$ ) даются в (4.21), а частные производные  $U$  по обобщенным координатам определяются формулами (4.16).

Уравнения (4.72) записываются как для наветренного провода, так и подветренного, снабжая входящие величины верхними индексами (1) или (2). Для простоты записи эти индексы в (4.72) опущены.

В итоге уравнения колебаний конечного элемента провода записываются в матричной форме вида

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{F}_{in}(\dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_g(\mathbf{q}), \quad (4.73)$$

где

$$\mathbf{q} = (u_0, v_0, w_0, \varphi_0, \dots, q_i, r_i, p_i, \dots, u_1, v_1, w_1, \varphi_1)^T \quad (4.74)$$

– вектор-столбец обобщенных координат,  $\mathbf{M}$  – матрица масс,  $\mathbf{F}_{in}(\dot{\mathbf{q}})$  – вектор-столбец нелинейных компонент инерционных сил,  $\partial U / \partial \mathbf{q}$  – условное обозначение вектор-столбца из производных  $U$  по обобщенным координатам в последовательности (4.74),  $\mathbf{F}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  и  $\mathbf{F}_g(\mathbf{q})$  – обобщенные аэродинамические и гравитационные силы.

На основе (4.73), (4.74) осуществляется ассемблирование элементных матриц и вектор-столбцов для получения общей системы дифференциальных уравнений колебаний проводов.

Необходимо отметить, что возникновение кручения проводов связано с наличием внутрифазных дистанционных распорок, которые жестко прикрепляются к проводам и в процессе колебаний совершают повороты. Принимается, что вращение распорки совершается в плоскости  $\Pi$ , как было описано в п. 4.4. Распорки считаются абсолютно жесткими и безынерционными.

Конечно-элементную сетку будем строить так, чтобы точки крепления распорок совпадали с узлами тех конечных элементов, которые жестко соединены с распорками. Пусть  $k$  – номер распорки с длиной  $a_k$ . Номера узлов соседних элементов по концам распорки будем обозначать через  $k^{(1)}$  и  $k^{(2)}$ . Обозначим через  $\varphi_k$  угол поворота распорки, с которым поворачиваются (закручиваются) провода в точках их крепления. Пусть  $v_k^{(1)}$ ,  $w_k^{(1)}$  и  $v_k^{(2)}$ ,  $w_k^{(2)}$  – координаты концов распорки (узловых точек), как показано на рисунке 4.4.

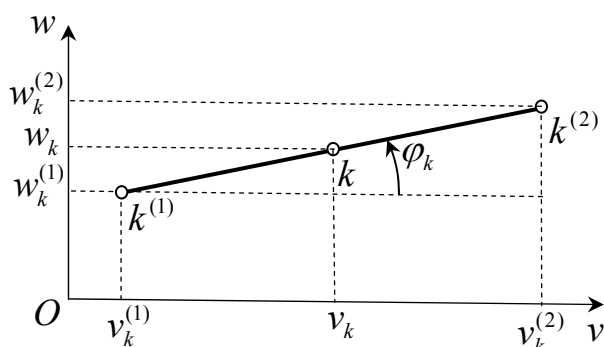


Рисунок 4.4 – Связь координат узловых точек распорки с координатами центра распорки и углом её поворота

Координаты центра распорки будем обозначать через  $v_k$  и  $w_k$ . Тогда имеют место выражения узловых координат распорки через координаты её центра и угол поворота:

$$v_k^{(1)} = v_k - \frac{a_k}{2} \cos \varphi_k, \quad w_k^{(1)} = w_k - \frac{a_k}{2} \sin \varphi_k;$$

$$v_k^{(2)} = v_k + \frac{a_k}{2} \cos \varphi_k, \quad w_k^{(2)} = w_k + \frac{a_k}{2} \sin \varphi_k.$$

Из этого следует, что вариации обобщенных координат  $v_k^{(1)}$ ,  $w_k^{(1)}$ ,  $v_k^{(2)}$  и  $w_k^{(2)}$  зависимы и выражаются через вариации  $v_k$ ,  $w_k$  и  $\varphi_k$  по формулам

$$\begin{aligned} \delta v_k^{(1)} &= \delta v_k - \frac{a_k}{2} \sin \varphi_k \delta \varphi_k, & \delta w_k^{(1)} &= \delta w_k - \frac{a_k}{2} \cos \varphi_k \delta \varphi_k, \\ \delta v_k^{(2)} &= \delta v_k + \frac{a_k}{2} \sin \varphi_k \delta \varphi_k, & \delta w_k^{(2)} &= \delta w_k + \frac{a_k}{2} \cos \varphi_k \delta \varphi_k, \end{aligned} \quad (4.75)$$

которые необходимо учитывать при ассемблировании с учётом нумерации узловых точек.

#### 4.7. Начальное статическое состояние

Начальным состоянием для динамической задачи является статическое состояние проводов под воздействием гравитационной и температурной нагрузок. Здесь следует отметить, что в расчётах начального состояния необходимо учитывать монтажную (технологическую) длину провода  $L^\circ$ , которая всегда больше расстояния между точками его подвеса  $L$ .

Начальное состояние определяется из решения уравнений статики, которые следуют из (4.72) или (4.73) отбрасыванием инерционных компонент. Получающиеся уравнения нелинейны и для их численного решения требуются итерационные методы и алгоритмы с обоснованием сходимости итерационного процесса. Однако этого можно избежать, если воспользоваться методом продолжения решения по параметру  $p$  [13,29,60].

Параметр продолжения вводится следующим образом. Вместо уравнения (4.6) будем использовать ему подобное:

$$\tilde{\Delta}^\circ(p) = L^\circ(p)[1 + \alpha T(p)] - L, \quad (4.76)$$

где

$$\tilde{L}^\circ(p) = L + (L^\circ - L) \cdot p, \quad \tilde{T} = T \cdot p; \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (4.77)$$

Будем считать, что гравитационная нагрузка также возрастает пропорционально  $p$ . Для этого удобно ввести вместо ускорения свободного падения  $g$ , входящего в выражения для гравитационной нагрузки (4.23), новый параметр

$$\tilde{g} = g \cdot p; \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (4.78)$$

Из (4.77) и (4.78) видно, что при  $p = 1$  уравнение (4.76) превращается в (4.6) и  $\tilde{g} = g$ . При  $p = 0$  мы имеем искусственное начальное состояние, когда нет внешней нагрузки и провод представляет собой прямолинейный отрезок, соединяющий точки его прикрепления к опорам.

С увеличением параметра  $p$  появляется гравитационная нагрузка и температурное расширение. Под их воздействием провод начинает провисать и возникает сила натяжения. Начинает также прирастать длина провода, вызы-

вающего дополнительное его провисание. Процесс останавливается, когда  $p = 1$ , т.е. когда  $\tilde{L}^\circ = L^\circ$ ,  $\tilde{g} = g$  и  $\tilde{T} = T$ .

Часто конечная величина технологической длины не известна. Она устанавливается в результате монтажа провода между опорами по значениям силы натяжения или по допустимой стреле провеса. В этом случае процесс продолжения двухступенчатый.

Сначала считается, что при  $p = 0$  провод – прямолинейный отрезок между точками закрепления. Считается, что технологического припуска нет. С ростом нагрузки и температуры провод провисает и возникает сила натяжения.

Затем на второй стадии при уже фиксированных (конечных) значениях гравитационной нагрузки и температуры начинает увеличиваться технологическая длина, которая при  $p = 0$  равна  $L$ . При изменении длины контролируется либо сила натяжения, либо стрела провеса. При достижении их заданных значений процесс останавливается. Полученное состояние является исходным для решения динамической задачи.

Получим уравнения продолжения для конечного элемента. Пусть  $\mathcal{E} = U - A_g$  – полная энергия конечного элемента. Из условия стационарности  $\delta\mathcal{E} = 0$  следуют уравнения статики

$$\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.79)$$

где  $q_i$  – элемент вектор-столбца обобщенных координат  $\mathbf{q}$ ,  $N$  – число степеней свободы элемента.

Дифференцируя (4.79) по параметру  $p$ , получим

$$\mathbf{T} \frac{d\mathbf{q}}{dp} = \frac{d}{dp} \frac{\partial A_g}{\partial \mathbf{q}}, \quad (4.80)$$

где  $\mathbf{T}$  – касательная матрица  $N \times N$  вида

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_3} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_N} \\ \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_3} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_N} \\ \dots & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_3^2} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_3 \partial q_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Sym} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_N^2} \end{pmatrix}; \quad (4.81)$$

вектор-столбец

$$\frac{\partial A_g}{\partial \mathbf{q}} = \left( \frac{\partial A_g}{\partial q_1} \quad \dots \quad \frac{\partial A_g}{\partial q_N} \right)^T. \quad (4.82)$$

Рассмотрим пример, поясняющий структуру матрицы  $\mathbf{T}$ . Пусть число членов в сумме (4.7)  $n = 3$ . Элементы матрицы (4.81) условно будем обозначать как  $q_i q_j$ , т.е. в виде упорядоченной пары обобщенных координат, по которым производится дифференцирование потенциальной энергии. Тогда такая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_0^2 & u_0 v_0 & u_0 w_0 & u_0 \varphi_0 & u_0 q_1 & u_0 q_2 & u_0 q_3 & u_0 r_1 & u_0 r_2 & u_0 r_3 & u_0 p_1 & u_0 p_2 & u_0 p_3 & u_0 u_1 & u_0 v_1 & u_0 w_1 & u_0 \varphi_1 \\ & v_0^2 & v_0 w_0 & v_0 \varphi_0 & v_0 q_1 & v_0 q_2 & v_0 q_3 & v_0 r_1 & v_0 r_2 & v_0 r_3 & v_0 p_1 & v_0 p_2 & v_0 p_3 & v_0 u_1 & v_0 v_1 & v_0 w_1 & v_0 \varphi_1 \\ & & w_0^2 & w_0 \varphi_0 & w_0 q_1 & w_0 q_2 & w_0 q_3 & w_0 r_1 & w_0 r_2 & w_0 r_3 & w_0 p_1 & w_0 p_2 & w_0 p_3 & w_0 u_1 & w_0 v_1 & w_0 w_1 & w_0 \varphi_1 \\ & & & \varphi_0^2 & \varphi_0 q_1 & \varphi_0 q_2 & \varphi_0 q_3 & \varphi_0 r_1 & \varphi_0 r_2 & \varphi_0 r_3 & \varphi_0 p_1 & \varphi_0 p_2 & \varphi_0 p_3 & \varphi_0 u_1 & \varphi_0 v_1 & \varphi_0 w_1 & \varphi_0 \varphi_1 \\ & & & & q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 & q_1 r_1 & q_1 r_2 & q_1 r_3 & q_1 p_1 & q_1 p_2 & q_1 p_3 & q_1 u_1 & q_1 v_1 & q_1 w_1 & q_1 \varphi_1 \\ & & & & & q_2^2 & q_2 q_3 & q_2 r_1 & q_2 r_2 & q_2 r_3 & q_2 p_1 & q_2 p_2 & q_2 p_3 & q_2 u_1 & q_2 v_1 & q_2 w_1 & q_2 \varphi_1 \\ & & & & & & q_3^2 & q_3 r_1 & q_3 r_2 & q_3 r_3 & q_3 p_1 & q_3 p_2 & q_3 p_3 & q_3 u_1 & q_3 v_1 & q_3 w_1 & q_3 \varphi_1 \\ & & & & & & & r_1^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 & r_1 p_1 & r_1 p_2 & r_1 p_3 & r_1 u_1 & r_1 v_1 & r_1 w_1 & r_1 \varphi_1 \\ & & & & & & & & r_2^2 & r_2 r_3 & r_2 p_1 & r_2 p_2 & r_2 p_3 & r_2 u_1 & r_2 v_1 & r_2 w_1 & r_2 \varphi_1 \\ & & & & & & & & & r_3^2 & r_3 p_1 & r_3 p_2 & r_3 p_3 & r_3 u_1 & r_3 v_1 & r_3 w_1 & r_3 \varphi_1 \\ & & & & & & & & & & p_1^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 & p_1 u_1 & p_1 v_1 & p_1 w_1 & p_1 \varphi_1 \\ & & & & & & & & & & & p_2^2 & p_2 p_3 & p_2 u_1 & p_2 v_1 & p_2 w_1 & p_2 \varphi_1 \\ & & & & & & & & & & & & p_3^2 & p_3 u_1 & p_3 v_1 & p_3 w_1 & p_3 \varphi_1 \\ & & & & & & & & & & & & & u_1^2 & u_1 v_1 & u_1 w_1 & u_1 \varphi_1 \\ & & & & & & & & & & & & & & v_1^2 & v_1 w_1 & v_1 \varphi_1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & w_1^2 & w_1 \varphi_1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \varphi_1^2 \end{pmatrix}$$

Sym

Матрица  $\mathbf{T}$  вычисляется, используя уже полученные выражения для частных производных  $U$  в виде (4.16) с учётом (4.17).

Используя  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$  в качестве индексов при вычислении столбцов матрицы  $\mathbf{T}$  и символ Кронекера  $\delta_{ij} = \{1, i = j; 0, i \neq j\}$ , последовательно имеем:

1) элементы первой строки матрицы  $\mathbf{T}$  –

$$T_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0^2} = -\frac{\partial N}{\partial u_0} = \frac{EF}{l},$$

$$T_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0 \partial v_0} = -\frac{\partial}{\partial u_0} \left( N \frac{v_1 - v_0}{l} \right) = \frac{EF}{l^2} (v_1 - v_0),$$

$$T_{13} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0 \partial w_0} = -\frac{\partial}{\partial u_0} \left( N \frac{w_1 - w_0}{l} \right) = \frac{EF}{l^2} (w_1 - w_0),$$

$$T_{14} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0 \partial \varphi_0} = 0;$$

$$T_{1,4+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0 \partial q_i} = \frac{\partial}{\partial u_0} \left( N \mu_i \frac{q_i}{l} \right) = -\frac{EF}{l^2} \mu_i q_i,$$

$$T_{1,4+n+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0 \partial r_i} = \frac{\partial}{\partial u_0} \left( N \mu_i \frac{r_i}{l} \right) = -\frac{EF}{l^2} \mu_i r_i,$$

$$T_{1,4+2n+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0 \partial p_i} = \frac{\partial}{\partial u_0} \left( \frac{GJ_t}{l} \mu_i p_i \right) = 0;$$

$$T_{1,4+3n+1} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0 \partial u_1} = \frac{\partial N}{\partial u_0} = -T_{11},$$

$$T_{1,4+3n+2} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0 \partial v_1} = \frac{\partial}{\partial u_0} \left( N \frac{v_1 - v_0}{l} \right) = -T_{12},$$

$$T_{1,4+3n+3} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0 \partial w_1} = \frac{\partial}{\partial u_0} \left( N \frac{w_1 - w_0}{l} \right) = -T_{13},$$

$$T_{1,4+3n+4} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_0 \partial \varphi_1} = 0;$$

2) элементы второй строки матрицы  $\mathbf{T}$  –

$$T_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_0^2} = -\frac{\partial}{\partial v_0} \left( N \frac{v_1 - v_0}{l} \right) = \frac{1}{l} \left[ N + EF \left( \frac{v_1 - v_0}{l} \right)^2 \right],$$

$$T_{23} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_0 \partial w_0} = -\frac{\partial}{\partial v_0} \left( N \frac{w_1 - w_0}{l} \right) = \frac{EF}{l^3} (v_1 - v_0) (w_1 - w_0),$$

$$T_{24} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_0 \partial \varphi_0} = \frac{\partial}{\partial v_0} \left( \frac{GJ_t}{l} (\varphi_1 - \varphi_0) \right) = 0;$$

$$T_{2,4+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_0 \partial q_i} = \frac{\partial}{\partial v_0} \left( N \mu_i \frac{q_i}{l} \right) = -\frac{EF}{l^3} (v_1 - v_0) \mu_i q_i,$$

$$T_{2,4+n+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_0 \partial r_i} = \frac{\partial}{\partial v_0} \left( N \mu_i \frac{r_i}{l} \right) = -\frac{EF}{l^3} (v_1 - v_0) \mu_i r_i,$$

$$T_{2,4+2n+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_0 \partial p_i} = 0;$$

$$T_{2,4+3n+1} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_0 \partial u_1} = -T_{12}, \quad T_{2,4+3n+2} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_0 \partial v_1} = -T_{22},$$

$$T_{2,4+3n+3} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_0 \partial w_1} = -T_{23}, \quad T_{2,4+3n+4} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_0 \partial \varphi_1} = 0;$$

3) элементы третьей строки матрицы  $\mathbf{T}$  –

$$T_{33} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_0^2} = \frac{\partial}{\partial w_0} \left( -N \frac{w_1 - w_0}{l} \right) = \frac{1}{l} \left[ N + EF \left( \frac{w_1 - w_0}{l} \right)^2 \right],$$

$$T_{34} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_0 \partial \varphi_0} = 0;$$

$$T_{3,4+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_0 \partial q_i} = \frac{\partial}{\partial w_0} \left( N \mu_i \frac{q_i}{l} \right) = -\frac{EF}{l^3} (w_1 - w_0) \mu_i q_i,$$

$$T_{3,4+n+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_0 \partial r_i} = \frac{\partial}{\partial w_0} \left( N \mu_i \frac{r_i}{l} \right) = -\frac{EF}{l^3} (w_1 - w_0) \mu_i r_i,$$

$$T_{3,4+2n+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_0 \partial p_i} = \frac{\partial}{\partial w_0} \left( \frac{GJ_t}{l} \mu_i p_i \right) = 0;$$



$$T_{3,4+3n+1} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_0 \partial u_1} = -T_{13}, \quad T_{3,4+3n+2} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_0 \partial v_1} = -T_{23},$$

$$T_{3,4+3n+2} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_0 \partial v_1} = -T_{23}, \quad T_{3,4+3n+3} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_0 \partial w_1} = -T_{33};$$

$$T_{3,4+3n+4} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_0 \partial \varphi_1} = 0;$$

4) элементы четвёртой строки матрицы  $\mathbf{T}$  –

$$T_{44} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_0^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( -\frac{GJ_t}{l} (\varphi_1 - \varphi_0) \right) = \frac{GJ_t}{l};$$

$$T_{4,4+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_0 \partial q_i} = \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( N \mu_i \frac{q_i}{l} \right) = 0,$$

$$T_{4,4+n+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_0 \partial r_i} = \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( N \mu_i \frac{r_i}{l} \right) = 0,$$

$$T_{4,4+2n+i} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_0 \partial p_i} = \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left( \frac{GJ_t}{l} \mu_i p_i \right) = 0,$$

$$T_{4,4+3n+1} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_0 \partial u_1} = 0, \quad T_{4,4+3n+2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_0 \partial v_1} = 0,$$

$$T_{4,4+3n+3} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_0 \partial w_1} = 0, \quad T_{4,4+3n+4} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_0 \partial \varphi_1} = -T_{44};$$

5) элементы строк 5, ..., 4 + n матрицы  $\mathbf{T}$  –

$$T_{4+i,4+j} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{\mu_i}{l} \left( \delta_{ij} N + EF \mu_j \frac{q_i q_j}{l^2} \right);$$

$$T_{4+i,4+n+j} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial r_j} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( N \mu_j \frac{r_j}{l} \right) = \frac{\mu_i}{l} EF \mu_j \frac{q_i r_j}{l^2},$$

$$T_{4+i,4+2n+j} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial p_i} = 0; \quad T_{4+i,4+3n+1} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial u_1} = -T_{1,4+i},$$

$$T_{4+i,4+3n+2} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial v_1} = -T_{2,4+i}, \quad T_{4+i,4+3n+3} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial w_1} = -T_{3,4+i},$$

$$T_{4+i,4+3n+4} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial \varphi_1} = 0;$$

6) элементы строк  $4 + n + i, \dots, 4 + 2n$  матрицы  $\mathbf{T}$  –

$$T_{4+n+i,4+n+j} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{\mu_i}{l} \left[ \delta_{ij} N + EF \mu_j \frac{r_i r_j}{l^2} \right],$$

$$T_{4+n+i,4+2n+j} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial p_j} = 0, \quad T_{4+n+i,4+3n+j} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial u_1} = -T_{1,4+n+i},$$

$$T_{4+n+i,4+3n+2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial v_1} = -T_{2,4+n+i}, \quad T_{4+n+i,4+3n+3} = -T_{3,4+n+i}, \quad T_{4+n+i,4+3n+4} = 0;$$

7) элементы строк  $4 + 2n + 1, \dots, 4 + 3n$  матрицы  $\mathbf{T}$  –

$$T_{4+2n+i,4+2n+j} = \frac{\partial^2 U}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{GJ_t}{l} \mu_j p_j \right) = \delta_{ij} \frac{GJ_t}{l} \mu_i;$$

$$T_{4+2n+i,4+3n+1} = \frac{\partial^2 U}{\partial p_i \partial u_1} = 0, \quad T_{4+2n+i,4+3n+2} = \frac{\partial^2 U}{\partial p_i \partial v_1} = 0,$$

$$T_{4+2n+i,4+3n+3} = \frac{\partial^2 U}{\partial p_i \partial w_1} = 0, \quad T_{4+2n+i,4+3n+4} = \frac{\partial^2 U}{\partial p_i \partial \varphi_1} = 0;$$

8) элементы строки  $4 + 3n + 1$  матрицы  $\mathbf{T}$  –

$$T_{4+3n+1,4+3n+1} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} = T_{11}, \quad T_{4+3n+1,4+3n+2} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial v_1} = T_{12},$$

$$T_{4+3n+1,4+3n+3} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial w_1} = T_{13}, \quad T_{4+3n+1,4+3n+4} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial \varphi_1} = 0;$$

9) элементы строки  $4 + 3n + 2$  матрицы  $\mathbf{T}$  –

$$T_{4+3n+2,4+3n+2} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_1^2} = T_{22}, \quad T_{4+3n+2,4+3n+3} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_1 \partial w_1} = T_{23},$$

$$T_{4+3n+2,4+3n+4} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_1 \partial \varphi_1} = 0;$$

10) элементы строки  $4 + 3n + 3$  матрицы  $\mathbf{T}$  –

$$T_{4+3n+3,4+3n+3} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_1^2} = T_{33}, \quad T_{4+3n+3,4+3n+4} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_1 \partial \varphi_1} = 0,$$

11) элементы строки  $4 + 3n + 4$  матрицы  $T$  –

$$T_{4+3n+4,4+3n+4} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} = T_{44}.$$

Приведенные формулы позволяют сформировать матрицу  $T$  в окончательном виде. Анализ элементов матрицы позволяет обнаружить блочную симметрию, что упрощает её вычисление. Приведенная ниже матрица – матрица индексов  $T$ , каждый элемент – индекс элемента  $T_{ij}$  в виде пары номеров строки и столбца, где этот элемент впервые встречается в  $T$ . Знак перед парой  $i, j$  – знак  $T_{ij}$ .

$$\left( \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 0 & 1,5 & 1,6 & 1,7 & 1,8 & 1,9 & 1,10 & 0 & 0 & 0 & -1,1 & -1,2 & -1,3 & 0 \\ & 2,2 & 2,3 & 0 & 2,5 & 2,6 & 2,7 & 2,8 & 2,9 & 2,10 & 0 & 0 & 0 & -1,2 & -2,2 & -2,3 & 0 \\ & & 3,3 & 0 & 3,5 & 3,6 & 3,7 & 3,8 & 3,9 & 3,10 & 0 & 0 & 0 & -1,3 & -2,3 & -3,3 & 0 \\ & & & 4,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4,4 \\ & & & & 5,5 & 5,6 & 5,7 & 5,8 & 5,9 & 5,10 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -2,5 & -3,5 & 0 \\ & & & & & 6,6 & 6,7 & 6,8 & 6,9 & 6,10 & 0 & 0 & 0 & -1,6 & -2,6 & -3,6 & 0 \\ & & & & & & 7,7 & 7,8 & 7,9 & 7,10 & 0 & 0 & 0 & -1,7 & -2,7 & -3,7 & 0 \\ & & & & & & & 8,8 & 8,9 & 8,10 & 0 & 0 & 0 & -1,8 & -2,8 & -3,8 & 0 \\ & & & & & & & & 9,9 & 9,10 & 0 & 0 & 0 & -1,9 & -2,9 & -3,9 & 0 \\ & & & & & & & & & 10,10 & 0 & 0 & 0 & -1,10 & -2,10 & -3,10 & 0 \\ & & & & & & & & & & 11,11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 12,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 13,13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & 1,1 & 1,2 & 1,3 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 2,2 & 2,3 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & 3,3 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 4,4 \end{array} \right)$$

#### 4.8. Вычислительный алгоритм

Задачи динамики деформируемых конструкций относятся, в общем случае, к классу жестких задач для которых явные методы либо не работают, либо их работа неэффективна. Для устойчивой их реализации на алгоритмы накладываются непомерные ограничения на шаг интегрирования, а в неявных методах ограничения на шаг определяются, как правило, только лишь условиями аппроксимации. Однако для явных методов возможно

использовать специальные (регуляризирующие, стабилизирующие) процедуры, которые могут повысить эффективность расчетов [4,5,40].

Основным недостатком традиционных неявных методов, опирающихся на итерационный алгоритм Ньютона-Рафсона и его модификации [43,58,59], является большой объем вычислений, связанной с формированием матриц Якоби и решением систем линейных уравнений. Эти вычисления трудоемки и требуют для исследовательских и практических задач значительных машинных ресурсов (быстродействия, оперативной и дисковой памяти). Причем эти требования нелинейно возрастают с ростом размерности задачи.

Задачи, называемые жесткими, весьма разнообразны. Они встречаются во многих областях науки и техники, включая механику, химическую кинетику, теорию управления, теорию электронных цепей, биологию и др. В литературе можно встретить различные определения жесткости, отличающиеся степенью строгости [33]. Сущность явления жесткости состоит в том, что решение, которое нужно вычислить, меняется медленно, однако существуют быстро изменяющиеся возмущения, которые затрудняют получение медленно меняющегося решения численным способом.

Ниже показано, что при численном решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка возможно построение простых и экономичных неявных вычислительных алгоритмов пошагового интегрирования без организации трудоемких итерационных процедур, основанных на процессах по типу итераций Ньютона-Рафсона [10,30,31,75,76]. Предварительно исходная задача должна быть преобразована к новому аргументу – длине ее интегральной кривой. Такое преобразование осуществляется с использованием уравнения, связывающего исходный параметр задачи с длиной интегральной кривой. На примере метода линейного ускорения, который является основой известных методов Ньюмарка и Вилсона [11,28,42,66], показана процедура построения неявного алгоритма с использованием простых итераций [54,58] для численного решения преобразованной задачи Коши.

### 4.8.1. Параметризация уравнений колебаний

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенную относительно старшей производной

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}), \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \mathbf{v}_0. \quad (4.83)$$

Здесь  $\mathbf{u}(t)$  – неизвестная вектор-функция, описывающая перемещение точки в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, вектор-функция  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ , действующая как оператор  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , представляет собой ускорение точки в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , зависящее от времени  $t \in \mathbb{R}$ , перемещения и скорости  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ .

Будем полагать, что функция  $\mathbf{f} \in C^2(D)$ , где  $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  – некоторая область в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Тогда, как известно [2,45], в области  $D$  существует единственное решение задачи Коши при заданных начальных значениях  $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, t_0)^T \in D$ .

Для дальнейшего обозначим скалярное произведение функций  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  и норму функции  $\mathbf{f}$  из некоторого евклидова пространства, соответственно, как  $\mathbf{fg}$  и  $\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\mathbf{ff}}$ .

Введем в области  $D$  вещественную гладкую функцию  $\lambda = \lambda(\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in C^3(D)$  и произведем замену независимой переменной  $t$  на параметр  $\lambda$ . При этом важное значение имеет дифференциальная характеристика  $J$  функции  $\lambda$  – ее полная производная по времени вдоль интегральной кривой:  $J(\mathbf{y}) = J(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \dot{\lambda}[\mathbf{y}(t)]$ . Будем полагать, что  $J(\mathbf{y}) \neq 0$  в области  $D$ . Тогда функция параметра может быть восстановлена вдоль некоторой интегральной кривой по ее дифференциальной характеристике в виде определенного интеграла  $\lambda(\mathbf{y}) = \lambda_0 + \int_{t_0}^t J[\mathbf{y}(t)] dt$ .

Переход к параметру  $\lambda$  позволяет преобразовать систему дифференциальных уравнений (4.83) к автономной системе первого порядка в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(\lambda_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{F} = J^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{f}, 1)^T \in \mathbb{C}^2(D). \quad (4.84)$$

Штрих означает полную производную по параметру  $\lambda$ .

Функция  $J$  имеет смысл дифференциального нормирующего множителя при переходе от времени  $t$  к параметру  $\lambda$ . В частности, если  $J \equiv 1$ , то  $\lambda = t + (\lambda_0 - t_0)$ . С помощью параметризации можно улучшить метрические свойства правой части уравнения (4.84). В работах [10,13,29,30,31,60,75,76] показано, что оптимальное улучшение (т.е. наилучшая параметризация) достигается в случае, когда в качестве  $\lambda$  выбирается длина интегральной кривой в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Этому соответствует следующее уравнение в дифференциальной форме:

$$d\lambda^2 = dt^2 + d\mathbf{u} d\mathbf{u} + d\mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (4.85)$$

или уравнение для нормирующего множителя

$$J(\mathbf{y}) = \sqrt{1 + \mathbf{v}\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y})}. \quad (4.86)$$

Очевидно, что  $J^{-1}(\mathbf{y}) = t'$ .

Из формул (4.84)-(4.86) следует, что при наилучшей параметризации выполняется важное свойство для нормы правой части уравнения (4.84): в области  $D$  норма правой части равна единице. Переход к аргументу  $\lambda$  обеспечивает также наилучшую обусловленность линеаризованных систем уравнений, получающихся при реализации пошаговых процедур численного построения интегральной кривой задачи (4.83) методом продолжения решения по параметру, и в этом смысле переход к аргументу  $\lambda$  назван наилучшей параметризацией, а аргумент  $\lambda$  – наилучшим.

#### 4.8.2. Численная схема решения задачи Коши

Для решения задачи (4.83) или (4.84) могут применяться различные численные схемы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Среди них отметим методы второго и третьего порядков точности, которые приводят к неявным схемам интегрирования, например, методы центральных разностей, Хоболта, Ньюмарка, Вилсона [28,42,66]. Для решения задач динамики широкое распространение получил метод Вилсона, представляющий собой некоторую модификацию метода линейного ускорения, в котором при интегрировании уравнения (4.83) ускорение  $\ddot{u}$  заменяется кусочно-линейной функцией на малом интервале времени (шаге интегрирования). Следовательно, скорость  $v = \dot{u}$  и само перемещение  $u$  приближаются, соответственно, сплайнами второго и третьего порядка.

Рассмотрим обобщение метода линейного ускорения на систему уравнений (4.84), параметризованную наилучшим образом. Для этого представим неизвестный вектор  $y$  в виде  $y = (u, x)^T$ , где  $x = (v, t)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ , т.е. выделим из  $y$  вектор  $x$ , по которому однозначно восстанавливается ускорение  $\ddot{u} = Jv'$ . Соответственно этому представим правую часть уравнения (4.84) в виде  $F = J^{-1}(v, g)^T$ , где  $g = (f, 1)^T$ .

Из соотношений (4.85), (4.86) следует равенство  $J^{-2} + u'u' + v'v' = 1$ , откуда, с учетом формулы  $v' = J^{-1}f$ , получаем  $J^{-1} = \sqrt{1 - u'u'} / \sqrt{1 + ff}$ . Последнее выражение позволяет переписать систему (4.84) в виде системы дифференциальных уравнений

$$u' = J^{-1}v, \quad (4.87)$$

$$x' = J^{-1}g = \sqrt{1 - u'u'} e(u, x), \quad (4.88)$$

где  $e(u, x) = g / \sqrt{1 + ff} = g / \|g\|$  – единичный вектор в пространстве  $\square^{n+1}$ , коллинеарный вектору  $g$ . В дальнейшем будем использовать первое равенство (4.87) в виде

$$x' = \hat{g}, \quad (4.89)$$

где  $\widehat{\mathbf{g}} = J^{-1} \mathbf{g} = (\widehat{\mathbf{f}}, J^{-1})^T$ ,  $\widehat{\mathbf{f}} = J^{-1} \mathbf{f}$ .

Разобьем область изменения параметра интегрирования  $\lambda$  на интервалы точками  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$  и приблизим переменную  $x'$  (в параметризованном виде) на каждом интервале  $\lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1})$  линейной функцией

$$\mathbf{x}'(\lambda) = \mathbf{x}'_n + \frac{\tau}{\Delta\lambda_n} (\mathbf{x}'_{n+1} - \mathbf{x}'_n). \quad (4.90)$$

Здесь  $\tau = \lambda - \lambda_n$ ,  $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$ .

Проинтегрируем равенство (4.90) по параметру  $\tau$ . Учитывая представление  $\mathbf{x} = (\mathbf{v}, t)^T$ , получим

$$\mathbf{v}(\lambda_n + \tau) = \mathbf{v}_n + \tau \mathbf{v}'_n + \frac{\tau^2}{2\Delta\lambda_n} (\mathbf{v}'_{n+1} - \mathbf{v}'_n), \quad (4.91)$$

$$t(\lambda_n + \tau) = t_n + \tau t'_n + \frac{\tau^2}{2\Delta\lambda_n} (t'_{n+1} - t'_n). \quad (4.92)$$

Для определения функции  $\mathbf{u}(\lambda_n + \tau)$  обратимся к уравнению (4.87). Заменяя  $J^{-1}$  линейным приближением на основе формулы (4.90) и используя равенство (4.91), получим приближение третьего порядка точности для  $\mathbf{u}'(\lambda)$  в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\lambda_n + \tau) &= t'(\lambda_n + \tau) \mathbf{v}(\lambda_n + \tau) = J_n^{-1} \mathbf{v}_n + \tau \left[ J_n^{-1} \mathbf{v}'_n + \frac{1}{\Delta\lambda_n} (J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1}) \mathbf{v}_n \right] + \\ &+ \frac{\tau^2}{\Delta\lambda_n} \left[ \frac{J_n^{-1}}{2} (\mathbf{v}'_{n+1} - \mathbf{v}'_n) + (J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1}) \mathbf{v}'_n \right] + \frac{\tau^3}{2\Delta\lambda_n^2} (J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1}) (\mathbf{v}'_{n+1} - \mathbf{v}'_n). \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по  $\tau$ , находим приближение и для  $\mathbf{u}(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\lambda_n + \tau) &= \mathbf{u}_n + \tau J_n^{-1} \mathbf{v}_n + \frac{\tau^2}{2} \left[ J_n^{-1} \mathbf{v}'_n + \frac{1}{\Delta\lambda_n} (J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1}) \mathbf{v}_n \right] + \\ &+ \frac{\tau^3}{3\Delta\lambda_n} \left[ \frac{J_n^{-1}}{2} (\mathbf{v}'_{n+1} - \mathbf{v}'_n) + (J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1}) \mathbf{v}'_n \right] + \frac{\tau^4}{8\Delta\lambda_n^2} (J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1}) (\mathbf{v}'_{n+1} - \mathbf{v}'_n). \end{aligned} \quad (4.93)$$



Полагая в выражениях (4.91)-(4.93)  $\tau = \Delta\lambda_n$ , получим следующую неявную численную схему для определения величин  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}(\lambda_{n+1})$  и  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}(\lambda_{n+1})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} = & \mathbf{u}_n + \frac{\Delta\lambda_n}{2}(J_{n+1}^{-1} + J_n^{-1})\mathbf{v}_n + \\ & + \frac{(\Delta\lambda_n)^2}{24} \left[ (3J_{n+1}^{-1} + J_n^{-1})\widehat{\mathbf{f}}_{n+1} + (5J_{n+1}^{-1} + 3J_n^{-1})\widehat{\mathbf{f}}_n \right], \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\Delta\lambda_n}{2}(\widehat{\mathbf{g}}_{n+1} + \widehat{\mathbf{g}}_n), \quad (4.95)$$

где  $\widehat{\mathbf{f}}_n = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_n, \mathbf{x}_n)$ , начальные значения  $\mathbf{u}_0$  и  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{v}_0, t_0)^T$  известны.

Численная схема (4.94), (4.95) имеет второй порядок точности для вектора  $\mathbf{x} = (\mathbf{v}, t)^T$  и вектора перемещения  $\mathbf{u}$ , поскольку искомый вектор  $\mathbf{x}$  был аппроксимирован сплайном второго порядка, а перемещение – кусочно-гладким полиномом четвертого порядка, имеющим непрерывные производные.

## ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В главе приводятся результаты численного моделирования субколебаний двух проводов, закреплённых шарнирно по концам между двумя абсолютно жёсткими опорами и натянутых вдоль продольной (строительной) оси  $Ox$ . В практическом плане это соответствует двухпроводной расщеплённой фазе воздушной ЛЭП высокого напряжения в пролёте между двумя анкерными опорами с основанием в одной горизонтальной плоскости и с закреплением проводов на одной высоте.

В расчётах используются данные для двух проводов воздушных ЛЭП – АС 500/26 и АС 330/43 с характеристиками, приведёнными в таблице 5.1. Эти провода предназначены для функционирования в составе магистральных высоковольтных электрических цепей, которые обычно прокладываются воздушным способом на опорах ЛЭП, а также для формирования линейных ответвлений от воздушных линий.

Таблица 5.1 – Основные технические характеристики проводов

Наименование	Ед. изм.	Провод	
		АС 330/43	АС 500/26
Вес одного метра провода	кг/м	1,255	1,592
Диапазон температур эксплуатации	°С	от –60 до +90	от –60 до +90
Коэффициент темп. лин. расширения	$1/°C \cdot 10^{-6}$	19,8	21,2
Максимальная разрывная нагрузка	даН	10378,4	11254,8
Наружный диаметр	мм	25,2	30,0
Площадь сечения алюминиевой части	мм <sup>2</sup>	332,50	501,71
Площадь сечения стальной части	мм <sup>2</sup>	43,10	26,61

Сравнительные вычисления показали, что в тригонометрических рядах представлений (4.7) достаточно ограничиться 2 членами для аппроксимации форм внутренних степеней свободы.

### 5.1. Однопролетная модель, имитирующая аэродинамическое взаимодействие двух гибких цилиндров

Рассматриваются два провода длиной  $l = 45$  м с характеристиками АС 500/26 в отсутствии гравитации. Провода диаметром  $d = 30$  мм закреплены на анкерных опорах по краям. Дистанционных распорок нет. Расстояние между проводами в начальном состоянии равно  $10d = 300$  мм. Подветренный провод расположен ниже наветренного на  $2.5$  диаметра провода, как показано на рисунке 5.1. Провода натянуты с силой  $N = 16000$  Н. Скорость ветра  $V_0 = 15$  м/с.

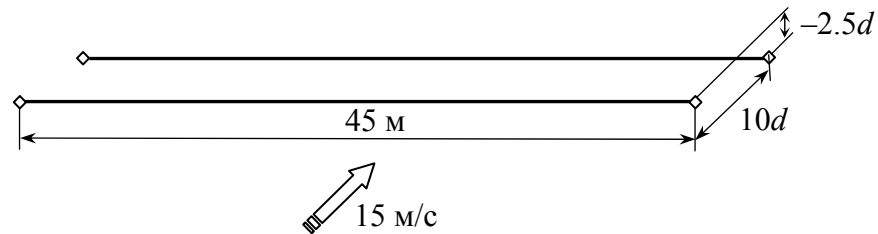


Рисунок 5.1 – Модельная задача о колебаниях двух гибких цилиндров

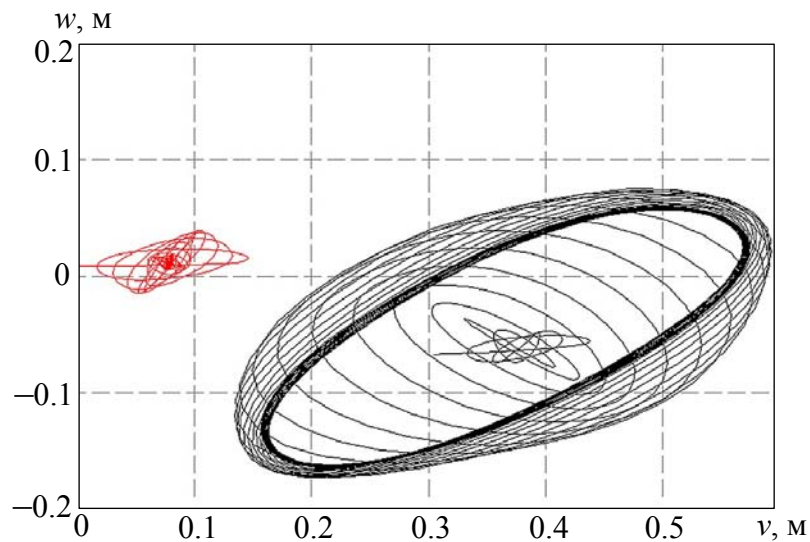


Рисунок 5.2 – Орбиты средних точек наветренного провода (красная) и подветренного провода (чёрная)

Результаты расчетов траекторий движения показаны на рисунке 5.2, откуда видно, что средняя точка подветренного провода движется в установившемся режиме колебаний по эллиптической орбите, достигая

приблизительно 15 диаметров провода по большой оси и 4.7 диаметра провода по малой оси. Анализ численных результатов также показал, что частоты колебаний проводов примерно равны 1.4 Гц и 1.25 Гц в плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$  соответственно, при существенном различии в амплитудах и незначительном рассогласовании по фазе.

В работе [123] приведены результаты экспериментальных исследований колебаний двух цилиндров при их продувке в аэродинамической трубе. Геометрические параметры пучка цилиндров подобны параметрам пучка проводов задачи. На рисунке 5.3 приведена орбита движения центральной точки подветренного цилиндра, которая подобна орбите, приведенной на рисунке 5.2. Пропорциональность осей орбитального эллипса сохраняется, что говорит об адекватности рассмотренной выше математической модели реальному физическому процессу – колебаниям проводов, индуцированным спутным следом.

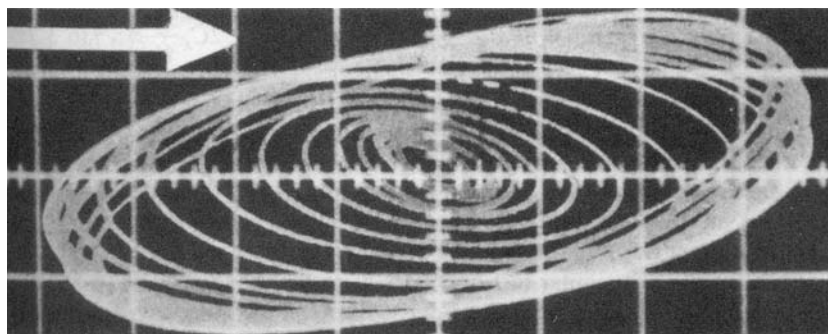


Рисунок 5.3 – Орбита, полученная в результате продувки двух цилиндров в аэродинамической трубе (Simiu E., Scanlan R.H.; 1996 г.)

## 5.2. Двухпроводная линия расщеплённой фазы с тремя одинаковыми подпролётами

Рассматривается анкерный участок линии из двух проводов АС 330/43 длиной 240 м с тремя одинаковыми подпролётами, как показано на рисунке 5.4. Расстояние между проводами диаметром  $d = 25.2$  мм составляет 15 диаметров провода. Плоскость пучка проводов имеет наклон: как и в предыдущей задаче, подветренный провод расположен ниже наветренного на

2.5 диаметра провода. Принимается, что наветренный и подветренный провода натянуты между опорами с силами 19.0 кН и 19.1 кН соответственно. Считается, что гравитационной нагрузки нет.

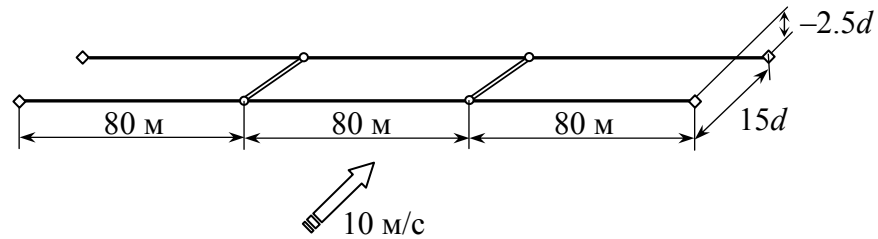


Рисунок 5.4 – Модель двухпроводной линии с тремя равными подпролетами

Рассмотрено два варианта обтекания, соответствующих различным скоростям  $V_0$  набегающего невозмущенного потока воздушной среды.

**Вариант 1:**  $V_0 = 10$  м/с. Результаты моделирования в диапазоне от 0 до 225 с. колебаний представлены на рисунках 5.5 и 5.6.

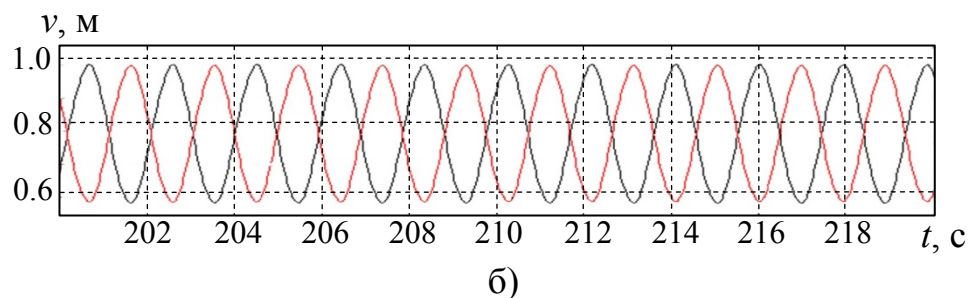
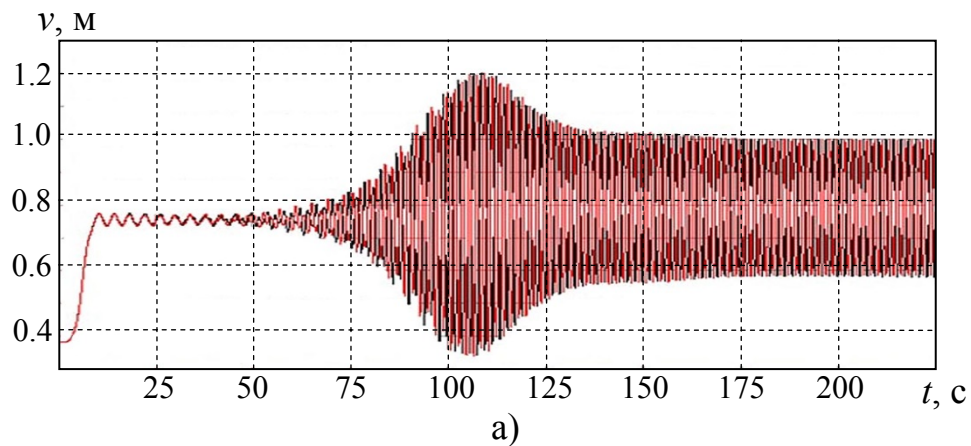


Рисунок 5.5 – Результаты расчёта субколебаний средних точек подветренного провода в 1-м (красные кривые) и 3-м (чёрные кривые) подпролётах анкерного участка:

- а) зависимости горизонтальных координат от времени;
- б) то же в увеличенном масштабе

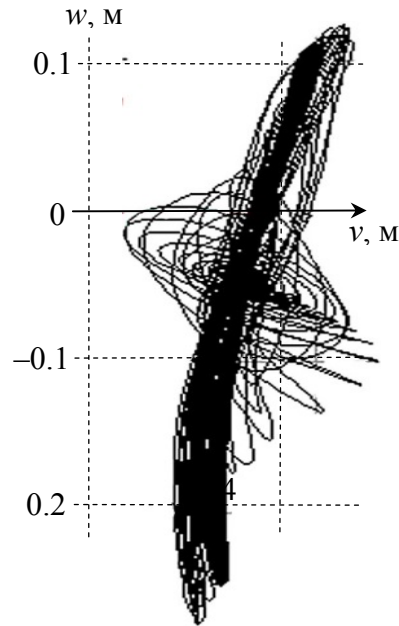


Рисунок 5.6 – Траектория движения средней точки подветренного провода относительно средней точки наветренного провода в 1-м подпролёте

На рисунке 5.5-а) показаны временные зависимости горизонтальных смещений середин подветренного провода на первом (красные кривые) и третьем (чёрные кривые) подпролётах анкерного участка. Из увеличенного изображения на рис. 5.5-б) видно, что эти два подпролёта колеблются в противоположной фазе. Такие колебания соответствуют синхронной «змееподобной» форме в горизонтальной плоскости  $Oxy$ , как показано на рисунке 5.7.

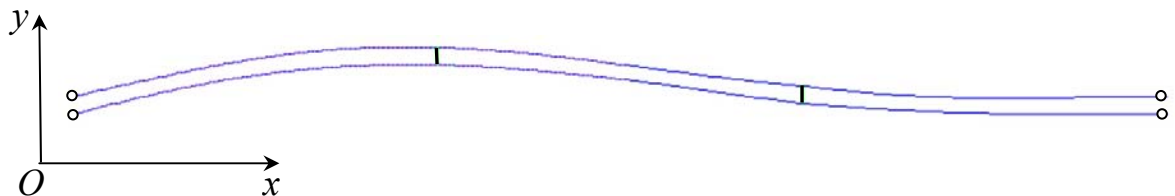


Рисунок 5.7 – Синхронная «змееподобная» форма колебаний в горизонтальной плоскости

**Вариант 2:**  $V_0 = 15$  м/с. Результаты моделирования в диапазоне от 0 до 100 с. колебаний представлены на рисунках 5.8 и 5.9, откуда видно, что

индуцированные спутным следом колебания в начале колебательного процесса хаотичны. Периодичность и связанность колебаний в подпролётах наблюдается примерно с 95 с. от начала воздействия воздушного потока с заданной скоростью. Начальная хаотичность, по-видимому, отвечает переходному процессу, связанному с мгновенным воздействием потока в начальный момент на провода со скоростью  $V_0 = 15$  м/с.

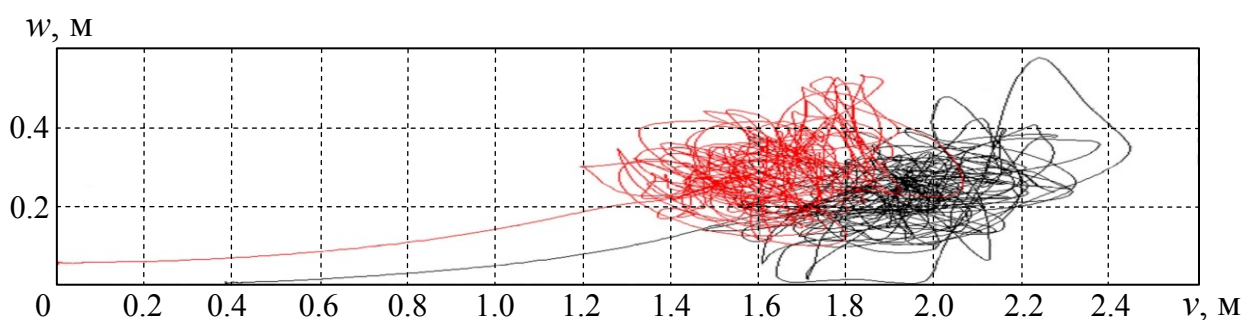


Рисунок 5.8 – Траектории движения средних точек проводов второго (среднего) подпролёта: красная – для наветренного провода; чёрная – для подветренного провода

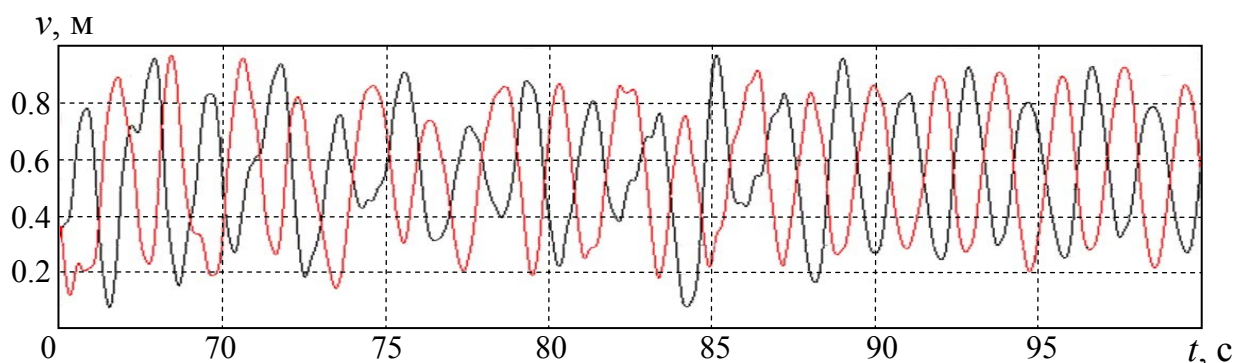


Рисунок 5.9 – Горизонтальные компоненты смещений середин первого (красная кривая) и третьего (чёрная кривая) подпролётов в зависимости от времени

### 5.3. Двухпроводная расщеплённая фаза воздушной ЛЭП с семью подпролётами в условиях реального обтекания

Рассматривается воздушная линия электропередачи, состоящая из двух проводов серии АС 500/26 с внешним диаметром  $d = 30$  мм, натянутых в пролёте длиной 367 м между двумя анкерными опорами. Начальное расстояние между проводами принимается равным 446 мм, которое

определяется конструкцией одинаковых для пролёта дистанционных распорок. Линия имеет 7 подпролётов различной длины, указанные в таблице 5.3. В расчётах учитывается неравномерность скорости воздушного потока, направленного перпендикулярно строительной оси в горизонтальной плоскости. Значения осреднённых скоростей ветра в подпролётах даны в третьей колонке таблицы 5.2. Внешняя температура  $T = 25^{\circ}\text{C}$ . Сила натяжения проводов принимается равной  $N = 22.5 \text{ кН}$ , составляющего примерно 20% от разрывного усилия для провода.

Таблица 5.2 – Параметры подпролётов

№ подпролёта	Длина подпролёта, м	Скорость ветра, м/с
1	35	11
2	56	10
3	64	9
4	57	8,5
5	65	10
6	55	11
7	35	12

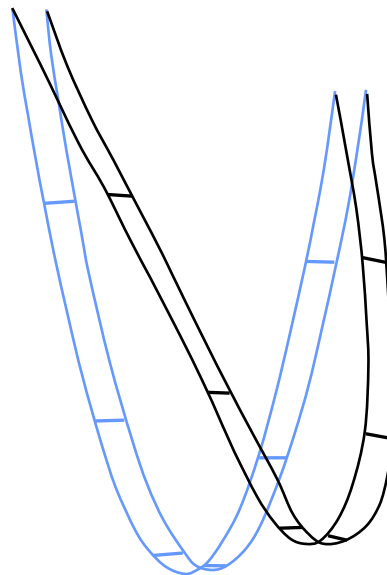


Рисунок 5.10 – Начальная и промежуточная конфигурация линии

Начальная конфигурация линии рассчитывается из решения статической задачи методом продолжения решения по параметру в соответствии с п. 4.6. В результате определена стрела провеса  $f = 10.5 \text{ м}$ , соответствующая тяжению  $N = 22.5 \text{ кН}$ .



На рисунке 5.10 начальная конфигурация отмечена синим цветом, черным цветом выделена промежуточная конфигурация линии в некоторый момент процесса субколебаний.

Изменение горизонтальной координаты середины наветренного провода четвертого подпролёта показана на рисунке 5.11. На рисунке 5.12 представлена временная зависимость положения середины подветренного провода относительно наветренного.

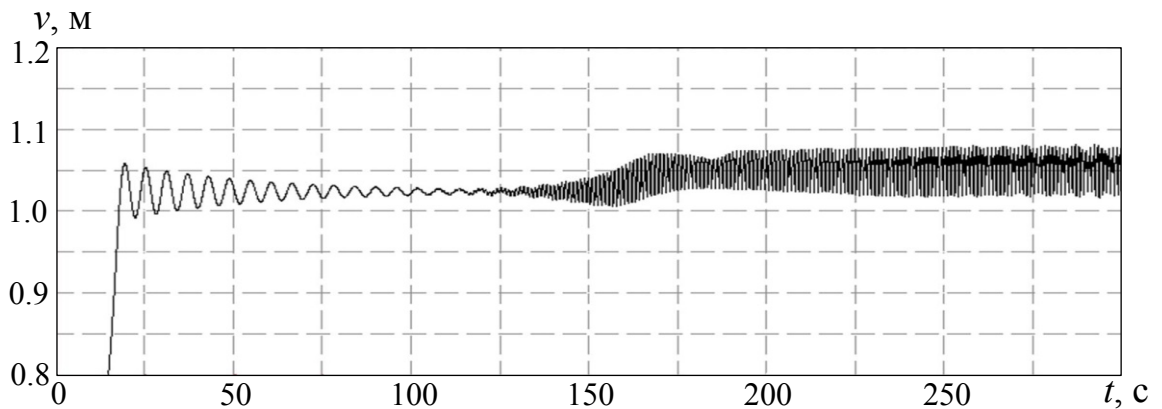


Рисунок 5.11 – Зависимость от времени горизонтальной координаты точки середины наветренного провода в 4 подпролёте

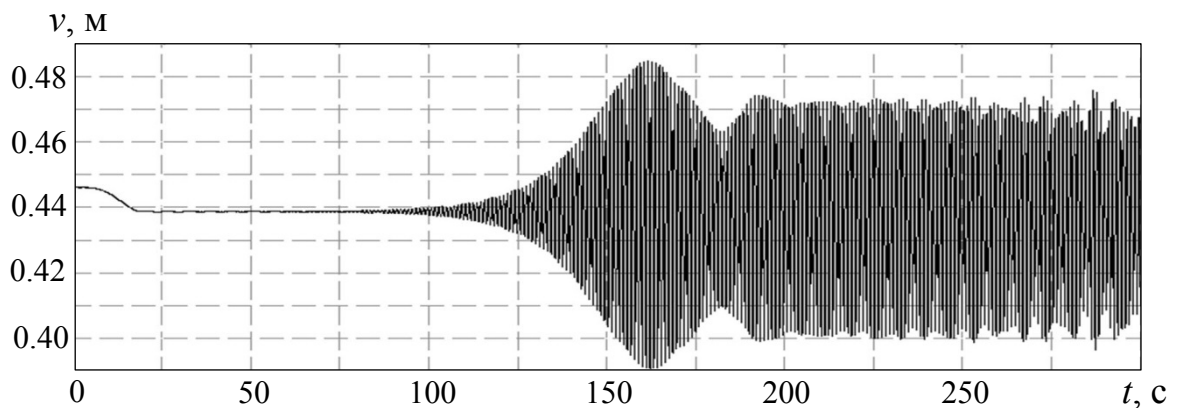


Рисунок 5.12 – Зависимость от времени горизонтального перемещения середины подветренного провода относительно середины наветренного провода в 4 подпролёте

Траектории движения средних точек проводов в четвертом подпролёте показаны на рисунке 5.13: красная – для наветренного провода, чёрная – для подветренного.

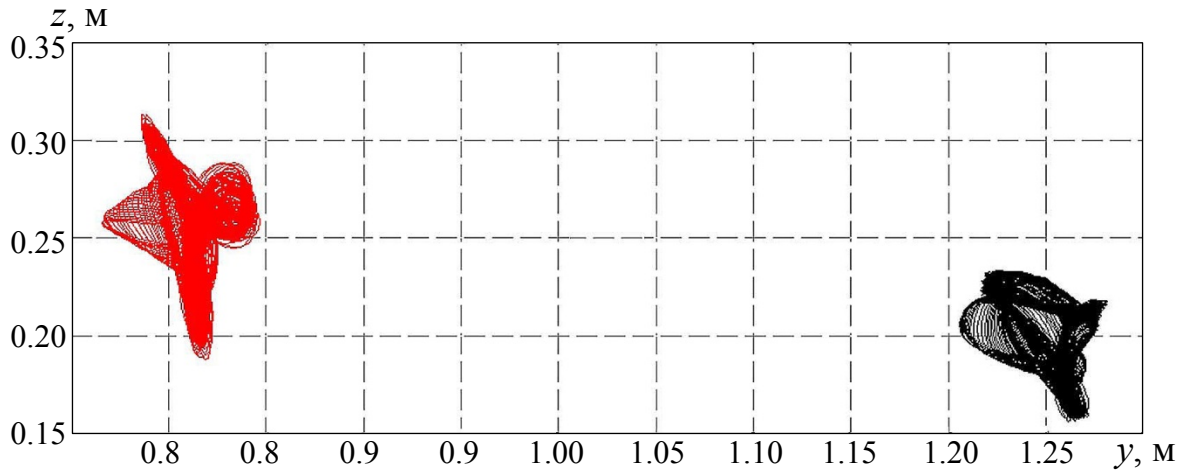


Рисунок 5.13 – Траектории средних точек проводов 4 подпролёта в диапазоне от 0 до 300 с. колебаний

Для других пролётов наблюдается иные по характеру зависимости координат середин подпролётов от времени. Например, для седьмого подпролёта они имеют вид, представленный на рисунках 5.14 и 5.15.

Сравнительный анализ результатов выполненных расчётов говорит о весьма сложном характере колебаний проводов для пучков проводов с дистанционными распорками, зависящими в значительной степени, как от геометрических параметров линии, так и от профиля набегающего скоростного напора. В этой связи, представляется весьма важным прогноз возможных амплитуд относительных колебаний проводов в подпролётах для предотвращения соударения проводов, находящихся под высоким напряжением и, как следствие, разрушительных явлений.

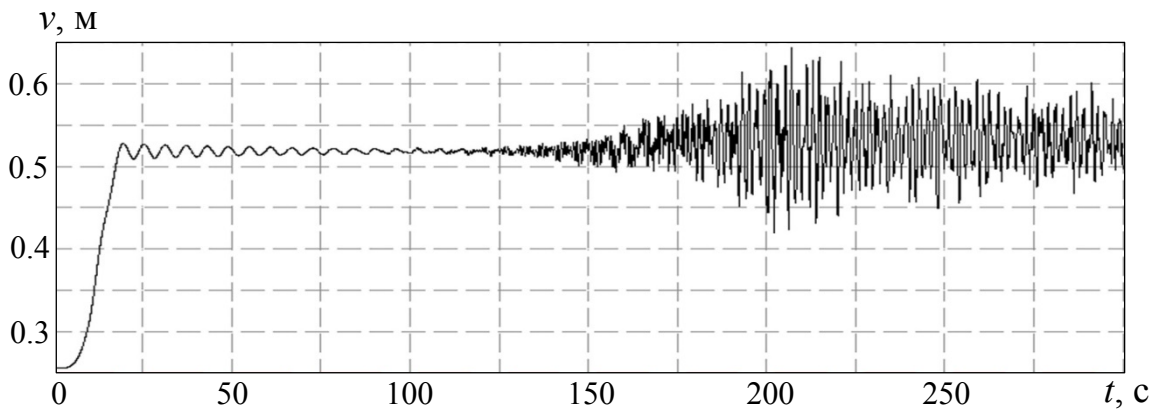


Рисунок 5.14 – Зависимость от времени горизонтальной координаты точки середины наветренного провода в 7 подпролёте

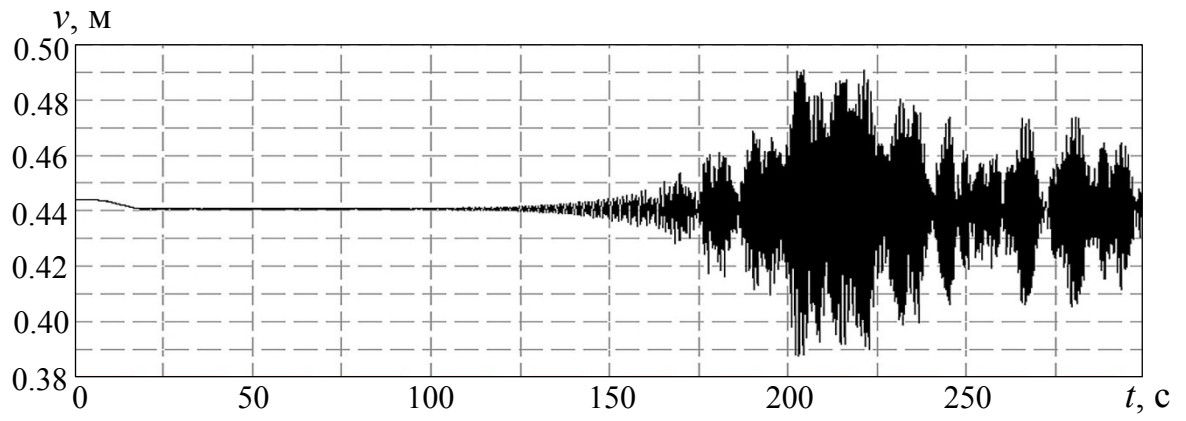


Рисунок 5.15 – Зависимость от времени горизонтального перемещения середины подветренного провода относительно середины наветренного провода в 7 подпролёте

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. На основе конечно-элементной дискретизации разработана математическая модель индуцированных спутным следом нелинейных колебаний проводов расщеплённой фазы воздушной ЛЭП со связями в виде дистанционных распорок. Для аппроксимации локальных перемещений в пределах конечного элемента используется метод Рунге с выбором тригонометрических функций в качестве базисных, позволяющий с различной степенью «детализации» описывать колебания в заданных частотных диапазонах. Уравнения колебаний проводов получены в обобщённых координатах с нелинейностями упругих, инерционных и аэродинамических сил. В качестве обобщённых координат принимаются абсолютные перемещения и углы закручивания узловых сечений, а также коэффициенты тригонометрических разложений для локальных перемещений и углов закручивания в пределах каждого элемента.

2. Получены аналитические выражения для вычисления: жесткостей проводов с учётом их многослойной проволочной структуры; аэродинамических нагрузок в спутном следе на основе модифицированной теории Симпсона с использованием эмпирических данных Блевинса и Прайса.

3. На основе метода продолжения решения по параметру разработан подход к получению статических решений, определяющих начальную конфигурацию аэроупругой системы с учётом монтажной длины проводов, воздействия температуры и наличия закреплённых на проводах грузов.

4. Для численного интегрирования системы уравнений колебаний предложен алгоритм, основанный на параметризации уравнений с выбором в качестве аргумента длины интегральной кривой решения. Для параметризованной задачи предложена неявная схема второго порядка точности, основанная на методе линейного ускорения с использованием простых итераций.

5. Дано решение новых аэроупругих задач о колебаниях двух закреплённых по концам проводов с учётом аэродинамических нагрузок, индуцированных спутным следом. Для модельной задачи сделано сопоставление численного решения с известными экспериментальными данными.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Арматура и изоляторы для воздушных линий электропередачи. Промышленный каталог продукции серийных выпусков. Москва: Информэнерго, 2001.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 271 с.
3. Афанасьева О.Е., Рыжов С.В., Фельдштейн В.А., Фельдштейн И.В. Динамические модели для исследования вибраций проводов линий электропередач и воздушных коммуникационных кабелей в ветровом потоке // Проблемы машиностроения и автоматизации. 1998. № 1. - С. 50—57.
4. Баженов В.Г., Чекмарёв Д.Т. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 156-173.
5. Баженов В.Г., Пирогов С.А., Чекмарёв Д.Т. Явная схема со стабилизирующим оператором для решения нестационарных задач динамики конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 120-130.
6. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. — М.: Мир, 1986. - 181 с.
7. Ванько В.И. Математическая модель пляски провода ЛЭП // Изв. вузов. Энергетика. 1991. № 11. – С.36–42.
8. Ванько В.И. Колебания проводов расщепленной фазы воздушных ЛЭП: линейная теория, эксперимент: дис. ... д-ра техн. наук. М., 1993. 267 с.
9. Виноградов А.А., Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н., Рабинский Л.Н. Установка для определения механических свойств гибких стержневых элементов // Патент на изобретение №2668568, приоритет изобретения 03 августа 2015 г., дата государственной регистрации в Госу-

дарственном реестре изобретений Российской Федерации 02 октября 2018 г.

10. Волков-Богородский Д.Б., Данилин А.Н., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. О неявных методах интегрирования начальных задач для параметризованных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43. № 11, С. 1684-1696.
11. Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т. Статика и динамика сложных структур. М.: Машиностроение, 1989. 248 с.
12. Глазунов А.А. Основы механической части воздушных линий электропередачи. М.: Госэнергоиздат, 1959. 191 с.
13. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 232 с.
14. Данилин А.Н., Козлов К.С., Кузнецова Е.Л., Тарасов С.С. Моделирование колебаний гасителя вибрации проводов воздушных систем энергоснабжения // Труды МАИ (электронный журнал). Сер. Математика. Физика. Механика. № 64. 05 марта 2013.
15. Данилин А.Н., Кузнецова Е.Л., Курдюмов Н.Н., Тарасов С.С. Деформирование спиральных зажимов для проводов воздушных линий электропередачи // Нелинейный мир, №4, т.11, 2013, с. 234-242.
16. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н. Моделирование деформирования многослойных спиральных зажимов для натяжения и соединения проводов воздушных линий электропередач // Тезисы докладов Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М, 2014. – с. 23-24.
17. Данилин А.Н., Кузнецова Е.Л., Курдюмов Н.Н. Исследование несущей способности спиральных натяжных зажимов // Тезисы докладов III международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздейст-

- вии полей различной физической природы. Москва, 19-21 октября 2015г.» - М., 2015. с. 48-50.
18. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н. Нелинейные колебания системы гибких проводов при субколебаниях и пляске // Тезисы докладов Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М, 2014. – с. 21-23.
  19. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н. Моделирование деформирования проволочных конструкций спиральной структуры // Тезисы докладов III международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 19-21 октября 2015г.» - М., 2015. с. 45-46.
  20. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н. Математическое моделирование нелинейных колебаний системы гибких проводов при субколебаниях и пляске // Тезисы докладов III международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 19-21 октября 2015г.» - М., 2015. с. 46-48.
  21. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н., Аносов Ю.В. О жесткостях проволочных конструкций спирального типа // Труды МАИ, №80, 2015г.
  22. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н., Рабинский Л.Н. О моделировании деформирования проволочных конструкций спиральной структуры // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015, №4, с.72-93.
  23. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н., Тарасов С.С. О несущей способности спиральных натяжных зажимов // Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1.- М.: ООО «ТРП», 2015. с.71-72.

24. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н., Тарасов С.С. Моделирование субколебаний гибких проводов воздушных линий электропередачи // Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1.- М.: ООО «ТРП», 2015. с.72-74.
25. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н., Тарасов С.С. О моделировании субколебаний гибких проводов воздушных ЛЭП // Тезисы докладов II международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 17-19 февраля 2015г.» - М., 2015. с. 39-41.
26. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н., Тарасов С.С. О несущей способности спиральных натяжных зажимов // Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1.- М.: ООО «ТРП», 2015. с.71-72.
27. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н., Тарасов С.С. К вопросу о несущей способности спиральных натяжных зажимов // Тезисы докладов II международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 17-19 февраля 2015г.» - М., 2015. с. 41-42.
28. Данилин А.Н., Солдаткин А.Н. Вычислительные методы динамики упругих конструкций. М.: Изд-во МАИ, 1996. 44 с.
29. Данилин А.Н., Шалашилин В.И. О параметризации нелинейных уравнений деформирования твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 82-92.
30. Данилин А.Н., Волков-Богородский Д.Б. О неявных методах интегрирования параметризованных уравнений нелинейных динамических систем // Вестник МАИ. 2001. Т. 8. № 2. С. 40-52.



31. Данилин А.Н., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. О неявных алгоритмах интегрирования задачи Коши для параметризованных уравнений, описывающих динамическое поведение механических систем // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 6. С. 1053-1069.
32. Долин А.П., Шонгин Г.Ф. Открытые распределительные устройства с жесткой ошиновкой. – М.: Энергоатомиздат, 1988 – 192 с.
33. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 332 с.
34. Изоляторы и арматура для линий электропередачи и подстанций от 0,4 до 1150 кВ. Каталог продукции 2010. – М.: Global Insulator Group, 2010. – 136 с.
35. Колебания проводов воздушных линий под воздействием ветра. Учебно-справочное пособие. Часть 1. Усталостная прочность. Вибрация. Под ред. Виноградова А.А. – М.: Изд-во ЗАО «Электросетьстройпроект», 2005. – 185с.
36. Колебания проводов воздушных линий под воздействием ветра: Учебно-методическое пособие к семинару. Под ред. А.А. Виноградова. – М.: Электросетьстройпроект, 2005. – 195 с.
37. Компактные провода Aero-Z для высоковольтных линий электропередачи. – Nexance, 2004. – 40 с.
38. Куликов АС. Aero-Z – высокотехнологичные провода для высоковольтных линий электропередачи. // В сб. материалов Третьей Российской с международным участием научно-практической конференции «Линии электропередачи 2008: проектирование, строительство, опыт эксплуатации и научно-технический прогресс», Новосибирск, 2008. – С.97-101.
39. Курдюмов Н.Н. Конечно-элементное моделирование обтекания системы круговых цилиндров в плоской постановке // Тезисы докладов V международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздейст-

вии полей различной физической природы. Москва, 17-19 октября 2016г.» - М., 2016. с. 107-109.

40. Лебедев В.И. Как решать явными методами жесткие систем дифференциальных уравнений // Вычисл. процессы и системы. 1991. Вып. 8. С. 237-291.
41. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
42. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Ч.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.
43. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 288 с.
44. Полевой А.И. Условия возникновения пляски проводов ЛЭП // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1988. № 4. С. 168—174.
45. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 331 с.
46. Правила устройства электроустановок (ПУЭ). Седьмое издание. Раздел 2. Главы 2.4, 2.5. – М.: «Изд-во НЦ ЭНАС», 2003. – 156 с.
47. Сергей И.И., Виноградов А.А. Численное моделирование эксплуатационных статических и динамических режимов проводов ВЛ и кабелей // Электрические станции. 1998. №1. С. 41-49.
48. Сергей И.И., Климович П.И., Виноградов А.А. Численный анализ ограничения пляски проводов расстройством частот их колебаний // Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ - Энергетика. 2009. № 5. С. 5—14.
49. Сергей И.И., Климович П.И. Влияние крутильных колебаний одиночных проводов и гасителей-маятников на параметры пляски // В сб. материалов Республиканской научно-практической конференции “Перспективы развития энергетики в XXI веке”, 12—14 мая 2010 г. — Минск: БИТУ, 2011. С. 9.

50. Сергей И.И., Пономаренко Е.Г. Выбор методов расчета электродинамической стойкости различных участков гибкой ошиновки // В сб. материалов Республиканской научно-практической конференций “Перспективы развития энергетики в XXI веке”, 12—14 мая 2010 г. — Минск: БИТУ, 2011. С. 18.
51. Сергей И.И., Бладыко Ю.В., Пономаренко Е.Г., Цемехман Б.Д., Тарасов В.Е. Анализ действия гололедно-ветровых и электродинамических нагрузок в пролетах с произвольным расположением проводов // Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. Энергетика. 2012. № 1. – С.38-44.
52. Сергей И.И., Виноградов А.А., Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н. О моделировании пляски проводов воздушных ЛЭП и параметрическом анализе эффективности маятниковых гасителей // Вестник ПНИПУ. Механика. 2018, №4, с.256-265.
53. Стрелюк М., Сергей И., Виноградов А., Краснов В. Динамические нагрузки на проставки при подпролетных колебаниях воздушных линий сверхвысокого напряжения // Энергетическое строительство, 1986, №1, с. 68-71.
54. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений. М.: Мир, 1985. 263 с.
55. Фельдштейн В.А., Рыжов С.В., Афанасьева О.Е., Фельдштейн И.В. Расчётное определение рациональной по условиям вибрации геометрии поддерживающего зажима спирального типа // Электрические станции. № 1. 1998. — С.12—17.
56. Фельдштейн В.Л. Динамические модели для расчетов колебаний в воздушном потоке проводов со спиральными креплениями и гасителями колебаний высоковольтных линий электропередачи // В сб. материалов заседания рабочего комитета 23 СИГРЭ, №32—2003 (WG 11\ESCC-TF), IWD (2003).

57. Фельдштейн В.Л., Колосов В.Г. Методы математического моделирования для проектирования защиты пролетов ЛЭП от эоловых вибраций // В сб. материалов семинара: “Мониторинг состояния воздушных ЛЭП: методы прогнозирования срока службы, повышение их надежности”, 14— 18 февраля 2005 г.
58. Хаусхолдер А.С. Основы численного анализа. М.: Изд-во ин. лит., 1956. 320 с.
59. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. 446 с.
60. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 222 с.
61. Шкапцов В.А. Методические указания по типовой защите от вибрации и субколебаний проводов и грозозащитных тросов воздушных линий электропередачи напряжением 35-750 кВ. - М.: СПО «ОРГРЕС», 1991. – 68 с.
62. Яковенко М.Г. Об учете физической и геометрической нелинейности при расчете вибрации проводов ЛЭП // Электроэнергетика. 1991. № 12. С. 16—22.
63. Яковлев Л.В. Вибрация на воздушных линиях электропередачи и методы защиты проводов и грозозащитных тросов. – М.: НТФ ”Энергопрогресс”, 2000. – 76 с.
64. Яковлев Л.В. Пляска проводов на ВЛ электропередачи и способы борьбы с нею. – М.: НТФ ”Энегропрогресс”, 2002. – 96 с.
65. Baenziger M.A. [et al.] Dynamic loads on transmission line structures due to galloping conductors. // IEEE Transactions on Power Delivery. 1994. N 9. P. 40-49.
66. Bathe K.-J., Wilson E. L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976. 528 p.

67. Benard H. Formation de centers de gyration a l'arriere d'un obstacle en mouvement // Completes rendus de l'Academie des Sciences, Paris. 1908/ V.147, 839—42, 970—2.
68. Best M.S., Cook N.J. The forces on a circular cylinder in shear flow. University of Bristol, Department of Aeronautical Engineering Report No. 103, June 1967.
69. Bishop R.E.D., Hassan A.Y. The lift and Drag Forces on a Circular Cylinder Oscillating in a Flowing Fluid // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. 1964. V.277. — P.51—75.
70. Blevins, R. D. (1990) “Flow-Induced Vibration,” Van Nostrand Reinhold, NY.
71. Bokaian, A., (1989), “Gallopings of a Circular Cylinder In the Wake of Another”, J. of Sound and Vibration, 128(1), 71-85.
72. Chan J.K. Modelling of single conductor galloping // Canadian Electrical Association Report 321-T-672A. Montreal, 1992. 180 p.
73. Choi Y.S., Her H.O., McKenna P.J. Galloping: nonlinear oscillation in a periodically forced loaded hanging cable // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1994. N 52. P. 23-34.
74. Danilin A., Kurdyumov N., Shavnaya R. Wake-Induced Oscillations of Two Bundle Conductors Connected at Intervals by Spacers // AIP Conference Proceedings 2343, 120005 (2021).
75. Danilin A.N., Kuznetsov E.B., Shalashilin V.I. The best parametrization and numerical solution of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations of the second order // Functional Differential Equations. 2001. V. 8. № 1-2, P. 141-146.
76. Danilin A.N., Snegovski D.V., Volkov-Bogorodski D.B. On implicit algorithms of continuation method with applications to dynamic systems // J. of Comp. and Appl. Math. 2004. V. 164-165. P. 207-224.

77. Danilin A.N., Zhavoronok S.I. Nonlinear vibrations and galloping of transmission lines' conductors // Asia Life Sciences Supplement. The Asian International Journal of Life Sciences. 2019. Vol. 21. No. 1. P. 629-643.
78. Den-Hartog J.P. Transmission line's vibrations due to sleet // Transactions AIEE. 1932. V. 51. P. 1074-1076.
79. Desai Y.M. [et al.] Perturbation-based finite element analyses of transmission line galloping // Journal of Sound and Vibration. V. 191, N 4. P. 469-489.
80. Desai Y.M., Yu P., Popplewell N., Shan A.H. Finite Element Modelling Of Transmission Line Galloping // Computers and Structures. 1995 V.57. № 3. — P. 407—420.
81. Diana, G., Boccione, M., Cheli, F., Resta, F., Manenti, A. (1999) "The aero-elastic behaviour of the OHTL expanded bundles". Proc. of the 3rd ISCD (International Symposium on cable dynamics), Trondheim. pp 97-102.
82. Diana G., Gasparetto M., DiGiacomo G., Nicolini P. Analytical method for computing subspan oscillation, IEEE Conference Paper C74 493 3, 1974.
83. Diana G., Giordana F. (1972), "Sulle vibrazioni di un cilindro in scia di un altro. Analisi del fenomeno con modello analitico", L'Energia Elettrica, n. 7- 1972.
84. Dubois H., Lilien J.L., Dal Maso F. A new theory for frequencies computation of overhead lines with bundle conductors // Rev. AIM – Liege. 1991. № 1. – P.46-62.
85. Edwards A.T., Madeyski A. Progress report on the investigation of galloping of transmission line conductors // AIEE Transaction Distribution, Winter Meeting. New York, 1956. P. 666-686.
86. EPRI. Transmission line reference book: wind-induced conductor motion. Palo Alto (California): Electrical Power Research Institute, Palo Alto, CA, 1979. 255 p.
87. EPRI Transmission line reference book. Wind-induced Conductor motion. Electric Power Research Institute: Final Report, November 2006.

88. Franklin M., Paulsen W. Calculating in-plane frequencies of multispan cables using the Exterior-Matrix Method // *Journal of Engineering Mathematics*. 2010. V.67. № 4. — P. 289—306.
89. Foppl L. *Sitzungsberichte d.k.bayer. Akad. D. Wissensch. Zu Munchen*, 1913, p. 1-17.
90. Fu G. [et al.] Simulations of the controlling effect of interphase spacers on conductor galloping // *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*. 2012. V. 19, N 4. P. 1325-1334.
91. Gabbai R.D., Benaroya H. An overview of modeling and experiment of vortex-induced vibration of circular cylinders // *Journal of Sound and Vibration*. 2005. V.282. — P. 575—616.
92. Irvine, H.M. (1988) “Cable Structures”, Penerbit ITB Bandung, 1988
93. Irvine H.M., Caughey T.K. *The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable* // *Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A*. 1974. V.341. — P.299—315.
94. Keutgen R. *Galloping Phenomena. A Finite Element Approach*. Thèse de doctorat. 1999. Universite de Liege. – 202 p.
95. Keutgen R., Lilien J.-L. Benchmark cases for galloping with results obtained from wind tunnel facilities — validation of a finite element model // *IEEE Transactions On Power Delivery*. 2000. Vol. 15, N 1. P. 367-374.
96. Kim H.-S., Byun G.-S. A study on the analysis of galloping for power transmission line // *The IEEE International Symposium on Industrial Electronics: book of proceedings*. 2001. V. 2. P. 973-978.
97. Kovasznay L.S.G. Hot Wire Investigations of the Wake Behind Cylinders at Low Reynolds Numbers, *Proceeding Royal Society of Aeronautics*, Vol. 198, 1949, p. 174.
98. Lienhard J.H. *Synopsis of Lift, Drag and Vortex Frequency Data for Rigid Circular Cylinders* // *Bulletin 300*, College of Engineering, Washington State University, Pullman, WA99164.

99. Lilien J.L. [et al.]. State of the art of conductor galloping / CIGRE Technical Brochure N 322. Paris, 2007. 146 p.
100. Lilien J.L., Havard D. Galloping data base on single and bundle conductors prediction of maximum amplitudes // IEEE Transactions on Power Delivery. 2000. V. 15, N 2. P. 670-674.
101. Lilien J.L., Snegovski D. Hurricane Simulation on Power Transmission Line // Proc. 5<sup>th</sup> Cable Dynamics Symp., Santa Margherita, 2003. – P.313-318.
102. Lilien J.L., Snegovski D. Wake-Induced Vibration of Power Transmission Line: Parametric Study // Proc. 8<sup>th</sup> Conf. on Flow-Induced Vibration, Paris, 2004. – P.421-425.
103. Liu X. [et al.] Nonlinear numerical simulation method for galloping of iced conductor // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). 2009. V. 30, N 4. P. 489-501.
104. Mair W.A., Maull D.J. Aerodynamic Behaviour Of Bodies In the Wake Of Other Bodies. // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. series A., 1971, № 268, pp. 425 –437.
105. Marris W. A Review on Vortex Streets? Periodic Waves, and Induced Vibration Phenomena // Journal of Basic Engineering, Vol.86, No. 2, 1964, p.185.
106. Mawkada T. Study on wind pressure against ACSR double conductor // Electrical Engineering in Japan. Vol. 84 (2), 1964, P. 21-28.
107. McCombe J., Haigh F.R. Overhead Line Practice (3rd ed.). – Macdonald: 1966. – P.216-219.
108. Milne-Thomson Theoretical Hydrodynamics, fourth edition, Macmillan, 1960, p. 366.
109. Nigol O., Buchan P.G. Conductor Galloping // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. 1981. V. PAS—100, No.2. — P.699—720.
110. Nigol O., Clarke G.J. Conductor galloping and its control based on torsional mechanism // Ontario Hydro Research Quarterly. 1974. V. 26, N 2. P. 31-41.



111. Preiswerk M. Antivibratory wires for transmission lines // CIGRE Report, 1935.
112. Price S.J. (1975) "Wake induced flutter of power transmission conductors", J. of Sound and Vibration, 38 (1), 125-147.
113. Ratkowski J. Experiments with galloping spans // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. 1963. V. 82, N 68. P. 661-669.
114. Rawlins C.B. Discussion of the paper "On the use of 'Damped' and 'Undamped' quasi-static aerodynamic models in the study of wake-induced flutter" by Simpson A., Price S.J. // IEEE Conference Paper C74-378-6, 1974.
115. Rawlins C.B. Fundamental concepts in the analysis of wake-induced oscillation of bundled conductor // IEEE Trans. PAS. 1976. V.95. No.4. – P.1377-1393.
116. Rawlins C.B. Extended analysis of wake-induced oscillations of bundled conductors // IEEE Trans. PAS. 1977. V.96. No.5 – P.1681-1689.
117. Rawlins C.B. Analysis of conductor galloping field observations — single conductors // IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. 1981. Vol. 100, N 8. P. 3744-3753.
118. Rega G., Srinil N., Alaggio R. Experimental and numerical studies of inclined cables: free and parametrically-forced vibrations. // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2008. V. 46, N 3. P. 621-640.
119. Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets // NACA Report. 1954. N 1191. 25 p.
120. Saxon D.S., Cahn A.S. Modes of vibration of a suspended chain // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1953. V.6, pt.3, P. 273-280.
121. Schaeffer W. and Eskinazi S. An Analysis of the Vortex Street Generated in a Viscous Fluid // Journal of Fluid Mechanics, Vol.6, Pt.II, August 1959, p. 241.

122. Shklyarchuk F.N., Danilin A.N., Lilien J.-L., Snegovskiy D.V., Vinogradov A.A., Djamanbayev M.A. Nonlinear Aeroelastic Vibrations and Galloping of Iced Conductor Lines under Wind. Proceedings of 7<sup>th</sup> International Symposium on Cable Dynamics. Vienna (Austria), 10-13 December 2007. P. 129-134.
123. Simiu, E., Scanlan, R. H. (1996) "Wind Effects on Structures: Fundamentals and Applications to Design", J.Wiley & Sons, NY, 1996.
124. Simpson A. Determination of the inplane natural frequencies of multispanspan transmission lines by a transfer matrix method // Proceedings of the Institution of Electrical Engineers. 1966. V. 113. No. 5. — P. 870—878.
125. Simpson, A. (1971/1), "On the Flutter of a Smooth Circular Cylinder in a wake", Aeronautical Quarterly XXII, 25-41.
126. Simpson A. (1971/2), "Wake induced flutter of circular cylinders: mechanical aspects", Aeronautical Quarterly XXII, 101-118.
127. Simpson A., Price S.J. On the use of 'Damped' and 'Undamped' quasi-static aerodynamic models in the study of wake-induced flutter // IEEE Conference Paper C74-378-6, 1974.
128. Snegovskiy D., Lilien J.L. Nonlinear finite element approach to simulate wake-induced oscillation in transmission line span // ASME. Fluids Engineering Summer Meeting (FEDSM2010), Montreal, August 1-5, 2010.
129. Stockbridge G.H. Vibration damper. U.S. Patent 1675391. Filing date: Nov 12, 1925. Issue date: Jul 3, 1928.
130. Strouhal V. On Aeolian tones // Ann. Of Phys. 1878. V. 5. — 216 p.
131. Tornquist E.L., Becker C. Galloping conductors and a method for studying them // Transactions of the AIEE. 1947. V. 66, N 1. P. 1154-1164.
132. Triantafyllou M.S. The dynamics of taut inclined cables // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1984. V. 37, pt. 3, P. 421-440.

133. Tritton J. Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers // *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.6,Pt.IV, November 1959, p. 547.
134. Von Karman T. Uber den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Korper in einer Flussigkeit erf art // *Gottinger Nachrichten, mathematisch-physikalische Klasse*. 1911, 509—17; 1912, 547—56.
135. Wang L., Lilien J.L. Overhead Electrical Transmission Line Galloping // *IEEE Trans. On Power Delivery*. 1998. V. 13, N 3. P. 909-916.
136. Wang X., Lou W.-J. Numerical approach to galloping of conductor // *The 7th Asia-Pacific Conference on Wind Engineering: book of proceedings*. Taipei (Taiwan), 2009. 8 p.
137. Wardlaw R.L., Cooper, K.R., Ko, R.G., Watts, J.A. (1975) “Wind Tunnel And Analytical Investigations Into the Aero-elastic Behaviour Of Bundled Conductors”, *IEEE Trans. on PAS*, vol. 94 no. 2 p. 642-651.
138. Zdravkovich M.M. *Flow Around Circular Cylinders*, vol. I, Oxford University Press, 1997.