

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-  
ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»  
(МФТИ)

*На правах рукописи*

ДО СУАНЬ ЗОАНЬ

**СТРУКТУРА СЖИМАЕМЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ КУЭТТА –  
ТЭЙЛORA**

Специальность 01.02.05 механика жидкости газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор,  
член-корреспондент РАН, Игорь Иванович Липатов

Москва 2014

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$x, y, z$  : компоненты координат

$u, v, w ; U, V, W$  : компоненты скоростей по координатам  $x, y, z$

$m$  : масса

$\Omega$ : угловая скорость

$T$  : температура

$r$  : радиус

$E$  : энергия

$H$  : энтальпия

$M$  : число Маха

$Pr$  : число Прандтля

$Re$  : число Рейнольдса

$Fr$  : число Фруда

$R$  : газовая постоянная

$m$  : магнитный момент

$F$  : сила

$p$  : давление

$\delta$  : небольшое перемещение

$\eta$  : динамический коэффициент вязкости

$\lambda$  : длина волны

$\mu$  : динамическая вязкость

$\nu$  : кинематический коэффициент вязкости

$\rho$  : плотность

$\gamma$  : отношение удельных теплоемкостей

$\alpha$  : дисперсионное соотношение

$\partial$  : частная производная

$\Delta$  : изменение величины

$\int_a^b$  : интеграл от  $a$  до  $b$

$\varepsilon$  : маленькая величина

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
Глава 1: Обзор сделанных работ по теме и введение в комалекс - программу ANSYS CFD .....	6
Глава 2: Асимптотический анализ течений Куэтта –Тэйлора при больших числах Рейнольдса .....	50
2.1. Определяющие уравнения в цилиндрической системе координат.....	52
2.2. Система оценок .....	53
2.3. Диаграмма различных возможных режимов течения Куэтта-Тейлора ...	57
2.4. Численные результаты по теории возмущений для различных мод течений .....	58
Глава 3: Влияние характерных параметров на структуру вихрей в течении Куэтта-Тэйлора сжимаемого газа .....	65
3.1 Физическая модель I.....	65
3.1.1 Расчеты для физической модели 1 при $\Omega_1 = 300 \text{ рад./сек.}$ и $\Omega_2 = 0$	66
3.1.2 Расчеты для физической модели 1 при $\Omega_1 = 38000 \text{ рад./сек.}$ и $\Omega_2 = 0$ .....	68
3.2 Физическая модель II.....	70
3.2.1 Расчеты для случая $\Omega_2 = 0, \Omega_1 = 20 \text{ об./сек.}$ и $T_1 = T_2 = T_{\text{газ}} = 293^\circ \text{K}$ ..	71
3.2.2 Влияние температура на структуру вихрей: фиксированное число Рейнольдса $Re=8 \cdot 10^4$ (т.е. $\Omega_1 = 20 \text{ об./сек.}$ , $\Omega_2 = 0$ ), $T_1 = T_{\text{газ}} = 293^\circ \text{K}$ , $T_2 = 400, 800, 1200, 1600, 2000, 2400^\circ \text{K}$ .....	72
3.2.3 Влияние числа Рейнольдса на структуру течения.....	73
Заключение .....	76
Приложение .....	77
Приложение 1: Физические характеристики модели I и CFX сетка в пункте 3.1.1 .....	77

Приложение 2: Физические характеристики модели I и CFХ сетка в пункте 3.1.2.....	80
Список литературы .....	82

## **ВВЕДЕНИЕ**

Исследованию течений несжимаемой жидкости посвящено много работ. В то же время с точки зрения технологических приложений и фундаментальной науки анализ течений сжимаемого газа имеет несомненный интерес. Обычно важным методом исследований являются численные методы анализа. Ранее был опубликован ряд статей, в которых представлены результаты решения уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа [108].

## **ГЛАВА 1: ОБЗОР СДЕЛАННЫХ РАБОТ О ТЕМЕ И ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКС - ПРОГРАММУ ANSYS CFD**

### **1. Обзор сделанных работ о теме**

Течением Тейлора-Куэтта называется течение между двумя концентрическими вращающимися цилиндрами. Эта проблема впервые экспериментально исследована Куэттом и Маллоком. Куэтт обнаружил, что момент, необходимый для вращения внешнего цилиндра, линейно возрастает с увеличением скорости вращения, которая меньше некоторой критической скорости, при превышении которой момент резко возрастает. Это изменение происходит по причине перехода от устойчивого к неустойчивому течению при критической скорости. Тейлор первым успешно применил линейную теорию устойчивости к этой задаче и получил замечательное соответствие между теорией и экспериментами. Новаторское исследование Тейлора рассматривается как классический пример изучения неустойчивости течения.

В последние годы проблема течения Тейлора-Куэтта, являясь важной задачей в теории устойчивости течения, снова вызывает интерес в связи с тем, что она поддается строгому математическому анализу в силу малых возмущений. Для объяснения устойчивости в случае невязкой жидкости, движущейся в концентрических слоях, Релей использовал изменение циркуляции в зависимости от радиуса, в то время как Карман использовал для интерпретации начала неустойчивости центробежную силу и градиент давления. Их целью было определить условие, для которого возмущение, появляющееся из-за положительного градиента углового момента, может быть неустойчивым. В классической статье Тейлора проведен математический анализ устойчивости для вязкого течения и его сравнение с результатами лабораторных наблюдений. Тейлор обнаружил, что для малого отношения длины промежутка между цилиндрами к их радиусу при данной

скорости вращения внешнего цилиндра притом, что скорость внутреннего цилиндра небольшая, течение остается ламинарным; когда скорость внутреннего цилиндра превышает критическое значение, возникает неустойчивость, и образуются ряды вихревых ячеек. Когда вращательная скорость увеличивается еще больше, ряды ячеек разбиваются, что приводит к возникновению турбулентной картины. Тейлор ввел параметр, который теперь известен как число Тейлора:

$$T = \text{Re}^2 \frac{h}{R_0}$$

(где  $h = R_2 - R_1$  : ширина зазора между внутренним цилиндром и наружным цилиндром,

$\text{Re}$ : число Рейнольдса,

$R_0$ : средний радиус внутреннего цилиндра и внешнего цилиндра,)

который характеризует это критическое условие для возникновения неустойчивости. Здесь  $\text{Re}$  – число Рейнольдса, рассчитанное по длине промежутка между цилиндрами и по скорости вращения внутреннего цилиндра, а  $R_0$  – средний радиус цилиндров.

Критическое значение числа Тейлора для первичной неустойчивости равно 1708 (получено из линейного анализа). Это значение хорошо согласуется с его экспериментами [1-3]. Для течения Тейлора-Куэтта Снайдер предложил полуэмпирическое уравнение для критического условия, полученное на основе экспериментальных данных. Эссер и Гроссман также предложили аналитическое уравнение для критического условия, но значение константы в уравнении должно быть определено с использованием линейной теории устойчивости [12].

Рэлей [30] получил условие устойчивости к осесимметричным возмущениям для вращающейся идеальной несжимаемой жидкости. Позднее было показано [31], что условие Рэля является необходимым и достаточным условием устойчивости к осесимметричным возмущениям для идеальной жидкости. Критические числа Рейнольдса, которые были теоретически рассчитаны Тейлором [34], оказались в прекрасном согласии (различие порядка нескольких процентов) с полученными им экспериментальными данными. В настоящее время существует аналитическая формула,

аппроксимирующая кривую устойчивости течения Куэтта для всего диапазона изменения параметров [35].

Способность теории с хорошей точностью воспроизводить экспериментальные результаты и сравнительная простота, как теоретических моделей, так и эксперимента предопределили высокий интерес к течению Тейлора-Куэтта как модельной задаче в теории гидродинамической и гидромагнитной устойчивости. Количество публикаций по этой проблеме выражается трёхзначным, если не четырёхзначным, числом. Многие результаты суммированы в монографиях и обзорах (см., например, [33, 36-39]). Каждые два года проходят международные конференции, посвящённые течению Тейлора-Куэтта. Последняя такая конференция (15-я по счёту) прошла во Франции [40] в 2007 г. Подчёркнём, что согласие теоретических и экспериментальных результатов, полученных в задаче об устойчивости течения Куэтта, подтверждает достоверность так называемой теории глобальной устойчивости, для которой существенно наличие граничных условий. Отметим, что результаты, полученные в рамках локального подхода, могут быть недостоверными (т.е. показывать неустойчивость для устойчивых ситуаций и наоборот) [41].

Кроме упоминания об успехах в изучении устойчивости течения Тейлора-Куэтта, необходимо указать и существующие проблемы. Так, течение Куэтта с покоящимся внутренним цилиндром и вращающимся внешним цилиндром должно быть согласно условию Рэлея устойчивым к осесимметричным возмущениям. Тем не менее, уже ранние эксперименты [28, 29] продемонстрировали потерю устойчивости при достаточно быстром вращении. В первоначальных экспериментах Тейлора [34] эта неустойчивость не была обнаружена. Однако дальнейшие эксперименты [42] подтвердили результаты Куэтта. Это расхождение между теорией и экспериментом до сих пор не нашло исчерпывающего объяснения. В настоящее время ситуация остается неоднозначной [43, 44]. В частности, неустойчивость течения, устойчивого с точки зрения линейной теории, может быть вызвана как нелинейными эффектами, так и неидеальностями самого эксперимента: несоосностью цилиндров, неидеальностью их поверхности, нестабильностью вращения и т.д. Устранение указанных неидеальностей устраняет и неустойчивость течения [44, 45]. При этом, чем больше числа Рейнольдса (скорость вращения цилиндров), тем выше требования к точности эксперимента для устранения этих неидеальных

неустойчивостей. В качестве неидеальности могут выступать и пограничные эффекты, вызванные, например, конечностью высоты цилиндров [46]. Ими можно пренебречь при малых числах Рейнольдса, но они представляют серьёзную проблему при числах Рейнольдса порядка  $10^5$  и более.

Хорошо известно (см., например, [47]), что вследствие неустойчивости чисто вращательное ламинарное одномерное течение Куэтта преобразуется в более сложное (но также устойчивое) трёхмерное течение, структура которого зависит от относительной скорости вращения цилиндров. На пути к развитой турбулентности течение Тейлора-Куэтта проходит через несколько таких устойчивых состояний со всё более сложной структурой, которые возникают с возрастанием числа Рейнольдса. Неустойчивость чисто вращательного течения Куэтта ввиду такого её поведения принято называть первичной неустойчивостью течения Тейлора-Куэтта.

Однако проблема течения Тейлора-Куэтта все еще далека от полного разрешения, несмотря на интенсивное изучение. Например, предельный случай, когда отношение длины промежутка между цилиндрами к радиусу стремится к нулю, должен согласовываться с плоским течением Куэтта. Здесь возможны два случая: или бесконечный радиус, или очень маленький промежуток. Поэтому критерий устойчивости должен учитывать этот факт. Можно обнаружить, что критерий Тейлора не работает в предельном случае, поскольку плоское течение Куэтта всегда устойчиво в связи с тем, что число Тейлора равно нулю по критерию Тейлора. Это может быть связано с тем, что критерий Тейлора учитывает только эффект центробежной силы и не включает кинематическую инерционную силу. Поэтому он считается подходящим для течений с малым числом Рейнольдса и большой кривизной. Для больших чисел Рейнольдса и малой кривизны течение может переходить к турбулентности быстрее и, тем не менее, не нарушать критерий Тейлора.

В недавней своей работе Доу [21,22] предложил новую теорию градиента энергии для анализа неустойчивости течения и перехода к турбулентности. В этой теории критическое условие для неустойчивости течения зависит от основного течения и возмущений, что согласуется с экспериментальными наблюдениями. Для данного возмущения критическое условие неустойчивости течения и перехода к турбулентности определяется отношением  $K$  – градиента полной механической энергии в поперечном направлении к потере полной механической энергии в продольном направлении. Для данной геометрии течения и данной жидкости, когда

максимум  $K$  в поле течения превышает критическое значение, предполагается возникновение неустойчивости для некоторых начальных возмущений при условии, что энергия возмущения достаточно высока. Для плоского течения Пуазейля (течение в канале), течения Хагена-Пуазейля (течение в трубе) и плоского течения Куэтта (простое сдвиговое течение) результаты этой теории согласуются с экспериментальными данными. Для экспериментально определенного критического условия  $K_c$  равно 370-389 для всех выше упомянутых типов течений, ниже которого турбулентность не возникает. Эта теория также предлагает механизм неустойчивости, связанный с профилем скорости с точкой перегиба для вязких течений. Теория также была использована для изучения вязкоупругих течений, где преобладает эффект упругой силы [25]. Следует отметить, что теория градиента энергии является полуэмпирической поскольку критическое значение числа  $K$  определяется экспериментально и пока не может быть рассчитано теоретически. В этой теории представляет интерес только критическое условие неустойчивости, а детали процесса неустойчивости не приводятся.

В работе Доу Х. С и др. [25] применяется теория градиента энергии для анализа течения Тейлора-Куэтта между концентрическими вращающимися цилиндрами с целью показать, что механизм неустойчивости теории Тейлора-Куэтта может получить объяснение на основе концепции градиента энергии. Путем сравнения с результатами экспериментов в работе показано, что функция градиента энергии  $K$  в качестве критерия устойчивости достаточна для описания неустойчивости течения Тейлора-Куэтта. Также показано, что плоское течение Куэтта может быть рассмотрено как предельный случай течения Тейлора-Куэтта, когда кривизна стенок стремится к нулю. Для течений между вращающимися концентрическими цилиндрами неустойчивость течения может быть вызвана вращением как внутреннего, так и внешнего цилиндра. В случае если она вызвана вращением внутреннего цилиндра, картина вихревых ячеек Тейлора появляется при нарушении критического условия, что согласуется с результатами экспериментов. Если неустойчивость вызвана движением внешнего цилиндра, картина вихревых ячеек Тейлора не возникает, и течение может напрямую перейти к турбулентности при достижении критического условия вследствие инерционной силы, как в случае плоского течения Куэтта. В этой работе рассмотрен только первый случай.

Доу в работе [21] предложил принцип, нацеленный на прояснение явления перехода от ламинарного к турбулентному состоянию для сдвиговых течений, ограниченных стенкой. Все течение рассматривается в нем как энергетическое поле. Предполагается, что градиент полной механической энергии в поперечном направлении основного течения и потери полной механической энергии из-за сил вязкости в продольном (по потоку) направлении оказывают решающее влияние на явления неустойчивости, а, следовательно, и ламинарно-турбулентный переход для данного возмущения. Предполагается, что градиент энергии в поперечном направлении усиливает возмущения скорости, в то время как потери за счет вязкости в продольном направлении могут поглощать возмущения. Неустойчивость течения или его переход к турбулентности зависит от относительной величины двух этих составляющих. В работе [22] был дан более детальный вывод, наиболее точно описывающий этот механизм, а теория была названа теорией градиента энергии.

Уравнение полной механической энергии для течения несжимаемой жидкости в пренебрежении гравитационными членами, записывается так:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla(p + \frac{1}{2} \rho u^2) = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u})$$

Для течений, вызванных градиентом давления, производные полной энергии в поперечном и продольном направлении, выражаются как:

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \frac{\partial(p + (1/2)\rho u^2)}{\partial n} = \rho(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{|d\mathbf{n}|} + (\mu \nabla^2 \mathbf{u}) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{|d\mathbf{n}|} = \rho u \omega + (\mu \nabla^2 \mathbf{u})_n$$

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \frac{\partial(p + (1/2)\rho u^2)}{\partial s} = \rho(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{s}|} + (\mu \nabla^2 \mathbf{u}) \cdot \frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{s}|} = (\mu \nabla^2 \mathbf{u})_s$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – завихренность. Поскольку в таких течениях отсутствует внешняя сила, величина потерь полной энергии единичного объема жидкости в продольном направлении равна производной полной энергии, т.е.

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\partial E}{\partial s}$$

Для сдвиговых течений справедливо уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\partial E}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial s},$$

где  $W$  – работа внешних сил на единицу объема.

Для данного основного параллельного течения жидкие частицы могут

совершать колебательное движение в продольном направлении, если они подвергаются возмущениям. Частица может получить энергию  $\Delta E$  от возмущения, и одновременно эта частица теряет энергию  $\Delta H$  в связи с действием вязкости в продольном направлении. Анализ в работах [22, 24] показал, что величины  $\Delta E$  и  $\Delta H$  определяет устойчивость течения жидких частиц.

Для параллельных течений относительная величина получаемой и теряемой энергий определяет степень нарастания или затухания возмущения. Таким образом, для данного течения критерий устойчивости может быть записан так для полупериода:

$$F = \frac{\partial E}{\partial H} = \left( \frac{\partial E}{\partial n} \frac{2A}{\pi} \right) : \left( \frac{\partial H}{\partial s} \frac{2\pi}{\omega_d} u \right) = \frac{2}{\pi^2} K \frac{\bar{A}\omega_d}{u} = \frac{2}{\pi^2} K \frac{v'_m}{u} < Const$$

$$K = \frac{\partial E / \partial n}{\partial H / \partial s} .$$

Здесь,  $F$ – функция от координат, выражающая отношение получаемой и теряемой энергий за полупериод.  $K$ – безразмерная функция, выражающая отношение поперечного градиента энергии к скорости потери энергии вдоль потока.

Распределение функции  $K$  в поле течения может быть хорошим средством для описания нарастания или затухания возмущений в потоке. В соответствии с данной теорией, можно указать, что первое возникновение неустойчивости происходит в точке  $K_{max}$ , для данного возмущения, которая рассматривается, как наиболее «опасная». Таким образом, для данного возмущения возникновение неустойчивости зависит от величины безразмерного параметра  $K$  и критического условия, которое определяется максимумом этого параметра. Для данного течения и геометрии, а также свойств жидкости, если максимальное значение  $K_{max}$  потоке превышает критическое значение  $K_c$ , предполагается, что может возникнуть неустойчивость для определённого начального возмущения. Параметр  $K$  является пропорциональным глобальному числу Рейнольдса [21]. Большая величина  $K$  приводит к росту возмущения и наоборот.

В работах [22, 24] показано, что развитие возмущений в потоке зависит

от условий среднего поля течения и граничных и начальных условий. Среднее поле характеризуется функцией градиента энергии  $K$ . Следовательно, устойчивость течения зависит от распределения  $K$  в потоке и начального возмущения, внесенного в поток. При режиме течения с большим значением  $K$ , течение более неустойчиво, чем режимы с низким  $K$ . Первый признак неустойчивости должен быть ассоциирован с максимальным  $K$  ( $K_{\max}$ ) в потоке для заданного возмущения. Другими словами, положение, где достигается максимальное значение  $K$ , является наиболее «опасным». Для заданного возмущения существует критическое значение  $K_{\max}$ , при котором течение становится неустойчивым. Напрямую определить это критическое значение  $K_c$  непросто теоретически по аналогии с параллельными течениями [21], поскольку, очевидно, этот процесс строго нелинеен, и стандартный инструментарий теории малых возмущений не применим. Тем не менее, оно может быть извлечено из эксперимента. Величина  $K_{\max}$ , при которой возникает неустойчивость, может быть взята в качестве критерия неустойчивости, и это значение записывается как  $K_c$ . Если выполняется условие  $K_{\max} > K_c$ , то течение становится неустойчивым.

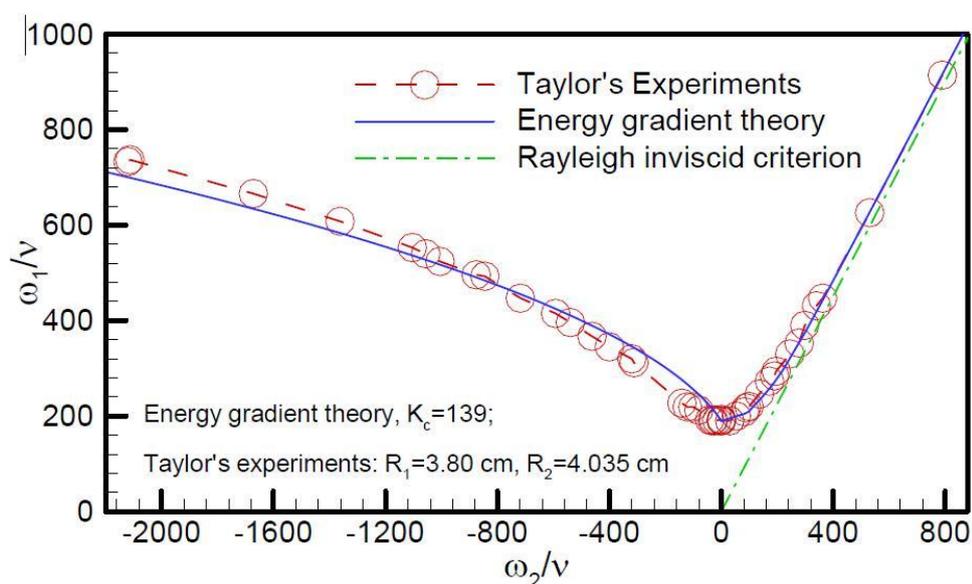
Таким образом, изучение распределения  $K$  в поле течения может помочь локализовать область, где течение склонно к неустойчивости. На рисунке 2,  $K$  возрастает с ростом  $u/h$  для данного  $h/R_2$  (при низких значениях  $h/R_2$ ), и его максимум достигается на внутреннем цилиндре. Таким образом, течение вблизи внешнего цилиндра наиболее устойчиво, а вблизи внутреннего наоборот. Следовательно, возмущения могут начать нарастать, если значение  $K$  достигнет критического значения для данной геометрии. Другими словами, внутренний цилиндр является возможной областью для появления первой неустойчивости, как и наблюдается в экспериментах [5,16].

Тейлор [5] использовал график  $\omega_1/\nu$  от  $\omega_2/\nu$  для представления влияния критического условия на первичную неустойчивость. Для сравнения результатов данной теории с экспериментами используется тот же тип графика.

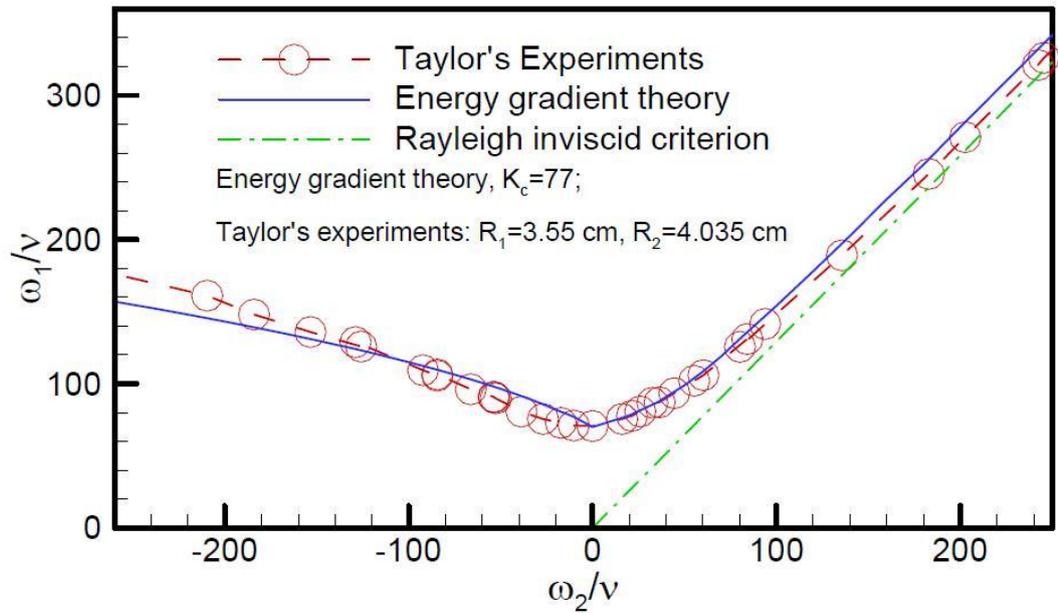
Критическое условие для данной геометрии выражается числом  $K_c$ :

$$K_c = \left( \frac{\omega_1}{\nu} \right)_c = \frac{\omega_2}{\nu} \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{2K_c}{R_2^2} \frac{\omega_1^*}{\omega_1} \frac{R_2^2}{r^4} \frac{(1-\lambda^*)^2(\eta^2-1)}{\left[ \frac{r}{R_1}(\eta^2-\lambda) - \frac{R_1}{r}(1-\lambda) \right] \left[ \frac{r}{R_1}(\eta^2-\lambda) - \frac{R_1}{r}(1-\lambda^*) \right]}$$

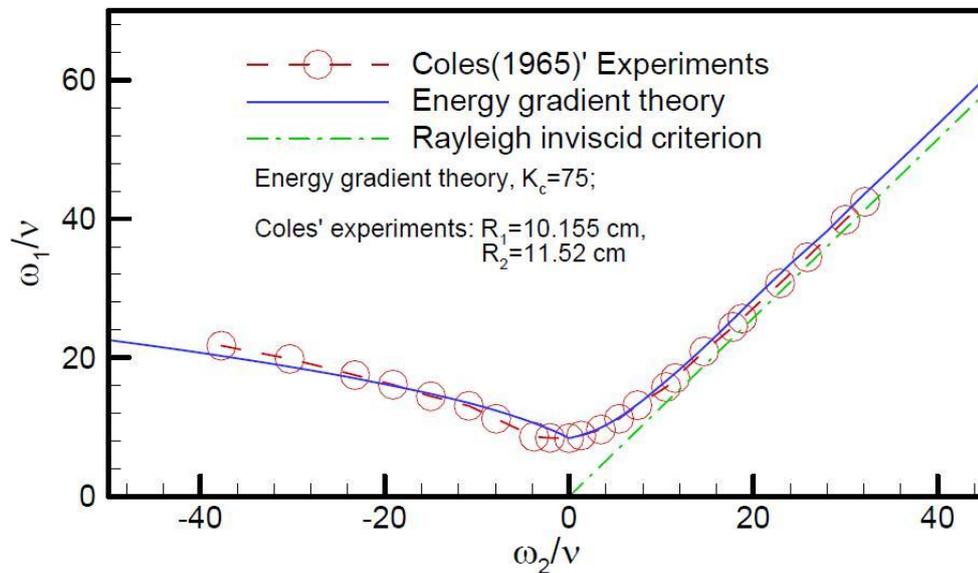
В этом уравнении  $K_c$  – является критическим значением величины  $K_{\max}$  в условии первичной неустойчивости, которое может быть определено из экспериментов. Для заданной геометрии течения,  $K_c$  рассматривается как величина, соответствующая началу неустойчивости. Если значение  $K_c$  определена, то значение  $\left(\frac{\omega_1}{\nu}\right)_c$  может быть вычислено итеративно для начального значения  $\lambda$  и заданного значения  $\omega_2/\nu$ . Результаты вычислений сравнивались с доступными результатами экспериментов [5][11][13][16], относящихся к условию первичной неустойчивости течения Тейлора-Куэтта. Рисунки 3 и 4 показывают сравнение теории с экспериментами Тейлора [5] для двух-параметрических условий, рисунки 5, 6 и 7 показывают сравнение теории с экспериментами Кола [13], экспериментами Снайдера [11], и экспериментами Андерека [16], соответственно.



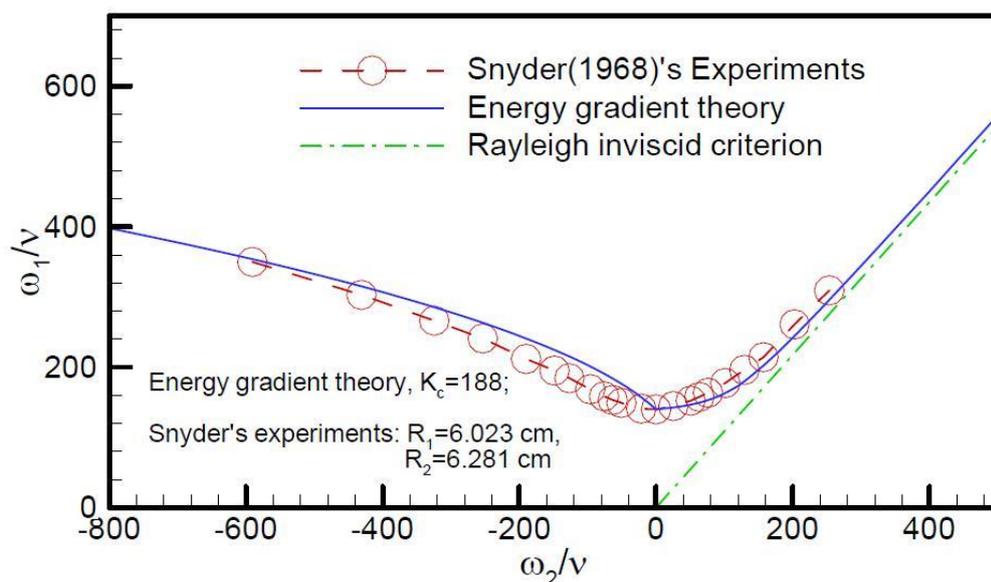
**Рис. 1.1.** Сравнение теории с экспериментальными данными для неустойчивости состояния эксперименты Тейлор-Куэтта,  $R_1 = 3,80$  см,  $R_2 = 4,035$  см). Относительная ширина зазора  $h / R_1 = 0,06184$ . (Результаты работы Доу Х.С. и др. [25])



**Рис. 1.2.** Сравнение теории с экспериментальными данными для неустойчивости состояния эксперименты Тейлор-Куэтта,  $R_1 = 3.55\text{см}$ ,  $R_2 = 4.035\text{см}$ ). Относительная ширина зазора  $h / R_1 = 0.1366$ . (Результаты работы Доу Х.С. и др. [25])



**Рис. 1.3.** Сравнение теории с экспериментальными данными для неустойчивости состояния эксперименты Тейлор-Куэтта,  $R_1 = 10.155\text{ см}$ ,  $R_2 = 11.52\text{ см}$ ). Относительная ширина зазора  $h / R_1 = 0.1343$ . (Результаты работы Доу Х.С. и др. [25])



**Рис. 1.4.** Сравнение теории с экспериментальными данными для неустойчивости состояния эксперименты Тейлор-Куэтта,  $R_1 = 6.023$  см,  $R_2 = 6.281$  см). Относительная ширина зазора  $h / R_1 = 0.0428$ . (Результаты работы Доу Х.С. и др. [25])

В работе Доу Х.С. и др. [25] проводили сравнение теории с экспериментальными данными для неустойчивости состояния эксперименты Тейлор-Куэтта. Из рисунков 1.1-1.4 можно видеть, что для вращающихся в одном направлении цилиндров теория дает хорошее совпадение со всеми экспериментальными данными. Если цилиндры вращаются в противоположных направлениях, теория дает хорошее согласие с экспериментальными данными для малого относительного промежутка между цилиндрами. Для больших значений промежутка теория отклоняется от экспериментальных зависимостей при увеличении отрицательной скорости вращения внешнего цилиндра. Причина этого объясняется следующим. Если промежуток между цилиндрами велик и цилиндры вращаются в противоположных направлениях, течение в промежутке более искривлено по сравнению с плоским течением Куэтта. Это искривление профиля скорости оказывает влияние на распределение потерь градиента энергии. С другой стороны, если скорость вращения внешнего цилиндра высока, слой течения вблизи внешнего цилиндра может раньше перейти напрямую к турбулентности, если возмущения велики. Это очевидно изменение профиля скорости повлияет на распределение функции градиента энергии  $K$  и максимального значения  $K$ .

В такой же работе Доу Х.С. и др. теория градиента энергии применяется к течению Тейлора-Куэтта между концентрическими вращающимися цилиндрами. Дан вывод функции  $K$  для этого течения, которая также связана с плоским течением Куэтта (в пределе бесконечного радиуса цилиндров). Теоретические результаты для критического условия оказываются в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Показано, что критическое значение  $K_{max}$  для первичной неустойчивости течения Тейлора-Куэтта постоянно для заданной геометрии, что подтверждается экспериментами. Следовательно, это может означать, что функция  $K$  является рациональным параметром для описания неустойчивости течения Тейлора-Куэтта.

Изолинии  $\omega_1/\nu$  в зависимости от  $\omega_2/\nu$  могут дать базовое физическое объяснение режимов течения, обнаруженных в экспериментах Андерека [16]. Все ограниченные стенками сдвиговые течения имеют схожий механизм образования неустойчивости, основанный на относительном преобладании градиента полной механической энергии и потерь полной энергии в потоке. Функция  $K$  оказывается полезной для соотнесения плоского течения Куэтта и течения Тейлора-Куэтта. Она имеет ясное физическое значение. В отличие от нее, число Тейлора не является подходящим критерием для предельного случая течения Тейлора-Куэтта.

В статье Д.А. Шалыбкова «Гидродинамическая и гидромагнитная устойчивость течения Куэтта» [26] рассмотрена устойчивость течения Куэтта в линейном приближении. Автор изучает условия возникновения неустойчивости и её свойства. Большое внимание уделяется случаям неоднородной плотности и наличию внешнего магнитного поля.

В начале статьи [26] дает краткий экскурс в историю вопроса, затем описывает существующие проблемы в теории изучения течения Куэтта. В основной части статьи автор достаточно глубоко рассматривает поведение неустойчивости течения Куэтта (или первичной неустойчивости течения Тейлора-Куэтта) под влиянием магнитного поля и стратификации плотности. Эти факторы были выбраны ввиду их чрезвычайной распространённости как в лабораторных, так и в естественных условиях. Все выводы ограничены лишь линейным приближением, так как оно дает хорошее согласие с экспериментальными данными.

Одной из классических проблем гидродинамической и гидромагнитной устойчивости является задача об устойчивости течения между

вращающимися соосными цилиндрами – течение Тейлора-Куэтта. Ламинарное течение в данном случае именуется течением Куэтта, первые попытки описать его с точки зрения гидродинамики были совершены еще в XIX веке.

Необходимое и достаточное условие устойчивости к осесимметричным возмущениям для вращающейся идеальной несжимаемой жидкости были получены Релеем. Согласно этому условию, течение теряет устойчивость, только если угловая скорость вращения (или число Рейнольдса) превышает некоторое критическое значение. Вязкость при этом стабилизирует течение, и для неидеальной жидкости данное условие является лишь достаточным. В настоящее время существует аналитическая формула для аппроксимации течения Куэтта для всего диапазона изменения параметров. Критические числа Рейнольдса, теоретически рассчитанные Тейлором, для данных условий достаточно хорошо согласуются с экспериментом.

Проблема описания течения Тейлора-Куэтта описывается в огромном количестве публикаций. Большой интерес к нему обусловлен способностью теории с достаточной точностью воспроизводить экспериментальные результаты. Согласие результатов теории и эксперимента в задаче об устойчивости течения Куэтта подтверждает справедливость теории глобальной устойчивости, в которой существенно наличие граничных условий. Автор отмечает, что при локальном подходе, результаты могут оказаться недостоверными (например, показывать устойчивость при неустойчивой ситуации).

Автор [26] указывает на существующие проблемы. В частности, течение Куэтта с покоящимся внутренним цилиндром и вращающимся внешним, согласно условию Релея, должно быть устойчивым к осесимметричным возмущениям. Однако, как показывает эксперимент, при достаточно быстром вращении течение теряет устойчивость, хотя в первоначальных экспериментах Тейлора, это не было обнаружено. Данное расхождение между экспериментом и теорией до сих пор не получило полного обоснования. Так, устойчивое с точки зрения линейной теории течение, может быть неустойчиво при проведении эксперимента. Такая неустойчивость вполне может быть обусловлена нелинейными эффектами или неидеальностью проведения самого эксперимента – ведь при увеличении скорости вращения требования к точности возрастают.

В работе [26] автор приводит общие уравнения, описывающие поведение системы и определяющие ее стационарное состояние.

Устойчивость этого стационарного состояния описывается в виде уравнений, которые удастся решить численными методами. Для идеальной жидкости удастся получить результаты аналитически.

Несжимаемая жидкость с однородной плотностью  $\rho$  и динамической вязкостью  $\mu$  между двумя соосными цилиндрами описывается уравнениями:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U} + \mathbf{g},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0,$$

где  $P$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\mathbf{U}$  – вектор скорости жидкости,  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения внешних сил. В первом уравнении автор пренебрегает влиянием объемной вязкости. В силу симметрии задачи, в качестве системы координат разумно выбрать цилиндрическую  $(R, \varphi, z)$ . Тогда, в общем случае в этой системе координат система допускает решения вида

$$\mathbf{U} = (0, R\Omega(R), 0), P = P(R), \rho = \rho_0 = \text{const}.$$

В случае вязкой жидкости азимутальная компонента уравнения сохранения импульса фиксирует вид функции  $\Omega(R)$ :

$$U_\varphi(R) = R\Omega = a_\Omega R + \frac{b_\Omega}{R},$$

где коэффициенты  $a_\Omega$  и  $b_\Omega$  определяются из граничных условий.

Таким образом, функция угловой скорости фиксирована, и ее значения определяются константами, зависящими от граничных условий, которые фиксируются геометрией задачи. Автор также отмечает существование общего решения для цилиндров с конечной длиной.

В своей работе [26] автор ограничивается решением задачи для линейного приближения и рассматривает линейную устойчивость к бесконечно малым возмущениям. Возмущенное решение при этом представляется в виде

$$u_R(R, \varphi, z), R\Omega(R) + u_\varphi(R, \varphi, z),$$

$$u_z(R, \varphi, z), P(R) + p(R, \varphi, z),$$

где  $u_R, u_\varphi, u_z, p$  малы по сравнению с невозмущенными величинами.

Автор ставит задачу исследования неустойчивости линеаризованной системы с учетом граничных условий. Безразмерным числом задачи является число Рейнольдса  $Re = \frac{\Omega_{in} R_0^2}{\nu}$ , а параметрами –  $\frac{R_{in}}{R_{out}}, \frac{\Omega_{out}}{\Omega_{in}}, m, k, \omega$ .

В ходе математических выкладок становится ясно, что на коэффициенты линеаризованной системы оказывает влияние лишь радиальная компонента, поэтому, ее решение можно представить в виде суммы нормальных мод вида

$$f = f(R) \exp [i(m\varphi + kz + \omega t)],$$

где  $f$  в данном случае представляет собой искомую произвольную переменную. Это позволяет свести трехмерную задачу к одномерной. Из геометрии нетрудно понять, что азимутальное число  $m$  – целое, аксиальное волновое число  $k$  может принимать любые вещественные значения, а инкремент  $\omega$  – произвольное комплексное число.

В случае осесимметричных возмущений и идеальной жидкости, когда  $m = 0, v = 0$  система сводится к одному уравнению второго порядка:

$$-\frac{d}{dR} \left[ \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R u_R) \right] + k^2 u_R - \frac{k^2}{\omega^2} \frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega)^2 u_R = 0.$$

Данное уравнение примечательно тем, что из него можно легко получить необходимое и достаточное условие устойчивости вращающейся жидкости. Для этого можно, например, воспользоваться результатами теории Штурма-Лиувилля. Течение устойчиво тогда и только тогда, когда для любой точки рассматриваемого интервала выполнено неравенство (условие Рэлея)

$$\frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega)^2 > 0.$$

Для течения Куэтта это условие принимает вид

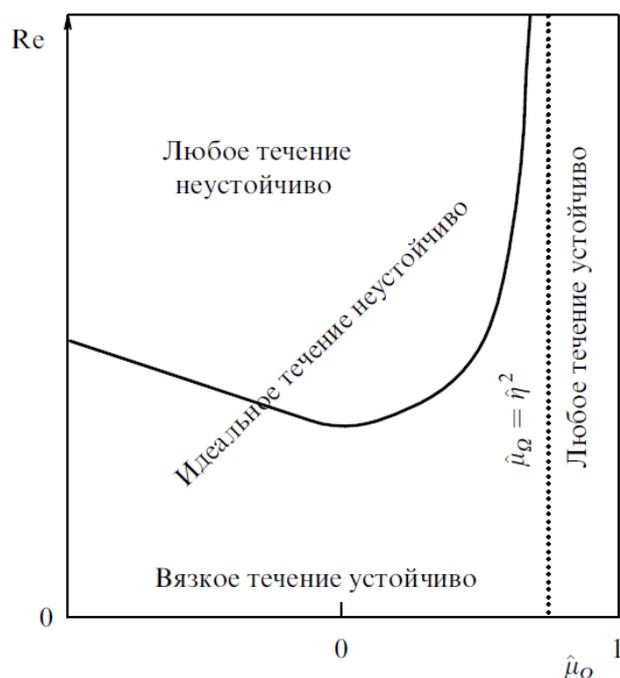
$$\frac{\Omega_{out}}{\Omega_{in}} > \left( \frac{R_{in}}{R_{out}} \right)^2,$$

где  $R_{in}, R_{out}$  – соответствующие радиусы цилиндров,  $\Omega_{in}, \Omega_{out}$  – угловые скорости.

Иными словами, идеальное течение Куэтта устойчиво к осесимметричным возмущениям, если угловой момент возрастает с увеличением радиуса. Если существуют точки, в которых он убывает, то течение является неустойчивым к осесимметричным возмущениям.

В неидеальном случае ситуация намного сложнее. После перехода к безразмерным величинам, задача сводится к системе уравнений, которую удастся решить лишь численными. Автор приводит несколько источники, в которых предлагаются различные методы решения. Наиболее предпочтительным автор считает метод конечных разностей.

Типичная кривая нейтральной устойчивости для неидеального течения Куэтта схематично представлена на **рис. 1.5**.



**Рис. 1.5.** Типичная кривая нейтральной устойчивости неидеального течения Куэтта (сплошная кривая) при фиксированном  $\hat{\eta}$ . Вязкое течение неустойчиво в области над кривой и устойчиво в области под кривой. Пунктирной прямой показана предельная линия Рэлея. (Результаты работы Д.А. Шалыбкова [26])

Как видно из рисунка, минимальные числа Рейнольдса наблюдаются при покоящемся внешнем цилиндре. Вдоль кривой меняются не только числа Рейнольдса, но и остальные параметры  $(k, m, \text{Re } \omega)$ . Для цилиндров, вращающихся в одном направлении, осесимметричная мода всегда наиболее устойчива. Моды с  $m > 0$  становятся наиболее неустойчивыми только для цилиндров, вращающихся в разные стороны. Асимметричная неустойчивость является осциллирующей ( $\text{Re } \omega \neq 0$ ).

Стратификация плотности рассматривается автором в двух вариантах: в случае радиальной стратификации и в случае осевой.

Случай с радиальной стратификацией плотности сводится к рассмотрению системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U} + \mathbf{g},$$

$$\text{div}\mathbf{U} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\rho = 0.$$

Решение описывается в аналогичном виде, только плотность теперь является функцией радиуса:

$$\mathbf{U} = (0, R\Omega(R), 0), P = P(R), \rho = \rho_0(R) + \rho(R, \varphi, z).$$

После линеаризации и несложных математических преобразований система уравнений для идеальной жидкости сводится к одному уравнению:

$$-\frac{d}{dR} \left[ \frac{\rho_0}{R} \frac{d}{dR} (R u_R) \right] + k^2 u_R - \frac{k^2}{\omega^2} \rho_0 [\kappa^2 + N_R^2] u_R = 0,$$

где

$$\kappa^2 = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega)^2, N_R^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dR} (\Omega^2 R + g_R),$$

$\kappa$  – эпициклическая частота,  $N_R$  – частота плавучести Брента-Вяйсяля.

Совместно с граничными условиями уравнение для идеальной жидкости удовлетворяет классической задаче Штурма-Лиувилля. Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием устойчивости осесимметричным возмущениям идеального несжимаемого течения Куэтта с радиальной стратификацией плотности является неравенство  $\kappa^2 + N_R^2 > 0$ . Устойчивая стратификация плотности стабилизирует идеальное течение.

В случае осевой стратификации плотности уравнение становится еще сложнее. Предположение о том, что решение имеет вид  $\mathbf{U} = (0, R\Omega(R), 0)$ , приводит к противоречию, в связи с этим рассматривается более сложный функциональный вид плотности и угловой скорости.

Функциональный вид  $\Omega = \Omega(R)$ , естественно не зависит от координаты  $z$ , в то время как плотность от нее уже зависит:  $\rho = \rho(R, z)$ . Задача сводится к двумерной.

После линеаризации уравнений для обезразмеривания вводятся число Рейнольдса и число Фруда:

$$Re = \frac{\Omega_{in} R_0^2}{\nu}, Fr = \frac{\Omega_{in}}{N_z},$$

где  $N_z^2 = \frac{g_z}{\rho_0} \frac{d\rho_1}{dz}$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho_1(z) + \rho_2(R, z) + \dots$ ,  $|\rho_1| \ll \rho_0, |\rho_2| \ll |\rho_1|$ .

Условие устойчивости к осесимметричным возмущениям вращающейся жидкости с осевым градиентом плотности имеет вид

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega)^2 + N_z^2 > 0,$$

что для однородной жидкости переходит в условие Рэлея, а для невращающейся жидкости в условие Рэлея-Тэйлора.

Однако эксперимент показывает наличие новой неустойчивости за чертой Рэлея, хотя по неясной причине она не получила должного внимания в литературе.

Только в 2001 году линейный анализ устойчивости для идеального течения Куэтта продемонстрировал, что достаточным условием неустойчивости к ассиметричным возмущениям будет уменьшение величины угловой скорости с возрастанием радиуса:

$$\frac{d\Omega^2}{dR} < 0,$$

что сдвигало границу неустойчивости за черту Рэлея.

Действие внешнего магнитного рассмотрено в статье [26] достаточно подробно. Исследуется влияние однородного осевого магнитного поля, азимутального магнитного поля, а также их совместное влияние (винтовое магнитное поле).

В общем случае, динамика жидкости в магнитном поле описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0,$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \operatorname{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta\Delta\mathbf{B},$$

где  $\mathbf{j}$  – плотность электрического тока,  $\mathbf{E}$  – электрическое поле,  $\mathbf{B}$  – магнитное поле,  $c$  – скорость света,  $\eta$  – коэффициент магнитной диффузии. Предполагается, что  $\eta$  – однородно и  $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ .

Аналогично, данную систему удобнее рассматривать в цилиндрической системе координат. Далее автор статьи рассматривает различные варианты действия магнитных полей. Кратко приведем основные результаты.

Для случая однородного осевого магнитного поля показано, что магнитное поле дестабилизирует течение Куэтта. Условие устойчивости к осесимметричным возмущениям идеального течения имеет вид

$$\frac{d\Omega^2}{dR} < 0.$$

При наличии азимутального магнитного поля необходимое и достаточное условие устойчивости вращающейся идеальной жидкости к осесимметричным возмущениям принимает более сложный вид:

$$\frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega)^2 + \frac{R}{4\pi\rho_0} \frac{d}{dR} \left( \frac{B_\varphi}{R} \right)^2 > 0.$$

Автор также уделяет некоторое внимание на неустойчивость в случае совместного влияния магнитного поля и стратификации плотности.

Таким образом, в статье [26] достаточно глубоко рассматривается влияние магнитного поля и различной плотности жидкости на неустойчивость течения Куэтта. Кратко изложим основные выводы, полученные автором.

Течение при наличии магнитного поля также рассмотрено в работе [26]. Если магнитное поле при учёте диссипативных процессов успеваеt продиффундировать из возмущённого объёма (или распасться в нём) за время развития неустойчивости, то оно не будет влиять на развитие неустойчивости. Учитывая, что время распада магнитного поля обратно пропорционально коэффициенту магнитной диффузии, а время развития неустойчивости обратно пропорционально кинематической вязкости  $\nu$ , то магнитовращательной неустойчивостью (МВН) должна зависеть от магнитного числа Прандтля  $Pm$ . При малых  $Pm$  магнитное поле не успеваеt продиффундировать из возмущённого объёма только при быстром вращении (большие числа Рейнольдса) и МВН может проявляться только для больших чисел Рейнольдса. В целом, чем выше магнитное число Прандтля, тем для меньших чисел Рейнольдса должна проявляться МВН. Следует отметить, что в экспериментах по замагниченному течению Куэтта [51-54] используются жидкие металлы, которые имеют очень малые  $Pm$  (порядка  $10^{-5}$  и менее) и, действительно, МВН до сих пор не наблюдалась экспериментально. Результаты работы [55] по утверждению её авторов демонстрируют МВН для сферической геометрии. Однако исходное состояние течения (в отсутствие магнитного поля) было уже неустойчивым (турбулентным), и, следовательно, наблюдаемая неустойчивость не является начальной неустойчивостью течения. Это обстоятельство не позволяет отождествлять наблюдаемую неустойчивость с МВН. Скорее можно говорить о неустойчивости магнитного поля под действием турбулентного течения.

Расчёты Чандрасекара для неидеальной жидкости [33], выполненные в пределе малого  $Pm$  для гидродинамически неустойчивого течения, продемонстрировали, в согласии с экспериментом, что магнитное поле только стабилизирует течение. Дальнейшие расчёты [56-59], выполненные в том же приближении малого  $Pm$ , подтвердили стабилизирующее влияние магнитного поля. На этом фоне остались незамеченными расчёты [60],

которые продемонстрировали наличие МВН и для гидродинамически неустойчивого течения при  $Rm \sim 1$ .

В работе [61] показано, что для гидродинамически неустойчивых течений в приближении малого  $Rm$  и узкого зазора магнитовращательная неустойчивость действительно исчезает. Численные расчёты [62] обобщили этот результат для произвольного зазора между цилиндрами. Расчёты [62] показали, что значение  $Rm = 0,25$  является минимальным, при котором ещё наблюдается магнитовращательная неустойчивость.

Достаточно неожиданным представляется то, что вопрос об устойчивости течения Куэтта при наличии азимутального магнитного поля не привлёк широкого внимания. Кроме того, до недавнего времени существовала только одна теоретическая работа для реального диссипативного течения Куэтта [70], в которой было рассмотрено бестоковое магнитное поле. Поскольку рассмотренное  $Ad$  принадлежит интервалу (120), то неудивительно, что в работе [70] была получена только стабилизация течения азимутальным магнитным полем.

Недавно [71, 72] были выполнены теоретические расчёты устойчивости неидеального течения Куэтта к осесимметричным возмущениям при наличии азимутального магнитного поля для произвольных  $Ad$  и как для проводящих, так и для непроводящих граничных условий. Для простоты авторы ограничились изучением монотонных осесимметричных возмущений, которые, как правило, наиболее неустойчивы. Результаты [71,72] продемонстрировали, что устойчивость диссипативного течения Куэтта к осесимметричным возмущениям согласуется с идеальным критерием (119). При этом диссипативные процессы стабилизируют течение и возникают два критических числа: критическое число Рейнольдса и критическое число Гартмана. В общем случае течение, имеющее и неустойчивое вращение, и неустойчивое магнитное поле, устойчиво только при числах Рейнольдса и Гартмана меньших критических. При этом критическое число Рейнольдса максимально в отсутствие магнитного поля и спадает до нуля при некотором конечном числе Гартмана. В свою очередь, критическое число Гартмана максимально в отсутствие вращения и спадает до нуля при некотором конечном числе Рейнольдса. Таким образом, комбинация неустойчивого вращения и неустойчивого магнитного поля в общем случае усиливает неустойчивость течения Куэтта.

Тейлор [34] предположил, что течение теряет устойчивость при числе Рейнольдса, соответствующем минимальному числу Рейнольдса для нейтральных областей при всех возможных значениях параметров (далее эти минимальные числа будем называть критическими числами Рейнольдса). Отметим, что в рамках этого подхода мы ничего не можем сказать о величине инкремента неустойчивости (мнимая часть инкремента, как сказано выше, принимается равной нулю). Инкремент неустойчивости можно рассчитать только в рамках нелинейного подхода. Это свойство существенно отличает теорию линейной устойчивости для идеальной жидкости от теории линейной устойчивости неидеальной жидкости. В идеальной жидкости мы, наоборот, можем рассчитать инкремент неустойчивости, но не можем найти число Рейнольдса.

Классическое идеальное течение Куэтта устойчиво к осесимметричным возмущениям, если величины углового момента возрастает с увеличением расстояния. Общий критерий для асимметричных возмущений до сих пор установлен не был. Теория и эксперимент показывают, что для цилиндров, вращающихся в одном направлении, наиболее неустойчива осесимметричная мода. Эта неустойчивость является монотонной и называется вращательной неустойчивостью. Вязкость ее стабилизирует, и неидеальное течение Куэтта, которое неустойчиво согласно условию Рэлея, реально теряет устойчивость только при достаточно быстром вращении (когда число Рейнольдса очень велико). Для вращательной устойчивости наблюдается хорошее согласие между теорией и экспериментом.

Устойчивая вертикальная стратификация плотности стабилизирует осесимметричную моду, но дестабилизирует асимметричные моды, которые становятся более неустойчивыми даже для цилиндров, вращающихся в одном направлении. Наиболее неустойчивой в данном случае является мода с  $m = 1$ , а неустойчивость перестает быть монотонной, становясь осциллирующей. Более того, эта неустойчивость дестабилизирует течение даже за чертой Рэлея. Предел распространения такой «стратовращательной» неустойчивости находится между пределом Рэлея и пределом классической магнитовращательной неустойчивости. Его величина сильно зависит от величины расстояния между цилиндрами – чем больше расстояние, тем меньше этот предел.

Однородное осевое магнитное поле дестабилизирует течение Куэтта. Эта неустойчивость называется магнитовращательной неустойчивостью. Она проявляется для течений как неустойчивых, так и устойчивых в отсутствие

магнитного поля. Для неустойчивых в отсутствие магнитного поля течений критические числа Рейнольдса могут уменьшаться при наличии поля. Однако это свойство сильно зависит от магнитного числа Прантдаля и проявляется, только если  $Rm \sim 1$ . Основным проявлением магнитовращательной неустойчивости является дестабилизация течений с угловой скоростью, убывающей с возрастанием радиуса, а также изменение критерия устойчивости. Сильная зависимость критических чисел от магнитного числа Прантдаля приводит к определенным трудностям при проведении экспериментов. Поэтому, магнитовращательная неустойчивость до сих пор не наблюдалась экспериментально.

Отметим результаты Лонгаретти [89], который для сжимаемой жидкости получил критерий устойчивости отличный от критерия Сайдама.

Что касается собственно течения Куэтта, то недавно было показано, что добавление бестокового азимутального магнитного поля (устойчивого самого по себе) к постоянному осевому магнитному полю дестабилизирует течение Куэтта по отношению к осесимметричным возмущениям [90, 91]. При наличии осевого магнитного поля течение Куэтта становится неустойчивым за линией Рэлея, но критические числа Рейнольдса очень велики при малых магнитных числах Прандтля типичных для экспериментов с жидкими металлами (см. раздел 4.1). Оказывается [90, 91], что добавление к осевому магнитному полю бестокового азимутального магнитного поля существенно понижает величину критических чисел Рейнольдса (от  $\sim 10^6$  до  $\sim 10^4$ ).

Магнитное поле с учётом холловских токов тоже рассмотрено в работе [26]. В работе [92] было рассмотрено влияние холловских токов на устойчивость течения Куэтта при наличии вертикального однородного магнитного поля. Без учёта холловских токов направление магнитного поля не имеет значения, важна только его величина. Холловские токи приводят к тому, что устойчивость течения зависит как от величины магнитного поля, так и от его направления. Более того, при наличии эффекта Холла течение Куэтта с однородным аксиальным магнитным полем неустойчиво для любого закона вращения (критические числа Рейнольдса существуют для любого  $D_0$ ). Впервые дестабилизация вращения с возрастающей угловой скоростью под действием эффекта Холла была получена для аккреционных дисков [93]. Течения устойчивые даже для МВН ( $\bar{\mu} > 1$ ) дестабилизируются магнитным полем с направлением противоположным направлению вращения (при

положительном знаке холловского сопротивления). Эффект Холла также дестабилизирует течения, которые были неустойчивы и без его учёта, например течение с покоящимся внешним цилиндром. При этом критические числа Рейнольдса существенно уменьшаются. Тем не менее, оценки величины магнитного поля, при котором можно наблюдать холловскую магнитовращательную неустойчивость (ХМВН) при экспериментах с жидкими металлами, приводят к слишком большим значениям магнитных полей ( $\sim 10^7$  Гс), что создаёт серьёзные препятствия для проведения соответствующих экспериментов. Однако ХМВН может оказаться важной для астрофизических приложений (особенно для слабоионизованных аккреционных дисков [93-96]). Подчеркнём, тем не менее, что развитие ХМВН даже в астрофизических объектах требует достаточно больших магнитных полей [92, 97].

В работе [98] было показано, что эффект Холла может оказывать существенное влияние также и на пинчевую неустойчивость азимутального магнитного поля. Отметим, что следствием этого эффекта может быть различная напряжённость азимутального магнитного поля в различных полушариях нейтронной звезды. Кроме того, результаты расчётов [98] показали, что под действием эффекта Холла АМВН распространяется на произвольные законы вращения, аналогично МВН. Тем не менее, лабораторному наблюдению всех этих эффектов по-прежнему препятствует большая напряжённость магнитного поля, при которой они могут проявляться.

В отличие от осевого, азимутальное магнитное поле усложняет проблему тем, что может быть неустойчивым само по себе (без вращения). Это так называемая пинчевая неустойчивость. Комбинация вращения и азимутального магнитного поля создает сложную картину взаимодействия вращательной и пинчевой неустойчивостей. В зависимости от параметров наиболее неустойчивой является либо мода с  $m = 0$ , либо мода с  $m = 1$ . Автор отмечает два интересных факта, касающихся этого случая. Во-первых, комбинация неустойчивое вращение и неустойчивое магнитное поле могут в результате давать устойчивое течение (компенсация неустойчивостей). Во-вторых, комбинация устойчивого вращения и устойчивого магнитного поля, может дать неустойчивое течение (азимутальная магнитовращательная неустойчивость). Свойства такой неустойчивости почти такие же, как и

простой магнитовращательной неустойчивости (включая пределы распространения), кроме того она является асимметричной.

В случае винтового магнитного поля ситуация еще более сложная. Единственный результат, который следует упомянуть, - это существенное уменьшение критических чисел Рейнольдса при совместном действии однородного магнитного поля и бестокового азимутального магнитного поля (которое само по себе устойчиво).

В работе [76] исследовалась устойчивость течения Куэтта с азимутальным магнитным полем к асимметричным возмущениям. Результаты расчётов показали, что магнитные поля, как и для осесимметричных возмущений, делятся на устойчивые и неустойчивые к асимметричным возмущениям в соответствии с идеальным критерием. Соответственно будем называть магнитное поле устойчивым к асимметричным возмущениям, если  $Ad$  принадлежит интервалу (123), и неустойчивым в противоположном случае. По-прежнему неустойчивое магнитное поле теряет устойчивость в диссипативной жидкости только тогда, когда число Гартмана превышает некоторое критическое значение  $Ha_1$ .

К сожалению, как говорилось выше, для вращения критерий, позволяющий классифицировать вращение как устойчивое или как неустойчивое к асимметричным возмущениям, до сих пор не получен. Тем не менее, мы всегда можем определить устойчивость течения с помощью прямого численного расчёта. По-прежнему вязкость стабилизирует течение и существует критическое число Рейнольдса  $Re_1$ , при превышении которого неустойчивое течение реально теряет устойчивость. Очевидно, что критические числа Гартмана тем выше, чем ближе к интервалу устойчивости (123) лежит  $\mu_\beta$ . Критические числа Рейнольдса для асимметричных, возмущений, в отличие от таковых для осесимметричных зависят от  $Rm$ . Тем не менее, критические числа Гартмана лишь слабо зависят от  $Rm$  для непроводящих граничных условий и не зависят от  $Rm$  для проводящих граничных условий. Подчеркнём, что в расчётах критические числа Гартмана были найдены только для двух мод:  $m=0$  или  $m=1$  [76].

В работе [115], как уже говорилось раньше, для течения Куэтта в отсутствие магнитного поля неустойчивость для цилиндров, вращающихся в одну сторону, является осесимметричной и становится асимметричной только для цилиндров, вращающихся в противоположные стороны. Однако для

азимутального магнитного поля интервал устойчивости по отношению к асимметричным возмущениям (123) уже, чем интервал устойчивости по отношению к осесимметричным возмущениям (120). Таким образом, с возрастанием  $Ad$  магнитное поле теряет устойчивость сначала по отношению к моде  $m=1$  (существует только одно критическое число Гартмана  $Ha_0$ ). По мере дальнейшего возрастания  $\mu_\beta$  дестабилизируется также и осесимметричная мода (возникает второе критическое число Гартмана  $Ha_0$ ). При наличии вращения ситуация становится более сложной и единственное, что можно утверждать, это то, что неустойчивость будет иметь моду  $m=0$  или  $m=1$ . Какая из мод наиболее неустойчива, сильно зависит от параметров (мода, например, может изменяться с изменением величины магнитного поля). Таким образом, трудно найти критерий, позволяющий ответить на этот вопрос без проведения прямого численного расчёта [76].

Для асимметричных возмущений различные комбинации устойчивых и неустойчивых вращения и магнитного поля ведут себя, как правило, аналогично случаю осесимметричных возмущений. Например, устойчивое магнитное поле стабилизирует течение Куэтта и критические числа Рейнольдса (если они существуют) возрастают с увеличением напряжённости магнитного поля.

Существует, однако, важное различие между осесимметричными и асимметричными возмущениями. Это различие проявляется при рассмотрении комбинации устойчивого вращения и устойчивого магнитного поля. Течение с устойчивыми к осесимметричным возмущениям вращением и магнитным полем остаётся устойчивым. Однако течение с устойчивыми к асимметричным возмущениям вращением и азимутальным магнитным полем может быть неустойчивым. Эта неустойчивость, аналогичная МВН для однородного осевого поля, впервые была описана, по-видимому, в работе [77], хотя авторы и не отождествили эту неустойчивость как комбинированную неустойчивость для двух устойчивых компонент. Будем называть эту неустойчивость азимутальной магнитовращательной неустойчивостью (АМВН).

Кривая нейтральной устойчивости для АМВН впервые рассчитана в работе [78] (см. также [45, 79]). Основное отличие АМВН от МВН заключается в наличии минимального числа Гартмана, при котором неустойчивость существует. При МВН левая ветвь асимптотически стремится к оси ординат, но не пересекает её. Для АМВН левая ветвь

выходит на асимптотику, наклонную к оси ординат. В результате для каждого числа Гартмана, большего некоторого критического значения, существует два числа Рейнольдса: минимальное и максимальное, между которыми течение неустойчиво.

К сожалению, детальный анализ устойчивости течения Куэтта при наличии винтового магнитного поля до сих пор не проведён. Для исследования устойчивости самого магнитного поля часто используют так называемый энергетический принцип [80]. Этот принцип обобщён для случая, в котором присутствует стационарное течение, в работе [81]. Тем не менее, результаты работ [80, 81] носят слишком общий характер и не позволяют получить простых условий устойчивости. Говоря об устойчивости самого винтового магнитного поля, прежде всего, следует упомянуть работы [82, 83]. К сожалению, наиболее интересное необходимое и достаточное условие зависит от нулей решения уравнения Эйлера - Лагранжа (уравнения второго порядка аналогичного уравнению (25), но при наличии винтового магнитного поля), которые в общем случае неизвестны (хотя и могут быть найдены в конкретных случаях), и, следовательно, практически трудно применимо. Отметим, что и достаточное, и необходимое условия были обобщены для случая присутствия радиальной силы [74]. Для осесимметричных возмущений в несжимаемой жидкости достаточное условие устойчивости обобщено для случая вращающейся жидкости Ховардом и Гуптой [26]. Необходимое условие устойчивости в отсутствие вращения было получено Сайдамом [84], оно применимо для конфигураций винтового магнитного поля, в которых имеется критическая точка  $mB_\phi - kB_z = 0$

В работе [85] условие Сайдама обобщено для случая, при котором в жидкости присутствует течение (см. также [86]).

Как отмечает автор [26], теоретически более перспективным с точки зрения научных исследований неустойчивости является эффект Холла. Расчеты для однородного магнитного поля показали, что в результате этого эффекта происходит дестабилизация течения с любым законом вращения. Основным препятствием для проявления этого эффекта в лабораторных и природных условиях является необходимость наличия слишком большого по напряженности магнитного поля.

Изучение устойчивости течения Куэтта при одновременном действии неоднородной плотности магнитного поля находится еще в самом начале. Однако уже первые результаты продемонстрировали чрезвычайно сложную картину взаимодействия различных неустойчивостей.

В работе [113], представлены результаты численного моделирования развития регулярных вихревых возмущений в пограничном слое над вогнутой поверхностью. Пограничный слой формируется на внутренней поверхности внешнего цилиндра после его остановки в круговом течении Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами. Показано, что при введении в поток регулярных вихревых возмущений, которые представляют собой систему продольных вихрей типа вихрей Гертлера, вначале наблюдается заметное падение энергии возмущений, связанное с их приспособлением к особенностям потока. Падение энергии возмущений тем больше, чем больше энергия начальных возмущений. С течением времени по мере развития вихревых возмущений их энергия растет, и становятся важными нелинейные эффекты, причем при большей начальной энергии возмущений влияние нелинейных эффектов проявляется раньше. Влияние последних приводит к отклонению кривых роста энергии от экспоненциального закона. В этой работе было показано, что: 1) При введении в поток регулярных вихревых возмущений, которые представляют собой систему продольных вихрей типа вихрей Гертлера, вначале наблюдается заметное падение энергии вихревых возмущений, связанное с их приспособлением к особенностям потока. Продолжительность начальной стадии зависит от соотношения между расстоянием от места ввода возмущений до стенки и толщиной пограничного слоя. В случае, когда толщина пограничного слоя мала, а центры вихревых возмущений находятся вне его, т. е. основная часть вихревых возмущений находится вне сдвиговой зоны, энергия возмущений существенно уменьшается и, соответственно, продолжительность начальной стадии увеличивается. Падение энергии возмущений тем больше, чем больше энергия начальных возмущений. 2) После начальной стадии развития вихревые возмущения начинают развиваться в соответствии с линейной теорией, т.е. по экспоненциальному закону. С течением времени по мере развития вихревых возмущений их энергия растет, и становятся важными нелинейные эффекты. Влияние последних приводит к отклонению кривых роста энергии от экспоненциального закона. Значения моментов времени, при которых наблюдаются указанные отклонения, зависят от начальной энергии

возмущений: чем выше начальная энергия, тем раньше наблюдаются отклонения. Это связано с тем, что при большой начальной энергии возмущений влияние нелинейных эффектов проявляется раньше.3) Сравнение результатов расчетов развития непрерывно распределенных вихревых возмущений в виде индуцируемых распределений завихренности и соответствующих точечных распределений завихренности показало, что результаты хорошо согласуются.

В 2003, в работе [114] предложены новые выражения для закона сопротивления и безразмерного момента сил для турбулентного течения Тэйлора-Куэтта, исходя из обобщенной модели локального баланса турбулентной энергии. Эти формулы содержат единственную постоянную — постоянную Кармана в случае предельно больших чисел Рейнольдса.

В 2011, была защищена диссертация Романова М.Н. на тему "Движения жидкости между вращающимися проницаемыми цилиндрами". В этой работе исследованы различные режимы движения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя бесконечными концентрическими вращающимися проницаемыми цилиндрами в случае, когда имеется приток жидкости через поверхность одного цилиндра и отток через поверхность другого. Основным режимом движения жидкости в задаче представляет собой стационарное вращательно-симметричное течение с нулевой аксиальной компонентой вектора скорости. Это течение может потерять устойчивость двумя способами. В результате монотонной вращательно-симметричной неустойчивости оно сменяется вторичным стационарным течением, а в случае колебательной трехмерной неустойчивости — вторичным автоколебательным режимом типа бегущих азимутальных волн. Вблизи пересечения этих двух бифуркаций существует множество различных вторичных режимов, возникающих благодаря нелинейному взаимодействию монотонной вращательно-симметричной и колебательных трехмерных мод.

Также в этой диссертации, исследование линеаризованной задачи устойчивости показало, что когда цилиндры вращаются в разные стороны и модуль отношения угловых скоростей достаточно велик, рост скорости втекания жидкости через поверхность внутреннего цилиндра дестабилизирует основной режим, причем этот эффект проявляется тем сильнее, чем больше величина отношения угловых скоростей вращения цилиндров. Если же цилиндры вращаются в одинаковых направлениях либо модуль отношения угловых скоростей вращения цилиндров имеет небольшие

значения, то ситуация усложняется. В зависимости от значений других параметров задачи изменение скорости втекания жидкости через поверхность внутреннего или внешнего цилиндров может оказывать как дестабилизирующее, так и стабилизирующее воздействие на основной режим.

Нелинейный анализ устойчивости, выполненный в его диссертации, базируется на теории бифуркаций коразмерности два, развитой в работах В. И. Юдовича, Ж. Йосса и П. Шосса. Она применима для широкого класса задач о круговых течениях жидкости с цилиндрическими симметриями. Применение этой теории позволяет свести исходную задачу к асимптотической модели, представляющей собой динамическую систему трех нелинейных комплексных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые являются обобщением известного амплитудного уравнения Ландау. Неизвестными в этой системе являются комплексные амплитуды разыскиваемых вторичных течений. Коэффициенты данной системы находятся численно путем решения серии линейных краевых задач для комплексных обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка с переменными комплексными коэффициентами. Данная амплитудная система расщепляется на две вещественные системы. Одна из них имеет четвертый порядок и служит для определения модулей амплитуд и фазового инварианта — линейной комбинации трех неизвестных фаз комплексных амплитуд (одной монотонной вращательно-симметричной и двух колебательных трехмерных). Она называется моторной подсистемой амплитудной системы.

Основные научные результаты, представленные в цитируемой диссертации:

1. В широком диапазоне изменений параметров задачи рассчитаны нейтральные кривые, соответствующие монотонной вращательно-симметричной и трехмерной колебательной потере устойчивости основного режима, а также точки их пересечения.
2. Исследовано влияние направления и интенсивности радиального потока жидкости на устойчивость основного стационарного движения жидкости.
3. Путем применения теории бифуркаций коразмерности два получены формулы для коэффициентов амплитудной системы трех комплексных дифференциальных уравнений первого порядка с кубическими ведущими

нелинейными членами. Данная система описывает различные движения жидкости, существующие вблизи пересечения бифуркаций возникновения вторичного стационарного течения и автоколебаний с бегущими в азимутальном направлении волнами. Коэффициенты этой системы рассчитаны на компьютере путем решения серии линейных краевых задач.

4. Путем аналитического и численного анализа амплитудной системы найдены стационарные, периодические и квазипериодические колебательные течения жидкости с двумя и тремя независимыми частотами. Исследованы их устойчивость и бифуркации.

5. Обнаружено, что при определенных значениях параметров задачи образуются режимы движения жидкости, имеющие достаточно сложную природу. В частности, в результате последовательного удвоения инверсионно-связанной пары несимметричных циклов возникают стохастические аттракторы амплитудной системы, которым соответствуют хаотические режимы движения жидкости.

В 2002 защищена диссертация Хоперского А.Н. на тему "Движения жидкости вблизи пересечения бифуркаций возникновения неизотермических вихрей Тейлора и азимутальных волн". В этой работе, основной режим движения жидкости между двумя нагретыми до различных температур вращающимися цилиндрами — неизотермическое течение Куэтта — представляет собой ламинарное круговое течение с логарифмическим распределением температуры. Это течение может потерять устойчивость двумя способами. В результате монотонной неустойчивости оно сменяется вихрями Тейлора, а в результате колебательной неустойчивости — автоколебательным режимом типа бегущей азимутальной волны. В его работе исследованы режимы, которые возникают в малой окрестности точки пересечения нейтральных кривых, отвечающих этим двум типам потери устойчивости неизотермического течения Куэтта.

Также в его диссертации, исследование базируется на анализе системы амплитудных уравнений для широкого класса задач с цилиндрической симметрией. Она описывает нелинейное взаимодействие монотонных вращательно-симметричных и колебательных трехмерных мод и представляет собой систему трех комплексных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Основные результаты диссертации Хоперского А.Н.:

1. Рассчитаны нейтральные кривые, соответствующие монотонной вращательно-симметричной и трехмерной колебательной потере устойчивости основного режима.
2. Установлено, что, в зависимости от значений параметров задачи, нейтральные кривые могут вообще не иметь точек пересечения, а могут пересекаться в одной или нескольких точках. Основное отличие от изотермического случая состоит в том, что при подогреве внутреннего цилиндра нейтральные кривые могут пересекаться и в случае, когда цилиндры вращаются в одну сторону. Отсюда следует, что при наличии определенного температурного градиента нелинейное взаимодействие тейлоровской и азимутальных мод может приводить к возникновению сложных режимов движения жидкости не только, когда цилиндры вращаются в разные стороны, как это бывает в изотермическом случае, но и когда они вращаются в одну сторону.
3. Выполнен численный расчет коэффициентов амплитудной системы. Для этого потребовалось рассчитать на компьютере решения серии линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений 8-го порядка с переменными комплексными коэффициентами.
4. Рассчитаны равновесия моторной подсистемы амплитудной системы, лежащие на инвариантных плоскостях. Им соответствуют стационарные или периодические режимы движения жидкости.
5. Рассчитаны равновесия общего положения моторной подсистемы. Им соответствуют двухчастотные квазипериодические режимы движения жидкости.
6. Численный анализ показал, что в некоторых случаях одновременно существуют несколько устойчивых равновесий, поэтому в реальных физических экспериментах могут наблюдаться гистерезисные явления для соответствующих этим равновесиям течений жидкости. Вычисления показали также, что при достаточно больших значениях одного из параметров задачи ни одно равновесие моторной подсистемы не является устойчивым, поэтому для больших значений данного параметра в экспериментах следует ожидать возникновения достаточно сложных режимов движения жидкости.

7. Установлено, что при определенных значениях параметров задачи от некоторых равновесий отходят предельные циклы — изолированные периодические решения моторной подсистемы. Им соответствует трех-частотные квазипериодические режимы движения жидкости.

8. Обнаружены устойчивые циклы с вращением. У таких циклов модули амплитуд периодичны с некоторым периодом  $p$ , а фазовый  $100$  инвариант. Решения амплитудных уравнений, соответствующие таким режимам, ограничены, а значит, ограничены также компоненты поля скорости и температуры соответствующих режимов движения жидкости.

9. Помимо предельных циклов, удалось рассчитать гораздо более сложные решения моторной подсистемы — хаотические аттракторы. Обнаружены, в частности, хаотические аттракторы с неограниченным ростом по времени фазового инварианта  $/3$ , возникающие в результате бесконечного каскада удвоений устойчивых инверсионно-связанных пар предельных циклов с вращением. У соответствующих таким аттракторам режимов движения жидкости компоненты поля скорости и температуры являются ограниченными функциями времени, но меняются стохастическим образом.

В работе "Гидродинамика и теплообмен в потоке куэтта-тэйлора при вынужденном радиальном течении", [275]. исследовано течение несжимаемой жидкости между неподвижным внешним и вращающимся внутренним проницаемыми цилиндрами с отсосом и вдувом жидкости через внутренний цилиндр. Результаты численного моделирования, воспроизводящего различные режимы течения: от устойчивого ламинарного до турбулентного макровихревого движения жидкости, сопоставлены с данными линейного анализа центробежной устойчивости. Подтверждена возможность стабилизации течения без макровихрей за счет отсоса жидкости в широком диапазоне угловых скоростей, а также применимость результатов линейной теории для оценки границы возникновения вихрей Тэйлора. Обнаружены существенные различия между данными линейного анализа и численного моделирования для случая вдува жидкости. Отмечено влияние дискретного вдува через продольные щели на характер течения в кольцевой области. Продемонстрирована возможность значительного повышения теплоотдачи от вращающегося цилиндра путем отсоса жидкости через эту поверхность.

## **2. Общее представление о комплекс-программе ANSYS CFD и методы применены в этой программе**

(Материал, используемый в этом разделе обзора основаны на информации, на интернет-сайтах [www.cae-expert.ru](http://www.cae-expert.ru). и <http://lib.rushkolnik.ru>)

Многие передовые технологии явились результатом длительного эволюционного пути от зарождения вычислительной гидрогазодинамики до ее внедрения в процессы разработки, основанные на расчетах. Так, например коммерческая программа ANSYS использует междисциплинарный подход к моделированию, в котором модели потоков жидкостей или газов плавно интегрируются в технологии моделирования других физических явлений. Подход, заложенный в программе ANSYS понятен, он заключается в том, чтобы предоставить систему инструментов высокоточного анализа междисциплинарного взаимодействия для возможности реализации принципа разработки, движимой расчетами в рамках адаптивной унифицированной архитектуры ANSYS Workbench. Платформа ANSYS Workbench объединяет широкий набор технологий для удовлетворения индивидуальных потребностей, одновременно обеспечивая взаимодействие и явные перспективы развития. Сюда входит очень широкий набор продуктов ANSYS для моделирования жидкостей и газов, которые делятся на две категории: продукты для анализа течения жидкостей или газов общего назначения и узкоспециализированные продукты.

### **Решатели гидрогазодинамики общего назначения.**

Технология ANSYS CFD открывает доступ к хорошо известным программным продуктам: ANSYS FLUENT и ANSYS CFX. Это основные продукты для задач гидрогазодинамики общего назначения, предлагаемые компанией ANSYS, Inc. Они доступны по отдельности. Эти два решателя разрабатывались в течение десятилетий независимо друг от друга и обладают несколькими существенными отличиями, несмотря на некоторые схожие черты. Оба модуля основаны на методе контрольных объемов, дающем высокую точность, и используют решатель по давлению, что способствует широте применяемости этих продуктов. Основные отличия состоят в способе интегрирования уравнений течения жидкостей и в стратегиях решения уравнений. Программа ANSYS CFX полностью интегрирована в платформу ANSYS Workbench.

Решатель ANSYS CFX использует сетку конечных элементов (числовые значения в узлах сетки), схожую с теми, что используется в анализе прочности, для дискретизации области. В отличие от ANSYS CFX, решатель ANSYS FLUENT использует сетку конечных объемов (числовые значения в центрах ячеек). В итоге оба подхода формируют уравнения для конечных объемов, которые обеспечивают сохранение значений потока, что является необходимым условием для точных решений задач гидрогазодинамики. В ANSYS CFX особый упор сделан на решение основных уравнений движения (сопряженная алгебраическая сетка), а ANSYS FLUENT предлагает несколько подходов к решению (метод на основе плотности, расщепленный метод на основе давления, сопряженный метод на основе давления). Оба решателя содержат в себе возможности физического моделирования для получения максимально точных результатов.

Кроме того, модуль ANSYS® CFD-Flo™ нацелен на удовлетворение потребностей разработчиков, занимающих ключевые позиции в конструкторских подразделениях компаний. Инструмент ANSYS CFD-Flo ограничивает доступ пользователя к физическим параметрам до моделей, наиболее часто используемых инженерами-конструкторами. Модуль совместим с другими встроенными в ANSYS Workbench функциями. ANSYS CFD-Flo – хороший выбор для конструкторских отделов благодаря меньшей сложности и стоимости этого модуля.

Модуль ANSYS CFD является высокомасштабируемым. Время разработки продукта может быть сокращено благодаря ANSYS CFD HPC, функции высокопроизводительного расчета. Она позволяет делать расчеты больших моделей на параллельных расчетных кластерах. Линейная масштабируемость была продемонстрирована на более чем тысяче процессоров.

Решатели ANSYS для жидкостей и газов включают в себе более тысячи человеко-лет исследований и разработок. Эти усилия выражены в преимуществах программных продуктов ANSYS перед конкурентами, а именно в опыте, надежности, широте и глубине. Ключевые решатели для гидрогазодинамики компании ANSYS проверены и широко используются компаниями по всему миру.

**Специализированные инструменты для анализа жидкостей и газов.**

Гибкость и общеприменимость важны, но иногда они не требуются для решения конкретных специализированных задач. В дополнение к инструментам для решения задач гидрогазодинамики общего назначения, ANSYS предлагает узкоспециализированные решения для анализа жидкостей и газов. Эти решения часто называют вертикальными приложениями из-за способа интеграции всех шагов анализа специфического типа системы в программный модуль. Технологии ANSYS предлагают специфические отраслевые функции и терминологию.

Турбомашиностроение – один из самых удачных примеров вертикальной задачи анализа жидкостей и газов вследствие схожести геометрии и физических процессов во всех областях вращающихся машин. Технология ANSYS для турбосистем включает в себя специализированные инструменты для работы с геометрией и сеткой, а также специализированные модели в инструментах моделирования общего назначения.

Программный продукт ANSYS® POLYFLOW® – специализированное программное средство для удовлетворения потребностей промышленности, например, в задачах обработки полимеров, заполнения форм, высокотемпературного формообразования, производства стекла. В этом модуле можно моделировать потоки жидкостей и газов с очень сложным поведением, как в случае с вязкоупругими жидкостями. Технология ANSYS POLYFLOW предлагает уникальные возможности, например, возможность выполнения обратных расчетов для определения форм штампа для экструзии. Также можно рассчитать конечную толщину стенки в процессах формования давлением.

Продукт ANSYS Airpack предназначен для разработки систем отопления, вентиляции, кондиционирования в офисных зданиях, на заводах, стадионах и других публичных местах. Модуль точно моделирует поток воздуха, теплоперенос, распространение загрязнителей в системе вентиляции. Модуль FLUENT® for CATIA® V5 позволяет передать результаты анализа течения жидкости/газа и теплопереноса в среду управления жизненным циклом изделия CATIA V5. Доступная физика потоков жидкостей/газов обычно используется инженерами-конструкторами. Она совместима с модулем ANSYS FLUENT.

В конечном итоге пользователи могут создавать собственные приложения в рамках продуктов моделирования жидкостей/газов общего назначения. Модуль ANSYS CFX предлагает настраиваемый мастер установок и язык описания. Технология ANSYS FLUENT предоставляет определяемые пользователем функции. Совместно с инструментами написания сценариев, доступными во всех приложениях ANSYS Workbench, они могут быть использованы для создания специализированных вертикальных приложений. Нередки случаи, когда аналитический отдел создает подобное вертикальное приложение, которое используется и в конструкторском отделе. Основное преимущество такого подхода – повторяемое с высокой точностью управление процессом моделирования и, следовательно, контроль качества любых гидрогазодинамических процессов.

Преимущества программы ANSYS для моделирования жидкостей и газов.

Технология анализа потоков жидкостей и газов ANSYS позволяет выполнять глубокий анализ механики жидкости во многих типах изделий и процессов, что дает возможность не только снизить необходимость дорогостоящих прототипов, но и получить всеобъемлющие данные, которые не всегда доступны при проведении экспериментальных исследований. Моделирование жидкостей и газов может служить дополнением к физическому эксперименту. Некоторые разработчики используют моделирование для анализа новых систем до принятия решения о том, какие эксперименты проводить и в каком количестве. Во время поиска неисправностей вызывающие трудности задачи решаются быстрее и точнее, поскольку анализ гидрогазодинамики выделяет не только следствие неисправности, но и ее причину. Во время оптимизации разработок нового оборудования за короткий промежуток времени можно выполнить много аналитических вычислений типа «что-если». Результатом этого становится лучшее соответствие продукта, увеличенная производительность, надежность. ANSYS продолжает внедрять инновации в свои разработки, чтобы пользователи могли заменить традиционные капиталоемкие процессы разработки на процесс разработки продукта, движимый расчетами.

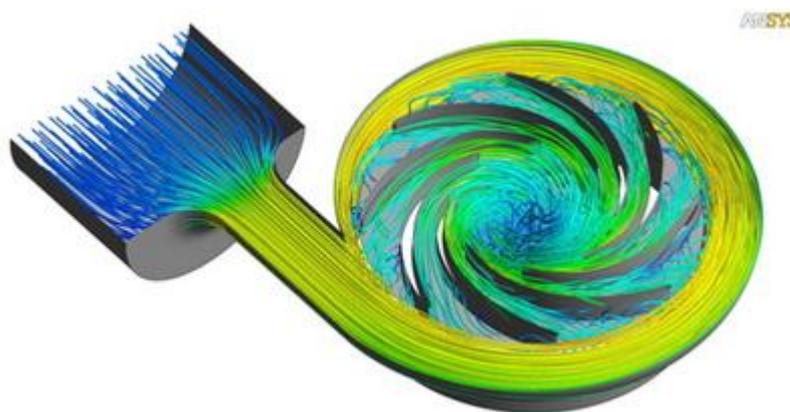
## **ANSYS CFX**

ANSYS CFX - профессиональный аналитический программный комплекс, предназначенный для решения широкого спектра задач вычислительной газо- и гидродинамики.

Область применения CFX - моделирование многофазных потоков, химической кинетики, горения, радиационного теплообмена, жидкостно-структурного взаимодействия.

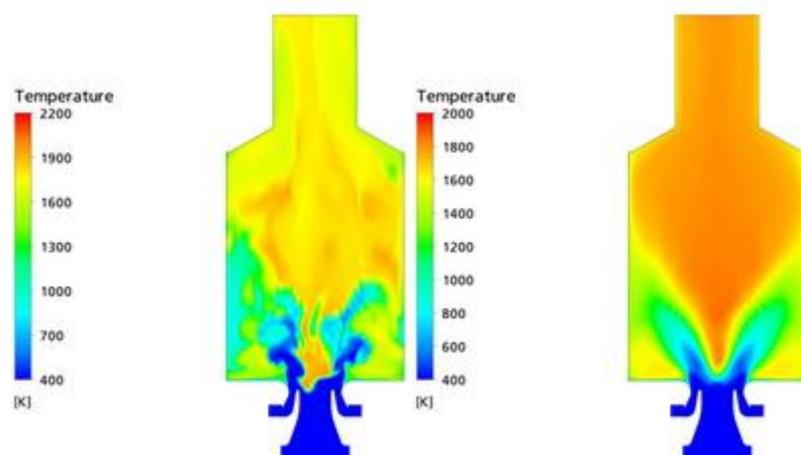
Программный комплекс позволяет решать задачи с подвижной сеткой, может применять адаптивное сеточное сгущение. ANSYS CFX является признанным лидером в моделировании течений в роторных машинах.

Основой всей расчетной технологии ANSYS CFX является решатель Algebraic Coupled Multigrid. Используя неявную связанную схему решения линеаризованной системы уравнений, решатель обеспечивает быструю и устойчивую сходимость во всех типах задач. При этом время решения задачи находится в линейной зависимости от объема расчетной сетки.



**Рис. 1.6.** Линии тока, полученные по результатам расчета течения в турбине разработки компании НРВ.

Мгновенное и осредненное по времени распределение температуры в камере сгорания. Расчеты проведены с использованием модели турбулентности SAS, разрешающей крупные вихри.



**Рис. 1.7.** Мгновенное и осредненное по времени распределение температуры в камере сгорания. Расчеты проведены с использованием модели турбулентности SAS, разрешающей крупные вихри. Данные предоставлены Германским аэрокосмическим центром (DLR), Институтом технологии горения

Преимущество ANSYS CFX особенно проявляется при решении больших моделей с многокомпонентными течениями и сложной структурой. Решатель ANSYS CFX малочувствителен к отношениям размеров элементов, временным шагам и релаксационным факторам. Точность решения достигается как за счет высокой точности на узел, так и схемой дискретизации второго порядка устанавливаемой по умолчанию. Эти же свойства сохраняются при параллельных расчетах, обеспечивая отличные параметры ускорения на многопроцессорных системах и кластерах рабочих станций.

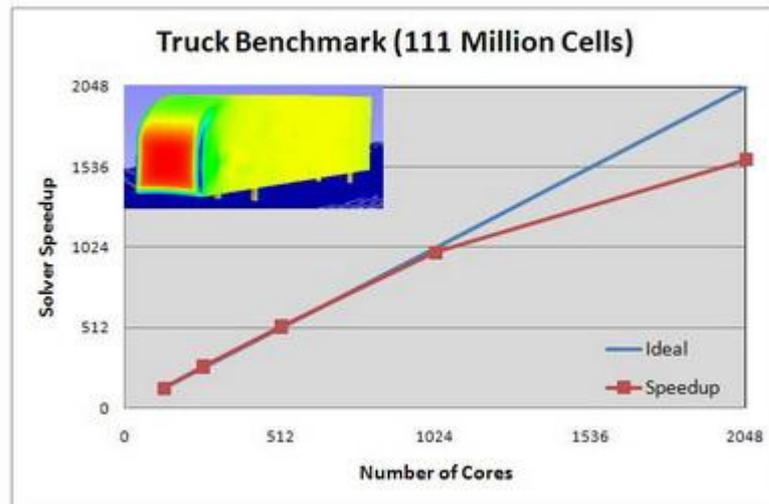
## **ANSYS FLUENT**

Программный модуль вычислительной гидрогазодинамики ANSYS FLUENT имеет широкий спектр возможностей моделирования течений жидкостей и газов для промышленного применения, учитывающих турбулентность, теплообмен, химические реакции. К примерам применения ANSYS FLUENT можно отнести как обтекание крыла, так и горение в печи, как течение внутри барботажной колонны, так и внешнее обтекание нефтедобывающих платформ, как течение в кровеносной системе, так и конвективное охлаждение сборки полупроводника, как течение в стерильных помещениях, так и промышленные стоки предприятий. Специализированные модели горения, аэроакустики, вращающихся/неподвижных расчетных

областей, многофазных течений серьезно расширяют области применения базового продукта.

Сегодня тысячи пользователей по всему миру получают неоспоримый выигрыш от использования ПО ANSYS FLUENT, применяя его как часть процесса проектирования и оптимизации своих изделий. Деформируемые, движущиеся сетки, превосходная масштабируемость при распараллеливании и современные вычислительные алгоритмы обеспечивают быстрое и точное решение задачи.. Функции пользователя (UDF) позволяют внедрять новые пользовательские модели и приспособить реализованные в продукте под цели конкретной задачи. Реализованные в ANSYS FLUENT интерактивные оболочки препроцессора, решателя и постпроцессора позволяют, находясь в одном приложении, выполнять остановку решателя, проверить результаты, изменять настройки, а затем продолжить вычисления. Файлы модели и результатов могут быть открыты в модуле ANSYS CFD-Post для дальнейшего анализа с помощью широкого ассортимента удобных инструментов, сравнения с результатами из других файлов.

Внедрение ANSYS FLUENT в ANSYS Workbench обеспечивает двустороннюю связь программы с основными CAD-системами, предоставляет широкие возможности создания и редактирования геометрической модели в ANSYS DesignModeler, а также разнообразные инструменты построения сетки ANSYS Meshing. Интеграция существенно облегчает передачу данных между программными приложениями (например, использование результатов расчета FLUENT в качестве нагрузки в последующем расчете прочности). Объединение этих преимуществ с широчайшим набором физических моделей и быстрым и точным решателем делает ANSYS FLUENT одним из ведущих программных пакетов по вычислительной гидродинамике на сегодняшний день.



**Рис. 1.8.** Масштабируемость ANSYS FLUENT 12.0 близка к идеальной до 1024 вычислительных узлов и составляет 78% от идеальной для 2048%. Данные предоставлены компанией SGI, получены на суперкомпьютере SGI Altix® ICE 8200EX использующем процессоры Intel Xeon® quad-core с Infiniband®

## Режимы работы программы ANSYS

Программа допускает два режима работы: пакетный (Batch) и интерактивный (Interactive).

Пакетный режим - работа ANSYS-программы задается программой пользователя. Первая строка в файле должна быть /batch, обозначающая пакетный режим работы. Этот режим особенно эффективен при решении задач, не требующих постоянной связи с компьютером.

Интерактивный режим предполагает постоянное взаимодействие с компьютером: запуск команды пользователем, выполнение ее программой; задание другой команды пользователем и выполнение ее программой и т.д. Если вы ошибетесь, можно исправить ошибку, повторно правильно набрав команду. Данный режим позволяет использовать наиболее подходящие свойства графического режима, построчной подсказки, системного меню и графического набора.

## Маршрут моделирования элементов МСТ в ANSYS

Маршрут моделирования элементов МСТ с помощью программы ANSYS состоит из трех этапов: препроцессорная подготовка (Preprocessing),

получение решения (Solving the equation) и постпроцессорная обработка результатов (Postprocessing).

На стадии препроцессорной подготовки выполняется выбор типа расчета, построение модели и приложение нагрузок (включая граничные условия). На данном этапе задаются необходимые для решения исходные данные. Пользователь выбирает координатные системы и типы конечных элементов, указывает упругие постоянные и физико-механические свойства материала, строит твердотельную модель и сетку конечных элементов, выполняет необходимые действия с узлами и элементами сетки, задает уравнения связи и ограничения. Можно также использовать модуль статического учета для оценки ожидаемых размеров файлов и затрат ресурсов памяти.

Этап приложения нагрузок и получения решения включает в себя задание вида анализа и его опций, нагрузок, шага решения и заканчивается запуском на счет конечно-элементной задачи. Программа ANSYS предусматривает два метода решения задач, связанных с расчетом конструкций (Structural problems): h-метод и p-метод. h-метод может применяться при любом типе расчетов (статический, динамический, тепловой и т.п.), а p-метод - только в линейном статическом анализе. Кроме того, h-метод требует более частой сетки, чем p-метод.

На этапе постпроцессорной обработки пользователь может обратиться к результатам решения и интерпретировать их нужным образом.

Результаты решения включают значения перемещений, температур, напряжений, деформаций, скоростей и тепловых потоков.

Итогом работы программы на постпроцессорной стадии является графическое и (или) табличное представление результатов.

## **Перспективы развития микроаналитических систем**

Микроаналитические системы находятся в самом начале своего развития. И в настоящее время при их конструировании доминируют такие направления как миниатюризация и интеграция. Современными особенностями микроаналитических систем являются:

- блочно-модульная унификация технологических и аналитических подсистем, определяющая многообразие конструкций при минимизации затрат;
- полифункциональность и гибкость, определяющая широту номенклатуры продукции и многообразие решаемых классов задач в условиях различных потребителей (химия, биотехнология, медицина);
- интегрированность диагностических и технологических модулей в пределах одной рабочей зоны, определяющая возможность локализации различных видов воздействий и позволяющая работать со сверхмалыми количествами вещества при обеспечении высокой эффективности и скорости проведения процессов;
- «интеллектуальность» микрооборудования, определяемая системой контрольно-диагностических модулей нового поколения и гибкой связью между аналитическими и технологическими модулями;
- экономичность, определяемая групповыми принципами производства микроаналитических систем, их низкой материалоемкостью и энергоемкостью;
- экологичность, определяемая возможностью работы со сверхмалыми количествами веществ и простотой утилизации отходов.

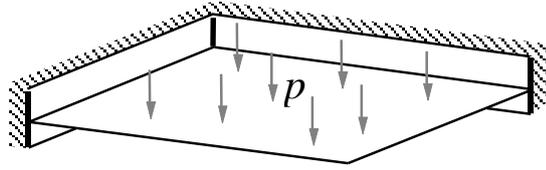
Организация интегрально-группового производства микроаналитических систем вносит революционные изменения в область медицинской диагностики, генетического анализа и микробиологического мониторинга за счет резкого сокращения стоимости и повышения скорости анализа, упрощения условий его проведения и автоматизации диагностических процедур.

## **Некоторые методы примененные в ANSYS CFD**

### **Метод Бубнова-Галеркина (на примере задачи об изгибе пластины)**

$$\nabla^2 \nabla^2 w - (p/D) = 0$$

$$w^* = \sum_i C_i w_i(x, y), \quad w_i - \text{базисные функции}$$



$$\nabla^2 \nabla^2 w^* - (p/D) = r(x, y).$$

Точное решение  $r \equiv 0$

Приближенное решение  $r \rightarrow \min \iint_F r(x, y) w_j(x, y) = 0, j = 1 \dots n$

$$\sum_i C_i \iint_F w_i(x, y) w_j(x, y) dx dy - \iint_F \frac{p}{D} w_j(x, y) dx dy = 0 \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_i C_i k_{ij} - f_j = 0$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{f}$$

$\mathbf{K}$  – матрица жесткости (stiffness matrix),  $\mathbf{C}$  – вектор неизвестных перемещений (DOF, degree of freedom),  $\mathbf{f}$  – вектор нагрузок

$$C \rightarrow w^* \rightarrow \varepsilon = z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \rightarrow \sigma$$

Добавим в нагрузки силы инерции (принцип Даламбера)

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* - \left( \frac{p}{D} - \rho h \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} \right) = r(x, y) \quad w^* = \sum_i C_i(t) w_i(x, y)$$

$$\sum_i C_i(t) \nabla^2 \nabla^2 w_i - \left( \frac{p}{D} - \rho h \sum_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial t^2} w_i \right) = r(x, y)$$

Рассмотрим моменты времени  $t_1, t_2 \dots t_k, \dots$  Обозначим  $C_{ik} = C_i(t_k)$

Заменяем производные конечными разностями:

$$\left. \frac{dC_i}{dt} \right|_{t=t_k} \approx \frac{C_{i,k+1} - C_{i,k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}} \quad \left. \frac{d^2 C_i}{dt^2} \right|_{t=t_k} \approx \frac{C_{i,k+1} - 2C_{i,k} + C_{i,k-1}}{(t_{k+1} - t_k)^2}$$

$$r \rightarrow \min \quad \iint_F r(x, y) w_j(x, y) = 0, \quad j = 1 \dots n$$

$$\sum_i C_i \iint_F w_i(x, y) w_j(x, y) dx dy - \iint_F \frac{P}{D} w_j(x, y) dx dy +$$

$$+ \rho h \sum_i \frac{C_{i,k+1} - 2C_{i,k} + C_{i,k-1}}{(t_{k+1} - t_k)^2} \iint_F w_i(x, y) w_j(x, y) dx dy = 0 \quad i, j = 1 \dots n$$

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{C}_{k+1} + \mathbf{K}_2 \mathbf{C}_k + \mathbf{K}_3 \mathbf{C}_{k-1} = \mathbf{f}$$

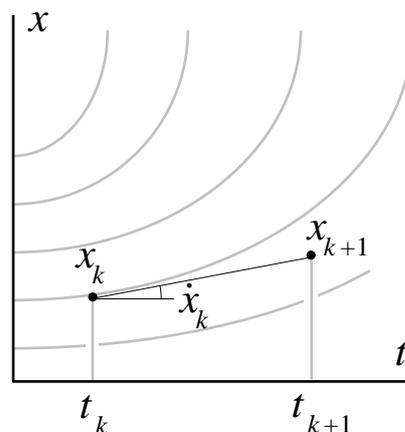
**Методы явного и неявного интегрирования по времени (на примере уравнения 1-го порядка)**

Явное интегрирование (explicit method) – метод Эйлера

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = f(x_k, t)$$

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k) \cdot \Delta t$$



Достоинство – малое количество вычислений на шаге.

Недостаток – низкая точность при больших  $\Delta t$  (условно сходящийся метод)

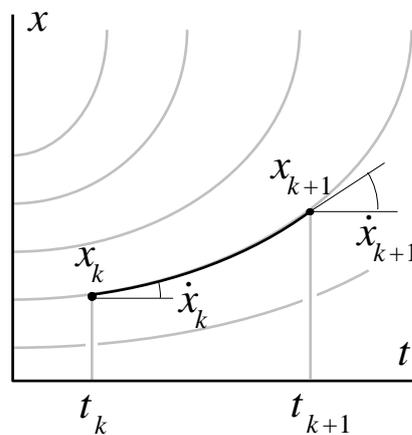
Модификация для повышения точности

$$x_{k+1} = x_k + \dot{x}_{k+\frac{1}{2}} (t_{k+1} - t_k)$$

**Неявное интегрирование (implicit method) – метод прогноза и коррекции**

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

$$x_{k+1} = x_k + F(t_k, t_{k+1}, x_k, x_{k+1})$$



Достоинство – точность

Недостаток:  $x_{k+1}$  входит в обе части уравнения – итерации на каждом шаге по времени, большое количество вычислений

## ГЛАВА 2: АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЙ КУЭТТА – ТЭЙЛОРА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В настоящей работе рассматриваются течения сжимаемого газа между вращающимися цилиндрами. Анализ ограничен рассмотрением больших чисел Рейнольдса.

На практике могут реализовываться и течения с конечными числами Рейнольдса. Течение в таком случае описывается обычными уравнениями Навье-Стокса нелинейными или линейными в зависимости от рассматриваемых задач (описания среднего течения или исследовании устойчивости). Понятно, что для решения таких задач единственным способом является использование численных методов, основанных на использовании конечных разностей или представлениями в виде разложений в ряды.

Ситуация с рассмотрением течений при больших числах Рейнольдса приводит к появлению сингулярности в уравнениях Навье-Стокса, что требует или введения адаптивных сеток или применения асимптотических методов, например таких как метод сращиваемых асимптотических разложений или других и создания с их использованием соответствующих моделей. Такой путь ранее был применен к анализу течений открытого типа - в пограничных слоях на искривленной поверхности [109] в результате был выявлен целый класс решений, соответствующих различным длинам волн.

Аналогичный анализ можно провести и для течений закрытого типа (между вращающимися концентрическими цилиндрами). Аналогом толщины пограничного слоя здесь выступает расстояние между стенками. Иерархия режимов может быть построена для разных величин отношения длин волн возмущений к величине зазора.

При анализе течений с большими числами Рейнольдса возникает вопрос о сосуществовании инерционного и вязкого течений. Под вязким понимается течение, описываемое только диссипативной частью уравнений Навье-Стокса. На самом деле даже без предположения об отсутствии инерционности только принимая, условие одномерности течения можно получить описание с диссипативными членами (как в случае несжимаемой жидкости [110-111]).

При преимущественном влиянии инерционных эффектов уравнения не содержат диссипативных членов вообще, поэтому обычной является схема рассмотрения задач, для которых (при любых числах Рейнольдса) на основное течение, описываемое диффузионными членами накладывается возмущение, описываемое инерционными членами. Таким образом можно исследовать линейные и нелинейные режимы.

Ситуация с большой величиной параметра (пропорционального отношению величин инерционных членов к диффузионным) приводит как и для течений открытого типа к локальным задачам, описывающим квадратные вихри с асимптотически одинаковыми размерами в направлениях  $y$  и  $z$ .

Можно показать, что возмущенное течение описывается в этом случае параболизированными уравнениями Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с локальными термодинамическими величинами, соответствующими местоположению вихря (расположенному около одной из стенок или всплывшему).

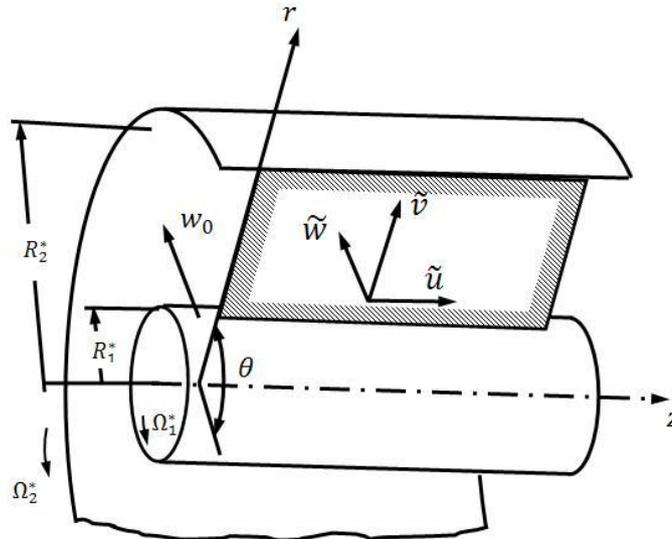
Более интересной оказываются течения, в которых действительно сказывается влияние вязкости, а именно в таких для которых размер вихря в направлении  $y$  сравним с величиной зазора.

Естественно начать анализ с таких длин волн возмущений или вихрей, размер которых в направлении  $z$  также совпадает с величиной зазора.

В настоящей работе приведены результаты асимптотического анализа течений сжимаемого газа для случая больших чисел Рейнольдса и малых (по сравнению с радиусами цилиндров) величин зазора между поверхностями. Сформулированы соответствующие математические задачи и найдены параметры подобия. Приведены результаты вычислительных расчетов, показывающих влияние температуры поверхностей цилиндров и вращательных скоростей на плотности вихрей.

## 2.1. Определяющие уравнения в цилиндрической системе координат

Вводится цилиндрическая система координат. На рис. 2.1 показан эскиз системы координат для установившегося потока сжимаемой вязкой жидкости. Течение газа между двумя коаксиальными цилиндрами поддерживается за счёт постоянной угловой скоростью одного или обоих цилиндров, при этом в среднем течение в осевом направлении отсутствует [осреднённый поток в осевом направлении равен нулю]. Внутренний цилиндр имеет радиус  $R_1$  и вращается с угловой скоростью  $\Omega_1$ , а внешний радиус  $R_2$  и вращается с угловой скоростью  $\Omega_2$ . Звёздочкой обозначены размерные величины.



**Рис. 2.1.** Система цилиндрических координат

## 2.2. Система оценок

Оценим вначале перепад давления между стенками цилиндров, возникающий под действием центробежных сил

$$\Delta p \sim \chi d \quad (2.1)$$

предполагая, что скорость в окружном направлении порядка единицы, а  $d$  ширина зазора между цилиндрами.

Индукцируемая этим перепадом скорость в направлении  $z$  (предполагая, что перепад давления в радиальном направлении такой же как и в трансверсальном) оценивается следующим образом

$$w \sim \chi^{1/2} d^{1/2} . \quad (2.2)$$

Эта оценка, строго говоря, имеет место, если силы вязкости несущественны. Мы рассматриваем именно режимы, для которых или вязкость несущественна или граничные, для которых вязкость и инерционные силы сравнимы

Поскольку мы ограничиваемся режимами, где от окружной координаты ничего не зависит и неустойчивость (в отличие от вихрей Тэйлора Гертлера на пластине) развивается как нестационарный процесс, то уравнение неразрывности в невырожденном виде должно содержать производные, как в радиальном направлении, так и в трансверсальном.

Тогда при заданном масштабе по  $z$

$$\frac{w}{\lambda} \sim \frac{v}{d} \text{ или } v \sim \frac{\chi^{1/2} d^{3/2}}{\lambda} . \quad (2.3)$$

Оценим теперь в уравнении радиального импульса влияние вязкости

$$v \frac{v}{d} \sim \varepsilon^2 \frac{v}{d^2} \text{ или } d_v \sim \frac{\varepsilon^{4/5} \chi^{1/5}}{\lambda} . \quad (2.4)$$

То есть имеется такая иерархия. Если зазор и длина волны сравнимы, тогда если они совпадают с этим вязким размером получатся параболизированные уравнения Навье-Стокса, в которых вязкость работает в двух направлениях в радиальном и трансверсальном. Если эти размеры больше вязкого размера тогда у нас получаются уравнения Эйлера.

Далее если длина волны больше зазора тогда есть предельная длина волны, при которой в течении проявится влияние сил вязкости, но уже только в одном направлении радиальном. Поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial z} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \rho v = 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \rho u v}{\partial r} + \frac{1}{r} \rho u v = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} v \right) \right\} + \\ + \frac{2}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \mu \left( -\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \right] \end{aligned} , \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial z} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} + \rho v^2 - \rho w^2 = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \mu \left[ -\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \right\} - \frac{2}{3} \frac{\mu}{\text{Re}} \left[ -\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} + 2v \right] \end{aligned} , \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u w)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v w)}{\partial r} + 2 \frac{1}{r} \rho v w = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \frac{\mu}{\text{Re}} \left[ -\frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \end{aligned} , \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u H}{\partial z} + \frac{\partial \rho v H}{\partial r} + \frac{1}{r} \rho v H = \frac{\mu}{\text{Re}} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \mu u \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} v \right] + \right. \\
& \frac{\partial}{\partial z} \mu v \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \mu u \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{2}{3} \mu v \left[ -\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} - v \right] + \\
& + \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial z} \left[ -\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} - v \right] + \frac{\partial v}{\partial z} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu u \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \\
& + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu v \left( -\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \right] + \frac{\partial u}{\partial r} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \\
& + \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial r} \left[ -\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} - v \right] + \\
& + \frac{1}{\text{Pr}(\gamma-1)M^2 \text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \mu \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left[ w \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu w \left( -\frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \mu w \left( -\frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Итак, введем следующие представления координат и функций течения

$$z = \lambda z_1, \quad r = dr_1, \quad t = d^{-1/2} t_1 \lambda$$

$$w = w_0 + \dots, \quad u = d^{1/2} u_1 + \dots, \quad v = d^{3/2} \lambda^{-1} v_1 + \dots$$

$$p = p_0 + dp_1 + \dots, \quad \rho = \rho_0 + \dots$$

Подстановка разложений в исходную систему уравнений дает

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho_0 v_1}{\partial r_1} = 0, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_0 u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1^2}{\partial z_1} + \frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1 v_1}{\partial r_1} &= \left\{ \frac{2}{3} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial z} \Pi_1 \Pi_2 \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \left[ \Pi_1 \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] \right\}, \tag{2.11}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho_0 w_0}{\partial t_1} + \frac{\partial (\rho_0 u_1 w_0)}{\partial z_1} + \frac{\partial (\rho_0 v_1 w_0)}{\partial r_1} = -\Pi_1 \Pi_2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \Pi_1 \Pi_2^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right], \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial \rho_0 v_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1 v_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho_0 v_1^2}{\partial r_1} \right] \Pi_2 + \frac{\partial p_1}{\partial r_1} - \rho_0 w_0^2 &= \Pi_1 \Pi_2 \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \Pi_2^2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \mu \left[ -\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} \right] \right\}, \tag{2.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u H}{\partial z} + \frac{\partial \rho v H}{\partial r} = \frac{1}{\text{Pr}(\gamma - 1)M^2} [\Pi_1 \Pi_2 \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial T}{\partial z}) + \Pi_1 \Pi_2^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (\mu \frac{\partial T}{\partial r})] \\ + \Pi_1 \Pi_2 \frac{\partial}{\partial z} [w \mu \frac{\partial w}{\partial z}] + \Pi_1 \Pi_2^{-1} \frac{\partial}{\partial r} [\mu w (\frac{\partial w}{\partial r})] \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\Pi_1 = \frac{\varepsilon^2}{d^{3/2}}$ ,  $\Pi_2 = \frac{d}{\lambda}$ .

Полученные параметры подобия имеют простой физический смысл (**Рис. 2.2**). Параметр  $\Pi_1$  определяет отношение диффузионных эффектов к инерционным эффектам. По существу это обратная величина локального числа Рейнольдса. Параметр  $\Pi_2$  определяет отношение ширины зазора к длине волны пространственных возмущений (вихрей). Напомним, что во всех случаях мы имеем дело с безразмерными параметрами.

Общая система уравнений соответствует точке А, для которой оба введенных параметра подобия сохраняют конечное значение.

Для дальнейшего анализа отметим, что возможны различные предельные переходы. Если мы будем двигаться вдоль линии АВ параметр  $\Pi_1 = 0$ , а параметр  $\Pi_2$  сохраняет конечное значение. Система уравнений для этого предельного перехода имеет вид:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho_0 v_1}{\partial r_1} = 0 \quad , \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \rho_0 u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1^2}{\partial z_1} + \frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1 v_1}{\partial r_1} = 0 \quad , \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \rho_0 w_0}{\partial t_1} + \frac{\partial (\rho_0 u_1 w_0)}{\partial z_1} + \frac{\partial (\rho_0 v_1 w_0)}{\partial r_1} = 0 \quad , \quad (2.17)$$

$$\left[ \frac{\partial \rho_0 v_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1 v_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho_0 v_1^2}{\partial r_1} \right] \Pi_2^2 + \frac{\partial p_1}{\partial r_1} - \rho_0 w_0^2 = 0 \quad , \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \rho_0 w_0}{\partial t_1} + \frac{\partial (\rho_0 u_1 w_0)}{\partial z_1} + \frac{\partial (\rho_0 v_1 w_0)}{\partial r_1} = 0 \quad , \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u H}{\partial z} + \frac{\partial \rho v H}{\partial r} = 0. \quad (2.30)$$

Соответственно, параметры, находящиеся вдоль линии АС приводят к режиму течения, в котором вязкость существенна (в одном направлении):

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho_0 v_1}{\partial r_1} = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \rho_0 u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1^2}{\partial z_1} + \frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho_0 u_1 v_1}{\partial r_1} = \frac{2}{3} [\Pi_1 \mu \frac{\partial}{\partial r} (-\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r})], \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_1} [\mu \frac{\partial}{\partial r_1} (\frac{\partial w_0}{\partial r_1})] = 0, \quad (2.33)$$

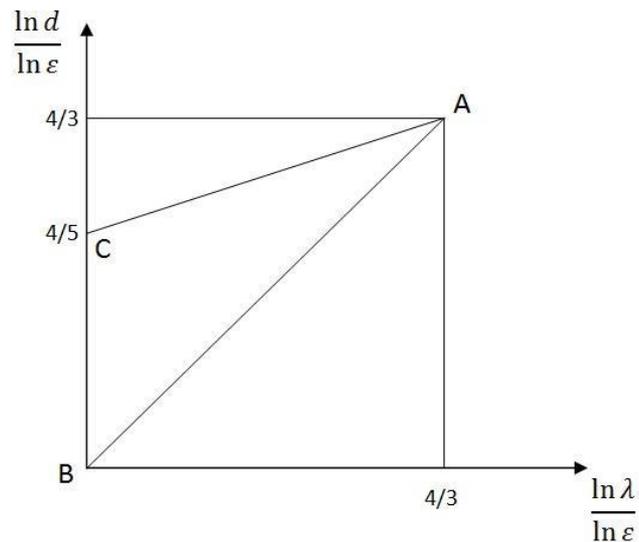
$$\frac{\partial p_1}{\partial r_1} - \rho_0 w_0^2 = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u H}{\partial z} + \frac{\partial \rho v H}{\partial r} = \frac{1}{\text{Pr}(\gamma - 1) M^2} [\Pi_1 \frac{\partial}{\partial r} (\mu \frac{\partial T}{\partial r})] + \Pi_1 \frac{\partial}{\partial r} [\mu w (\frac{\partial w}{\partial r})]. \quad (2.35)$$

### 2.3. Диаграмма различных возможных режимов течения Куэтта-Тейлора

Полученные оценки можно использовать для построения диаграммы возможных режимов (Рис. 2.2). Анализируемые режимы располагаются внутри треугольника АВС. Наиболее общим, с точки зрения проявляющихся эффектов, будет режим, соответствующий точке А, где течение описывается параболизированными уравнениями Навье-Стокса. Термин «параболизированные» соответствует здесь отсутствию диссипативных членов в окружном направлении. Эти эффекты проявляются лишь в направлениях по радиусу и вдоль оси цилиндров. Соответственно параметры, находящиеся на линии АВ ниже точки А соответствуют режимам, для которых вязкость уже не существенна, а длина волны вихрей совпадает по порядку величины с величиной зазора.

Линии АС соответствуют вихри, на которые влияет вязкость, а характерный размер зазора много меньше, чем длина волны.



**Рис 2.2.** Диаграмма различных возможных режимов течения Куэтта-Тейлора

#### 2.4. Численные результаты по теории возмущений для различных мод течений

Для исследования устойчивости стационарного движения жидкости в пространстве между двумя вращающимися цилиндрами в предельном случае сколь угодно больших чисел Рейнольдса можно применить простой способ, аналогичный, применённому в параграфе 4 при выводе условия механической устойчивости неподвижной жидкости в поле тяжести (Rayleigh, 1916). Идея метода состоит в том, что рассматривается какой-нибудь произвольный малый участок жидкости и предполагается, что этот участок смещается с той траектории, по которой он движется в рассматриваемом течении. При таком смещении появляются силы, действующие на смещённый участок жидкости. Для устойчивости основного движения необходимо, чтобы эти силы стремились вернуть смещённый элемент в исходное положение.

Каждый элемент жидкости в невозмущённом течении движется по окружности  $r = const$  вокруг оси цилиндров. Пусть  $\mu(r) = mr^2\phi^\circ$  есть момент импульса элемента с массой  $m$  ( $\phi^\circ$  - угловая скорость). Действующая на него центробежная сила равна  $\mu^2 / mr^3$ ; эта сила уравнивается соответствующим радиальным градиентом давления, возникающим во вращающейся жидкости. Предположим теперь, что элемент жидкости, находящийся на расстоянии  $r_0$  от оси, подвергается малому смещению со

своей траектории, так что попадает на расстояние  $r > r_0$  от оси. Сохраняющийся момент импульса элемента остаётся при этом равным своему первоначальному значению  $\mu_0 = \mu_0(r)$ . Соответственно в его новом положении на него будет действовать центробежная сила, равная  $\mu_0^2 / mr^3$ . Для того чтобы элемент стремился возвратиться в исходное положение, эта центробежная сила должна быть меньше чем её равновесное значение  $\mu^2 / mr^3$ , уравнивающееся имеющимся на расстоянии  $r$  градиентом давления. Таким образом, необходимое условие устойчивости гласит:  $\mu^2 - \mu_0^2 > 0$ ; разлагая  $\mu(r)$  по степеням положительной разности  $r - r_0$ , напомним это условие в виде

$$\mu \frac{d\mu}{dr} > 0 \quad (2.36)$$

Теперь аналогично выведем данное условие для сжимаемой жидкости, для этого введём характерный объём  $\Delta V$  и следовательно  $\mu = \rho \Delta V r^2 \phi$

$$\frac{mrv^2}{r} = \frac{mvr \cdot v}{r^2} = \frac{m\phi^{\circ} r^2 \cdot \phi^{\circ} r}{r^2} \quad (2.37)$$

Исследуемое течение содержится между двумя концентрическими цилиндрами бесконечной длины, которые вращаются с разной угловой скоростью и имеют разные температуры. Использована полярная цилиндрическая система координат.

Ниже введены следующие обозначения  $tR_1 / W_1, zR_1, rR_1, \omega, uW_1, vW_1, wW_1, \rho_0 W_1^2, \rho_s \rho, HW_1^2, \mu_s \mu, aW_1$  для времени, для осевой, радиальной и угловой координат и для соответствующих компонентов вектора скорости, для статического давления, плотности, полной энтальпии, для динамического коэффициента вязкости и для скорости звука. Индекс “1” соответствует параметрам внутреннего цилиндра (если внутренний цилиндр покоится в качестве характерных параметров взяты параметры внешнего цилиндра, которые отмечены индексом “2”). Индекс “s” соответствует термодинамическим функциям газа, заполняющего пространство между цилиндрами при отсутствии вращения.

Невозмущенное течение описывается следующей системой уравнений

$$\frac{d}{dr}[\mu_0 r \frac{d}{dr}(\frac{w_0}{r})] + 2\mu_0 \frac{d}{dr}(\frac{w_0}{r}) = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dr}\{\mu_0 r \frac{d}{dr}[\frac{H_0}{\sigma} + (1 - \frac{1}{2\sigma})w_0^2]\} - \frac{d}{dr}[\mu_0 w_0 \frac{d}{dr}(r w_0)] = 0 \quad (2.39)$$

$$-\frac{\rho_0 w_0^2}{r} + \frac{dp_0}{dr} = 0 \quad (2.40)$$

$$p_0 = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \rho_0 C_p T_0, \quad C_p T_0 = H_0 - \frac{w_0^2}{2} \quad (2.41)$$

$$\mu_0 = (H_0 - \frac{w_0^2}{2})^\beta \quad (2.42)$$

$$a_0^2 = (\gamma - 1)(H_0 - \frac{w_0^2}{2}) \quad (2.43)$$

, где  $\sigma$  - число Прандтля,  $\gamma$  - отношение удельных теплоемкостей.

Граничные условия имеют вид

$$r = 1 \quad w_0 = 1, \quad H_0 = H_{w1} \quad (2.44)$$

$$r = R_2 / R_1 \quad w_0 = b_2, \quad H_0 = H_{w2} \quad (2.45)$$

Уравнение энергии (для полной энтальпии) может быть проинтегрировано, в результате получается следующее уравнение

$$H = -(\sigma - 1) \frac{w^2}{2} + \sigma \int_1^r \frac{w^2}{r} dr + c_1 r + (H_{w1} - c_1) \quad (2.46)$$

$$\text{где } c_1 = \frac{1}{(R_2 / R_1 - 1)} [H_{w2} + \frac{(\sigma - 1)}{2} b_2^2 - \sigma \int_1^{R_2/R_1} \frac{w^2}{r} dr - H_{w1}] \quad (2.47)$$

Можно показать, что при больших числах Рейнольдса возможны различные режимы развития возмущений. Эти режимы соответствуют различным длинам волн вихрей.

В настоящей работе рассмотрен один возможный режим развития возмущений, который характеризуется развитием вихрей с длиной волны сравнимой с расстоянием между цилиндрами. Анализ уравнений Навье-Стокса показывает, что при больших числах Рейнольдса влияние вязкости оказывается несущественным в первом приближении. Влияние вязкости оказывается существенным в тонких слоях, расположенных вблизи стенок. Оказывается, что при малых амплитудах возмущений влияние этих пограничных слоев на основную часть течения несущественно. Нелинейные режимы развития вихрей могут приводить к возникновению отрыва пристеночных пограничных слоев и к соответствующему сильному влиянию на основное течение.

Решение для линейно возмущенного осесимметричного течения можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, r, \omega) &= Au_1(x, r) + \dots \\
 v(x, r, \omega) &= Av_1(x, r) + \dots \\
 w(x, r, \omega) &= w_0(r) + Aw_1(x, r) + \dots \\
 p(x, r, \omega) &= p_0(r) + Ap_1(x, r) + \dots \\
 \rho(x, r, \omega) &= \rho_0(r) + A\rho_1(x, r) + \dots \\
 H(x, r, \omega) &= H_0(r) + AH_1(x, r) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

Линейная система уравнений имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0
 \tag{2.49}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{2\rho_0 w_0 w_1}{r} + \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0 \quad (2.50)$$

$$\rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\rho_0 w_0 v_1}{r} = 0 \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\rho_0 v_1}{r} = 0 \quad (2.52)$$

$$\rho_0 \frac{\partial H_1}{\partial t} + \rho_0 v_1 \frac{dH_0}{dr} = \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (2.53)$$

Коэффициенты в этой линейной системе уравнений являются функциями радиальной координаты. Тогда решение можно представить следующим образом

$$u_1 = U(r) \exp(\alpha t) \sin(\lambda x)$$

$$v_1 = V(r) \exp(\alpha t) \sin(\lambda x)$$

$$w_1 = W(r) \exp(\alpha t) \cos(\lambda x)$$

$$\rho_1 = R(r) \exp(\alpha t) \sin(\lambda x)$$

$$H_1 = H(r) \exp(\alpha t) \sin(\lambda x)$$

$$p_1 = P(r) \exp(\alpha t) \sin(\lambda x) \quad (2.54)$$

Подстановка этих выражений в линейную систему уравнений приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\rho_0 \alpha U + \lambda P = 0 \quad (2.55)$$

$$\rho_0 \alpha V - \frac{2\rho_0 w_0 W}{r} + P' = 0 \quad (2.56)$$

$$\rho_0 \alpha W + \rho_0 V w_0' + \frac{\rho_0 w_0 V}{r} = 0 \quad (2.57)$$

$$r\alpha R - \rho_0 r \lambda U + \rho_0 V + \rho_0 r V' = 0 \quad (2.58)$$

$$\rho_0 \alpha H + \rho_0 V H'_0 = \alpha P \quad (2.59)$$

Эта система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка для радиального возмущенного компонента скорости. Решение должно удовлетворять двум однородным граничным условиям, задаваемым на поверхности цилиндров.

Для численного анализа более удобно привести это уравнение к двум уравнениям первого порядка следующего вида

$$V' = \frac{V}{ra_0^2} [-(\gamma - 1)H'_0 - \frac{a_0^2}{\alpha} + w_0(\gamma - 1)(w'_0 + \frac{w_0}{r})] - \frac{P\alpha}{\rho_0 ra_0^2} [1 + \frac{\lambda^2 a_0^2}{\alpha^2}] \quad (2.60)$$

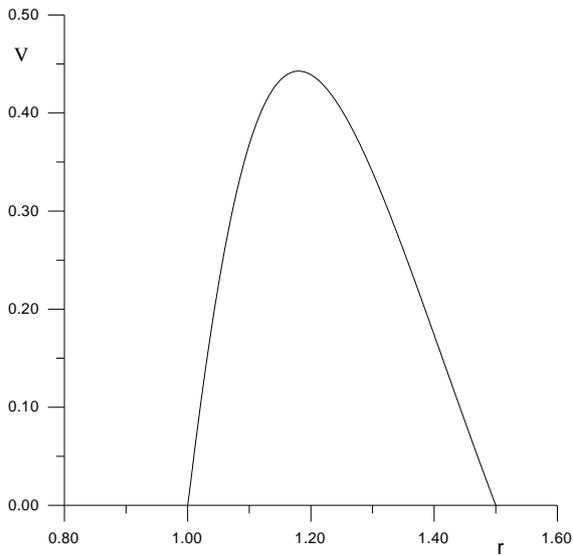
$$P' = -V[\rho_0 \alpha + \frac{2\rho_0 w_0}{\alpha r} (w'_0 + \frac{w_0}{r})] \quad (2.61)$$

Задача состоит в нахождении собственных решений системы уравнений с однородными граничными условиями. Дисперсионное соотношение, которому должны удовлетворять параметры, при которых существуют нетривиальные решения, имеет вид

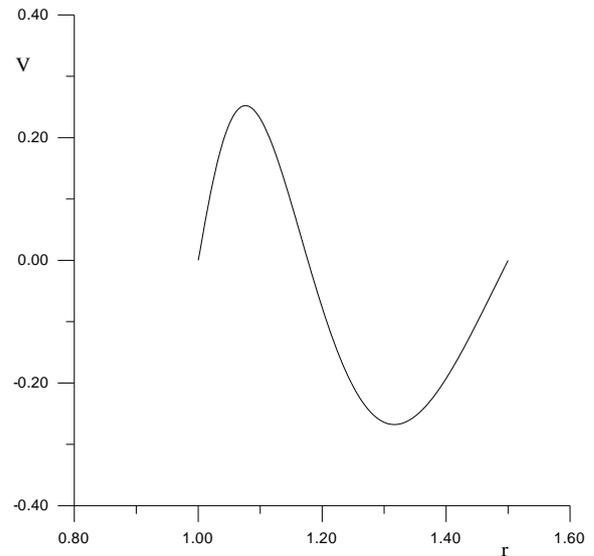
$$\alpha = F(R_2 / R_1, b_2, H_{w1}, H_{w2}, \gamma, \sigma, \beta) \quad (2.62)$$

и может быть получено в результате численного решения уравнений для невозмущенного и возмущенного течений.

Ниже представлены некоторые численные решения. Решения получены для следующих значений параметров  $b_2 = 0.5$ ,  $H_{w1} = 1.$ ,  $H_{w2} = 1.$ ,  $\sigma = 0.74$ ,  $\beta = 0.7$  для которых часть течения между цилиндрами сверхзвуковая, а часть дозвуковая. На фигурах представлены решения для первой моды (Рис. 2.3) и для второй моды (Рис. 2.4) при  $\lambda = 1$ . Этот вариант соответствует сверхзвуковому течению около внутреннего цилиндра ( $M=5.$ ) и дозвуковому течению около внешнего цилиндра ( $M=0.71$ ).



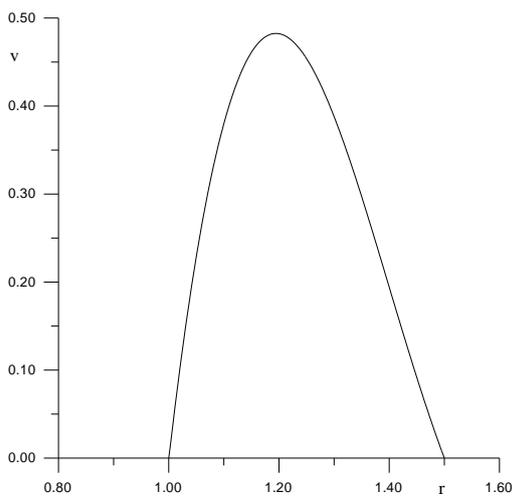
**Рис. 2.3.** Первая мода  $\alpha = 0.0505$



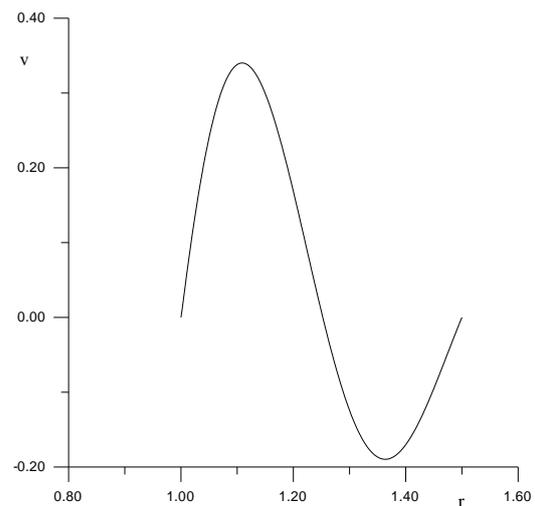
**Рис. 2.4.** Вторая мода  $\alpha = 0.0252$

Следующая серия расчетов соответствует параметрам, при которых течение между цилиндрами полностью сверхзвуковое,  $b_2 = 0.5$ ,  $H_{w1} = 1.$ ,  $H_{w2} = 0.5$ ,  $\sigma = 0.74$ ,  $\beta = 0.7$ . На фигурах решения для первой моды (Рис. 2.5.) и для второй моды (Рис. 2.6.) представлены для  $\lambda = 1$ . Этот вариант соответствует сверхзвуковой скорости около внутреннего цилиндра ( $M=5.$ ) и сверхзвуковой скорости около внешнего цилиндра ( $M=1.67$ ). Можно заключить, что увеличение числа Маха внешнего цилиндра приводит к уменьшению инкремента роста возмущений первой и второй мод.

Расчеты показали также, что инкремент роста возмущений сильно зависит от температуры цилиндров.



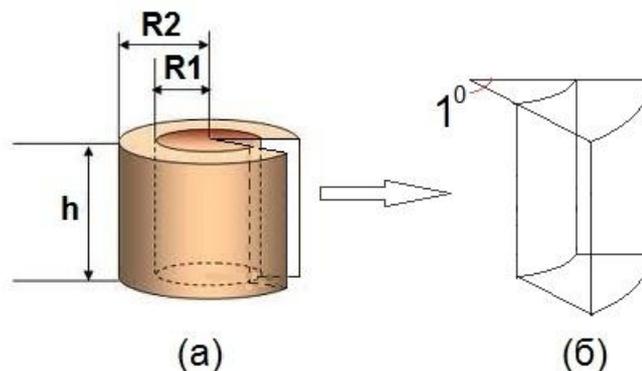
**Рис. 2.5.** Первая мода  $\alpha = 0.0438$



**Рис. 2.6.** Вторая мода  $\alpha = 0.0225$

# ГЛАВА 3: ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА СТРУКТУРУ ВИХРЕЙ В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА-ТЭЙЛОРА СЖИМАЕМОГО ГАЗА

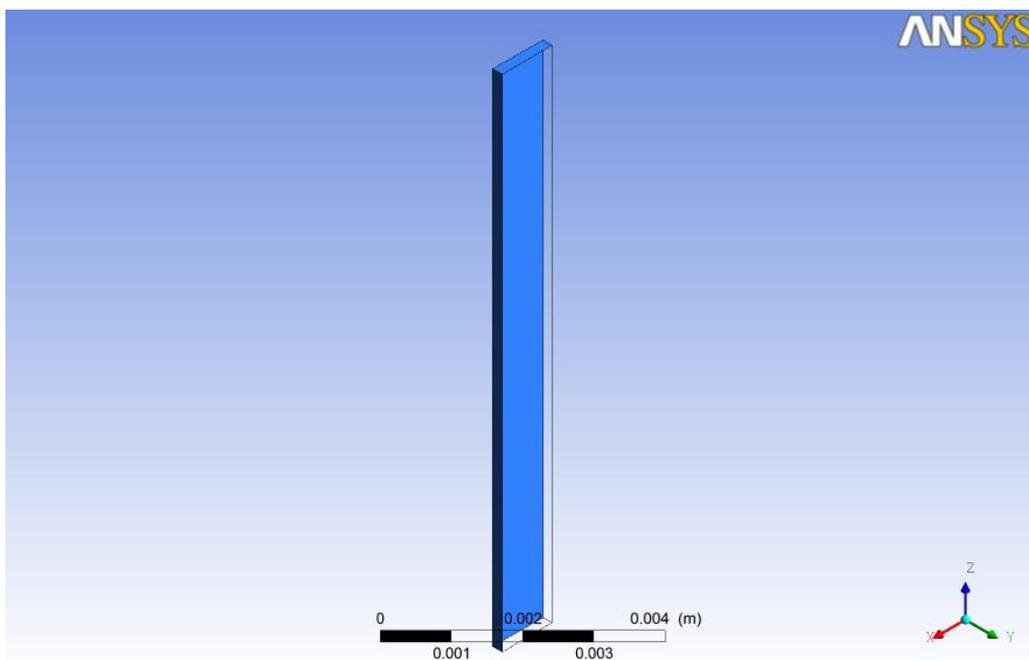
## 3.1 Физическая модель I



**Рис. 3.1.** Коаксиальные цилиндры (а), рассматриваемый сектор из цилиндра (б)

При аналитическом решении задачи рассматривается бесконечный цилиндр. Однако, при численном моделировании необходимо ограничивать длину цилиндров, соблюдая условие:  $h \gg \Delta = |R_2 - R_1|$  ( $h = 0.01\text{м}$ ,  $R_1 = 0.01\text{м}$  и  $R_2 = 0.011\text{м}$ ) (рис. 3.1а).

При достаточно малых угловых скоростях цилиндров, вихри имеет равномерное распределение, постоянное вдоль оси  $O\varphi$ . Поэтому достаточно рассмотреть двухмерную задачу. В расчёте для этой первой модели мы рассматривали круговой секторс углом  $1^\circ$  (рис. 3.1б). При  $R_1 \approx \Delta$ , данный круговой сектор можно приближенно рассматривать как прямоугольный параллелепипед с размерами  $0.001\text{м} \times 0.01\text{м} \times 0.01\text{м}$



**Рис. 3.2:** Физическая модель области постоянной сетки

Сетка была построена с помощью программы ANSYS ICEM CFD. Сетка является структурированной, содержит более 2 миллионов ячеек (рис. 3.2).

В задаче проводятся расчеты с применением коммерческой программы ANSYS CFX (лицензия МФТИ). Рассматриваемые течения моделируются с помощью уравнений Навье-Стокса, записанных в цилиндрических координатах. Для расчета использовалась модель турбулентности SST (Shear Stress Transport), и предполагалось, что газ является идеальным.

Физические характеристики этой модели и сетки разлагаются в приложении 1

Ниже разлагаются результаты расчетов для разных угловых скоростей.

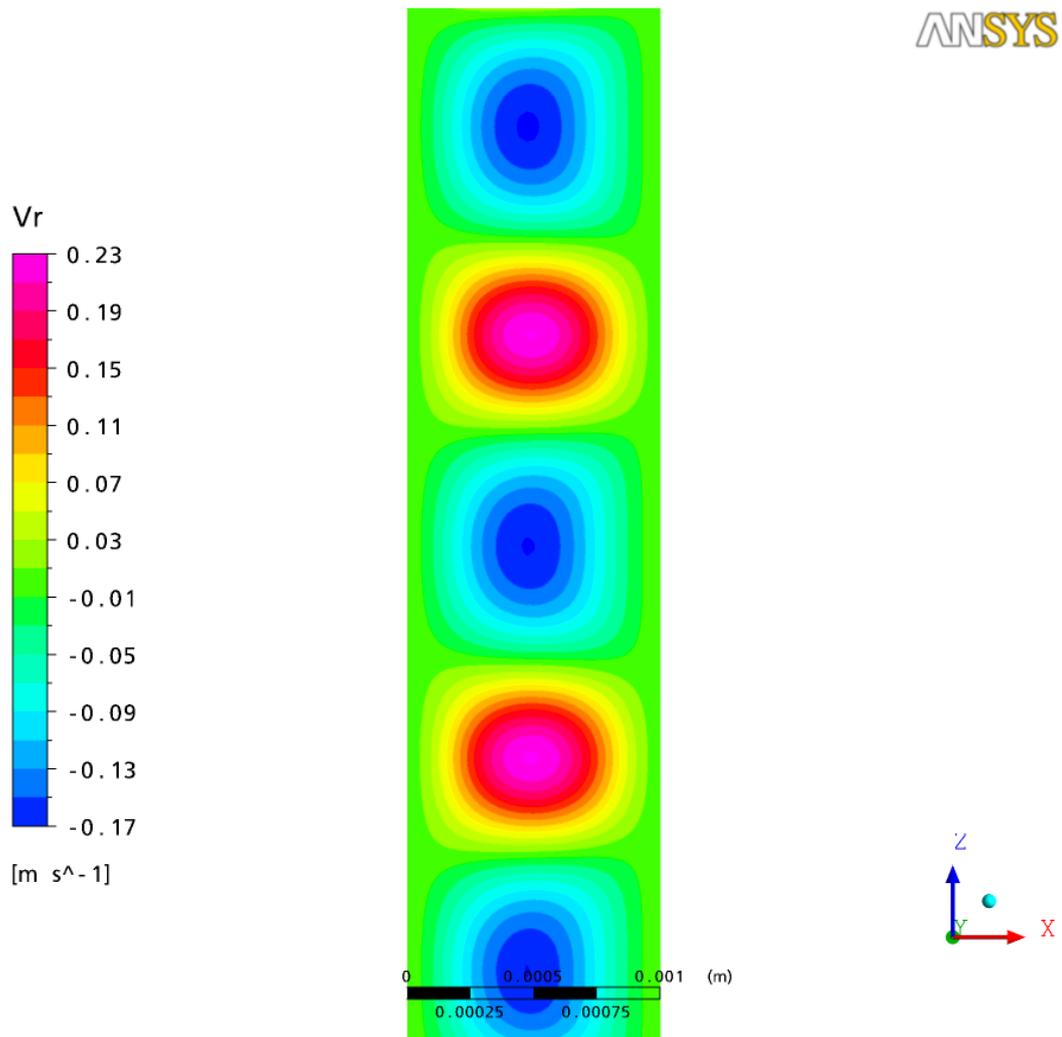
### **3.1.1 Расчеты для физической модели 1 при $\Omega_1 = 300 \text{ рад./сек.}$ и $\Omega_2 = 0$**

Граничные условия: условие прилипания на адиабатических стенках цилиндров, условия вращательной и поступательной периодичности на остальных границах

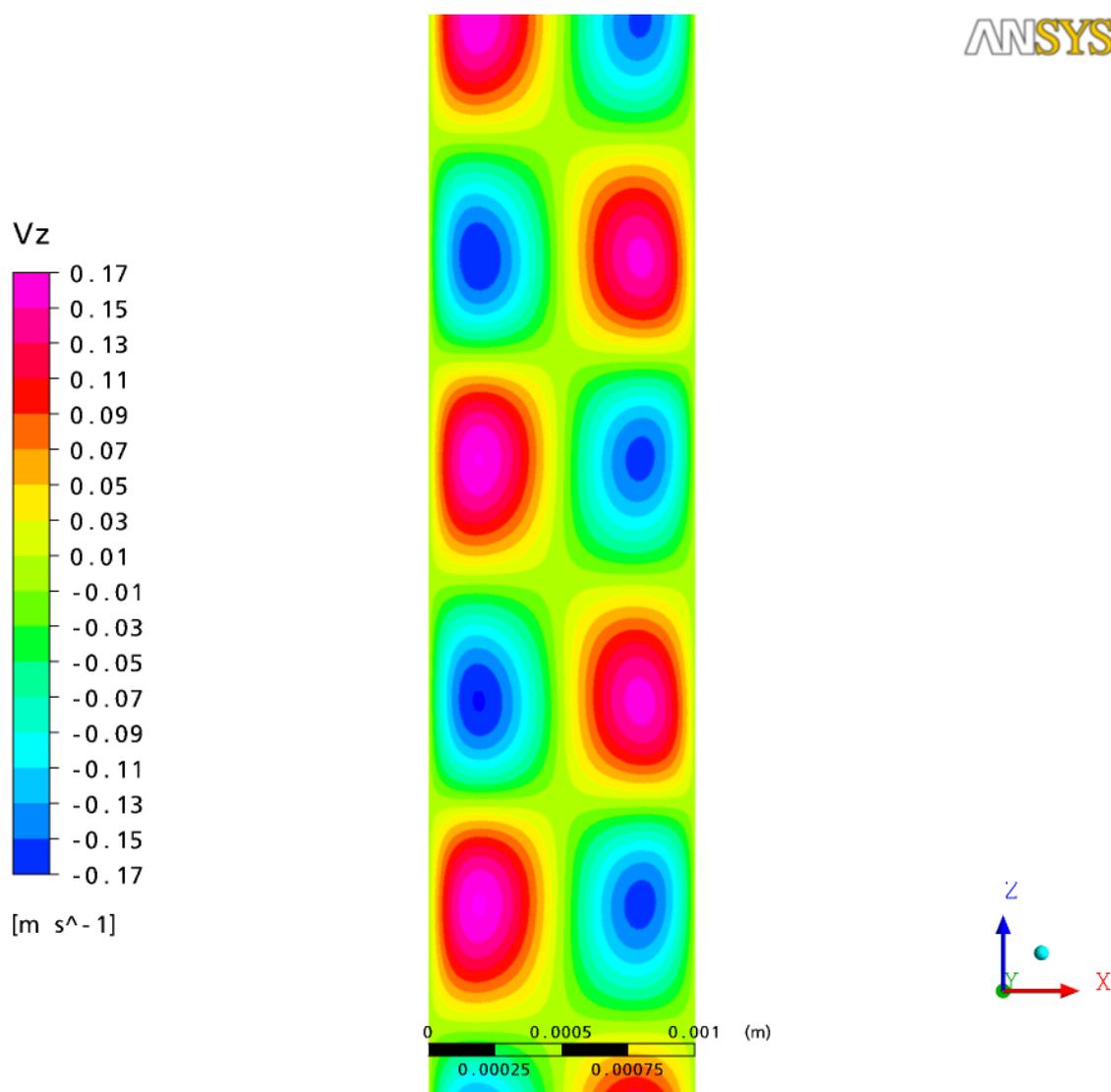
Сетка была построена с помощью программы ANSYS ICEM CFD. Сетка является структурированной, содержит более 2 миллионов ячеек (рис. 3).

В задаче проводятся расчеты с применением коммерческой программы ANSYS CFX (лицензия МФТИ). Рассматриваемые течения моделируются с помощью уравнений Навье-Стокса, записанных в цилиндрических

координатах. Для расчета использовалась модель турбулентности SST (Shear Stress Transport), и предполагалось, что газ является идеальным.



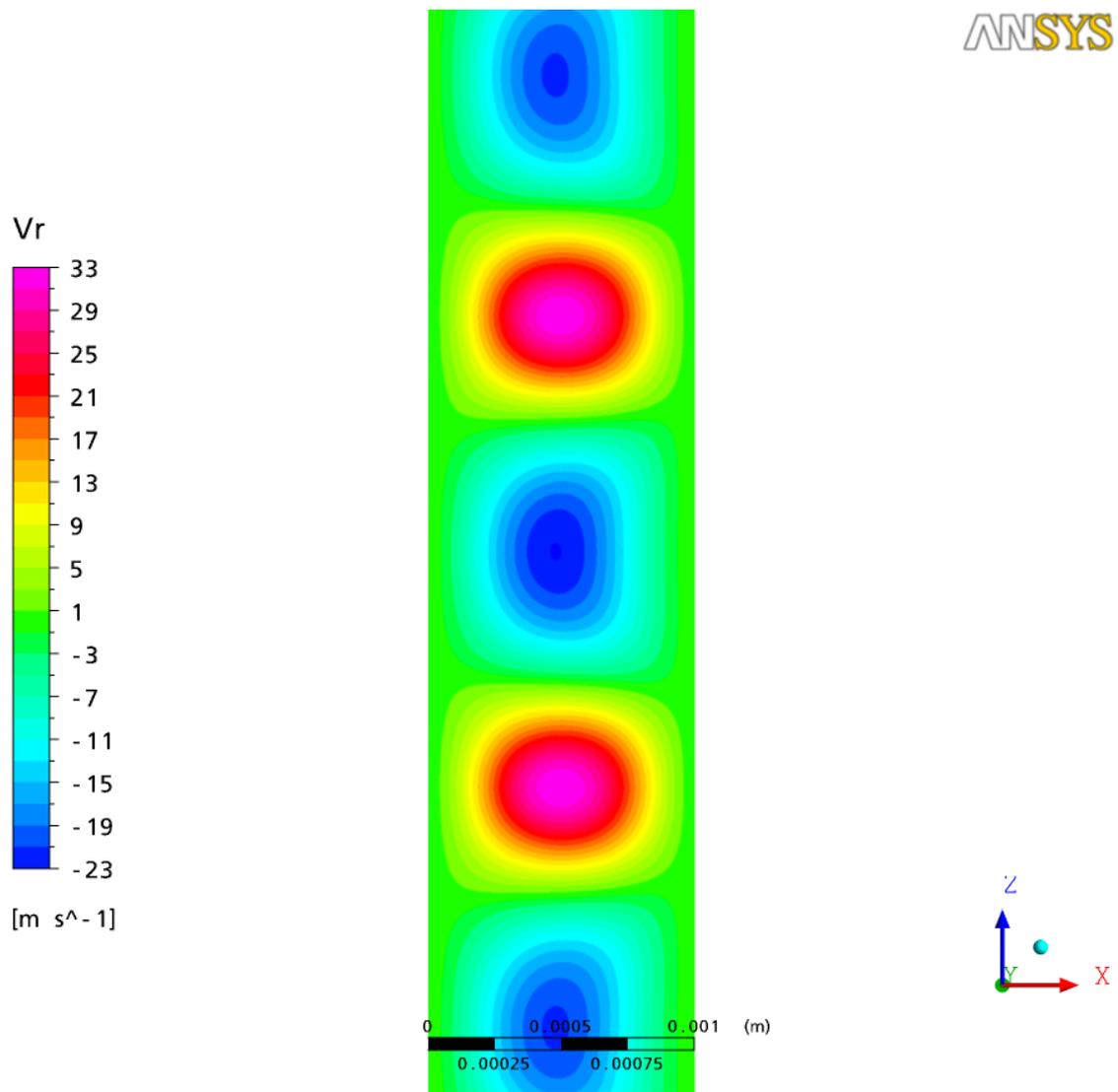
**Рис.3.3:** Распределение скорости  $V_r$  при  $\Omega_1 = 300 \text{ рад./сек.}$  и  $\Omega_2 = 0$



**Рис.3.4:** Распределение скорости  $V_z$  при  $\Omega_1 = 300 \text{ рад./сек.}$  и  $\Omega_2 = 0$

### 3.1.2 Расчеты для физической модели 1 при $\Omega_1 = 38000 \text{ рад./сек.}$ и $\Omega_2 = 0$

Граничные условия: условие прилипания на адиабатических стенках цилиндров, условия вращательной и поступательной периодичности на остальных границах



**Рис.3.5:** Распределение скорости  $V_r$  при  $\Omega_1 = 38000 \text{ рад./сек.}$  и  $\Omega_2 = 0$

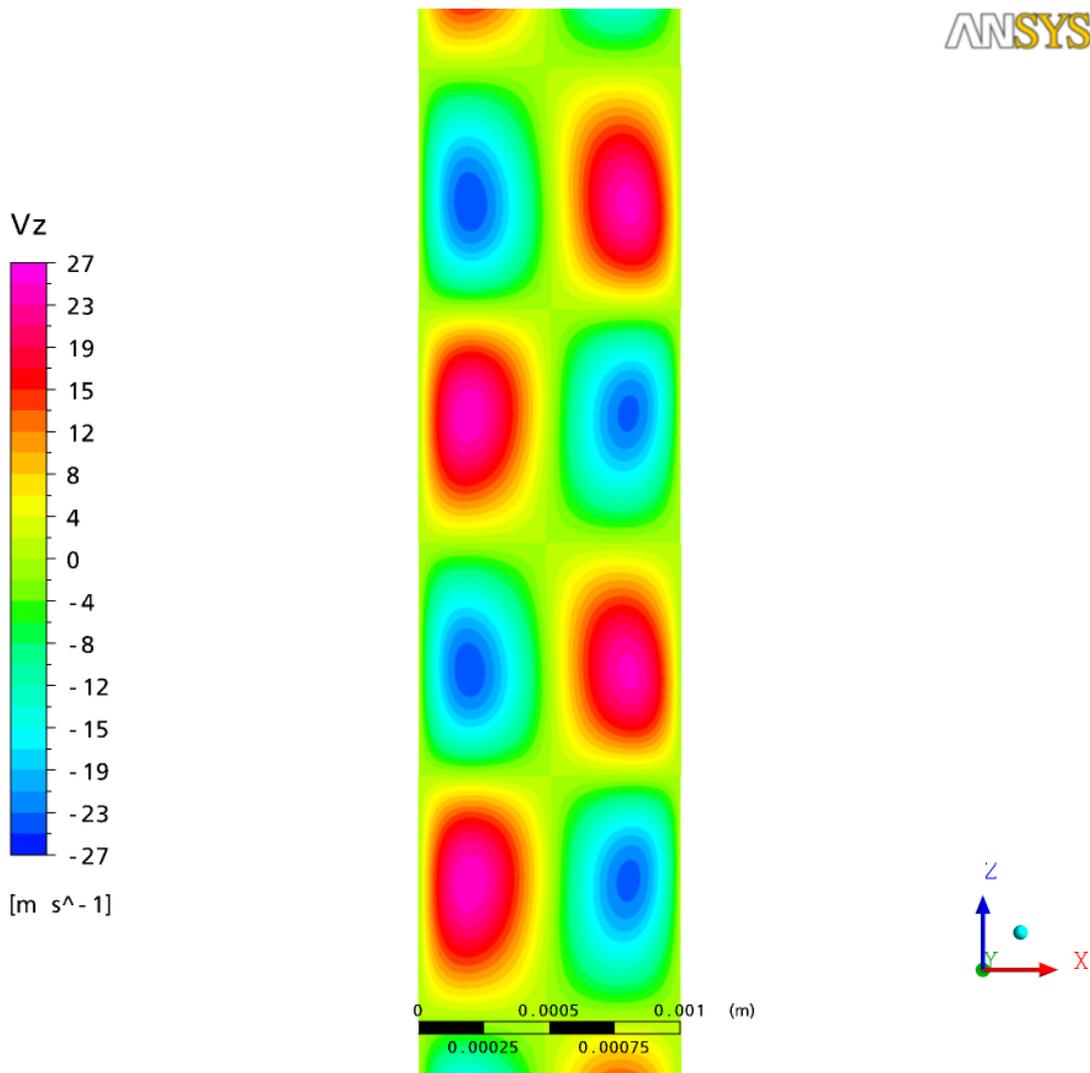
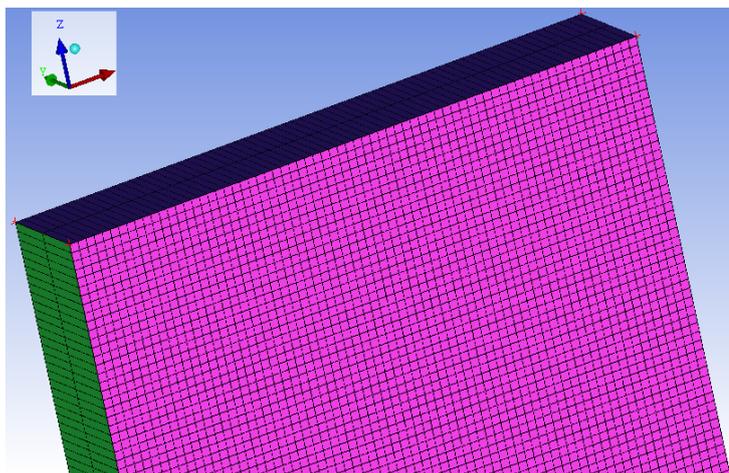


Рис.3.6: Распределение скорости  $V_z$  при  $\Omega_1 = 38000 \text{ рад./сек.}$  и  $\Omega_2 = 0$

### 3.2 Физическая модель II

Рассмотрим аналогичную модель с такими параметрами: ( $h = 0.1 \text{ м}$ ,  $R_1 = 0.100 \text{ м}$  и  $R_2 = 0.101 \text{ м}$ ) и новый прямоугольный параллелепипед с размерами  $0.000175 \text{ м} \times 0.001 \text{ м} \times 0.1 \text{ м}$ .

Характерная длина: радиус внутреннего цилиндра  $R_1 = 0.100 \text{ м}$ .

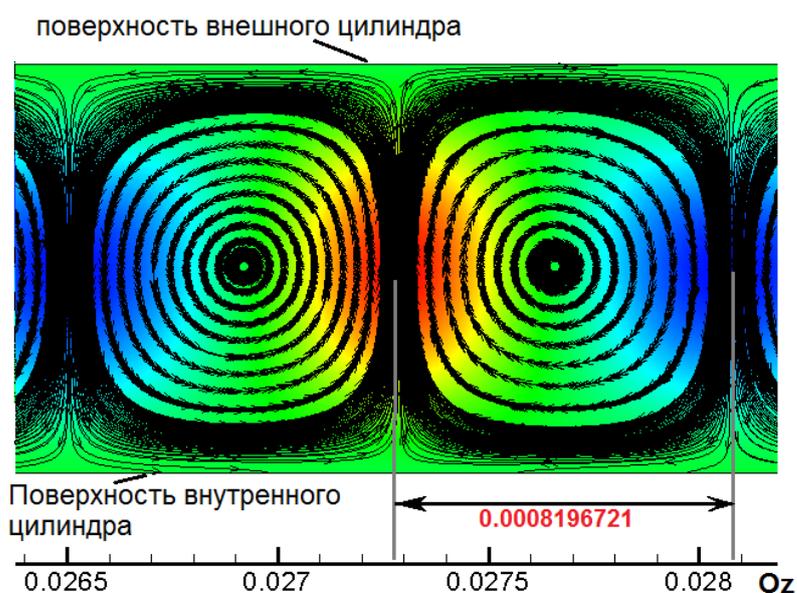


**Рис. 3.7.** Сетка в рассматриваемой зоне

Физические характеристики этой модели и сетки разлагаются в приложении 2

### 3.2.1 Расчеты для случая $\Omega_2 = 0, \Omega_1 = 20 \text{ об./сек.}$ и $T_1 = T_2 = T_{\text{газ}} = 293^\circ \text{K}$

Результат: Появилась 61 пара одинаковых вихрей, имеющих равномерное распределение. Одна пара состоит из двух осесимметричных вихрей. В сечении  $Oxz$  размер каждого вихря =  $\Delta \times d$  где  $\Delta = |R_2 - R_1|$   $d = h / (61 \times 2) \approx 0.8196721 \text{ мм}$  (см. рис. 14).



**Рис. 3.8** Пара оси симметричного вихря

Распределения компонентов вектора скорости представлены на рис. 16.

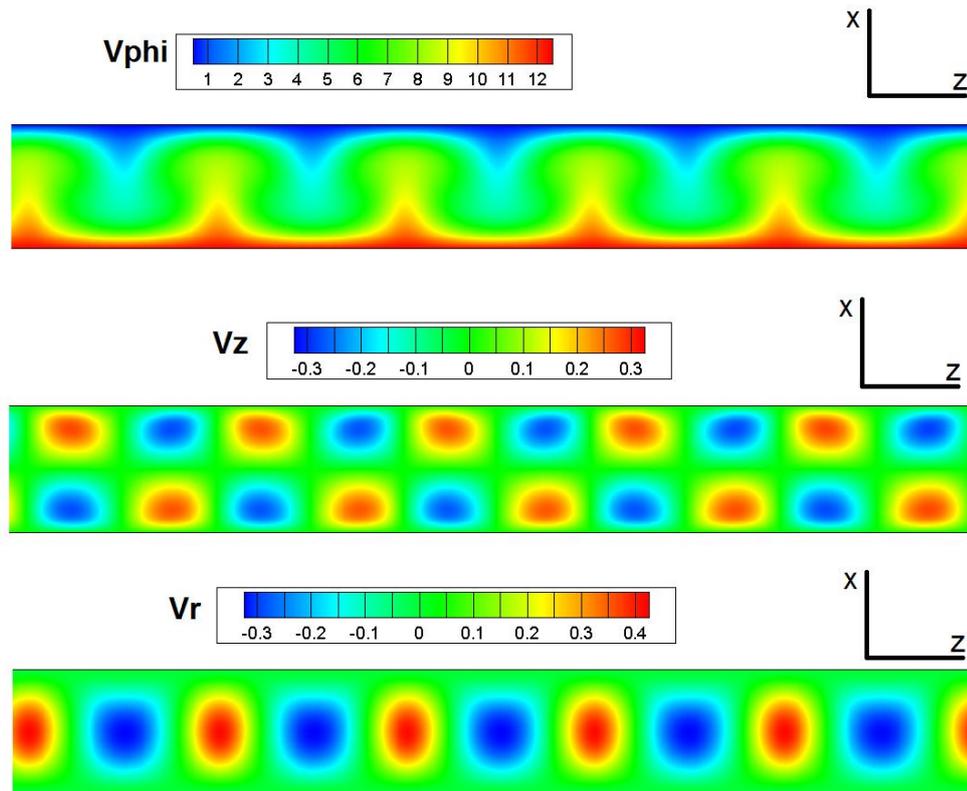


Рис. 3.9. Распределения поля скорости вихря

**3.2.2 Влияние температуры на структуру вихрей: фиксированное число Рейнольдса  $Re=8 \cdot 10^4$  (т.е.  $\Omega_1 = 20 \text{ об./сек}$ ,  $\Omega_2 = 0$ ),  $T_1 = T_{\text{вз}} = 293^\circ \text{K}$ ,  $T_2 = 400, 800, 1200, 1600, 2000, 2400^\circ \text{K}$**

Температура торможения:  $C_p T_0 = C_p T_1 + \frac{V_1^2}{2}$ ,

где  $V_1 = 6,2832 \text{ м/с}$ ;  $T_1 = 293 \text{ K}$ ;  $C_p = \frac{7}{2} R = 3,5 \cdot 287 = 1004,5 \text{ Дж / (Кг.К)}$ ,

поэтому  $T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2C_p} = 293 + \frac{6,2832^2}{2 \cdot 1,004,5} = 293,0786 \text{ (K)}$

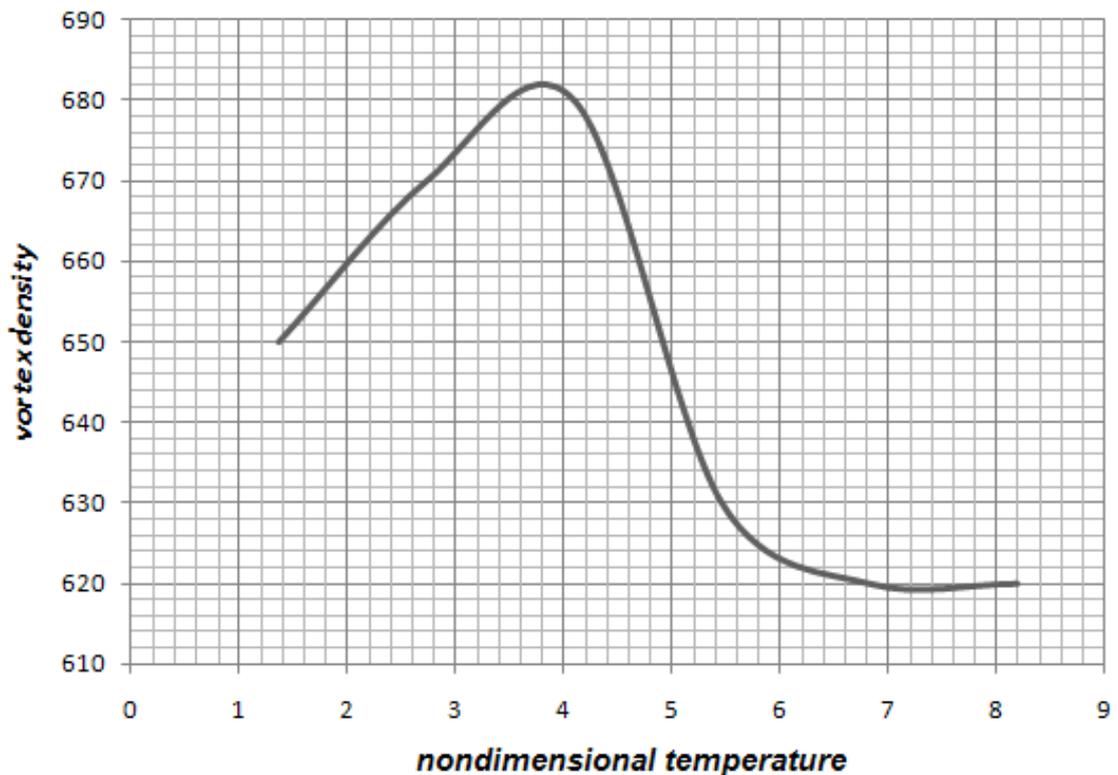
Характерная температура  $\bar{T} = \frac{T_2}{T_0}$ :

$T_2$	400	800	1200	1600	2000	2400
$\bar{T}$	1.3648	2.7296	4.0944	5.4592	6.8241	8.1889

Таблица 1.

Результат: При изменении температуры внешнего цилиндра, поле скоростей ещё является стационарным. Пары вихрей образуют периодическую структуру. Плотность пар вихрей (количество пар вихрей в размере одного метра цилиндра) незначительно изменяется (см. рис. 17).

Сначала, при  $\bar{T} \leq 4$  или  $T_2 < 1200^0 K$  количество пар монотонно увеличивается с повышением температуры. После этого оно уменьшается и, наконец, стабилизируется при  $\bar{T} \geq 7$  или  $T_2 > 2000^0 K$ .



**Рис. 3.10.** Зависимость плотности пар вихрей от температуры внешнего цилиндра

### 3.2.3 Влияние числа Рейнольдса на структуру течения

**Температуры цилиндров**  $T_1 = T_2 = T_{газ} = 293^0 K$  и  $\Omega_2 = 0$ . **Изменение Re** от  $4 \cdot 10^4$  до  $4 \cdot 10^5$  ( $\Omega_1$  от  $10$  об./сек до  $100$  об./сек)

Характерная угловая скорость: Линейная скорость внутреннего цилиндра при угловой скорости  $\Omega_1^* = 20$  об./с :  $V_1^* = 2\pi\Omega_1^*R_1 = 6,2832$  м/с.

$$\text{Безразмерная скорость } \bar{V}_1 = \frac{V_1}{V_1^*} = \frac{2\pi\Omega_1 R_1}{2\pi\Omega_1^* R_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_1^*}$$

$\Omega_1$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\bar{V}_1$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0

**Таблица 2.**

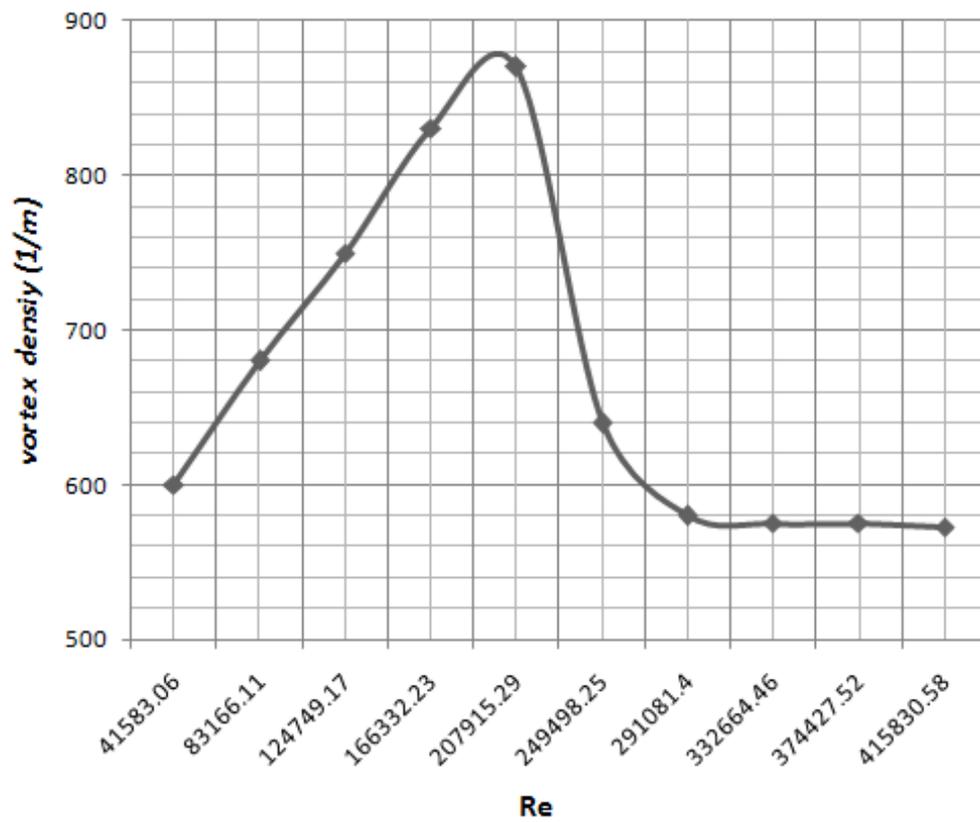
Число Рейнольдса  $Re = \frac{VD}{\eta}$ , где

$$D = R_1 = 0,100\text{ м}; V = 2\pi\Omega_1 R_1; \eta = 15,11 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}, \text{ поэтому } Re = \frac{2\pi\Omega_1 R_1^2}{\eta}.$$

$\Omega_1$ (об/с)	10	20	30	40	50
Re	41583,05	83166,11	124749,17	166332,23	207915,29
$\Omega_1$ (об/с)	60	70	80	90	100
Re	249498,25	291081,40	332664,46	374427,52	415830,58

**Таблица 3.**

Анализ полученных результатов показывает, что при изменении числа Рейнольдса от  $4 \cdot 10^4$  до  $4 \cdot 10^5$  (угловой скорости  $\Omega_1$  от 10 об/сек до 100 об/сек) количество пар вихрей изменяется в соответствии с кривой, показанной на рис. 18. При числе Рейнольдса  $Re=41583.05$  ( $\Omega_1 = 10$  об./сек) поле является стационарным и не содержит вихрей. Из графика 4 видно, что при числе Рейнольдса  $Re < 20 \cdot 10^4$  ( $\Omega_1 < 50$ ) количество пар вихрей монотонно возрастает с увеличением числа Рейнольдса (т.е. угловой скорости). В диапазоне изменения числа Рейнольдса от  $20 \cdot 10^4$  до  $30 \cdot 10^4$  (т.е.  $\Omega_1 \in [50, 70]$ ) количество вихрей быстро уменьшается при увеличении  $\Omega_1$ . После этого оно почти остается постоянным, хотя угловая скорость продолжает увеличиваться. При  $\Omega_1 \geq 50$  вихри переходят в нестационарный режим. Пары вихрей изменяют свою форму и становятся разными (см. рис. 19)



**Рис. 3.11.** Зависимость плотности пар вихрей от вращательной скорости внутреннего цилиндра

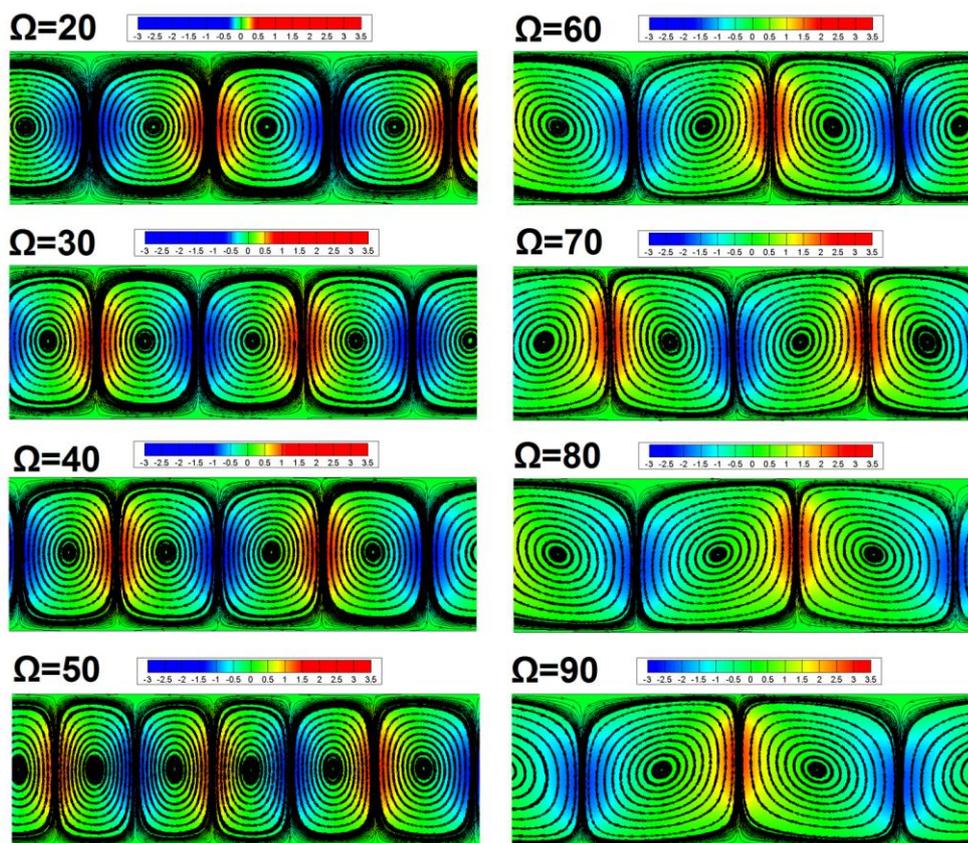


Рис. 3.12. Изменение поля вихрей при увеличении вращательной скорости

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате асимптотического анализа уравнений Навье-Стокса, описывающих течение сжимаемого газа между вращающимися цилиндрами, сформулированы математические модели для характерных режимов возмущенного течения. Определены параметры подобия и построена диаграмма режимов в условиях возникновения периодической системы вихрей.

Численными методами исследовано течение Куэтта-Тейлора вязкого сжимаемого газа. На основе физической модели получены численные результаты для разных температур поверхностей и угловых скоростей цилиндров. Исследовано влияние данных параметров на плотность и структуру вихрей в течении. Выявлены немонотонные зависимости числа вихрей (или размеров вихрей в окружном направлении) от числа Рейнольдса и от температуры поверхности внешнего цилиндра.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Приложение 1: Физические характеристики этой модели I и его CFX сетки в пункте 3.1.1

Domain	Nodes	Elements
Default Domain	76653	50000

Таблица 4. информация о сетке модели 1 пункт 2.1.1

<b>Domain - Default Domain</b>	
Type	Fluid
Location	fluid
<i>Materials</i>	
Air Ideal Gas	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Non Buoyant
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+00 [atm]
Heat Transfer Model	Thermal Energy
Include Viscous Dissipation Term	On
Turbulence Model	Laminar
<b>Domain Interface - angular</b>	
Boundary List1	angular Side 1
Boundary List2	angular Side 2
Interface Type	Fluid Fluid
<i>Settings</i>	
Interface Models	Rotational Periodicity
Axis Definition	Coordinate Axis
Rotation Axis	Coord 0.3
Mesh Connection	Direct

<b>Domain Interface - axial</b>	
Boundary List1	axial Side 1
Boundary List2	axial Side 2
Interface Type	Fluid Fluid
<i>Settings</i>	
Interface Models	Translational Periodicity
Mass And Momentum	Conservative Interface Flux
Mesh Connection	Direct

**Таблица 5: физические параметры для модели I в пункте 3.1.1**

<b>Domain</b>	<b>Boundaries</b>	
Default Domain	<b>Boundary - angular Side 1</b>	
	Type	INTERFACE
	Location	Periodic
	<i>Settings</i>	
	Heat Transfer	Conservative Interface Flux
	Mass And Momentum	Conservative Interface Flux
	<b>Boundary - angular Side 2</b>	
	Type	INTERFACE
	Location	Generic 2
	<i>Settings</i>	
	Heat Transfer	Conservative Interface Flux
	Mass And Momentum	Conservative Interface Flux
	<b>Boundary - axial Side 1</b>	
	Type	INTERFACE
	Location	Generic 3
	<i>Settings</i>	
	Heat Transfer	Conservative Interface Flux
	Mass And Momentum	Conservative Interface Flux

<b>Boundary - axial Side 2</b>	
Type	INTERFACE
Location	Generic 4
<i>Settings</i>	
Heat Transfer	Conservative Interface Flux
Mass And Momentum	Conservative Interface Flux
<b>Boundary - wall1</b>	
Type	WALL
Location	Wall
<i>Settings</i>	
Heat Transfer	Adiabatic
Mass And Momentum	No Slip Wall
Angular Velocity	3.0000e+02 [radian s^-1]
Wall Velocity	Rotating Wall
Axis Definition	Coordinate Axis
Rotation Axis	Coord 0.3
<b>Boundary - wall2</b>	
Type	WALL
Location	Generic 1
<i>Settings</i>	
Heat Transfer	Adiabatic
Mass And Momentum	No Slip Wall

**Таблица 6: Граничные условия для модели 1 пункт 3.1.1**

**Приложение 2: Физические характеристики модели I и CFX сетки в пункте 3.1.2**

<b>Domain</b>	<b>Nodes</b>	<b>Elements</b>
Default Domain	213213	140000

**Таблица 1.** информация о сетке модели 1

Type	Fluid
Location	fluid
<i>Materials</i>	
Air Ideal Gas	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Non Buoyant
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	7.9640e+02 [Pa]
Heat Transfer Model	Total Energy
Include Viscous Work Term	On
Turbulence Model	Laminar
<b>Domain Interface - angular</b>	
Boundary List1	angular Side 1
Boundary List2	angular Side 2
Interface Type	Fluid Fluid
<i>Settings</i>	
Interface Models	Rotational Periodicity
Axis Definition	Coordinate Axis
Rotation Axis	Coord 0.3
Mesh Connection	Direct

**Таблица 7:** физические параметры для модели I в пункте 3.1.2

<b>Domain</b>	<b>Boundaries</b>	
Default Domain	<b>Boundary - angular Side 1</b>	
	Type	INTERFACE
	Location	Periodic
	<i>Settings</i>	
	Heat Transfer	Conservative Interface Flux
	Mass And Momentum	Conservative Interface Flux
	<b>Boundary - angular Side 2</b>	
	Type	INTERFACE
	Location	Generic 4
	<i>Settings</i>	
	Heat Transfer	Conservative Interface Flux
	Mass And Momentum	Conservative Interface Flux
	<b>Boundary - down</b>	
	Type	WALL
	Location	Generic 1
	<i>Settings</i>	
	Heat Transfer	Adiabatic
	Mass And Momentum	No Slip Wall
	Angular Velocity	3.8000e+04 [radian s <sup>-1</sup> ]
	Wall Velocity	Rotating Wall
	Axis Definition	Coordinate Axis
	Rotation Axis	Coord 0.3
	<b>Boundary - up</b>	
	Type	WALL
	Location	Generic 2
	<i>Settings</i>	

Heat Transfer	Adiabatic
Mass And Momentum	No Slip Wall
Angular Velocity	3.8000e+04 [radian s <sup>-1</sup> ]
Wall Velocity	Rotating Wall
Axis Definition	Coordinate Axis
Rotation Axis	Coord 0.3
<b>Boundary - wall1</b>	
Type	WALL
Location	Wall
<i>Settings</i>	
Heat Transfer	Adiabatic
Mass And Momentum	No Slip Wall
Angular Velocity	3.8000e+04 [radian s <sup>-1</sup> ]
Wall Velocity	Rotating Wall
Axis Definition	Coordinate Axis
Rotation Axis	Coord 0.3
<b>Boundary - wall2</b>	
Type	WALL
Location	Generic 3
<i>Settings</i>	
Heat Transfer	Adiabatic
Mass And Momentum	No Slip Wall

**Таблица 8: Граничные условия для модели 1 в пункте 3.1.2**

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. Ч, Гидродинамика и гидромагнитная устойчивость, Дувр, Нью-Йорк, 1961, 272-381.
2. П. Г. Дразин и В. Г. Рейд, Гидродинамическая устойчивость, издательство Кембриджского университета, 2-е изд., Кембридж, Англия, 2004, 69-123.
3. П. Чоссат, Г Иоосс, Проблема Куэтта-Тейлора, М.: Мир, 1994. *Synge J L Proc. R. Soc. Can.* **27** 1 (1933)
4. Х. Шлихтинг, Теории пограничного слоя, Спрингэр, 7 ред., Берлин, 1979, 83-111; 449-554. Chandrasekhar S *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford: Clarendon Press, 1961)
5. Г.И. Тейлор, Устойчивость вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися цилиндрами, Философские труды Королевского общества в Лондоне. Серия А, 223 (1923), 289-343.
6. Доннелли, Р.Дж, Тейлор-Куэтта: первые дни, Физика Сегодня, № 0,11, 44 (1991), 32 -39.
7. Р. Тагг, Проблема Куэтта-Тейлора, Нелинейная Наука Сегодня, 4 (1994) 2-25.
8. М. Бреннер, Х. Стоун, Современная классическая физика через таботы Г. И. Тейлора, Физики Сегодня, № 5, 2000, 30-35.
9. Л. Рэля, О динамике вращающихся жидкостей, Трудах Королевского общества Лондона. Серия А, т.. 93, № 648. (1 марта 1917), 148-154.
10. Т. Карман, 1934, Некоторые аспекты проблемы турбулентности. Труды. 4-й Интер. Конгресса. Для прикладной механики., Кембридж, Англия, 54-91. Также Собрание сочинений (1956), том 3, Butterworths Научные публикации, Лондон, 120-155.
11. Х. А. Снайдер, Устойчивость вращающихся Куэтта. II. Сравнение с численными результатами, Физика Жидкости, 11 (1968) 1599-1605.
12. А. Эссер и С. Гроссманн, Аналитическое выражение для Тейлор-Куэтта границы устойчивости, Физика Жидкости, 8 (7), 1996, 1814-1819.

13. Д. Коулз, переход в круговой течения Куэтта, *Механика жидкости*, 21 (1965), 385-425.
14. Э. Р. Крюгер, А. Гросс & Р.С. ДиПрима, Об относительной важности Тейлор-вихря и неосесимметричных режимы в потоке между вращающимися цилиндрами, *Механика жидкости*, 24 (1966), 521-538.
15. Дж.П. Голлуб и Х.Л. Свиннеи, Возникновение турбулентности во вращающейся жидкости, *Phys. Rev. Lett.*, 35, 1975, 927-930.
16. С.Д. Андерек, С. С. Лю, и Х.Л. Суинни, Режимы течения в круговой системе Куэтта с независимо вращающимися цилиндрами, *Механика жидкости.*, 164 (1986), pp 155-183.
17. В.Ф. Лэнгфорд, Р. Тагг, Е.Дж. Костелич, Х.Л. Суинни & М. Голубицкий, Первичные неустойчивости и би-критичности в потоке между противоположно вращающимися цилиндрами, *Физ. Жидкости*, 31(1998), 776-785.
18. К.А. Хинко Переходы в небольшом зазорном пределе Тейлор-Куэтта течения, Университет штата Огайо Физика Летний институт, РЭУ Лето 2003; Советник: Доктор С.Д. Андерек, факультет физика, Университета штата Огайо, 2003.
19. Х. Файст & Б. Экхардт, переход от системы Куэтта-Тейлора к системе плоскости Куэтта, *Физ. Преподобный E 61* (2000), 7227-7230.
20. A. Prigent, O. Dauchot, "Barber pole turbulence" in large aspect ratio Taylor-Couette flow, *arXiv:cond-mat/0009241 v1*, 15 Sep 2000.
21. Х.С. Доу, Механизм неустойчивости потока и перехода к турбулентности, *Международный журнал нелинейной механики*, том 41, май 2006 г., 512-517.
22. Х.С. Доу, Физика нестабильности потока и турбулентного перехода в сдвиговых течениях, *Технический отчет*, Национальный университет Сингапура, 2006.
23. Х.С. Доу, Б.С. Кхоо, К.С. Йео, турбулентный переход в плоскости Куэтта, *Proc. из Пятая международная конференция по механике жидкости и газа*, Под редакцией. Ф. Чжуан и Дж. Ли, Университет Цинхуа Press & Springer-Verlag, 2007, pp.77.

24. Х.С. Доу, Три важных теоремы для устойчивости течения, Proc. Пятого Интернационала Конференция по механике жидкости и газа, Под редакцией. Ф. Чжуан и Дж. Ли, Университет Цинхуа Пресс & Springer-Verlag, 2007, с.57-60.
25. Х.С. Доу, Б.С. Кхоо, К.С. Йео Нестабильность течения Тэйлор-Куэтта между концентрическими вращающимися цилиндрами,, Международный журнал Наука теплота, Том 47, № 11, 1422-1435.
26. Д.А. Шалыбков Гидродинамическая и гидромагнитная устойчивость течения Куэтта Успехи физических наук, том 179, №9, 2009.
27. Blaes O M, Glatzel W Mon. Not. R. Astron. Soc. **220** 253 (1986).
28. Couette M *Ann. Chim. Phys.* **21** 433 (1890)
29. Mallock A *Philos. Trans. R. Soc. London A* **187** 41 (1896)
30. Lord Rayleigh *Proc. R. Soc. London A* 93 148 (1917)
31. Synge J L *Proc. R. Soc. Can.* **27** 1 (1933)
32. Synge J L *Proc. R. Soc. London A* 167 250 (1938)
33. Chandrasekhar S *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford: Clarendon Press, 1961)
34. Taylor G J *Philos. Trans. R. Soc. London A* 223 289 (1923)
35. Dutcher C S, Muller S J *Phys. Rev. E* 75 047301 (2007)
36. Drazin P G, Reid W H *Hydrodynamic Stability* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981)
37. DiPrima R C, Swinney H L, in *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* (Topics in Applied Physics, Vol. 45, Eds H L Swinney, J P Gollub) (Berlin: Springer-Verlag, 1981) p. 139
38. Tagg R *Nonlin. Sci. Today* 4 (3) 1 (1994)
39. Chossat P, Iooss G *The Couette-Taylor Problem* (New York: Springer-Verlag, 1994)

40. 15th Intern. Cowette-Taylor Workshop.,9-72 July2007.,LMPG,Le Havre Univ., France; *J Phys.: Conf. Ser.* **137** (2008)
41. Brevdo L, Bridges T J *Proc. R. Soc. London A* **453** 1345 (1997)
42. Taylor G I *Proc. R. Soc. London A* **157** 546 (1936)
43. Dubrulle B et al. *Phys. Fluids* **17** 095103 (2005)
44. Ji H et al. *Nature* **444** 343 (2006)
45. Schultz-Grunow F Z. *Angew. Math. Mech.* **39** 101 (1959)
46. Hollerbach R, Fournier A *AIP Conf. Proc.* **733** 114 (2004)
47. Andereck C D, Liu S S, Swinney H L *J Fluid Mech.* **164** 155 (1986)
48. Balbus S A, Hawley J F *Rev. Mod. Phys.* **70** 1 (1998)
49. Balbus S A *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **41** 555 (2003)
50. Mahajan S M, Krishan V *Astrophys. J* **682** 602 (2008)
51. Donnelly R J, Ozima M *Phys. Rev. Lett.* **4** 497 (1960)
52. Donnelly R J, Ozima M *Proc. R. Soc. London A* **266** 272 (1962)
53. Donnelly R J, Caldwell DR *J Fluid Mech.* **19** 257 (1964)
54. Brahme A *Phys. Scr.* **2** 108 (1970)
55. Sisan D R et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 114502 (2004)
56. Chang T S, Sartory W K *Proc. R. Soc. London A* **301** 451 (1967)
57. Hassard B D, Chang T S, Ludford GSS *Proc. R. Soc. London A* **327** 269(1972)
58. Soundalgekar V M, Ali M A, Takhar H S *Int. J Energy Res.* **18** 689 (1994)
59. Chen C-K, Chan M H *J. Fluid Mech.* **366** 135 (1998)
60. Goodman U H *J. Fluid Mech.* **17** 52 (1963)
61. Goodman J, Ji H *J. Fluid Mech.* **462** 365 (2002)

62. Rudiger G, Shalybkov D *Phys. Rev. E* **66** 016307 (2002)
63. Rudiger G, Schultz M, Shalybkov D *Phys. Rev. E* **67** 046312 (2003)
64. Wang Z et al. *Phys. Plasmas* **15** 102109 (2008)
65. Willis A P, Barengi C F *Astron. Astrophys.* **388** 688 (2002)
66. Velikhov EP et al. *Phys. Lett. A* **356** 357 (2006)
67. Shalybkov D A, Rudiger G, Schultz M *Astron. Astrophys.* **395** 339 (2002)
68. Michael D H *Mathematika London* **1** 45 (1954)
69. Кадомцев Б Б, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 2 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 132
70. Edmonds F N (Jr.) *Phys. Fluids* **1** 30 (1958)
71. Shalybkov D *Phys. Rev. E* **73** 016302 (2006)
72. Shalybkov D *Phys. Rev. E* **75** 047302 (2007)
73. Shalybkov D *Phys. Rev. E* **76** 027302 (2007)
74. Tayler R J J. *Nucl. Energy C* **3** 266 (1961)
75. Tayler R J *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **161** 365 (1973)
76. Rudiger G et al. *Phys. Rev. E* **76** 056309 (2007)
77. Ogilvie G I, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **279** 152 (1996)
78. Rudiger G et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **377** 1481 (2007)
79. Rudiger G et al. *Astron. Nachr.* **328** 1158 (2007)
80. Bernstein I B et al. *Proc. R. Soc. London A* **244** 17 (1958)
81. Frieman E, Rotenberg M *Rev. Mod. Phys.* **32** 898 (1960)
82. Lundquist S *Phys. Rev.* **83** 307 (1951)
83. Newcomb W A *Ann. Physics* **10** 232 (1960)
84. Suydam B R, in *Proc. Second United Nat. Intern Conf. on the*

*Peaceful uses of Atomic Energy* Vol. 31 (Geneva, 1958) p. 157

[Сайдем Б, в сб. Труды Второй Междунар. конф. по мирному использованию атомной энергии. Избранные докл. иностранных ученых. Физика горячей плазмы и термоядерные реакции (Под ред. В Ф Кадицина) (М.: Изд-во Главного упр. по использованию атомной энергии при СМ СССР, 1959) с. 89]

85. Bondeson A, Iacono R, Bhattacharjee A *Phys. Fluids* **30** 2167 (1987)
86. Wang C et al. *J. Plasma Phys.* **70** 651 (2004)
87. Tayler R J *Rev. Mod. Phys.* **32** 907 (1960)
88. Tayler R J, Hopgood F R A *J. Nucl. Energy C* **5** 355 (1963)
89. Longaretti P-Y *Phys. Lett. A* **320** 215 (2003)
90. Hollerbach R, Rudiger G *Phys. Rev. Lett.* **95** 124501 (2005)
91. Rudiger G et al. *Astron. Nachr.* **326** 409 (2005)
92. Rudiger G, Shalybkov D *Phys. Rev. E* **69** 016303 (2004)
93. Wardle M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **307** 849 (1999)
94. Balbus S A, Terquem C *Astrophys. J.* **552** 235 (2001)
95. Sano T, Stone J M *Astrophys. J.* **570** 314 (2002)
96. Sano T, Stone J M *Astrophys. J.* **577** 534 (2002)
97. Rudiger G, Kitchatinov L L *Astron. Astrophys.* **434** 629 (2005)
98. Rudiger G et al. *Astron. Nachr.* **330** 12 (2009)
99. Chanmugam G *Mon. Not. — Astron. Soc.* **187** 769 (1979)
100. Umurhan O M *Mon. Not. — Astron. Soc.* **365** 85 (2006)
101. Dubrulle B et al. *Astron. Astrophys.* **429** 1 (2005)
102. Rudiger G et al. *Astrophys. J. Lett.* **649** L145 (2006)
103. Stefani F et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 184502 (2006)

104. Stefani F et al. *Astron. Nachr.* **329** 652 (2008)
105. Liu W, Goodman J, Ji H *Phys. Rev. E* **76** 016310 (2007)
106. Liu W *Phys. Rev. E* **77** 056314 (2008)
107. Mikhailovskii A B et al. *Phys. Plasmas* **15** 014504 (2008)
108. Kao K.H., Chow C.Y. *Linear stability of compressible Taylor–Couette flow* // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* – V.4, V5 – P. 984–996.
109. Боголепов В.В., Липатов И.И. *Влияние сжимаемости на структуру вихрей Гертлера* // *Механика жидкости и газа.* – 1997. – Т. 1. С. 36–47.
110. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика* М.: Физматлит, 1963.
111. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика.* Т. 6. Гидромеханика. – М.: Наука, 1986.
112. Richard D. Sandberg *Governing equations for a new Navier-Stokes Solver in general cylindrical coordinates* // Report No. AFM-07/07, University of Southampton, 2007.
113. Н.С. Городецкая, В.И. Никишов, Л.В. Ткаченко *Численное моделирование развития вихрей тейлора-гертлера в нестационарном течении куэтта. 1. Влияние начальной энергии возмущений* // ISSN 1561-9087 Прикладная гидромеханика, 2012, том 14, N 2 С. 3-16
114. А.М. Балонишников *Закон сопротивления для турбулентного течения Тэйлора-Куэтта при очень больших числах Рейнольдса*// *Журнал технической физики*, 2003, том 73, вып. 2.
115. Д.А. Шалыбков *Гидродинамическая и гидромагнитная устойчивость течения Куэтта* *Успехи физических наук*, том 179, №9, 2009.
116. Андрейчиков И. П. *Расчет вторичного течения между вращающимися цилиндрами* // *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1975. № 2. С. 150-152.

117. Андрейчиков И. П. Ветвление вторичных режимов движения жидкости между вращающимися цилиндрами // Изв. АН СССР, МЖГ, 1977. № 1. С. 47-53.
118. Андрейчиков И. П., Овчинникова С. Н. Нелинейная устойчивость течения Куэтта между вращающимися цилиндрами // Тр. 5-го Всесоюзн. семинара по числ. методам механики вязкой жидкости. Часть 1. Новосибирск: СО АН СССР, 1975. С. 70-78.
119. Андрейчиков И. П., Петровская Н.В., Юдович В. И. Бифуркации и стохастические движения в некоторых гидродинамических системах // Рук. деп. в ВИНТИ, 1980. № 3485-80. 7 с.
120. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
121. Арнольд В. И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Динамическис системы. Т. 5. Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5-218.
122. Арнольд В. И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Динамическис системы. Т. 1. Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. С. 7-149.
123. Афендииков А. Л. Ветвление при наличии группы симметрий и бифуркация вихрей Тейлора // ИПМ АН СССР, 1983. Препр. № 61.
124. Афендииков А. Л., Бабенко К. И. О вихрях Тейлора // ИПМ АН СССР, 1982. Препр. № 3.
125. Афендииков А. Л., Бабенко К. И. О математическом моделировании турбулентности в течениях вязкой несжимаемой жидкости // Матем. моделирование. 1989. Т. 1. № 18. С. 45-74.
126. Афендииков А. Л., Бабенко К. И. Об устойчивости вихрей Тейлора // ИПМ АН СССР, 1983. Препр. № 32.
127. Бабенко К. И., Афендииков А. «71., Юрьев С. П. Об устойчивости и бифуркации течения Куэтта между вращающимися цилиндрами // ИПМ АН СССР, 1981. Препр. № 99.

128. Бабенко К. И., Афендикова А. «71., Юрьев С. П. О бифуркации течения Куэтта между вращающимися цилиндрами в случае двукратного собственного значения // ДАН СССР, 1982. Т. 266. № 1. С. 73-78.
129. Барковский Ю.С., Юдович В. И. Рождение вихрей Тейлора в случае разновращающихся цилиндров и спектральные свойства одного класса краевых задач // ДАН СССР, 1978. Т. 242. № 4. С. 784-787.
130. Барковский Ю. С., Юдович В. И. Спектральные свойства одного класса краевых задач // Матем. сборник, 1981. Т. 114(156). № 3. С. 438-450.
131. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Наука, 1971. 350 с.
132. Вайнберг М.М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений // М.: Наука, 1969. 527 с.
133. Вайнбергер Г. Ф. Изменение устойчивости в течении Куэтта // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974. С. 228-236.
134. Василенко Ю. Г., Кузнецов Е. А., Львов В. С., Нестерихин Ю. Е., Соболев В.С., Спектор М.Д., Тимохин С. А., Уткин Е.Н., Шмойлов Н. Ф.
135. О зарождении вихрей Тейлора в течении Куэтта // ПМТФ, 1980. № 2. С. 58-64.
136. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН, 1957. Т. XII. № 5. С. 3-122.
137. Гантмахер Ф. Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.-Л: Гостехиздат, 1950. 359 с.
138. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

139. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 318 с.
140. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея-Бенара. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 247 с.
141. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение // М.: Наука, 1981. 366 с.
142. Гольдштик М.А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность // Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
143. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
144. Ди Прима. Применение метода Галеркина к задачам устойчивости в гидродинамике // Сб. «Механика». Период, сб. перев. ин. статей. М. 1956. № 3(37). С. 53-61.
145. Ди Прима Р.С., Суинни Х.Л. Неустойчивости и переход в течении между концентрическими вращающимися цилиндрами // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. С. 169-217.
146. Должанский Ф. В. Лекции по геофизической гидродинамике // М.: ИВМ РАН, 2006. 377 с.
147. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа // М.: Наука, 1974. 160 с.
148. Доннели Р. Д. Экспериментальное определение пределов устойчивости // Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964. С. 54-67.
149. Дэвис С. Р. О принципе изменения устойчивости // Сб. «Механика». Период, сб. перев. ин. статей. М. 1970. № 4. С. 56-73.
150. Есипов А.А., Юдович В. И. Принцип Рэлея и задача о возникновении конвекции в длинных цилиндрах // Всесоюзн. конф. «Совр. проблемы тепловой гравитационной конвекции». Минск: ИТМО АН БССР, 1971. С. 41-43.

151. Есипов А.А., Юдович В. И. Предельное поведение собственных значений краевых задач в неограниченно расширяющихся областях // Журнал выч. мат. и математич. физики, 1973. Т 13. № 2. С. 421-432.
152. Есипов А. А., Юдович В. И. Асимптотика собственных значений первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения на длинном отрезке // Журнал выч. мат. и математич. физики, 1974. Т. 14. № 2. С. 342-349.
153. Жолондек Х. О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости // Матем. сборник, 1983. Т. 120. № 4. С. 473-499.
154. Журавлев Ф. А., Львов В. С., Нестерихин Ю. Е., Предтеченский А. А., Соболев В.С., Уткин Е.Н., Черных А.И. Методика и результаты исследования перехода к турбулентности в простых гидродинамических течениях // Автометрия, 1982. № 3. С. 4-15.
155. Зельдович Я. Б. О трении в жидкости между вращающимися цилиндрами // ИПМ АН СССР, 1979. Препр. № 139.
156. Иванилов Ю. П. Вторичные режимы в течении Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ, 1968. № 1. С. 118-121.
157. Иванилов Ю. П., Яковлев Г. Н. О бифуркации течений жидкости между вращающимися цилиндрами // ПММ, 1966. Т. 30. Вып. 4. С. 768-773.
158. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 300 с.
159. Колесов В. В. Устойчивость неизотермического течения Куэтта / / Изв. АН СССР, МЖГ, 1980. № 1. С. 167-170.
160. Колесов В. В. Колебательная вращательно-симметричная потеря устойчивости неизотермического течения Куэтта // Изв. АН СССР, МЖГ, 1984. № 1. С. 76-80.
161. Колесов В. В., Овчинникова С.Н. Устойчивость течения жидкости между нагретыми вращающимися цилиндрами // Изв. АН СССР, МЖГ, 1975. № 3. С. 32-36.

162. Колесов В.В., Романов М.Н. Монотонная и колебательная неустойчивость основного режима движения жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Рук. деп. в ВИНТИ, 2010. № 483-В2010. 27 с.
163. Колесов В. В., Романов М. Н. Пересечение бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн между вращающимися проницаемыми цилиндрами// Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск. 2009. С. 112-114.
164. Колесов В. В., Романов М. Н. Расчет бикритических точек в задаче об устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2009. № 5. С. 28-30.
165. Колесов В. В., Романов М. Н. Расчет нейтральных кривых, соответствующих потере устойчивости основного режима движения жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Неделя науки 2007. Ростов-на-Дону: Изд-во «ЦВВР», 2007. С. 37-39.
166. Колесов В. В., Романов М. Н. Расчет стационарных, периодических и квазипериодических движений вязкой жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Изв. РАН, МЖГ. 2010. № 6. С. 53-62.
167. Колесов В. В., Хоперский А. Г. Бикритические точки, отвечающие пересечению бифуркаций возникновения неизотермических вихрей Тейлора и азимутальных волн // Рук. деп. в ВИНТИ, 2001. № 769-В2001. 29 с.
168. Колесов В. В., Хоперский А. Г. Бикритические точки в неизотермической проблеме Куэтта-Тейлора // Изв. Высших учебных заведений. Сев.-Кав. Регион. 2002. № 2. С. 43-45.
169. Колесов В. В., Хоперский А. Г. Неизотермическая проблема Куэтта-Тейлора. Ростов н/Д Изд-во ЮФУ, 2009. 192 с.
170. Колесов В. В., Хоперский А. Г. Простейшие режимы движения жидкости вблизи пересечения бифуркаций возникновения неизотермических вихрей Тейлора и азимутальных воли // Изв. РАН, МЖГ. 2002. № 2. С. 97-109.

171. Колесов В. В., Юдович В. И. Переходы в малой окрестности точек пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн // Рук. деп. в ВИНТИ, 1995. № 3020-B95.
172. Колесов В. В., Юдович В. И. Расчет колебательных режимов в течении Куэтта вблизи точки пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн // Изв. РАН, МЖГ, 1998. № 4. С. 81-93.
173. Коулз Д. К вопросу о тейлоровской неустойчивости циркуляционного течения Куэтта // Тр. амер. общества инж. мех. Сер. Е. Прикладная механика, 1967. Т. 34. № 3. С. 78-84.
174. Кочин Н.Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Часть II. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
175. Кузнецов Е.А., Львов В.С., Предтеченский А.А., Соболев В.С., Уткин Е. Н. О проблеме перехода к турбулентности в течении Куэтта // Письма в ЖЭТФ, 1979. Т. 30. № 4. С. 226-229.
176. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
177. Линь Цзя Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд. иностр. литературы, 1958. 194 с.
178. Львов В.С., Нестерихин Ю.Е. Переход к турбулентности в простых гидродинамических течениях // Вести АН СССР, 1980. № 10. С. 2535.
179. Львов В.С., Предтеченский А.А., Черных А.И. Бифуркации и хаос в системе вихрей Тейлора: натурный и численный эксперимент // ЖЭТФ, 1981. Т. 80. № 3. С. 1099-1121.
180. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
181. Монин А. С. О природе турбулентности // Успехи физ. наук, 1978. Т. 125. Вып.1. С. 97-122.

182. Овчинникова С. Н. Устойчивость течения Куэтта в случае широкого зазора между вращающимися цилиндрами // ПММ, 1970. Т. 34. Вып.2. С. 302-307.
183. Овчинникова С. Н. Расчет бикритических точек в задаче Куэтта-Тейлора // Рук. деп. в ВИНТИ, 1997. № 895-В97. 11 с.
184. Овчинникова С. Н. Алгоритм расчета точек пересечения бифуркаций и коэффициентов амплитудных уравнений для задачи Куэтта-Тейлора // Рук. деп. в ВИНТИ, 1998. № 464-В98. 19 с.
185. Овчинникова С. Н. Нейтральные кривые и пересечения бифуркаций в задаче Куэтта-Тейлора // Симметрия и косимметрия в динамических системах физики и механики. SCDS-III. Лоо, 2002. С. 113-118.
186. Овчинникова С.Н., Юдович В. И. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами // ПММ, 1968. Т. 32. Вып.5. С. 858-868.
187. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Устойчивость и бифуркация течения Куэтта в случае узкого зазора между вращающимися цилиндрами // ПММ, 1974. Т. 38. Вып.6. С. 1025-1030.
188. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Пересечение бифуркаций в проблеме Куэтта-Тейлора. I. Нерезонансный случай // Рук. деп. в ВИНТИ, 2005. № 458-В2005. 33 с.
189. Рабинович М. И. Стохастические автоколебания в радиофизике и гидродинамике. Эксперименты и модели. // Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Горький, 1980. С. 5-23.
190. Рабинович М.И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
191. Странные аттракторы. Сб. статей под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова. М.: Мир, 1981. 253 с.
192. Стюарт Дж. Т. О нелинейной механике в теории гидродинамической устойчивости // Механика, 1959. № 3(55). С. 19-38.
193. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.

194. Уринцев А. Л. Расчет автоколебаний типа азимутальных волн, возникающих при потере устойчивости течения вязкой жидкости между концентрическими цилиндрами, вращающимися в разные стороны // ПМТФ, 1976. № 2. С. 68-75.
195. Шапакидзе Л. Д. Влияние вращения на устойчивость течения между двумя проницаемыми цилиндрами // Краевые задачи математической физики. 1. Тр. Тбил. матем. института, 1991. Т. 96. С. 123-138.
196. Шапакидзе Л. Д. Влияние проницаемости стенок на устойчивость течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами // Сообщ. АН Груз. ССР, 1982. Т. 108. № 3. С. 501-504.
197. Шапакидзе Л. Д. О бифуркации течений жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Сообщ. АН Груз. ССР, 1980. Т. 99. № 2. С. 325-328.
198. Шапакидзе Л. Д. Об устойчивости течения Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами // Изв. АН СССР, МЖГ, 1975. № 3. С. 146148.
199. Шапакидзе Л. Д. Устойчивость вязкого течения между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Сообщ. АН Груз. ССР, 1968. Т. 49. № 1. С. 19-24.
200. Шкадов В. Я. Стационарные течения вязкой жидкости между коаксиальными вращающимися цилиндрами после потери устойчивости // Изв. АН СССР, МЖГ, 1969. № 3. С. 81-86.
201. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // Научн. тр. НИИ механики МГУ, 1973. № 25. С. 1-192.
202. Шкадов В. Я. Численное исследование устойчивости гидродинамических течений и нелинейного взаимодействия возмущений // Числ. мет. механики сплошной среды. Новосибирск, 1981. Т. 12. № 4. С. 148-155.
203. Шкадов В. Я., Запрынов З. Д. Течения вязкой жидкости. Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1984. 200 с.

204. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // ДАН СССР, 1965. Т. 161. № 5. С. 1037-1040.
205. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости // ПММ, 1965. Т. 29. Вып.3. С. 453-467.
206. Юдович В. И. О бифуркации вращательных течений жидкости // ДАН СССР, 1966. Т. 169. № 2. С. 306-309.
207. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами // ПММ, 1966. Т. 30. Вып. 4. С. 688-698.
208. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости // ПММ, 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 638-655.
209. Юдович В. И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // ПММ, 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 450-459.
210. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону, Изд. РГУ, 1984. 191 с.
211. Юдович В. И. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Аннот. докладов 6-го Всесоюзн. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Фан, 1986. С. 661.
212. Якобсон М.В. Эргодическая теория одномерных отображений // Динамические системы. Т. 2. Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. С. 204232.
213. Ali M.A., Soundalgekar V.M. Effects of radial temperature gradient on the stability of a viscous flow between two rotating porous cylinders with a narrow gap // ZAMM, J. of Appl. Math, and Mech. 2001. V. 81. № 7. P. 457-464.
214. Andereck C. D., Dickman R., Swinney H. L. New flows in a circular Couette system with co-rotating cylinders // Phys. Fluids, 1983. V. 26. № 6. P. 1395-1401.

215. Beaudoin G., Jaffrin M.Y. Plasma filtration in Couette flow membrane devices // *Artif. Organs*, 1989. V. 13. № 1. P. 43-51.
216. Burkhalter J.E., Koschmieder E. L. Steady supercritical Taylor vortices after sudden starts // *Phys. Fluids*, 1974. V. 17. № 11. P. 1929-1935.
217. Chandrasekhak S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford. Clarendon Press, 1961. 852 p.
218. Chang M.-H. Hydrodynamic stability of Taylor-Dean flow between rotating porous cylinders with radial flow // *Phys. of fluids*, 2003. V. 15. № 5. P. 1178-1188
219. Chossat P., Demay Y., Iooss G. Interaction de modes azimutaux dans le Probleme de Couette-Taylor // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1987. V. 99. № 3. P. 213-248.
220. Chossat P., Iooss G. Primary and secondary bifurcations in the Couette-Taylor problem // *Jap. J. App. Math.* 1985. V. 2. № 1. P. 37-68.
221. Chossat P., Iooss G. The Couette-Taylor problem. New York: SpringerVerlag, 1994. 233 p.
222. Coles D. Transition in circular Couette flow // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 21. № 3. P. 385-425.
223. Couette M. Études sur le frottement des liquides // *Ann. Chim. Phys.* 1890. V. 6. Ser. 21. P. 433-510.
224. Davey A. The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 14. № 3. P. 336-368.
225. Davey A., Di Prima R. C., Stuart J. T. On the instability of Taylor vortices // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 31. № 1. P. 17-52.
226. Di Prima R. C. Stability of nonrotating symmetric disturbances for viscous flow between rotating cylinders // *Phys. Fluids*, 1961. V. 4. P. 751-755.
227. Feigenbaum M. I. Universal behaviour in nonlinear systems // *Los Alamos Sei.* 1980. V. 1. P. 4-27.

228. Fenstermacher P. R., Swinney H. L., Benson S. V., Gollub J. P. Bifurcations to periodic, quasiperiodic, and chaotic regimes in rotating and convecting fluids // *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 1979. V. 316. P. 652-666.
229. Fenstermacher P. R., Swinney H.L., Gollub J. P. Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 94. № 1. P. 103-128.
230. Frank G., Meyer-Spasche R. Computation of transitions in Taylor vortex flows // *Z. Angew. Math. und. Phys.* 1981. V. 32. № 6. P. 710-720.
231. Goharzadeh A., Mutabazi I. Experimental characterization of intermittency regimes in the Couette-Taylor System // *The European Physical J. B.* 2001. V. 19. P. 157-162.
232. Gorman M., Swinney H.L. Visual observation of the second characteristic mode in a quasiperiodic flow // *Phys. Rev. Lett.* 1979. V. 43. № 25. P. 1871-1875.
233. Gorman M., Swinney H. L. Spatial and temporal characteristics of modulated waves in the circular Couette system // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 117. P. 123-142.
234. Gorman M., Swinney H.L. Doubly periodic circular Couette flow: experiments compared with predictions from dynamics and symmetry // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 46. № 15. P. 992-995.
235. Jain N.C., Bansal J.L. On the flow of a viscous incompressible fluid between two coaxial rotating porous cylinders // *Proc. Indian. Acad. Sei. Math. Sei.* 1973. V. 78. № 5. P. 187-201.
236. Johnson C., Lueptow R. M. Hydrodynamic stability of flow between rotating porous cylinders with radial and axial flow // *Phys. of Fluids*, 1997. V. 9. № 12. P. 3687-3696.
237. Kolesov V., Ovchinnikova S., Petrovskaya N., Yudovich V. Onset of chaos through intersections of bifurcations in Couette Taylor flow // *ZAMM*, 1996. V. 2. P. 548-551.
238. Kolesov V., Shapakhidze L. On oscillatory modes in viscous incompressible liquid flows between two counter-rotating permeable

- cylinders // Trends App. Math. Mech. Boca Raton: Chapman and Hall, CRC. 2000. V. 106. P. 221-227.
239. Kolesov V., Shapakidze L. On transitions near the intersection point of bifurcations in the flow between two rotating permeable cylinders // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2000. V. 122. P. 79-91.
240. Kolyshkin A.A., Vaillancourt R. Convective instability boundary of Couette flow between rotating porous cylinders with axial and radial flows // Phys. Fluids, 1997. V. 9. № 4. P. 910-918.
241. Kolyshkin A.A., Vaillancourt R. Linear stability of Couette flow between rotating permeable cylinders // C. R. Math. Rep., Acad. Sei. Canada, 1996. V. 18. № 6. P. 263-268.
242. Kong C.-H., Lee C.-K. Instability of Taylor vortex and nonaxisymmetric modes in flow between rotating porous cylinders // J. of fluids engineering, 1998. V. 120. № 4, P. 745-749.
243. Koschmieder E. L. Turbulent Taylor vortex flow // J. Fluid Mech. 1979. V. 93. № 3. P. 515-527.
244. Koschmieder E. L. Transition from laminar to turbulent Taylor vortex flow // Laminar-Turbulent Transition Symp. Stuttgart, 1979. Berlin e. a. 1980. P. 396-404.
245. Koschmieder E. L. Benard cells and Taylor vortices. Cambridge University Press, 1993. 337 p.
246. Kroner K. H., Nissinen V. Dynamic filtration of microbial suspensions using an axially rotating filter // J. Membrane Sei. 1988. V. 36. P. 85100.
247. Krueger E. R., Gross A., Di Prima R. C. On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders // J. Fluid Mech. 1966. V. 24. № 3. P. 521-538.
248. Lee S., Lueptow R. M. Rotating membrane filtration and rotating reverse osmosis // J. Chem. Eng. Japan, 2004. V. 37. № 4. P. 471-482.
249. Lueptow R. M., Hajiloo A. Flow in a rotating membrane plasma separator // Trans. Am. Soc. Artif. Intern. Organs, 1995. V. 41. P. 182-188.

250. Lueptow R. M., Min K. Circular Couette flow with pressure-driven axial flow and a porous inner cylinder // *Experiments in Fluids*, 1994. V. 17. P. 190-197.
251. Lueptow R. M., Min K. Hydrodynamic stability of viscous flow between rotating porous cylinders with radial flow // *Phys. of Fluids*, 1994. V. 6. P. 144-151.
252. Mallock A. Determination of the viscosity of water // *Proc. Roy. Soc.* 1888. A 45. P. 126-132.
253. Meyer-Spasche R., Keller H. B. Computation of the axisymmetric flow between rotating cylinders // *J. Comput. Phys.* 1980. V. 35. № 1. P. 100109.
254. Ohashi K., Tashiro K., Kushiya F., Matsumoto T., Yoshida S., Endo M., Horio T., Ozawa K., Sakai K. Rotation-induced Taylor vortex enhances filtrate flux in plasma separation // *ASAIO Trans.* 1988 Jul-Sep. V. 34(3). P. 300-307.
255. Ovchinnikova S. N., Yudovich V. I. Resonances in the intersections of bifurcation in the Couette-Taylor problem // *Patterns and Waves*, A. Abramian, S. Vakulenko, V. Volpert (Eds.), Saint Petersburg, 2003. P. 55-77.
256. Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side // *Sci. Papers. Cambridge Univ. Press*, 1916. V. 6. P. 529-546.
257. Schwille J. A., Mitra D., Lueptow R. M. Design parameters for rotating filtration // *J. Membrane Sci.* 2002. V. 204. № 1. P. 53-65.
258. Schwille J. A., Mitra D., Lueptow R. M. Anti-fouling mechanism in rotating filtration // 12th International Couette-Taylor Workshop, September 6-8, 2001. Evanston, IL, USA. Session 2D.
259. Serre E., Sprague M., Bontoux P, Lueptow R. M. The effect of radial through-flow on the stability of Taylor-Couette flow // *Proc. of the 15th Intern. Couette-Taylor Workshop*, Le Havre, France, July 9-12, 2007.

260. Serre E., Sprague M.A., Lueptow R. M. Stability of Taylor-Couette flow in a finite-length cavity with radial throughflow // *Phys. Fluids*. 2008. V. 20. № 3. P. 034106-1-034106-10.
261. Shah T. N., Yoon Y., Pederson C. L., Lueptow R. M. Rotating reverse osmosis and spiral wound reverse osmosis filtration: A comparison // *J. Membrane Sci.* 2006. V. 285. № 1-2. P. 353-361.
262. Shapakidze L. On the bifurcation of flows of a heat-conducting fluid between two rotating permeable cylinders // *Georgian Math. J.* 1997. V. 4. № 6. P. 567-578.
263. Shapakidze L. On the stability of flows between two rotating permeable cylinders // *Proc. Int. Conf. Appl. Mech.* 1. Beijing, China, 1989. P. 450454.
264. Swinney H. L., Gollub J. P. Transition to turbulence // *Physics Today*, 1978. V. 31(8). P. 41-49.
265. Synge J.L. On the stability of a viscous liquid between rotating coaxial cylinders // *Proc. Roy. Soc.* 1938. A 167. P. 250-256.
266. Taylor G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // *Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A*, 1923. V. 223. P. 289-343.
267. Veite W. Stabilität und Verzweigung stationärer lösungen der Navier-Stokesschen gleichungen beim Taylor problem // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1966. V. 22. № 1. P. 1-14.
268. Wronski S., Molga E., Rudniak L. Dynamic filtration in biotechnology // *Bioprocess Eng.* 1989. V. 4. № 5. P. 99-104.
269. Yahata H. Dynamics of the Taylor vortices above higher instability points // *Progr. Theor. Phys.* 1978. V. 59. № 5. P. 1755-1756.
270. Yahata H. Temporal development of the Taylor vortices in a rotating fluid.
271. I // *Progr. Theor. Phys.* 1980. V. 64. № 3. P. 782-793.
272. Yahata H. Temporal development of the Taylor vortices in a rotating fluid.1. // *Progr. Theor. Phys.* 1981. V. 66. № 3. P. 879-891.

273. Yahata H. Temporal development of the Taylor vortices in a rotating fluid.
274. V // Progr. Theor. Phys. 1983. V. 69. № 22. P. 396-402.
275. Мочалин Е.В. Гидродинамика и теплообмен в потоке куэтта-тэйлора при вынужденном радиальном течении // Сборник научных статей, Современная наука, № 2 (10), 2012 стр. 251-259.