На правах рукописи

Чекина Евгения Алексеевна

# Исследование устойчивости резонансных вращений спутника на эллиптической орбите

01.02.01 – Теоретическая механика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на кафедре «Теоретическая механика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

**Научный руководитель:** **Бардин Борис Сабирович**
доктор физико-математических наук, доцент.

**Официальные оппоненты:** **Буров Александр Анатольевич,**
доктор физико-математических наук, доцент, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, отдел механики, старший научный сотрудник.

**Ткачев Степан Сергеевич**
Ткачев Степан Сергеевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, доцент кафедры теоретической механики МФТИ.

**Ведущая организация:** ФГБОУ ВПО "Удмуртский государственный университет".

Защита состоится «____» ____________ 2016 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте института http://www.mai.ru.

Автореферат разослан «____» ____________ 2016 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
*к.ф.-м.н, доцент* *Гидаспов В.Ю.*

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.**

В последние десятилетия наблюдается значительный прогресс в исследовании и освоении космического пространства. Открываются новые планетные системы, реализуются масштабные и комплексные космические проекты, планируются новые амбициозные космические миссии. Для решения этих задач активно применяются аналитические и численные методы небесной механики и динамики спутников. Современная динамика космических аппаратов (КА) является быстро развивающейся предметной областью, которая характеризуется очень широким спектром проблем, охватывающих как прикладные вопросы, связанные с проектированием новой космической техники и развитием методов математического моделирования движения КА, так и вопросы развития теории и методов качественного анализа движения спутников. В частности, несмотря на усложнение конструкций КА и повышение требований к их системам управления, актуальными остаются задачи исследования общих закономерностей движения спутников, моделируемых твердым телом. Одной из таких задач является задача о движении спутника относительно центра масс на эллиптической орбите, изучению которой в различных аспектах посвящено большое количество публикаций. Постановки задач и описание полученных в этой области результатов содержатся в работах В.В. Белецкого, А.П. Маркеева, В.А. Сарычева и других исследователей.

Движение спутника относительно центра масс описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, которые не интегрируются в квадратурах. В связи с этим актуальной является задача о нахождении и исследовании свойств определенных классов их частных решений. При этом особый интерес представляют решения, которые играют определяющую роль в общей динамике спутника. К таким решениям, в частности, относятся периодические решения. Нередко исследование их свойств, позволяет получать важные качественные выводы об общих закономерностях движения спутника, которые могут быть затем использованы на этапе проектирования и моделирования движения КА, а также для разработки эффективной системы управления КА.

Исследованию периодических движений спутника на эллиптической орбите посвящено много работ. Наиболее детально изучены плоские периодические движения, при которых одна из главных центральных осей инерции спутника направлена по нормали к плоскости орбиты. Подробную библиографию по их исследованию можно найти в работах А.Д. Брюно и С.Ю. Садова.

В небесной механике и динамике спутников особую роль играют устойчивые плоские резонансные периодические движения, при которых периоды орбитального обращения и вращения спутника относительно центра масс находятся в рациональном отношении. Как показано в работах В.В. Белецкого, А.А. Хентова, В.И. Арнольда, В.В. Козлова, А.И. Нейштадта и других исследователей на таких движениях спутник (или планета) попадают в область особой динамической устойчивости, которая возникает благодаря наличию указанной резонансной связи.

В задаче о движении спутника относительно центра масс известны два замечательных случая, когда уравнение В.В. Белецкого, описывающее плоские движения спутника относительно центра масс, допускает точные частные решения: если главные центральные моменты инерции спутника $A, B, C$ и эксцентриситет орбиты $e$ связаны соотношением $2e = (C - A)/B$, то имеется частное решение, описывающее резонансное вращение типа 1:2, если же выполнено соотношение $-2e = 3(C - A)/B$, существует частное решение, описывающее резонансное вращение типа 3:2. Для определенных значений параметров устойчивость указанных вращений исследовалась А.А. Хентовым, А.П. Маркеевым, Б.С. Бардиным, Т.Е. Чуркиной.

**Цель работы.**

Целью данной диссертационной работы является исследование устойчивости вращений типа 1:2 или 3:2, определяемых точными решениями уравнения В.В. Белецкого, для неисследованных ранее значений параметров, а также разработка конструктивного алгоритма решения задачи об устойчивости периодической гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансах первого и второго порядков.

**Методы исследования.**

Для достижения цели работы в диссертации применялись современные методы гамильтоновой механики, методы теории устойчивости, методы теории КАМ, метод нормальных форм, метод симплектических отображений.

**Достоверность результатов**

Достоверность представленных в диссертации результатов обеспечивается применением строгих математических методов исследования, высокой точностью проведенных численных расчетов, а также тем, что выводы, полученные в предельных случаях аналитически, полностью согласуются с результатами численного анализа.

**Научная новизна.**

В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1. В задаче об устойчивости резонансного вращения типа 1:2 с учетом плоских возмущений были найдены три новых интервала значений эксцентриситета орбиты, в которых имеет место устойчивость по Ляпунову. Исключение составляет лишь конечное число точек, отвечающих резонансам третьего и четвертого порядков, где имеет место неустойчивость. Кроме того, для двух особенных и неисследованных ранее значений эксцентриситета на основании нелинейного анализа членов в разложении гамильтониана до шестой степени включительно была доказана устойчивость указанного вращения по Ляпунову.

2. Решена линейная задача об устойчивости резонансного вращения типа 1:2 для спутника с неравными моментами инерции с учетом как плоских, так и пространственных возмущений. В пространстве параметров построены диаграммы устойчивости.

3. Исследована устойчивость резонансных вращений динамически симметричного спутника. В рамках нелинейного анализа показано, что пространственные возмущения оказывают влияние на устойчивость движения спутника только в резонансных случаях.

4. Разработан конструктивный алгоритм исследования устойчивости периодических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в случае резонансов первого и второго порядков.

**Положения и результаты, выносимые на защиту.**

1. Проведен полный нелинейный анализ устойчивости резонансного вращения типа 1:2 с учетом плоских возмущений для неисследованных ранее значений эксцентриситета. Найдены три новые области устойчивости указанного резонансного вращения при значениях эксцентриситета, близких к единице, а также получены строгие выводы об устойчивости в особых точках, где для решения задачи потребовался анализ членов до шестой степени включительно в разложении функции Гамильтона уравнений возмущенного движения.

2. Проведен анализ устойчивости в линейном приближении резонансного вращения типа 1:2 в случае спутника с неравными моментами инерции с учетом пространственных возмущений. При малых значениях эксцентриситета исследование выполнено аналитически и найдены явные выражения для границ областей неустойчивости (параметрического резонанса). При произвольных значениях эксцентриситета исследование выполнено численно. В плоскости параметров задачи построены диаграммы устойчивости.

3. Проведен строгий анализ устойчивости резонансных вращений типа 1:2 и 3:2 в случае динамически симметричного спутника с учетом пространственных возмущений. Найдены интервалы значений эксцентриситета, на которых имеет место формальная устойчивость или устойчивость для большинства начальных условий.

4. Был построен конструктивный алгоритм исследования устойчивости периодических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в случае резонансов первого и второго порядков.

**Теоретическая и практическая ценность.** Общетеоретические результаты работы могут быть использованы для исследования устойчивости периодических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в случае резонансов первого и второго порядков. При выполнении диссертационной работы были написаны два универсальных комплекса программ, служащие для исследования устойчивости периодических гамильтоновых систем с одной и двумя степенями свободы. Результаты исследования устойчивости могут быть полезны для качественного изучения движения небесных тел и космических аппаратов.

**Апробация результатов.**

Результаты диссертации докладывались

- на научных семинарах кафедры теоретической механики Московского авиационного института,
- на 13-й международной конференции "Авиация и космонавтика (МАИ, 2014, Москва),
- на 51 всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (РУДН, 2015, Москва),
- на международной конференции по математической теории и механике, (Суздаль, 2015),
- на 14-й международной конференции "Авиация и космонавтика (МАИ, 2015, Москва),
- на 52 всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (РУДН, 2016, Москва).
- в Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН.

Работа поддержана грантом РНФ № 14-21-00068.

**Публикации.**

Основные положения диссертационного исследования опубликованы в 9 научных работах, из них 4 статьи [1–4] в журналах, входящих в перечень ВАК, и 5 публикаций [5–9] в различных сборниках и материалах конференций.

**Личный вклад автора**. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки диссертационной работы, задавались научным руководителем.

**Структура и объем работы.**

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 70 наименований и двух приложений. Работа содержит 7 иллюстраций. Общий объем диссертации составляет 107 страниц.

## Содержание работы

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и задачи работы, приведен обзор исследований плоских резонансных движений спутника и дано краткое изложение содержания работы по главам.

**В первой главе** приведен вывод уравнений движения спутника относительно центра масс на эллиптической орбите, выписаны точные решения этих уравнений, описывающие резонансные вращения спутника, сформулированы постановки задач об их устойчивости и с точностью до членов четвертой степени выписаны разложения гамильтониана возмущенного движения в ряд в окрестности указанных точных решений.

Спутник моделируется твердым телом, движущимся в центральном ньютоновском гравитационном поле сил по кеплеровской эллиптической орбите. Для описания его движения относительно центра масс вводятся две системы координат: орбитальная система координат $OXYZ$, оси которой направлены по радиус-вектору центра масс относительно притягивающего центра, по трансверсали и по нормали к орбите, и связанная система координат $Oxyz$, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника. Моменты инерции спутника относительно осей связанной системы координат обозначены через $A$, $B$ и $C$. Ориентация связанной системы координат относительно орбитальной задается углами Эйлера $\psi$, $\theta$, $\phi$. Следуя [17], введены обобщенные импульсы и уравнения движения записаны в гамильтоновой форме. Если моменты инерции и эксцентриситет орбиты $e$ удовлетворяют соотношению

$$3(C-A)/B = -2e, \tag{1}$$

то уравнения движения имеют частное решение [12]

$$\psi^* = -\frac{1}{2}\,\nu,\ \theta^* = \frac{1}{2}\,\pi,\ \phi^* = 0, \tag{2}$$

где $\nu$ – истинная аномалия.

Решение (2) описывает резонансное вращение спутника, при котором его главная центральная ось инерции $Oy$ направлена по нормали к плоскости орбиты, а сам спутник совершает один оборот в абсолютном пространстве за два оборота центра масс по орбите (резонансное вращение типа 1:2).

Если же моменты инерции и эксцентриситет орбиты удовлетворяют соотношению

$$(C - A)/B = 2e, \tag{3}$$

то уравнения движения имеют частное решение [10, 11]

$$\psi^* = \frac{1}{2}\nu,\ \theta^* = \frac{1}{2}\pi,\ \phi^* = 0. \tag{4}$$

Решение (4) представляет собой резонансное вращение спутника, при котором его главная центральная ось инерции $Oy$ направлена по нормали к плоскости орбиты, а сам спутник совершает в абсолютном пространстве три полных оборота относительно нормали к плоскости орбиты за два оборота его центра масс по орбите (резонансное вращение типа 3:2).

Поскольку в дальнейшем предполагается выполнение условия (1) или выполнение условия (3), то в задаче об устойчивости резонансных вращений имеется два независимых параметра. В качестве таких параметров выбраны эксцентриситет орбиты и инерционный параметр $\mu = B/A$. Параметр $\mu$ имеет ограниченную область значений, определяемую неравенством

$$0 < \mu \leq \frac{6}{3 + 2e}, \tag{5}$$

для резонансного вращения (2) и неравенством

$$0 < \mu \leq \frac{2}{1 + 2e} \tag{6}$$

для резонансного вращения (4). Причем в последнем случае эксцентриситет орбиты также ограничен интервалом значений $0 < e \leq \frac{1}{2}$. Данные ограничения являются простым следствием неравенства треугольника для моментов инерции.

В диссертационной работе рассматривается задача об устойчивости резонансных вращений (2) и (4) в следующих постановках:

- задача об устойчивости резонансных вращений спутника с учетом только плоских возмущений, т.е. таких возмущений, при которых его главная центральная ось инерции $Oy$ сохраняет неизменным свое направление по нормали к плоскости орбиты;

- задача об устойчивости резонансных вращений спутника при наличии как плоских, так и пространственных возмущений, при которых главная центральная ось инерции $Oy$ может отклоняться от нормали к плоскости орбиты;

- задача об устойчивости резонансных вращений динамически симметричного спутника по отношению к возмущениям, при которых проекция кинетического момента спутника на ось его динамической симметрии равна нулю (как в невозмущенном движении).

**Во второй главе** решается задача об устойчивости по Ляпунову резонансного вращения (2) с учетом только плоских возмущений. Ранее эта задача исследовалась в [19, 20]. В диссертационной работе исследование устойчивости проводилось для неисследованных ранее значений эксцентриситета.

В данной постановке задачи об устойчивости возмущенное движение описывается периодической по $\nu$ гамильтоновой системой дифференциальных уравнений второго порядка, содержащей только один независимый параметр (эксцентриситет орбиты $e$).

Выводы об устойчивости в первом приближении были получены на основании анализа корней характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0 \tag{7}$$

линеаризованной системы, где $A = [x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi)]/2$. Функции $x_{11}(\nu), x_{22}(\nu)$ являются элементами матрицы фундаментальных решений $\mathbf{X}(\nu)$, удовлетворяющей начальным условиям $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_2$, где $\mathbf{E}_2$ – единичная матрица второго порядка. Коэффициент $A$ вычислялся путем численного интегрирования линеаризованной системы. Расчеты показали, что при приближении $e$ к единице происходит чередование областей устойчивости и неустойчивости. Численное интегрирование линеаризованной системы для значений эксцентриситета близких к единице требует очень большой точности и становится затруднительным. Поэтому расчеты производились для значений эксцентриситета $0 < e < 0.999933$. Оказалось, что в интервалах

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_1 &= [0.32173093; 0.90010166]\,, \\
\mathbb{U}_2 &= [0.9179098746; 0.9905450175]\,, \\
\mathbb{U}_3 &= [0.9921141694; 0.99916659849]\,, \\
\mathbb{U}_4 &= [0.99930356235; 0.999918785804]
\end{aligned}$$

резонансное вращение (2) неустойчиво, а в интервалах

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_1 &= [0; 0.32173093]\,, \\
\mathbb{S}_2 &= [0.90010166; 0.9179098746]\,, \\
\mathbb{S}_3 &= [0.9905450175; 0.9921141694]\,, \\
\mathbb{S}_4 &= [0.99916659849; 0.99930356235]\,, \\
\mathbb{S}_5 &= [0.999918785804; 0.999932116844]
\end{aligned}$$

резонансное вращение (2) устойчиво в линейном приближении. Интервалы $U_1, U_2$, $S_1, S_2$ впервые были обнаружены в работе [20], а их границы были уточнены в работе [19].

Для строгого решения вопроса об устойчивости резонансного вращения в областях $S_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ было выполнено дополнительное исследование устойчивости с учетом нелинейных членов в правых частях уравнений возмущенного движения. Данное исследование проводилось на основе метода, разработанного А.П.Маркеевым [15, 18]. Основная идея указанного метода состоит в построении симплектического отображения, генерируемого периодической гамильтоновой системой с одной степенью свободы, и дальнейшем исследовании устойчивости неподвижной точки этого отображения. Задача об устойчивости неподвижной точки эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия исходной гамильтоновой системы.

Нелинейный анализ устойчивости показал, что в областях $\mathbb{S}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ за исключением некоторых резонансных точек, а также особых точек $e_* = 0.23340371$ и $e_{**} = 0.907502979$ вращение (2) устойчиво по Ляпунову. В особых точках необходимо учитывать члены до шестой степени включительно в разложении гамильтониана возмущенного движения.

Приведем результаты исследования в резонансных точках. Резонансы первого и второго порядков имеют место на границах областей $\mathbb{S}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$. Выводы об устойчивости в этих точках даны в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1: Результаты анализа устойчивости в случаях резонансов первого порядка.

| Область | Значение эксцентриситета | Выводы об устойчивости |
|---|---|---|
| $\mathbb{S}_2$ | 0.9179098745 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_3$ | 0.990545017 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_4$ | 0.9993035623 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_5$ | 0.9999187858 | неустойчивость |

Таблица 2: Результаты анализа устойчивости в случаях резонансов второго порядка.

| Область | Значение эксцентриситета | Выводы об устойчивости |
|---|---|---|
| $\mathbb{S}_1$ | 0.321731 | устойчивость |
| $\mathbb{S}_2$ | 0.90010157 | устойчивость |
| $\mathbb{S}_3$ | 0.992114169 | устойчивость |
| $\mathbb{S}_4$ | 0.9991665985 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_5$ | 0.99993211684 | устойчивость |

Выводы об устойчивости для значений эксцентриситета, отвечающих резонансам третьего и четвертого порядков, представлены в таблицах 3 и 4.

Таблица 3: Результаты анализа устойчивости в случаях резонансов третьего порядка.

| Область | Значение эксцентриситета | Выводы об устойчивости |
|---|---|---|
| $\mathbb{S}_1$ | 0.2777452 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_2$ | 0.9049395 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_3$ | 0.991748982 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_4$ | 0.9992031462 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_5$ | 0.999929008032 | неустойчивость |

Таблица 4: Результаты анализа устойчивости в случаях резонансов четвертого порядка.

| Область | Значение эксцентриситета | Выводы об устойчивости |
|---|---|---|
| $\mathbb{S}_1$ | 0.2261418 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_2$ | 0.9094951 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_3$ | 0.991367255 | устойчивость |
| $\mathbb{S}_4$ | 0.9992380312 | устойчивость |
| $\mathbb{S}_5$ | 0.99992576233 | устойчивость |

Для решения вопроса об устойчивости в особых точках $e = e_*$ и $e = e_{**}$, был получен явный вид симплектического отображения, отвечающего гамильтониану возмущенного движения, до членов пятой степени включительно, а затем была выполнена нормализация этого отображения. На основании анализа коэффициентов нормализованного отображения были сделаны выводы об устойчивости по Ляпунову в указанных особых точках.

Результаты второй главы опубликованы в статье [4].

**В третьей главе** продолжено исследование устойчивости по Ляпунову резонансного вращения (2). Здесь анализ устойчивости проводился в рамках линейного приближения с учетом как плоских, так и пространственных возмущений.

В линейной задаче об устойчивости плоские и пространственные возмущения независимы, т.е. линеаризованные уравнения возмущенного движения распадаются на две системы, одна из которых описывает плоские возмущения, а другая – пространственные возмущения. Выводы об устойчивости линейной системы, описывающей плоские возмущения, были получены во второй главе диссертационной работы. В данной главе был проведен анализ устойчивости линейной системы, описывающей пространственные возмущения.

Для случая слабоэллиптической орбиты, когда эксцентриситет $e \ll 1$ и может считаться малым параметром, было проведено аналитическое исследование.

В предельном случае, когда орбита центра масс круговая ($e = 0$), резонансное вращение представляет собой цилиндрическую прецессию динамически симметричного спутника. Результаты исследования линейной задачи об устойчивости цилиндрической прецессии динамически симметричного спутника изложены в [17], там же можно найти подробную библиографию по этому вопросу.

Отмечено, что в силу неравенства (5) при $e = 0$ допустимые значения параметра $\mu$ лежат в интервале $(0; 2]$. Для значений параметра $\mu \in (0, \mu_*) \cup (8/7; 2)$ (где $\mu_* = 0.9605453476890599$) характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет корень с положительной вещественной частью. Поэтому для указанных значений $\mu$ резонансное вращение неустойчиво [14], причем неустойчивость будет иметь место как при $e = 0$, так и при достаточно малых, но отличных от нуля значениях $e$. Последнее следует из непрерывной зависимости правых частей линейной системы от эксцентриситета $e$.

Если же $\mu \in (\mu_*; 8/7)$, то характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет чисто мнимые корни $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$ и при $e = 0$ она устойчива в линейном приближении [14]. Если выполнено хотя бы одно из резонансных соотношений: $2\omega_1 = n_1$, $2\omega_2 = n_2$ или $\omega_1 - \omega_2 = k$ (где $n_1, n_2, k$ – некоторые целые числа), то при $e \neq 0$ в линейной системе возможно явление параметрического резонанса, приводящее к неустойчивости (теорема Крейна-Гельфанда-Лидского [21]). Указанные резонансные соотношения выполняются в двух внутренних точках интервала $(\mu_*; 8/7)$, а именно: в точке $\mu = 1$ реализуется кратный резонанс $2\omega_1 = 2$, $2\omega_2 = 1$, а в точке $\mu = \mu_{**} = 1.1019093218554929$ – комбинационный резонанс $\omega_1 - \omega_2 = -1$. Кроме того, на левой границе данного интервала ($\mu = \mu_*$) имеет место резонансное соотношение $\omega_1 = \omega_2$, а на его правой границе ($\mu = 8/7$) – соотношение $\omega_1 = 0$.

В плоскости параметров $e, \mu$ из точек с координатами $(0, \mu_*)$, $(0, 1)$, $(0, \mu_{**})$, $(0, 8/7)$ исходят области неустойчивости. Границы указанных областей были получены аналитически в виде сходящихся рядов по степеням $e$

$$\mu = \mu_0 + e\mu_1 + e^2\mu_2 + \dots, \tag{8}$$

где в качестве $\mu_0$ следует положить одно из указанных выше резонансных значений: $\mu_*$, 1, $\mu_{**}$ или 8/7. Коффициенты $\mu_j$ ($j = 1, 2, \dots$) вычислялись методом, изложенным в [17], в основу которого положена нормализация гамильтониана и анализ устойчивости нормализованной линейной системы. В результате применения указанного метода были получены следующие уравнения границ областей неустойчивости

$$\begin{aligned}\mu = \mu_* &- 0.3075491217\, e - 0.5161126507\, e^2 + 0.3620285579\, e^3 - \\ &- 0.02233153309\, e^4 - 0.1487181605\, e^5 + O(e^6)\,.\end{aligned} \tag{9}$$

$$\mu_+ = 1, \qquad \mu_- = \frac{3}{(3+2e)}\,. \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\mu_+ &= \mu_{**} - 0.395648209\, e + 0.518656368\, e^2 - 0.388183784\, e^3 + \\ &\quad + 0.408467858\, e^4 + O(e^5)\,, \\ \mu_- &= \mu_{**} - 0.413821227\, e + 0.532006380\, e^2 - 0.274487848\, e^3 + \\ &\quad + 0.327708546\, e^4 + O(e^5)\,.\end{aligned} \tag{11}$$

$$\mu = \frac{8}{7} - \frac{64}{147}\, e + \frac{9196}{15435}\, e^2 - \frac{126656}{324135}\, e^3 - \frac{266721795196877}{700920220455000}\, e^4 + O(e^5)\,. \tag{12}$$

При произвольных значениях эксцентриситета исследование устойчивости по отношению к пространственным возмущениям выполнялось численно на основании анализа корней характеристического уравнения соответствующей линейной системы. Результаты проведенного анализа представлены в

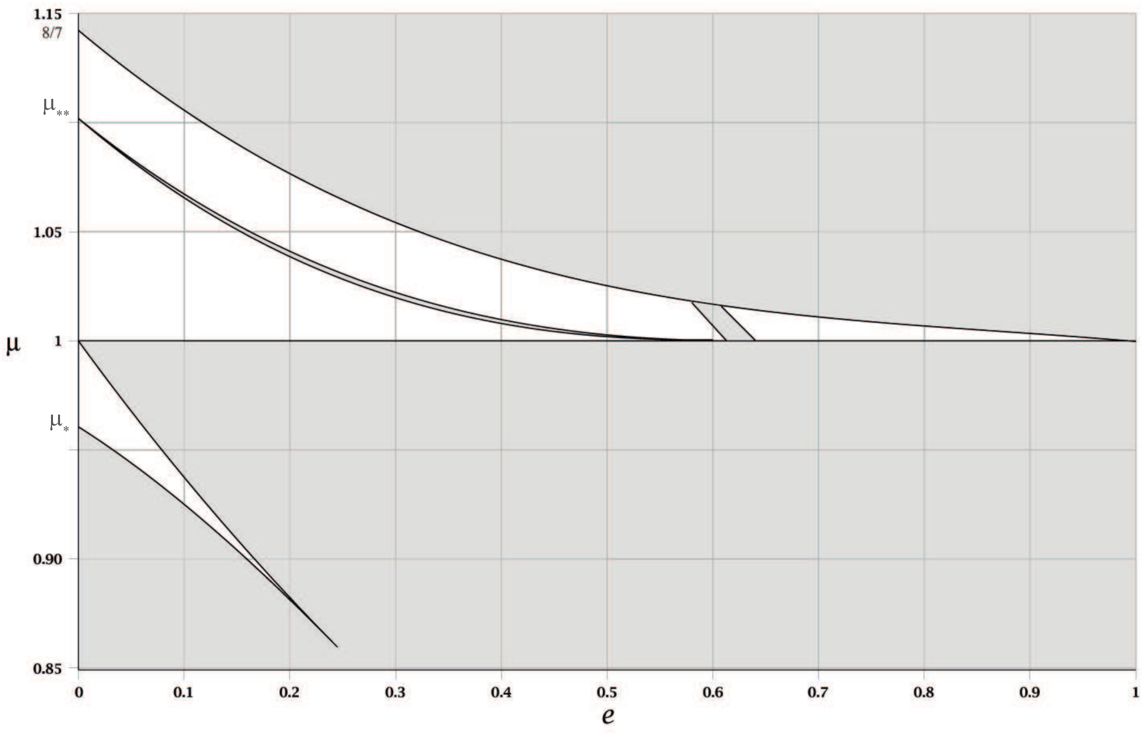


Рис. 1. Области неустойчивости и области устойчивости в линейном приближении резонансного вращения 1:2

виде диаграммы устойчивости на Рис. 1. В областях, закрашенных серым цветом, имеет место неустойчивость рассматриваемой линейной системы и, как следствие, неустойчивость резонансного вращения (2). В областях, обозначенных белым цветом, соответствующая линейная система устойчива. Результаты численного анализа устойчивости хорошо согласуются с результатами анализа устойчивости, полученными аналитически для малых значений $e$.

Объединяя результаты, описанные в данной главе, с результатами, представленными в главе 2, были построены области устойчивости резонансного вращения (2) в линейном приближении с учетом как плоских, так и пространственных возмущений (Рис. 2).

Результаты третьей главы представлены в работе [1].

**В четвертой главе** изложен метод исследования устойчивости периодических движений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях, когда требуется нелинейный анализ. Основная идея данного метода была предложена А.П. Маркеевым. Она состоит в построении и нормализации симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком этой системы. По нормализованному отображению уже нетрудно получить нормальную форму функции Гамильтона, зная которую, на основании известных критериев можно сделать строгие выводы об устойчивости исходной системы. Конструктивный алгоритм построения и нормализации симплектического отображения для нерезонансных случаев и случаев резонансов третьего и четвертого порядков был предложен в [16].

В данной диссертационной работе был разработан конструктивный алгоритм, позволяющий строить симплектическое отображение, выполнять его нормализацию и получать нормальную форму функции Гамильтона в случаях резонанса основного типа (резонансы первого и второго порядков). Были получены явные формулы, позволяющие вычислять коэффициенты нормализованного отображения, а также формулы для вычисления соответствующей данному отображению нормальной формы исходного гамильтониана.

Методы и алгоритмы, описанные и разработанные в данной главе, применялись затем в главе 5 для решения задачи об устойчивости резонансных вращений симметричного спутника.

**В пятой главе** был проведен строгий нелинейный анализ устойчивости резонансных вращений типа 1:2 и 3:2 динамически симметричного спутника ($A = B$). В задаче имеется один независимый параметр – эксцентриситет орбиты. Постановка задачи об устойчивости резонансных вращений симметричного спутника имеет некоторые отличия от общего случая спутника с неравными моментами инерции. Это связано с тем, что при динамической симметрии угол собственного вращения $\phi$ является циклической координатой, а соответствующий импульс $p_\phi$ является первым интегралом уравнений движения. Очевидно, что при $p_\phi \neq 0$ резонансные вращения неустойчивы по отношению к возмущениям угла $\phi$, поэтому, была исследована их устойчи-

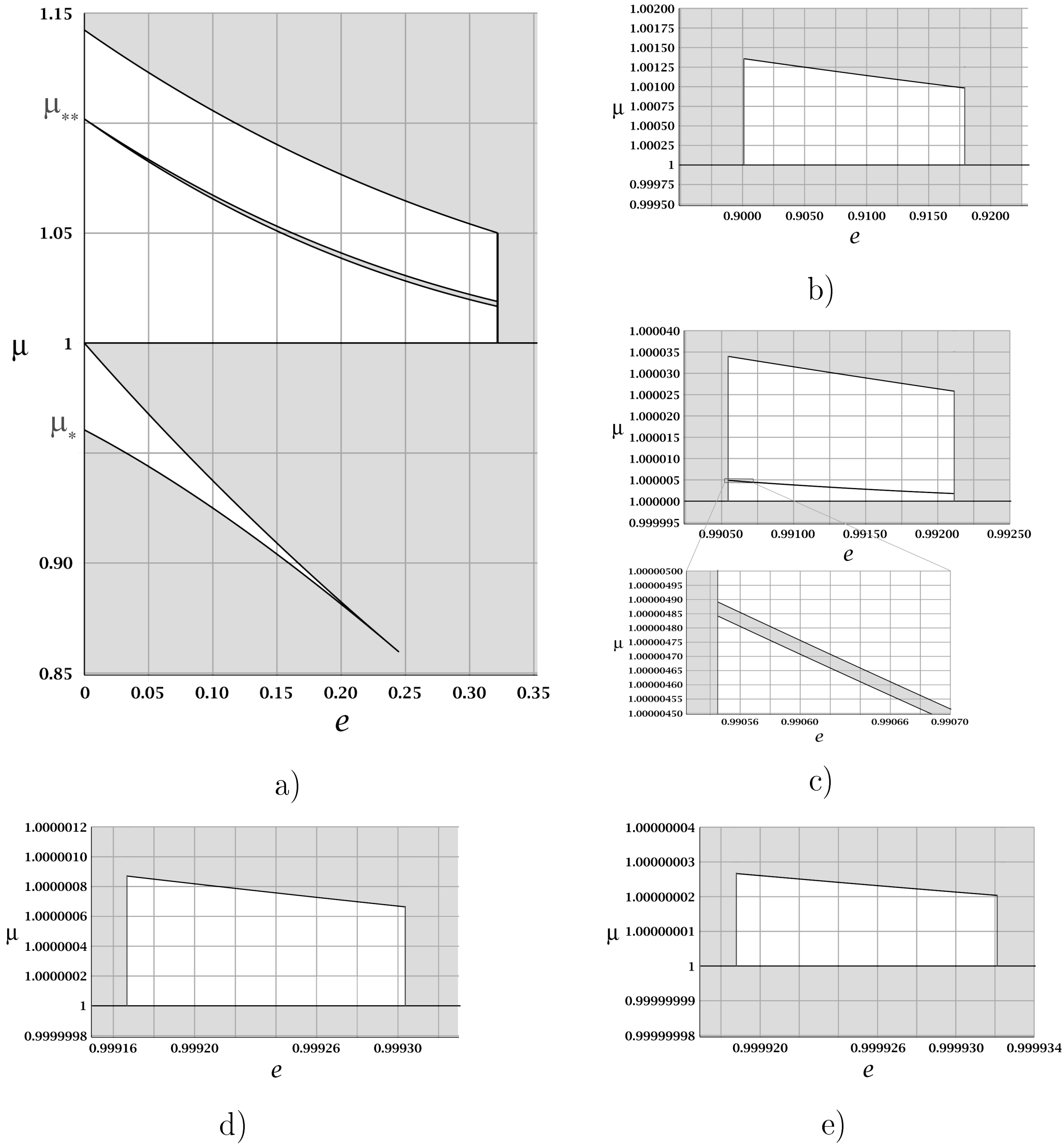


Рис. 2. Области устойчивости в линейном приближении

вость по отношению к возмущениям, удовлетворяющим условию $p_\phi = 0$.

Был проведен анализ устойчивости резонансных вращений в линейном приближении. Полученные интервалы устойчивости и неустойчивости в линейном приближении для резонансного вращения (2) типа 1:2 совпадают с интервалами $\mathbb{S}_j$ $(j = 1, \ldots, 5)$ и $\mathbb{U}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$, которые были найдены в главе 2. Интервал устойчивости в линейном приближении для резонансного вращения (4) типа 3:2 также совпадает с интервалом устойчивости, полученным в [18], где исследование устойчивости резонансного вращения (4) проводилось с учетом только плоских возмущений. Таким образом, был сделан вывод о том, что в линейном приближении пространственные колебания не влияют на устойчивость резонансных вращений.

В интервалах устойчивости в линейном приближении был проведен нелинейный анализ устойчивости. В частности, при помощи алгоритма, изложенного в главе 4, для значений эксцентриситета из указанных интервалов вычислялись коэффициенты симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком системы уравнений возмущенного движения. Затем, используя эти коэффициенты, по формулам главы 4 вычислялись коэффициенты нормальной формы гамильтониана возмущенного движения. Наконец, на основании известных критериев делались выводы об устойчивости вращений (2) и (4).

Таблица 5: Результаты исследования устойчивости в нерезонансных случаях (1:2)

| | Подобласть | Выводы об устойчивости (исключая резонансные и точки вырождения) | Точки вырождения |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{S}_1$ | $\mathbb{F}_1^{(1)} = (0, 0.233403708695)$ | форм. уст. | 0.230633410628 |
| | $\mathbb{I}_1^{(1)} = [0.233403708695, 0.277745200267)$ | уст. для БНУ | |
| | $\mathbb{F}_2^{(1)} = (0.2777452002667, 0.319208905863)$ | форм. уст. | 0.319189567102 |
| | $\mathbb{I}_2^{(1)} = [0.319208905863, 0.320454576027)$ | уст. для БНУ | |
| | $\mathbb{F}_3^{(1)} = (0.320454576027, 0.321730933612)$ | форм. уст. | 0.320464118710 |
| $\mathbb{S}_2$ | $\mathbb{F}_1^{(2)} = (0.90010166, 0.904939507752)$ | форм. уст. | 0.903009941422 |
| | $\mathbb{I}_1^{(2)} = (0.904939507752, 0.907502978981]$ | уст. для БНУ | |
| | $\mathbb{F}_2^{(2)} = (0.907502978981, 0.910006114426)$ | форм. уст. | 0.909658485038 |
| | $\mathbb{I}_2^{(2)} = (0.910006114426, 0.910612130546]$ | уст. для БНУ | 0.910006114426 |
| | $\mathbb{F}_3^{(2)} = (0.910612130546, 0.9179098746)$ | форм. уст. | |
| $\mathbb{S}_3$ | $\mathbb{F}_1^{(3)} = (0.9905450175, 0.991195569585)$ | форм. уст. | 0.991195455828 |
| | $\mathbb{I}_1^{(3)} = [0.991195569585, 0.991200641049)$ | уст. для БНУ | |
| | $\mathbb{F}_2^{(3)} = (0.991200641049, 0.991748883717)$ | форм. уст. | 0.991200815683<br>0.991748871834 |
| | $\mathbb{I}_2^{(3)} = [0.991748883717, 0.991748982745)$ | уст. для БНУ | |
| | $\mathbb{F}_3^{(3)} = (0.991748982745, 0.9921141694)$ | форм. уст. | |
| $\mathbb{S}_4$ | $\mathbb{F}_1^{(4)} = (0.99916659849, 0.999202847433)$ | форм. уст. | 0.999202833847 |
| | $\mathbb{I}_1^{(4)} = [0.999202847433, 0.999203146262)$ | уст. для БНУ | |
| | $\mathbb{F}_2^{(4)} = (0.999203146262, 0.999273038606)$ | форм. уст. | 0.999273031677 |
| | $\mathbb{I}_2^{(4)} = [0.999273038606, 0.999273087492)$ | уст. для БНУ | |
| | $\mathbb{F}_3^{(4)} = (0.999273087492, 0.999302309869)$ | форм. уст. | 0.999302309869 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\mathbb{I}_3^{(4)} = (0.999302309869, 0.999303460061]$ | уст. для БНУ | 0.999302309869 |
| | $\mathbb{F}_4^{(4)} = (0.999303460061, 0.999303562350)$ | форм. уст. | |
| $\mathbb{S}_5$ | $\mathbb{F}_1^{(5)} = (0.999918785804, 0.999924064238)$ | форм. уст. | 0.999924064235 |
| | $\mathbb{I}_1^{(5)} = [0.999924064238, 0.999924064476)$ | уст. для БНУ | |
| | $\mathbb{F}_2^{(5)} = (0.999924064476, 0.999929008016)$ | форм. уст. | 0.999929008015 |
| | $\mathbb{I}_2^{(5)} = [0.999929008016, 0.999929008033)$ | уст. для БНУ | |
| | $\mathbb{F}_3^{(5)} = (0.999929008033, 0.999932116844)$ | форм. уст. | |

Для нерезонансного случая результаты анализа устойчивости приведены в таблицах 5 и 6. За исключением нескольких резонансных и вырожденных точек, решения (2) и (4) формально устойчивы в подобластях $\mathbb{F}_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, 3; i = 1, 2, 3)$ и устойчивы для большинства начальных условий (БНУ) в подобластях $\mathbb{I}_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, 3; i = 1, 2)$. В точках вырождения, приведенных в таблице 5, для решения вопроса об устойчивости вращения (2) требуется проведение нелинейного анализа с учетом членов выше четвертой степени в разложении гамильтониана. Аналогичная вырожденная ситуация имеет место в точке $e = 0.05665469653139$ при исследования устойчивости резонансного вращения (4).

Таблица 6: Результаты анализа устойчивости в нерезонансных случаях (3:2)

| Подобласть | Выводы об устойчивости (кроме резонансных и вырожденных точек) | Точки вырождения |
|---|---|---|
| $\mathbb{I}_1 = (0, 0.05665469653139)$ | уст. для БНУ | 0.05665469653139 |
| $\mathbb{F}_1 = (0.05665469653139, 0.0598813516814)$ | форм. уст. | |
| $\mathbb{I}_2 = (0.0598813516814, 0.06904107039)$ | уст. для БНУ | |

Результаты исследования устойчивости для значений эксцентриситета, отвечающих резонансам третьего и четвертого порядков, приведены в таблицах (7) и (8). Здесь была установлена либо неустойчивость по Ляпунову, либо устойчивость в третьем приближении, которая означает что имеет место устойчивость нелинейной системы уравнений возмущенного движения, в гамильтониане которой отброшены члены выше четвертой степени.

Таблица 7: Результаты исследования устойчивости в случаях резонансов 3 и 4 порядков

| Тип резонанса | Значение эксцентриситета | Подобласть | Выводы об устойчивости |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3\sigma_1 = 1$ | 0.277745200267 | $\mathbb{I}_1^{(1)}$ | неустойчивость |
| $3\sigma_1 = -1$ | 0.904939507752 | $\mathbb{I}_1^{(2)}$ | неустойчивость |
| $3\sigma_1 = 1$ | 0.991748982745 | $\mathbb{I}_2^{(3)}$ | неустойчивость |
| $3\sigma_1 = -1$ | 0.999203146262 | $\mathbb{I}_1^{(4)}$ | неустойчивость |
| $3\sigma_1 = 1$ | 0.999929008033 | $\mathbb{I}_2^{(5)}$ | неустойчивость |
| $\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$ | 0.320454576027 | $\mathbb{I}_2^{(1)}$ | неустойчивость |
| | 0.991200641049 | $\mathbb{I}_1^{(3)}$ | неустойчивость |
| | 0.999924064476 | $\mathbb{I}_1^{(5)}$ | неустойчивость |
| $4\sigma_1 = 1$ | 0.226141792962 | $\mathbb{F}_1^{(1)}$ | неустойчивость |
| $4\sigma_1 = -1$ | 0.909495075503 | $\mathbb{F}_2^{(2)}$ | неустойчивость |
| $4\sigma_1 = 1$ | 0.991367255033 | $\mathbb{F}_2^{(3)}$ | уст. в 3-м прибл. |
| $4\sigma_1 = -1$ | 0.999238031230 | $\mathbb{F}_2^{(4)}$ | уст. в 3-м прибл. |
| $4\sigma_1 = 1$ | 0.999925762334 | $\mathbb{F}_2^{(5)}$ | уст. в 3-м прибл. |
| $2\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$ | 0.251462187613 | $\mathbb{I}_1^{(1)}$ | неустойчивость |
| | 0.903494665111 | $\mathbb{F}_1^{(2)}$ | уст. в 3-м прибл. |
| | 0.990770332423 | $\mathbb{F}_1^{(3)}$ | уст. в 3-м прибл. |
| | 0.999182382819 | $\mathbb{F}_1^{(4)}$ | уст. в 3-м прибл. |
| | 0.999920572120 | $\mathbb{F}_1^{(5)}$ | уст. в 3-м прибл. |
| $4\sigma_2 = -1$ | 0.301563110193 | $\mathbb{F}_2^{(1)}$ | уст. в 3-м прибл. |

Таблица 8: Результаты исследования устойчивости
в случаях резонансов третьего и четвертого порядков

| Тип резонанса | Значение эксцентриситета | Подобласть | Выводы об устойчивости |
|---|---|---|---|
| $3\sigma_1 = 1$ | 0.059881351681 | $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{I}_2$ | неустойчивость |
| $4\sigma_1 = 1$ | 0.048966897164 | $\mathbb{I}_1$ | неустойчивость |
| $3\sigma_1 + \sigma_2 = -1$ | 0.037096796907 | $\mathbb{I}_1$ | уст. в 3-м прибл. |
| $4\sigma_2 = 1$ | 0.068824624602 | $\mathbb{F}_2^{(1)}$ | уст. в 3-м прибл. |

Для случаев резонансов первого и второго порядков результаты анализа устойчивости резонансного вращения (2) приведены в таблице 9. Данные результаты полностью совпадают с результатами, полученными в главе 2 при исследовании устойчивости с учетом только плоских возмущений

Таблица 9: Результаты исследования устойчивости
в случаях резонансов 1 и 2 порядков

| Область | Тип резонанса | Значение эксцентриситета | Выводы об устойчивости |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{S}_1$ | $2\sigma_1 = 1$ | 0.321730933612 | уст. в 3-м прибл. |
| $\mathbb{S}_2$ | $2\sigma_1 = -1$ | 0.900101661162 | уст. в 3-м прибл. |
| | $\sigma_1 = 0$ | 0.917909874691 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_3$ | $\sigma_1 = 0$ | 0.990545017507 | неустойчивость |
| | $2\sigma_1 = 1$ | 0.992114169442 | уст. в 3-м прибл. |
| $\mathbb{S}_4$ | $2\sigma_1 = 1$ | 0.999166598484 | неустойчивость |
| | $\sigma_1 = 0$ | 0.999303562350 | неустойчивость |
| $\mathbb{S}_5$ | $\sigma_1 = 0$ | 0.999918785804 | неустойчивость |
| | $2\sigma_1 = 1$ | 0.999932116844 | уст. в 3-м прибл. |

На границе области устойчивости (в точке резонанса второго порядка $e = 0.06904107039101$) резонансное вращение (4) устойчиво в третьем приближении.

Результаты пятой главы опубликованы в работах [2] и [3].

## Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК


1. *Бардин Б.С., Чекина Е.А.* Об устойчивости резонансного вращения спутника на эллиптической орбите // *Нелинейная динамика.* 2016. Т. 12, Вып. 4.
2. *Бардин Б.С., Чекина Е.А.* Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Труды МАИ.* 2016. Вып. 89.
3. *Bardin, B.S., Chekina, E.A.* On stability of a resonant rotation of a symmetric satellite in an elliptic orbit // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2016. V. 21, no. 4. P. 377–389.
4. *Bardin, B.S., Chekina, E.A., Chekin A.M.* On stability of a planar rotation of a satellite in an elliptic orbit // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2015. V. 20, no. 1. P. 63–73.


## Прочие публикации автора диссертации


5. *Бардин Б.С., Чекина Е.А.* Исследование устойчивости плоского вращательного движения спутника на эллиптической орбите // 13-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2014» 17-21 ноября 2014 года. Москва. Тезисы. С. 680–682.
6. *Бардин Б.С., Чекина Е.А.* Исследование устойчивости плоского резонансного вращения спутника на эллиптической орбите // LI Всероссийская

конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, 15-25 мая 2015 года. Москва. Тезисы. С. 139–143.
7. *Бардин Б.С., Чекина Е.А.* Исследование устойчивости плоского вращательного движения спутника на эллиптической орбите // Международная конференция по математической теории управления и механике. Суздаль, 2-7 июля 2015 г. Тезисы. С. 468–470.
8. *Бардин Б.С., Чекина Е.А.* Исследование устойчивости плоского резонансного вращения спутника на эллиптической орбите // LII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, 17-19 мая 2016 года. Москва. Тезисы. С. 141–145.
9. *Чекина Е.А.* Исследование устойчивости вращательного движения динамически симметричного спутника на эллиптической орбите при наличии пространственных возмущений // 14-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2015» 18-21 ноября 2015 года. Москва. Тезисы. С. 468–470.

## Цитируемая литература

10. *Белецкий В.В.* О либрации спутника // В сб. Искусственные спутники Земли. М.: АН СССР, 1959. Вып. 3. С. 13–31.
11. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
12. *Белецкий В.В., Шляхтин А.Н.* Резонансные вращения спутника при взаимодействии магнитных и гравитационных полях. Препринт № 46, Институт Прикладной математики АН СССР, Москва, 1980. (Russian).
13. *Иванов А.П., Сокольский А.Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // *ПММ.* 1980. Т. 44, Вып. 6. С. 963–970.
14. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
15. *Маркеев А.П.* Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *Изв. РАН. МТТ.* 2004. 6. С. 3–12.
16. *Маркеев А.П.* Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана // *ПММ.* 2005. Т. 69, 3. С. 355–371.
17. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
18. *Маркеев А.П.* Об одном способе аналитического представления отображений, сохраняющих площадь // *ПММ.* 2014. Т. 78, 5. С. 611–624.
19. *Маркеев А.П., Бардин Б.С..* Плоские вращательные движения спутника на эллиптической орбите // *Космич. исслед.* 1994. Т. 32, 6. С. 43–49.
20. *Хентов А.А..* Об одном вращательном движении спутника // *Космич.*

*исслед.* 1984. Т. 22, Вып. 1. С. 130–131.
21. *Якубович В.Я., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.