

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)



На правах рукописи

**Филиппова Александра Сергеевна**

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ  
ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ ДЛЯ СПУТНИКОВОЙ  
НАВИГАЦИИ**

Специальность: 01.02.01 – “Теоретическая механика”

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н.

МАРКОВ Юрий Георгиевич

Москва - 2015

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ .....	4
Глава I Небесномеханическая модель пространственного варианта задачи «деформируемая планета-спутник в поле притягивающего центра».....	18
1.1. Постановка задачи. ....	18
1.2. Пространственный вариант задачи «деформируемая планета-спутник» в поле притягивающего центра .....	23
1.3. Невозмущенное движение системы.....	28
1.4. Исследование чандлеровского колебания.....	30
Глава II. Вариации коэффициентов геопотенциала в структуре колебательного процесса полюса Земли .....	35
2.1. Уравнения вращательно-колебательных движений деформируемой Земли. ....	35
2.2. Основная модель колебаний полюса Земли .....	38
2.3. Нерегулярные явления в колебательном процессе полюса Земли .....	43
2.4. Математическая модель возмущённого движения земного полюса ....	52
2.5. Численное моделирование колебаний координат земного полюса .....	56
Глава III. Моделирование ПВЗ в коротком интервале времени на основе данных наблюдений и измерений МСВЗ .....	67
3.1. Небесномеханическая модель внутрисуточных колебаний полюса Земли .....	67
3.2. Амплитудно-частотный анализ внутрисуточных колебаний полюса	

Земли. ....	73
3.3. Приливные возмущения тензора инерции Земли в модели колебаний земного полюса. ....	78
3.4. Неравномерности осевого вращения Земли и атомная шкала времени. ....	84
3.5. Моделирование неравномерности осевого вращения Земли на коротком интервале времени. ....	89
3.6. Внутрисуточные вариации осевого вращения Земли. ....	94
Глава IV. Фундаментальные составляющие ПВЗ в задаче высокоточной спутниковой навигации. ....	102
4.1. Модели параметров вращения Земли. ....	102
4.2. Автономная высокоточная навигация КА на основе моделей прогнозирования ПВЗ. ....	104
Заключение. ....	111
Список литературы. ....	113

## ВВЕДЕНИЕ

Небесная механика за последнее столетие пережила период небывалого расцвета благодаря работам Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, Л. Пуансо, К. Шарлье, А. Пуанкаре, У. Леверье, Г. Дубошина и др. Все фундаментальные исследования казались завершёнными, и создавалось впечатление, что в дальнейшем останется только изучать мелкие эффекты. Однако уже в трудах основателей геофизики – У. Кельвина, А. Лява, Дж. Дарвина – указывалось на существование некоторых сложных проблем, возникающих из-за того, что под действием притяжения Луны и Солнца (приливно-гравитационные моменты сил) форма и гравитационный потенциал Земли изменяются во времени.

До начала XVIII столетия подозрений, что широта места меняется, насколько известно, не возникало. При всех преобразованиях координат, связанных с определением положения небесных тел, которые производились до Эйлера и долгое время при его жизни было принято допущение, что ось вращения внутри тела Земли неподвижна, означавшее неизменность широты заданного места во времени.

Однако уже были некоторые предположения о том, что полюсы Земли смещаются. Ньютон рассматривая вращательное движение Земли, пришёл к заключению, что полюсы вращения должны перемещаться по её поверхности. В конце XVIII века Л. Эйлер, опираясь на теорему об изменении кинетического момента абсолютно твёрдого тела, получил дифференциальные уравнения его вращения вокруг неподвижной точки. Эти уравнения Эйлер применил для абсолютно твёрдой Земли. Рассматривая силы притяжения, действующие на Землю со стороны Луны и Солнца, как возмущающие, Эйлер решил эту задачу,



в результате чего было показано, что мгновенный полюс вращения Земли движется по её поверхности с периодом 305 звёздных суток. Этот период и получил название период Эйлера. Развита И. Ньютоном, Д'Аламбером и Л. Эйлером теория была основана на допущении, что Земля — абсолютно твёрдое тело; однако от этого допущения пришлось отказаться после того, как в конце XIX в. обнаружилось некоторые расхождения теоретических выводов с наблюдениями. В 1891 году вышла в свет работа американского астронома С. Чандлера, изменившая взгляды на период движения полюсов Земли.

В рамках модели абсолютно твердой Земли не удается объяснить ряд надежно измеряемых и определяемых существенных компонент движения полюса (изменения широт). Существующие теории вращения [2,29] используют различные модели внутреннего строения планеты с учётом большого количества геофизических возмущений: идеально упругий сфероид и сфероидальная оболочка с жидким ядром при различных предположениях о зависимости плотности и упругих свойств веществ от глубины. Однако они не в полной мере отражают существо реального небесно-механического процесса вращения Земли. Известно [32], что даже весьма краткий прогноз (на 100 дней), как правило, оказывается несостоятельным и требует частой (еженедельной) корректировки по данным наблюдений, измерений и обработки.

Математические модели вращательно-колебательного движения деформируемой Земли, которые с высокой точностью идентифицируют её параметры вращения на основе данных измерений Международной службы вращения Земли (МСВЗ) и дают надежный их прогноз, являются основополагающими при исследовании ряда астрометрических,

геодинамических и навигационных задач. Построение теоретических моделей осуществляется на основе поиска компромисса между сложностью модели и точностью измерений.

На практике в задачах небесной механики изучение вращения Земли базируется на геоцентрических координатных системах [65]. Эти системы физически реализуются в международных опорных системах координат — небесной (ICRF - International Celestial Reference Frame) и земной (ITRF - International Terrestrial Reference Frame) и устанавливаются результатами измерений, представленными в базе МСВЗ. Эта служба постоянно поддерживает и уточняет их. Международная земная опорная система координат (ITRF) включает список координат и скоростей для фиксированной опорной даты примерно для 200 пунктов со сравнительно малым и постоянно учитываемым дрейфом, распределенных по поверхности Земли. Величины неопределенностей для координат выражаются сантиметрами ( $10^{-8} - 10^{-9}$ ). Эти две координатные системы определены таким образом, что они используют одну и ту же временную координату, называемую геоцентрическим координатным временем (TCG). Ориентация системы ITRF по отношению к ICRF представляется пятью параметрами, называемыми в литературе параметрами вращения Земли (ПВЗ): две угловые координаты — прецессия, нутация ( $d\psi, d\varepsilon$ ) небесного полюса в системе ICRF и две угловые координаты в ITRF, описывающие движение земного полюса ( $x_p, y_p$ ); пятым параметром является фазовый угол  $\varphi$ , характеризующий вращение земной системы по отношению к небесной. Эти две координатные системы используют одну временную координату (TGC - Geocentric Coordinate Time).

Фазовый угол  $\varphi(t)$ , задающий ориентацию системы ITRF по отношению к ICRF, характеризует неравномерное вращение Земли. Связанное с вращением Земли и определяемое фазовым углом  $\varphi(t)$  Всемирное время (UT) является весьма важной величиной, требующей постоянных измерений. Скорость осевого вращения Земли не удовлетворяет требуемым условиям стабильности и, следовательно, шкала времени, непосредственно связанная с вращением Земли, не может служить шкалой равномерного времени. Сложность этого явления состоит и в том, что наблюдаемые современные измерения угловой скорости вращения Земли содержат огромное число «пиков» при спектральном анализе процесса [7].

Так как среднее солнечное время, а, следовательно, и UT, не являются достаточно точной шкалой времени, то в качестве таковой на относительно коротких промежутках (несколько лет) может быть использована атомная шкала времени TA, обладающая относительной стабильностью  $10^{-14} - 10^{-15}$ .

В настоящее время построена единая высокоточная, независимая от суточного и орбитального движения Земли, равномерная физическая шкала атомного времени TAI. Ее создание начиная с 1960-х гг. [1, 6] позволяет существенно более точно, чем ранее, изучать неравномерности (флуктуации) осевого вращения Земли. Появилась возможность выявлять изменения скорости вращения Земли любых не очень продолжительных периодов. Дальнейшие уточнения флуктуаций скорости вращения Земли зависят от повышения точности определения шкалы UT1, которая используется для подстройки всемирного координированного времени UTC.

Наблюдаемые неравномерности вращения Земли в научной литературе

для удобства разделены на короткопериодические (с характерными временами короче одного года) - внутригодовые колебания (называемые «сезонными»), вариации от года к году - межгодовые с характерными временами от 6 и до 100 лет и вековые вариации на периоде прецессии земной оси.

В связи с введением новой шкалы времени UTC (1972 г) появилось понятие «скачущей секунды». Это введение осуществляется МСВЗ с интервалом от одного до двух лет в зависимости от вариаций угловой скорости вращения Земли.

В диссертационной работе на основе небесно-механических принципов проводится уточнение ранее разработанных моделей вращательно-колебательных движений полюса Земли (для определённости северного), а также флуктуаций длительности суток Земли. Модели должны содержать небольшое число параметров, определяемых из наблюдений, и при этом быть адекватны измерениям МСВЗ. Модели дают удовлетворительные долгосрочные (3 месяца и больше), краткосрочные (5-10 суток) и ультракороткие (1-2 суток) прогнозы координат полюса, изменения длительности суток и поправки ко всемирному времени вращения Земли UT1. Такие прогнозы широко используются навигационными космическими системами (НС) такими, как ГЛОНАСС, GPS.

**В первой главе** рассматривается небесно-механическая постановка задачи «деформируемая планета-спутник» в поле притягивающего центра и описывается модель вязкоупругой планеты, состоящей из абсолютно твердого ядра (шара) и вязкоупругой мантии. Приведено решение уравнений невозмущенного движения системы Земля-Луна в переменных действие-угол,

являющееся порождающим для использования метода усреднения при учете возмущающих моментов сил различной физической природы.

**Во второй главе** разработана численно-аналитическая модель колебательного движения полюса Земли, позволяющая дать качественное объяснение наблюдаемым нерегулярным явлениям в колебательном процессе и улучшить точность прогноза траектории его движения в периоды значительных аномалий. Модель представляет собой естественное уточнение ранее разработанной основной модели колебаний полюса (чандлеровских и годовых компонент) с помощью методов небесной механики и данных наблюдений гравитационного поля Земли. Приводятся результаты численного моделирования колебаний координат полюса Земли в сравнении с данными наблюдений и измерений МСВЗ.

**В третьей главе** в рамках классической механики проведен амплитудно-частотный анализ малопараметрической модели внутрисуточного колебательного процесса земного полюса под воздействием гравитационно-приливных моментов сил от Солнца и Луны. На основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля с учетом нерегулярных возмущений найдены структурные свойства внутрисуточных колебаний координат полюса. Приведено сравнение результатов моделирования движения земного полюса с высокоточными данными РСДБ-наблюдений на коротком интервале времени.

**В четвертой главе** приведены математические модели движения полюса Земли и рассогласования  $dUT1$  временных шкал  $UT1$  и  $UTC$ , которые адекватны данным наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли. Показано, что предложенные модели обеспечивают достаточную

автономность в формировании параметров вращения Земли на борту космического аппарата. Учет этих параметров в реальном времени необходим на борту космического аппарата для решения задач его навигационного обеспечения.

**Актуальность темы исследования.** Исследования фундаментальной астрометрической проблемы, заключающейся в высокоточной интерполяции и ПВЗ, исходя из результатов наблюдений и измерений МСВЗ, являются основополагающими для ряда прикладных задач. В связи с модернизацией и развитием отечественной навигационной системы – ГЛОНАСС – весьма актуальным оказывается достижение высоких точностей координатно-временного и навигационного обеспечения наземных (стационарных и подвижных), а также движущихся в околоземном пространстве объектов. Эта прикладная задача сопряжена с фундаментальной проблемой определения ПВЗ, в частности, с колебаниями земного полюса и прогнозом его движения в пределах как длительного (1-2 года), так и короткого интервала времени (10-40 сут) и рассогласования  $dUT1$  между Всемирным временем, связанным с вращением Земли,  $UT1$  и Всемирным координированным временем UTC на коротких интервалах времени.

Известно из наблюдений (с конца XIX века), что ось вращения Земли с течением времени изменяет свою ориентацию как по отношению к связанной, так и инерциальной системам координат, вследствие чего происходит перемещение географических полюсов по земной поверхности; это явление называется движением полюсов Земли. Существенным вкладом в развитие теории движения Земли относительно центра масс является исследование Л.

Эйлера (1765), определившего 305-суточный период свободной нутации для твердой Земли и модель С. Чандлера (1891), обнаружившего из многочисленных наблюдений изменчивость широт обсерваторий с двумя периодическими компонентами в движении полюса - 365 и 430-440 звёздных суток. Значительное отличие чандлеровского периода от предписываемого классической теорией твердого тела (периода прецессии Эйлера 305 суток для недеформируемой фигуры Земли) потребовало дальнейшего научного объяснения. Оно было предпринято и частично осуществлено на основе модели деформируемой Земли в исследованиях С. Ньюкома, Г. Джеффриса, А.Лява, У. Манка и Г. Макдональда, Я. Вондрака, Ф.А. Слудского, М.С. Молоденского и многих других. Исторически принято называть указанное движение свободной нутацией деформируемой Земли или чандлеровским колебанием полюса.

Современные российские исследователи данной проблемы, Ю.В. Баркин, Л.В. Зотов, З.М. Малкин, В.Е. Жаров, С.Л. Пасынок и другие, разрабатывают теоретические модели движения Земли, основываясь на высокоточных наблюдениях и измерениях МСВЗ с учётом приливных эффектов и деформируемости планеты.

Математические модели вращательно-колебательного движения деформируемой Земли, которые с высокой точностью идентифицируют её параметры вращения и дают надёжный прогноз движения земного полюса и вариций длительности суток, требуются при решении ряда астрометрических, геодинамических и навигационных задач.

В этой связи решаемые в диссертационной работе задачи моделирования вращательно-колебательного движения Земли и их приложения являются

**актуальными.**

**Цели и задачи диссертационной работы:** Целью диссертации является уточнение ранее разработанных динамических моделей параметров вращения Земли, адекватных данным наблюдений и измерений МСВЗ, прогнозирование колебаний земного полюса и неравномерности осевого вращения Земли на коротких интервалах времени, а также оценка влияния учёта ПВЗ в задаче высокоточной спутниковой навигации.

**Научная новизна:**

1. Разработана численно-аналитическая модель колебательного движения полюса Земли, учитывающая эффекты временных вариаций коэффициентов геопотенциала. Приводятся результаты численного моделирования колебаний координат земного полюса в сравнении с данными наблюдений и измерений МСВЗ. Модель позволяет улучшить точность прогноза траектории движения полюса.
2. На основе амплитудно-частотного анализа найдены структурные свойства внутрисуточных колебаний координат полюса Земли под воздействием гравитационно-приливных моментов сил от Солнца и Луны. Сравнение результатов моделирования движения полюса с высокоточными данными РСДБ-наблюдений на коротком интервале времени показывает, что модель позволяет статистически надёжно объяснить наблюдаемые характеристики движения земного полюса внутри суток.
3. Предложены автономные модели быстрого расчета фундаментальных составляющих параметров вращения Земли (движения земного полюса



и рассогласования  $dUT1$  временных шкал  $UT1$  и  $UTC$ ) для использования их на борту КА и в аппаратуре потребителя. Приведены результаты прогнозов автономных моделей ПВЗ на различных интервалах времени.

### **Теоретическая и практическая значимость:**

В диссертационной работе на основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля получили дальнейшее развитие численно-аналитические модели колебаний земного полюса и неравномерности вращения деформируемой Земли под воздействием гравитационно-приливных сил от Солнца и Луны. Исследование вращательно-колебательных процессов движения Земли совместно с временными вариациями коэффициентов геопотенциала позволяет уточнить аналитическую модель и улучшить прогноз траектории движения полюса. Существенным является то, что разработанная модель представляет собой естественное уточнение основной, используемой ранее модели колебаний земного полюса.

В диссертации показано, что фундаментальные составляющие ПВЗ играют важную роль в решении задач спутниковой навигации. Предложены автономные модели быстрого расчета фундаментальных составляющих параметров вращения Земли для использования их на борту КА и в аппаратуре потребителя. Приведены результаты прогнозов автономных моделей ПВЗ на различных интервалах времени.

Данные исследования могут быть полезными для развития некоторых разделов механики, в частности механики с бесконечным числом степеней свободы.

## **Методология и методы исследования**

Теоретическое моделирование вращательно-колебательных движений Земли, адекватное данным наблюдений и измерений МСВЗ, проводится с помощью приближенных методов нелинейной механики в сочетании с численным экспериментом. Модель вращательно-колебательного процесса Земли основана на учете гравитационно-приливных моментов сил от Солнца, Луны, и вариаций второй зональной гармоники геопотенциала. Для построения математической модели первого приближения использовалась динамическая теория вращения твердого тела. Идентификация параметров моделей проводится с помощью метода «взвешенных» наименьших квадратов (МНК).

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. На основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля получена численно-аналитическая модель колебаний полюса Земли под воздействием лунно-солнечных гравитационно-приливных моментов сил и возмущений меняющегося со временем геопотенциала.
2. Дан сравнительный анализ результатов численного моделирования колебаний координат земного полюса с данными измерений МСВЗ. Показано, что во время проявления аномальных флуктуаций в колебательном процессе полюса Земли точность годового прогноза согласно уточнённой модели выше точности прогноза основной модели.
3. Предложено математическое описание нерегулярных явлений в колебательном процессе земного полюса, которое способствует улучшению точности прогноза траектории движения полюса в

периоды значительных аномалий.

4. Проведён амплитудно-частотный анализ малопараметрической модели внутрисуточного колебательного процесса земного полюса. Даны результаты амплитудно-частотного анализа колебательного процесса полюса и вариации второй зональной гармоники  $c_{20}$  геопотенциала.
5. На основе полученных результатов интерполяции и прогноза колебаний полюса показано, что совместное моделирование динамических процессов (учёт временных вариаций геопотенциала) позволяет уточнить аналитическую модель и улучшить прогноз траектории движения полюса.
6. Приведены долгосрочные математические модели фундаментальных составляющих ПВЗ (колебаний полюса и рассогласования  $dUT1$  временных шкал  $UT1$  и  $UTC$ ). Показано, что предложенные модели обеспечивают достаточную автономность в формировании ПВЗ на борту КА. Учёт этих параметров в реальном времени необходим для решения задач навигационного обеспечения. Построены графики ошибок прогноза полюса  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$  и  $\Delta dUT1$  при коррекции модели для различных интервалов времени.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность построенных математических моделей и сделанных выводов обеспечена корректной математической постановкой задач, хорошим согласованием с данными наблюдений и измерений МСВЗ и подтверждается повышением точности прогноза эфемерид космических аппаратов. Основные результаты диссертации докладывались автором на конференциях.

Результаты диссертационной работы использованы в НИР по 2 грантам РФФИ (№№13–02–00434, 13–01–00180) и по гранту Президента для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук (№МК-1200.2011.1), в которых автор выступал в качестве исполнителя.

**Публикации.** Научные результаты диссертации опубликованы в статьях в журналах из списка ВАК.

Результаты работы докладывались и обсуждались на:

- конференции «Международная конференция по математической теории управления и механике» (г. Суздаль, 5-9 июля, 2013 г.);
- конференции «Journées 2013 Systèmes de reference spatio-temporels “Scientific developments from highly accurate space-time reference systems”» (Парижская обсерватория, Париж, 16-18.09 2013);
- конференции «Journées 2014 Systèmes de reference spatio-temporels “Recent development and prospects in ground-based and space astrometry”» (Обсерватория Пулково, Санкт-Петербург, 22-24.09.2014);
- конференции «Международная конференция по математической теории управления и механике» (г. Суздаль, 3-7 июля, 2015 г.).

**Личный вклад автора.** Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Автор выполнил большинство аналитических исследований и численных расчётов, участвовал в обработке и интерпретации всех полученных данных. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был

определяющим.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Она содержит 121 страницу машинописного текста, включающего 22 рисунка и список литературы из 78 наименований.

# **Глава I Небесномеханическая модель пространственного варианта задачи «деформируемая планета-спутник в поле притягивающего центра»**

## **1.1. Постановка задачи.**

Для орбитального движения планет Солнечной системы преобладающее влияние имеет центральное тело - Солнце. Возмущающее влияние планет друг на друга и собственных спутников оказывается весьма слабым. Это следует из результатов применения и усреднения оскулирующих элементов орбит. Движения планет оказываются весьма близкими к кеплеровским.

Движение системы Земля-Луна значительно отличается от указанного выше. Её динамические характеристики являются по сравнению с другими планетами уникальными [1, 39, 46, 48] и для ряда постановок задач динамики она рассматривается как двойная планета [8, 9]. Поступательно-вращательное движение системы изучается в различных вариантах, обычно, в следующих:

1. Классическая «гравитационная теория» описывает орбитальное движение системы Земля-Луна вокруг Солнца в рамках точечных моделей.

2. С помощью классических методов динамики исследуется поступательно-вращательное движение Земли и Луны как твёрдых тел. Уравнения движения рассматриваются на основе переменных Эйлера или Андуайе с помощью методов возмущений малого параметра. Такая теория, однако, не позволяет объяснить ряд наблюдаемых явлений, в частности, колебания полюса.

3. Современные высокоточные исследования вращений и колебаний

относительно центра масс учитывают упругие деформации весьма сложной фигуры Земли и Луны под действием гравитационных приливов.

4. В эволюционных теориях исследуется влияние упруго-диссипативных факторов с учетом гравитационных приливов и нерегулярных воздействий геофизического характера. Эти подходы интенсивно развиваются и в настоящее время далеки от завершенности.

Гравитационно-приливные силы без учета диссипации обладают потенциалом, который выражается суммой гармонических слагаемых. В рассматриваемом случае, когда для Луны можно ограничиться моделью гравитирующей точки или шара, потенциал  $U_M$  может быть представлен в виде [39, 46].

$$U_M = -\frac{1}{4}Kg \frac{r^2}{R_E} (1 - 3\cos^2\theta) \sum_i^{(0)} C_i \cos A_i - \frac{1}{2}Kg \frac{r^2}{R_E} \sin 2\theta \sum_i^{(1)} C_i \cos(A_i + \varphi) - \\ - \frac{1}{2}Kg \frac{r^2}{R_E} \sin^2\theta \sum_i^{(2)} C_i \cos(A_i + 2\varphi), \quad K = \frac{3}{2} \frac{m_M}{m_E} \left( \frac{R_E}{R_{EM}} \right)^3 = 0.843 \times 10^{-7}, \quad (1.1) \\ 0 \leq r < R_E.$$

Здесь  $\theta$  и  $\varphi$  - географические координаты точки,  $r$  - расстояние от центра масс,  $R_E$  - средний радиус Земли ( $R_E \cong 6.38 \times 10^6$  м),  $R_{EM}$  - среднее расстояние от центра масс Земли до Луны,  $g$  - ускорение сил тяготения. Угловые переменные  $A_i$  суть линейные комбинации с целочисленными коэффициентами следующих шести параметров:  $\tau_0$ ,  $l_{M,S}$ ,  $p_{M,S}$ ,  $\Omega_M$ . Величина  $\tau_0$  есть гринвичское среднее лунное время  $\tau_0 = t - l_M - l_S$ , где  $t$  гринвичское среднее солнечное время. Параметры  $l_M$  и  $l_S$  суть средние долготы Луны и Солнца с периодами 27.55 и 365.25 зв. сут соответственно. Величина  $p_M$  есть средняя долгота перигея

Луны, изменяющаяся с периодом 8.85 года, а  $p_S$  - средняя долгота перигея Солнца, изменяющаяся с периодом 25 700 лет. Параметр  $\Omega_M$  определяет долготу восходящего узла Луны: он изменяется с периодом 18.61 года. Суммы  $\sum_i^{(j)}$  учитывают соответственно долгопериодические, суточные и полусуточные гравитационно-приливные воздействия Луны на Землю.

Для описания вращательного движения деформируемой Земли и колебаний ее полюса рассматривается упрощенная механическая модель вязкоупругого тела [8, 22, 54]. Планета представляется двухслойной, состоящей из абсолютно твердого ядра (шара) и вязкоупругой мантии. Предполагается, что на внутренней границе ядро-мантия относительные перемещения среды отсутствуют, а внешняя граница мантии (поверхности Земли) свободна. Какое-либо усложнение модели фигуры Земли и детальный учет геофизических характеристик, в частности многослойность внутреннего строения, не является оправданным на этапе построения модели первого приближения, поскольку определение требуемых физико-механических характеристик планеты на основе измерений не может быть проведено с требуемой точностью и полнотой. Влияние упругой податливости мантии на вращение Земли вокруг центра масс имеет существенное значение и связано с уточнением тензора инерции вращающейся деформируемой Земли и с вычислением вектора кинетического момента и его производной по времени.

Вследствие малости деформаций среда мантии описывается линейной теорией вязкоупругости, а процесс деформирования происходит квазистатически. Эти допущения позволяют применить строгие методы



теоретической механики и методы теории возмущений [15, 58, 59], оценить упругие деформации и получить аналитические выражения для главного центрального тензора инерции  $J^*$  деформируемой Земли в квазистатическом приближении.

Стандартным образом вводится декартова система координат  $C_2x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), жестко связанная с твердым ядром недеформированной планеты. В качестве осей удобно взять главные оси тензора инерции, а точку  $C_2$  совместить с центром масс. Для деформированного состояния вводится соответствующая система  $C'_2x'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) путем переноса начала координат из точки  $C_2$  в точку  $C'_2$  – центр масс с учетом малых деформаций – и параллельного переноса осей. Упругие деформации  $u$  и  $u_*$  в системах  $C_2x_i$  и  $C'_2x'_i$  соответственно связаны выражением  $u_* = u - u_c$ , где  $u_c$  – смещение центра масс относительно ядра. С целью упрощения расчетов полагается, что мантия однородна и изотропна. Для искомого вектора  $u$  имеют место уравнение состояния Эйлера-Коши [36] и граничные условия на поверхности  $P$  Земли и поверхности  $P_0$  ядра:

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla, u) + \frac{\rho}{\mu} \Phi = 0, \quad n \cdot \sigma_n|_P = 0, \quad (1.2)$$

$$u|_{P_0} = 0.$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\nabla$  – оператор Гамильтона,  $\rho$  – плотность,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\Phi$  – массовая плотность сил инерции,  $n$  – вектор нормали к  $P$ ,  $\sigma_n$  – тензор напряжений. Далее в квазистатическом приближении ( $u = \dot{u} = 0$ ) проводится исследование уравнения

(1.2).

Важно отметить, что в функции  $\Phi$  можно пренебречь также членом, содержащим  $\dot{\omega}$ , где  $\omega$  – вектор угловой скорости вращения Земли. Это обусловлено близостью вектора  $\omega$  к главной оси инерции – оси фигуры Земли.

Представим искомую функцию в виде  $u = u_0(r) + u_*(r, t)$ , где  $u_0$  – квазистатическое смещение (статический экваториальный выступ), а  $u_*$  – деформации, вызванные приливными гравитационными силами Луны и Солнца. Функция  $u_0$  – определяется на первом этапе исследований для уточнения тензора инерции деформируемой Земли при построении модели движения полюса на сравнительно коротких промежутках времени. Она находится как решение краевой задачи (1.2) при  $\Phi = \omega \times (\omega \times r)$  и может быть представлена в виде разложения по степеням числового параметра  $\rho \omega^2 R^2 / \mu$ , где  $R$  – характерный линейный размер (радиус Земли). Соответствующим образом с учётом астрометрических данных оценивается добавка  $u_*$ , характеризующая диссипативные приливные моменты сил.

Выпишем вектор  $G$  кинетического момента Земли в деформированном состоянии и его производную

$$\begin{aligned} G_u &= \int_{\Omega} (r + u) \times v \rho dV, \\ \dot{G}_u &= \int_{\Omega} (r + u) \times (w + \omega \times v) \rho dV. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь  $dV$  – элемент объёма,  $v$  и  $w$  – скорость и ускорение, вычисляемые по правилам кинематики для вращающейся системы координат. Область  $\Omega$  содержит абсолютно твёрдое ядро, для которого  $u \equiv 0$ , и деформируемую мантию, для которой вектор  $u$  определяется согласно (1.2). Выражения для  $G$  и

$\dot{G}$  (1.3)(1.2.2) могут быть упрощены отбрасыванием квадратичных членов по  $u$ . В результате удается получить представления, содержащие главную часть (недеформируемая планета), и малые добавки, обусловленные смещениями  $u$  и их производными по  $t$ .

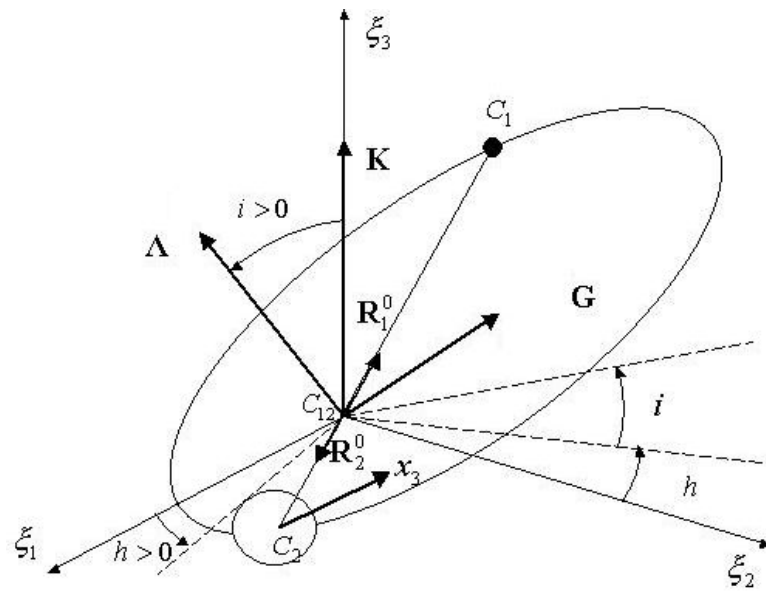
## 1.2. Пространственный вариант задачи «деформируемая планета-спутник» в поле притягивающего центра

На предварительном этапе исследования движения полюса Земли под действием возмущающего момента рассматривается следующая модельная задача. Считается, что деформируемая планета (Земля) и точечный спутник (Луна) совершают взаимное поступательно-вращательное движение вокруг общего центра масс (барицентра), который перемещается по эллиптической орбите вокруг Солнца. Вводится инерциальная система координат  $C_{12}\xi_1\xi_2\xi_3$  с началом в барицентре системы  $C_{12}$ . Пусть  $\mathbf{G}$  – собственный кинетический момент Земли,  $\mathbf{\Lambda}$  – суммарный орбитальный кинетический момент центров масс Луны  $C_1$  и Земли  $C_2$ . Тогда кинетический момент всей замкнутой системы  $\mathbf{K} = \mathbf{G} + \mathbf{\Lambda}$  без учёта влияния внешних возмущающих воздействий неподвижен в инерциальном пространстве и совпадает с осью  $C_{12}\xi_3$  (рисунок 1).

Радиус-векторы  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  точек  $C_1$ ,  $C_2$  в системе координат  $C_{12}\xi_1\xi_2\xi_3$  задаются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_j &= R_j \mathbf{R}_j^0, \quad R_j = c_j^* R_{21}, \quad c_1^* = m_2/m, \quad c_2^* = m_1/m, \quad m = m_1 + m_2, \\ \mathbf{R}_j^0 &= \pm \Gamma_3(h) \Gamma_1(i) (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)^T, \quad j=1,2, \\ \mathbf{R}_1 &= -\mathbf{R}_2, \quad \Gamma_1(i) = \text{diag}(1, \Pi_2(i)), \quad \Gamma_3(h) = \text{diag}(\Pi_2(h), 1). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Матрицы  $\Gamma_{1,3}$  в (1.4) – блочно-диагональные,  $\Pi_2$  – матрица плоского



**Рисунок 1** Система координат для задачи двух тел и ориентация векторов.

поворота. Угловые переменные  $h$ ,  $i$  и  $\vartheta$  суть долгота восходящего узла, наклонение и истинная аномалия орбиты соответственно. Радиус-вектор  $R_{21}$ , соединяющий центры масс Земли и Луны, т.е. точки  $C_1$  и  $C_2$ , имеет вид  $R_{21} = R_{21} R_{21}^0$  так, что  $R_{21}^0 = R_1^0$ . Используются следующие значения  $R_{21} = 384,4 \times 10^6$  м., масса Луны  $m_1 = 7,36 \times 10^{22}$  кг., масса Земли  $m_2 = 5,98 \times 10^{24}$  кг.

С твёрдым ядром планеты жестко связана декартова система координат  $C_2 x_1 x_2 x_3$ , оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции  $A$ ,  $B$  и  $C$ . В связанной системе координат орт  $R_{21}^0$  определяется следующим образом:

$$S^{-1} R_{21}^0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T, \quad (1.5)$$

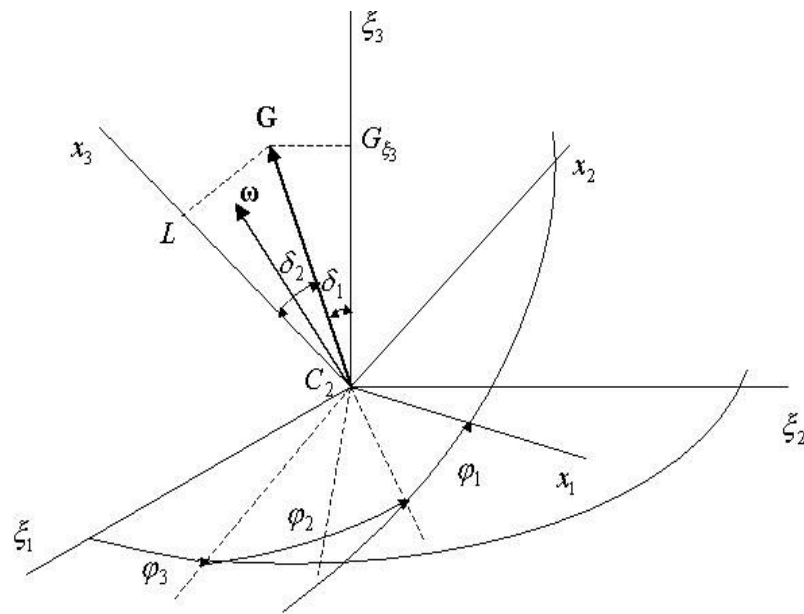
$$S^{-1} = \Gamma_3^{-1}(\varphi_1) \Gamma_1^{-1}(\delta_2) \Gamma_3^{-1}(\varphi_2) \Gamma_1^{-1}(\delta_1) \Gamma_3^{-1}(\varphi_3).$$

Здесь ортогональная матрица  $S = S(t)$  ( $S^{-1} = S^T$ ) задает переход от связанных к инерциальным осям и выражается посредством канонических переменных Андуайе [16, 22]: моментов импульсов  $L$ ,  $G$ ,  $G_{\xi_3}$  и угловых переменных  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Углы  $\delta_1, \delta_2$  определяются соотношениями (рисунок 2)

$$\cos \delta_1 = \frac{G_{\xi_3}}{G}, \quad \cos \delta_2 = \frac{L}{G}, \quad (1.6)$$

где  $G$  – модуль кинетического момента Земли,  $G_{\xi_3}$  и  $L$  – проекция вектора  $G$  на инерциальную ось  $\xi_3$  и связанную ось  $x_3$  соответственно.

Функционал потенциальной энергии притяжения планеты и спутника будет:



**Рисунок 2** Взаимная ориентация связанной с деформируемой Землей и опорной систем координат и переменных Андуайе.

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= -\frac{m_1 m_2 f}{R_{21}} + \mu_1 R_{21}^{-3} \left[ \frac{1}{2} (A - C) (1 - 3\gamma_3^2) + U_1 \right], \\ U_1 &= \int_{\Omega} \rho \left[ (r, u) - 3 (S^{-1} R_{21}^0, r) (S^{-1} R_{21}^0, u) \right] dx, \\ \mu_1 &= f m_1, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3,\end{aligned}\tag{1.7}$$

где  $f$  – постоянная тяготения. В (1.7) опущены члены порядка  $(l/R_{21}(0))^3$  и выше, где  $l$  – характерный размер планеты.

Аналогично функционал потенциальной энергии притяжения спутника и планеты Солнцем записывается так:

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= -\frac{\mu_0 m}{R} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \mu_0 R^{-3} m_i \left[ R_i^2 - 3 (R^0, R_i)^2 \right] + \mu_0 R^{-3} \left[ \frac{1}{2} (A - C) (1 - 3\kappa_3^2) + U_2 \right], \\ U_2 &= \int_{\Omega} \rho \left[ (r, u) - 3 (S^{-1} R^0, r) (S^{-1} R^0, u) \right] dx,\end{aligned}\tag{1.8}$$

Здесь  $R^0 = R^{-1} R$  – орт радиус-вектора барицентра  $C_{12}$ ,  $\mu_0$  – гравитационный параметр притягивающего центра,  $(\mu_0 R^{-3})^{1/2} = \omega_0$  – среднее движение точки  $C$ ,  $S^{-1} R^0 = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)^T$  – проекции орта  $R^0$  на оси системы координат  $C_2 x_1 x_2 x_3$ . В инерциальной системе координат имеет место  $R^0 = (\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1, 0)$ , где  $\vartheta_1 = \omega_0 t$  – истинная аномалия.

Взаимное орбитальное движение центров масс  $C_1$  и  $C_2$  описывается каноническими переменными Делоне [34]:  $\Lambda, H, \vartheta, h$ , где  $\Lambda = |\Lambda|$ ,  $H = \Lambda \cos i$  – проекция  $\Lambda$  на ось  $C_{12} \xi_3$ , т.е. на ось суммарного кинетического момента  $\mathbf{K}$ .

Функционал Рауса рассматриваемой задачи имеет вид [41]:

$$\begin{aligned}R &= R_* - \frac{\mu^2 m_*^3}{2\Lambda^2} + \frac{1}{2} \mu_0 R^{-3} m_* R_{21}^2 \left[ 1 - 3 (R^0, R_{21}^0)^2 \right] - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}^2 dx + E[u] + \\ &+ \mu_1 R_{21}^{-3} \left[ \frac{1}{2} (A - C) (1 - 3\gamma_3^2) + U_1 \right] + \mu_0 R^{-3} \left[ \frac{1}{2} (A - C) (1 - 3\kappa_3^2) + U_2 \right],\end{aligned}\tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_* &= (G - G_u, J^{-1}[\mathbf{u}](G - G_u)), \\
 J^{-1}[\mathbf{u}] &= J_0^{-1} - J_0^{-1} J_1[\mathbf{u}] J_0^{-1} + \dots, \quad J_0^{-1} = \text{diag}(A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}), \\
 (R^0, R_{21}^0) &= \cos\theta = \cos\vartheta \cos(\vartheta_1 - h) + \cos i \sin\vartheta \sin(\vartheta_1 - h), \\
 \mu &= fm, \quad m_* = m_1 m_2 / m.
 \end{aligned}$$

В (1.9)  $J_1[\mathbf{u}]$  - линейная по  $\mathbf{u}$  компонента тензора инерции деформированной планеты,  $E[\mathbf{u}]$  - квадратичный функционал потенциальной энергии упругих деформаций.

### 1.3. Невозмущенное движение системы

Функционал Рауса  $R^*$  в промежуточной задаче для деформируемой Земли после ряда преобразований и усреднения по быстрым переменным  $\varphi_2$  и  $\vartheta$  приводится к виду (с точностью до несущественной постоянной):

$$R^* = \frac{G^2 - L^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \varphi_1}{A^*} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{B^*} \right) + \frac{L^2}{2C^*} + \text{const.} \quad (1.10)$$

В (1.10)  $A^*, B^*, C^*$  - эффективные главные центральные моменты инерции с учетом деформаций «замороженной» Земли, обусловленные сложным движением - собственным вращением и движением относительно барицентра  $C_{12}$ . Используются значения  $A^* = 8,0912 \times 10^{37}$  кгм<sup>2</sup>;  $B^* = 8,0914 \times 10^{37}$  кгм<sup>2</sup>;  $C^* = 8,1100 \times 10^{37}$  кгм<sup>2</sup>. Выражения для них могут быть представлены в виде [8]:

$$\begin{aligned}
 A^*, B^*, C^* &= J_{jj}[\mathbf{u}] I_2^2 (I_2^2 + 3\mu_1 R_{21}^{-3} d J_{jj}^2[\mathbf{u}])^{-1}, \quad I_2 = G, \quad j = 1, 2, 3, \\
 d &= \cos^2 h^* + \cos^2 i \sin^2 h^* + \cos^2 \delta_1 (\sin^2 h^* + \cos^2 i \cos^2 h^*) + \\
 &\quad + \sin^2 i \sin^2 \delta_1, \quad h^* = \varphi_3 - h, \quad \mu_1 = fm_1.
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь  $J_{jj}[\mathbf{u}]$  - функционалы упругих смещений  $\mathbf{u}$  частиц вязкоупругой мантии,



имеющие смысл компонент главного центрального тензора инерции деформированной Земли в связанной системе координат; при  $\mathbf{u} = 0$  имеем  $J_{jj}[0] = \text{diag}(A, B, C)$ , ( $j = 1, 2, 3$ ). Таким образом, согласно (1.11) система Земля-Луна рассматривается как “почти” двойная планета.

Структура (1.10) совпадает с традиционным выражением для функции Рауса абсолютно твёрдого тела в переменных Андуайе [17, 22]. На его основе вводятся удобные для применения асимптотических методов переменные типа действие-угол  $I_j, w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Следует отметить, что переменные действие-угол задают гамильтонову систему переменных.

Далее вводятся основные динамические параметры  $\kappa$  и  $\lambda$ , характеризующие вращательные движения деформируемой Земли:

$$\kappa^2 = \frac{C^*(A^* - B^*)}{A^*(B^* - C^*)}, \quad \lambda^2 = \kappa \frac{2EC^* - I_2^2}{I_3^2 - 2EA^*}. \quad (1.12)$$

Кинетический момент вращения Земли относительно своей оси вращения  $I_2 = 5.85 \times 10^{33}$  кгм<sup>2</sup>/с. Постоянная  $E$  имеет смысл интеграла кинетической энергии промежуточного движения (вращений) деформируемой Земли,  $I_2 = G$ .

Связь между переменными действие-угол  $I_j, w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и каноническими переменными Андуайе  $L, G, G_{\xi_3}, \varphi_j$  выражается через эллиптические функции и интегралы неоднозначно [5, 6]. Для случая, соответствующего вращениям Земли, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2I_2}{\pi\kappa} \frac{\kappa_*}{\chi} \left[ \chi^2 \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2, \lambda\right) - \lambda^2 \mathbf{K}(\lambda) \right], \\
\kappa_* &= \sqrt{1 + \kappa^2}, \quad \chi = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}, \quad 0 < \lambda < 1, \\
w_1 &= \pm \frac{\pi}{2} \frac{F(\zeta, \lambda)}{\mathbf{K}(\lambda)}, \quad \operatorname{tg} \zeta = -\kappa_*^{-1} \operatorname{ctg} \varphi_1, \\
w_2 &= \varphi_2 \pm \frac{\kappa_* \chi}{\kappa} \left[ \Pi(\zeta, \kappa^2, \lambda) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2, \lambda\right) \frac{F(\zeta, \lambda)}{\mathbf{K}(\lambda)} \right], \\
\zeta &= \pm \operatorname{am}(\eta, \lambda), \quad \eta = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\lambda) w_1, \quad w_3 = \varphi_3.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь  $F(\zeta, \lambda)$  и  $\Pi(\zeta, \kappa^2, \lambda)$  - эллиптические интегралы первого и третьего рода соответственно,  $\mathbf{K}(\lambda)$  и  $\Pi(\pi/2, \kappa^2, \lambda)$  - отвечающие им полные эллиптические интегралы.

С помощью введённых согласно (1.13) переменных действие-угол может быть выписан функционал Рауса промежуточной модельной задачи и построены траектории в фазовом пространстве  $I_j, w_j$ . Это необходимо для дальнейшего анализа возмущенных движений на асимптотически большом интервале времени, на котором происходит существенное изменение медленных (оскулирующих) переменных  $I_j$ .

#### 1.4. Исследование чандлеровского колебания

Выпишем усреднённый по  $\varphi_2, \vartheta$  функционал Рауса  $R_0$ , отвечающий вращениям деформированной Земли без учёта приливных моментов [5,6]

$$R_0 = \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{A^*} \left( 1 - \frac{(C^* - A^*) \kappa^2}{C^* \chi^2} \right). \tag{1.14}$$

Здесь  $\kappa^2, A^*, C^*$  - функционалы от  $\mathbf{u}$  согласно (1.11), (1.12), где  $\mathbf{u}$  - вектор упругих деформаций, описывающий квазистатический экваториальный выступ,

обусловленный вращением планеты. Величина  $R_0$  зависит также от переменных действие-угол  $I_1, I_2$ ; зависимость от других фазовых переменных отсутствует. В результате общее решение рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
 I_j(t) &= I_j(0) = I_j^0, \quad j=1,2,3, \quad w_3 = w_3^0 \\
 w_1 &= n_1 t + w_1^0, \quad w_2 = n_2 t + w_2^0, \\
 n_1 &= -\frac{\pi}{2} I_2 \frac{C^* - A^*}{A^* C^*} \kappa \kappa_*^{-1} \chi^{-1} \mathbf{K}^{-1}(\lambda), \\
 n_2 &= \frac{I_2}{C^*} \left( 1 + \frac{(C^* - A^*)}{A^*} \Pi \left( \frac{\pi}{2}, \kappa^2, \lambda \right) \mathbf{K}^{-1}(\lambda) \right).
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

В (1.15) величины  $I_j^0, w_j^0$  суть начальные значения, определяемые через переменные Андуайе при  $t=0$  посредством выражений (1.13). Фазы  $w_1, w_2$  и частоты  $n_1, n_2$  отвечают соответственно чандлеровскому движению полюса и суточному вращению деформируемой Земли. Значение осевой скорости вращения Земли принимается  $n_2 = 7.27 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ . Таким образом, в промежуточном движении деформируемая Земля равномерно вращается в поле центробежных сил инерции и гравитационного поля Луны. Для абсолютно твёрдой планеты ( $\mathbf{u} \equiv 0$ ) имеет место регулярная прецессия Эйлера-Пуансо. В рассматриваемом случае деформируемой Земли выражения (1.15) также описывают регулярную прецессию, но угловые скорости прецессии и собственного вращения изменяются на некоторую относительно малую величину, обусловленную возмущающими факторами. При возмущённом движении с учётом диссипативных свойств вязкоупругой мантии Земли имеет место регулярная прецессия с медленно изменяющимися во времени параметрами, т.е. возникает эволюция медленных переменных, подлежащая

изучению на основе асимптотических методов нелинейной механики. Полученное решение (1.15) является порождающим при использовании метода усреднения.

Оценки величины  $\lambda$  для системы Земля-Луна свидетельствуют, что  $\lambda^2 \ll 1$ , ( $\lambda^2 \sim 10^{-14}$ ), т.е. мало отношение  $(I_2 - I_1)/I_2$ , в первом приближении из первого соотношения (1.13) находим

$$\lambda^2 = \frac{2\kappa^2(I_2 - I_1)}{I_2\kappa_*}. \quad (1.16)$$

После подстановки  $\lambda^2$  из (1.16) в (1.15) для частот  $n_1, n_2$  промежуточного движения получаются выражения

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 = n_1 &= -\frac{I_2}{\kappa_*} \frac{C^* - A^*}{A^* C^*} \left( 1 - \frac{2 + \kappa^2}{2\kappa_*} \frac{I_2 - I_1}{I_2} \right), \\ \dot{w}_2 = n_2 &= \frac{I_2}{C^*} \left( 1 + \frac{C^* - A^*}{\kappa_* A^*} \left( 1 + \frac{I_2 - I_1}{2\kappa_* I_2} (2\kappa_* - 2 - \kappa^2) \right) \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Приближённые аналитические выражения (1.11) для приведённых моментов инерции Земли с учётом её деформации и поступательного движения в системе Земля-Луна являются основой для построения высокоточной модели чандлеровского движения полюса. Посредством формулы (1.17) для  $n_1$  находятся значение угловой скорости и периода колебаний  $T_* = 2\pi / n_1 \approx 430$  сут.; экспериментальные данные измерений периода колебаний приводят к величине  $T_1 \approx 420 - 440$  звёздных суток [3,4,7].

Движение полюса определяется как угловое смещение оси вращения в теле планеты относительно оси фигуры  $C_2x_3$ . Компоненты вектора угловой скорости представимы через фазу  $w_1$  в виде разложений по малому параметру

$\varepsilon = \lambda \kappa^{-1} \sim 10^{-6}$ . С относительной погрешностью  $O(\varepsilon^4) \sim 10^{-24}$  составляющие вектора угловой скорости равны

$$\begin{aligned}\omega_x &= \lambda I_2 \frac{\operatorname{cn}(\eta, \lambda)}{A^* \chi} = \varepsilon \frac{I_2}{A^*} \left( \cos w_1 + \frac{\varepsilon^2}{16} [-(\kappa^2 + 8) \cos w_1 + \kappa^2 \cos 3w_1] \right) + O(\varepsilon^5), \\ \omega_y &= \lambda I_2 \frac{\kappa_* \operatorname{sn}(\eta, \lambda)}{B^* \chi} = \varepsilon \sqrt{1 + \kappa^2} \times \\ &\times \frac{I_2}{B^*} \left( \sin w_1 + \frac{\varepsilon^2}{16} [(\kappa^2 - 8) \sin w_1 + \kappa^2 \cos 3w_1] \right) + O(\varepsilon^5), \\ \omega_z &= \frac{I_2}{C^*} \frac{\kappa \operatorname{dn}(\eta, \lambda)}{\chi} = \frac{I_2}{C^*} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} [-2 - \kappa^2 + \kappa^2 \cos 2w_1] \right) + O(\varepsilon^4), \\ \eta &= \frac{2}{\pi} K(\lambda) w_1, \quad \varepsilon = 1.2 \times 10^{-6}.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Угловые координаты, отвечающие свободной нутации (чандлеровской компоненте движения)  $(x_p, y_p)$ , соответствующий угол  $\alpha$  между осью фигуры и осью вращения и линейные координаты  $(X_p, Y_p)$  на касательной к геоиду плоскости равны приближённо [6, 11]:

$$\begin{aligned}x_p &= \frac{\omega_x}{\omega} \approx \frac{C^* \lambda}{A^* \kappa} \kappa_* \cos w_1, \quad y_p = -\frac{\omega_y}{\omega} \approx \frac{C^* \lambda}{B^* \kappa} \lambda_* \sin w_1, \\ \cos \alpha &\approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\kappa} \right)^2 C^{*2} (A^{*-2} + \kappa_* B^{*-2}) \sin^2 w_1,\end{aligned}\tag{1.19}$$

$$X_p = R x_p, \quad Y_p = R y_p, \quad \max |X_p|, |Y_p| \approx 7.5 \text{ м}, \quad R = 6.38 \times 10^6 \text{ м}.$$

Знак «-» в выражении для  $y_p$  (1.19) принят в соответствии с международным соглашением, т.е. угловая координата  $y_p$  направлена по меридиану  $90^\circ$  западной долготы [3, 4, 7]. Величина  $\alpha$  - угол между вектором угловой скорости и осью фигуры Земли (рисунок 1). Приближённые выражения (1.19) оказываются справедливыми с высокой точностью, поскольку  $\lambda^2 \sim 10^{-14}$ ,  $\lambda^2 / \kappa^2 \sim 10^{-12}$ .

В первом приближении по  $\varepsilon$  полюдия (свободная нутация) есть эллипс с весьма малым эксцентриситетом  $e \approx 0.005$ . Данные МСВЗ [65] подтверждают теоретические оценки (1.18) и (1.19).

Таким образом, проведённые исследования и полученные на их основе оценки чандлеровского движения полюсов свидетельствуют о весьма хорошем качественном и количественном соответствии теоретических и экспериментальных данных, т.е. об адекватности принятой математической модели. Общеизвестно [1-4, 7], что чандлеровское движение полюса происходит в среднем с периодом 433 звёздных суток и является свободной нутацией вязкоупругой Земли с соответствующим тензором инерции. Имеется также «вынужденное» движение полюса с периодом один год (около 365 звёздных суток), обусловленное движением барицентра Земля-Луна по орбите вокруг Солнца. Оно имеет регулярный характер и может быть объяснено посредством небесномеханической модели. Колебания полюса с указанными периодами отмечаются специалистами как основные в координатах  $x_p, y_p$  Земли, полученные из наблюдений, начиная с конца XIX века по настоящее время. Наблюдается также вековое смещение (дрейф) полюса вдоль оси  $y_p$  со скоростью около  $0.033''$  в год, что привело к смещению фигуры колебаний приблизительно на 10 м к Северной Америке; дрейф вдоль оси  $x_p$  незначителен.

## **Глава II. Вариации коэффициентов геопотенциала в структуре колебательного процесса полюса Земли**

### **2.1. Уравнения вращательно-колебательных движений деформируемой Земли.**

Создание адекватной математической модели, позволяющей регулярным образом на достаточно больших промежутках времени описывать траектории оси вращения (мгновенного положения вектора угловой скорости) в некоторой удобной системе координат, является актуальной и содержательной проблемой теоретической и небесной механики. Ее решение имеет важные технические приложения. Разрабатываемые инновационные технологии должны быть ориентированы на существенное повышение точностных характеристик российской глобальной навигационной спутниковой системы (ГЛОНАСС) и на массовое ее применение при решении прикладных задач в областях навигации, геодезии и геофизики. В связи с этим актуальным является вопрос о достижении высокой точности координатно-временного обеспечения этой системы [2, 3, 4, 12, 27, 37, 56].

Классические исследования в рамках модели твердой Земли проводились на основе учета момента гравитационных сил от Солнца. Однако такой подход оказался недостаточным и не привел к выявлению механизма наблюдаемых колебаний вектора угловой скорости относительно связанной системы координат. Значительное отличие чандлеровского периода от предписываемой классической теорией твердого тела (от периода прецессии Эйлера 305 суток для недеформируемой фигуры Земли) потребовало

объяснения. Оно было предпринято и частично осуществлено на основе модели деформируемой Земли в исследованиях С.Ньюкома, А.Пуанкаре, Г.Джеффриса, А.Лява, П.Мельхиора, У.Манка и Г.Макдональда, Ф.А.Слудского, М.С.Молоденского и мн.др. [1, 32, 39, 46, 48]

Модифицированная модель должна более точно описывать чандлеровское движение полюса на основе вязкоупругой модели деформируемой Земли. Она должна также учитывать гравитационные моменты сил, обусловленные сложным движением барицентра под действием притяжения Солнца и, возможно, планет Солнечной системы. При этом не должна исключаться возможность учета геофизических факторов, имеющих, как правило, нерегулярный характер, и их апостериорная оценка на основе статистической обработки данных измерений.

Для построения математической модели колебательного движения полюса Земли, описывающей указанные основные факторы удобно воспользоваться переменными Эйлера, принимая во внимание приближенные аналитические выражения (1.11) моментов инерции Земли, вычисленные с учетом ее деформации и поступательного движения в системе Земля-Луна, которые являются основой для построения высокоточной модели чандлеровского движения полюса [5, 8].

Для построения модели вращательного движения относительно центра масс представим уравнения в форме классических динамических уравнений Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции  $J$  :



$$\begin{aligned}
 J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{M}, \quad \boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T, \quad J = J^* + \delta J, \quad J^* = \text{const}, \\
 J^* &= \text{diag}(A^*, B^*, C^*), \quad \delta J = \delta J(t), \quad \|\delta J\| \ll \|J^*\| \\
 \mathbf{M} &= \mathbf{M}_K + \mathbf{M}^S + \mathbf{M}^L
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  - вектор угловой скорости в связанной с Землей системе координат (референц-системе). Оси этой системы приближенно совпадают с главными центральными осями инерции  $J^*$  «замороженной» фигуры Земли с учетом «экваториального выступа» [3]. Выбранная система координат качественно и количественно согласуется с ITRF. Считается, что малые вариации тензора инерции  $\delta J$  могут содержать различные гармонические составляющие, обусловленные регулярным возмущающим влиянием гравитационных суточных приливов от Солнца и Луны, и, возможно, другие (годовые, полугодовые, месячные, двухнедельные и т.п.). Дополнительные возмущающие члены получаются при дифференцировании вектора кинетического момента деформируемой Земли. Они отнесены к относительно малому по величине вектору  $\mathbf{M}_K$  весьма сложной структуры, который аддитивно входит в  $\mathbf{M}$  (считается, что существенные деформации происходят вдоль радиус-вектора относительно центра масс Земли). Векторы  $\mathbf{M}^{S,L}$  - гравитационно-приливные возмущающие моменты сил от Солнца и Луны соответственно [3-5].  $A^*, B^*, C^*$  - эффективные главные центральные моменты инерции с учетом деформаций «замороженной» Земли. Они могут быть вычислены с достаточной точностью. Коэффициенты  $\delta A, \delta B, \delta J_{pq}, \delta J_{qr}, \delta J_{pr}$  - обусловлены приливными суточными и полусуточными гравитационными воздействиями Луны и Солнца. Для них могут быть получены косвенные оценки на основе измерений характеристик процесса вращения Земли

относительно центра масс.

## 2.2. Основная модель колебаний полюса Земли

Оценка членов уравнений (2.1) для  $p, q$  после усреднения по быстрой фазе  $\varphi$  приводит к упрощенной аналитической модели вида:

$$\begin{aligned} \dot{p} + N_p q + \sigma_p p &= \kappa_q r^2 + M_p \\ \dot{q} - N_q p + \sigma_q q &= -\kappa_p r^2 + M_q \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0, \quad N = \sqrt{N_p N_q} \approx (0.84 - 0.85)\omega_0$$

Здесь  $M_{p,q}$  - удельные моменты гравитационно-приливных сил;  $N$  - чандлеровская частота;  $\omega_0$  - среднее движение Земли по орбите вокруг Солнца;  $\kappa_p, \kappa_q$  - средние значения  $\delta J_{pr} / B^*$ ,  $\delta J_{qr} / A^*$ , которые могут быть медленными функциями, а квазипостоянный коэффициент  $\sigma$  характеризует малую диссипацию.

Необходимость учета  $\sigma$  возникает при анализе колебаний чандлеровской составляющей, амплитуда которой весьма чувствительна к  $\sigma$ . Этот резонансный эффект позволяет объяснить ряд свойств чандлеровской компоненты в колебании полюса Земли [4]. Для построения основной модели колебаний полюса Земли можно ограничиться определением небольшого числа усредненных (интегральных) характеристик тензора инерции.

Кинематические уравнения Эйлера, задающие ориентацию связанных осей относительно орбитальной системы координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi - \omega_0(\nu) \sin \varphi, \\ \dot{\nu} &= \omega_0(\nu) = \omega_* (1 + e \cos \nu)^2, \end{aligned}$$

$$\dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} - \omega_0(\nu) \operatorname{ctg} \theta \cos \psi, \quad e = 0.0167, \quad (2.3)$$

$$\dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta + \omega_0(\nu) \frac{\cos \psi}{\sin \theta}.$$

Здесь  $\nu(t)$  – истинная аномалия,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $\omega_*$  – постоянная, определяемая гравитационным и фокальным параметрами. Структура выражений для компонент момента гравитационных сил от Солнца имеет вид:

$$M_q = 3\omega^2 \left[ \left( A^* + \delta A - (C^* + \delta C) \right) \gamma_r \gamma_p + \delta J_{pq} \gamma_r \gamma_q + \delta J_{pr} (\gamma_r^2 - \gamma_p^2) - \delta J_{rp} \gamma_p \gamma_q \right],$$

$$\omega = \omega_* (1 + e \cos \nu)^{3/2}, \quad \gamma_p = \sin \theta \sin \varphi, \quad (2.4)$$

$$\gamma_q = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_r = \cos \theta.$$

Для вычисления  $M_{p,r}$  делается циклическая перестановка индексов  $p, q, r$ . В первом приближении решение кинематических уравнений Эйлера (2.3) будет

$$r = r^0, \quad \varphi \approx r t + \varphi^0, \quad \nu \approx \omega_* t + \nu^0,$$

$$\cos \theta(\nu) = a(\theta^0, \psi^0) \cos \nu, \quad \theta(0) = \theta^0 = 66^\circ 33',$$

$$0.4 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq \psi^0 \leq 2\pi, \quad (1.5)$$

$$\cos \theta \sin \theta = b(\theta^0, \psi^0) \cos \nu + d \cos 3\nu + \dots,$$

$$0.4 \leq b \leq \frac{4}{3}\pi, \quad |d| \ll 1.$$

Вторая и более высокие гармоники по  $\nu$  приводят к величинам, меньшим основных в  $10^2 \div 10^3$  раз, и поэтому не учитываются. Величина  $B^* - A^*$  также существенно меньше, чем  $C^* - A^*$  (приблизительно в 160 раз).

Оценка членов уравнений (2.3) для  $p, q$  приводит после усреднения по быстрой фазе  $\varphi$  (собственному вращению) к упрощенной аналитической

модели вида:

$$\begin{aligned} \dot{p} + N_p q &= \kappa_q r^2 + 3b\omega_*^2 \chi_p \cos u, \\ \dot{q} - N_q p &= -\kappa_p r^2 - 3b\omega_*^2 \chi_q \cos u, \\ p(0) = p^0, \quad q(0) &= q^0, \quad N_{p,q} \cong N \cong 0.84\omega_* \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $\kappa_p, \kappa_q$  – средние значения  $\frac{\delta J_{pr}}{B^*}, \frac{\delta J_{qr}}{A^*}$ , которые могут быть медленными функциями времени. Величины  $\chi_p, \chi_q$  получаются в результате усреднения по  $\varphi$  коэффициентов при  $\cos u$  в компонентах момента гравитационных сил от Солнца, они обусловлены суточными приливами. Моменты сил гравитации от Луны с месячным периодом 27.55 суток не учитываются из-за относительной малости их влияния на колебательные процессы земного полюса. Правые части уравнения (2.2) содержат в явной форме гармоническое воздействие с годичным периодом, объясняющее механизм нутационных колебаний, регистрируемых наблюдениями МСВЗ.

Разработанная в математическая модель содержит две основные составляющие – чандлеровское колебание с периодом около 433 зв. сут. и амплитудой, достигающей  $0.2'' - 0.25''$ , и годичное колебание с периодом, приблизительно равным одному году и амплитудой  $0.07'' - 0.08''$ . Координаты полюса  $(x_p, y_p)$ , согласно данной модели, описываются выражениями:

Введём переменные  $x(\tau) = p(t), y(\tau) = q(t)$ , где  $\tau = t / T_h$  – время, измеряемое в годах. Приведём выражения координат полюса для модели первого приближения с учетом коэффициентов тренда  $c_{x,y}$ , чандлеровской  $a_{x,y}^{c,s}$ , годичной  $d_{x,y}^{c,s}$  компонент [3-5]:

$$\begin{aligned} x_p &= c_x(\tau) - a_x^c \cos 2\pi N\tau + a_x^s \sin 2\pi N\tau - Nd_x^c \cos 2\pi\tau - d_x^s \sin 2\pi\tau, \\ y_p &= c_y(\tau) + a_y^c \cos 2\pi N\tau + a_y^s \sin 2\pi N\tau - Nd_y^c \cos 2\pi\tau + d_y^s \sin 2\pi\tau \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь  $\tau$  - время, измеряемое стандартными годами. Оптимальные значения коэффициентов модели (2.7) находятся с помощью метода наименьших квадратов на основе статистической обработки астрометрических данных высокоточных измерений угловых параметров движения Земли [7]. При этом выполняются приближенные равенства  $a_x^{c,s} \approx a_y^{s,c}$ ,  $d_x^{c,s} \approx d_y^{s,c}$ , отражающие структурные свойства модели.

Параметры модели (2.7) подвержены существенным изменениям вследствие возмущения тензора инерции Земли. Гравитационное поле Земли зависит от многих факторов, таких как механические и физические параметры планеты, сложное внутреннее строение Земли, движение приливообразующих тел, наблюдаемые крупномасштабные природные явления в атмосфере и океанах. Однако детальный учет геофизических характеристик не является необходимым для уточнения модели движения земного полюса.

Из теории фильтрации случайных временных последовательностей общеизвестно, что оптимальная оценка измеряемых случайных процессов есть результат компромисса между динамической (точность модели) и стохастической (точность измерений) ошибками. Длительность интервала интерполяции, т.е. число обрабатываемых измерений, выбирается из условия минимума взвешенной суммарной ошибки при заданном наборе небольшого числа опорных функций.

Анализ погрешности свидетельствует, что ее уменьшение достигается повышением точности модели (выбором указанных функций).

Это позволяет удлинить интервал обработки (увеличить число замеров) и тем самым уменьшить дисперсии случайных составляющих оценок искомых параметров и всего процесса в целом. Однако возможности такого подхода весьма ограничены, так как рост числа функций и тем самым оцениваемых параметров резко увеличивает указанные дисперсии при фиксированном числе замеров (интервала обработки). Практически он оправдывается, если добавление небольшого числа (одной-двух) опорных функций позволяет существенно уменьшить динамическую погрешность, т.е. увеличить относительную точность модели на порядки.

Построение вектора опорных функций, адекватных модели процесса, а также определение интервала интерполяции представляют основной интерес для задачи фильтрации и прогноза. Радикальным способом повышения точности интерполяции и прогноза является уменьшение ошибок измерений, погрешностей их предварительной обработки и искажений при интерпретации данных. Это может позволить существенно сократить интервал интерполяции и тем самым уменьшить динамическую погрешность. Однако значительное повышение точности наблюдений и измерений может быть достигнуто за счет огромных материальных затрат на разработку технических средств. Реальное уменьшение измерительных погрешностей происходит весьма медленно, поэтому основные возможности уточнения оценок заключаются в построении адекватных математических моделей процессов и соответствующих методов статистической обработки данных наблюдений и измерений. Конечно, наиболее эффективным оказывается сочетание обеих возможностей уменьшения динамических и стохастических погрешностей.

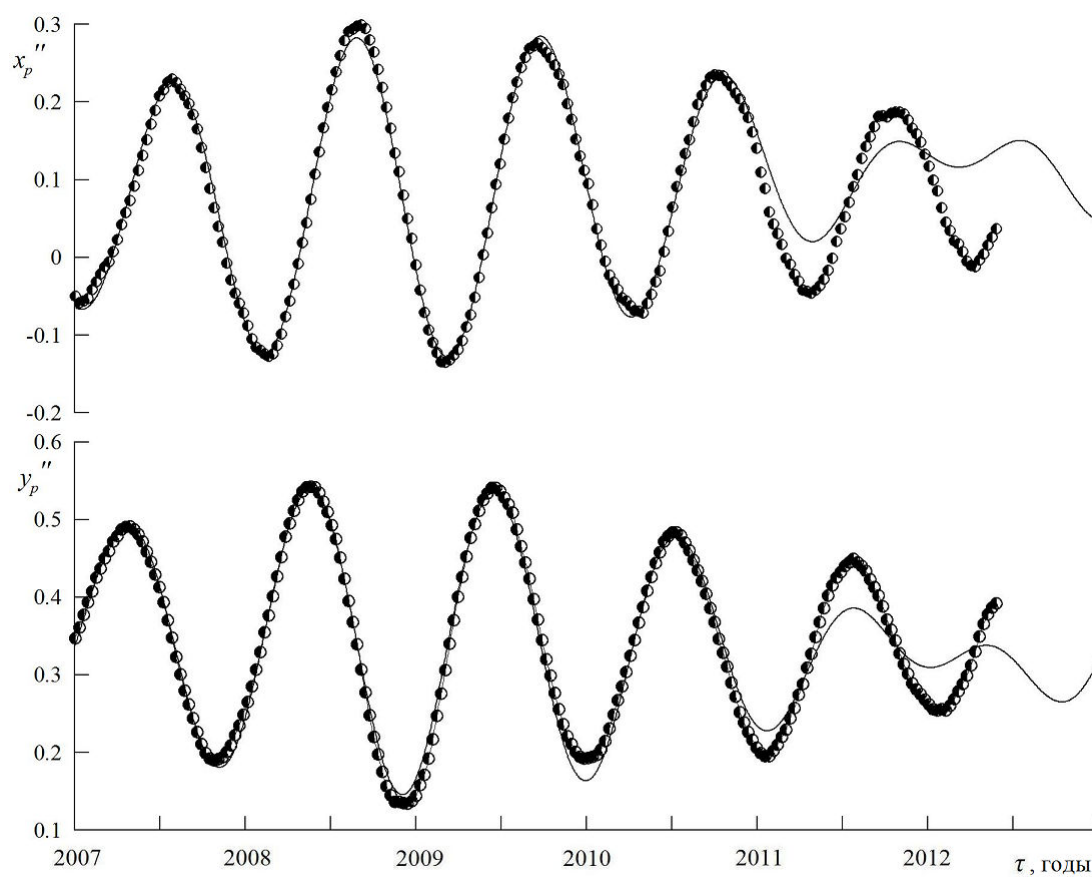
Приведем результаты численного моделирования основных колебаний полюса и внутригодовых вариаций приливной неравномерности осевого вращения Земли на основе построенной модели (2.7). Расчеты проводятся методом наименьших квадратов согласно 6-ти параметрической модели колебаний полюса.

На рисунке 3 приводятся четырехлетняя интерполяция (на интервале с 2007 года по 2010 год) и двухлетний прогноз колебаний координат полюса  $x_p, y_p$  в сравнении с данными реализовавшейся его траектории на период 01.01.2011–28.05.2012. С конца 2011 года колебания земного полюса находятся в процессе биений (при минимальных амплитудах колебаний), при которых наблюдаются значительные флуктуации амплитуды чандлеровских колебаний.

### **2.3. Нерегулярные явления в колебательном процессе полюса Земли**

В последнее десятилетие годовые и полугодовые вариации коэффициентов геопотенциала (для гармоник порядков 2, 3, 4, 5, 6) были определены по данным лазерной локации спутников Земли (SLR) таких, как Lageos-1, Lageos-2, Starlette, Ajisai, Stella и BEC. В связи с этим научный и практический интерес представляет совместное моделирование колебательного движения полюса Земли и временных вариаций коэффициентов геопотенциала, влияющих на параметры вращающегося геоида.

Траекторию движения земного полюса удобно представить в виде совокупности нерегулярного тренда (дрейфа, содержащего вековые составляющие и низкочастотные компоненты с периодами от 6 лет и более) и полудии (траектории его движения вокруг среднего положения), выраженной через амплитуду и фазу его движения. Тогда координаты полюса имеют вид:



**Рисунок 3** Сплошная линия – четырехлетняя интерполяция (2007–2010 гг.) и двухлетний прогноз колебаний координат полюса Земли  $x_p$ ,  $y_p$ ; точки – данные наблюдений и измерений МСВЗ (01.01.2011–28.05.2012).



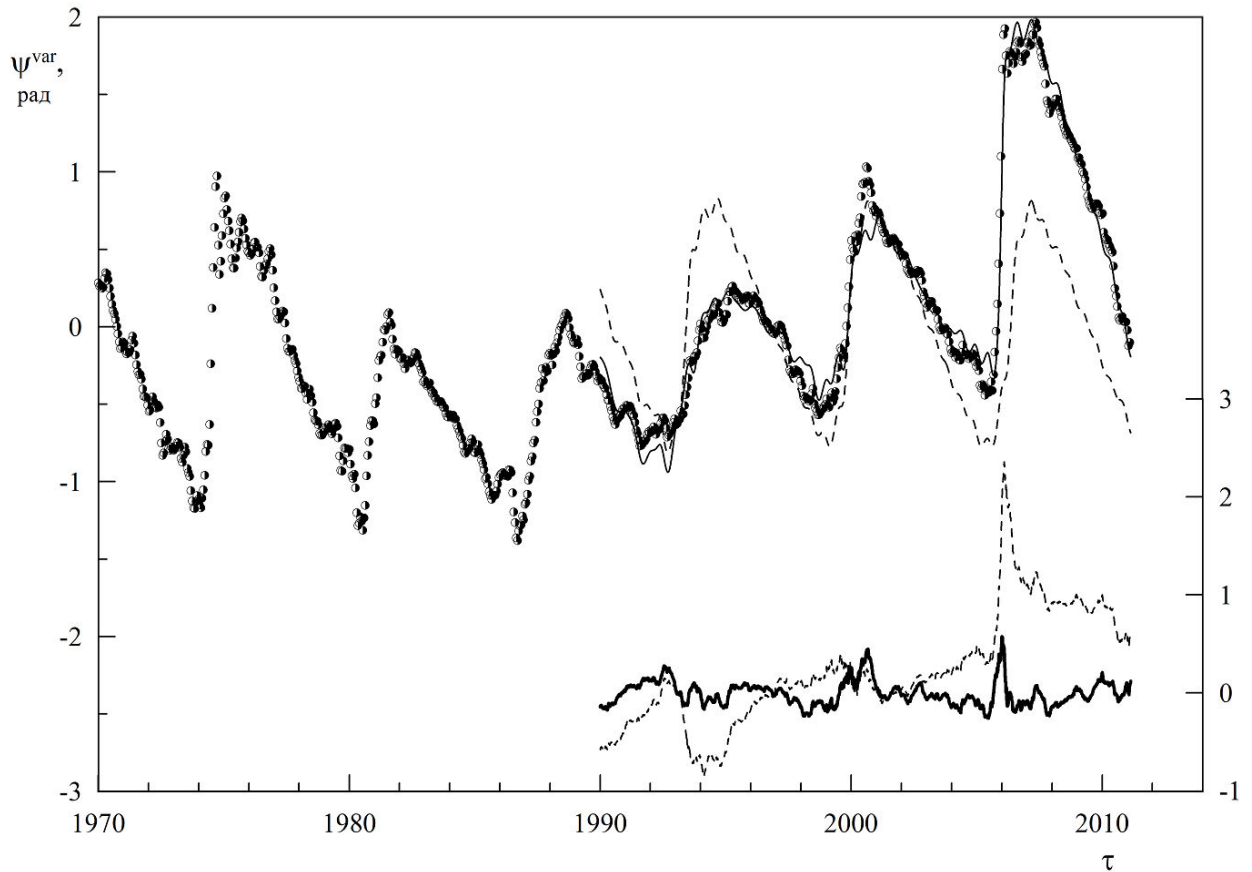
$$x_p = c_x + a \cos \psi, \quad y_p = c_y + a \sin \psi. \quad (2.8)$$

Выбор параметров  $a$ ,  $\psi$  оказывается более удобным для описания флуктуаций основных компонент модуляционного движения полюса.

Наблюдаемые нерегулярные явления в колебательном процессе земного полюса обладают существенным разнообразием. Они могут являться как следствием колебаний гидросферы, так и следствием возмущений, связанных с процессом возбуждения и поддержания основных компонент колебаний. Ранее [24-28] при моделировании параметров вращения Земли на коротких интервалах времени (в пределах одного года) наряду с регулярными компонентами модели рассматривалась процедура корректировки приливных коэффициентов, которая учитывает высокочастотные нестационарные флуктуации с малыми амплитудами. Эти короткопериодические флуктуации геофизического происхождения (вследствие колебаний тензора инерции Земли) не меняют в значительной степени параметров квазирегулярного движения полюса Земли и могут быть представлены в виде дополнительных аддитивных слагаемых модели - резидиумов, рассматриваемых на соответственных временных масштабах.

Согласно результатам моделирования и обработки высокоточных рядов наблюдений МСВЗ в колебательном процессе земного полюса выделяются «нерегулярные эффекты» [4], связанные с межгодовой изменчивостью параметров основных компонент колебаний и их модуляцией.

На рисунке 4 приведен график вариации фазы  $\psi^{var}(\tau)$  движения полюса Земли, построенный по данным наблюдений МСВЗ его координат на интервале времени с 1970 по 2011 гг. в сравнении с вариациями фазы движения полюса



**Рисунок 4** Вариации фазы  $\psi^{var}(\tau)$  движения полюса Земли (верхний график), полученные по данным наблюдений МСВЗ его координат на интервале времени с 1970 по 2011 гг. (дискретные точки) в сравнении с вариациями фазы движения полюса согласно двум сравниваемым моделям: основной (пунктирная линия) и уточненной (сплошная линия) на 23-летнем интервале времени (с 1990 по 2011 гг.). Резидиумы (нижний график) - разности между наблюдаемыми и расчетными значениями фазы согласно основной (пунктирная линия) и уточненной (сплошная линия) моделям.

согласно двум моделям (основной (2.7) и уточненной (2.19)) на интервале времени с 1990 по 2011 гг. В нижней части графика показаны резидиумы - разности между наблюдаемыми и расчетными значениями фазы. Существенный интерес представляют резкие непрогнозируемые в рамках модели первого приближения изменения в фазе колебаний, приходящиеся на середину 1974 г. и конец 2005 - начало 2006 гг. Этим изменениям фазы соответствуют кратковременные потери в скорости  $\dot{\psi}$  (скорость изменения фазы принимает малые отрицательные значения), в то время как средняя скорость изменения фазы соответствует чандлеровской частоте. Отметим, что на интервале с 2011 по 2013 гг. фаза отличается иным аномальным поведением, которое рассматривается ниже.

Эти явления, регистрируемые в данных МСВЗ, представляют собой «аномальные» флуктуации координат полюса Земли, которые вследствие изменения геодинимических параметров негативно сказываются на процессе интерполяции и прогнозирования математической модели первого приближения.

Как видно из рисунка 5, определяемые на этапе интерполяции постоянные коэффициенты модели первого приближения - амплитуды и фазы, как чандлеровской компоненты, так и годичной, подвержены существенным вариациям. На рисунке приводятся амплитудно-частотный спектр рядов наблюдений МСВЗ координат земного полюса  $x_p, y_p$  для трёх характерных интервалов времени. Длительный интервал обработки данных МСВЗ использовался для определения средних значений чандлеровской и годичной частот координат полюса  $x_p, y_p$ . Один из двух пересекающихся 15-летних

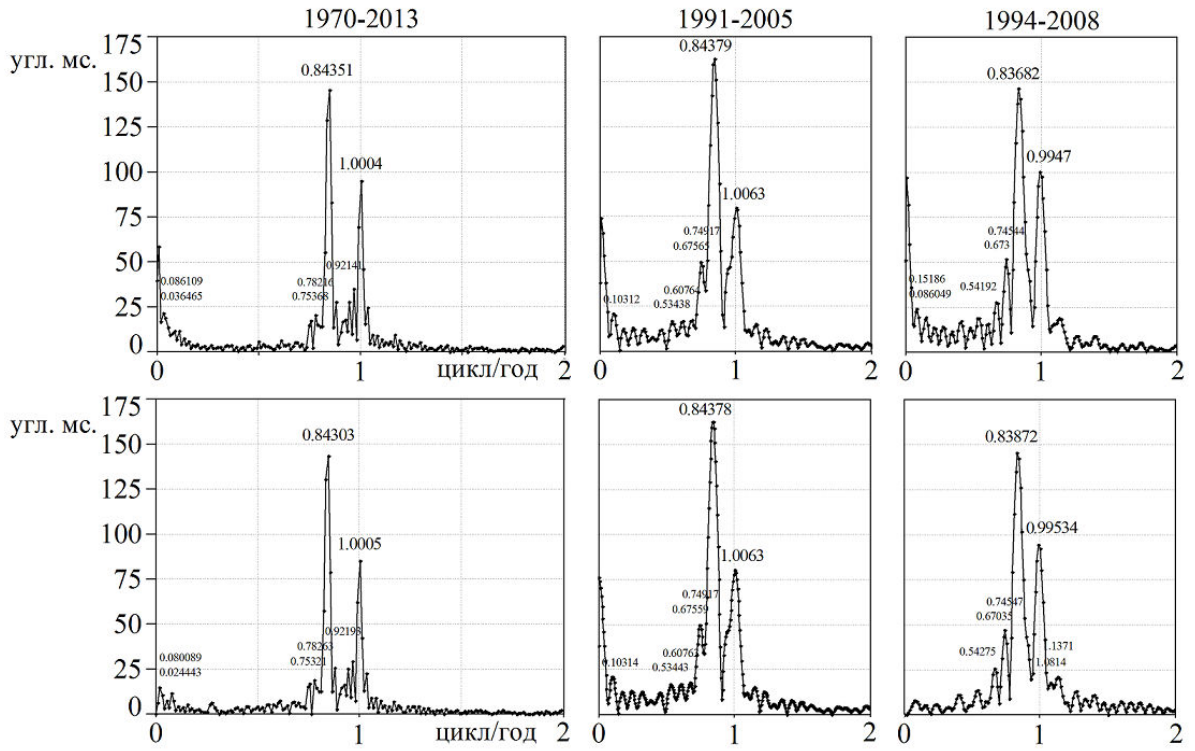
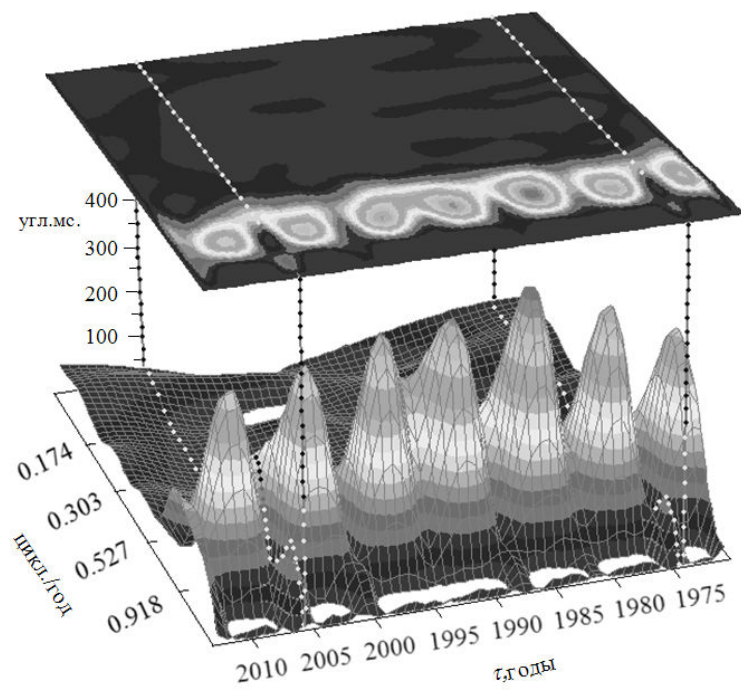
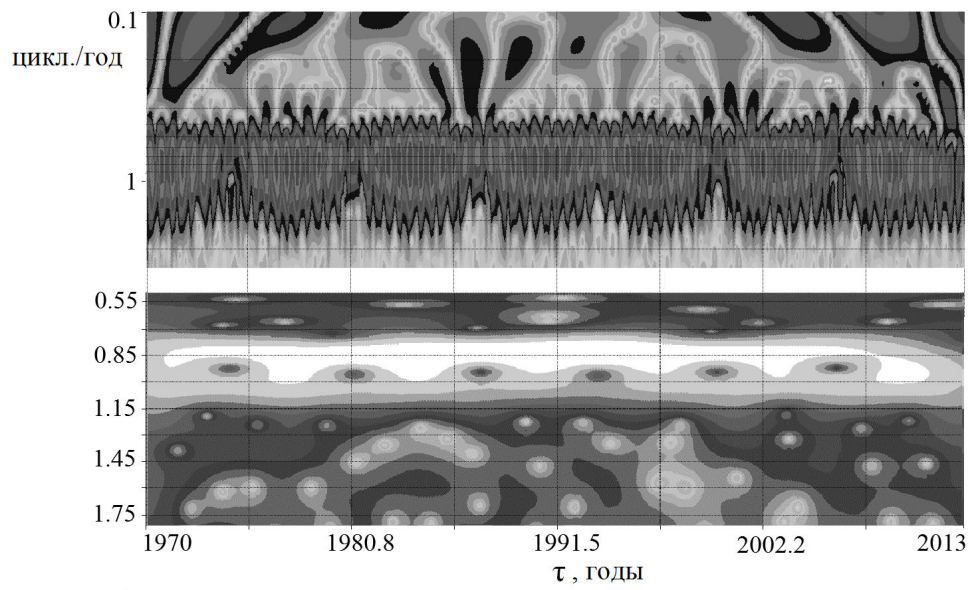


Рисунок 5 Спектральные плотности мощностей рядов наблюдений  $x_p, y_p$ .

интервалов исключает момент экстремальной флуктуации фазы, приходящийся на конец 2005 - начало 2006 гг. Из сравнения приведенных графиков амплитудно-частотного спектра видно, что среднеквадратическое отклонение экстраполяции модели движения полюса на интервал времени после 2006 года значительно возрастает, что соответствует существенному снижению точности модели.

Однако спектральная плотность мощности не содержит детальной информации о рассматриваемых флуктуациях. Наглядная иллюстрация сопутствующих такому экзотическому поведению полюса эффектов и выделение некоторых его особенностей предполагает применение методов анализа нестационарных процессов. В частности применение вейвлет-анализа [5] позволяет выделить локальные особенности на фоне общей аппроксимации, которые не могут быть выявлены с помощью преобразования Фурье. Вид вейвлет-функции и её параметры локализации существенно влияют на вейвлет спектры и возможность детализации особенностей в рассматриваемых колебаниях. Параметры вейвлет-функции выбирались из условия наиболее точного ее совпадения с флуктуациями, приходящимися на даты резкого изменения фазы движения полюса.

На рисунке 6 представлены графические результаты вейвлет преобразования временного ряда координаты  $x_p$  полюса с различными параметрами базовой вейвлет функции Морле (для координаты  $y_p$  выводы идентичны). Вейвлет-поверхность в пространстве изображена контурами изолиний - границ между областями с разными оттенками (от светло-серого до почти черного). Для визуализации вейвлет спектра на плоскости вейвлет-



**Рисунок 6** Вейвлет-преобразование временного ряда координаты  $x_p$  полюса

поверхность рассматривается в проекции с изолиниями. На верхнем графике рисунок 5а приводится спектр действительного вейвлет преобразования Морле с параметрами, дающими временную локализацию колебаний  $x_p$ . Для расширения диапазона масштабов на графике взята логарифмическая частотная шкала. Здесь следует отметить приходящиеся на рассматриваемые моменты резких флуктуаций фазы полюса (середина 1974 г. и конец 2005 - начало 2006 гг.) появление «аномальных» экстремумов в колебательном процессе. Приблизительный период этих флуктуаций составляет 0.5 года.

На нижнем графике рисунка 6,а приводится спектрограмма комплексного вейвлет преобразования Морле с локализацией по шкале масштабов. Данный вариант преобразования отражает амплитудную модуляцию  $a(t)$  годичной и чандлеровской компонент. Для визуальной оценки относительной величины амплитуды рассматриваемых флуктуаций на фоне основного модуляционного движения полюса на рисунке 6,б приведен трехмерный вариант спектрограммы комплексного вейвлет преобразования. Из рисунка 6,б видно, что наличие полугодовой флуктуации координат полюса в периоды 1974г. и 2005-2006 гг. приводит к кратковременному уменьшению скорости изменения фазы  $\dot{\psi}$  (увеличению периода обращения полюса вокруг его среднего положения из-за эпизодов обнуления скорости изменения фазы) и последующему значительному ее увеличению до настоящего момента времени. Увеличению частоты  $\dot{\psi}$  соответствует уменьшение периода обращения полюса вокруг его среднего положения от стандартного значения близкого к чандлеровскому периоду (в «обычные» годы) до «аномального», сравнимого с годичным периодом. При этом попытка скорректировать частоты

чандлеровского и годовичного колебаний на интервале интерполяции (1994-2008 гг.) приведет к ухудшению точности прогноза.

#### **2.4. Математическая модель возмущённого движения земного полюса**

Обобщение рассмотренной ранее математической модели колебательного процесса полюса осуществляется с помощью методов небесной механики и математического описания временных вариаций гравитационного поля Земли, которые позволяют дать амплитудно-частотный анализ и качественное объяснение наблюдаемых аномалий в колебательном процессе. При этом уточненная математическая модель должна обладать свойствами малопараметричности и согласованности с разработанной ранее основной моделью. Последнее означает сохранение присущих основной модели структурных свойств и соответствие осредненных динамических параметров параметрам основной модели.

Известно [4], что амплитуда и фаза чандлеровской компоненты колебательного процесса полюса весьма чувствительны к различным возмущающим факторам, в том числе обладающим нерегулярными свойствами (гравитационным, океаническим, атмосферным, и возможно, другим). Величина амплитуды установившегося движения определяется разностью частот и коэффициентом диссипации [4]. Поэтому наиболее чувствительной к нерегулярным воздействиям следует полагать чандлеровскую компоненту колебаний полюса Земли. Механизм этих воздействий естественно связать со слабыми возмущениями тензора инерции.

Фигура Земли вследствие вариаций тензора инерции (возникающих из-за периодических приливных деформаций - океанических и твердотельных



приливов и других возмущений) является динамической фигурой геоида, создавая при этом дополнительный возмущающий потенциал  $\delta W(t)$ , зависящий от времени. Наибольшим по величине слагаемым из разложения потенциала  $\delta W$  является возмущение от второй гармоники  $\delta W_2$ :

$$\delta W_2 = \frac{fm_E R_E^2}{r^3} \Delta \bar{Y}_2(\theta, \varphi), \quad (2.9)$$

где  $\theta, \varphi, r$  - сферические координаты;  $R_E$  - средний радиус Земли,  $R_E \cong 6.38 \times 10^6$  м;  $fm_E = 3,98600442 \times 10^{14}$  м<sup>3</sup>с<sup>-2</sup>. Изменение нормированной сферической функции  $\Delta \bar{Y}_2(\theta, \varphi)$  выражается через коэффициенты второго порядка разложения геопотенциала:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Y}_2(\theta, \varphi) = & \delta c_{20} \bar{P}_{20}(\cos\theta) + [\delta c_{21} \cos\varphi + \delta s_{21} \sin\varphi] \bar{P}_{21}(\cos\theta) + \\ & + [\delta c_{22} \cos 2\varphi + \delta s_{22} \sin 2\varphi] \bar{P}_{22}(\cos\theta). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $\bar{P}_{2m}(\cos\theta)$  - нормированные присоединенные функции Лежандра.

Дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы модуляционного движения земного полюса можно получить из динамических уравнений Эйлера-Лиувилля движения Земли относительно центра масс:

$$\begin{aligned} \dot{a} = & \frac{2m_E R_E^2}{A^*} r_0 \left[ c_{22}^* \left( 1 - \frac{C^*}{B^*} \right) + \delta c_{22} \right] a \sin 2\psi + [\mu_p \cos\psi + \mu_q \sin\psi], \\ \dot{\psi} = & -N_q \cos^2\psi - N_p \sin^2\psi + a^{-1} [\mu_q \cos\psi - \mu_p \sin\psi]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь  $a, \psi$  - введённые ранее амплитуда и фаза колебаний координат земного полюса;  $c_{2m}^*, \delta c_{2m}$  - коэффициенты второго порядка разложения потенциала в ряд по сферическим функциям для «замороженной» фигуры Земли и их вариации;  $r_0$  - средняя скорость осевого вращения Земли; переменные коэффициенты

$$N_p = \frac{C^* - B^* + \delta C - \delta B}{A^* + \delta A} r_0, \quad N_q = \frac{C^* - A^* + \delta C - \delta A}{B^* + \delta B} r_0 \quad (2.12)$$

являются близкими по значению величинами, определяющими частоту чандлеровских колебаний полюса. Компоненты  $\mu_p, \mu_q$  - возмущения гравитационно-приливного (лунно-солнечные гравитационно-приливные моменты сил) и геофизического (вследствие вариаций коэффициентов  $\delta c_{21}, \delta s_{21}$  тессеральных гармоник геопотенциала) характера [2, 6]. Величины  $r_0 \mu_p, r_0 \mu_q$  имеют размерность удельного момента сил.

Внешние возмущения, приводящие к наблюдаемым колебаниям полюса, можно представить в виде суммы чандлеровской и годичной составляющих соответственно:

$$\mu_{p,q} = \mu_{p,q}^{ch} + \mu_{p,q}^h \quad (2.13)$$

Из результатов обработки данных наблюдений МСВЗ следует, что амплитуда чандлеровской компоненты и ее частота подвержены сильным вариациям, в то время как годичная компонента является более стабильной. Средняя частота свободной нутации  $N^*$  согласно решению (2.11) равна  $\sqrt{N_p^* N_q^*}$ . Вариация частоты чандлеровских колебаний (частота свободной нутации) является функцией динамического сжатия геоида и вариации осевого момента инерции:

$$N \cong N^* + \delta N, \quad \delta N = -F(\delta C, \delta c_{20}). \quad (2.14)$$

Тогда для амплитуды  $a_{ch}$  и фазы  $\psi_{ch}$  чандлеровского колебания получаются выражения:

$$a_{ch} = a_{ch}^0 + a_{ch}^{var} \left( t, \frac{\pi}{N} \right), \quad \psi_{ch} = \psi_{ch}^0 - N^* t + \int F(\delta C, \delta c_{20}) dt + \psi_{ch}^{var} \left( t, \frac{\pi}{N} \right), \quad (2.15)$$

где  $a_{ch}^0, \psi_{ch}^0$  - среднее значение амплитуды и постоянный сдвиг фазы;  $a_{ch}^{var}, \psi_{ch}^{var}$  - слагаемые, определяющие эллиптичность траектории чандлеровской компоненты с весьма малым эксцентриситетом. При  $N = N^*$  они являются периодическими по  $t$  функциями с периодом  $\pi / N^*$ . Пренебрегая изменением во времени эксцентриситета чандлеровской траектории, для чандлеровских колебаний компонент  $p, q$  вектора мгновенной угловой скорости [3] можно записать:

$$p_{ch} = \frac{a_{ch}^0 \cos \psi_{ch}^0}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} r_0, \quad q_{ch} = \frac{a_{ch}^0 \sin \psi_{ch}^0}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} r_0. \quad (2.16)$$

Из системы уравнений (2.11) для компонент  $p, q$  вектора угловой скорости возмущенного движения Земли получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} p'_{ch,h} &= \frac{\sin \psi_{ch}}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} \int \frac{\cos \psi_{ch}}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} f_p^{ch,h}(t) dt - \frac{\cos \psi_{ch}}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} \int \frac{\sin \psi_{ch}}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} f_p^{ch,h}(t) dt, \\ q'_{ch,h} &= \frac{\sin \psi_{ch}}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} \int \frac{\cos \psi_{ch}}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} f_q^{ch,h}(t) dt - \frac{\cos \psi_{ch}}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} \int \frac{\sin \psi_{ch}}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} f_q^{ch,h}(t) dt, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} f_p^{ch,h} &= -\mu_p N_p^{-1} \ddot{\psi}_{ch} - \mu_q \dot{\psi}_{ch} - \dot{\mu}_p, \\ f_q^{ch,h} &= \mu_q N_q^{-1} \ddot{\psi}_{ch} - \mu_p \dot{\psi}_{ch} - \dot{\mu}_q. \end{aligned}$$

Амплитуды возмущенных чандлеровского и годичного колебаний полюса

$$a_{ch,h}^{p,q} = \frac{r_0}{a_{ch}^0 \sqrt{\dot{\psi}_{ch}}} \left\{ \left[ \int p_{ch} f_{p,q}^{ch,h}(t) dt \right]^2 + \left[ \int q_{ch} f_{p,q}^{ch,h}(t) dt \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

и переменная фаза  $\Delta \psi$  возмущенного чандлеровского колебания или считаются известными из наблюдений, или, как следует из результатов численного моделирования, могут быть найдены из вариаций коэффициента  $c_{20}$  геопотенциала. Так, на рисунке 7 приведены вариация частоты  $\Delta \dot{\psi}$

возмущенного чандлеровского колебания и вариации второй зональной гармоники  $\delta c_{20}$  по данным SLR (Satellite Laser Ranging) [2].

Для координат земного полюса (пренебрегая различием амплитуд основных компонент  $\tilde{a}_{ch,h} \approx a_{ch,h}^{p,q}$ ) получают окончательные выражения:

$$\begin{aligned} x_p &= c_x + \tilde{a}_{ch} \cos(\psi_{ch}^0 - N^*t + \delta\psi + \Delta\psi) + a_h \cos(\psi_h^0 + v_h t + \chi), \\ y_p &= c_y + \tilde{a}_{ch} \sin(\psi_{ch}^0 - N^*t + \delta\psi + \Delta\psi + \varepsilon) + a_h \sin(\psi_h^0 + v_h t), \\ \delta\psi &= \int F(\delta C, \delta c_{20}) dt. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь  $\tilde{a}_{ch}$  - результирующая амплитуда чандлеровского колебания;  $\varepsilon$ ,  $\chi$  - сдвиги фаз в  $x_p, y_p$  для чандлеровских и годовых колебаний соответственно;  $v_h$  - частота годового колебания.

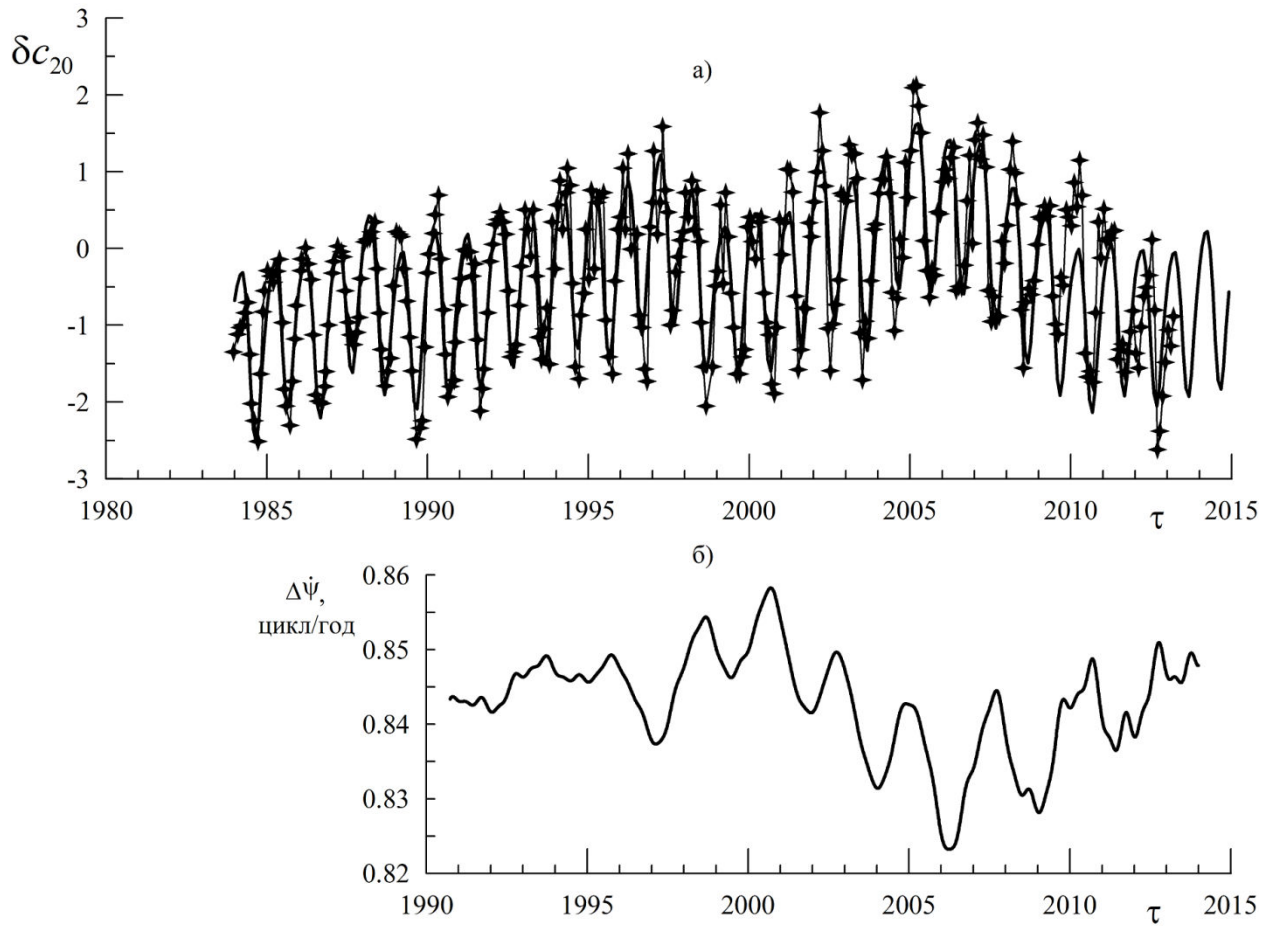
## 2.5. Численное моделирование колебаний координат земного полюса

Приведем результаты численного моделирования движения земного полюса на различных интервалах времени согласно моделям (2.7) и (2.19).

Структуру решений (2.19) можно переписать в следующем удобном для численных расчетов виде:

$$\begin{aligned} x_p &= c_x(\tau) - a_x^c(\tau) \cos 2\pi\bar{\psi}_{ch}(\tau) + a_x^s(\tau) \sin 2\pi\bar{\psi}_{ch}(\tau) - Nd_x^c \cos 2\pi\tau - d_x^s \sin 2\pi\tau, \\ y_p &= c_y(\tau) + a_y^c(\tau) \cos 2\pi\bar{\psi}_{ch}(\tau) + a_y^s(\tau) \sin 2\pi\bar{\psi}_{ch}(\tau) - Nd_y^c \cos 2\pi\tau + d_y^s \sin 2\pi\tau, \\ \bar{\psi}_{ch}(\tau) &= N^*\tau - \delta\psi(\tau) - \Delta\psi(\tau) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь  $\tau$  - время, измеряемое стандартными годами. Величины чандлеровской и годичной частот выбирались на основе спектрального анализа ряда наблюдений координат земного полюса на интервале времени с 1970г. по 2013г. Для  $N^*$  принимается значение 0.843 циклов в год, а частота годовых



**Рисунок 7** (а) Интерполяция вариаций второй зональной гармоники  $\delta c_{20}$  геопотенциала на интервале времени 1984-2008 гг. и прогноз на шесть лет (2009-2014 гг.): звездочки, соединенные тонкой сплошной линией - данные измерений SLR; контрастная сплошная линия - построенная кривая. (б) Вариация частоты  $\Delta\psi$  возмущенного чандлеровского колебания земного полюса, построенная в ходе численного моделирования (1990-2014 гг.).

колебаний выбрана постоянной. Отметим, что для коэффициентов модели (2.20) должны выполняться структурные свойства - приближенные равенства

$$a_x^{c,s}(\tau) \approx a_y^{s,c}(\tau), \quad d_x^{c,s}(\tau) \approx d_y^{s,c}(\tau),$$

аналогичные структурным свойствам модели (2.7).

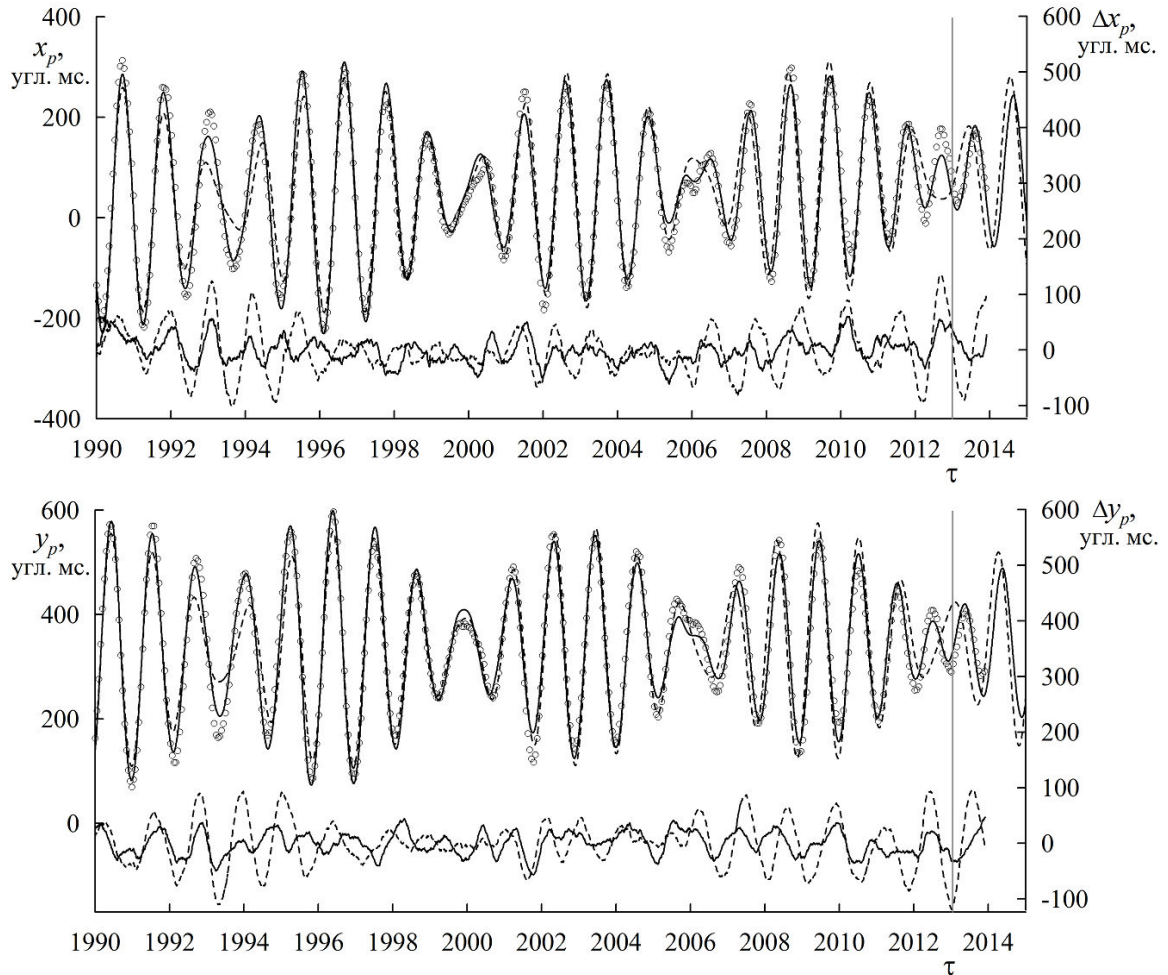
В ходе численного моделирования медленный дрейф (тренд) полюса представляется линейной функцией времени  $c_{x,y} = c_{x,y}^0 + c_{x,y}^1 \tau$ .

Расчеты согласно основной модели (2.7) проводились с помощью метода наименьших квадратов, который применялся независимо к переменным  $x_p, y_p$  в виде шестимерных аппроксимаций:

$$\begin{aligned} x_p(\tau) &= (\xi, f(\tau)), & y_p(\tau) &= (\eta, f(\tau)) \\ \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_6)^T, & \eta &= (\eta_1, \dots, \eta_6)^T, \\ f(\tau) &= (1, \tau, \cos 2\pi N^* \tau, \cos 2\pi N^* \tau, \cos 2\pi \tau, \sin 2\pi \tau)^T, \end{aligned} \quad (2.21)$$

Численное моделирование по разработанной модели (2.20) осуществлялось согласно идентичной процедуре, основанной на МНК, однако она не приводится в виду громоздкости компонент вектора опорных функций.

На рисунке 8 приведены результаты интерполяции на длительном интервале времени (с 1990г. по 2012г. включительно) и прогноз на 2013 и 2014 годы колебательного процесса координат земного полюса согласно двум разработанным моделям - основной (2.7) и уточненной (2.19) в сравнении с высокоточными данными МСВЗ. Также на рисунке даны резидиумы - невязки между данными МСВЗ и теоретическими кривыми.



**Рисунок 8** Интерполяция на интервале времени 1990-2012 гг. включительно и прогноз на 2013 и 2014 гг. колебательного процесса координат земного полюса согласно основной (пунктирная линия) и уточненной (сплошная линия) моделям в сравнении с высокоточными данными наблюдений и измерений МСВЗ (точки). Резидиумы (даны под основными графиками) - невязки между данными МСВЗ и теоретическими кривыми, построенными согласно основной (пунктирная линия) и уточненной (сплошная линия) моделям.

Соответствующие среднеквадратические отклонения, рассчитанные на интервале интерполяции для модели (2.7) -  $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_{xy}^*$  и модели (2.19) -  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  даны в угловых миллисекундах:

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= 44.30672865, & \sigma_y^* &= 43.32902488, & \sigma_{xy}^* &= 61.97169186, \\ \sigma_x &= 24.14765269, & \sigma_y &= 20.25418818, & \sigma_{xy} &= 31.51731698. \end{aligned}$$

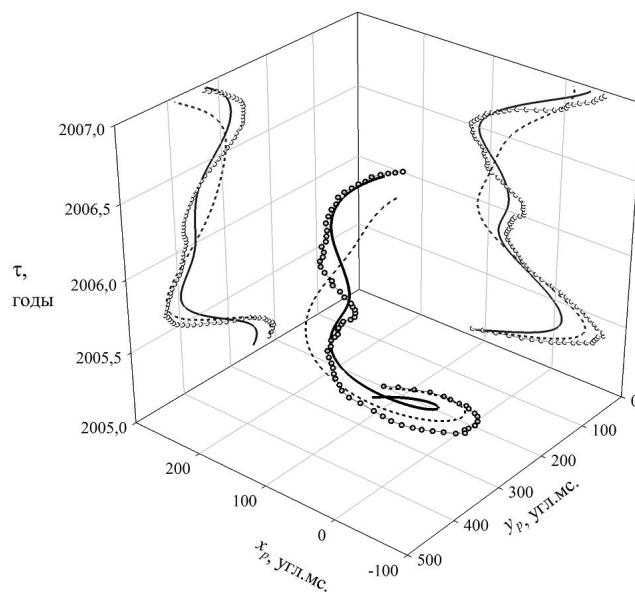
На интервале времени начиная с конца 2012 г. в поведении полюса также наблюдаются значительные аномалии. Сравнение вычисленных невязок для моделей (2.7) и (2.19) (рисунок 8) показывает, что точность интерполяции модели (2.18) значительно выше на концах рассматриваемого интервала. Это говорит о наличии значимых изменений в параметрах основных колебаний (чандлеровской и годичной) ближе к концу интервала интерполяции (как отмечалось - начиная с конца 2005 года).

На рисунке 9 приводятся траектория движения полюса - данные наблюдений МСВЗ и теоретические кривые, согласно построенной выше интерполяции, на интервале времени, соответствующем эпизоду аномального поведения полюса 2005-2006 гг.

Теоретические прогнозы на рисунке 8 колебаний координат земного полюса согласно двум моделям даны в сравнении с реализовавшимися колебаниями (до декабря 2013г.). Из сравнения двух прогнозов и данных наблюдений МСВЗ можно заключить о наличии существенного сдвига фазы в модуляционном движении полюса, приходящегося на прогнозируемый интервал времени.

Существенное значение в идентификации нерегулярных флуктуаций полюса имеют как изменения в фазе его колебаний, так и в амплитуде





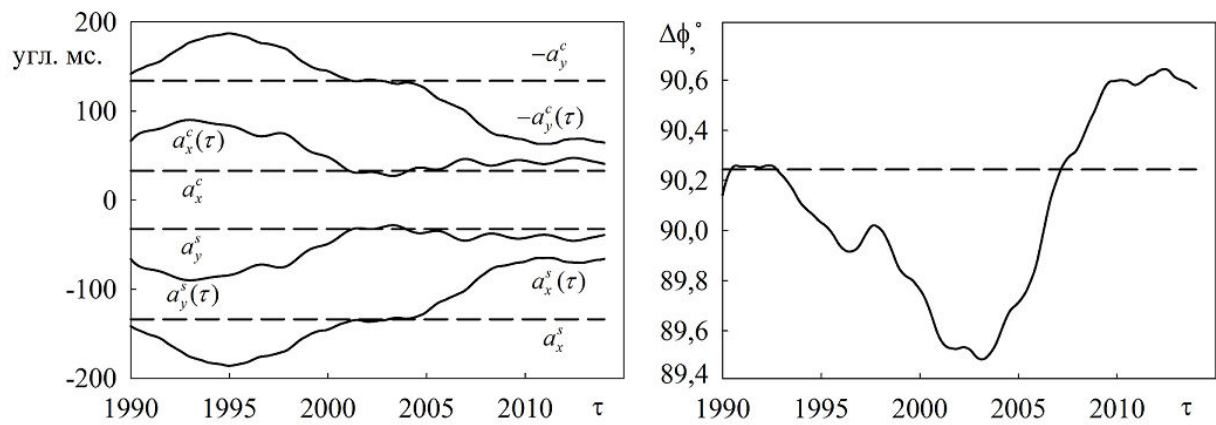
**Рисунок 9** Траектория движения полюса по данным наблюдений МСВЗ (точки) и двум моделям - основной (пунктирная линия) и уточненной (сплошная линия), на интервале времени с 2005г. по 2006г.

основных компонент. На рисунке 4 наряду с изменениями в фазе колебаний полюса, выделенными из данных наблюдений МСВЗ на длительном интервале времени (с 1970г. по 2011г. включительно) приводятся изменения фазы, рассчитанные по теоретическим моделям (2.7) и (2.19) для интерполяций, соответствующих временному интервалу с 1990 г. по 2011г. Также даны невязки между наблюдаемыми флуктуациями фазы колебаний полюса и ее расчетными значениями. Из анализа рисунка можно заключить о хорошем совпадении рассчитанной фазы движения полюса с ее наблюдаемыми значениями. Резидиум для уточненной модели (рисунок 8) в значительной степени обусловлен ошибками в вариациях амплитуд основных гармоник. Отметим, что в ходе численного моделирования амплитуды как чандлеровской компоненты, так и годичной считались не известными из наблюдений величинами, а вычисленными на основе анализа измерений вариаций геопотенциала и угловой скорости осевого вращения Земли.

Для оценки выполнения структурных свойств моделей (2.7) и (2.19) на рисунок 9а приведены коэффициенты интерполяций двух рассматриваемых моделей  $a_x^c, a_x^s, -a_y^c, a_y^s$  и  $a_x^c(\tau), a_x^s(\tau), -a_y^c(\tau), a_y^s(\tau)$ , имеющие размерность угловой миллисекунды. Сдвиг фазы чандлеровского колебания координат  $x_p, y_p$ , измеряемый в градусах можно оценить по рисунок 10б.

На рисунке 10 пунктирной прямой линией отмечено постоянное значение сдвига фазы для основной модели и сплошной кривой нанесен переменный сдвиг фазы  $\Delta\varphi = \varepsilon(\tau)$  уточненной модели (2.19).

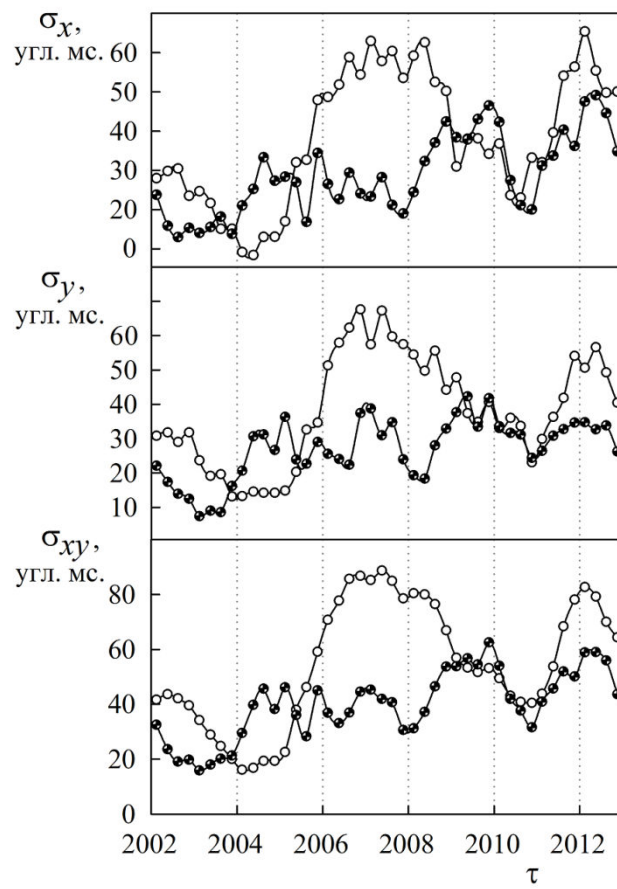
Рассмотрим упрощенную процедуру построения прогноза координат земного полюса согласно разработанной модели (2.19). На интервале



**Рисунок 10** (а) Коэффициенты основной (пунктирная линия) и уточненной (сплошная линия) моделей на интервале времени с 1990г. по 2012г. (б) Сдвиг фазы чандлеровского колебания координат  $x_p, y_p$  основной (пунктирная линия) и уточненной (сплошная линия) моделей.

интерполяции вариации коэффициента второй зональной гармоники геопотенциала и осевого момента инерции являются известными из наблюдений SLR и MCB3 [1-2]. Далее согласно выражениям модели (2.19) применяется идентификация траектории движения полюса Земли. Значения коэффициентов дополнительного возмущающего потенциала  $\delta W_2$  фиксируются в конце интервала интерполяции и при расчете прогноза считаются постоянными. В этом случае выражения модели (2.19) на интервале прогноза оказываются эквивалентными выражениям (2.7). Различия будут в постоянных коэффициентах модели и величине частоты свободной нутации - если в случае основной модели коэффициенты имеют смысл средних значений на интервале интерполяции, а чандлеровская частота выбрана на основе спектрального анализа длительного ряда наблюдений, то для уточнённой модели коэффициенты и частота соответствуют зафиксированным их значениям в конце интервала интерполяции.

На рисунке 11 приводятся графики среднеквадратических отклонений построенных годовых прогнозов координат земного полюса  $\sigma_x, \sigma_y$ , и его траектории  $\sigma_{xy}$ . Прогнозы согласно основной (2.7) и уточнённой (2.19) моделям рассчитывались по 7-летней и 15-летней интерполяциям соответственно. Из рисунка 11 можно заключить, что во время проявления аномальных флуктуаций в колебательном процессе земного полюса точность годового прогноза, рассчитанного согласно уточнённой модели значительно выше точности годового прогноза основной модели. Точность основной модели оказывается выше в случае стабильных характеристик чандлеровского и годового колебаний. Сравнительно короткий период стабильного поведения



**Рисунок 11** Среднеквадратические отклонения годовых прогнозов координат земного полюса  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$

и его траектории  $\sigma_{xy}$ .

полюса наблюдался с 2004 г. до середины 2005 г. В остальное время в колебательном процессе наблюдались аномальные эффекты, проиллюстрированные на рисунке 4-10. Заметим, что средние точности годовых прогнозов движения полюса, рассчитанных по моделям (2.7) и (2.19), составляют 1.66 м и 1.50 м соответственно.

На основе полученных результатов интерполяции и прогноза колебаний полюса можно заключить, что совместное моделирование динамических процессов (учет временных вариаций геопотенциала) позволяет уточнить аналитическую модель и улучшить прогноз траектории движения полюса.

## **Глава III. Моделирование ПВЗ в коротком интервале времени на основе данных наблюдений и измерений**

### **МСВЗ**

#### **3.1. Небесномеханическая модель внутрисуточных колебаний полюса Земли**

Достижение высоких точностей координатно-временного обеспечения наземных (стационарных и подвижных), а также движущихся в околоземном пространстве объектов связано с фундаментальной задачей построения динамических моделей вращательно-колебательных движений Земли, адекватных данным наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли (МСВЗ) [65]. В ряде практически важных задач, например, касающихся вопросов высокоточной навигации космических аппаратов, существенную роль может играть внутрисуточный прогноз движения земного полюса. Короткопериодические (с периодами от субсуточных до суток) регулярные колебания и нерегулярные флуктуации мгновенной оси вращения обусловлены как небесномеханическими (лунно-солнечные гравитационно-приливные моменты сил), так и различными геофизическими факторами (атмосферными, океаническими, сезонными и многими другими).

На основе небесномеханических представлений рассматривается теоретическая модель внутрисуточного колебательного процесса земного полюса. Для построения прогноза траектории движения земного полюса на суточных интервалах времени используется сравнительно простая модель, содержащая небольшое число неизвестных параметров, определяемых из

астрометрических наблюдений Международной службы вращения Земли (МСВЗ) [65] и наблюдений методом радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ-наблюдений). Уточнение рассмотренной ранее математической модели колебательного процесса полюса [2-3] для коротких интервалов времени осуществляется с помощью методов небесной механики и математического описания временных вариаций гравитационного поля Земли. Уточненная математическая модель содержит небольшое число неизвестных стабильных параметров - амплитуд и фаз стационарных гармоник и позволяет статистически надежно объяснить наблюдаемые характеристики движения земного полюса внутри суток.

Построение модели связано с поиском компромисса между основными элементами рассматриваемых процессов при построении теоретической модели, т.е. между сложностью модели и точностью измерений. При этом проводятся тщательный анализ состава базовых функций и их числа и настройка параметров.

Вариации коэффициентов второй зональной гармоники геопотенциала, согласно (2.9)-(2.10) могут быть выражены через вариации компонентов тензора инерции следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta c_{20} &= \frac{\delta A + \delta B - 2\delta C}{2m_E R_E^2}, & \delta c_{21} &= \frac{\delta J_{pr}}{m_E R_E^2}, & \delta s_{21} &= \frac{\delta J_{qr}}{m_E R_E^2} \\ \delta c_{22} &= \frac{\delta B - \delta A}{4m_E R_E^2}, & \delta s_{22} &= \frac{\delta J_{pq}}{2m_E R_E^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для описания внутрисуточных колебаний земного полюса удобно принять следующие обозначения в разложении вариаций тензора инерции  $\delta J_{ij}$ :



$$\delta J_{ij} = \delta J_{ij}^{(t)} + \delta J_{ij}^{(\varphi)} + \delta J_{ij}^{(2\varphi)} + \dots \quad (3.2)$$

Здесь  $\delta J_{ij}^{(t)}$  - внутригодовые и межгодовые вариации;  $\delta J_{ij}^{(\varphi)}$ ,  $\delta J_{ij}^{(2\varphi)}$  - суточные и полусуточные вариации соответственно.

Внутрисуточные вариации  $\delta J_{ij}^{(\varphi)}$ ,  $\delta J_{ij}^{(2\varphi)}$  содержат составляющие колебаний с комбинационными частотами  $\nu_i$  пространственного варианта задачи деформируемая Земля-Луна в поле притяжения Солнца и частотами  $\dot{\mathfrak{S}}_j$ , обусловленными нерегулярными возмущениями.

Дифференциальные уравнения колебательного движения земного полюса на внутрисуточных интервалах времени могут быть получены из динамических уравнений Эйлера-Лиувилля пространственного варианта задачи «деформируемая Земля-Луна в поле притяжения Солнца» (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( [1 + \chi_A] p + \kappa_p r_0 \right) + N \frac{B}{A} (1 + \chi_B) q &= \kappa_q r^2 + M_p^{SL}, \\ \frac{d}{dt} \left( [1 + \chi_B] q + \kappa_q r_0 \right) - N \frac{A}{B} (1 + \chi_A) p &= -\kappa_p r^2 + M_q^{SL}, \\ N &= \sqrt{N_p N_q (1 + \chi_A)(1 + \chi_B)} \cong (0.84 \div 0.85) \omega_0, \\ A &= A^* + \delta A, \quad B = B^* + \delta B, \quad C = C^* + \delta C, \\ \chi_A &= \frac{\delta A}{A^*}, \quad \chi_B = \frac{\delta B}{B^*}, \quad \kappa_p = \frac{\delta J_{pr}}{A^*}, \quad \kappa_q = \frac{\delta J_{qr}}{B^*}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь малые вариации тензора инерции  $\delta J_{ij}$  ( $i, j = p, q, r$ ) содержат различные гармонические составляющие (зональные, тессеральные, секториальные), обусловленные возмущающим влиянием гравитационных приливов от Солнца и Луны и других факторов;  $\chi_A, \chi_B, \kappa_p, \kappa_q$  - приливные горбы и выступы соответственно;  $M_{p,q}^{SL}$  - зависящие от переменных Эйлера (углов нутации  $\theta$ ,

прецессии  $\psi$  и собственного вращения  $\varphi$ ) и средних движений Земли и Луны удельные моменты лунно-солнечных гравитационно-приливных сил.

Внутрисуточные вариации  $\delta J_{ij}^{(\varphi)}$ ,  $\delta J_{ij}^{(2\varphi)}$  содержат составляющие колебаний с комбинационными частотами  $\nu_i$  пространственного варианта задачи и частотами  $\dot{\vartheta}_j$ , обусловленными нерегулярными возмущениями. Например, суточные колебания приливных выступов  $\kappa_p, \kappa_q$  представимы следующим образом:

$$\kappa_p^{(\varphi)} = \sum_i A_i^{(\varphi)} \cos(\varphi + \alpha_i), \quad \kappa_q^{(\varphi)} = \sum_i B_i^{(\varphi)} \cos(\varphi + \beta_i) \quad (3.4)$$

где амплитуды  $A_i^{(\varphi)}$ ,  $B_i^{(\varphi)}$  подлежат определению из наблюдений; фазы  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  соответствуют компонентам приливообразующего геопотенциала и зависят от параметров движения приливообразующих тел и элементов их орбит и фаз  $\vartheta_j$ , постоянные слагаемые которых определяются из наблюдений. Следует отметить, что в отличие от случая регулярных колебаний приливного потенциала вязкоупругой планеты, когда  $\kappa_q^{(\varphi)} \approx \kappa_p^{(\varphi + \frac{\pi}{2})}$ , функции  $\kappa_p^{(\varphi)}$  и  $\kappa_q^{(\varphi)}$  принимаются существенно различными. Они могут содержать произвольного вида наблюдаемые компоненты, которые аппроксимируются гармоническими составляющими с частотами  $\dot{\vartheta}$ . Полусуточные составляющие приливных коэффициентов - горбов и выступов, имеют аналогичный выражениям (3.4) вид.

Выражения координат земного полюса  $x_p, y_p$  в результате решения системы (3.3) представим в виде суммы

$$x_p = \bar{x}_p + x_p^{(\varphi)} + x_p^{(2\varphi)}, \quad y_p = \bar{y}_p + y_p^{(\varphi)} + y_p^{(2\varphi)} \quad (3.5)$$

Где  $\bar{x}_p, \bar{y}_p$  - основная математическая модель колебаний земного полюса (2.7),

а  $x_p^{(\varphi)}, y_p^{(\varphi)}, x_p^{(2\varphi)}, y_p^{(2\varphi)}$  - суточные и полусуточные слагаемые модели его высокочастотных колебаний:

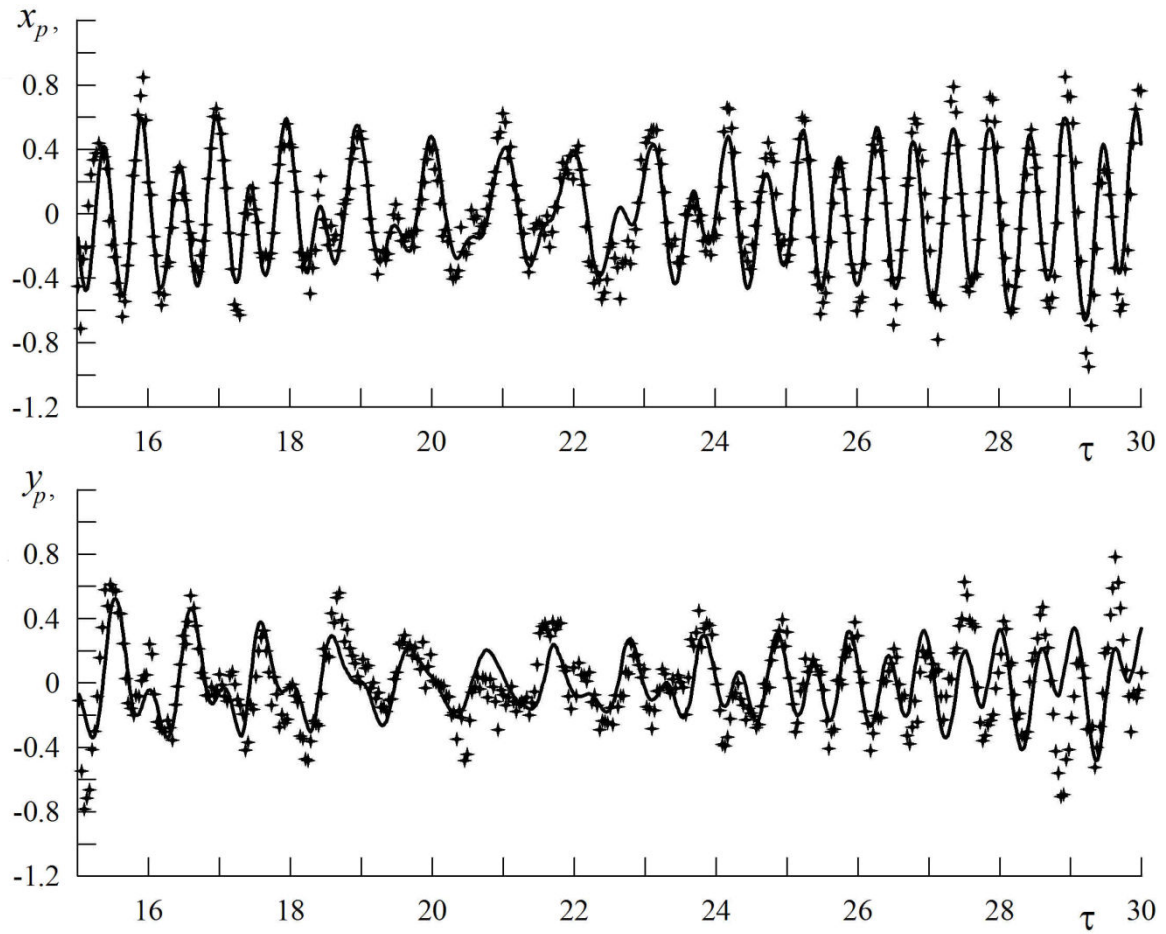
$$\begin{aligned} x_p^{(\varphi)} &= \sum_i a_i^{(\varphi)} \cos(\varphi + v_i + \alpha_i^{(\varphi)}) + \sum_j c_j^{(\varphi)} \cos(\varphi + \vartheta_j + \beta_j^{(\varphi)}), \\ y_p^{(\varphi)} &= \sum_i a_i^{(\varphi)} \sin(\varphi + v_i + \alpha_i^{(\varphi)}) + \sum_j c_j^{(\varphi)} \sin(\varphi + \vartheta_j + \beta_j^{(\varphi)}), \\ x_p^{(2\varphi)} &= \sum_i a_i^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + v_i + \alpha_i^{(2\varphi)}) + \sum_j c_j^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + \vartheta_j + \beta_j^{(2\varphi)}), \\ y_p^{(2\varphi)} &= \sum_i b_i^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + v_i + \gamma_i^{(2\varphi)}) + \sum_j d_j^{(2\varphi)} \cos(2\varphi + \vartheta_j + \delta_j^{(2\varphi)}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Исходя из оценок слагаемых модели (3.6), главным образом, коэффициенты  $k_p, k_q$  определяют положение мгновенной оси деформируемой фигуры Земли.

Между коэффициентами модели (3.6) имеет место структурное свойство, при котором будет выполняться равенство  $y_p^{(\varphi)} = x_p^{(\varphi+\pi/2)}$ , в том числе и для нестационарных флуктуаций геофизического происхождения с периодами близкими к суткам. Как следует из решения исходных уравнений (3.3) и данных наблюдений МСВЗ [65], возмущения, близкие к полусуточным с различными параметрами колебаний приводят к колебаниям в  $x_p^{(2\varphi)}, y_p^{(2\varphi)}$  с существенной разницей в сдвигах фаз для  $x_p$  и  $y_p$ .

Приведем результаты численного моделирования, выполненного на основе метода наименьших квадратов [9] в сравнении с высокоточными данными наблюдений и измерений МСВЗ [65] и РСДБ-наблюдений [64].

На рисунке 12 приводятся интерполяция внутрисуточных колебаний координат  $x_p, y_p$  земного полюса на интервале времени с 15.09.2011 по



**Рисунок 12** Интерполяция (15-27 сентября 2011 г.) и прогноз (27-29 сентября 2011 г.) координат земного полюса  $x_p, y_p$  в сравнении с данными РСДБ-наблюдений. Звёздочки – данные наблюдений, сплошная линия – теоретическая модель.

27.09.2011 и прогноз на 3 суток в сравнении с данными РСДБ-наблюдений. Здесь и далее координаты  $x_p, y_p$  измеряются в угловых миллисекундах, а время  $\tau$  - в сутках.

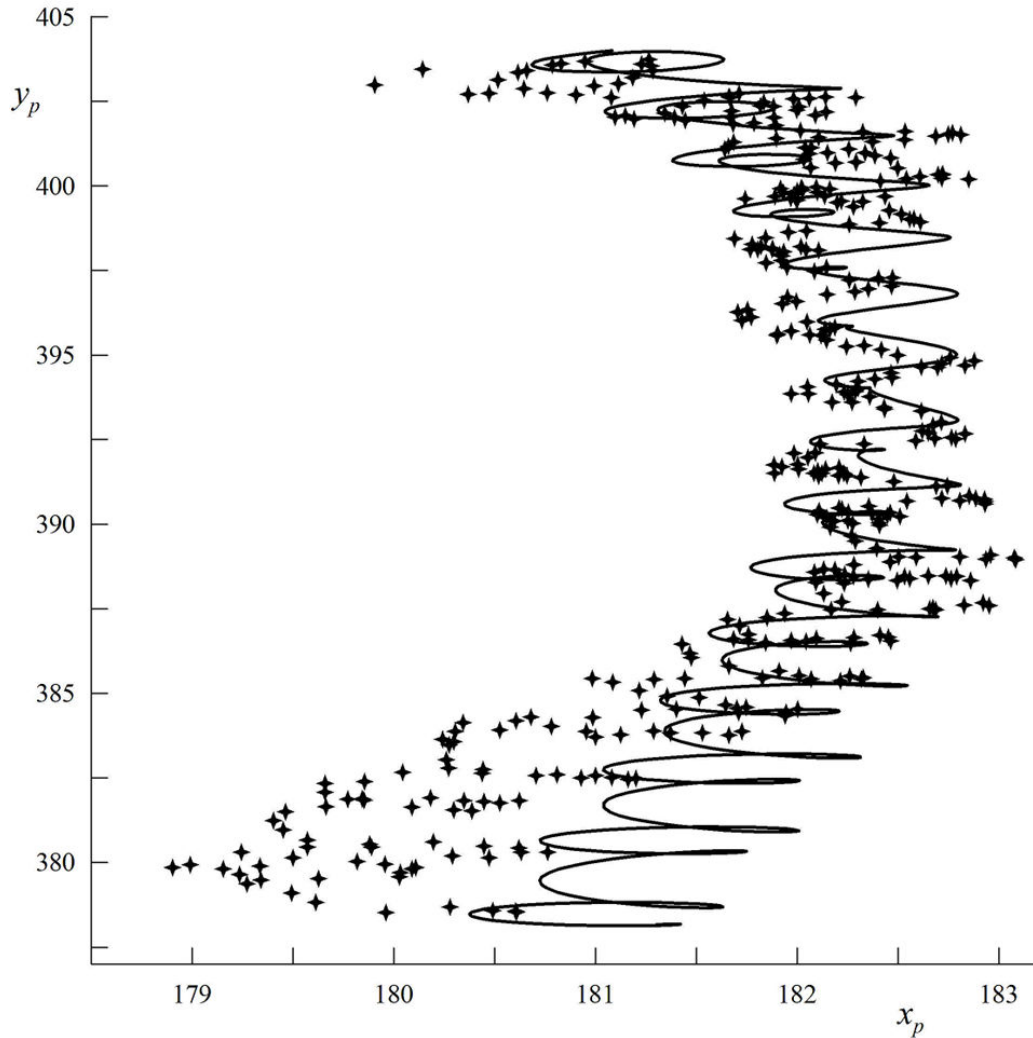
Моделирование результирующей траектории земного полюса проводится независимо для основной модели  $(\bar{x}_p, \bar{y}_p)$  и модели его внутрисуточных колебаний согласно (3.6). Построение основной траектории полюса выполняется с помощью метода взвешенных наименьших квадратов [9] на более длительном интервале интерполяции, примыкающем к прогнозируемому интервалу.

На рисунок 13 приводятся интерполяция (с 15.09.2011 по 27.09.2011) и прогноз (с 27.09.2011 по 29.09.2011) траектории земного полюса согласно разработанной модели (3.6) в сравнении с данными наблюдений и измерений [9].

Следует заметить, что из анализа результатов численного моделирования среднесуточного движения земного полюса на различных интервалах времени оценки точности прогноза основной модели лежат в пределах  $\sim 1,5 - 2$  см.

### **3.2. Амплитудно-частотный анализ внутрисуточных колебаний полюса Земли.**

Рассмотрим более подробно структуру возмущений в уравнениях движения мгновенного полюса вращения. Согласно уравнениям модели (3.3) к колебаниям мгновенной оси вращения Земли на суточных интервалах времени



**Рисунок 13** Интерполяция (15-27 сентября 2011 г.) и прогноз (27-29 сентября 2011 г.) координат земного полюса  $x_p, y_p$  в сравнении с данными РСДБ-наблюдений. Звёздочки – данные наблюдений, сплошная линия – теоретическая модель.

приводят как временные вариации тензора инерции Земли, так и Лунно-Солнечные гравитационно-приливные моменты сил. Последние же обуславливают малые либрации мгновенной оси вращения в связанной с Землей системе координат ITRS вследствие изменения моментов инерции Земли и нутационные колебания Земли в квазиинерциальной системе координат GCRS.

Для приложений имеет значение переход между системами координат инерциальной - ICRS и земной - ITRS. Вследствие того, что мгновенный полюс вращения Земли является неопределяемым с помощью доступных средств и методов наблюдений, имеется неопределенность в интерпретации данных наблюдений и измерений вращения Земли (или редукции РСДБ-наблюдений [8]). С помощью высокоточных астрометрических наблюдений определяется положение небесного промежуточного полюса (Celestial Intermediate Pole [65]) координаты которого в небесной системе описываются теорией прецессии и нутации Земли, а в земной системе - угловыми величинами  $(x_p, y_p)$  параметров вращения Земли [65]. Долгопериодические нутационные колебания небесного полюса (промежуточного полюса в инерциальной системе координат) в связанной с Землей вращающейся системе координат будут иметь обратное движение (по часовой стрелке, если смотреть сверху на северный полюс) с околосуточными периодами. В свою очередь всякое долгопериодическое колебание полюса  $(x_p, y_p)$  на поверхности Земли в небесной системе координат будет иметь околосуточный период и прямое движение (против часовой стрелки, если смотреть сверху на северный полюс). Таким образом, согласно положению Международного астрономического союза (МАС), наблюдаемые

колебания полюса в земной системе координат в околосуточной частотной области с отрицательными частотами от -1.5 до -0.5 циклов в сутки относят к нутации и рассматриваются в небесной геоцентрической системе координат GCRS (Geocentric Celestial Reference System [64]). Колебания промежуточного полюса в оставшемся диапазоне частот относят к промежуточному полюсу в связанной с Землей системе ITRS - называемому земным полюсом.

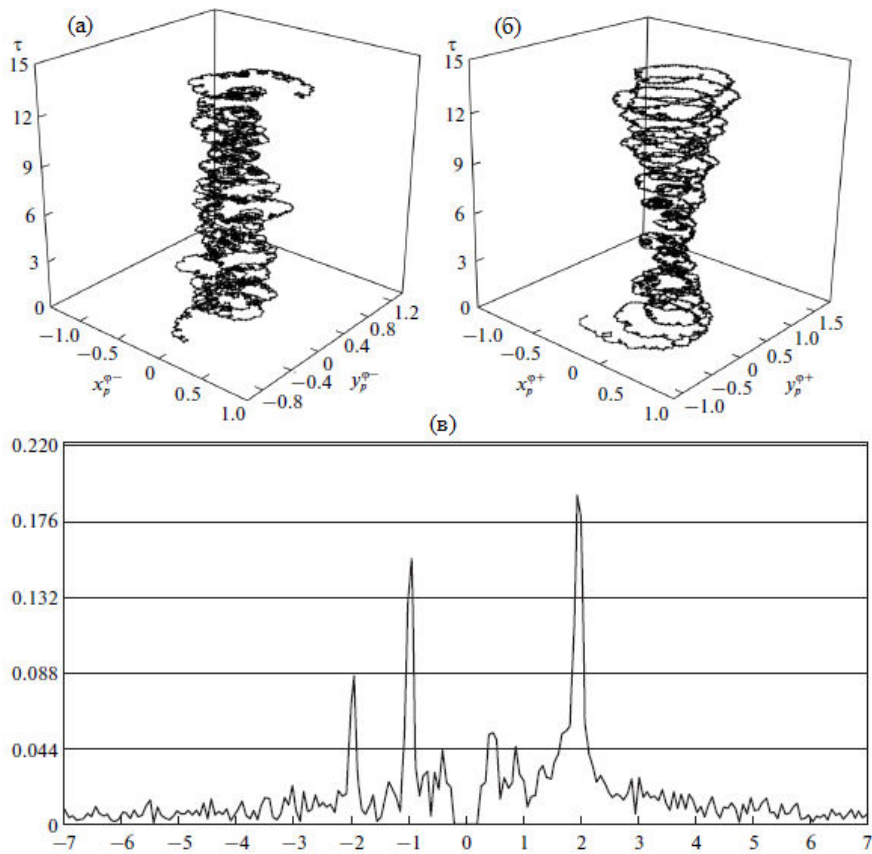
На рисунке 14,в приводится спектральная плотность быстрого преобразования Фурье двумерного ряда наблюдений  $(x_p, y_p)$  для интервала времени с 19.09.2011 по 28.09.2011. Из результатов наблюдений предварительно были исключены колебания с периодами более пяти суток. Данная фигура иллюстрирует положение о разделении колебаний промежуточного полюса. Внутрисуточные колебания земного полюса отдельно для отрицательной  $(x_p^-, y_p^-)$  и положительной  $(x_p^+, y_p^+)$  частотной областей показаны на рисунок 13,а и 13,б соответственно. Так как система координат  $(x_p, y_p)$  земного полюса выбрана левосторонней (ось  $x_p$  лежит в плоскости опорного меридиана [65], а  $y_p$  получена поворотом на  $90^\circ$  к западу), то частота прямого движения будет отрицательной, а обратного - положительной.

Для определения положения мгновенного полюса вращения используется преобразование [65]

$$x_\omega = a_1 \left( \tilde{x}_p - \frac{\dot{y}_p}{r_0 \cdot a_1} \right), \quad y_\omega = a_1 \left( \tilde{y}_p + \frac{\dot{x}_p}{r_0 \cdot a_1} \right), \quad (3.7)$$

Где  $a_1$  - амплитуда колебаний,  $\tilde{x}_p, \tilde{y}_p$  - нормированные по амплитуде





**Рисунок 14** Разложение траектории промежуточного полюса на вращение по (а) и (б) против часовой стрелки. (в) – амплитудно-частотный спектр наблюдений координат полюса Земли за период с 15 по 29 сентября 2011 г. без учёта колебаний с периодами более пяти суток.

координаты земного полюса. При исследовании долгопериодических колебаний

величины  $\left| \frac{\dot{y}_p}{r_0 \cdot a_1} \right|$  и  $\left| \frac{\dot{x}_p}{r_0 \cdot a_1} \right|$  много меньше 1, что позволяет принимать

$x_\omega \approx x_p, y_\omega \approx y_p$ . Однако для внутрисуточных колебаний эти величины

порядка 1, что делает необходимым выполнение преобразования (3.7).

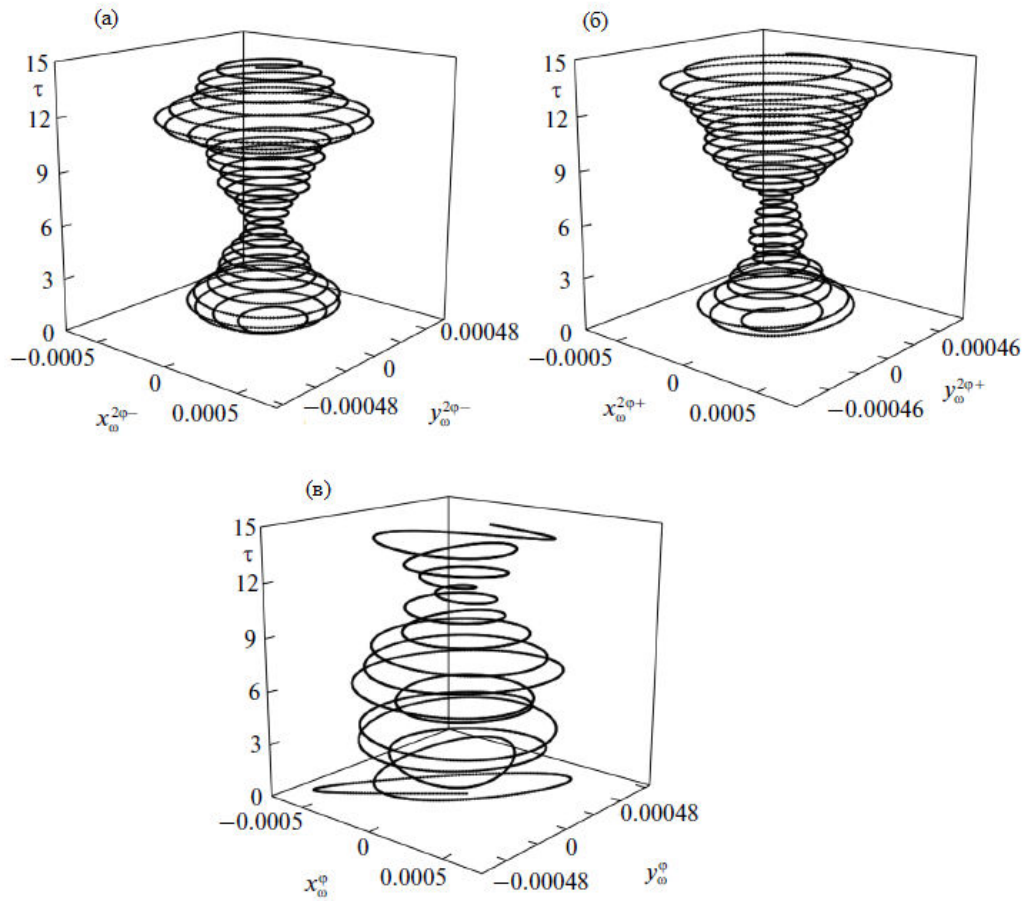
На рисунок 15 приведено разложение траектории мгновенного полюса на суточные  $(x_\omega^\varphi, y_\omega^\varphi)$ , полусуточные в прямом направлении  $(x_\omega^{2\varphi+}, y_\omega^{2\varphi+})$  и полусуточные в обратном направлении  $(x_\omega^{2\varphi-}, y_\omega^{2\varphi-})$  колебания для интервала времени с 19.09.2011 по 28.09.2011.

### **3.3. Приливные возмущения тензора инерции Земли в модели колебаний земного полюса.**

Рассмотренная выше модель колебательного движения мгновенного полюса в связанной с Землей системе координат допускает приближенное вычисление вариаций центробежных моментов инерции, приводящих к наблюдаемому его движению. Действительно, амплитуда внутрисуточных вариаций гравитационно-приливных моментов сил существенно меньше вариаций, обусловленных слагаемыми  $\delta J_{pr} r^2, \delta J_{qr} r^2$ , а отсутствие в уравнениях (3.3) кинетического момента атмосферы продиктовано относительно малой величиной его влияния по сравнению с указанными слагаемыми. Тогда уравнения для вычисления  $\delta J_{pr}, \delta J_{qr}$  примут вид:

$$\frac{d\kappa_p}{dt} + \kappa_q r_0 = f_x(x_\omega, y_\omega), \quad \frac{d\kappa_q}{dt} - \kappa_p r_0 = f_y(x_\omega, y_\omega), \quad (3.8)$$

где  $\kappa_p, \kappa_q$  - приливные выступы, связанные с  $J_{pr}, J_{qr}$ , а  $r_0$  - приближенно



**Рисунок 15** Разложение траектории мгновенного полюса на суточные (в), полусуточные в прямом (б) и обратном (а) направлении колебания для интервала времени 19.09.2011 по 28.09.2011.

средняя частота суточного вращения Земли. Возмущающие функции  $f_x, f_y$  вычисляются из наблюдений и модели (3.3):

$$f_x = -\dot{x}_\omega + Ny_\omega, \quad f_y = -\dot{y}_\omega - Nx_\omega \quad (3.9)$$

Однако для более точного подхода в правую часть уравнений (3.8) необходимо добавить слагаемые  $(-\dot{h}_1 r_0^{-1} + h_2, \dot{h}_2 r_0^{-1} + h_1)$ , характеризующие атмосферное влияние. Данные наблюдений метеорологической службы NCEP/NCAR компонент кинетического момента атмосферы  $h_1, h_2$  используются для выделения внутрисуточных колебаний. Относительно малая частота метеоданных (6-часовая скважность) не позволяет полностью учесть полусуточные приливные колебания. Например, частота значимого полусуточного прилива S2 (с периодом 0.5 суток) соответствует частоте Найквиста 6-часового набора данных наблюдений.

Выделяя внутрисуточные колебания, решение уравнений (3.8) для  $\kappa_p, \kappa_q$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \kappa_{p,q} &= C_{1t}^{p,q} \cos r_0 t + C_{2t}^{p,q} \sin r_0 t, \\ C_{1t}^p &= \int \sin r_0 t \left[ -\frac{d}{r_0 dt} (f_x - \bar{f}_x) + (f_y - \bar{f}_y) \right] dt + C_1, \\ C_{2t}^p &= \int \cos r_0 t \left[ -\frac{d}{r_0 dt} (f_x - \bar{f}_x) + (f_y - \bar{f}_y) \right] dt + C_2, \\ C_{1t}^q &= \int \sin r_0 t \left[ -\frac{d}{r_0 dt} (f_y - \bar{f}_y) - (f_x - \bar{f}_x) \right] dt + C_3, \\ C_{2t}^q &= \int \cos r_0 t \left[ -\frac{d}{r_0 dt} (f_y - \bar{f}_y) - (f_x - \bar{f}_x) \right] dt + C_4. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь  $\bar{f}_x, \bar{f}_y$  - интерполяция средних значений функций  $f_x, f_y$  за сутки.

Постоянные коэффициенты  $C_1, \dots, C_4$  - амплитуды суточных гармоник решения

однородных уравнений. Данные слагаемые в совокупности с произведениями долгопериодической части переменных коэффициентов  $C_{1t}^{p,q}$ ,  $C_{2t}^{p,q}$  и суточных гармоник, дающими обратное суточное вращение полюса инерции обусловлены твердотельными приливами выступов  $\kappa_p, \kappa_q$  упругой Земли и океаническими приливами, однако из наблюдений они не могут быть восстановлены. Действительно, из анализа системы уравнений (3.3) следует, что близсуточные твердотельные приливы упругой Земли и с соответствующими им фазами и частотами лунно-солнечные океанические приливы, описываемые ортогональными на отрезке  $[0, \pi]$  функциями, не оказывают существенного влияния на движение земного полюса. В частности влияние океанических приливов с близсуточными частотами и обратным движением (для полюса инерции в осях  $(p, q)$ ), но с различными амплитудами для  $\kappa_p$  и  $\kappa_q$ , либо с небольшим различием в сдвиге фаз одноименных гармоник, будут иметь место в решении (3.6). Однако их учет при вычислении  $\kappa_p, \kappa_q$  на основе данных наблюдений координат земного полюса невозможен, так как все колебания промежуточного полюса с отрицательными близсуточными частотами в земной системе координат по соглашению МАС относят к колебаниям небесного полюса (нутациям Земли) - рисунок 14, в - 15. Полностью восстановленные близсуточные вариации приливных коэффициентов  $\kappa_p$  и  $\kappa_q$  можно получить при использовании модели твердотельных приливов упругой Земли [65].

Как следует из системы уравнений (3.3) близсуточные колебания полюса инерции произвольного вида приводят к ортогональным близсуточным

колебаниям мгновенного полюса (в пределах доступной точности измерений).

В частности из (3.8) для произвольных стационарных близсуточных вариаций, вызванных тессеральными океаническими суточными приливами следует ортогональность суточных колебаний  $x_\omega, y_\omega$ .

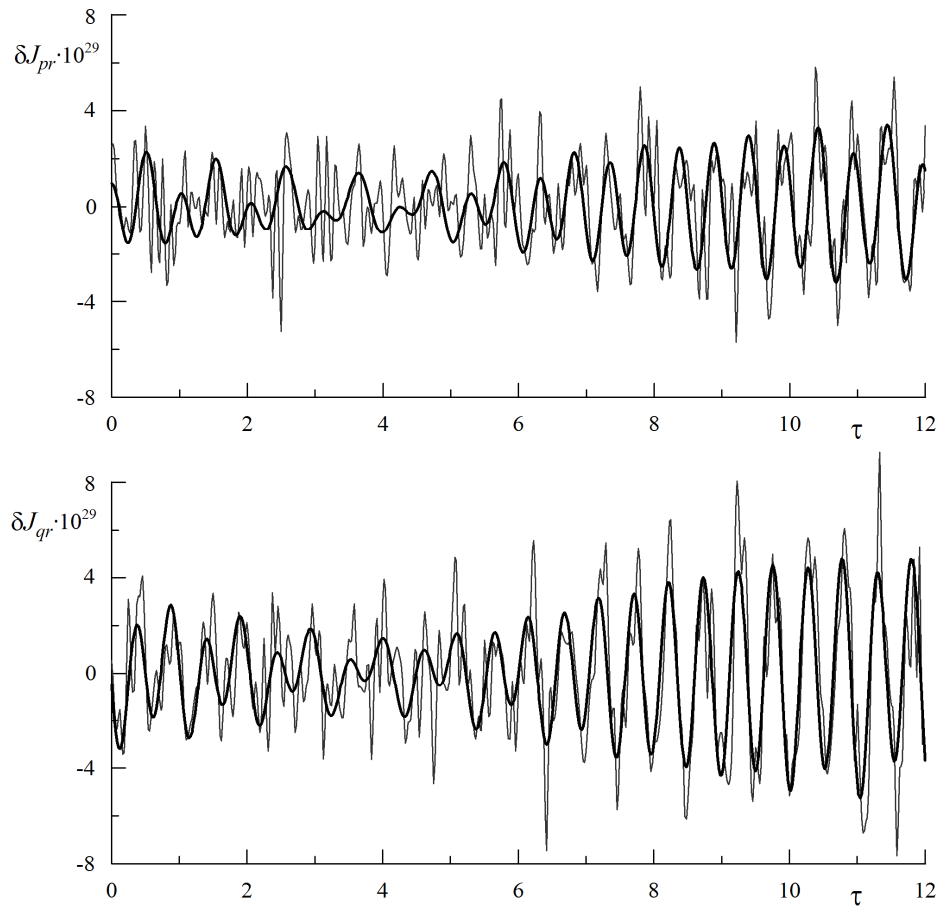
Используя выражения (3.10) при известных данных наблюдений координат земного полюса (с 19.09.2011 по 28.09.2011), получаются внутрисуточные вариации центробежных моментов инерции  $\delta J_{pr}, \delta J_{qr}$ . Эти колебания, приводящие к наблюдаемому процессу движения земного полюса, представлены на рисунке 16 и измеряются в  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ . Стоит отметить, что моменты инерции статического гравитационного поля Земли по модели GEM-9 имеют следующие значения:  $J_{pr} = -6.5879 \cdot 10^{29}, J_{qr} = -4.3852 \cdot 10^{33}$ .

Окончательно, найдем суточные перемещения полюса инерции на поверхности Земли  $(\xi, \eta)$ , влияющие на движение земного полюса  $(x_p, y_p)$ . Для этого по методу Лагранжа условных экстремумов [78] найдем перемещение главной оси инерции, соответствующие найденным вариациям  $\delta J_{pr}, \delta J_{qr}$ . Составляя функцию Лагранжа

$$F = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta - 2\delta J_{qr}\eta\zeta - 2\delta J_{pr}\zeta\xi - 2\delta J_{pq}\xi\eta + \lambda(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1), \quad (3.11)$$

система уравнений для определения главных направлений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= (A - \lambda)\xi - \delta J_{pq}\eta - \delta J_{pr}\zeta = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= -\delta J_{pq}\xi + (B - \lambda)\eta - \delta J_{qr}\zeta = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta} &= -\delta J_{pr}\xi - \delta J_{qr}\eta + (C - \lambda)\zeta = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$



**Рисунок 16** Внутрисуточные колебания центробежных моментов инерции Земли  $\delta J_{pr}, \delta J_{qr}$ , полученные в ходе моделирования (тонкая линия), в сравнении с колебаниями согласно модели, рекомендованной МСВЗ (контрастная линия), на интервале с 18 по 29 сентября 2011 г.

Тогда перемещение полюса инерции в первом приближении будет иметь вид

$$\xi = \frac{\delta J_{pr}}{(A-C)}, \quad \eta = \frac{\delta J_{qr}}{(B-C)}. \quad (3.13)$$

На рисунок 17 приводятся внутрисуточные колебания полюса инерции на поверхности Земли, измеряемые в метрах для интервала времени с 22.09.2011 по 27.09.2011. Для иллюстрации колебания разделены на суточные в прямом направлении  $(\xi^{\varphi^+}, \eta^{\varphi^+})$  и главным образом полусуточные в прямом  $(\xi^{2\varphi^+}, \eta^{2\varphi^+})$  и в обратном  $(\xi^{2\varphi^-}, \eta^{2\varphi^-})$  направлениях.

### **3.4. Неравномерности осевого вращения Земли и атомная шкала времени**

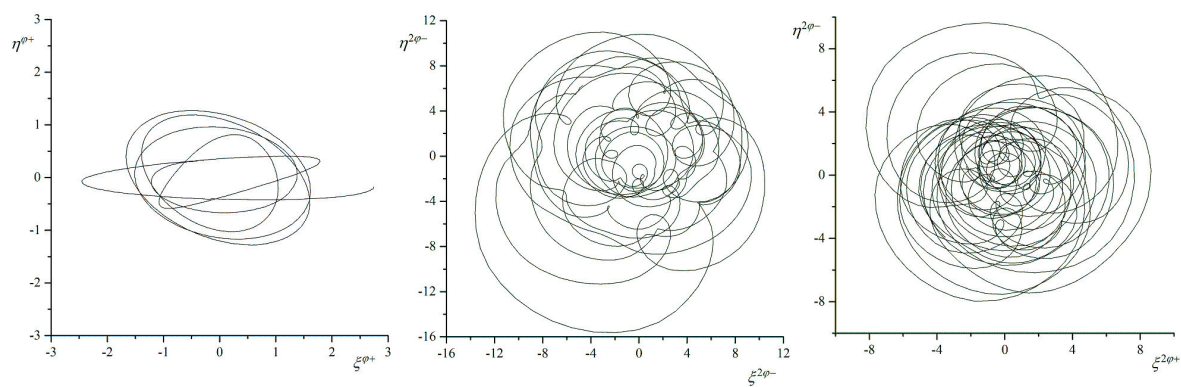
В настоящее время построена единая высокоточная, независимая от суточного и орбитального движения Земли, равномерная физическая шкала атомного времени (TAI). Её создание позволяет существенно более точно, чем ранее, изучать неравномерности осевого вращения Земли.

Согласно [27, 33, 39, 50] с начала XX века атомное время TAI «протекает быстрее» по сравнению с Всемирным временем UT1, связанным с вращением Земли. Поэтому UT1 выражается через математическое соотношение, удовлетворяющее следующему условию: производная UT1 по «времени» должна быть пропорциональна модулю изменяющегося вектора угловой скорости вращения  $\omega(t)$ , т.е.

$$\frac{d(UT1)}{dt} = \frac{\omega(t)}{r_0}, \quad \omega = (p, q, r)^T \quad (3.14)$$

Для Земли осевая компонента  $r$  является доминирующей величиной на 6 порядков превышающей величины  $p$  и  $q$ . В научной литературе принята за





**Рисунок 17.** Внутрисуточные колебания полюса инерции на поверхности Земли с 22 по 27 сентября 2011г.

единицу времени величина стандартных суток, состоящих из 86400 секунд *UTC* (СИ). Время  $t$  понимается здесь как «абсолютное» и измеряется международным атомным временем UTC с достаточно малой погрешностью [43, 49, 50, 59].

Константа пропорциональности, подразумеваемая в (3.14), и начальная фаза (при  $t = t_0$ ) должны быть выбраны так, чтобы на больших интервалах времени (например, тысячелетие) Солнце проходило через начальный меридиан (Гринвичский меридиан) в среднем в 12 часов UT1.

В интегральной форме (3.14) с учётом того, что значения UT1 публикуются в виде поправок к UTC и являются функциями даты, UTC имеет вид [43]:

$$[UT1 - TAI](t) = [UT1 - TAI](t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\delta r(t)}{r_0} dt, \quad (3.15)$$

где выражение  $\delta r(t) = r(t) - r_0$ ;  $r_0$  – постоянная («средняя») угловая скорость собственного вращения  $r_0 = 7.292115 \times 10^{-5}$  рад/с, которая соответствует указанной длительности стандартных суток.

Далее вводится величина  $D(t)$ , которая называется длительностью суток [43]:

$$D(t) = \frac{r_0}{r(t)} \times 86400 \text{ с.} \quad (3.16)$$

Для изучения вариаций вращения Земли вводится изменение (вариация) длительности суток –  $l.o.d.(t)$  (length of the day changes) [43, 54, 59]:

$$l.o.d.(t) = D(t) - 86400 \quad (3.17)$$

Величина  $r(t)$  может быть выведена из публикуемых значений  $l.o.d.(t)$  и

имеет вид:

$$r(t) = \left[ 1 + \frac{d(UT1 - TAI)}{d(TAI)} \right] r_0 \cong \left[ 1 - \frac{l.o.d.(t)}{86400c} \right] r_0 \quad (3.18)$$

В последние 15-20 лет с высокой точностью измеряются приливные колебания скорости вращения деформируемой Земли. Известно [49, 54, 59], что в приливных изменениях скорости вращения Земли на относительно коротких интервалах времени выделяются составляющие с различными периодами - год, полгода, 13.7, 27.3 и, возможно, 9.1, 5.6 суток. Они определяются посредством учёта гравитационно-приливных моментов с помощью оптимальной интерполяции процесса на относительно коротких интервалах времени (несколько лет). Период 18.61 лет лунно-солнечной нутации (движение узлов лунной орбиты) Земли является главным из долгопериодических зональных приливов, который может формировать трендовую составляющую во временной эволюции моделирования неравномерности осевого вращения Земли.

Третье уравнение системы (2.1) для компоненты осевого вращения Земли  $r(t)$  имеет вид:

$$C^* \dot{r} + (B^* - A^*) pq + (J_{qr} p - J_{pr} q) r = M_r^S + M_r^L \quad (3.19)$$

Здесь  $J_{pr}, J_{qr}$  – малые внедиагональные элементы тензора инерции,  $M_r^{S,L}$  – компонента гравитационно-приливных возмущающих моментов от Солнца и Луны соответственно. Например, выражение  $M_r^S$  имеет следующую структуру [16-17]:

$$M_r^S = 3\omega_0^2 \left[ (B^* + \delta B - (A^* + \delta A)) \gamma_p \gamma_q + \delta J_{pq} (\gamma_p^2 - \gamma_q^2) + \delta J_{qr} \gamma_p \gamma_r - \delta J_{pr} \gamma_q \gamma_r \right] \quad (3.20)$$

$$\gamma_p = \sin\theta \sin\varphi, \gamma_q = \sin\theta \cos\varphi, \gamma_r = \cos\theta$$

Здесь  $\omega_0$  – частота орбитального движения;  $\gamma_p, \gamma_q, \gamma_r$  – направляющие косинусы радиус–вектора в связанной системе;  $\psi, \theta, \varphi$  – углы Эйлера

Интегрируя уравнение (3.19) после его усреднения по быстрой переменной  $\varphi(t)$ , получим структуру флуктуаций длительности суток:

$$\begin{aligned} l.o.d.(\tau) = & c(\tau) + a_c^s \cos(2\pi\tau) + a_s^s \sin(2\pi\tau) + \\ & + b_c^s \cos(4\pi\tau) + b_s^s \sin(4\pi\tau) + a_c^L \cos(2\pi\nu_m\tau) + \\ & + a_s^L \sin(2\pi\nu_m\tau) + b_c^L \cos(2\pi\nu_f\tau) + b_s^L \sin(2\pi\nu_f\tau). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь  $\nu_m = 13.28, \nu_f = 26.68$  – частоты месячного и двухнедельного колебаний, обусловленных лунным возмущением; неизвестные  $c, a_{C,S}^{S,L}, b_{C,S}^{S,L}$  – величины, подлежащие вычислению с помощью метода наименьших квадратов по измерениям МСВЗ.

Для внутригодовых интервалов из (3.21) запишем выражение для разности  $UT1-UTC$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{365.25} [UT1 - UTC](\tau) = & - \int l.o.d.(\tau) d\tau \\ = & \text{const} - c\tau - (2\pi)^{-1} (a_s^s \sin(2\pi\tau) - a_c^s \cos(2\pi\tau)) \\ & - (4\pi)^{-1} (b_s^s \sin(4\pi\tau) - b_c^s \cos(4\pi\tau)) \\ & - (2\pi\nu_m)^{-1} (a_s^L \sin(2\pi\nu_m\tau) - a_c^L \cos(2\pi\nu_m\tau)) \\ & - (2\pi\nu_f)^{-1} (b_s^L \sin(2\pi\nu_f\tau) - b_c^L \cos(2\pi\nu_f\tau)). \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.5. Моделирование неравномерности осевого вращения Земли на коротком интервале времени

В пространственном варианте ограниченной задачи трех тел Земля–Луна–Солнце уравнение возмущенного движения узла лунной орбиты  $\Omega_M$  и наклонение  $I$  плоскости лунной орбиты к эклиптике имеют вид:

$$\frac{d\Omega_M}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n_S^2}{n_M} \left[ 1 - \cos 2(l_M - \Omega_M) - \cos 2(l_S - \Omega_M) + \cos 2\lambda \right], \quad (3.23)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{3}{4} \frac{n_S^2}{n_M} \sin I \left[ \sin 2(l_S - \Omega_M) - \sin 2(l_M - \Omega_M) + \sin 2\lambda \right].$$

Здесь  $n_M, n_S$  – сидерические средние движения Луны и Солнца соответственно; периодические колебания угла  $I$  совершаются с периодом 18.61 года;  $l_M$  – средняя долгота Луны;  $a_M$  – большая полуось орбиты Луны;  $(l_M - \Omega_M)$  – угол между Луной и восходящим узлом лунной орбиты;  $\lambda = (n_M - n_S)t + \lambda_0$  – приближенно разность долгот Луны и Солнца (не является линейной функцией времени, поскольку среднее движение  $n_M$  подвергается, по крайней мере, периодическим изменениям) [1, 24, 25, 44].

Для ситуации, отвечающей квазипериодическому лунному воздействию, динамический анализ неравномерности вращения Земли позволяет установить более сложные мелкомасштабные свойства этого движения, которые содержатся в данных измерений. Прецессионное движение и малые вариации наклонения плоскости лунной орбиты, соответствующие (3.23), приводят к дополнительным гравитационно-приливным воздействиям, которые вызывают изменения продолжительности суток.

Из спектрального анализа обработанных рядов наблюдений вариаций

длительности суток (рисунок 18) следует наличие стабильной высокочастотной гармонике с аргументом  $(2\lambda + M)$  и периодом 9.56 суток, где  $M$  - средняя аномалия Луны, на которую влияют изменения средней долготы и смещения перигея. Периодическое лунное неравенство  $(2\lambda - M)$  представляет собой эвекцию, период которой соответствует 31.81 суток.

Небесномеханическая модель приливных регулярных изменений скорости осевого вращения Земли описывается линейной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\left[(C^* + \delta C)l.o.d.(\varphi, t)\right]}{dt} = -\frac{D_0}{r_0} \left[ M_r^S + M_r^L + \Delta M(\dot{\Omega}, \dot{I}) \right],$$

$$\frac{d[UT1 - TAI](\varphi, t)}{dt} = -D_0^{-1} l.o.d.(\varphi, t), \quad (3.24)$$

$$D_0 = 86400c.$$

Здесь  $C^*$  – осевой момент инерции с учетом деформаций «замороженной» фигуры Земли;  $\varphi$  – угол собственного вращения;  $M_r^{S,L}$  – лунно-солнечные гравитационно-приливные моменты сил с основными частотами;  $\Delta M^{S,L}(\dot{\Omega}, \dot{I})$  – слагаемые более высокой степени малости в разложении лунно-солнечного гравитационно-приливного момента пространственного варианта данной задачи.

Обозначая  $\mu(t) = r_0^{-1} \left[ M_r^S + M_r^L + \Delta M^{SL}(\dot{\Omega}, \dot{I}) \right]$ , выражения изменения длительности суток и временной поправки будут иметь вид:

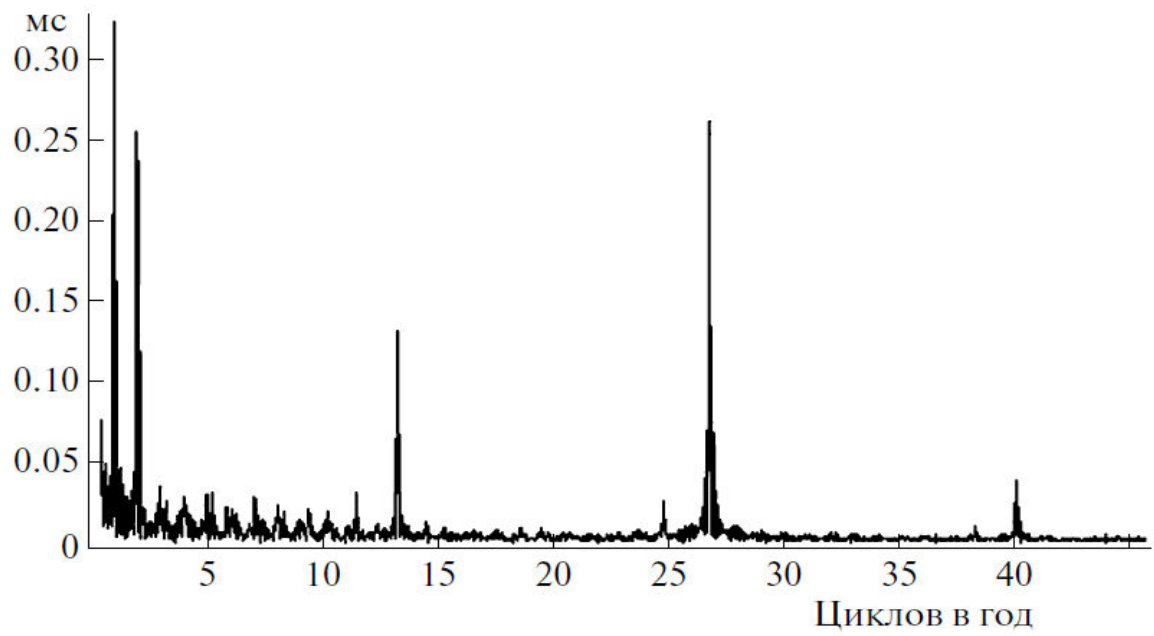


Рисунок 18. Спектральная плотность мощности ряда наблюдений *l.o.d.*

$$\begin{aligned}
 [UT1 - TAI](t) &= [UT1 - TAI](0) - D_0^{-1} l.o.d.(0)t + \int_0^t (t - t_1) \langle \mu(t_1) \rangle_\varphi dt_1, \\
 l.o.d.(t) &= l.o.d.(0) - D_0 \int_0^t \langle \mu(t_1) \rangle_\varphi dt_1
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

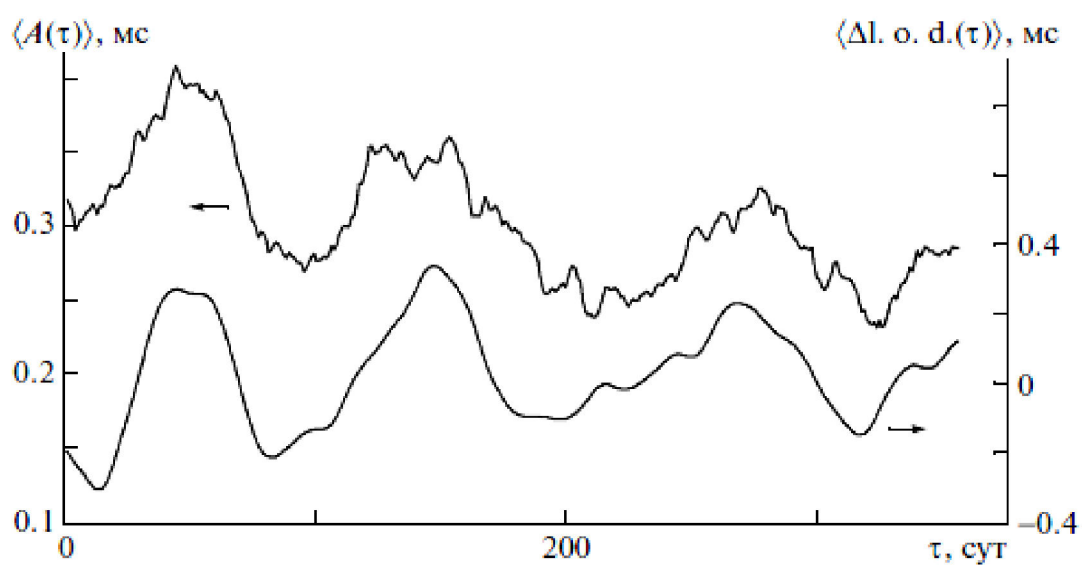
Здесь  $\langle \dots \rangle_\varphi$  – символ осреднения на суточном интервале времени.

Рассмотрим возможность прогнозирования квазипериодических колебаний длительности суток в среднем диапазоне частот, учет которых является статистически значимым и может быть оправдан на интервалах, близких к периодам среднечастотных компонент.

На рисунке 18 приводится спектральная плотность мощности усреднённого, многолетнего ряда наблюдений вариаций длительности суток *l.o.d.* Представим приливные коэффициенты лунно-солнечных гравитационно-приливных моментов сил (амплитуд и фаз основных колебаний) в виде квазипериодических функций по времени. Необходимое для такого представления соответствие коэффициентов внутригодовых и внутрисуточных квазипериодических колебаний (наличия структурных свойств моделей) наглядно иллюстрируется на рисунке 19 и получается из обработки наблюдений МСВЗ.

На нем приводится сравнение нестационарных усредненных внутригодовых и амплитудных модуляций внутрисуточных колебаний длительности суток  $l.o.d.(\tau)$  соответственно. В этом случае “нерегулярные” колебания во вращательном движении Земли аппроксимируются квазипериодическим процессом, производная которого имеет структуру гравитационно-приливного момента с периодическими коэффициентами.





**Рисунок. 19** Усредненные амплитудные модуляции нестационарных внутрисуточных флуктуаций  $\langle A(\tau) \rangle_\phi$  и усредненные квазипериодические внутригодовые колебания  $\langle \Delta l. o. d.(\tau) \rangle$  (усредненный резидиум на 40-суточном интервале времени) в течение лунного года в 2008 г.

Тогда выражение  $l.o.d.(t)$  может быть представлено в следующем общем виде:

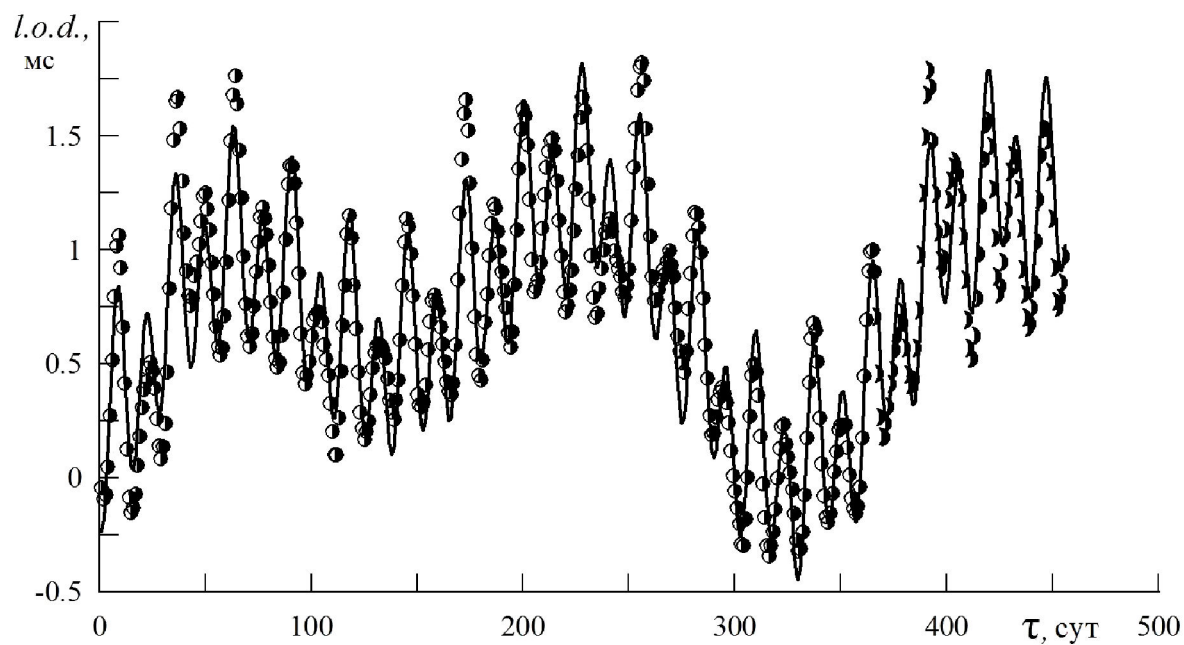
$$l.o.d.(t) = l.o.d.(0) - D_0 \int_0^t \langle \mu(t_1) \rangle_{\phi} dt_1 + \overline{\Delta l.o.d.}(t), \quad (3.26)$$

где  $\overline{\Delta l.o.d.}$  – усреднённый на 10-ти суточном интервале времени резидиум ряда наблюдений вариаций длительности суток – сумма гармоник с постоянными коэффициентами и модифицированным набором частот  $\vartheta_j$  вариаций тензора инерции деформированной Земли. На рисунке 20 приводятся интерполяция изменения длительности суток  $l.o.d.$ , выполненная с помощью построенной модели на интервале времени с 01.09.2010 г. по 01.09.2011 г., в сравнении с данными наблюдений и прогноз до 01.01.2012 г. На рисунке 21 приводятся интерполяция и прогноз временной поправки  $UT1 - UTC$  на тех же интервалах. Следует отметить, что поправка  $UT1 - UTC$  отличается от  $UT1 - UTC$ , входящей в выражение (3.25), на целое число секунд. Вынужденная процедура введения "скачущих" секунд осуществляется МСВЗ, и частота их определяется межгодовой неравномерностью осевого вращения Земли.

### 3.6. Внутрисуточные вариации осевого вращения Земли.

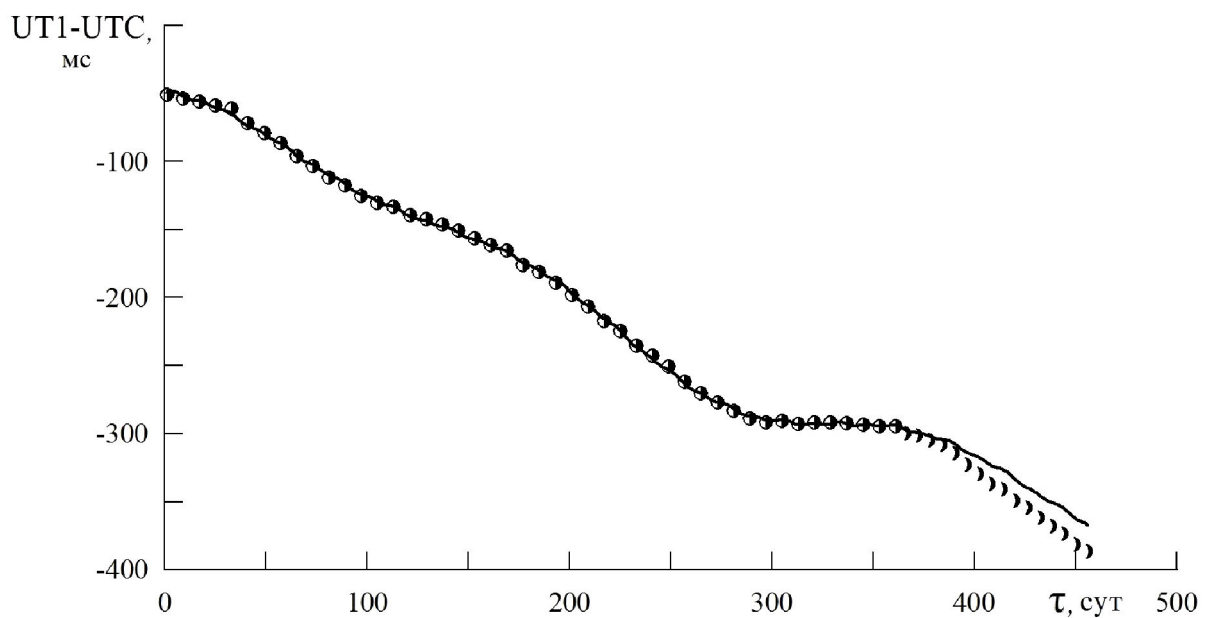
Для уточнения внутригодовой модели неравномерности вращения Земли наряду с дополнительным слагаемым в разложении лунно-солнечного гравитационно-приливного момента учитываются поправки на возмущения зональных приливов с малыми амплитудами. Для этого вводится резидиум  $\Delta d(t)$  - флуктуации изменения длительности суток  $l.o.d.(t)$ , вызванные приливными возмущениями тензора инерции деформируемой Земли.

Для записи выражений модели параметров вращательного движения



**Рисунок 20** Интерполяция изменения длительности суток *l.o.d.* в сравнении с данными наблюдений (01.09.2010 г. – 01.09.2011 г.) и прогноз до 01.01.2012 г. Сплошная линия – теоретическая модель.

Дискретные данные (точки и полумесяцы) – результаты наблюдений МСВЗ в сравнении с интерполяцией и прогнозом соответственно.



**Рисунок. 21** Интерполяция временной поправки  $UT1 - UTC$  в сравнении с данными наблюдений (01.09.2010 г. – 01.09.2011г.) и прогноз до 01.01.2012 г. Дискретные данные (точки и полумесяцы) – результаты наблюдений МСВЗ в сравнении с интерполяцией и прогнозом соответственно.

Земли на внутрисуточном интервале времени рассматривается неусреднённая по собственному вращению линейная система дифференциальных уравнений (3.24).

Выражения гравитационно-приливных моментов в результате вычислений и преобразований имеют гармоническую структуру. После интегрирования уравнений (3.24) выражение для вариации длительности суток  $l.o.d.(\varphi, \tau)$  представляется как совокупность построенной ранее основной модели  $d(\tau)$ , поправки на возмущения зональных короткопериодических приливов  $\Delta d(\tau)$  (резидиум) и модели суточных флуктуаций  $\Delta_{\varphi} l.o.d.(\tau)$  вращения Земли [47-48]

$$l.o.d.(\varphi, \tau) = d(\tau) + \Delta d(\tau) + \Delta_{\varphi} l.o.d.(\tau),$$

$$d(\tau) = a_0 + \sum_{i=1}^6 a_{i0} \sin(2\pi v_i \tau + \alpha_i), \quad (3.27)$$

$$\Delta d(\tau) = \Delta_1 d(\tau) + \Delta_2 d(\tau) = -\chi_3 \left[ a_0 + \sum_{i=1}^4 a_{i0} \sin(2\pi v_i \tau + \alpha_i) \right] +$$

$$+ \frac{1}{(1 + \chi_3)} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^N \int a_{ij}(\tau) \cos(2\pi \vartheta_j \tau + \beta_{ij}) \times \cos(2\pi v_i \tau + \alpha_i) d\tau.$$

$$\Delta_{\varphi} l.o.d.(\tau) = \Delta_{\varphi}^S l.o.d.(\tau) + \Delta_{\varphi}^L l.o.d.(\tau).$$

Здесь  $\tau$  – время, измеряемое в годах;  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 13.28$ ,  $v_4 = 26.68$ ,  $v_5 = 3$ ,  $v_6 = 40$  – частоты, обусловленные лунно-солнечным возмущением;  $\vartheta_j$  – частоты лунно-солнечных приливных воздействий и других факторов, определяющих колебания вариаций тензора инерции (подразумевается, что набор частот  $\vartheta_j$

может быть эмпирически скорректирован в ходе численного моделирования);  $\chi_3$  - приливной коэффициент, являющийся периодической функцией с частотами  $\vartheta_j$ ;  $\alpha_i$  - фазы соответствующих колебаний;  $a_{ij}(\tau)$  - неизвестные величины, подлежащие определению по измерениям МСВЗ. Слагаемое  $\Delta_\varphi^S l.o.d.(\tau)$  в (3.27), обусловленное суточным вращением Земли, имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_\varphi^S l.o.d.(\tau) = & \int \{ [k_1 \sin(2\varphi + \beta_{2\varphi}) + k_2 \sin(\varphi - \beta_\varphi)] \sin\theta + \\ & + [k_3 \sin(\varphi + \gamma_\varphi^1) + k_4 \sin(\varphi + \gamma_\varphi^2) + k_5 \sin(2\varphi + \gamma_\varphi)] \cos\theta \} \sin\theta d\tau, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где  $\theta$  – угол нутации; амплитуды и фазы гармонических составляющих подынтегрального выражения – коэффициенты, однозначно связанные с неизвестными, содержащимися в (3.24).

На внутригодовых интервалах выражение для разности всемирного времени и атомного времени  $UT1 - TAI$  получается из (3.27), и оно содержит составляющие с периодами от года до внутрисуточных периодов:

$$\begin{aligned} (UT1 - TAI)(\varphi, \tau) &= -365.25 \int l.o.d.(\tau) d\tau = \\ &= (UT1 - TAI)(\tau) + \Delta UT1(\tau) + \Delta_\varphi UT1(\tau), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{365.25} (UT1 - TAI)(\tau) = const - a_0 \tau + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{a_{i0}}{v_i} \right) \cos(2\pi v_i \tau + \alpha_i),$$

$$\Delta UT1(\tau) = -365.25 \int \Delta d(\tau) d\tau,$$

$$\Delta_\varphi UT1(\tau) = -365.25 \int \Delta_\varphi d(\tau) d\tau.$$

Интегрируя (3.24), придем к окончательному выражению для модели внутрисуточных вариаций вращения Земли

$$\Delta_{\varphi} l.o.d.(\tau) = \sum_{i=1}^2 \left[ a_i + \sum_{j=3}^4 b_{ij} \sin \left( 2\pi v_j \frac{\tau}{365.25} + \alpha_j \right) \right] \times \\ \times \sin \left( 2\pi v_j \frac{\tau}{365.25} + \alpha_j \right) \sum_{k=1}^2 [c_{1k} \sin(2k\pi\tau) + c_{2k} \cos(2k\pi\tau)], \quad (3.30)$$

$$\Delta_{\varphi} UT1(\tau) = - \int \Delta_{\varphi} d(\tau) d\tau.$$

Здесь величины  $a_i$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{1k}$ ,  $c_{2k}$ ,  $\alpha$  - неизвестные амплитуды и фазы соответствующих колебаний, подлежащие определению на основе данных наблюдений;  $\tau$  - время, измеряемое сутками.

При прогнозировании на короткие интервалы времени (от одних до десяти суток) коэффициенты модели считаются медленными функциями времени и рассматриваются как квазипостоянные, для которых требуется регулярная корректировка на интервале интерполяции. Применяемая настройка модели позволяет обойтись без учета дополнительных долгопериодических возмущающих факторов, однако, как следует из результатов численного моделирования, не устраняет ошибки в амплитудных модуляциях и фазовом сдвиге высокочастотных колебаний прогноза на более длительные интервалы времени.

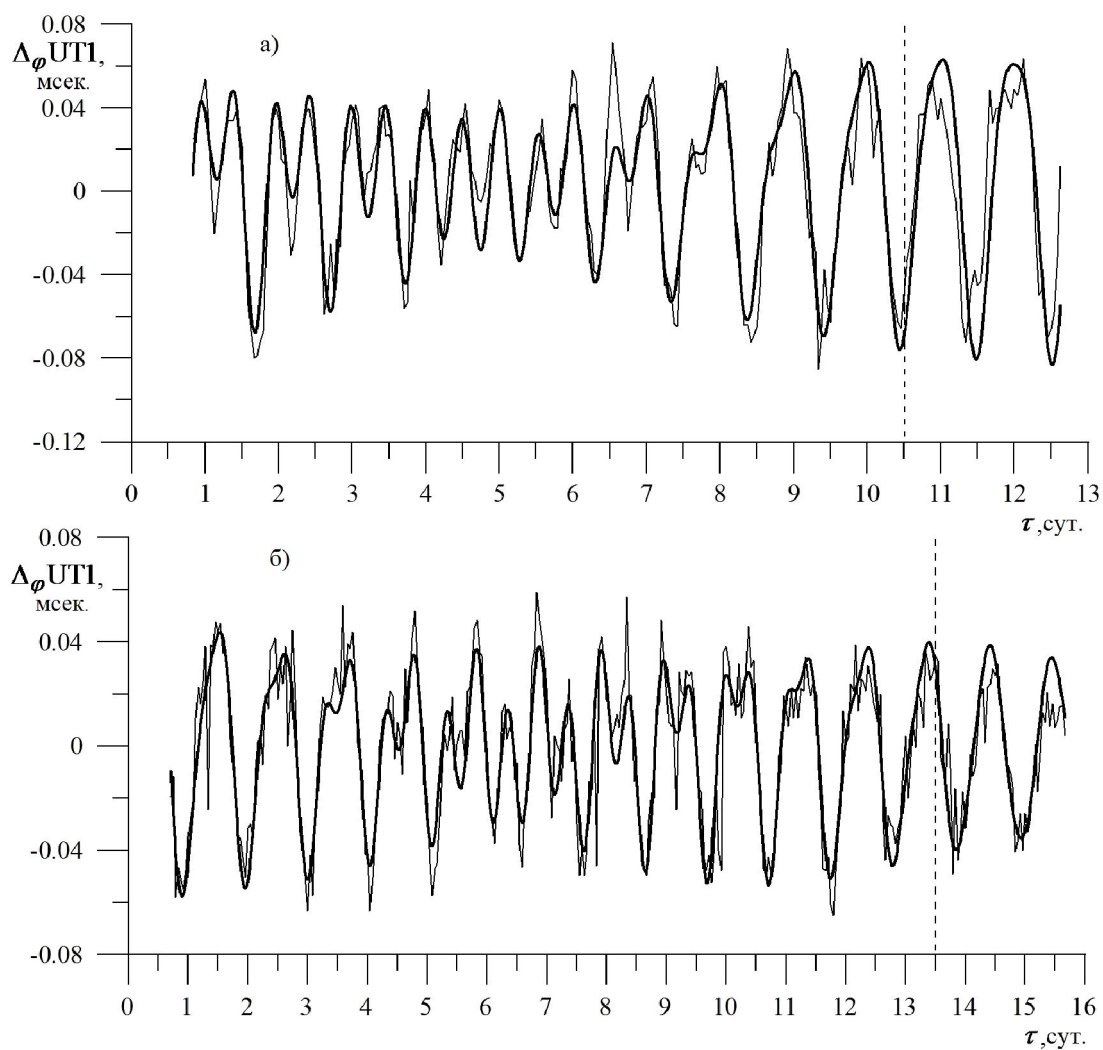
Приведем графические результаты численного моделирования суточной приливной неравномерности осевого вращения Земли, согласно модели (3.30), в сравнении с высокоточными данными наблюдений и измерений GPS/VLBI [63, 64].

Численные расчеты проводились на основе использования базового набора опорных функций модели (3.30) с основными частотами лунно-

солнечных возмущений, наблюдаемых МСВЗ [65]. Следует отметить, что учет дополнительных слагаемых модели может привести к уменьшению точности краткосрочного прогноза вследствие возросшего числа неизвестных коэффициентов и наличия опорных функций с близкими частотами, а также потребует увеличения длины интервала интерполяции.

На рисунок 22а, б, согласно (3.30), приводятся 10-сут и 13-сут интерполяции внутрисуточных вариаций всемирного времени  $\Delta_{\varphi} UT1$  и даются прогнозы на 2 сут на интервалах в 1994, 2005 гг. соответственно, в сравнении со сглаженными часовыми данными наблюдений и измерений VLBI [58] (из данных наблюдений были удалены составляющие с периодами, большими близосуточных, ввиду малых амплитуд суточных вариаций вращения Земли). Сравнение теоретически полученных кривых с данными измерений показывает наличие флуктуаций различного характера.





**Рисунок 22** (а) Интерполяция внутрисуточных вариаций  $\Delta_{\varphi} UT1$  на интервале времени с 13.01.1994 по 22.01.1994 и прогноз на 2 суток (контрастная линия) в сравнении с данными наблюдений и измерений VLBI (обычная линия). (б) Интерполяция внутрисуточных вариаций  $\Delta_{\varphi} UT1$  на интервале времени с 12.09.2005 по 25.09.2005 и прогноз на 2 суток (контрастная линия) в сравнении с данными наблюдений и измерений VLBI (обычная линия).

## **Глава IV. Фундаментальные составляющие ПВЗ в задаче высокоточной спутниковой навигации**

### **4.1. Модели параметров вращения Земли**

Достижение высокой точности эфемеридно-временного обеспечения навигационных спутниковых систем продолжает оставаться важнейшей задачей для ракетно-космической отрасли.

Одним из способов ее решения является повышение точности прогноза эфемерид спутников [1,3,45-50]. В настоящее время достаточно точный прогноз эфемерид, например, в системе Глобальной системы навигации (ГЛОНАСС), может быть выполнен на время не более 30 минут. Это обуславливает необходимость обновления эфемерид, передаваемых от спутников ГЛОНАСС потребителю каждые 30 минут.

Основополагающим моментом в данной проблеме является обеспечение возможности значительно более длительного времени прогноза эфемерид с сохранением их высокой точности. Так, высокоманевренные объекты не имеют возможности чтения передаваемых от навигационных спутников (НС) эфемерид, так как для этого требуется, чтобы спутник непрерывно находился в поле зрения антенны навигационного приемника (НП) минимум 30 секунд, а такая возможность для этих объектов не всегда обеспечивается. Например, космический аппарат (КА) после выведения и отделения от носителя имеет высокую угловую скорость. Задачей навигационной системы является определение орбиты КА сразу после отделения до включения системы управления ориентацией. Но из-за большой угловой скорости навигационные

спутники попадают в поле зрения антенны НП на короткое время, что не дает возможности чтения эфемерид, передаваемых от НС. В этом случае эфемериды должны быть заложены в НП на Земле со старта, а в самом приемнике должны быть реализованы алгоритмы высокоточного прогноза этих эфемерид на более длительный интервал времени.

Известно [1,45-50], что параметры вращения Земли (ПВЗ) играют важную роль в навигации и управлении движением КА. Знание текущих значений ПВЗ (углов прецессии и нутации, угловых координат земного полюса, рассогласование шкал времени  $dUT1$  между Всемирным временем  $UT1$  – неравномерным временем непосредственно связанным с вращением Земли, и Всемирным координированным временем  $UTC$  – Международным атомным временем  $TAI$ , скорректированным на целое число секунд для приближенного соответствия шкале  $UT1$ ) необходимо для точного взаимного преобразования инерциальной системы координат  $j2000$  в гринвичские системы координат  $WGS 84$  и  $ПЗ 90-02$ , а также точного прогнозирования орбит КА [2,37,68]. Однако если текущие значения матриц прецессии и нутации Земли являются хорошо прогнозируемыми и могут с высокой точностью автономно формироваться на борту КА, то координаты земного полюса  $(x_p, y_p)$ , а также рассогласование шкал времени  $dUT1$  нуждаются в периодической коррекции и не могут с высокой точностью автономно рассчитываться в бортовой цифровой вычислительной машине (ЦВМ) КА без участия Центра управления полетом (ЦУП). Принципиально эти данные могут ежедневно передаваться из ЦУПа на КА и обновляться в ЦВМ. Но для повышения автономности КА целесообразна

реализация на КА корректируемых моделей формирования ПВЗ, позволяющих существенно снизить частоту передачи этих параметров из ЦУП на КА.

Для построения алгоритма прогнозирования колебаний полюса Земли на различных интервалах времени используются модели (2.19), (3.6).

Для вариаций длительности суток и временной поправки dUT1 с учётом комбинационных гармоник гравитационно-приливных сил применяется обобщение модели (3.21) и (3.22):

$$\begin{aligned}
 l.o.d.(\tau) &= \sum_{i=1}^N [a_i \cos 2\pi v_i \tau + b_i \sin 2\pi v_i \tau] + c, \\
 [UT1 - UTC](\tau) &= \sum_{i=1}^N [A_i \cos 2\pi v_i \tau + B_i \sin 2\pi v_i \tau] + C_0 \tau + C_1.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь величины  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_{1,2}$ ,  $c$ , - неизвестные амплитуды соответствующих колебаний, подлежащие определению на основе данных наблюдений;  $v_i$  - частоты лунно-солнечного возмущения ( $v_1 = 1$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 13.25$ ,  $v_4 = 26.68$  и т.д.);  $\tau$  - время, измеряемое стандартными годами.

#### **4.2. Автономная высокоточная навигация КА на основе моделей прогнозирования ПВЗ**

Построенные на основе вышеуказанных моделей алгоритмы прогнозирования движения полюса  $(x_p, y_p)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
x_p = & 0.04229626792 - 0.1075454442 \sin(0.01456357202t) + \\
& + 0.01639898315 \cos(0.01720242384t) - \\
& - 0.1152415172 \cos(0.01456357202t) \\
& - 0.08654613622 \sin(0.01720242384t), \\
y_p = & 0.3199712685 + 0.1147148183 \sin(0.01456357202t) - \\
& - 0.07842621334 \cos(0.01720242384t) - \\
& - 0.1062834629 \cos(0.01456357202t) - \\
& - 0.01609896888 \sin(0.01720242384t),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

а также для для неравномерности осевого вращения Земли - изменения длительности суток *l.o.d.* и временной поправки dUT1:

$$\begin{aligned}
UT1 - TAI = & 66188.37768 - 1.859802170\tau - \\
& - 0.1665937280 \cos(0.4558642317\tau) + 0.8786906102 \cos(0.4599687301\tau) - \\
& - 0.09407175207 \sin(0.4609819528\tau) + 0.02130662690 \cos(0.9158570453\tau) - \\
& - 0.6895879054 \cos(0.1974838257\tau) - 5.590374376 \cos(0.03440484769\tau) - \\
& - 10.62185256 \sin(0.01720242384\tau) + 0.1131275223 \cos(0.4253987391\tau) - \\
& - 0.5091140900 \sin(0.2289642613\tau) - 0.2649868230 \sin(0.2270719947\tau) + \\
& + 0.3066218540 \cos(0.2270719947\tau) + 0.1215938138 \cos(0.2318886734\tau) + \\
& + 2.032395490 \sin(0.05160727151\tau) + 0.04793704530 \sin(0.6889398723\tau) - \\
& - 0.5513500543 \sin(0.4599687301\tau) - 0.2300830783 \sin(0.1974838257\tau) + \\
& + 0.06678471534 \cos(0.8848926825\tau) + 0.1401852469 \sin(0.4558642317\tau) + \\
& + 1.657822537 \cos(0.05160727151\tau) + 0.1977424654 \cos(0.4616593844\tau) + \\
& + 0.05225995591 \cos(0.6572358051\tau) + 0.1583956420 \cos(0.6889398723\tau) + \\
& + 0.1046129751 \sin(0.8848926825\tau) - 0.1114018078 \sin(0.9158570453\tau) - \\
& - 0.06933728917 \sin(0.4616593844\tau) - 5.453531500 \sin(0.03440484769\tau) - \\
& - 0.6591335156 \sin(0.2279820029\tau) + 0.1595314044 \cos(0.2279820029\tau) - \\
& - 0.1539043331 \sin(0.6572358051\tau) - 0.08714467681 \cos(0.6880969537\tau) + \\
& + 24.69911723 \cos(0.01720242384\tau) + 0.2498509536 \sin(0.4253987391\tau) - \\
& - 0.003032378636 \sin(0.6880969537\tau) - 0.01293620094 \cos(0.4609819528\tau) - \\
& - 2414.240927 \sin(0.0002866955957\tau) - 1516.454448 \cos(0.0002866955957\tau) + \\
& + 620.9518463 \cos(0.0009242862330\tau) + 125.9204437 \sin(0.0009242862330\tau)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

В приведённых формулах  $\tau$  измеряется в сутках MJD ( $\tau = 0$  соответствует 17.11.1858, 00 час, 00 мин);  $x_p, y_p$  формируются в угловых секундах, UT1-TAI – в миллисекундах.

Выражения для (4.2) и (4.3) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}x_p &= x_{p0} + f_x(\tau), \\y_p &= y_{p0} + f_y(\tau), \\dUT1 &= d_0 + d_1\tau + f_d(\tau).\end{aligned}\tag{4.4}$$

Здесь  $x_{p0}, y_{p0}, d_0, d_1$  - константы,  $f_x(\tau), f_y(\tau), f_d(\tau)$  - гармонические составляющие модели.

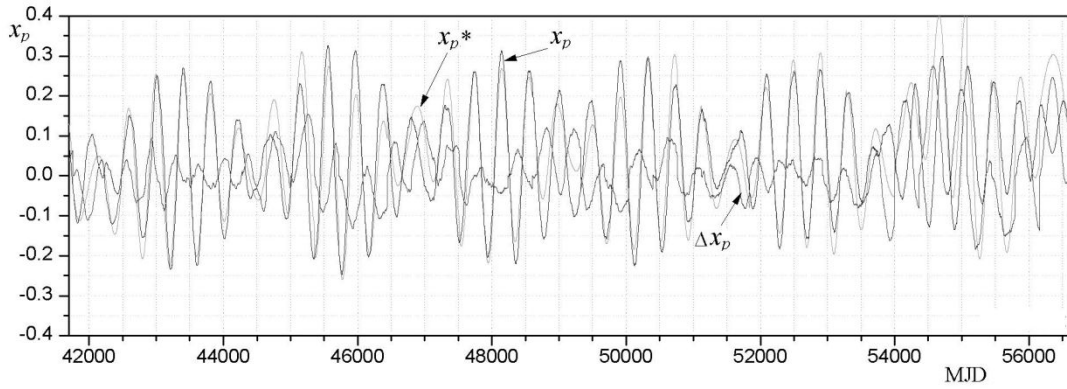
Модели (4.2) и (4.3) получены по большому, почти сорокалетнему интервалу времени в соответствии с реальными данными соответствующих величин  $x_p, y_p, UT1-TAI$  в период с 1973 по 2012 гг. Найденные параметры, входящие в соответствующие модели, максимальным образом приближают модель к реальным данным на всём интервале в целом. Однако если говорить о локальных достаточно коротких интервалах времени, то выбором соответствующих параметров модели можно обеспечить более точное её приближение к реальным данным на этом коротком интервале. Соответственно, прогноз на интервал времени, соизмеримый с выбранным интервалом, будет более точен по сравнению с данными моделей (4.2) и (4.3). В идеале для локального интервала времени по реальным измерениям можно было бы корректировать все параметры моделей (2.19), (3.6) и (4.1), включая и параметры их гармонических составляющих.

Определим зависимость точности прогнозируемых значений координат полюса Земли от длительности интервала коррекции параметров модели. На

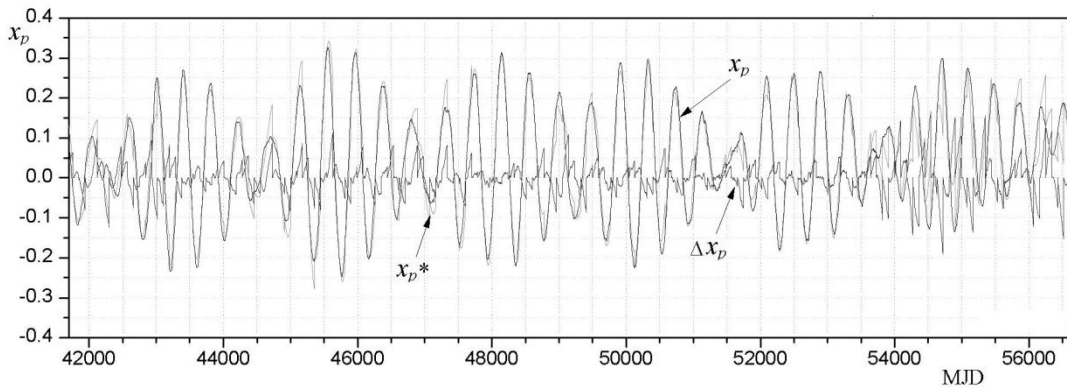
рисунок 23 приведены графики реальных координат полюса  $x_p$  на интервале времени 1973-2012 гг., прогнозируемые координатой  $x_p^*$  и ошибки прогноза  $\Delta x = x_p - x_p^*$  при коррекции модели с интервалом 360 суток (а), 90 суток (б), 30 суток (в), 7 суток (г).

Из приведенных графиков следует, что при абсолютных величинах смещения полюса в диапазоне  $\pm 0.3''$  ошибки годового прогноза (для  $T = 360$  сут) имеют такой же порядок  $0.3''$ . При трехмесячном прогнозе ( $T = 90$  сут) ошибки прогноза составляют величину порядка  $0.1''$ , ошибки месячного прогноза ( $T = 30$  сут) ошибки прогноза составляют величину порядка  $0.03''$ , а при недельном прогнозе ( $T = 7$  сут) – величину  $0.01''$ . Аналогичная точность прогноза обеспечивается и для координаты  $y_p$ . Это означает, например, что если из ЦУП на КА раз в месяц будут передаваться реальные значения текущих координат полюса Земли  $x_p, y_p$ , то при выполнении на борту КА коррекции параметров модели с использованием формул (4.4) в течение последующего месяца (до выполнения очередной коррекции) координаты полюса будут прогнозироваться с точностью, не хуже  $0.03''$ , что соответствует величине реального смещения полюса на поверхности Земли в 1 метр.

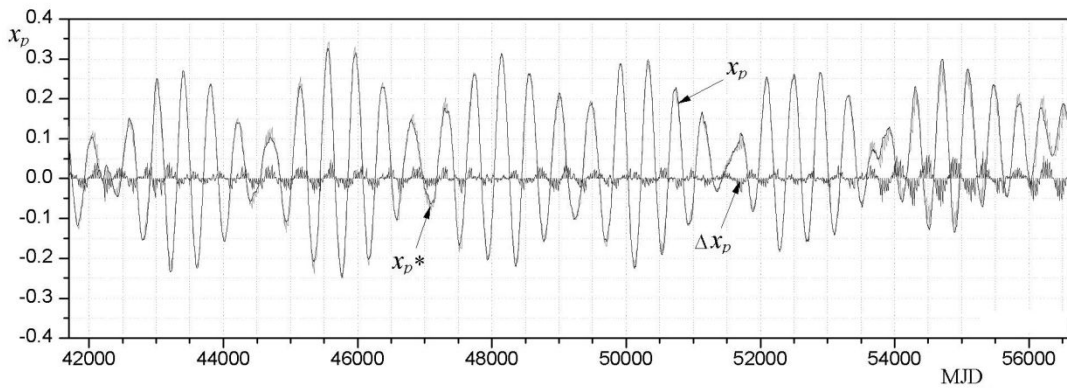
Определим также зависимость точности прогноза рассогласования  $dUT1$  от длительности интервала  $T$ . На рисунке 24 приведены графики реальных значений рассогласования  $dUT1$  на интервале времени от 1973 до 2012 гг., прогнозируемых значений  $dUT1^*$  и ошибки прогноза  $\Delta dUT1$  при коррекции модели с интервалом 360 суток (а), 90 суток (б), 30 суток (в), 7 суток (г).



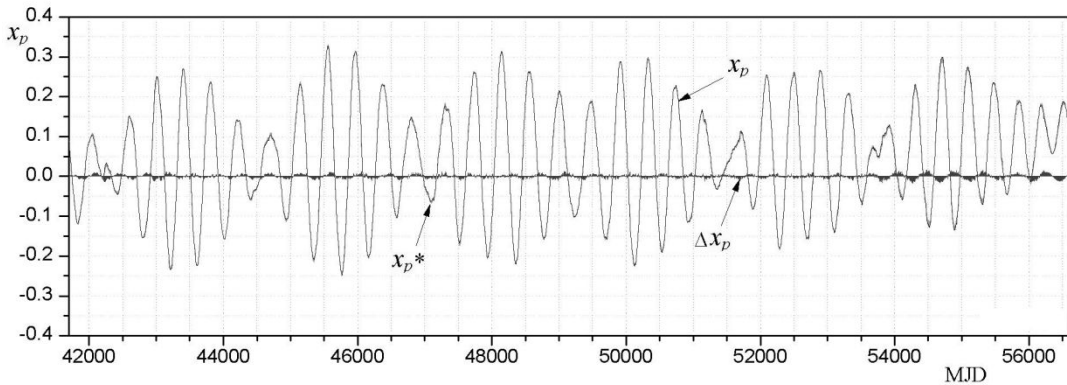
а)



б)



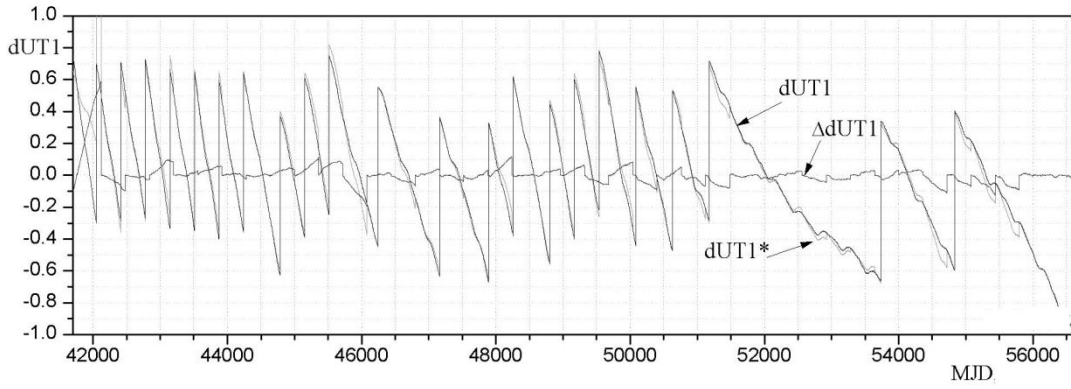
в)



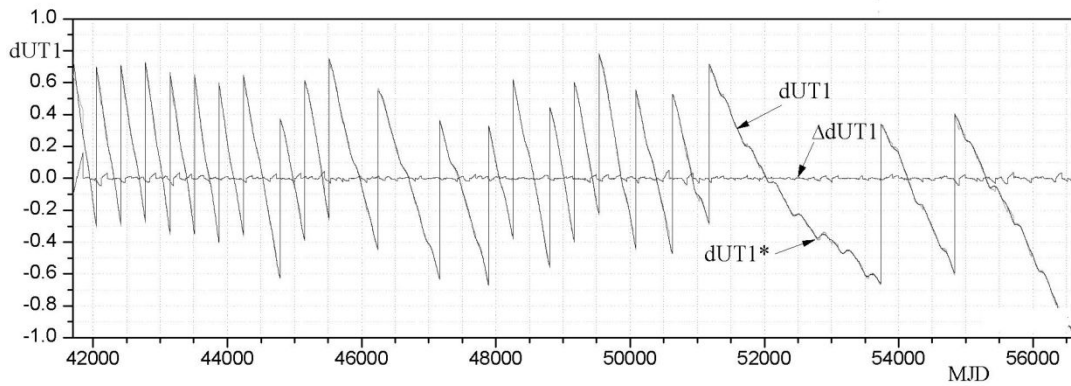
г)

**Рисунок 23** Графики реальных и прогнозируемых значений  $x_p$ ,  $x_p^*$  и ошибок прогноза  $\Delta x_p$  при коррекции модели с интервалом 360 суток (а), 90 суток (б), 30 суток (в) и 7 суток (г).

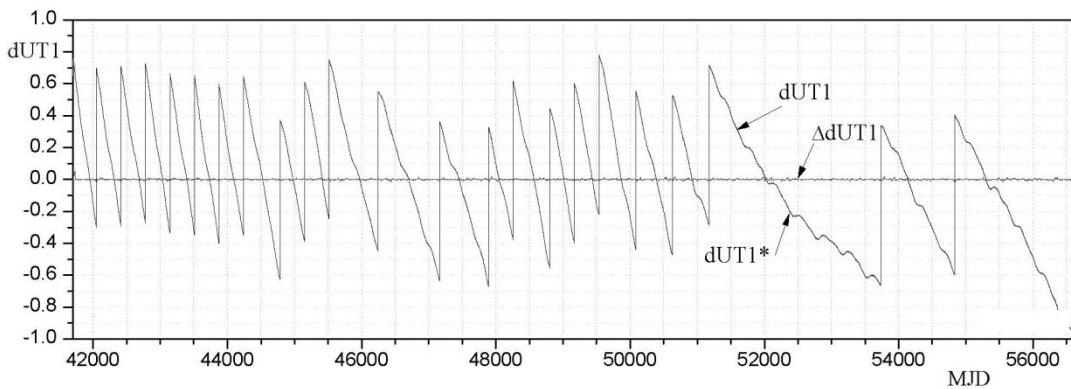




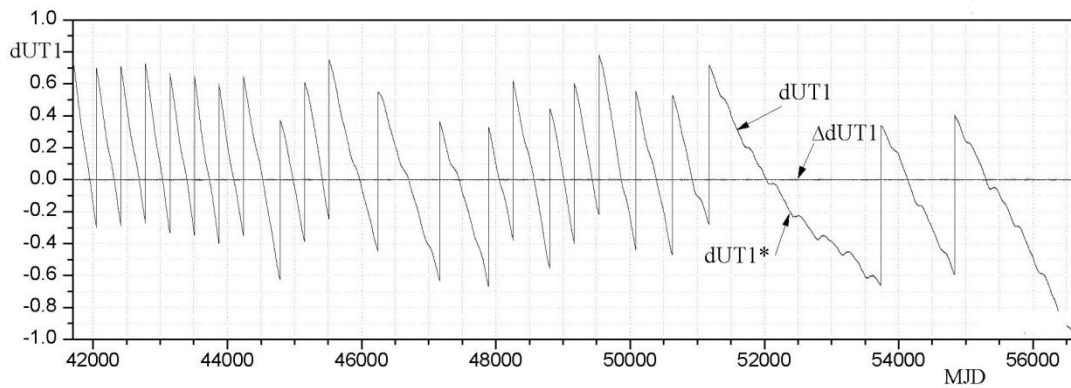
а)



б)



в)



г)

**Рисунок 24.** Графики реальных и прогнозируемых значений  $dUT1$ ,  $dUT1^*$  и ошибок прогноза  $\Delta dUT1$  при коррекции модели с интервалом 360 суток (а), 90 суток (б), 30 суток (в) и 7 суток (г).

Из графиков следует, что при абсолютных величинах рассогласования  $dUT1$ , находящихся в диапазоне  $\pm 1$  с, ошибки годового прогноза (для  $T = 360$  суток) находятся в диапазоне  $\pm 0,1$  с, ошибки трехмесячного прогноза (для  $T = 90$  суток) находятся в диапазоне  $\pm 0,03$  с, ошибки месячного прогноза (для  $T = 30$  суток) находятся в диапазоне  $\pm 0,01$  с, ошибки недельного прогноза (для  $T = 7$  суток) - в диапазоне  $\pm 0,003$  с.

Приведенные результаты позволяют в зависимости от требований к точности формирования на борту КА параметра рассогласования  $dUT1$  определять необходимую частоту передачи из ЦУП на борт очередного реального значения  $dUT1$  для выполнения коррекции бортовой модели. Например, при передаче очередных данных на борт КА с периодичностью 30 суток точность формирования на борту параметра  $dUT1$  будет не хуже  $\pm 0.01$  с. Для определенности укажем, что такая точность обеспечит формирование матрицы перехода от инерциальной системы координат j2000, в которой происходит ориентация КА по звездам, к гринвичской, в которой выполняются все технические эксперименты, связанные с наблюдением земных объектов, с точностью 0.15". Такой точности достаточно для выполнения большинства навигационных задач.

## Заключение

В заключении приведём основные результаты диссертационной работы:

1. На основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля получена численно-аналитическая модель колебаний полюса Земли под воздействием лунно-солнечных гравитационно-приливных моментов сил и возмущений меняющегося со временем геопотенциала.
2. Дан сравнительный анализ результатов численного моделирования колебаний координат земного полюса с данными измерений МСВЗ. Показано, что во время проявления аномальных флуктуаций в колебательном процессе полюса Земли точность годового прогноза согласно уточнённой модели выше точности прогноза основной модели.
3. Изучены нерегулярные явления в колебательном процессе земного полюса, которые обладают существенным разнообразием. Дано качественное объяснение этим явлениям, что способствует улучшению точности прогноза траектории движения полюса в периоды значительных аномалий.
4. Проведён амплитудно-частотный анализ малопараметрической модели внутрисуточного колебательного процесса земного полюса. Даны результаты амплитудно-частотного анализа колебательного процесса полюса и вариации второй зональной гармоники  $c_{20}$  геопотенциала.
5. На основе полученных результатов интерполяции и прогноза колебаний полюса показано, что совместное моделирование динамических процессов (учёт временных вариаций геопотенциала) позволяет уточнить аналитическую модель и улучшить прогноз траектории движения полюса.

6. Приведены долгосрочные математические модели фундаментальных составляющих ПВЗ (колебаний полюса и рассогласования  $dUT1$  временных шкал UT1 и UTC). Показано, что предложенные модели обеспечивают достаточную автономность в формировании ПВЗ на борту КА. Учёт этих параметров в реальном времени необходим для решения задач навигационного обеспечения. Построены графики ошибок прогноза полюса  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$  и  $\Delta dUT1$  при коррекции модели для различных интервалов времени.

## Список литературы

1. *Абалакин В. К.* Основы эфемеридой астрономии. - М.: Наука. 1979. 448 с.
2. *Авсюк Ю. Н.* Приливные силы и природные процессы. - М.: Изд-во ОИФЗ. 1996. 188 с.
3. *Аксёнов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли - М.: Наука, 1977. 360 с.
4. *Аксенов Е.П.* Специальные функции в небесной механике. - М., Наука. 1986. 320 с.
5. *Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С.* Вращательно-колебательные процессы движения Земли в временные вариации коэффициентов геопотенциала // *Астрономический журнал.* 2015. Т.92. №4. С. 365.
6. *Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Ларьков И.И., Рожков С.Н., Крылов С.С., Перепёлкин В.В., Почукаев В.Н., Филиппова А.С.* Фундаментальные составляющие параметров вращения Земли в задачах спутниковой навигации. // *Вестник МАИ.* 2014. Т.21. №2. С.146-157.
7. *Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Почукаев В.Н.* Высокоточный прогноз орбит космического аппарата как результат рационального выбора возмущающих факторов // *Доклады академии.* 2014. Т. 457. №2. С. 170
8. *Крылов С.С., Марков Ю.Г., Нгуен Ле Зунг, Филиппова А.С.* Внутрисуточный анализ колебаний полюса Земли // *Космонавтика и ракетостроение.* 2014. №1 (74). С. 106-112.

9. *Акуленко А.Д., Марков Ю.Г., Нгуен Ле Зунг, Переёлкин В.В.* Неравномерности вращения Земли и проблема нестабильности шкал времени // Доклады академии наук. 2012. Т. 442(4). С. 468-473.
10. *Крылов С.С., Марков Ю.Г., Переёлкин В.В.* Амплитудно-частотный анализ внутрисуточного колебательного процесса земного полюса // Доклады академии наук. 2013. Т. 449. №6. С. 661.
11. *Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Переёлкин В.В., Филиппова А.С.* Численно-аналитическое моделирование возмущённых колебательных движений полюса Земли // Изв. РАН. МТТ. 2014. №6. С. 105-119.
12. *Акуленко Л. Д., Киселев М.Л., Марков Ю. Г.* Уточненная модель неравномерности вращения Земли // Космические исследования. 2012. Т. 4(65). С. 13-19.
13. *Акуленко Л.Д., Марков Ю.Г., Переёлкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С.* Анализ вращательно-колебательных процессов параметров вращения Земли в коротком интервале времени // Астрономический журнал. 2013. Т. 90.№5. С. 432.
14. *Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. и др.* Высокоточный прогноз движения полюса Земли // Астрономический журнал. 2006. Т. 4(83). С. 376-384.
15. *Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. и др.* Гравитационно-приливной механизм колебаний полюса Земли // Астрономический журнал. 2005. Т. 10(82). С. 950-960.

16. Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А., Марков Ю. Г. и др. Прогноз движения полюса деформируемой Земли вращения Земли // *Астрономический журнал*. 2006. Т. 10(79). С. 952-960.
17. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Внутригодовые неравномерности вращения Земли // *Астрономический журнал*. 2008 Т. 3(85). С. 9-12.
18. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Моделирование движения полюса Земли на коротком интервале // *Доклады академии наук*. 2009. Т. 2(425). С. 326-331.
19. Акуленко Л. Д., Марков Ю. Г., Перепелкин В. В. Небесномеханическая модель неравномерности вращения Земли // *Космические исследования*. 2009. Т. 5(47). С. 452-459.
20. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. Движение полюса Земли // *Доклады академии наук*. 2002. Т. 382(2). С. 199-205.
21. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. Моделирование движения полюса деформируемой Земли // *Доклады академии наук*. 2001. Т. 379(2). С. 191-195.
22. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. Модель гравитационно-приливного механизма возбуждения колебаний полюса Земли // *Доклады академии наук*. 2005. Т. 400(6). С. 758-763.
23. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Анализ влияния многочастотных воздействий на колебания полюса Земли // *Астрономический журнал*. 2007. Т. 84(5). С. 471-478.

24. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В.* Модель движения полюса деформируемой Земли, адекватная астрометрическим данным // *Астрономический журнал.* 2002. Т. 79(1). С. 81-89.
25. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В.* Прогноз движения полюса деформируемой Земли // *Астрономический журнал.* 2002. № 10. С. 952-960.
26. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Физматлит, 1963.
27. *Бондаренко В.В., Перепелкин В.В.* Вращательно-колебательные движения деформируемой Земли вокруг центра масс // *Изв. РАН. МТТ.* 2009. № 5. С. 25-35.
28. *Бондаренко В.В., Перепелкин В.В.* Моделирование и анализ колебательного процесса полюса Земли // *Изв. РАН. МТТ.* 2007. № 2. С. 28-35.
29. *Вулард Э.* Теория вращения Земли около центра масс. - М.: Физматгиз, 1963. 167 с.
30. *Григорьяна А. Т., Погребысского И. Б.* История механики (с конца XVIII века до середины XX века). - М.: Наука, 1972. 415 с.
31. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. — М.: Наука, 1968. 799 с.
32. *Дубошин Г. Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М. : Наука, 1971. 584 с.
33. *Ишлинский А. Ю.* Механика относительного движения и силы инерции. - М.: Наука, 1981. 192 с.



34. *Киселев В. М.* Неравномерность суточного вращения Земли. - Новосибирск : Наука, 1980. 149 с.
35. *Красовский А.А.* (ред.). Справочник по теории автоматического управления. - М.: Наука, 1987.
36. *Крылов С.С., Филиппова А.С., Нгуен Ле Зунг* Внутрисуточный анализ колебаний полюса Земли // Космонавтика и ракетостроение. 2014. Т. 91(3). С. 251-260.
37. *Л. Эйлер.* Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академией наук СССР. - М.: Изд-во АН СССР, 1958. 611 с.
38. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы математической статической теории обработки наблюдений. - М.: Физматиз, 1962. 352 с.
39. *Малахов А. Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. - М.: Физматлит, 1968.
40. *Манк Н., Макдональд Г.* Вращение Земли. - М.: Мир. 1964. 384 с.
41. *Марков Ю. Г., Михайлов М. В., Почукаев В. Н.* Учет фундаментальных составляющих параметров вращения земли в формировании высокоточной орбиты навигационных спутников // Доклады академии наук. 2012. Т. 1. С. 37-41.
42. *Марков Ю. Г., Михайлов М. В., Почукаев В. Н.* Фундаментальные составляющие параметров вращения земли в формировании высокоточных систем навигации космических аппаратов // Доклады академии наук. 2013. Т. 3(451). С. 283-287.

43. *Марков Ю. Г., Синицын И.Н.* ДАН. Флуктуационно-диссипативная модель движения полюса деформируемой Земли // Доклады академии наук. 2002. Т. 387(4). С. 482-486.
44. *Марков Ю. Г., Синицын И.Н.* Спектрально-корреляционная модель флуктуаций чандлеровских колебаний полюса Земли // *Астрономический журнал*. 2006. Т. 83(10). С.950-958.
45. *Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С., Нгуен Ле Зунг.* Моделирование внутрисуточного колебательного процесса земного полюса // *Астрономический журнал*. 2014. Т. 58(3). С.194-203.
46. *Скоробогатых И.В., Тимошин Д.С., Филиппова А.С.* Многочастотный процесс возмущенных движений Земли в рамках задачи трех тел // *Космонавтика и Ракетостроение*. 2012. 4(69). С. 121-127.
47. *Филиппова А.С.* Модель возмущенного движения Земли на внутрисуточном интервале времени в рамках задачи трех тел // *Материалы XXXXII Всероссийского симпозиума Механика и процессы управления*. Т.2. Миасс. С. 132-139.
48. *Filippova A., Markov Yu., Rykhlova L.* Rotational-oscillatory motion of the deformable Earth in the short time intervals // *Book of abstracts Journées 2013 Systèmes de reference spatio-temporels “Scientific developments from highly accurate space-time reference systems”*. Парижская обсерватория. 16-18.09 2013. С. 13.
49. *Markov Yu.G., Filippova A.S.* Numerical-analytical modeling of the Earth’s pole oscillations // *Book of abstracts Journées 2014 Systèmes de reference spatio-*

- temporels “Resent development and prospects in ground-based and space astrometry” Обсерватория Пулково. Санкт-Петербург. 22-24.09.2014.
50. *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: теория и наблюдения. - Киев: Наукова думка. 1992. 512 с.
51. *Одуан К.* Измерение времени. Основы GPS. - М. : Техносфера, 2002. 400 с.
52. *Подобед В. В., Нестеров В. В.* Общая астрометрия. 2-е изд. - М. : Наука, 1982. 576 с.
53. *Пугачев В. С., Сеницын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. - М.: Наука, 1990.
54. *Пугачев В. С., Сеницын И.Н.* Теория стохастических систем. - М.: Логос, 2004.
55. *Сидоренков Н.С.* Физика нестабильностей вращения Земли. - М.: Наука; Физматлит. 2002. 384 с.
56. *Capitaine N., Guinot B., McCarthy D.D.* Definition of the Celestial Ephemeris origin and UT1 in the International Reference Frame // *Astron. Astrophys.* 2000. 355. P. 398-405p.
57. *Chandler S.* On the variation in latitude // *Astron. J.*, 1891. V. 11. P. 83.
58. *Curtis Howard D.* Orbital mechanics for engineering students. Second edition. Elsevier, 2009. 722 p.
59. *Gear C. William.* Numerical initial value problems in ordinary differential equations. — New Jersey : Prentice-Hall, 1971. 251 p.
60. *Guinot B.* The Chandlerian nutation from 1900 to 1980 // *Geophys. J. Roy. Soc.* 1982. V. 71. P. 295- 301.
61. Institut géographique national. URL: <http://www.ign.fr>.

62. *Kaplan George H. Circular* NO. 179. The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales and Earth Rotation Models: Explanation and Implementation. — Washington D.C. : U.S. Naval Observatory, 2005. — 104 p.
63. Tapley Byron D. *Statistical Orbit Determination*. Elsevier, 2004. 547 p.
64. VLBI Observing programs: CONT'94, CONT'05, CONT'08, CONT'11  
<http://ivs.nict.go.jp/mirror/program/>.
65. IERS Annual Reports, 1990–1999, eds W.Dick, B.Richter, International Earth Rotation and Reference Systems Service, Central Bureau (Observatoire de Paris, 1991–2000); IERS Annual Reports, 2000 – 2002 eds W.Dick, B.Richter, International Earth Rotation and Reference Systems Service, Central Bureau (Frankfurt am Mein: BKG, 2001– 2003).
66. *Баркин Ю.В.* Вращательное движение тел солнечной системы. В книге: Пионеры освоения космического пространства (А89-42451 18-99). - М.:Наука, 1988, С. 161-171.
67. *Баркин Ю.В., Демин В.Г., Панкратов А.А., Марков Ю.Г.* Переменные Пуассона, Андуайе и Шарлье в небесной механике и динамике твердого тела // Сборник научно-методических статей по теоретической механике.- М.: Высшая школа. 1982. Вып.12, С. 92-100.
68. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. - М.: Наука. 1965. 416с.
69. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308с.

70. *Вильке В.Г., Марков Ю.Г.* Эволюция поступательно-вращательного движения вязкоупругой планеты в центральном поле сил // *Астрономический журнал*. 1988. Т. 65. Вып. 4. С. 861–867.
71. *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* *Новые качественные методы в небесной механике*. - М.: Наука, 1971.
72. *Дубошин Г.Н.* (1975) *Небесная механика. Основные задачи и методы*. М., Наука. 1975, 800 стр.
73. *Козлов В.В.* (1980) *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*. М. Изд-во МГУ, 1980, 232 р.
74. *Марков Ю.Г., В. В. Перепелкин, И. Н. Сеницын, Н. Н. Семендяев* “Информационные модели неравномерности вращения Земли”// *Информ. и её примен.*, 5:2 (2011), 17–35
75. *Kinoshita H.* Theory of Rotation of the Rigid Earth.// *Celest. Mech.*, 1977, v.15, pp.277-326.
76. *Vondrak Jan* Secular polar motion – reality or artefact? // *Кинематика и физика небесных тел. Приложение*. 1999. Киев, N1. С. 131-136.
77. *Barkin Yu.V., Ferrandiz, J.M.* Elliptical Chandler pole motions of the Earth and Mars. // *EGU General Assembly 2010, held 2-7 May, 2010 in Vienna, Austria*, p.2936.
78. *Мельхиор П.* *Физика и динамика планет (2 ч., 4 т.)* - М.: Мир, 1975.