На правах рукописи

БОРШЕВЕЦКИЙ СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

СТАТИКА И ДИНАМИКА ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ РАЦИОНАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПОР

Специальность: 1.1.8. – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2025 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:	**Локтева Наталья Александровна,** к.т.н., доцент
Официальные оппоненты:	**Пшеничнов Сергей Геннадиевич**, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник лаборатории динамических испытаний Научно-исследовательского института механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва
	Сорокин Федор Дмитриевич, д.т.н., доцент, профессор кафедры «Прикладная механика» федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет», г. Тула.

Защита диссертации состоится 29 октября 2025 г. в 13^{00} на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно–технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=184752

Автореферат разослан «____»_____________ 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Сердюк Д.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

Нестационарные задачи подкрепленных тонкостенных пластин и оболочек актуальны в настоящее время. Классы задач с определением рационального расположения большого числа дополнительных опор являются наименее исследованными современной наукой. Под рациональным понимается расстановка локальных закреплений регулярным образом с одинаковым шагом по образующим осям координат. Метод решения задач, предлагаемый в диссертационном исследовании, является новым и оригинальным.

Предлагаемые постановки и методы решений задач для пластин и оболочек могут послужить основой создания программного комплекса для ускорения расчетов на этапе проектирования. Это позволит в самом начале разработки определять жесткостные свойства новой конструкции, для которой в дальнейшем потребуется лишь верификация численными методами. Подобные аналитические вычисления пластин и оболочек с локальными опорами стали возможны в связи с бурным развитием ЭВМ. А ускорение проектировочных расчетов выходит на передовой план современного машиностроения.

Целью диссертационной работы является разработка метода установления зависимостей между расположением дополнительных опор и напряженным состоянием исследуемой конструкции от воздействия произвольной нагрузки; определение геометрического расположения большого количества локальных закреплений в пластинах и оболочках.

Методы исследования. В диссертационной работе основу исследований составляют трехмерные уравнения теории упругости в триортогональной системе координат (декартовой и цилиндрической) модели пластины Кирхгофа и оболочки Кирхгофа–Лява, а также Тимошенко в дополнительных исследованиях; применение функции влияния от единичного сосредоточенного воздействия дельта–функции Дирака; замена локальных опор соответствующими реакциями при помощи метода компенсирующих нагрузок; разложения функций нагрузки и перемещений в тригонометрические ряды

Фурье; применение прямого и обратного интегральных преобразований Лапласа; использование итерационного метода графического приближения для уточнения получаемого решения, верификация при помощи МКЭ.

Для получение аналитического решения трехмерных задач теории упругости выполняется постановка задачи с применением функции влияния. Искомая функция нормальных перемещений представляется в виде суммы сверток функции Грина с действующей нагрузкой и сверток функции влияния с реакциями в дополнительных опорах. Разрешающие интегральные уравнения содержат не только произвольную нагрузку, но и физические и геометрические характеристики исследуемой конструкции, а также радиус расположения локальных закреплений, подлежащий определению. Подставляя конкретные численные значения, получаются различные частные случаи. Функция нормальных перемещений раскладывается в тригонометрические ряды Фурье по координатам, удовлетворяя граничным условиям по краям пластины. По параметру времени проводится интегральное преобразование Лапласа. Далее, происходит решение уравнений движения относительно коэффициентов разложения. Возвращение в оригиналы происходит при помощи таблиц операционного исчисления. Для определения функций реакций в дополнительных опорах, функцию нормального перемещения подставляем в граничные условия в локальных закреплениях. Получается система интегральных уравнений Вольтерра относительно неизвестных функций реакций в дополнительных опорах. Применяя дискретизацию с частичным интегрированием по параметру времени, устанавливаем итерационную зависимость искомых функций в каждый последующий момент времени. Отыскав все компоненты функции нормального перемещения, все значения подставляются в уравнение условия жесткости для определения радиуса расположения дополнительных опор. Для поиска нужного момента времени в численных примерах применяется метод последовательных приближений. Из геометрических соотношений определяется размер единичного сегмента, удовлетворяющий условию жесткости конструкции, а также размеры для целочисленного разбиения искомой пластины. В завершении проводится верификация полученных результатов при помощи метода конечных элементов в программном комплексе Ansys.

Аналогичный алгоритм и методы решения применяются и для цилиндрических оболочек. Для них также рассматривается функция нормального перемещения, относительно цилиндрической системы координат.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается корректным использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела, применением для решения начально–краевых задач строгих математических методов, а также сравнениями результатов численного расчета с результатами, полученными путем моделирования в программном комплексе Ansys.

Научную новизну диссертационной работы составляют следующие результаты:

1. Впервые предлагается аналитический подход определения расположения дополнительных опор на основании условия жесткости конструкции при произвольной действующей нагрузке.
2. Продемонстрирована работа методики для трех основных видов нагружения: статического, гармонического и нестационарного.
3. Показана применимость нового подхода для цилиндрических оболочек, что обеспечивает ее универсальность применения для прочих криволинейных оболочек.

Практическая значимость диссертационной работы.

1. Предлагаемый новый подход определения расположения большого числа дополнительных опор, основанный на требуемом условии жесткости конструкции.
2. Аналитический вид решения задачи, позволяющий решить единожды задачу, а затем получать частные случаи за счет подстановки физических и геометрических характеристик исследуемой конструкции, а также смены амплитуды нагрузки.

3. Универсальность методики, применимой как для пластин, так и для оболочек с сохранением всех преимуществ.

4. Предложенная методика может быть внедрена в конструкторские бюро для практического применения инженерами-конструкторами. На входе пользователь задает физические и геометрические характеристики конструкции, задает нагрузку. На выходе программа выдает конструктору конфигурацию локальных опор, удовлетворяющую требуемому условию жесткости.

5. Возможно дальнейшее развитие предлагаемого подхода решения задач с большим количеством дополнительных закреплений как расширяя класс решаемых задач для других видов оболочек и типов закреплений, так и перенос алгоритма на механику композиционных материалов.

Апробация основных результатов работы.

Основные результаты работы докладывались на:

– Научной конференции «Ломоносовские чтения», НИИ механики МГУ, г. Москва, 2021, 2022;

– XXVII–м, XXVIII–м, XXIX–м международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, ООО Санаторий «Вятичи», г. Кременки, Калужская обл., 2021, 2022, 2023;

– XXV–й, XXVI–й международных молодежных научных конференциях «Туполевские чтения (школа молодых ученых)», г. Казань, респ. Татарстан, 2021, 2023;

– XXII–й научно–технической конференции молодых ученых и специалистов в ПАО РКК «Энергия» им С.П. Королева, г. Королев, Московская обл., 2021;

– XI–й, XII–й, XIII–й, XIV–й международных научно–практических конференциях «Проблемы безопасности на транспорте», г. Гомель, респ. Беларусь, 2021, 2022, 2023, 2024;

– 12–й всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», г. Москва, 2022;

– XIV–м, XV–м, XVI–м всероссийских межотраслевых молодежных конкурсах научно–технических работ и проектов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики», г. Москва, 2022, 2023, 2024;

– VIII–м, IX–м всероссийских конкурсах научно–исследовательских работ студентов и аспирантов «Наука будущего» в рамках всероссийского молодежного научного форума «Наука будущего – наука молодых», г. Орел, 2023, г. Самара, 2024;

– XIII–м всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике, г. Санкт–Петербург, 2023;

– VIII–м конкурсе научно–технических работ «Подари идее крылья», г. Москва, 2023;

– IX–ой всероссийской молодежной научно–практической конференции и конкурсе «Орбита молодежи», г. Москва, 2023;

– 51–й школе–конференции «Актуальные проблемы механики», г. Великий Новгород, 2024;

– Конкурсе инженерных работ студентов и молодых специалистов «Будущее авиации», 2024.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 25 публикаций в журналах, индексируемых в РИНЦ 22, научных статей в изданиях, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования Российской Федерации – 2, международных систем цитирования Scopus – 1.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 125 наименований. Общий объем диссертации составляет 162 страницы, включая 126 рисунков, 11 таблиц и 26 формул.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность диссертационного исследования, приводятся теоретические и практические примеры поднимаемых работой проблем, записаны цели и задачи диссертационной работы, описаны используемые в работе методы, научная новизна, практическая значимость предлагаемой методики, перечислена апробация основных результатов.

В первой главе выполнен литературный обзор научных работ, связанных с темой диссертационного исследования, приведены основные уравнения движения пластин и оболочек, выполнены математические постановки общих и частных задач для пластин и оболочек, включающие в себя уравнения движения, начальные и граничные условия по краям конструкций, а также граничные условия в дополнительных опорах. Описан метод сведения математических постановок задач к системам разрешающих уравнений.

Для описания движения тонких упругих изотропных пластин используются уравнения в перемещениях в прямоугольной системе координат Oxy. Начало помещено в левый верхний угол срединной поверхности пластины. Для описания движения тонких упругих изотропных цилиндрических оболочек используются уравнения в перемещениях в цилиндрической системе координат $O\alpha z$. Начало помещено таким образом, что координата α изменяется в интервале $[-\pi, \pi]$. Все приведенные функции зависят от координат и времени t.

В качестве объекта исследования рассматривается тонкая прямоугольная пластина, шарнирно опертая по кромкам, а также имеющая большое количество локальных опор, установленных регулярным образом по площади. Геометрическое расположение следует из удовлетворения условия жесткости конструкции: максимальный прогиб при действии произвольной нагрузки в любую точку пластины не должен превышать заранее установленного значения w_0. Для теории тонких пластин Кирхгофа и Тимошенко предельным прогибом считается толщина конструкции. Для тонких оболочек Кирхгофа–Лява и Тимошенко – половина толщины.

В начальный момент времени в случайное место пластины с координатами (ξ, ζ) прикладывается произвольная сосредоточенная нагрузка. Необходимо определить количество и расположение локальных опор, удовлетворяющих требуемому условию жесткости конструкции. Для этого сначала определяется размер единичного сегмента, удовлетворяющий условию жесткости конструкции. Геометрические параметры определяются из решения более простой задачи.

Рассматривается шарнирно опертая по кромкам тонкая прямоугольная пластина с известными размерами a на b постоянной толщины h, имеющую лишь четыре дополнительные опоры (Рисунок 1).

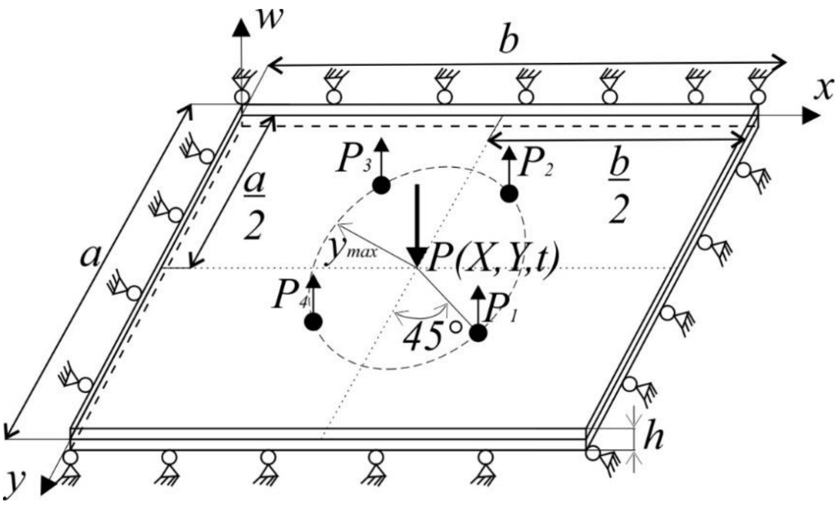

Рисунок 1 – Постановка задачи для определения размера сегмента

Локальные закрепления обозначены черными точками и не воспрещают тангенциальные перемещения конструкции, однако не дают прогиба в нормальном направлении. В центр пластины с координатами (X,Y) прикладывается искомая нестационарная сосредоточенная нагрузка $P(X,Y,t)$. Вокруг точки приложения на некотором радиусе $y_{\max}$, который необходимо определить, устанавливаются четыре локальные опоры, образующие квадратный сегмент. Требуется определить радиус расположения сосредоточенных дополнительных закреплений из условия жесткости конструкции (1).

$$\begin{aligned} &\left|w_{\max}(x,y,t)\right| \le w_0, \\ &w_0 \le h. \end{aligned} \tag{1}$$

Хотя, в общем случае, количество опор и конфигурация сегмента могут быть произвольными, в работе вводится ограничение на количество локальных опор равным четырем, образующие прямоугольный сегмент. Это позволяет сохранить концепцию регулярности их расположения, а также обусловлено более простой технической реализацией и практическими запросами.

Алгоритм решения. Уравнение движения пластины Кирхгофа в перемещениях записывается в виде:

$$\rho h\ddot{w}(x,y,t) = -D\Delta\Delta w(x,y,t) + P(t),$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{2}$$

где ρ – плотность материала пластины, $w(x,y,t)$ – функция нормальных перемещений срединной поверхности пластины, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость, E – модуль упругости 1–го рода (Юнга), ν – коэффициент Пуассона, Δ – оператор Лапласа.

Запишем начальные и граничные условия:

$$w\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

$$w(x,y,t)\big|_{x=0,b} = w(x,y,t)\big|_{y=0,a} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0,b} = \left.\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial y^2}\right|_{y=0,a} = 0.$$

Граничные условия для дополнительных опор имеют вид:

$$w(q_i, z_i, t) = 0, \qquad i = 1..4, \tag{3}$$

где q_i, z_i – координаты расположения дополнительных опор, определяющиеся следующим образом:

$$q_1 = \frac{b}{2} + y_{\max}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \qquad z_1 = \frac{a}{2} + y_{\max}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
$$q_i = q_{i-1} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)y_{\max}\sin\left(\frac{i\alpha\pi}{180}\right), \qquad i = 2..4,$$
$$z_i = z_{i-1} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y_{\max}\cos\left(\frac{i\alpha\pi}{180}\right).$$

Решение начально-краевой задачи ищется с помощью функции влияния (Грина). Представим прогиб как свертку этой функции с действующей нагрузкой:

$$\begin{gathered} w(x,y,t)=G_n^{pK}(x,y,t;\xi,\zeta)***P(t)\delta(x-\xi,y-\zeta)+ \\ +\sum_{i=1}^{4}G_n^{pK}(x,y,t;q_i,z_i)***P_i(t)\delta(x-q_i,y-z_i). \end{gathered} \tag{4}$$

Тогда постановка задачи через функцию влияния перепишется следующим образом:

$$\rho h\ddot{G}_n^{pK}(x,y,t)=-D\Delta\Delta G_n^{pK}(x,y,t)+\delta(x-\xi,y-\zeta)\delta(t),$$

$$G_n^{pK}(x,y,0)=0,\quad \left.\frac{\partial G_n^{pK}(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

$$\left.G_n^{pK}\right|_{x=0,b}=\left.G_n^{pK}\right|_{y=0,a}=0,\quad \left.\frac{\partial^2 G_n^{pK}}{\partial x^2}\right|_{x=0,b}=\left.\frac{\partial^2 G_n^{pK}}{\partial y^2}\right|_{y=0,a}=0.$$

Затем, выполняется интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение в тригонометрические ряды Фурье по координатам, всех входящих в уравнение движения функций таким образом, чтобы выполнялись граничные условия по краям пластины. Решаем уравнение движения относительно коэффициентов разложений и возвращаемся в оригиналы при помощи таблиц операционного исчисления. Искомая функция влияния найдена.

На следующем шаге определяются реакции в локальных закреплениях. Они определяются из граничных условий (3). Для этого раскрывается свертка функции влияния с действующей нагрузкой и реакциями в дополнительных опорах, опустив свертки по пространственным координатам (4):

$$w(x,y,t)=\int_0^t G_n^{pK}(x,y,t-\tau;\xi,\zeta)P(\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{4}\int_0^t G_n^{pK}(x,y,t-\tau;q_i,z_i)P_i(\tau)d\tau.$$

Для интегралов с неизвестными функциями реакций в дополнительных опорах применяется дискретизация с частичным интегрированием на $T+1$ частей. Дискретизация по времени осуществляется с одинаковым шагом. Это позволяет все входящие в свертку интегралы, заменить берущимися, а также получить итерационную зависимость значений функции прогиба от предыдущих моментов времени.

В начальный момент времени прогиб отсутствует из начальных условий. Отсюда следует, что реакции в локальных закреплениях также равны нулю. Для определения реакций в последующие моменты времени используются граничные условия в дополнительных опорах, приводящие нас к системе линейных алгебраических уравнений. Решается система по правилу Крамера.

Затем, решается уравнение условия жесткости конструкции в каждый дискретный момент времени t_j. При этом, искомый момент времени рационального расположения дополнительных опор остается неизвестным. Для его поиска используется графический метод последовательных приближений. В каждый момент времени строится график зависимости радиусов расположения локальных опор y_{max} из заранее выбранного интервала. На графике определяется экстремум или последовательное увеличение параметра y_{max} в соседних моментах времени, а, затем, крайнее значение этого «перегиба» используется в качестве новой границы временного интервала. После чего выполняется новая итерация решения задачи: заново выполняется дискретизация, определяются реакции и строится график зависимости. Останавливается процесс при нахождении экстремума или последовательного увеличения радиуса расположения локальных опор с отличиями значений в соседних дискретных моментах времени не более чем на 5%.

Постановка и решение задачи для прямоугольных пластин. В следующих разделах описываются постановка и особенности решения задач для двух моделей движения: Кирхгофа и Тимошенко для трех основных видов сосредоточенных нагрузок: статическая, гармоническая и нестационарная.

При действии статической нагрузки в уравнении движения отсутствуют компоненты по параметру времени и начальные условия. Реакции в дополнительных опорах имеют постоянное значение.

Задача о гармонической нагрузке сводится из нестационарной к стационарной постановке, путем представления действующей нагрузки по формуле Эйлера. В таком случае функция нормальных перемещений представляется аналогичным образом и вместо зависимости от времени, в уравнении движения остается лишь частота колебаний ω действующей нагрузки.

Применение описанного метода решения задачи напрямую для случая нестационарного воздействия невозможно в силу итерационной зависимости функции прогиба от каждого момента времени, что является тяжелым для компьютерных вычислений. Поэтому используется упрощенная постановка задачи. Рассматривается срез по диагонали искомой прямоугольной пластины размером L, шарнирно опертый по краям и имеющий лишь две дополнительные опоры, отстоящие от центра приложения нестационарной нагрузки на равном расстоянии. Отметим, что двумерный объект исследования имеет меньшую жесткость, чем искомая двумерная пластина. Следовательно, результат для полосы будет применим для пластины. Вдоль оси y_1 пластина считается бесконечной. Таким образом совершается переход к постановке задачи о бесконечной полосе. На рисунке 2 представлена рассматриваемая конструкция, а локальные опоры уже заменены соответствующими функциями реакций.

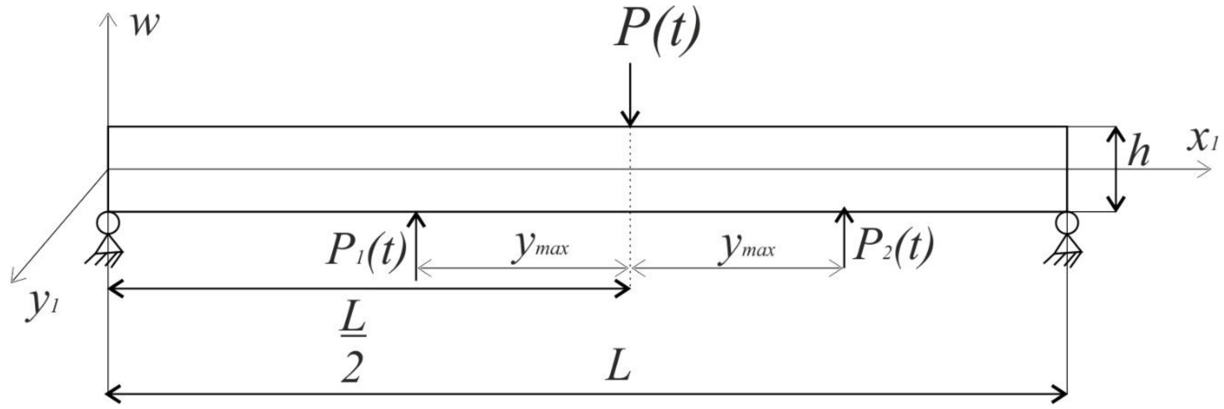

Рисунок 2 – Постановка задачи о бесконечной полосе

Постановка и решение задачи для цилиндрической оболочки. Постановка и решение задачи для цилиндрической оболочки, в целом, совпадают с описанным методом для прямоугольной пластины. Рассматривается тонкая цилиндрическая оболочка известного радиуса R, высоты H и постоянной толщины h, выполненная из упругого изотропного материала. Оболочка закреплена подвижными шарнирами по торцам, а также имеет множество дополнительных опор по площади (Рисунок 3). Как и в случае с прямоугольной пластиной черными точками обозначены локальные закрепления, не запрещающие тангенциальные перемещения оболочки, но ограничивающие нормальные перемещения в радиальном направлении. Начало цилиндрической системы координат расположено таким образом, что угловая координата α изменяется в пределах [–π, π].

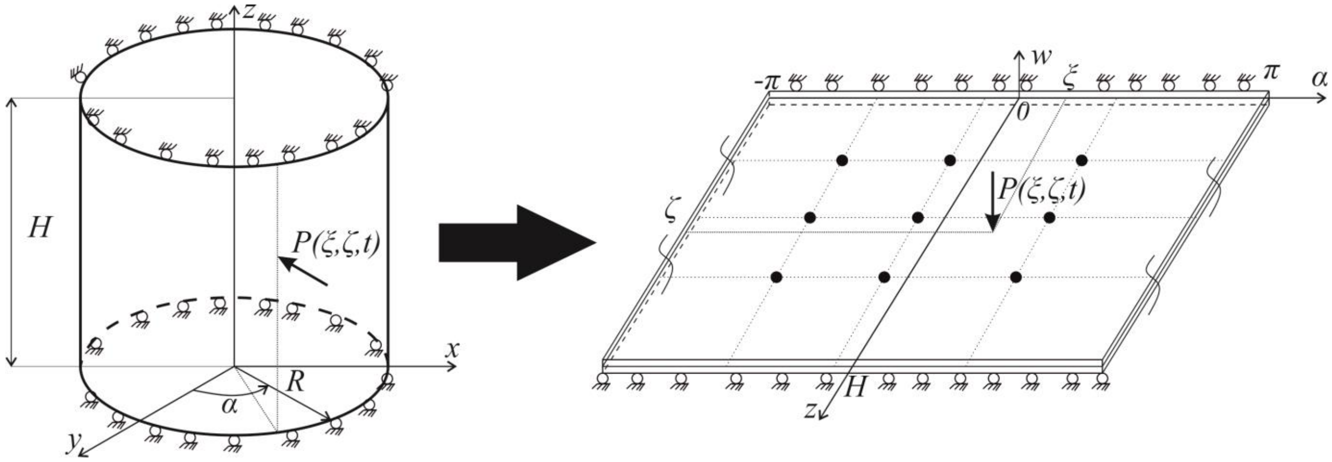

Рисунок 3 – Общая постановка задачи

Уравнения движения цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява в общем случае запишутся в виде:

$$\rho h \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \mathbf{K}\mathbf{w} + \mathbf{p},\ \mathbf{K} = \left(K_{ij}\right)_{3\times 3},$$

$$\mathbf{w} = (u_\alpha, u_z, w)^T,\ \mathbf{p} = (q_\alpha, q_z, p)^T,$$

где u_α и u_z – функции тангенциальных перемещений вдоль соответствующих осей координат, q_α q_z и p – функции тангенциальных и нормальных нагрузок вдоль соответствующих осей координат, K_{ij} – дифференциальные операторы следующего вида:

$$K_{11}\left(u_\alpha\right) = \frac{h\left(\lambda + 2\mu\right)}{R^2}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + \mu\left(h + \frac{I}{R^2}\right)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2},$$

$$K_{12}\left(u_z\right) = \frac{1}{R}\left(h\left(\lambda + \mu\right) - \frac{\mu I}{R^2}\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z},\ K_{13}\left(w\right) = \frac{h\left(\lambda + 2\mu\right)}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{2\mu I}{R^2}\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2},$$

$$K_{21}\left(u_\alpha\right) = K_{12}\left(u_\alpha\right),\ K_{31}\left(u_\alpha\right) = -K_{13}\left(u_\alpha\right),\ K_{32}\left(u_z\right) = -K_{23}\left(u_z\right),$$

$$K_{22}\left(u_z\right) = \frac{\mu}{R^2}\left(h + \frac{I}{R^2}\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + h\left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2},\ K_{23}\left(w\right) = \frac{2\mu I}{R^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + \frac{h\lambda}{R}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$K_{33}(w) = -\frac{I(\lambda+2\mu)}{R^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} - \frac{4\mu I}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial z^2} - I(\lambda+2\mu)\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} -$$
$$-\frac{2I(\lambda+2\mu)}{hR^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - \frac{\lambda+2\mu}{R^2}\left(h+\frac{I}{R^2}\right)w.$$

Запишем начальные условия:

$$u_\alpha(\alpha,z,t)\Big|_{t=0} = u_z(\alpha,z,t)\Big|_{t=0} = w(\alpha,z,t)\Big|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u_\alpha(\alpha,z,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_z(\alpha,z,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial w(\alpha,z,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

и граничные условия:

$$w(\alpha,z,t)\Big|_{z=0,H} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 w(\alpha,z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=0,H} = 0,$$
$$T_{\alpha\alpha}(\alpha,z,t)\Big|_{z=0,H} = T_{zz}(\alpha,z,t)\Big|_{z=0,H} = 0,$$
$$w(\alpha,z,t)\Big|_{\alpha=-\pi} = w(\alpha,z,t)\Big|_{\alpha=\pi}, \quad \left.\frac{\partial w(\alpha,z,t)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=-\pi} = \left.\frac{\partial w(\alpha,z,t)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\pi}.$$

В следующих разделах описываются постановки и особенности решения задач для двух моделей движения оболочек: Кирхгофа–Лява и Тимошенко для двух видов сосредоточенных нагрузок: статическая и гармоническая.

При действии статической нагрузки в уравнении движения отсутствуют компоненты по параметру времени и начальные условия. Реакции в дополнительных опорах имеют постоянное значение.

Задача о гармонической нагрузке сводится из нестационарной к стационарной постановке, путем представления действующей нагрузки по формуле Эйлера для экспоненты. В таком случае функция нормальных перемещений представляется аналогичным образом, и вместо зависимости от времени, в уравнении движения остается лишь частота колебаний ω действующей нагрузки.

Вторая глава посвящена численным примерам решения задач для прямоугольной пластины для основных видов нагрузок: сосредоточенные статическая, гармоническая и нестационарная. Приводятся графическое решение уравнения жесткости конструкции, определяется размер единичного сегмента, проводится верификация в программном комплексе Ansys Workbench.

В качестве материала рассматривается алюминиевый сплав АМг6. В разделе дополнительных исследований приводятся результаты решения задач для других распространенных конструкционных материалов, а также случаи сосредоточенных статической и гармонической нагрузок для модели движения пластины Тимошенко.

В заключительном разделе проводится сравнение полученных результатов для трех видов сосредоточенных нагрузок между собой, а также сравнение результатов для двух моделей движения: Кирхгофа и Тимошенко. Во всех случаях соблюдается выполнение граничных условий по кромкам пластины, в локальных закреплениях, а также удовлетворение требуемому условию жесткости конструкции. Проведенные дополнительные исследования с более сложной и точной моделью пластины Тимошенко только подтверждают полученные ранее результаты, что говорит о работоспособности метода по отношению к прямоугольным пластинам.

Третья глава посвящена численным примерам решения задач для цилиндрической оболочки для основных видов нагрузок: сосредоточенные статическая и гармоническая. Приводится графическое решение уравнения условия жесткости конструкции, определяется размер единичного сегмента, проводится верификация в программном комплексе Ansys Workbench. В качестве материала рассматривается нержавеющая сталь 12Х18Н10Т. В разделе дополнительных исследований приводятся результаты решения задач для других распространенных конструкционных материалов, а также случаи сосредоточенных статической и гармонической нагрузок для модели движения оболочки Тимошенко.

В заключительном разделе проводится сравнение полученных результатов для обоих видов сосредоточенных нагрузок между собой, а также сравнение результатов для двух моделей: Кирхгофа–Лява и Тимошенко. Во всех случаях соблюдается выполнение граничных условий по торцам оболочек, условия стыка, в локальных закреплениях, а также удовлетворение требуемому условию жесткости конструкции.

Всего, в работе были решены следующие задачи по определению расположения дополнительных закреплений (Таблица 1):

Таблица 1 – Перечень задач, решенных в ходе диссертационной работы

Рассматриваемая модель	**Статическая нагрузка**	**Гармоническая нагрузка**	**Нестационарная нагрузка**
Пластина Кирхгофа	✓	✓	✓
Пластина Тимошенко	✓	✓	
Цилиндрическая оболочка Кирхгофа–Лява	✓	✓	
Цилиндрическая оболочка Тимошенко	✓	✓	

Предложенная методика может быть внедрена в конструкторские бюро для практического применения инженерами–конструкторами. При наличии программного комплекса, поддерживающего символьные вычисления и математические операции, описанные в ходе работы, а также обладающего мощным вычислительным аппаратом, возможен перевод алгоритма решения задачи в удобный интерфейс. На входе от пользователя потребуется задать геометрические характеристики своей конструкции, выбрать из выпадающего списка изотропный материал (или создать свой в библиотеке), выставить требование по условию жесткости, а также выбрать и задать тип действующей нагрузки. На выходе программа выдаст конструктору размер единичного сегмента, удовлетворяющий заданному условию жесткости конструкции, а также рекомендации по геометрической конфигурации дополнительных сосредоточенных закреплений по площади исследуемого объекта и их количество. Далее, потребуется лишь верификация, например, методом конечных элементов для введения новой конструкции в эксплуатацию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках работы над диссертацией разработаны постановки, методы и подходы к решению новых, актуальных задач в прикладном и теоретическом отношении, статики и динамики тонкостенных пластин и оболочек с рациональным расположением локальных закреплений.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Представлен новый аналитический подход определения расположения дополнительных опор в прямоугольной пластине из условия жесткости конструкции при действии нестационарной нагрузки.

2. Описан алгоритм расчета для трех основных видов нагружения прямоугольных пластин: статического, гармонического и нестационарного. В каждом расчетном случае описываются особенности решения задачи.

3. Для нестационарной сосредоточенной нагрузки описан алгоритм сведения двумерной задачи для пластины к одномерной для бесконечной полосы.

4. Показана универсальность применения новой методики для оболочек на примере цилиндрической оболочки для двух основных видов нагрузок.

5. Для пластин и оболочек проведены дополнительные исследования с применением более сложной, но точной модели Тимошенко. Полученные результаты подтверждают и уточняют ранее найденные решения задачи для более простой модели.

6. Алгоритм может быть реализован в виде программы для инженеров-конструкторов и внедрен в конструкторские бюро в качестве первоначального анализа жесткости при проектировании новых конструкций.

7. Дальнейшее развитие. Возможно расширить область применения разработанного подхода: сферические и конические оболочки, перенести алгоритм на механику композиционных материалов или использовать полученные решения для суперпозиции с частными случаями, имитирующие произвольные граничные условия.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня ВАК:

1. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины при гармоническом воздействии / С.А. Боршевецкий // Труды МАИ. 2023. № 128. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=171384 DOI: 10.34759/trd–2023–128–03

2. Боршевецкий С.А. Методика определения расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины Кирхгофа при произвольном воздействии / С.А. Боршевецкий // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=179681

Публикация, индексируемая в Scopus:

3. Boshevetskiy S.A. Instructions to prepare a full paper for the IX International conference on computational methods for coupled problems in science and engineering – Coupled Problems 2021 / S.A. Boshevetskiy, N.A. Lokteva // IX International conference on computational methods for coupled problems in science and engineering – Coupled Problems 2021

Прочие публикации по теме диссертации:

4. Борщевецкий С.А. Оптимизация расположения опор пластины при воздействии на нее сосредоточенной силы / С.А. Борщевецкий, Н.А. Локтева // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Тезисы докладов. — Москва: Издательство Московского университета, 19-30 октября 2020. — С. 37–38.

5. Локтева Н.А. Определение оптимального положения опор однородной пластины при нестационарном воздействии / Н.А. Локтева, С.А. Боршевецкий, // Проблемы безопасности на транспорте: материалы X Междунар. науч.–практ. конф. Ч. 4. — БелГУТ Гомель, 26–27 ноября 2020. — С. 40–41.

6. Борщевецкий С.А. Определение оптимального положения опор однородной пластины при нестационарном воздействии / С.А. Борщевецкий, Н.А. Локтева // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики.

Тезисы докладов. 20–26 апреля 2021 г. — Москва: Издательство Московского университета, 2021. — С. 37–38.

7. Боршевецкий С.А. Определение нормальных перемещений шарнирно опертой пластины с дополнительными опорами под воздействием сосредоточенной силы / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. Т. 2. 17-21 мая 2021 г. — ООО ТРП г. Москва, 2021. — С. 19–20.

8. Боршевецкий С.А. Определение положения опор для прямоугольной пластины под воздействием гармонической сосредоточенной нагрузки / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XI Междунар. науч.–практ. конф. Т.1. — БелГУТ Гомель, 25–26 ноября 2021. — С. 256–257.

9. Боршевецкий С.А. Определение положения дополнительных опор для прямоугольной шарнирно опертой пластины при нестационарном воздействии на нее / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // Материалы международной молодежной научной конференции «XXV ТУПОЛЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ (школа молодых ученых)» Т. 2. 10-11 ноября 2021 г. – Казань: Изд–во ИП Сагиева А.Р., 2021. — С. 395–400.

10. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор для шарнирно опертой пластины при воздействии нестационарной нагрузки / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // Тезисы докладов XXII Научно–технической конференции молодых ученых и специалистов, посвященной 60–летию полета Ю.А. Гагарина, 75–летию ракетно–космической отрасли и основания ПАО РКК «Энергия». Королев, 2021. — С. 49–51.

11. Борщевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор прямоугольной пластины при гармоническом нагружении / С.А. Борщевецкий, Н.А. Локтева // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Тезисы докладов. 18–22 апреля 2022 г. — Москва: Издательство Московского университета, 2022 — С. 34–35.

12. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор при произвольном сосредоточенном воздействии на прямоугольную пластину / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // Материалы XXVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. 16-20 мая 2022 г. — М.: ООО «ТРП», 2022. — С. 21–23.

13. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор для прямоугольной пластины Тимошенко при воздействии сосредоточенной нагрузки / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XII Междунар. науч.–практ. конф., посвящ. 160–летию Бел. ж. д. Ч. 2. —Гомель: БелГУТ, 24–25 ноября 2022. — С. 171–172.

14. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор в пластине Тимошенко при гармоническом воздействии / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов 12–й Всероссийской научной конференции с международным участием. Москва, 15-17 ноября 2022 г. — М.: ООО «Сам Полиграфист», 2022 — С. 438–447.

15. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины при гармоническом воздействии / С.А. Боршевецкий // Сборник аннотаций конкурсных работ XIV Всероссийский межотраслевой молодежный конкурс научно–технических работ и проектов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики», Москва, 21-25 ноября 2022 г. — М. Издательство Перо, 2022. — С. 157–158.

16. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор в пластине Кирхгофа при нестационарном сосредоточенном воздействии / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // Материалы XXIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. 15-19 мая 2023 г. — М.: ООО «ТРП», 2023. — С. 5–7.

17. Боршевецкий С.А. Методика определения расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины Кирхгофа при произвольном воздействии / С.А. Боршевецкий // Сборник аннотаций конкурсных работ XV Всероссийский межотраслевой молодежный конкурс научно–технических работ и проектов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики», Москва, 20-24 ноября 2023 г. — М. Издательство Перо, 2023. — С. 129–131.

18. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор в пластинах Кирхгофа и Тимошенко при сосредоточенном гармоническом воздействии / С.А. Боршевецкий // Сборник тезисов докладов участников V Международной научной конференции «Наука будущего» и VIII Всероссийского молодежного научного форума «Наука будущего — наука молодых» — Орел, 20-23 сентября 2023 г. С. 375

19. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины Кирхгофа при произвольном нестационарном воздействии / С.А. Боршевецкий // XXVI Туполевские чтения (школа молодых ученых): Международная молодежная научная конференция, 9–10 ноября 2023 года: Материалы конференции. Сборник докладов. – Казань: ИП Сагиев А.Р., 2023. — С. 1272 – 1279.

20. Боршевецкий С.А. Расположение дополнительных опор в прямоугольных пластинах Кирхгофа и Тимошенко при гармоническом воздействии / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: сборник тезисов докладов в 4 томах, 21–25 августа, 2023 г., Санкт–Петербург. Т. 4. Материалы симпозиумов и Исторической сессии. – СПБ.: ПОЛИТЕХ–ПРЕСС, 2023. – С. 635 – 638.

21. Боршевецкий С.А. Определение функции прогиба для прямоугольной пластины с дополнительным линейным закреплением при воздействии сосредоточенной нагрузки / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов: материалы Междунар. Научн–практ. Конф., посвящ. 70–летию БелИИЖТа – БелГУТа (Гомель, 16–17 ноября 2023 г.) в 2 ч. Ч.2 / М–во трансп. и

коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж.д., Белорус. гос. ун–т трансп.; под общ. Ред. Ю.И. Кулаженко. – Гомель: БелГУТ, 16–17 ноября 2023. – С. 74 – 75.

22. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор в цилиндрической оболочке при статическом сосредоточенном воздействии / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // 51 школа–конференция «Актуальные проблемы механики» памяти Д.А. Индейцева: сборник аннотаций, 19–21 июня, 2024 г., С. 36 – 37.

23. Боршевецкий С.А. Определение расположения дополнительных опор в пластине Кирхгофа при произвольном сосредоточенном воздействии / С.А. Боршевецкий // Сборник тезисов докладов участников IX Всероссийского молодежного научного форума «Наука будущего – наука молодых» – Самара, 29 октября – 1 ноября 2024 г. – 118 с.

24. Боршевецкий С.А. Исследование применимости новой методики определения расположения дополнительных опор для цилиндрической оболочки / С.А. Боршевецкий, Н.А. Локтева // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XIII Междунар. науч.–практ. конф., посвящ. Году качества (Гомель, 21–22 ноября 2024 г.): в 2 ч. / М–во трансп. И коммуникаций Респ. Беларусь, Бел ж.д., Белорус. гос. ун–т трансп.; под общ. Ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель: БелГУТ, 21–22 ноября 2024. – Ч. 2. – С. 120 – 121.

25. Боршевецкий С.А. Применение новой методики определения расположения дополнительных опор для цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява / С.А. Боршевецкий // Сборник аннотаций конкурсных работ XVI Всероссийского межотраслевого молодежного конкурса научно–технических работ и проектов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики», Москва 18-22 ноября 2024 г. – М. Издательство Перо, 2024. – 145 – 146 с.