

Труды МАИ. 2024. № 136  
Trudy MAI, 2024, no. 136

Научная статья  
УДК 531.36; 531.384  
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180666>

## ЗАДАЧА О КАЧЕНИИ ШАРА ПО ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ И ЕЕ ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Иван Иванович Косенко<sup>1</sup>, Александр Сергеевич Кулешов<sup>2</sup>,

Александр Александрович Шишков<sup>3</sup>✉

<sup>1,2,3</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
Москва, Россия

<sup>1</sup>[kosenkoi@gmail.com](mailto:kosenkoi@gmail.com)

<sup>2</sup>[kuleshov@mech.math.msu.su](mailto:kuleshov@mech.math.msu.su) [Alexander.Kuleshov@math.msu.ru](mailto:Alexander.Kuleshov@math.msu.ru)

<sup>3</sup>[shish-tula@yandex.ru](mailto:shish-tula@yandex.ru)✉

**Аннотация:** При создании моделей различных технических устройств и процессов достаточно часто используются механические системы с неголономными связями. В качестве примера можно привести классическую работу М.В. Келдыша [1], в которой была предложена неголономная механическая модель, описывающая эффект «шимми» – явление интенсивных угловых автоколебаний передних колес самолетов [2]. Поэтому интерес представляет и дальнейшее исследование классических задач неголономной механики, которые теперь могут быть изучены при помощи современных математических, символьных и численных методов. Одной из таких задач динамики неголономных систем является задача о качении тяжелого однородного шара по заданной абсолютно шероховатой поверхности

вращения. Эта задача рассматривалась ещё в конце XIX – начале XX века в работах Э. Дж. Рауса и Ф. Нётера [3, 4]. Причем в этих работах заданной считалась поверхность, на которой при движении располагается геометрический центр шара, а не опорная поверхность, по которой шар катится. В работе показано как, задавая в явном виде поверхность, по которой движется центр шара, привести уравнения движения шара к системе уравнений, записанной в форме Коши, то есть свести задачу описания движения шара к решению задачи Коши. Коэффициенты соответствующих уравнений будут зависеть от характеристик поверхности, по которой движется центр шара, её главных кривизн и коэффициентов Ламе. Если уравнения движения некоторой механической системы записаны в форме Коши, то удобно провести численный анализ рассматриваемой системы. Поэтому с помощью комплекса символьных вычислений MAPLE был проведен численный анализ уравнений движения шара по поверхности параболоида вращения. Полученные численно результаты подтверждают аналитически доказанные утверждения о движении шара по параболоиду вращения.

**Ключевые слова:** неголономная система, однородный шар, поверхность вращения

**Для цитирования:** Косенко И.И., Кулешов А.С., Шишков А.А. Задача о качении шара по поверхности вращения и ее численный анализ // Труды МАИ. 2024. № 136.

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180666>

Original article

**THE PROBLEM OF ROLLING A BALL ON A SURFACE OF REVOLUTION AND ITS NUMERICAL ANALYSIS**

**Ivan I. Kosenko<sup>1</sup>, Alexander S. Kuleshov<sup>2</sup>, Alexander A. Shishkov<sup>3</sup>**✉

<sup>1,2,3</sup>Lomonosov Moscow State University,

Moscow, Russia

<sup>1</sup>[kosenkoi@gmail.com](mailto:kosenkoi@gmail.com)

<sup>2</sup>[kuleshov@mech.math.msu.su](mailto:kuleshov@mech.math.msu.su) [Alexander.Kuleshov@math.msu.ru](mailto:Alexander.Kuleshov@math.msu.ru)

<sup>3</sup>[shish-tula@yandex.ru](mailto:shish-tula@yandex.ru)✉

**Abstract:** When creating models of various technical devices and processes, mechanical systems with nonholonomic constraints are often used. As an example, the classical work of M.V. Keldysh [1] is worth mentioning, in which the nonholonomic mechanical model that described the shimmy effect, i.e. the phenomenon of intense angular self-oscillations of the aircraft front wheels [2] was proposed. That is why further studies of the classical problems of nonholonomic mechanics, which now can be studied with the state-of-the-art mathematical, symbolic and numerical methods, present interest.

One of these classical problems of nonholonomic dynamics is the problem of a heavy homogeneous ball rolling without sliding along the perfectly rough surface of revolution. This problem has been considered at the end of the 19th - beginning of the 20th century in the works of E. J. Routh and F. Noether [3, 4]. Moreover, in these works, the surface on which the geometric center of the ball is located during movement, rather than the supporting surface along which the ball is rolling, was considered given. The article demonstrates how the ball motion equations can be reduced to the system of equations written in Cauchy form, i.e. reduce the problem of the ball motion to the Cauchy problem solving by defining the surface, along which the ball is moving, in an explicit form.

Coefficients of the corresponding equations will depend on characteristics of the surface, along which the center of the ball moves, its principal curvatures and the Lamé coefficients. If the equations of motion of a certain mechanical system are written in Cauchy form, then it is convenient to perform numerical analysis of the system under study. Thus, numerical analysis of the equations of motion of a rolling ball along the surface of revolution was performed by the MAPLE mathematical software. The numerically obtained results confirm the analytically proven statements about the ball motion.

**Keywords:** Nonholonomic System, Homogeneous Ball, Surface of Revolution

**For citation:** Kosenko I.I., Kuleshov A.S., Shishkov A.A. The Problem of Rolling a Ball on a Surface of Revolution and its Numerical Investigation. *Trudy MAI*, 2024, no. 136.

URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=180666>

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о качении однородного шара по произвольной выпуклой абсолютно шероховатой поверхности под действием сил, результирующая которых приложена в центре масс  $G$  шара, совпадающим с его геометрическим центром [3 – 8] (см. также [9 – 13]). Для описания движения шара введем подвижную систему координат  $Gx_1x_2x_3$ , с началом в центре масс  $G$  шара и осью  $Gx_3$ , направленной по нормали к опорной поверхности. Про направления двух других осей  $Gx_1$  и  $Gx_2$  будет сказано ниже. Будем считать, что вектор абсолютной скорости  $\mathbf{v}_G$  центра масс  $G$  шара определяется в системе координат  $Gx_1x_2x_3$  компонентами  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Очевидно, что  $w = 0$ , поскольку мы считаем, что шар не отрывается от опорной поверхности во время движения. Пусть вектор угловой скорости шара  $\boldsymbol{\omega}$  имеет в системе координат  $Gx_1x_2x_3$  компоненты  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  угловой скорости введенной нами системы координат  $Gx_1x_2x_3$  в той же системе имеет компоненты  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ . Компоненты силы реакции  $\mathbf{N}$ , действующей на шар со стороны опорной поверхности, в системе координат  $Gx_1x_2x_3$  обозначим  $F_1$ ,  $F_2$  и  $N$ , а компоненты результирующей силы  $\mathbf{P}$  пусть будут  $X$ ,  $Y$ ,  $P$ . Пусть  $M$  – масса шара,  $R$  – его радиус. Шар считаем однородным, поэтому его моменты инерции относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей с началом в центре масс  $G$  будут одинаковы. Соответствующий момент инерции обозначим через  $J$ . Для записи уравнений движения шара воспользуемся общими теоремами динамики

$$M \dot{\mathbf{v}}_G + M [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_G] = \mathbf{P} + \mathbf{N}, \quad (1)$$

$$J \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\Omega} \times J\boldsymbol{\omega}] = [\overline{GK} \times \mathbf{N}]. \quad (2)$$

В уравнении (2) вектор  $\overline{GK} = -R\mathbf{e}_3$  – это радиус-вектор из центра масс  $G$  шара в точку  $K$  контакта шара с опорной поверхностью. Поскольку качение шара не сопровождается проскальзыванием, то:

$$\mathbf{v}_G + [\boldsymbol{\omega} \times \overline{GK}] = 0. \quad (3)$$

В скалярной форме можно переписать систему уравнений (1) – (3) так:

$$M\dot{u} - M\theta_3v = X + F_1, \quad M\dot{v} + M\theta_3u = Y + F_2, \quad M\theta_1v - M\theta_2u = P + N; \quad (4)$$

$$J\dot{\omega}_1 + J\theta_2\omega_3 - J\theta_3\omega_2 = F_2R, \quad J\dot{\omega}_2 + J\theta_3\omega_1 - J\theta_1\omega_3 = -F_1R, \quad \dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_2 - \theta_2\omega_1 = 0; \quad (5)$$

$$u - R\omega_2 = 0, \quad v + R\omega_1 = 0. \quad (6)$$

Путем исключения неизвестных  $F_1, F_2, \omega_1, \omega_2$  из системы уравнений (4) – (6), можно привести данную систему к двум уравнениям следующего вида:

$$\dot{u} - \theta_3 v = \frac{R^2 X}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_1 \omega_3}{J + MR^2}, \quad \dot{v} + \theta_3 u = \frac{R^2 Y}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_2 \omega_3}{J + MR^2}. \quad (7)$$

Очевидно, что центр масс  $G$  шара движется по поверхности, которая получается из опорной поверхности, если каждую её точку сместить вдоль вектора нормали на расстояние, равное радиусу  $R$  шара. Будем считать, что оси  $Gx_1$  и  $Gx_2$  системы координат  $Gx_1x_2x_3$  направлены по касательным к линиям кривизны этой поверхности. В дальнейшем полагаем, что именно эта поверхность задана в явном виде. Покажем теперь, как система уравнений движения шара приводится к форме Коши в случае, когда центр шара при движении принадлежит некоторой поверхности вращения.

## 2. Приведение системы уравнений движения шара к форме Коши

Пусть при качении шара его центр масс  $G$  принадлежит поверхности, задаваемой относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\mathbf{r} = (\rho(q_1) \cos q_2, \rho(q_1) \sin q_2, \zeta(q_1)) \quad (8)$$

Поверхность вращения (8) получается, если кривую, заданную параметрическими уравнениями  $\rho = \rho(q_1), \zeta = \zeta(q_1)$ , повернуть вокруг вертикальной оси, при этом  $q_2$  – угол поворота. Тогда для компонент скорости  $u$  и  $v$  центра масс  $G$  имеем следующие выражения через  $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$  (см. [5 – 8]):

$$u = h_1 \dot{q}_1, \quad v = h_2 \dot{q}_2, \quad (9)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – коэффициенты Ламе поверхности (8), которые вычисляются по формулам [5 – 8]:

$$h_1 = h_1(q_1) = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}, \quad h_2 = h_2(q_1) = \rho(q_1), \quad (10)$$

Из уравнений неголономных связей (6) будем иметь:

$$\omega_2 = \frac{u}{R} = \frac{h_1 \dot{q}_1}{R}, \quad \omega_1 = -\frac{v}{R} = -\frac{h_2 \dot{q}_2}{R}. \quad (11)$$

Для компонент  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  угловой скорости  $\Omega$  системы координат  $Gx_1x_2x_3$  имеем следующие выражения (см. [5 – 8]):

$$\theta_1 = h_2 k_2 \dot{q}_2, \quad \theta_2 = -h_1 k_1 \dot{q}_1, \quad \theta_3 = \frac{\dot{q}_2}{h_1} \frac{dh_2}{dq_1}. \quad (12)$$

В формулах (12) через  $k_1, k_2$  обозначены главные кривизны поверхности (8), которые вычисляются по формулам [5 – 8]:

$$k_1 = k_1(q_1) = \frac{\frac{d^2\zeta}{dq_1^2} \frac{d\rho}{dq_1} - \frac{d\zeta}{dq_1} \frac{d^2\rho}{dq_1^2}}{\left(\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = k_2(q_1) = \frac{\frac{d\zeta}{dq_1}}{\rho \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}}. \quad (13)$$

Тогда из третьего уравнения системы (5) получаем:

$$\dot{\omega}_3 = \theta_2 \omega_1 - \theta_1 \omega_2 = -\frac{\theta_2 v}{R} - \frac{\theta_1 u}{R} = \frac{k_1 u v}{R} - \frac{k_2 u v}{R} = \frac{(k_1 - k_2) v h_1 \dot{q}_1}{R}. \quad (14)$$

Теперь вместо переменной  $\omega_3$  введём новую переменную  $\Lambda$ , которая связана с  $\omega_3$  соотношением

$$\Lambda = R\omega_3.$$

Уравнение (14) примет вид:

$$\dot{\Lambda} = h_1 h_2 (k_1 - k_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2. \quad (15)$$

Теперь преобразуем дифференциальные уравнения, составляющие систему (7). Считаем, что шар катится по поверхности под действием силы тяжести, тогда получаем для компонент приложенной силы следующие выражения

$$X = -Mg \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1}, \quad Y = 0, \quad P = -Mg \frac{1}{h_1} \frac{d\rho}{dq_1}. \quad (16)$$

Введём обозначение

$$\frac{J}{J + MR^2} = n^2 < 1.$$

Первое уравнение системы (7) представляется в виде

$$\dot{u} - \theta_3 v = \frac{R^2 X}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_1 \omega_3}{J + MR^2}.$$

Преобразуем отдельные слагаемые, входящие в это уравнение. Дифференцирование первой из формул (9) дает:

$$\dot{u} = \frac{d}{dt}(h_1 \dot{q}_1) = h_1 \ddot{q}_1 + \frac{dh_1}{dq_1} \dot{q}_1^2.$$

Используя формулы (9) и (12), приведем выражение  $\theta_3 v$  к виду:

$$\theta_3 v = \frac{\dot{q}_2}{h_1} \frac{dh_2}{dq_1} h_2 \dot{q}_2 = \frac{h_2}{h_1} \frac{dh_2}{dq_1} \dot{q}_2^2.$$

Правая часть уравнения (7) с учетом формул (12) и явного выражения для  $X$ , может быть записана следующим образом:

$$\frac{R^2 X}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_1 \omega_3}{J + MR^2} = -g(1 - n^2) \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1} + n^2 h_2 k_2 \dot{q}_2 \Lambda.$$

Окончательно, первое уравнение системы (7) представляется так:

$$h_1 \ddot{q}_1 + \frac{dh_1}{dq_1} \dot{q}_1^2 - \frac{h_2}{h_1} \frac{dh_2}{dq_1} \dot{q}_2^2 + g(1 - n^2) \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1} - n^2 h_2 k_2 \dot{q}_2 \Lambda = 0. \quad (17)$$



Аналогично преобразуем второе уравнение системы (7). Оно имеет вид:

$$\dot{v} + \theta_3 u = \frac{R^2 Y}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_2 \omega_3}{J + MR^2}.$$

Дифференцирование второй из формул (9) дает

$$\dot{v} = \frac{d}{dt}(h_2 \dot{q}_2) = h_2 \ddot{q}_2 + \frac{dh_2}{dq_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

Выражение  $\theta_3 u$  равно:

$$\theta_3 u = \frac{\dot{q}_2}{h_1} \frac{dh_2}{dq_1} h_1 \dot{q}_1 = \frac{dh_2}{dq_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

Правая часть данного уравнения записывается так:

$$\frac{R^2 Y}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_2 \omega_3}{J + MR^2} = -n^2 h_1 k_1 \dot{q}_1 \Lambda.$$

Окончательно, второе уравнение системы (7) может быть приведено к виду:

$$h_2 \ddot{q}_2 + 2 \frac{dh_2}{dq_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + n^2 h_1 k_1 \dot{q}_1 \Lambda = 0. \quad (18)$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (15), (17), (18) относительно неизвестных функций  $q_1$ ,  $q_2$  и  $\Lambda$ . Из этой системы можно найти  $q_1 = q_1(t)$ ,  $q_2 = q_2(t)$ ,  $\Lambda = \Lambda(t)$ . Решив полученную систему уравнений (15), (17), (18), мы можем найти неизвестные компоненты силы реакции из системы уравнений (4):

$$Mh_1 \ddot{q}_1 + M \frac{dh_1}{dq_1} \dot{q}_1^2 - M \frac{h_2}{h_1} \frac{dh_2}{dq_1} \dot{q}_2^2 + Mg \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1} = F_1,$$

$$Mh_2 \ddot{q}_2 + 2M \frac{dh_2}{dq_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 = F_2,$$

$$Mh_2^2 k_2 \dot{q}_2 + Mh_1^2 k_1 \dot{q}_1 + Mg \frac{1}{h_1} \frac{d\rho}{dq_1} = N.$$

Приведем систему уравнений (15), (17), (18) к системе уравнений первого порядка. При этом выражения  $\dot{q}_1$  и  $\dot{q}_2$  обозначим соответственно  $v_1$  и  $v_2$ . Система уравнений (15), (17), (18) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= v_1, \quad \dot{q}_2 = v_2, \\ \dot{\Lambda} &= h_1 h_2 (k_1 - k_2) v_1 v_2, \\ \dot{v}_1 &= \frac{h_2}{h_1^2} \frac{dh_2}{dq_1} v_2^2 - \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{dq_1} v_1^2 - g(1-n^2) \frac{1}{h_1^2} \frac{d\zeta}{dq_1} + \frac{n^2 h_2 k_2}{h_1} v_2 \Lambda, \\ \dot{v}_2 &= -\frac{2}{h_2} \frac{dh_2}{dq_1} v_1 v_2 - \frac{n^2 h_1 k_1}{h_2} v_1 \Lambda. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, система уравнений задачи о качении шара по поверхности вращения приведена к задаче Коши.

### 3. Численное исследование системы уравнений движения шара

Систему уравнений (19) удобно исследовать численно [14, 15]. Заметим, что в отличие от рассматриваемой системы, уравнения движения любой системы Гамильтона сразу записываются в нормальной форме Коши [16 – 22], что способствует их численному исследованию. Этот параграф посвящен обсуждению некоторых особенностей численного исследования данной системы. Будем рассматривать конкретный пример – движение шара по поверхности вращения такой, что при движении центр шара принадлежит параболоиду вращения. Будем считать, что парабола, являющаяся меридианом данного параболоида, имеет в вершине радиус кривизны, равный  $a$ . Тогда функции  $\rho(q_1)$  и  $\zeta(q_1)$ , параметрически задающие данную параболу (см. формулу (8)), имеют вид:

$$\rho(q_1) = aq_1, \quad \zeta(q_1) = \frac{aq_1^2}{2}. \quad (20)$$

По формулам (10) и (13) определим коэффициенты Ламе и главные кривизны данной поверхности

$$h_1 = a\sqrt{1+q_1^2}, \quad h_2 = aq_1, \quad k_1 = \frac{1}{a(1+q_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = \frac{1}{a\sqrt{1+q_1^2}}. \quad (21)$$

Пользуясь формулами (20) и (21), мы можем вычислить в явном виде все коэффициенты, входящие в правую часть системы (19). В случае качения шара по поверхности такой, что в процессе движения его центр принадлежит параболоиду вращения, определяемому формулами (20), (21), система уравнений (19) в явном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= v_1, \quad \dot{q}_2 = v_2, \\ \dot{v}_1 &= \frac{q_1}{1+q_1^2} \left( v_2^2 - v_1^2 - \frac{g(1-n^2)}{a} + \frac{n^2}{a} v_2 \Lambda \right), \\ \dot{v}_2 &= - \left( 2v_2 + \frac{n^2}{a(1+q_1^2)} \Lambda \right) \frac{v_1}{q_1}, \\ \dot{\Lambda} &= - \frac{aq_1^3}{1+q_1^2} v_1 v_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Запишем систему уравнений (22) в безразмерной форме. Для этого введем безразмерные переменные  $y_1, y_2, y_3$  по формулам

$$y_1 = \sqrt{\frac{R}{g}} v_1, \quad y_2 = \sqrt{\frac{R}{g}} v_2, \quad y_3 = \frac{\Lambda}{\sqrt{gR}},$$

а также безразмерное время и параметр

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{R}} t, \quad \lambda = \frac{R}{a}.$$

В результате система уравнений (22) представляется в безразмерной форме:

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dq_2}{d\tau} &= y_2, \\ \frac{dy_1}{d\tau} &= \frac{q_1}{1+q_1^2} \left( y_2^2 - y_1^2 - \lambda(1-n^2) + n^2 \lambda y_2 y_3 \right), \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= - \left( 2y_2 + \frac{n^2 \lambda}{(1+q_1^2)} y_3 \right) \frac{y_1}{q_1}, \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= - \frac{q_1^3}{1+q_1^2} y_1 y_2.\end{aligned}\tag{23}$$

Система уравнений (23) исследовалась численно с помощью комплекса символьных вычислений MAPLE 7. В качестве численного метода исследования был выбран метод Рунге – Кутты – Фелберга четвертого или пятого порядка (в комплексе символьных вычислений MAPLE 7 он обозначается как rkf45). Значения параметров были взяты следующими

$$n = \sqrt{\frac{2}{7}}, \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Эти значения соответствуют однородному шару, катящемуся без проскальзывания по поверхности вращения такой, что во время движения центр шара принадлежит параболоиду вращения, причем радиус кривизны меридиана соответствующего параболоида в вершине вдвое больше радиуса шара. Начальные условия для численного интегрирования были выбраны так:

$$q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 0, \quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 3, \quad y_3(0) = 0.1.$$

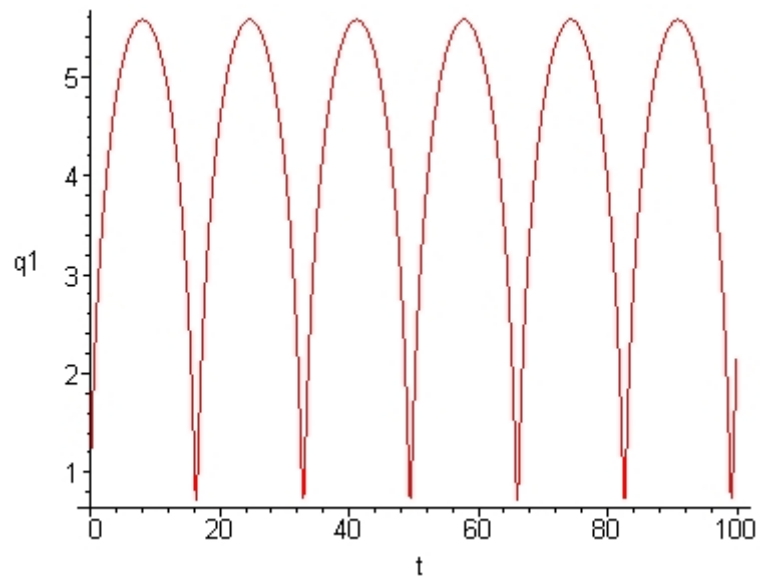


Рис. 1. Координата  $q_1$  в зависимости от безразмерного времени  $\tau$ .

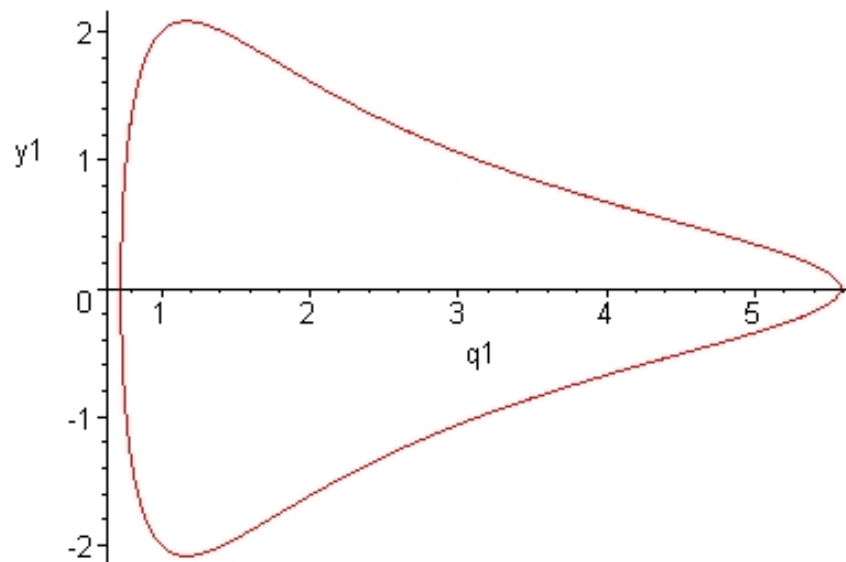


Рис. 2. Траектория на фазовой плоскости  $(q_1, \dot{q}_1) = (q_1, y_1)$ .

На Рис. 1 представлена зависимость координаты  $q_1$  от безразмерного времени  $\tau$ . На Рис. 2 представлена траектория на фазовой плоскости  $(q_1, \dot{q}_1)$ . Видно, что координата  $q_1(\tau)$  изменяется периодически, а на фазовой плоскости соответствующее движение описывается замкнутой фазовой кривой. Это подтверждает полученные ранее в работах [3, 4] аналитические выводы о том, что в

случае движения шара по поверхности вращения такой, что центр шара принадлежит параболоиду вращения, для почти всех начальных условий шар будет совершать периодическое движение между двумя уровнями на параболоиде, которые также определяются начальными условиями. Таким образом, приведение уравнений движения шара, катящегося по поверхности вращения, к нормальной форме Коши, позволяет легко проанализировать эту задачу.

### **Заключение**

В работе была рассмотрена задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения. Система уравнения движения шара приведена к нормальной форме Коши, выполнен её численный анализ. Полученные численные результаты подтверждают аналитические выводы о характере движения шара.

### **Список источников**

1. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. - М.: Бюро новой техники НКАП, 1945. - 34 с.
2. Загордан А.А. Современное состояние теории шимми // Труды МАИ. 2011. № 47.  
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=26675>
3. Routh E.J. The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
4. Noether F. Uber rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen, Leipzig, Teubner, 1909.

5. Кулешов А.С., Соломина Д.В. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Проблемы информатики. 2021. № 1. С. 15–24.
6. Кулешов А.С., Соломина Д.В. Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Вестник Санкт Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8. № 4. С. 653–660.
7. Kuleshov A.S., Solomina D.V. Application of the Kovacic Algorithm to the Problem of Rolling of a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution // Communications in Computer and Information Science, 2021, vol. 1413, pp. 169–177. DOI: [10.1007/978-3-030-78759-2\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-78759-2_15)
8. Кулешов А.С., Шишков А.А. О качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка и по тору // Труды XXIII Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, 13-16 ноября 2023). - Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2023. С. 93-97.
9. Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A. The rolling motion of a ball on a surface. New integrals and hierarchy of dynamics // Regular & Chaotic Dynamics, 2002, vol. 7, issue 2, pp. 201-219. DOI: [10.1070/RD2002v007n02ABEH000205](https://doi.org/10.1070/RD2002v007n02ABEH000205)
10. Borisov A.V., Mamaev I.S., Bizyaev I.A. The Hierarchy of Dynamics of a Rigid Body Rolling without Slipping and Spinning on a Plane and a Sphere // Regular & Chaotic Dynamics, 2013, vol. 18, issue 3, pp. 277-328. DOI: [10.1134/S1560354713030064](https://doi.org/10.1134/S1560354713030064)

11. Fasso F., Sansonetto N. Conservation of Energy and Momenta in Nonholonomic Systems with Affine Constraints // Regular & Chaotic Dynamics, 2015, vol. 20, issue 4, pp. 449–462. DOI: [10.1134/S1560354715040048](https://doi.org/10.1134/S1560354715040048)
12. Borisov A.V., Mamaev I.S. Symmetries and Reduction in Nonholonomic Mechanics // Regular & Chaotic Dynamics, 2015, vol. 20, issue 5, pp. 553-604. DOI: [10.1134/S1560354715050044](https://doi.org/10.1134/S1560354715050044)
13. Fasso F., Sansonetto N. On Some Aspects of the Dynamics of a Ball in a Rotating Surface of Revolution and of the Kasamawashi Art // Regular & Chaotic Dynamics, 2022, vol. 27, issue 4, pp. 409-423. DOI: [10.1134/S1560354722040025](https://doi.org/10.1134/S1560354722040025)
14. Косенко И.И., Кузнецова Л.В., Николаев А.В., Кузнецов Л.Ю., Олейник А.В. Моделирование и виртуальное прототипирование. - М.: ИНФРА–М, 2012. - 176 с.
15. Косенко И.И., Кузнецова Л.В., Николаев А.В., Кузнецов Л.Ю., Олейник А.В. Проектирование и 3D – моделирование в средах CATIA V5, ANSYS и Dymola 7.3. - М.: ИНФРА–М, 2020. – 183 с.
16. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=65212>
17. Бардин Б.С., Чекина Е.А. Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=72568>
18. Сафонов А.И. О периодических движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности кратного резонанса третьего порядка // Труды



МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168988>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-02)

19. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=93292>

20. Соколов С.В. Интегрируемый случай М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Механическая интерпретация // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=84387>

21. Соколов С.В. Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=93532>

22. Баркин М.Ю. Приближенное решение задачи Лиувилля в переменных «действие-угол» для задачи Эйлера – Пуансо // Труды МАИ. 2014. № 72. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=47336>

## References

1. Keldysh M.V. *Shimmi perednego kolesa trekhkolesnogo shassi* (Shimmy front wheel tricycle undercarriage), Moscow, Byuro novoi tekhniki NKAP, 1945, 34 p.

2. Zagordan A.A. *Trudy MAI*, 2011, no. 47. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=26675>

3. Routh E.J. *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
4. Noether F. *Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen*, Leipzig, Teubner, 1909.
5. Kuleshov A.S., Solomina D.V. *Problemy informatiki*, 2021, no. 1, pp. 15–24.
6. Kuleshov A.S., Solomina D.V. *Vestnik Sankt Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2021, vol. 8, no. 4, pp. 653-660.
7. Kuleshov A.S., Solomina D.V. Application of the Kovacic Algorithm to the Problem of Rolling of a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution, *Communications in Computer and Information Science*, 2021, vol. 1413, pp. 169–177. DOI: [10.1007/978-3-030-78759-2\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-78759-2_15)
8. Kuleshov A.S., Shishkov A.A. *Trudy XXIII Mezhdunarodnoi konferentsii «Matematicheskoe modelirovanie i superkomp'yuternye tekhnologii»*, Nizhnii Novgorod, Izdatel'stvo Nizhegorodskogo universiteta, 2023, pp. 93-97.
9. Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A. The rolling motion of a ball on a surface. New integrals and hierarchy of dynamics, *Regular & Chaotic Dynamics*, 2002, vol. 7, issue 2, pp. 201-219. DOI: [10.1070/RD2002v007n02ABEH000205](https://doi.org/10.1070/RD2002v007n02ABEH000205)
10. Borisov A.V., Mamaev I.S., Bizyaev I.A. The Hierarchy of Dynamics of a Rigid Body Rolling without Slipping and Spinning on a Plane and a Sphere, *Regular & Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, issue 3, pp. 277-328. DOI: [10.1134/S1560354713030064](https://doi.org/10.1134/S1560354713030064)

11. Fasso F., Sansonetto N. Conservation of Energy and Momenta in Nonholonomic Systems with Affine Constraints, *Regular & Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, issue 4, pp. 449–462. DOI: [10.1134/S1560354715040048](https://doi.org/10.1134/S1560354715040048)
12. Borisov A.V., Mamaev I.S. Symmetries and Reduction in Nonholonomic Mechanics, *Regular & Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, issue 5, pp. 553-604. DOI: [10.1134/S1560354715050044](https://doi.org/10.1134/S1560354715050044)
13. Fasso F., Sansonetto N. On Some Aspects of the Dynamics of a Ball in a Rotating Surface of Revolution and of the Kasamawashi Art, *Regular & Chaotic Dynamics*, 2022, vol. 27, issue 4, pp. 409-423. DOI: [10.1134/S1560354722040025](https://doi.org/10.1134/S1560354722040025)
14. Kosenko I.I., Kuznesova L.V., Nikolaev A.V., Kuznetsov L.Yu., Oleinik A.V. *Modelirovanie i virtual'noe prototipirovanie* (Modeling and virtual prototyping: a tutorial), Moscow, INFRA-M, 2012, 176 p.
15. Kosenko I.I., Kuznetsova L.V., Nikolaev A.V., Kuznetsov L.Yu., Oleinik A.V. *Proektirovanie i 3D – modelirovanie v sredakh CATIA V5, ANSYS i Dymola 7.3*. (Projecting and 3D – Modeling in CATIA V5, ANSYS and Dymola 7.3 tools: a tutorial), Moscow, INFRA–M, 2020, 183 p.
16. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212>
17. Bardin B.S., Chekina E.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=72568>
18. Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168988>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-02)

19. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL:  
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93292>
20. Sokolov S.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL:  
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84387>
21. Sokolov S.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL:  
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93532>
22. Barkin M.Yu. *Trudy MAI*, 2014, no. 72. URL:  
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=47336>

Статья поступила в редакцию 26.02.2024

Одобрена после рецензирования 06.03.2024

Принята к публикации 27.06.2024

The article was submitted on 26.02.2024; approved after reviewing on 06.03.2024;  
accepted for publication on 27.06.2024